בניות מפתיעות עם סרגל ומחוגה

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 2.1

4 בספטמבר 2020

תוכן עניינים

הקדמה

אינני זוכר מתי ראיתי את המאמר של Godfried Toussaint [11] על "מחוגה מתמוטטת", אבל הוא עשה עלי רושם חזק. לעולם לא עלה על דעתי שהמחוגה המודרנית איננה אותה מחוגה שאוקלידס התכוון אליה. במסמך זה אני מציג את המחוגה המתמוטטת ונושאים אחרים מפתיעים בבניות גיאומטריות. אין כאן מתמטיקה גבוהה יותר ממה שנלמד בבית הספר התיכון, אבל חלק מהחומר די מורכב ודורש נכונות להתמודד עם בניות מסובכות והוכחות ארוכות. הפרקים מסודרים לפי קושי עולה (לפי ההערכה שלי).

המחוגה המתמוטטת אוקלידס הראה שעבור כל בנייה עם מחוגה קבועה, קיימת בנייה שקולה עם מחוגה מתמוטטת. ההצגה אינה קשה ומשתמשת רק בגאומטריה של מעגלים ומשולשים. לאורך השנים ניתנו הוכחות שגויות רבות, מבוססות על תרשימים שאינם נכונים בכל מצב. כדי להדגיש שאין לסמוך על תרשימים, הבאתי את "ההוכחה" המפורסמת שכל משולש שווה שוקיים.

חלוקת זווית לשלושה חלקים היוונים חיפשו בנייה שתחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים. רק במאה ה־19 הוכח שהבנייה אינה אפשרית. למעשה, אין לבעייה שום משמעות מעשית כי ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים עם כלים מעט יותר משוכללים ממחוגה וסרגל. אפילו סרגל עם שני סימנים עליו מספיק. פרק זה מביא שלוש בניות, כאשר שתי הבניות הראשונות פשוטות, והשלישי דורש ידע מסויים גם בטריגונמטריה וגבולות.

ריבוע מעגל בעייה שנייה שהיוונים העלו היא ריבוע מעגל: נתון מעגל, בנה ריבוע עם שטח זהה. הבנייה שקולה לבניית קטע קו באורך π, וגם בעייה זו הוכחה כבלתי ניתנת לפתרון. פרק זה מביא שלוש בניות של קירובים ל־π, אחת של Kochansky מ־1685, ושתיים של Ramanujan מ־1913.

בנייה עם מחוגה בלבד מי אומר שצריך גם מחוגה וגם סרגל? כבר לפני מאות שנים, הוכיחו Georg Mohr ו־Lorenzo Mascheroni שניתן להסתפק במחוגה בלבד. אין קושי מיוחד בהוכחה אבל היא ארוכה מאוד ונדרשת מידה רבה של סבלנות ונחישות כי לעקוב אחריה.

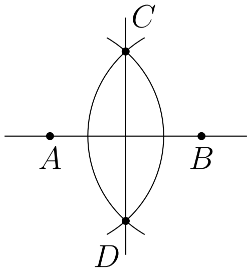
בנייה עם סרגל בלבד האם צריך מחוגה? עם סרגל אפשר לחשב רק חישובים לינאריים לעומת מחוגה שמאפשרת חישובים עם שורש ריבועי. אבל, ב־1833 Jakob Steiner הוכיח שאפשר להסתפק בסרגל בלבד בתנאי שקיים אי־שם במישר מעגל אחד. ההוכחה משתמשת רק בגיאומטריה אבל גם היא ארוכה מאוד.

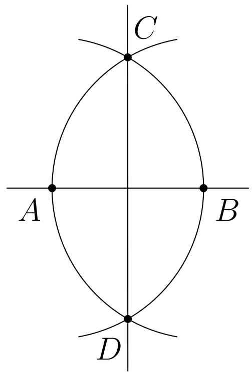
משולשים עם אותו שטח ואותו היקף פרק זה עוסק בנושא גיאומטרי שאינו בנייה אבל הוא מרתק ביותר. השאלה היא האם שני משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חייבים להיות חופפים? התשובה היא לא, אבל מציאת זוגות לא חופפים מחייבת מסע דרך הרבה טריגונומטריה. לפרק הוספתי הוכחה אלגנטית לנוסחה של הרון לשטח של משולש.

פרק 1 אמא'לה, המחוגה שלי התמוטטה!

1.1 מחוגה קבועה ומחוגה מתמוטטת

במחוגה מודרנית ניתן לקבע את המרחק בין שתי הרגליים, וכך להעתיק קטע קו או מעגל ממקום למקום. נקרא למחוגה זו: "מחוגה קבועה". בספרי לימוד גיאומטריה ניתן למצוא בנייה של אנך אמצעי לקטע קו על ידי בניית שני מעגלים שמרכזם על הקו, ובלבד שהרדיוס **גדול ממחצית המרחק בין המרכזים**, כפי שניתן לראות בתרשים השמאלי:

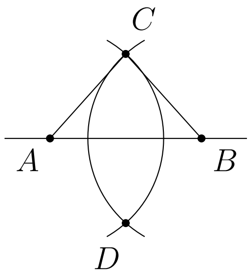


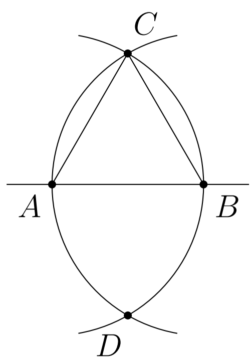


אוקלידס השתמש במחוגה "מתמוטטת" (collapsing), שרגליה מתקפלות כאשר מרימים אותה מהנייר. מחוגה המורכבת מגיר הקשור לחוט היא מחוגה מתמוטטת, כי אי־אפשר לשמור את הרדיוס כאשר מרימים אותה מהלוח. התרשים הימני למעלה מראה בנייה של אנך אמצעי באמצעות מחוגה מתמוטטת: האורך של AB שווה כמובן לאורך של BA, ולכן למעגלים רדיוס זהה.

הוכחת הנכונות של הבנייה הראשונה היא לא פשוטה, כי צריך להשתמש במושגים יחסית מתקדמים כגון משולשים חופפים. בבנייה השנייה קל להוכיח שמתקבל משולש שווה צלעות. האורך של AC שווה לאורכו של AB, כי שניהם רדיוסים של אותו מעגל, ומאותה סיבה האורך של BC שווה לאורכו של BA. מכאן:

$$AC = AB = BA = BC\,.$$

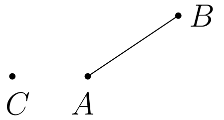


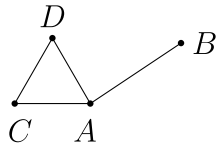


הבנייה של משולש שווה צלעות היא המשפט הראשון בספר של אוקלידס. המשפט השני מראה שאפשר להעתיק קטע קו עם מחוגה מתמוטטת, ולכן המחוגה הקבועה לא מוסיפה יכולת חדשה. Toussaint [11] הראה שפורסמו הוכחות שגויות רבות של המשפט, ודווקא אוקלידס הוא זה שנתן הוכחה נכונה! אציג את הבנייה של אוקלידס ביחד עם הוכחת הנכונות. אחר כך אציג בנייה שגויה.

1.2 העתקת קטע קו לפי אוקלידס

משפט: נתון קטע קו AB ונקודה C (תרשים משמאל), ניתן לבנות (עם מחוגה מתמוטטת) בנקודה C קטע קו שאורכו שווה לאורכו של AB:





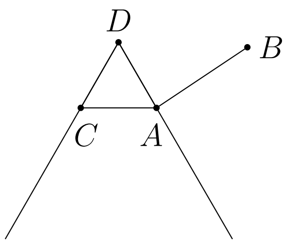
הבנייה:

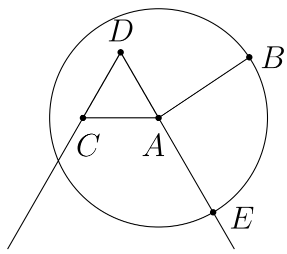
חברו בקו את הנקודות A ו־C.

בנו משולש שווה צלעות שבסיסו AC. לפי המשפט הראשון של אוקלידס הבנייה אפשרית עם מחוגה מתמוטטת. סמנו את הקודקוד של המשולש ב־D (תרשים ימני למעלה).

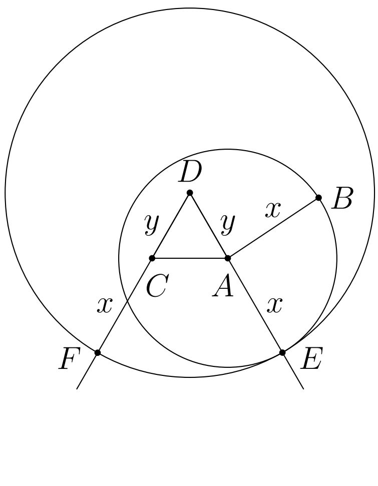
בנו קרן בהמשך של DA וקרן בהמשך של DC (התרשים משמאל).

בנו מעגל שמרכזו A עם רדיוס AB. סמנו E, החיתוך של המעגל עם הקרן DE (תרשים מימין).





בנו מעגל שמרכזו D עם רדיוס DE. סמן את החיתוך של הקרן DC עם המעגל ב־F:



טענה: אורכו של קטע הקו CF שווה לאורך קטע הקו AB.

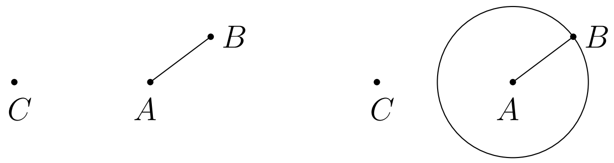
הוכחה: $DC = DA$ כי $\triangle ACD$ שווה צלעות. $AE = AB$ כי שניהם רדיוסים של המעגל שמרכזו A. $DF = DE$ כי שניהם רדיוסים של המעגל שמרכזו D. אורכו של CF הוא:

$$CF = DF - DC = DE - DC = DE - DA = AE = AB\,.$$

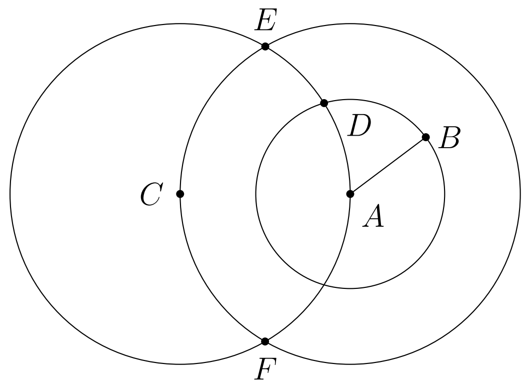
1.3 העתקה שגויה של קטע קו

בנייה ([7]):

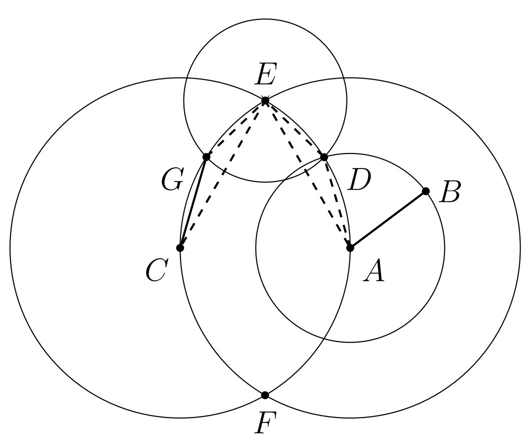
בנו מעגל שמרכזו A עם רדיוס AB:



בנו מעגל שמרכזו A עם רדיוס AC ומעגל שמרכזו C עם רדיוס $AC = CA$. סמנו את נקודות החיתוך של המעגלים ב־E, F. סמנו את נקודת החיתוך של המעגל שמרכזו C עם המעגל שמרכזו A עם רדיוס AB ב־D:



בנו מעגל שמרכזו E עם רדיוס ED. סמנו ב־G את החיתוך של המעגל עם המעגל שמרכזו A עם רדיוס AC:



טענה: ארכו של CG שווה לאורכו של AB.

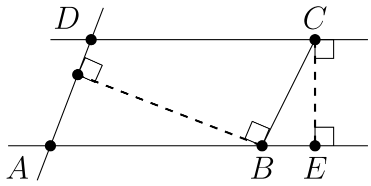
הוכחה: נראה ש־$\triangle CGE \cong \triangle ADE$. אם כן, $CG = AD = AB$ כי AD, AB הם רדיוסים של המעגל הקטן שמרכזו A. למעגל שמרכזו C אותו רדיוס כמו למעגל שמרכזו A ועובר דרך E. לכן, ניתן להתייחס אליהם כ־"אותו" מעגל.

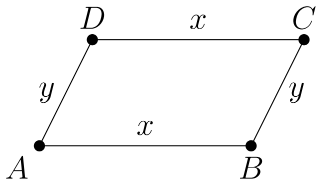
$EG = ED$ כי הם רדיוסים של המעגל שמרכזו E, ו־$EC = EA$ כי הם רדיוסים של "אותו" מעגל. $\angle GCE = \angle DAE$ כי הן זוויות מרכזיות על "אותו" מיתר, ו־$\angle CGE = \angle ADE$ כי הן זוויות היקפיות על "אותו" מיתר. לכן, $\angle GEC = \angle DEA$ ו־$\triangle GEC \cong \triangle DAE$ לפי צ.ז.צ.

אין שום שגיאה בהוכחה! השגיאה נובעת ממקור אחר: השווין $AB = GC$ מתקיים רק כאשר אורכו של AB קטן מאורכו של AC. הבנייה של אוקלידס נכונה ללא קשר לאורך היחסי של הקווים ולמיקום של הנקודה C ביחס לקטע הקו AB [11].

1.4 דרך "פשוטה יותר" להעתקת קטע קו

נתון קטע קו AB ונקודה C, אם נוכל לבנות מקבילית כאשר A, B, C הן קודקודים, ונסמן את הקודקוד הרביעי ב־D. DC הוא קטע קו עם הנקודה C בקצה אחד, ו־$DC = AB$ (תרשים שמאלי) [עמ' 207–208 ,12].





בנייה (תרשים מימין):

חברו את B ו־C.

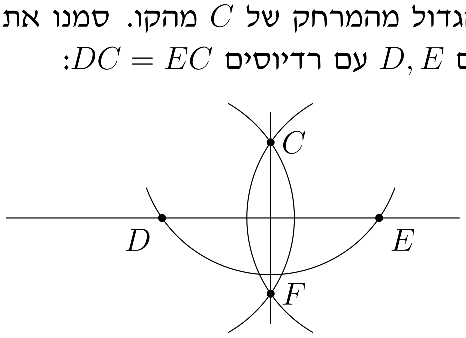
בנו אנך מ־C לקו המכיל את הקטע AB. סמנו את נקודת החיתוך ב־E.

בנו אנך לקטע CD מהנקודה C. אנך זה מקביל ל־AB.

באותה דרך בנו קו המקביל ל־BC דרך A. סמנו את נקודת החיתוך של שני הקווים ב־D.

$AB \| DC$, $AD \| BC$ ולפי ההגדרה $ABCD$ הוא מקיבילית. לכן, $AB = CD$ כפי שנדרש.

בנייה עם מחובה מתמוטטת: נראה איך לבנות אנך דרך נקודה נתונה עם מחוגה מתמוטטת. בנו מעגל שמרכזו C עם רדיוס הגדול מהמרחק של C מהקו. סמנו את נקודות החיתוך שלו עם הקו ב־D, E. בנו מעגלים שמרכזם D, E עם רדיוסים $DC = EC$:

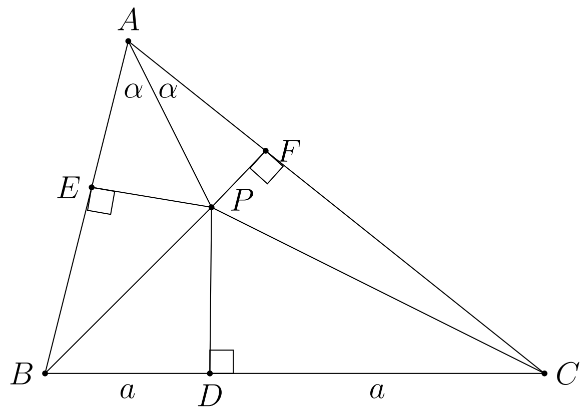


הקן בין נקודות החיתוך של המעגלים C, F הוא אנך לקו דרך הנקודה C.

הוכחת הנכונות של בנייה זו מסובכת הרבה יותר מההוכחה של אוקלידס לבנייה שלו.

1.5 אין לסמוך על תרשים

בסעיף 1.3 ראינו שאין לסמוך על ציור. הנה הוכחה "נכונה" ש**כל** משולש שווה שוקיים!

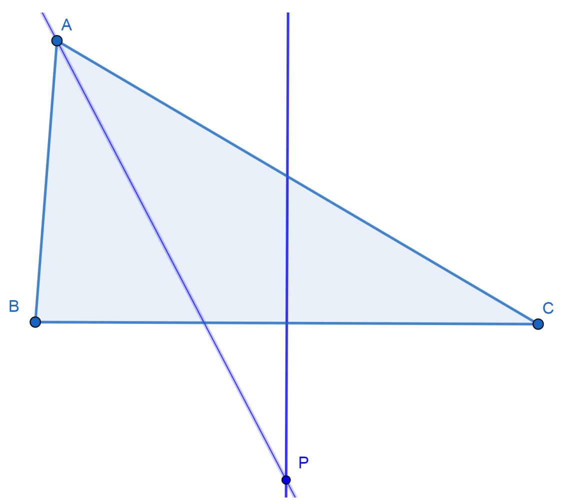


נתון משולש שרירותי ABC, תהי P נקודת החיתוך בין חוצה הזווית של $\angle BAC$ לבין האנך האמצעי של BC. סמנו ב־D, E, F את נקודות החיתוך של האנכים מ־P לצלעות BC, AB, AC.
$\triangle APF \cong \triangle APE$ כי הם משולשים ישר זווית עם זוויות שוות α וצלע AP משותף.

$\triangle DPC \cong \triangle DPB$ לפי צ.ז.צ. כי PD הוא צלע משותף, $\angle PDB = \angle PDC = 90°$, ו־$BD = DC = a$ כי PD הוא האנך האמצעי ל־BC. $\triangle EPB \cong \triangle FPC$, כי $EP = PF$ לפי החפיפה הראשונה, ו־$PB = PC$ לפי החפיפה השנייה. נחבר את השוויונות ונקבל ש־$\triangle ABC$ שווה שוקיים:

$$AB = AE + EB = AF + FC = AC\,.$$

הבעיה בהוכחה היא שתרשים אינו נכון כי הנקודה P נמצאת **מחוץ** למשולש, כפי שניתן לראות בתרשים להלן שהתקבל מגיאוגברה:



פרק 2 איך לחלק זווית לשלושה חלקים (אם אתם מוכנים לרמות)

ידוע שלא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים בעזרת מחוגה וסרגל. הסיבה היא שחלוקת זווית לשלושה דורשת בנייה של שורש שלישי, אבל עם מחוגה וסרגל ניתן לבנות רק אורכים המתקבלים מארבעת פעולות החשבון וכן שורש ריבועי.

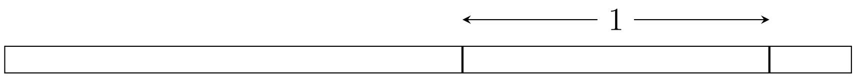
המתמטיקאים היוונים גילו שבאמצעות כלים אחרים ניתן לחלק זווית לשלושה. סעיף 2.1 מציג בנייה של ארכימדס עם כלי פשוט הנקרא ביוונית ניאוסיס (neusis). סעיף 2.2 מביא בנייה מסובכת יותר של היפיאס באמצעות קוודרטריקס (quadratrix). כהטבה מיוחדת, נראה בסעיף 2.3 איך ניתן לרבע מעגל באמצעות קוודרטריקס.

מקורות:

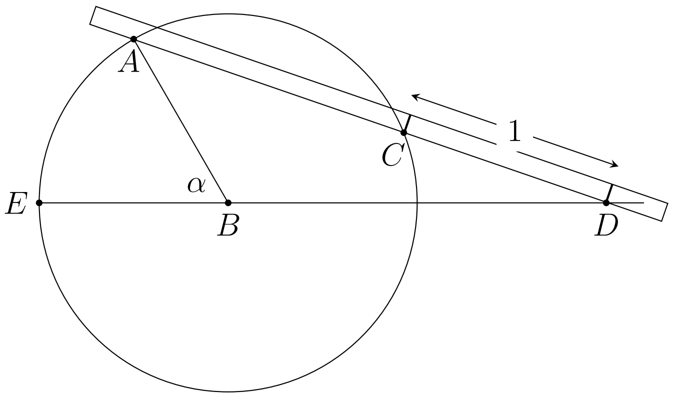
https://en.wikipedia.org/wiki/Angle_trisection
https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratrix_of_Hippias
https://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

2.1 חלוקת זווית לשלושה באמצעות ניאוסיס

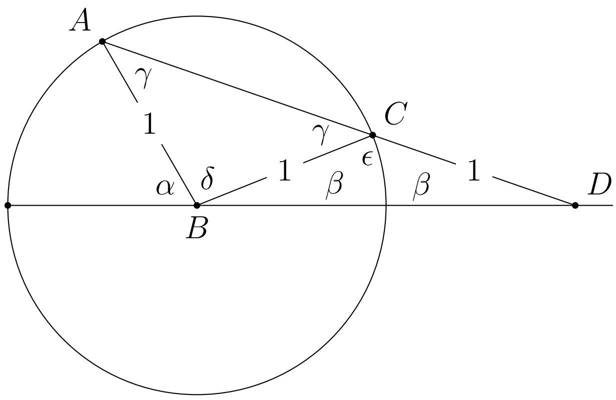
השימוש במילה "סרגל" מטעה, כי הכוונה היא למקל ישר ללא כל סימן, שהפעולה היחידה שניתן לעשות איתו היא למתוח קו ישר בין שתי נקודות. לסרגל המוכר יש סימנים המאפשרים למדוד אורכים. כדי לחלק זווית לשלושה חלקים, נשתמש ב־**ניאוסיס** שהוא מקל עם שני סימנים בלבד. נניח שהמרחק בין שני הסימנים הוא 1:



תהי α זווית שרירותית $\angle ABE$ בתוך מעגל שמרכזו B עם רדיוס 1. ניתן לבנות את המעגל על ידי קביעת המרחק בין רגלי החוגה למרחק בין סימני הניאוסיס. בנו קרן כהמשכו של EB מחוץ למעגל. הניחו את הניאוסיס על הנקודה A והזיזו אותו עד שהוא חותך את הקרן בנקודה D ואת המעגל בנקודה C. כוונו את הניאוסיס כך שהאורך של CD יהיה 1. ציירו את הקו AD:



ציירו את הקו BC וסמנו את הזוויות וקטעי הקו בתרשים:



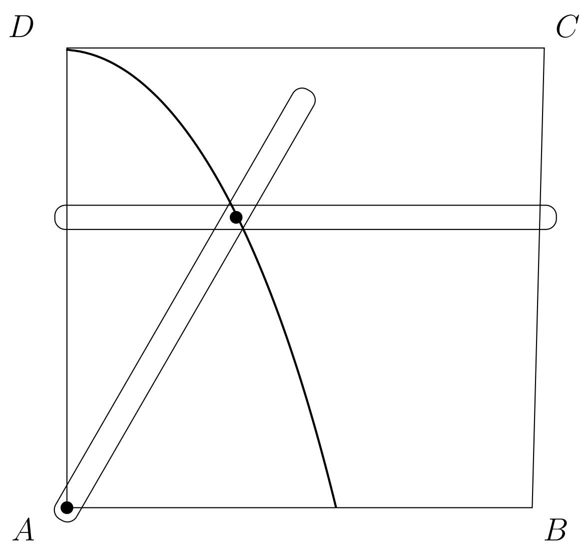
$BA = BC$ כי שניהם רדיוסים ו־$CB = CD$ לפי הבניה באמצעות הניאוסיס. לכן $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ שווי שוקיים. החישוב שלהלן משתמש בעובדות שסכום הזוויות של משולש ושל זוויות משלימות הוא $180°$:

$$\begin{aligned}
\epsilon &= 180° - 2\beta \\
\gamma &= 180° - \epsilon = 2\beta \\
\delta &= 180° - 2\gamma = 180° - 4\beta \\
\alpha &= 180° - \delta - \beta = 4\beta - \beta = 3\beta\,.
\end{aligned}$$

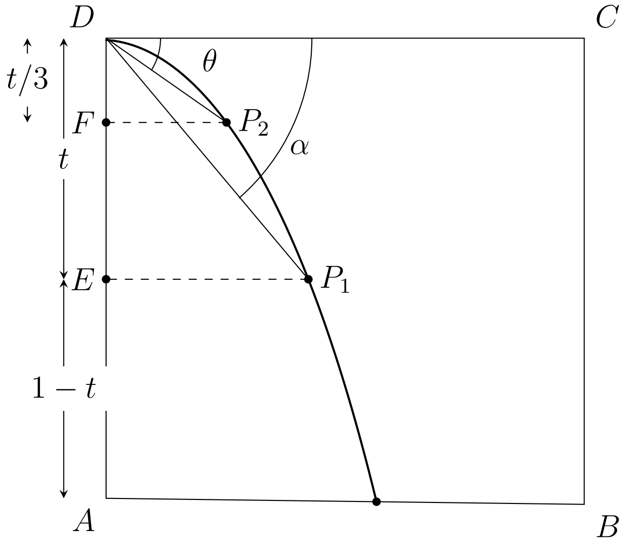
הזווית β היא שליש מהזווית α.

2.2 חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוודרטריקס

התרשים שלהלן מראה **מחוגת קוודרטריקס** המורכב משני סרגלים (ללא סימנים) המחוברים במפרק המאלץ אותם לנוע ביחד. סרגל אחד נע במקביל לציר ה־x מ־DC עד AB. הסרגל השני מחובר לנקודה A ומסתובב ממצב אנכי לאורך AD עד שהוא במצב אופקי לאורך AB. העקומה המצוירת על ידי המפרק המחבר את שני הסרגלים נקראת **עקומת הקוודרטריקס** או פשוט **קוודרטריקס**.



כאשר מזיזים את הסרגל האופקי במהירות אחידה, החיבור מאלץ את הסרגל השני להסתובב במהירות זוותית קבועה. למעשה זו ההגדרה של הקוודרטריקס. כאשר קואורדינטת ה־y של הסרגל האופקי יורד מ־1 ל־0, הזווית של הסרגל השני יחסית לציר ה־x יורד מ־$90°$ ל־$0°$. התרשים שלהלן מראה איך אפשר לחלוק זווית שרירותית α לשלושה חקלים שווים באמצעות קוודרטריקס:

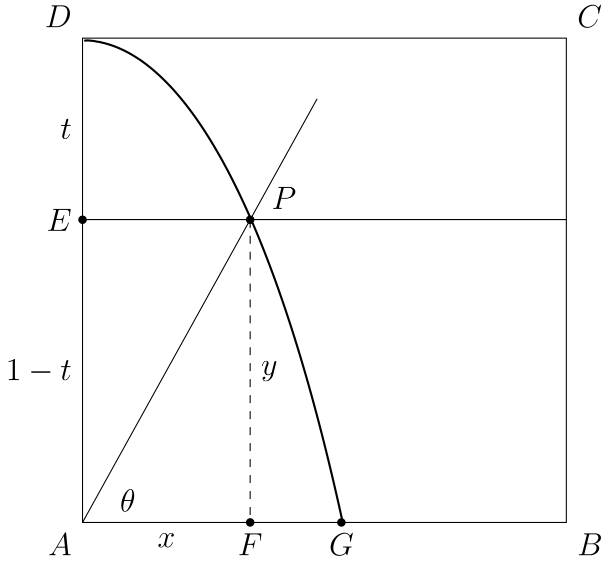


הנקודה P_1 היא החיתוך בין הקו המגדיר את הזווית α לבין הקוודרטריקס. קואורדינטת ה־y שלה היא $1-t$, כאשר t הוא המרחק שהסרגל האופקי נע ממקומו ההתחלתי DC. חלק את DE לשלושה חלקים כדי לקבל את הנקודה F. (קל לחלק **קטע הקו** לחלקים שווים על ידי שימוש במשפט תאלס). הנקודה P_2 היא נקודת החיתוך בין הקו מ־F המקביל ל־DC לבין הקוודרטריקס. לפי העיקרון של מהירויות שוות:

$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{t/3}{t}$$

$$\theta = \alpha/3\,.$$

2.3 ריבוע מעגל באמצעות קוודרטריקס



נניח שהסרגל האופקי נע מרחק t לאורך ציר ה־y עד לנקודה E, ושהסרגל המסתובב מגדיר זווית θ עם ציר ה־x. הנקודה P היא החיתוך בין קוודרטריקס לבין הסרגל האופקי, והנקודה F היא היטל של P על ציר ה־x. מהן הקואורדינטות של הנקודה P על הקוודרטריקס? ברור ש:

$$y = PF = EA = 1 - t\,.$$

על העקומה, θ יורד באותו קצב ש־t עולה:

$$\begin{aligned}\frac{1-t}{1} &= \frac{\theta}{\pi/2}\\ \theta &= \frac{\pi}{2}(1-t)\,.\end{aligned}$$

נבדוק אם זה הגיוני: כאשר $t = 0$ אז $\theta = \pi/2$, וכאשר $t = 1$ אז $\theta = 0$.

את קואורדינטת ה־x של P נקבל בטריגונומטריה:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}\,.$$

ומכאן:

$$x = \frac{y}{\tan\theta} = y\cot\theta = y\cot\frac{\pi}{2}(1-t) = y\cot\frac{\pi}{2}y\,.$$

בדרך כלל המשוואה של עקומה היא מהצורה $y = f(x)$, אבל אפשר גם להשתמש במשוואה מהצורה $x = f(y)$. נחשב את קואורדינטת ה־x של הנקודה G, החיתוך של הקוודרטריקס עם ציר ה־x. לא ניתן להציב $y = 0$ כי $\cot 0$ לא מוגדר, אבל ייתכן שיהיה לנו מזל אם נחשב את הגבול של x כאשר y שואף ל־0:

$$x = y\cot\frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}y\cot\frac{\pi}{2}y\,.$$

למען הנוחיות, נחליף משתנה $z=\frac{\pi}{2}y$, ואז נחשב את הגבול:

$$\lim_{z\to 0} z\cot z = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{\cos 0}{1} = 1\,,$$

השתמשנו בעובדה הידועה ש־$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$.

כאשר $y\to 0$:

$$x \to \frac{2}{\pi}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\pi}{2}y\cot\frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi}\cdot 1 = \frac{2}{\pi}\,.$$

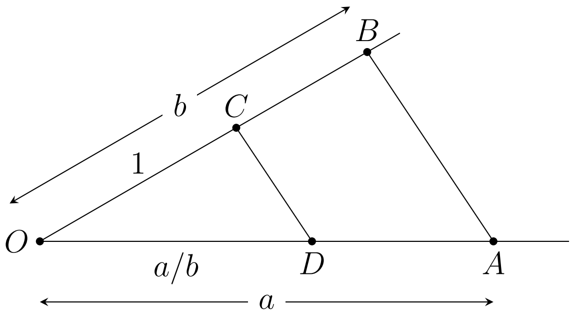
על ידי שימוש בקוודרטריקס בנינו קטע קו AG שאורכו $x=\frac{2}{\pi}$. עם סרגל רגיל ומחוגה, קל לבנות קו באורך $\sqrt{\frac{2}{x}}=\sqrt{\pi}$, ואז לבנות ריבוע ששטחו π.

פרק 3 איך לרבע את המעגל (בערך)

3.1 קירובים ל־π

במאה התשע־עשרה הוכח שאין בניות עם סרגל ומחוגה לשלוש בעיות: חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים, הכפלת קוביה וריבוע מעגל. נתון קטע קו שאורכו מוגדר כ־1, הערכים (אורכים) שניתנים לבנייה הם אלה שמתקבלים מקטע זו ומהפעולות $+, -, \times, /, \sqrt{}$.

בבניות בפרק זה נצטרך לחלק קטע קו לשלושה חלקים; כאן נראה איך לבנות קו שאורכו הוא החילוק של האורכים של שני קטעי קו נתונים. נתון קטע קו באורך 1 וקטעי קו באורכים a, b, לפי משולשים דומים $1/b = \overline{OD}/a$ ולכן $\overline{OD} = a/b$.



כדי לרבע מעגל יש לבנות את האורך $\sqrt{\pi}$, אבל π הוא טרנסנדנטי, כלומר, הוא אינו פתרון של אף משוואה אלגברית.

פרק זה מביא שלוש בניות של קירובים ל־π. הטבלה שלהלן מביא את הנוסחאות של האורכים שנבנים, קירוב לערכן, ההפרש בין ערכים אלה והערך של π, והשגיאה במטרים אם משתמשים בקירוב כדי לחשב את היקף כדור הארץ כאשר נתון שהרדיוס הוא 6378 ק"מ.

הבנייה	הנוסחה	הערך	ההפרש	השגיאה (מ)
π		3.14159265359	–	–
Kochansky	$\sqrt{\dfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$	3.14153338705	5.932×10^{-5}	756
Ramanujan 1	$\dfrac{355}{113}$	3.14159292035	2.667×10^{-7}	3.4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \dfrac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3.14159265258	1.007×10^{-9}	0.013

הבנייה של Kochansky מ־1685 נמצאת ב־[2].

הבניות של Ramanujan נמצאות מ־1913 נמצאות ב־[9, 10].

3.2 הבניה של Kochansky

3.2.1 הבניה

בנו שלושה מעגלים:

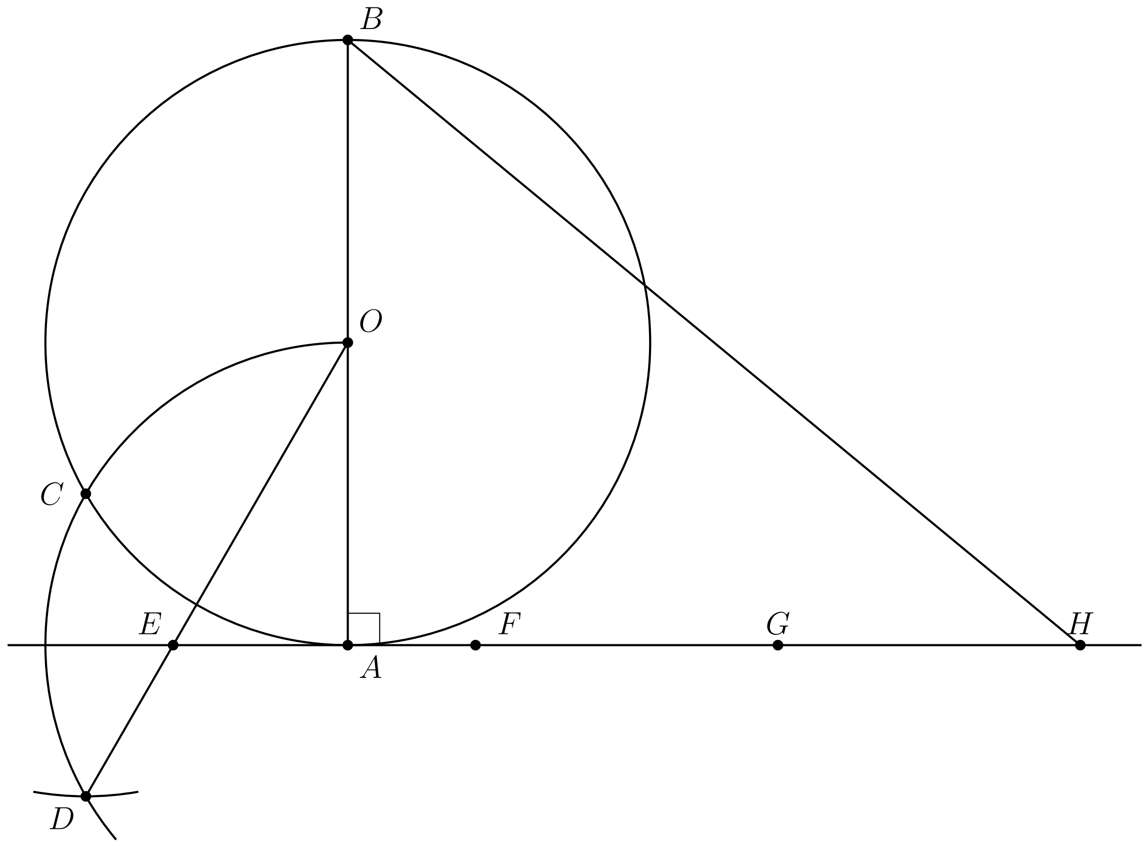
1. בנו מעגל יחידה שמרכזו O. סמנו קוטר $\overline{AB}$ ובנו משיק למעגל ב־A.
2. בנו מעגל יחידה שמרכזו A. סמנו את החיתוך עם המעגל הראשון ב־C.[1]
3. בנו מעגל יחידה שמרכזו C. סמנו את החיתוך שלו עם המעגל השני ב־D.

בנו $\overline{OD}$ וסמנו את החיתוך שלו עם המשיק ב־E.

מ־E בנו F, G, H, כל אחת במרחק 1 מהנקודה הקודמת, כך ש־$\overline{AH} = 3 - \overline{EA}$.

בנו $\overline{BH}$.

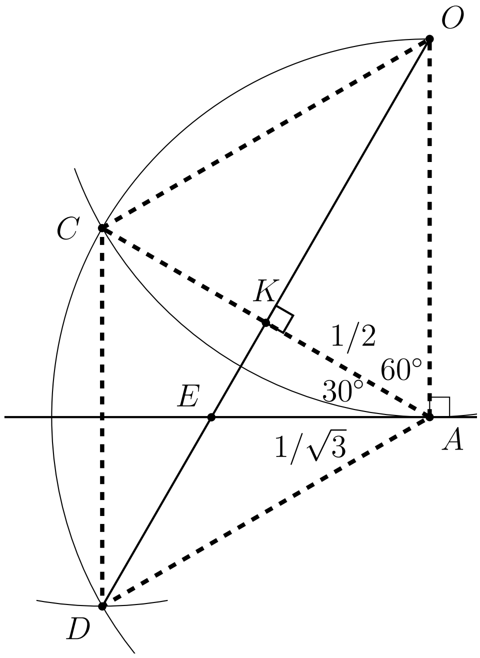
טענה: $\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = \overline{BH}$.



[1] עבור המעגל השני והשלישי, האיור מראה רק את הקשת החותך את המעגל הקודם.

3.2.2 ההוכחה

האיור שלהלן מתמקד בחלק מהאיור למעלה. קטעי הקו המקווקווים נוספו. מפני שכל המעגלים הם מעגלי היחידה, קל לראות שאורך כל אחד מהקטעים המקווקווים הוא 1. מכאן ש־$\overline{AOCD}$ הוא מעוין, ולכן האלכסונים שלו ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה ב־K. מכאן ש־$\overline{AK}=\frac{1}{2}$.



האלכסון $\overline{AC}$ מייצר שני משולשים שווי־צלעות $\triangle OAC, \triangle DAC$ כך ש־$\angle OAC = 60^\circ$. הזווית בין המשיק לרדיוס $\overline{OA}$ היא זווית ישרה ולכן $\angle KAE = 30^\circ$. נחשב:

$$
\begin{aligned}
\frac{1/2}{\overline{EA}} &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\overline{EA} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\overline{AH} &= 3 - \overline{EA} = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

נחזור לאיור הראשון ונראה ש־$\triangle ABH$ הוא משולש ישר־זווית:

$$
\begin{aligned}
\overline{BH}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{AH}^2 \\
&= 4 + \frac{9\cdot 3 - 6\sqrt{3} + 1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \\
\overline{BH} &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3.141533387 =\approx \pi\,.
\end{aligned}
$$

3.3 הבנייה הראשונה של Ramanujan

3.3.1 הבניה

בנו מעגל יחידה שמרכזו O וסמנו קוטר $\overline{PR}$.

H חוצה את $\overline{PO}$ ו־T מחלק את $\overline{RO}$ לשלושה חלקים שווים.

בנו ניצב ב־T שחותך את המעגל ב־Q.

בנו את המיתר $\overline{RS}=\overline{QT}$.

בנו את קטע הקו $\overline{PS}$.

בנו קו העובר דרך T המקביל ל־RS. סמנו ב־N את החיתוך של עם $\overline{PS}$.

בנו קו העובר דרך O המקביל ל־RS. סמנו ב־M את החיתוך של עם $\overline{PS}$.

בנו את המיתר $\overline{PK}=\overline{PM}$.

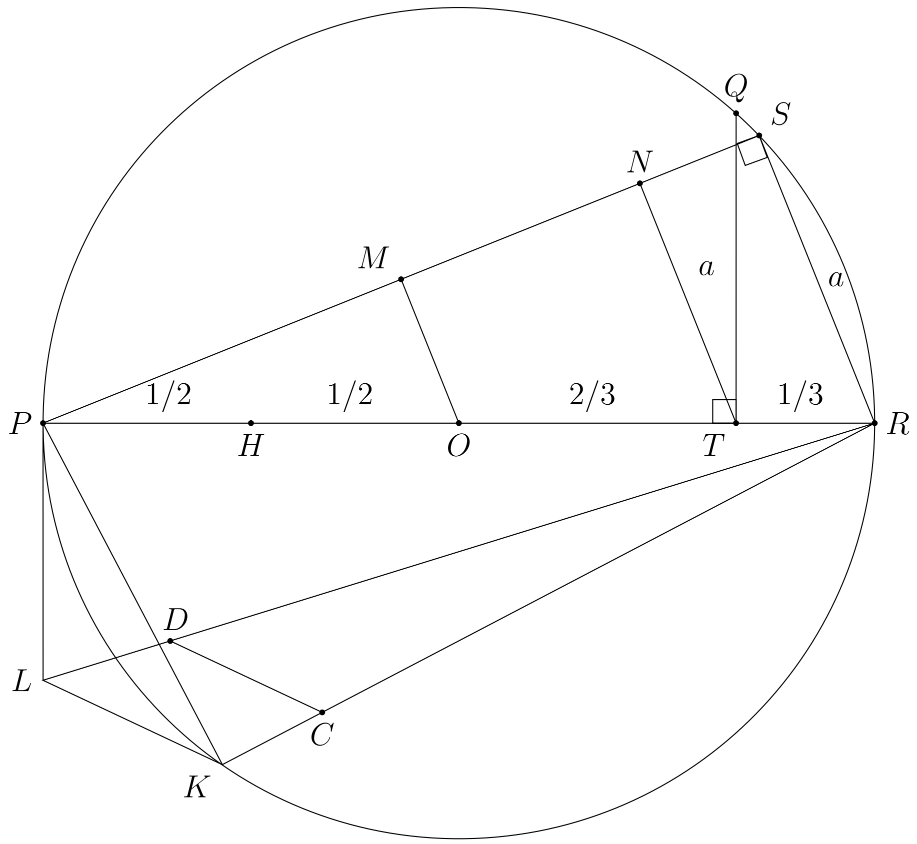
בנו משיק ב־P שאורכו $\overline{PL}=\overline{MN}$.

חברו את הנקודות K, L, R.

מצאו נקודה C כך שאורכו של $\overline{RC}$ שווה לאורכו של $\overline{RH}$.

בנו קטע קו $\overline{CD}$ המקביל ל־$\overline{KL}$ שחותך את $\overline{LR}$ ב־D.

טענה: $pi \approx \frac{355}{113} = \overline{RD}^2$.



3.3.2 הוכחה

לפי משפט פיתגורס במשולש ישר־הזווית $\triangle QOT$:

$$\overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

$\triangle PSR$ הוא משולש ישר־זווית כי הוא נשען על קוטר. לפי משפט פיתגורס:

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}\,.$$

$\triangle MPO \sim \triangle SPR$ ולכן:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\
\frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\
\overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}\,.
\end{aligned}$$

$\triangle NPT \sim \triangle SPR$ ולכן:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\
\frac{\overline{PN}}{5/3} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\
\overline{PN} &= \frac{5\sqrt{31}}{18} \\
\overline{MN} &= \overline{PN} - \overline{PM} \\
&= \sqrt{31}\left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{31}}{9}\,.
\end{aligned}$$

$\triangle PKR$ הוא משולש ישר־זווית כי הוא נשען על קוטר. לפי משפט פיתגורס:

$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}\,.$$

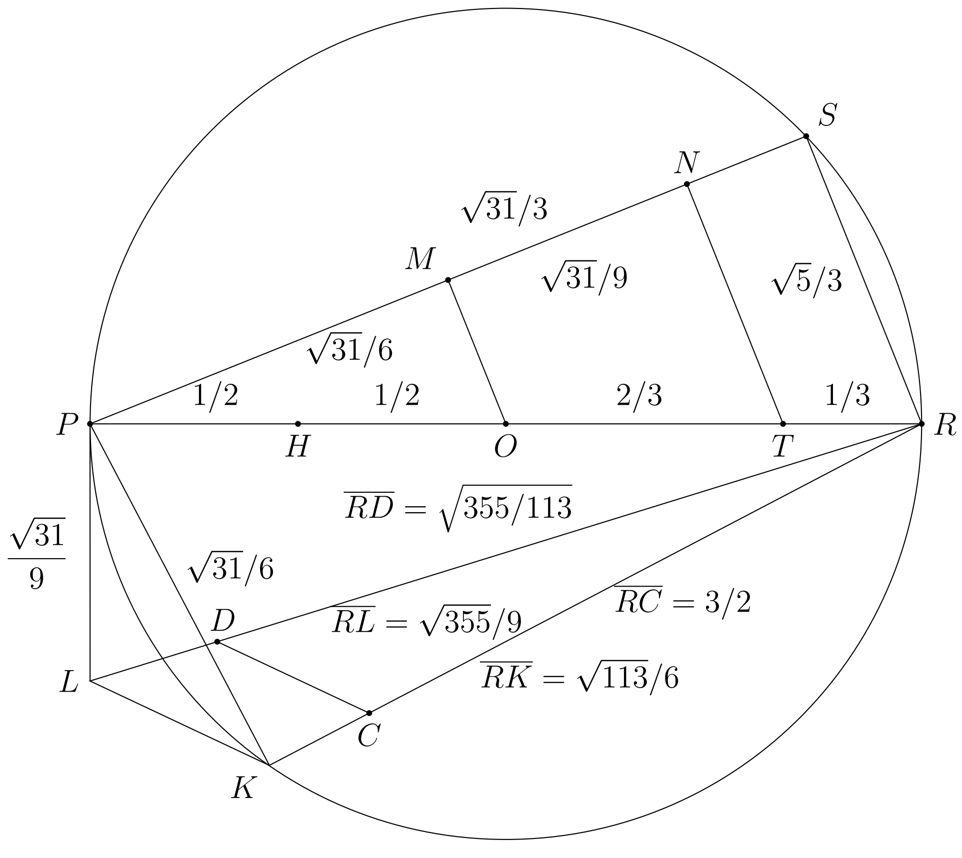
$\triangle PLR$ הוא משולש ישר־זווית כי $\overline{PL}$ הוא משיק. לפי משפט פיתגורס:

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}\,.$$

$\overline{RC} = \overline{RH} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. $\overline{CD}$ מקביל ל־$\overline{LK}$, ולכן לפי משולשים דומים:

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} &= \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}} \\
\frac{\overline{RD}}{3/2} &= \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6} \\
\overline{RD} &= \sqrt{\frac{355}{113}}\,.
\end{aligned}
$$

באיור להלן כל אורכי קטעי הקו מסומנים:



ניתן לבנות את ערך $\frac{355}{113}$ על ידי בניית שני קטעי קו באורכים 355 ו־113, ואז להשתמש בבנייה לחילוק מסעיף 3.1, אבל זה די מעיק!

3.4 הבנייה השנייה של Ramanujan

3.4.1 הבניה

בנו מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{AB}$, וסמנו ב־C את החיתוך של הניצב ב־O עם המעגל.

חלקו את $\overline{AO}$ לשלושה חלקים שווים כך ש־$\overline{AT} = 1/3$ ו־$\overline{TO} = 2/3$.

בנו $\overline{BC}$ ומצאו נקודות M, N כך ש־$\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$.

בנו $\overline{AM}$ ו־$\overline{AN}$ וסמנו ב־P את הנקודה על $\overline{AN}$ כך ש־$\overline{AP} = \overline{AM}$.

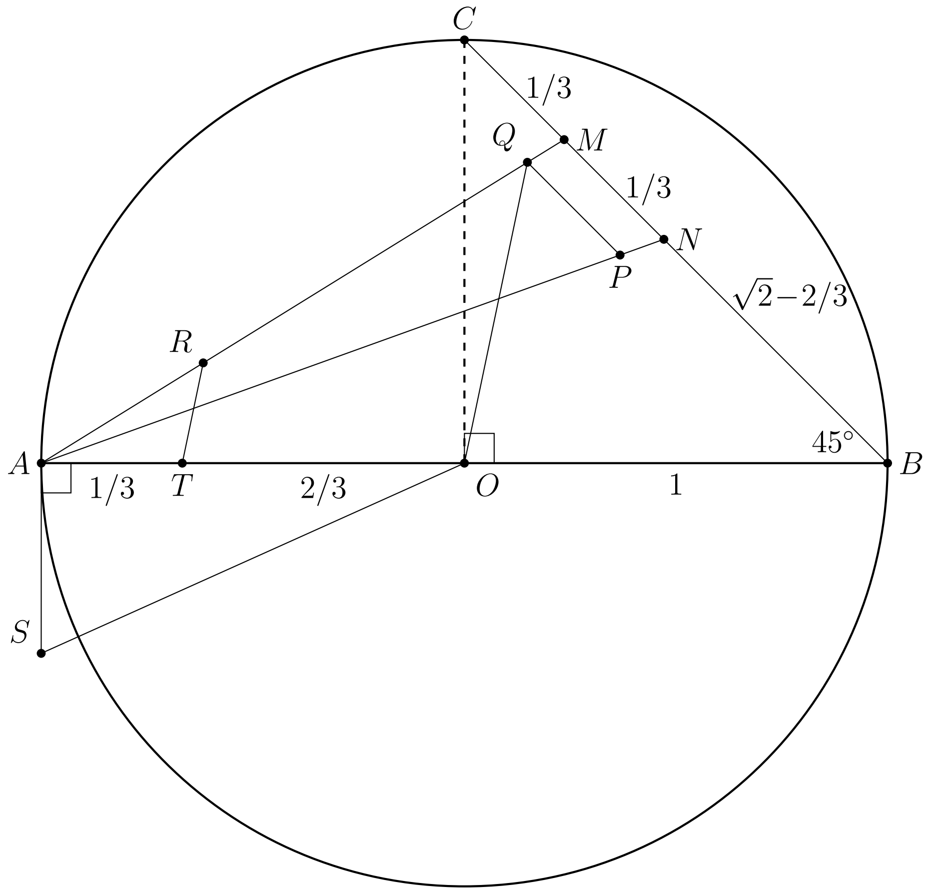
בנו קו המקביל ל־$\overline{MN}$ שעובר דרך P, וסמנו ב־Q את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AM}$.

בנו $\overline{OQ}$ ובנו קו המקביל ל־$\overline{OQ}$ שעובר דרך T וסמנו ב־R את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AM}$.

בנו קטע קו $\overline{AS}$ שאורכו שווה לאורך של $\overline{AR}$ והמשיק למעגל ב־A.

בנו $\overline{SO}$.

טענה: $\pi \approx \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 3\sqrt{\overline{SO}}$.



3.4.2 ההוכחה

$\triangle COB$ הוא משולש ישר זווית, $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$, ולכן לפי משפט פיתגורס $\overline{CB} = \sqrt{2}$ ו-$\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3$. המשולש שווה שוקיים, כך ש-$\angle NBA = \angle MBA = 45^\circ$.

נשתמש במשפט הקוסינוסים על $\triangle NBA$ כדי לחשב את $\overline{AN}$:

$$\begin{aligned}
\overline{AN}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BN}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BN} \cdot \cos \angle NBA \\
&= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \left(4 + 2 + \frac{4}{9} - 4\right) + \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{22}{9} \\
\overline{AN} &= \sqrt{\frac{22}{9}} .
\end{aligned}$$

באופן דומה, נשתמש במשפט הקוסינוסים על $\triangle MBA$ כדי לחשב את $\overline{AM}$:

$$\begin{aligned}
\overline{AM}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \angle MBA \\
&= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \left(4 + 2 + \frac{1}{9} - 4\right) + \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{19}{9} \\
\overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}} .
\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ ולכן $\triangle MAN \sim \triangle QAP$, ולפי הבנייה $\overline{AP} = \overline{AM}$, כך ש:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \\
\overline{AQ} &= \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22/9}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} .
\end{aligned}$$

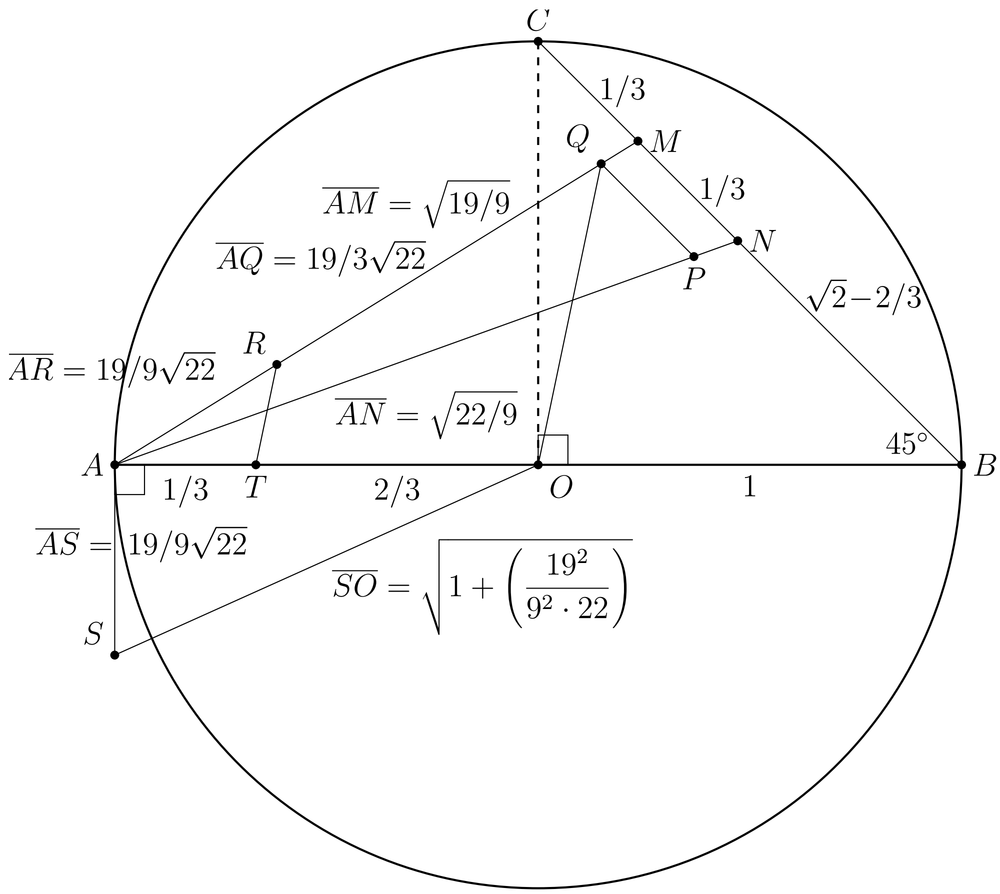
לפי הבנייה $\overline{OQ} \parallel \overline{TR}$ ולכן $\triangle RAT \sim \triangle QAO$ כך ש:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \\
\overline{AR} &= \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}} .
\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{AS} = \overline{AR}$ ו־$\triangle OAS$ הוא משולש ישר זווית. לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}
\overline{SO} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2} \\
3\sqrt{\overline{SO}} &= 3\left(1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(3^4 + \frac{3^4 \cdot 19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 3.14159265262 \approx \pi\,.
\end{aligned}$$

באיור להלן כל אורכי קטעי הקו מסומנים:

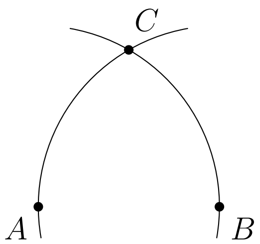


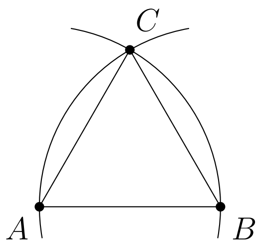
פרק 4 אני מסתפק במחוגה

בשנת 1797 המתימטיקאי האיטלקי Lorenzo Mascheroni הוכיח שכל בנייה גיאומטרית עם סרגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם מחוגה בלבד! במאה העשרים התגלה שהמשפט הוכח בשנת 1672 על ידי המתימטיקאי הדני Georg Mohr. המשפט נקרא היום משפט Mohr-Mascheroni.

בפרק זה אביא את הוכחת המשפט המבוססת על הוכחה שמופיעה כבעייה 33 ב־[3], ועובדה על ידי Michael Woltermann [4].[1] הוכחות נוספות ניתן למוצא ב־[5], [8].

מה המשמעות של בנייה גיאומטרית עם מחוגה בלבד ללא סרגל? התרשים הימני מראה את הבנייה הרגילה של משולש שווה צלעות עם סרגל ומחוגה. איך אפשר לבנות משולש ללא קטעי הקווים AB, AC, BC? למעשה, אין כל צורך **לראות** את הקווים. קו מוגדר על ידי שתי נקודות, ומספיק שנבנה את נקודות כדי לקבל בנייה שקולה לבנייה עם סרגל (התרשים השמאלי).





בתרשימים נצייר בכל זאת קווים, אולם הקווים משמשים אך ורק להבנת הבנייה ולהוכחת נכונותה. חשוב שתשתכנעו שבבנייה עצמה משתמשים רק במחוגה.

כל צעד בבנייה עם סרגל ומחוגה הוא אחת משלוש פעולות הבאות:

- מציאת נקודת החיתוך של שני קווים ישרים.
- מציאת נקודות החיתוך בין קו ישר ומעגל.
- מציאת נקודות החיתוך בין שני מעגלים.

ברור שניתן לבצע את הפעולה השלישית רק עם מחוגה. עלינו להראות שעבור שתי הפעולות הראשונות ניתן למוצא בנייה שקולה המשתמשת רק במחוגה.

סימונים:

- $C(O, A)$: המעגל שמרכזו O העובר דרך הנקודה A.
- $C(O, r)$: המעגל שמרכזו O עם רדיוס r.
- $C(O, AB)$: המעגל שמרכזו O עם רדיוס שהוא אורך קטע קו נתון AB.

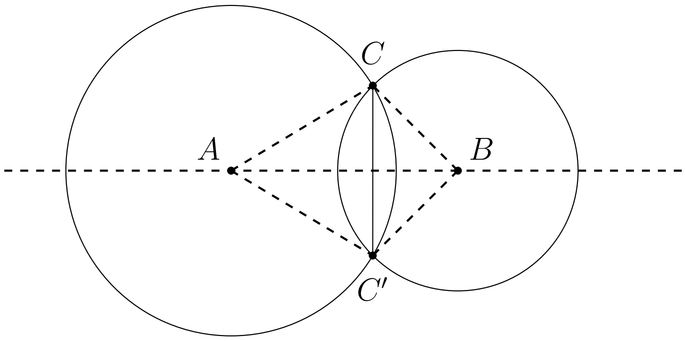
תחילה נביא ארבע בניות עזר נחוצות (סעיפים 4.1–4.4), ואחר כך נראה את הבניות למציאת חיתוך של שני קווים (סעיף 4.5) ושל קו ומעגל (סעיף 4.6).

[1] ברצוני להודות לו על הרשות להתשמש בעבודתו.

4.1 שיקוף נקודה

נתון קטע קו AB ונקודה C שלא נמצאת על AB. ניתן לבנות נקודה C' שהיא השיקוף של C מסביב ל־AB. הנקודה C' היא **שיקוף** של הנקודה C מסביב לקטע קו AB, אם AB (או הקו המכיל אותו) הוא האנך האמצעי של CC'.

נבנה מעגל שמרכזו A העובר דרך C ומעגל שמרכזו B העובר דרך C. החיתוך של שני המעגלים הוא הנקודה C' שהיא השיקוף של C.

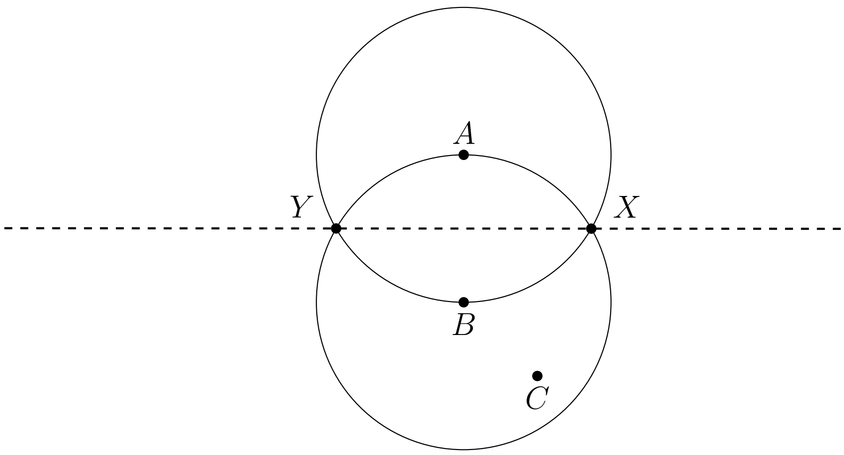


הוכחה: $\triangle ABC$ ו־$\triangle ABC'$ חופפים לפי צ.צ.צ., כי AC, AC' הם רדיוסים של אותו מעגל כמו גם BC, BC', ו־AB הוא צלע משותף. מכאן ש־$\angle CAB = \angle C'AB$, ולכן AB הוא חוצה הזווית של $\angle CAC'$. אבל $\triangle CAC'$ הוא משולש שווה שוקיים, וחוצה הזווית AB הוא גם האנך האמצעי של בסיס המשולש CC'. לפי ההגדרה, C' היא השיקוף של C מסביב ל־AB.

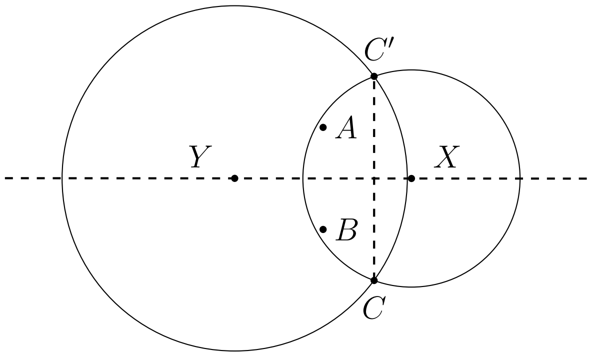
4.2 בניית מעגל עם רדיוס נתון

נתונות הנקודות A, B, C. ניתן לבנות מעגל $c(A, BC)$ שמרכזו A עם רדיוס שווה לאורך של BC.

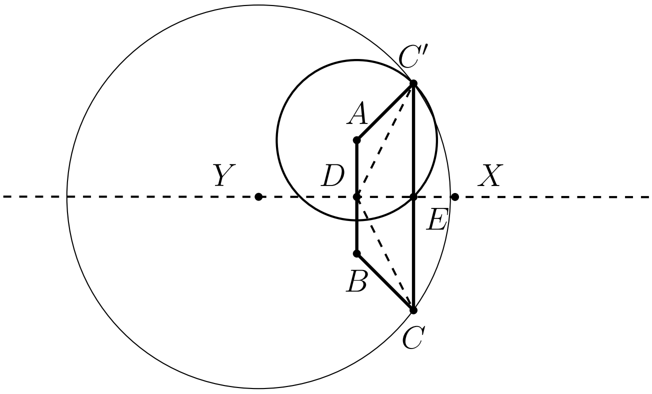
נבנה את המעגלים $c(A, B)$, $c(B, A)$ ונסמן את נקודות החיתוך X, Y.



נבנה את C', השיקוף של C מסביב לקו XY לפי הבנייה בסעיף 4.1.



המעגל $c(A, C')$ הוא המעגל המבוקש.

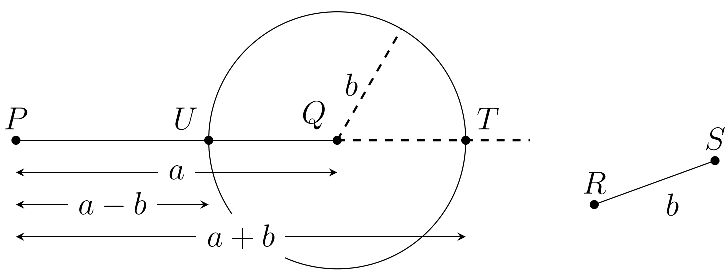


הוכחה: הנקודה A היא השיקוף של B סביב XY (כי $\triangle YAX \cong \triangle YBX$), ו־$C'$ נבנה כשיקוף של C סביב XY. לפי ההגדרה, XY הוא האנך האמצעי לקטעי הקו AB, CC', ולכן $C'E = EC$, $AD = DB$, ו־$\angle DEC = \angle DEC' (= 90^\circ)$. מכאן ש־$\triangle DEC \cong \triangle DEC'$ לפי צ.ז.צ. לכן $DC = DC'$ ו־$\angle ADC' = \angle BDC$ (כי הן זוויות משלימות ל־$\angle EDC, \angle EDC'$). $\triangle ADC' \cong \triangle BDC$ לפי צ.ז.צ., כך ש־$AC' = BC$.

ההוכחה מראה ששיקוף משמר מרחקים.

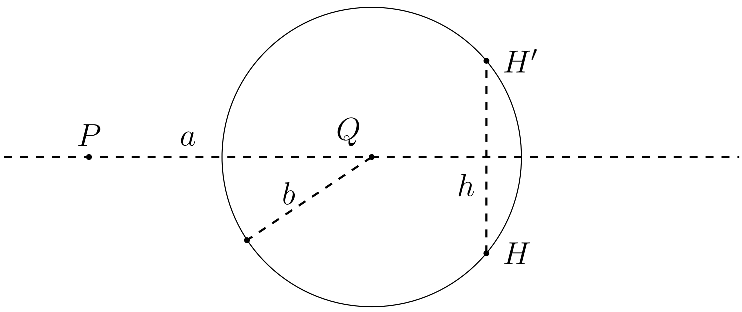
4.3 בניית חיבור וחיסור של שני קטעי קווים

נתון קטע קו PQ באורך a וקטע קו RS באורך b. ניתן לבנות קטעי קו QT, QU כך ש־$PUQT$ הוא קטע קו, כאשר האורך של PU הוא $a - b$ והאורך של PT הוא $a + b$.

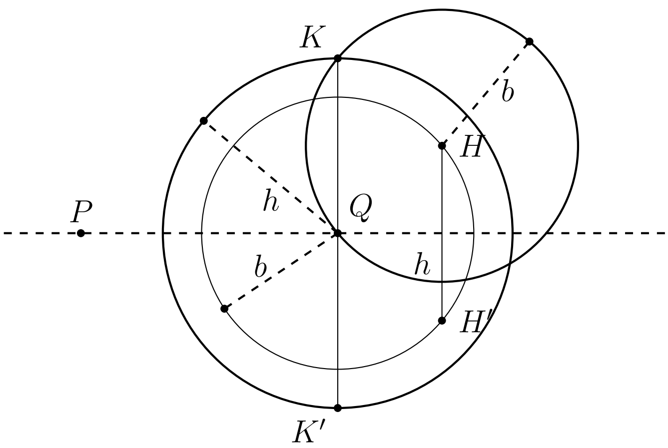


בניית טרפז שווה שוקיים

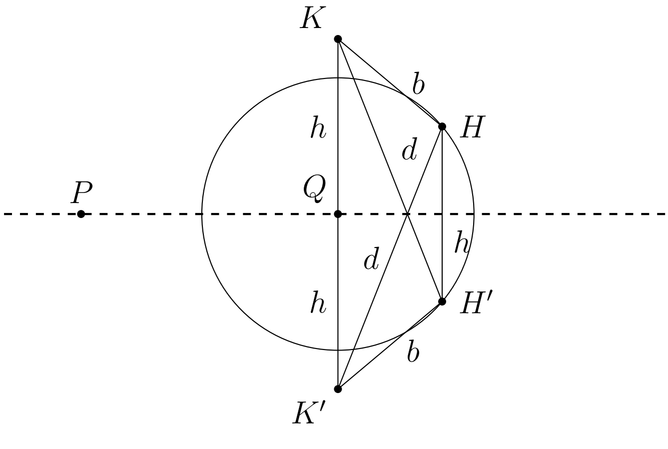
נבחר H, נקודה כלשהי על $c(Q,b)$, ונבנה את H', השיקוף שלה סביב PQ. נסמן h האורך של HH'.



נבנה את המעגלים $c(Q,h)$, $c(H,b)$. K היא נקודת החיתוך בין המעגלים, ו־K' היא השיקוף של K מסביב ל־PQ.



PQ הוא האנך האמצעי ל־HH' וגם ל־KK', לכן שני קטעי הקו מקבילים. $KH = K'H' = b$ כי K נמצאת על המגעל שמרכזו H. K', H' הן שיקופים של K, H. לכן $KHH'K'$ הוא טרפז שווה שוקיים עם בסיסים $KK' = 2h$, $HH' = h$. נסמן ב־d את אורך האלכסונים $K'H = KH'$.

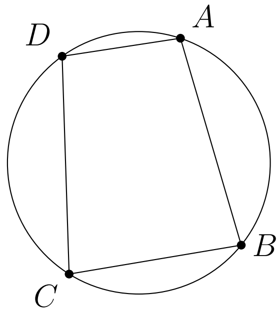


חסימת הטרפז במעגל

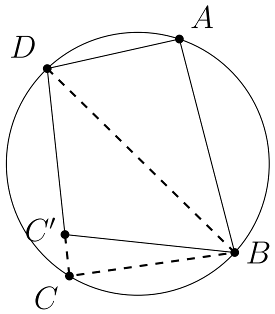
אנו רוצים להוכיח שניתן לחסום את $KHH'K'$ במעגל. נוכיח שאם הזוויות הנגדיות של מרובע צמודות, אזי ניתן לחסום אותו במעגל, ונוכיח שבטרפז שווה שוקיים הזוויות הנגדיות צמודות.

בספרי גיאומטריה ניתן למצוא הוכחה פשוטה לטיעון ההפוך: במרובע שניתן לחסום במעגל, הזוויות הנגדיות הן צמודות, אבל קשה למצוא הוכחה של הטיעון עצמו. לכן, אביא כאן את שתי ההוכחות.

אם ניתן לחסום מרובע במעגל, הזוויות הנגדיות צמודות: ערכה של זווית היקפית הנשענת על קשת הוא מחצית ערכה של הקשת, לכן $\angle DAB$ היא מחצית מהקשת DCB ו-$\angle DCB$ היא מחצית מהקשת DAB. שתי הקשתות נשענות על כל היקף המעגל, ולכן הסכום שלהן הוא 360°. מכאן, $\angle DAB + \angle DCB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. באופן דומה, $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$.



מרובע שהזוויות הנגדיות שלו צמודות ניתן לחסום במעגל: ניתן לחסום כל משולש במעגל. נבנה מעגל החוסם את $\triangle DAB$ ונניח ש-C' היא נקודה כך ש-$\angle DAB + \angle DC'B = 180^\circ$, אבל C' **אינה** על היקף מעגל. ללא הגבלת הכללית, נניח ש-C' נמצאת בתוך המעגל.

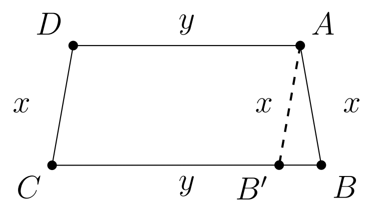


נבנה קרן היוצאת מ-DC' כאשר C היא נקודת החיתוך עם המעגל. $ABCD$ חסום מעגל ולכן:

$$\begin{aligned}
\angle DAB + \angle DCB &= 180^\circ \\
\angle DAB + \angle DCB &= \angle DAB + \angle DC'B \\
\angle DCB &= \angle DC'B\,,
\end{aligned}$$

מצב שאינו אפשרי אם C נמצא על המעגל ו-C' נמצאת בתוך המעגל.

כדי להשלים את ההוכחה, נראה שהזוויות נגדיות של טרפז שווה שוקיים צמודות.



נבנה קטע קו AB' מקביל ל־CD. המרובע $AB'CD$ הוא מקבילית והמשולש $\triangle ABB'$ שווה שוקיים, כך ש־$\angle B = \angle ABB' = \angle AB'B = \angle C$. באופן דומה, $\angle D = \angle A$. אבל הסכום של הזוויות הפנימיות של מרובע שווה ל־$360°$:

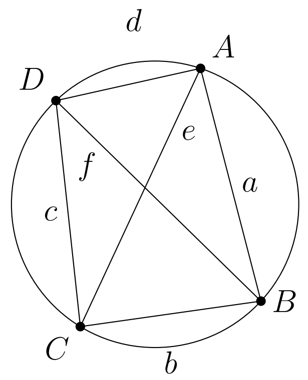
$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360° \\ 2\angle A + 2\angle C &= 360° \\ \angle A + \angle C &= 180°\,,\end{aligned}$$

ובאופן דומה $\angle B + \angle D = 180°$.

משפט תלמי

נשתמש במשפט תלמי (Ptolemy) שהוא משוואה הקושרת את אורכי האלכסונים ואורכי הצלעות במרובע חסום על ידי מעגל:

$$ef = ac + bd\,.$$



קיימת הוכחה גיאומטרית (ראו ויקיפדיה), אבל אני אביא הוכחה טריגונומטרית פשוטה.

ממשפט הקוסינוסים עבור $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle DAB$, $\triangle DCB$ מתקבלות המשוואות:

$$\begin{aligned}e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B \\ e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A \\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C\,.\end{aligned}$$

הזוויות הנגדיות של מרובע חסום במעגל צמודות $\angle C = 180^\circ - \angle A$ ו־$\angle D = 180^\circ - \angle B$, ולכן:

$$\begin{aligned}\cos\angle D &= -\cos\angle B\\ \cos\angle C &= -\cos\angle A\,,\end{aligned}$$

וניתן להיפטר מהגורמים הטריגונומטריים. לאחר חישובים מעיקים נקבל:

$$\begin{aligned}e^2 &= \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}\\ f^2 &= \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}\,.\end{aligned}$$

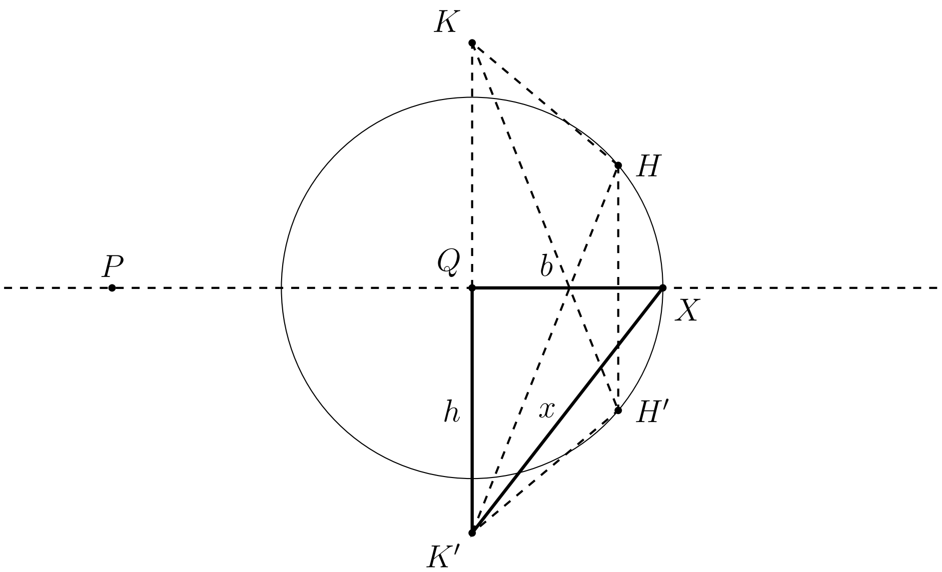
נכפיל את שתי המשוואות ונפשט כדי לקבל את משפט תלמי:

$$\begin{aligned}e^2\cdot f^2 &= (ac+bd)^2\\ ef &= (ac+bd)\,.\end{aligned}$$

הפעלת משפט תלמי על הטרפז

עבור הבנייה בעמוד 28, אורך האלכסונים הוא d, אורך השוקיים הוא b, ואורכי הבסיסים הם h ו־$2h$. ממשפט תלמי: $d\cdot d = b\cdot b + h\cdot 2h$ או $d^2 = b^2 + 2h^2$.

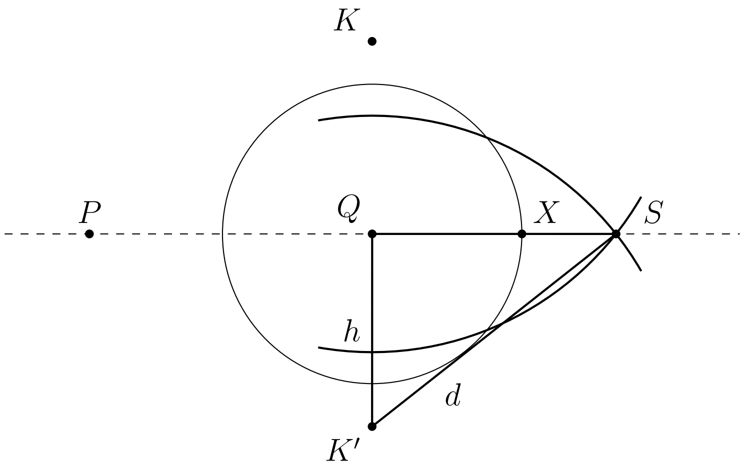
תהי X נקודה על הקו PQ המאריך את PQ ב־b. בהמשך נבנה את X ובינתיים נדמה לעצמנו שהיא קיימת. נגדיר $x = K'X$. המשולש $\triangle QK'X$ הוא משולש ישר זווית ולכן $x^2 = b^2 + h^2$:



לפי המשפט של תלמי:

$$\begin{aligned}d^2 &= b^2 + 2h^2\\ &= (x^2 - h^2) + 2h^2\\ &= x^2 + h^2\,.\end{aligned}$$

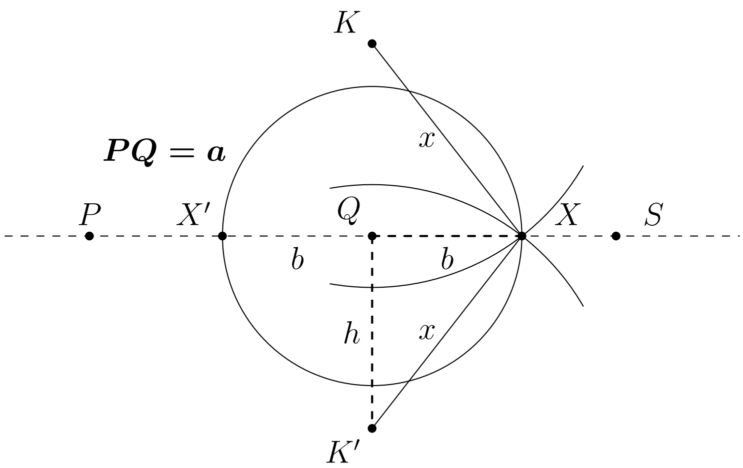
אל תחפשו משולש ישר זווית בתרשים. אנחנו טוענים **שניתן לבנות** את המשולש עם צלעות x, h, d.
נבנה את הנקודה S כנקודת החיתוך של המעגלים $c(K, d)$ ו־$c(K', d)$:



מתקבל משולש ישר זווית $\triangle QSK'$. לפי משפט פיתגורס $QS^2 + h^2 = d^2$, ולכן:

$$QS^2 = d^2 - h^2 = x^2 ,$$

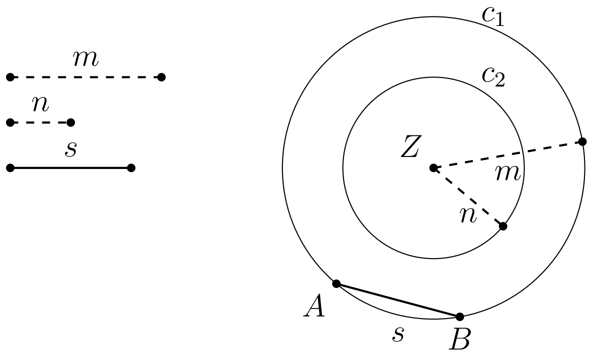
ו־$QS = x$. ניתן לבנות את הנקודה X כנקודות החיתוך בין המעגלים $c(K, x)$ ו־$c(K', x)$:



נזכור מה אנחנו רוצים: להאריך את אורכו של PQ ב־b או לקצר אותו ב־b. אורכו של QX הוא $b = \sqrt{x^2 - h^2}$, ולכן אורכו של PX הוא $a + b$ ואורכו של PX' הוא $a - b$.

4.4 בניית קטע קו שאורכו מוגדר יחסית לשלושה קטעי קו אחרים

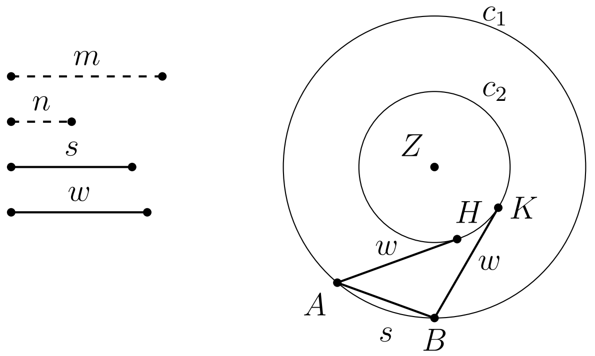
נתונים שלושה קטעי קו באורכים n, m, s**. ניתן לבנות קטע קו שאורכו** $x = \dfrac{n}{m}s$**.**
בנה שני מעגלים משותפי מרכז: $c_1 = c(Z, m)$, $c_2 = c(Z, n)$. נבחר נקודה A כלשהי על המעגל c_1 ונבנה את המיתר AB שאורכו s ב־c_1. (בניית המיתר עם מחוגה בלבד לפי בסעיף 4.2.)



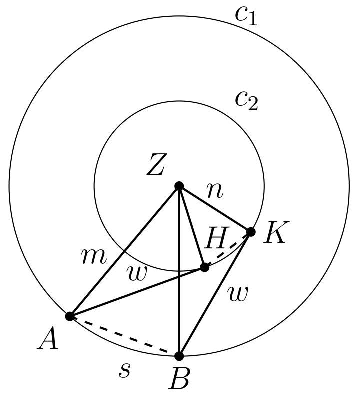
נניח ש־$m > n$, אחרת נחליף את הסימונים של m, n.

נניח גם שהמיתר s אינו חותך את c_2. אם לא, נשתמש בבנייה של סעיף 4.3 כדי להכפיל את m, n במספר שלם k עד שהמיתר לא חותך את c_2. שימו לב שהכפלת הערכים אינה משנה את הערך שאנחנו בונים $x = \frac{kn}{km}s = \frac{n}{m}s$.

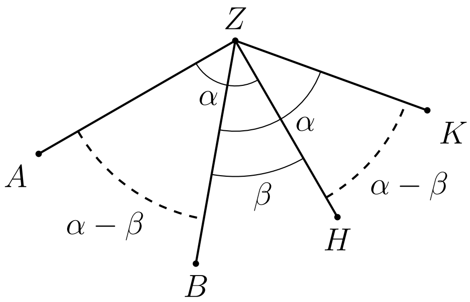
נבחר נקודה כלשהי H על המעגל c_2. נסמן את אורך הקטע AH ב־w. נבנה נקודה K על c_2 כך שאורך הקטע BK גם הוא w.



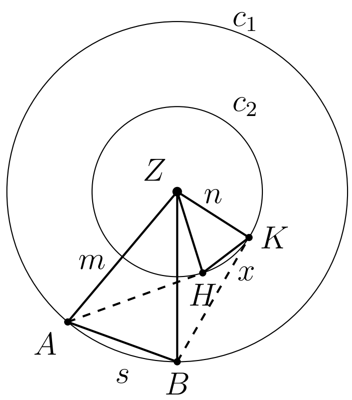
$\triangle AHZ$, $\triangle BZK$ חופפים לפי צ.צ.צ.: $ZA = ZB = m$ הרדיוס של מעגל c_1, $ZH = ZK = n$ הרדיוס של המעגל c_2, ו־$AH = BK = w$ לפי הבנייה.



מ־$\triangle BZK \cong \triangle AZH$, אנו מקבלים $\angle AZB = \angle HZK$. קצת קשה לראות את השוויונות האלה בתרשים, אבל התרשים שלהלן מבהיר את היחסים בין הזוויות. נגדיר $\alpha = \angle AZH = \angle BZK$ ו־$\beta = \angle BZH$, וקל לראות ש־$\angle AZB = \angle HZK = \alpha - \beta$.



זוויות הקודקוד של שני משולשים שווי שוקיים שוות, ולכן $\triangle HZK \sim \triangle AZB$.



נסמן את קטע הקו HK ב־x, ונקבל:

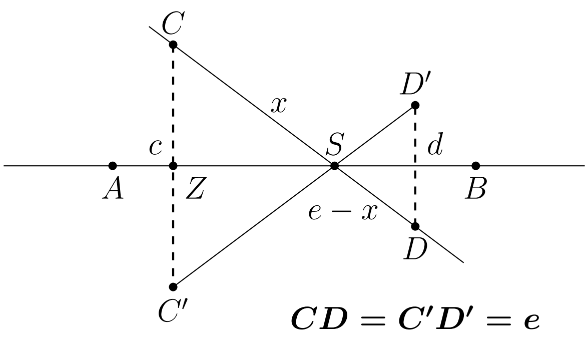
$$\frac{m}{s} = \frac{n}{x}$$
$$x = \frac{n}{m}s\,.$$

4.5 מציאת נקודת החיתוך של שני קווים

נתונים שני קווים המכילים את קטעי הקו AB, CD. ניתן לבנות את נקודת החיתוך שלהם עם מחוגה בלבד.

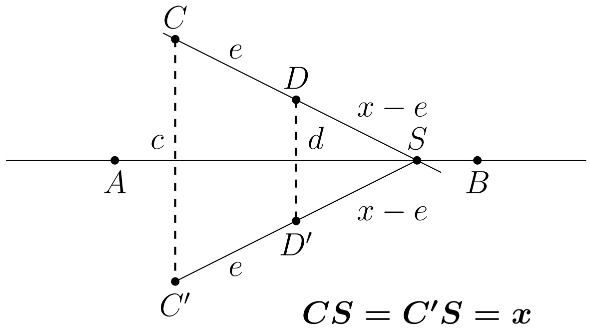
נבנה את הנקודה C' כשיקוף של C מסביב ל־AB, ו־D' כשיקוף של D מסביב לקו AB.

נקודת החיתוך S נמצאת על הקו AB, כי $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$ לפי צ.ז.צ., כי $CZ = C'Z$, $\angle CZS = \angle C'ZS = 90^\circ$ ו־ZS צלע משותף. מכאן ש־$C'S = CS$, ובאופן דומה $D'S = DS$.



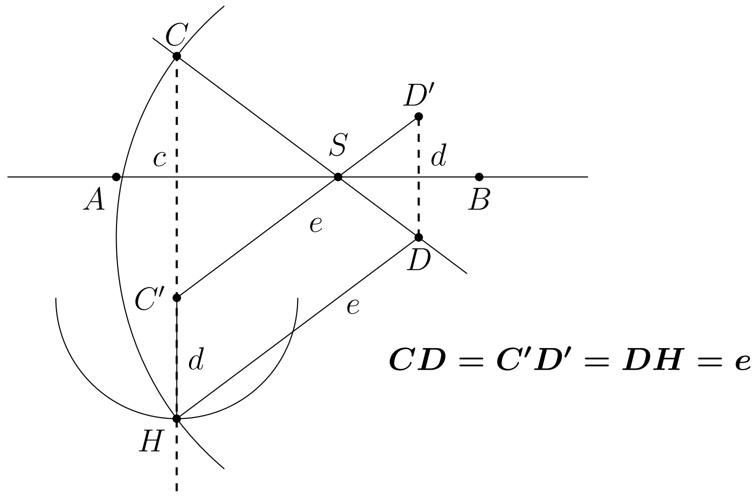
נסמן $x = CS, c = CC', d = DD', e = CD$. $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ ולכן $\frac{c}{d} = \frac{x}{e-x}$. נפתור את המשוואה עבור x ונקבל $x = \frac{c}{c+d}e$.

אם C, D נמצאות באותו צד של AB:



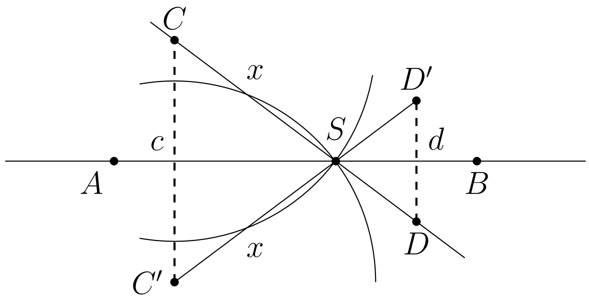
$\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$, ולכן $\frac{c}{d} = \frac{x}{x-e}$. נפתור עבור x ונקבל $x = \frac{c}{c-d}e$.

נבנה את המעגלים $c(C', d)$, $c(D, e)$, ונסמן נקודת החיתוך שלהם ב־H. סכום האורכים של שני הקטעים $CC', C'H$ הוא $c+d$. יש להראות ש־H נמצאת בהמשך הקו של CC' ואז אורך הקטע CH יהיה $c+d$. (במקרה ש־D נמצאת על אותו צד של AB ש־C נמצאת, $CH = c-d$.)



מההגדרה של H כחיתוך של המעגלים $c(C', d)$, $c(D, e)$, אנו מקבלים $C'H = d$, $DH = e$.
אבל $C'D' = e, DD' = e$, ולכן המרובע $C'D'DH$ הוא מקבילית, כי האורכים של זוגות הצלעות הנגדיות שוות. לפי הבנייה, קטע הקו DD' מקביל ל־CC', ולכן $C'H$ שמקביל ל־DD' מקביל גם ל־CC'. אחת מנקודות הקצה של הקטע היא C', והקטע חייב להיות על ההמשך של הקטע CC'.

האורכים c, d, e נתונים והוכחנו בסעיף 4.3 שניתן לבנות קטע באורך $c+d$, ובסעיף 4.4 הוכחנו שניתן לבנות קטע באורך $x = \frac{c}{c+d}e$. S היא נקודת החיתוך של המעגלים $c(C, x)$ ו־$c(C', x)$.

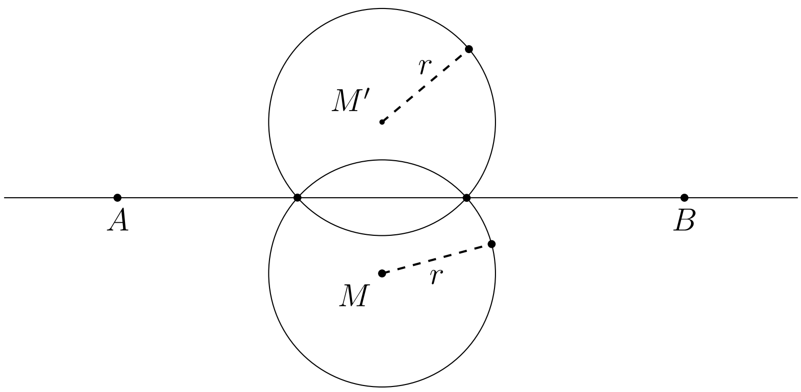


$$\boldsymbol{CD = C'D' = DH = e}$$

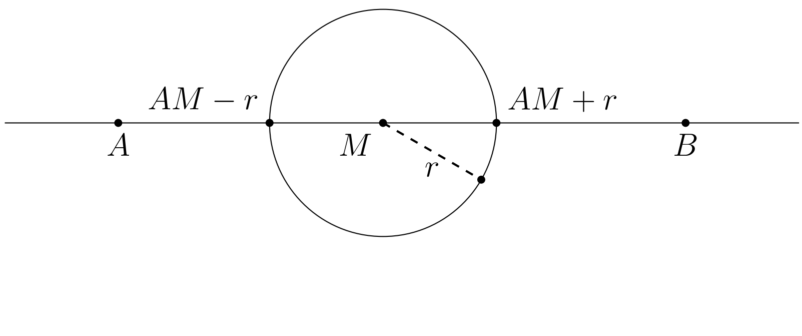
4.6 מציאת נקודת החיתוך של קו עם מעגל

נתון מעגל $k = C(M, r)$ וקו AB. ניתן לבנות את נקודות החיתוך שלהם עם מחוגה בלבד.

נבנה את M', השיקוף של M מסביב ל־AB, והמעגל $k' = c(M', r)$. נקודות החיתוך של המעגלים k, k' הן נקודות החיתוך של הקו AB והמעגל k.



בנייה זו אינה אפשרית אם מרכז המעגל M נמצא על הקו AB. במקרה זה, יש להאריך ולקצר את הקטע AM באורך r לפי הבנייה המתוארת בסעיף 4.3. נקודות הקצה של הקטעים האלה הן נקודות החיתוך של k עם AB.



פרק 5 אני מסתפק בסרגל (ועוד משהו)

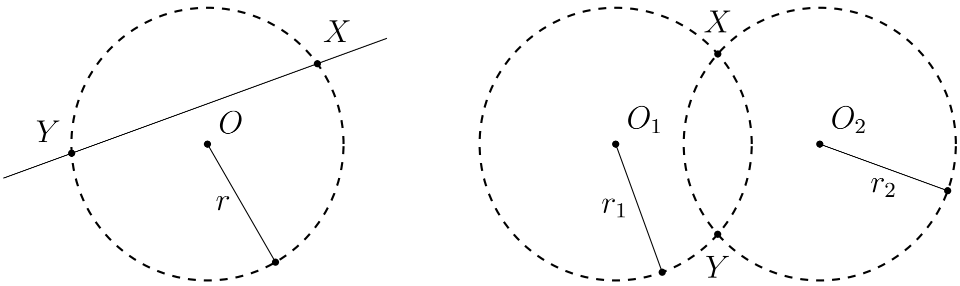
האם כל בנייה בסרגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם סרגל בלבד? התשובה היא שלילית. ב־1822 המתיטיקאי הצרפתי Jean-Victor Poncelet שיער שכן ניתן להסתפק בסרגל בלבד, בתנאי שקיים במישור מעגל **אחד**. המשפט הוכח ב־ 1833 על ידי המתימטיקאי השוויצרי Jakob Steiner. בפרק זה אביא את הוכחת המשפט המבוססת על ההוכחה שמופיעה כבעייה 34 ב־[3], ועובדה על ידי Michael Woltermann [4].[1]

כל צעד בבנייה על סרגל ומחוגה הוא אחת משלושת פעולות האלו:

- מציאת נקודת החיתוך של שני קווים ישרים.
- מציאת נקודות החיתוך של קו ישר עם מעגל.
- מציאת נקודות החיתוך של שני מעגלים.

ברור שניתן לבצע את הפעולה הראשונה עם סרגל בלבד. עלינו להראות שעבור שתי הפעולות האחרות ניתן למוצא בנייה שקולה המשתמשת רק בסרגל עם מעגל אחד.

מה המשמעות של בנייה עם סרגל בלבד? מעגל מוגדר על ידי נקודה O, שהיא מרכז המעגל, וקטע קו באורך r, הרדיוס, שאחת מהנקודות הקצה שלה היא O. אם נצליח לבנות את הנקודות X, Y המסומנות בהתרשים שלהלן, נוכל לטעון שהצלחנו לבנות את נקודות החיתוך של מעגל נתון עם קו נתון ושל שני מעגלים נתונים. המעגלים המצויירים בקו מקווקו לא ממש מפיעים בבנייה. בהמשך, המעגל היחיד הנתון יצוייר בקו רגיל, ומעגלים המשמשים רק להדגמת הבנייה והוכחתה יצויירו מקווקוים.



תחילה נביא חמש בניות עזר נחוצות (סעיפים 5.1–5.5), ואחר כך נראה איך למצוא נקודות חיתוך של קו עם מעגל (סעיף 5.6) ושל שני מעגלים (סעיף 5.7).

5.1 בניית קו המקביל לקו נתון

נתון קו l המוגדר על ידי שתי נקודות A, B, ונקודה P (שאיננה על הקו), ניתן לבנות קו דרך P המקביל ל־AB.

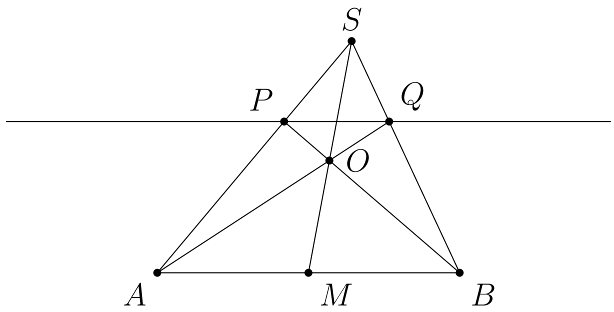
נפריד את הבנייה לשני מקרים:

[1] ברצוני להודות לו על הרשות להתשמש בעבודתו.

* "קו מכוון": נתונה הנקודה M **החוצה** את AB.

* כל קו אחר.

מקרה ראשון, קו מכוון: נבנה קרן הממשיכה את AP, ונבחר S, נקודה כלשהי על הקרן מעבר ל־P. נבנה את הקווים SB, SM, BP. נסמן ב־O את נקודת החיתוך של BP עם SM. נבנה קרן הממשיכה את AO ונסמן ב־Q את החיתוך של הקרן AO עם SB.



טענה: PQ מקביל ל־AB.

הוכחה: נשתמש במשפט Ceva שנוכיח בהמשך.

משפט (Ceva): נתונים שלושה קטעי קו מקודקודי משולש לצלעות הנגדיים שנפגשים בנקודה (כמו בתרשים, אבל M לא בהכרח חוצה הצלע), קטעי הצלעות מקיימים את היחס:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QS} \cdot \frac{SP}{PA} = 1\,.$$

בבנייה למעלה, M חוצה את AB ולכן $\frac{AM}{MB} = 1$. הגורם הראשון של המכלפה מצטמצם ונקבל את המשוואה:

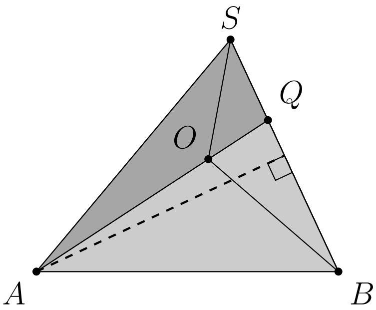
$$\frac{BQ}{QS} = \frac{PA}{SP} = \frac{AP}{PS}\,. \tag{5.1}$$

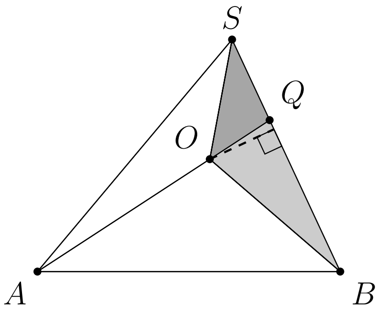
נוכיח ש־$\triangle ABS \sim \triangle PQS$, ולכן הקו PQ מקביל לקו AB כי $\angle PQS = \angle ABS$. ההוכחה שהמשולשים דומים היא:

$$\begin{aligned}
BS &= BQ + QS \\
\frac{BS}{QS} &= \frac{BQ}{QS} + \frac{QS}{QS} = \frac{BQ}{QS} + 1 \\
AS &= AP + PS \\
\frac{AS}{PS} &= \frac{AP}{PS} + \frac{PS}{PS} = \frac{AP}{PS} + 1 \\
\frac{BS}{QS} = \frac{BQ}{QS} + 1 &= \frac{AP}{PS} + 1 = \frac{AS}{PS}\,,
\end{aligned}$$

כאשר המשוואה האחרונה מתקבלת מהמשוואה 5.1.

הוכחה של משפט Ceva: נתבונן בתרשימים שלהן:

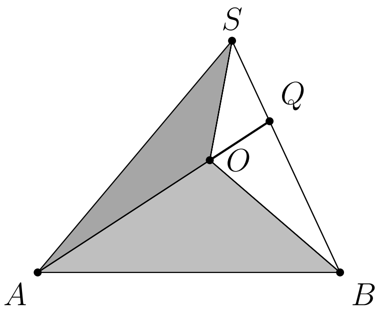




אם הגבהים של שני משולשים שווים, יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים. בתרשים, הגבהים של המשולשים $\triangle BQO, \triangle SQO$ שווים, כמו גם $\triangle BQA, \triangle SQA$. לכן:[2]

$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO} = \frac{BQ}{QS}\,, \qquad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA} = \frac{BQ}{QS}\,.$$

על ידי חיסור של המשולשים המסומנים, נקבל יחס בין המשולשים המסומנים באפור:



$$\frac{BQ}{QS} = \frac{\triangle BQA - \triangle BQO}{\triangle SQA - \triangle SQO} = \frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\,.$$

החישוב עלול להיראות חשוד. נסביר אותו תוך שימוש בסימונים פשוטים יותר:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{d} &= \frac{a}{b}\\
\frac{e}{f} &= \frac{a}{b}\\
c-e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d-f)\\
\frac{c-e}{d-f} &= \frac{a}{b}\,.
\end{aligned}$$

באופן דומה ניתן להוכיח:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\,, \qquad \frac{SP}{PA} = \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB}\,,$$

[2]נשתמש בשם המשולש כקיצור לשטחו.

ומכאן:

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BQ}{QS}\cdot\frac{SP}{PA}=\frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\frac{\triangle SOB}{\triangle AOB}=1\,,$$

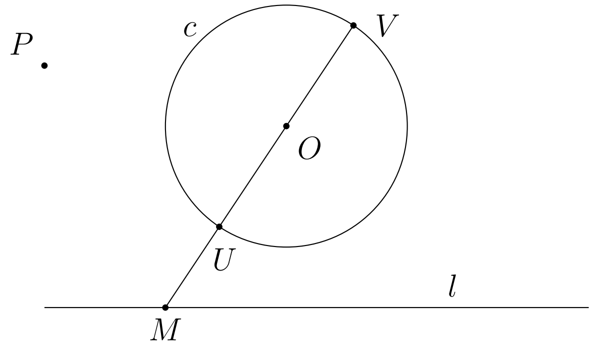
כי סדר הקודקודים במשולש לא משנה:

$$\triangle AOS=\triangle SOA,\ \triangle BOA=\triangle AOB,\ \triangle SOB=\triangle BOS\,.$$

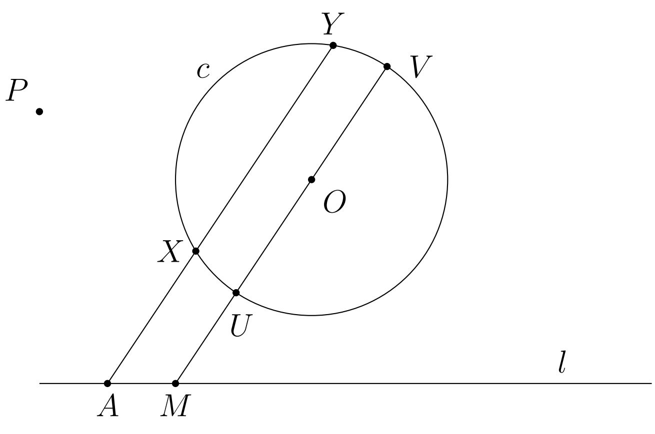
סוף הוכחה של משפט Ceva.

מקרה שני, כל קו אחר: נסמן את הקו ב־l, נסמן ב־c את **המעגל הקבוע** שמרכזו בנקודה O והרדיוס שלו הוא r, ונסמן ב־P את הנקודה שלא נמצאת על הקו שיש לבנות דרכו קו המקביל ל־l. עליך להשתכנע שהבנייה לא תלוייה במיקום המעגל במישור או ברדיוס שלו.

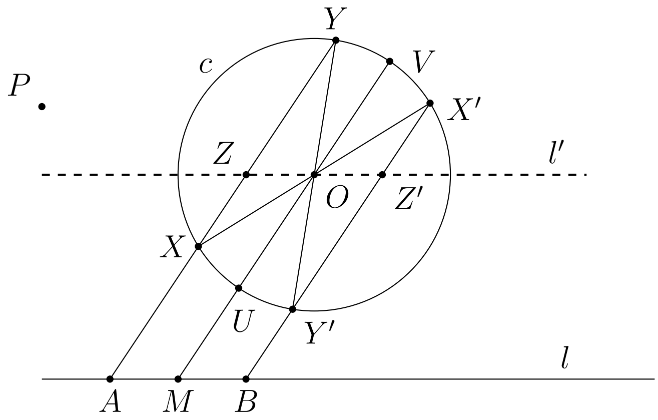
נבחר M, נקודה כלשהי על הקו l, ונבנה קרן הממשיכה את MO והחותך את המעגל ב־U,V.



קו זה הוא **קו מכוון** כי O, מרכז המעגל, חוצה את הקוטר UV. נבחר נקודה שנייה A על l ונשתמש בבבנייה עבור קו מכוון כדי לבנות קו המקביל ל־UV. הקו חותך את המעגל X,Y.



נבנה קוטר XX' וקוטר YY'. נבנה קרן מ־$X'Y'$ ונסמן ב־B את נקודת החיתוך שלה עם l.

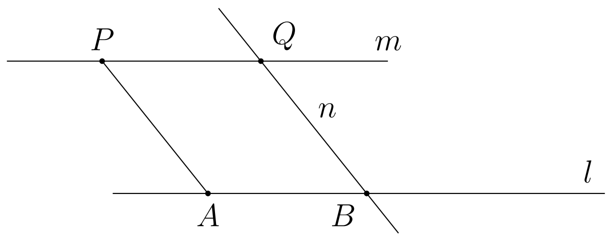


טענה: l הוא **קו מכוון** כי M חוצה את AB, וניתן לבנות קו דרך P מקביל ל־AB לפי הבנייה עבור קו מכוון.

הוכחה: OX, OX', OY, OY' הם כולם רדיוסים של המעגל, ו־$\angle XOY = \angle X'OY'$ כי הן זוויות נגדיות. לכן, $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ לפי צ.ז.צ. נגדיר (לא נבנה!) l', קו מקביל ל־l, החותך את XY ב־Z והחותך את X', Y' ב־Z'. $\angle XOZ = \angle X'OZ'$ כי הן זוויות נגדיות, ולכן $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$ לפי ז.צ.ז. ו־$ZO = OZ'$. $AMOZ$ ו־$BMOZ'$ מקביליות (מרובעים עם צלעות נגדיות מקבילות), ולכן $AM = ZO = OZ' = MB$.

מסקנה: נתון קטע קו AB ונקודה P שאיננה על הקו. ניתן לבנות קטע קו PQ המקביל ל־AB, שאורכו שווה לאורכו של AB. במילים אחרות: ניתן להעתיק את AB מקביל לעצמו כך שקצה אחד יהיה נקודה כלשהי P.

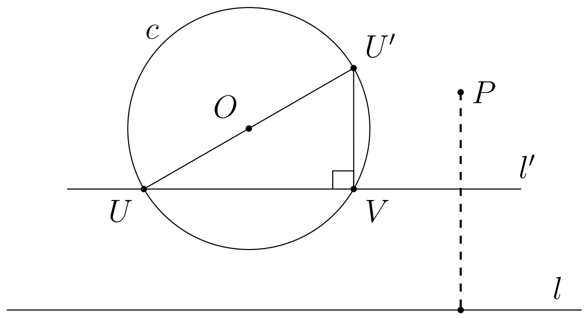
הוכחה: בסעיף זה הוכחנו שניתן לבנות קו m דרך P המקביל ל־AB, וקו n דרך B המקביל ל־AP. המרובע $ABQP$ הוא מקבילית, ולכן הצלעות הנגדיות שוות: $AB = PQ$.



5.2 בניית אנך לקו נתון

נתון קו l ונקודה P (שאיננה על הקו) ניתן לבנות אנך ל־l דרך P.

נבנה (לפי סעיף 5.1) קו l' מקביל ל־l החותך את **המעגל הקבוע** ב־U, V. נבנה את הקוטר UOU' והמיתר $U'V$.

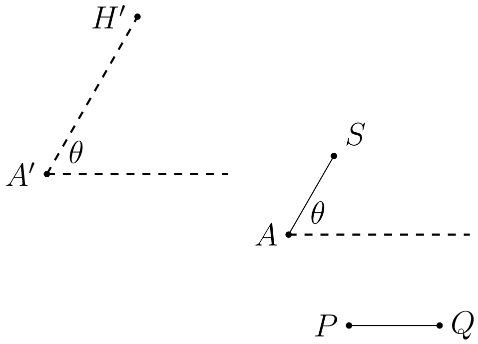


$\angle UVU'$ היא זווית ישרה כי היא נשענת על מחצית המעגל. מכאן ש-$U'V$ הוא אנך ל-UV ו-l'.
נבנה קו מקביל ל-$U'V$ דרך P (לפי סעיף 5.1).

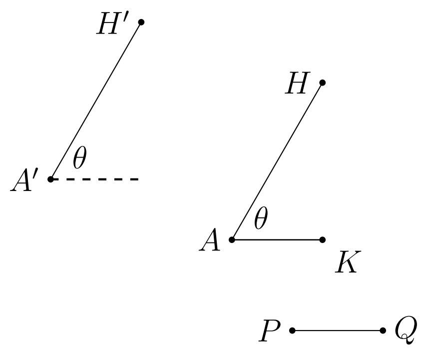
5.3 העתקת קטע קו נתון בכיוון נתון

נתון נקודה A, קטע קו PQ וכיוון, ניתן לבנות קטע קו AS כך ש-$AS = PQ$.

המסקנה בסוף סעיף 5.1 מראה שאפשר להעתיק קטע קו מקביל לעצמו. כאן נוכיח שניתן להנתיק קטע קו בכיוון של כל קו אחר. הכוונה של "כיוון" היא שקו המוגדר על ידי שתי נקודות A', H' מגדיר זווית θ יחסית לציר כלשהו. המשימה היא להעתיק את קטע הקו PQ ל-AS, כך ש-AS יהיה באותה זווית θ יחסית לאותו ציר. בתרשים PQ נמצא על ציר ה-x אבל אין לזה חשיבות.



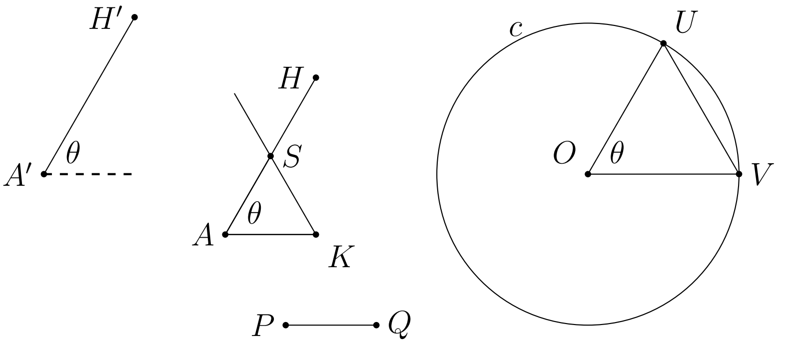
לפי 5.1 ניתן לבנות קטע הקו AH כך ש-$AH \| A'H'$, וגם לבנות קטע קו AK כך ש-$AK \| PQ$.



$\angle HAK = \theta$ θ לכן כל מה שנשאר הוא למצוא נקודה S על AH כך ש-$AS = AK$.

במעגל הקבוע c נבנה שני רדיוסים OU ו־OV מקבילים ל־AH ו־AK, בהתאמה, ונבנה קרן דרך K המקבילה ל־UV. נסמן את נקודת החיתוך של הקו עם AH ב־S.

טענה: $AS = PQ$.

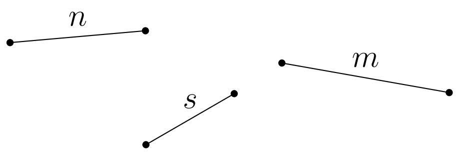


הוכחה: לפי הבנייה, $AH\|OU$ ו־$AK\|OV$, ולכן $\angle SAK = \theta = \angle UOV$. $SK\|UV$, ו־$\triangle SAK \sim \triangle UOV$ לפי ז.ז.ז. $\triangle UOV$ הוא משולש שווה שוקיים כי OU, OV הם רדיוסים של אותו מעגל. מכאן, $\triangle SAK$ הוא משולש שווה שוקיים ו־$AS = AK = PQ$.

5.4 בניית קטע קו שאורכו מוגדר יחסית לשלושה קטעי קו אחרים

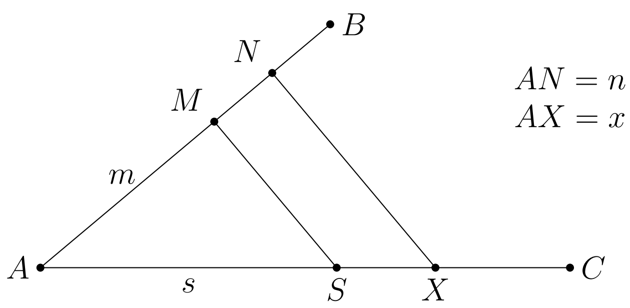
נתון קטעי קו באורכים n, m, s, ניתן לבנות קטע קו באורך $x = \frac{n}{m}s$.

קטעי הקו הנתונים נמצאים במיקומים כלשהם במישור ובכיוונים כלשהם.



נבחר נקודה כלשהי A ונבנה שתי קרנות AB, AC. לפי 5.3 ניתן לבנות נקודות M, N, S כך ש־$AM = m$, $AN = n$ ו־$AS = s$. נבנה דרך N קו המקביל ל־MS החותך את AC ב־X, ונסמן את אורכו של AX ב־x. $\triangle MAS \sim \triangle NAX$ לפי ז.ז.ז., ולכן:

$$\frac{m}{n} = \frac{s}{x}, \qquad x = \frac{n}{m}s\,.$$



5.5 בניית שורש ריבועי

נתון קטעי קו באורכים a, b, ניתן לבנות קטע קו שאורכו $\sqrt{ab}$.

אנו שואפים לבטא את $x = \sqrt{ab}$ בצורה $x = \dfrac{n}{m}s$ כדי להשתמש בבנייה מ־5.4.

- עבור n נשתמש ב־d, הקוטר של **המעגל הקבוע**.
- עבור m נשתמש ב־$t = a + b$ שניתן לבנות מהאורכים הנתונים a, b לפי 5.3.
- נגדיר $s = \sqrt{hk}$ כאשר h, k מוגדרים כביטויים מעל האורכים a, b, t, d, ונראה איך ניתן לבנות קטע קו באורך $\sqrt{hk}$.

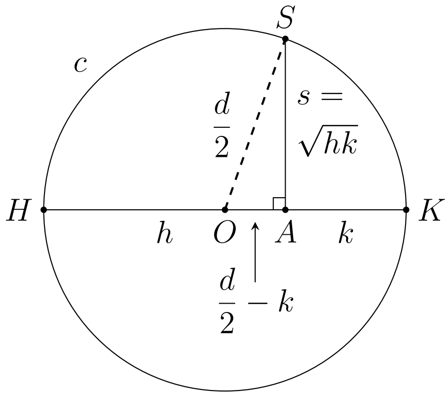
נגדיר $h = \dfrac{d}{t}a$, $k = \dfrac{d}{t}b$, ונחשב:

$$x = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d}\frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d}hk = \frac{t}{d}s\,.$$

נחשב גם:

$$h + k = \frac{d}{t}a + \frac{d}{t}b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d\,.$$

לפי 5.3 נבנה $HA = h$ על הקוטר HK של **המעגל הקבוע**. מ־$h + k = d$ אפשר להסיק ש־$AK = k$:



לפי 5.2 ניתן לבנות דרך A אנך ל־HK, ונסמן ב־S את החיתוך של האנך עם **המעגל הקבוע**. $OS = OK = \dfrac{d}{2}$ כי הם רדיוסים של המעגל, ו־$OA = \dfrac{d}{2} - k$. לפי משפט פיתגורס:

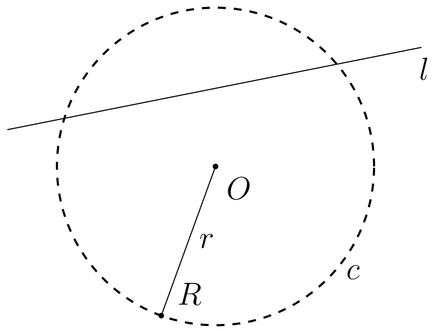
$$\begin{aligned}
s^2 = SA^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - k\right)^2 \\
&= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{dk}{2} - k^2 \\
&= k(d-k) = kh \\
s &= \sqrt{hk}\,.
\end{aligned}$$

כעת ניתן לבנות $x = \dfrac{t}{d}s$ לפי 5.4.

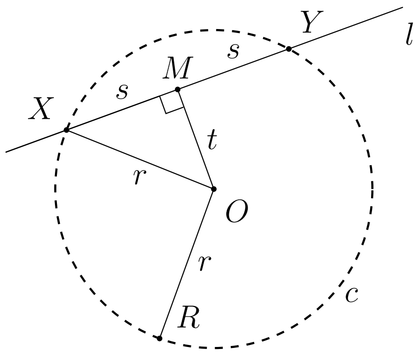
5.6 בניית נקודות חיתוך של קו עם מעגל

נתון קו l ומעגל c שמרכזו O והרדיוס שלו r. ניתן לבנות את נקודות החיתוך של הקו עם המעגל.

לא מדובר על המעגל הקבוע, אלא על מעגל המוגדר על ידי מרכזו וקטע קו שהוא הרדיוס.



לפי 5.2 ניתן לבנות אנך ממרכז המעגל O לקו l. נסמן ב־M את נקודת החיתוך של l עם האנך. M חוצה של המיתר XY, כאשר X, Y הן נקודות החיתוך של הקו עם המעגל. $2s$ הוא אורך המיתר. שימו לב שבתרשים s, X, Y הם רק הגדרות: טרם בנינו את נקודות החיתוך.



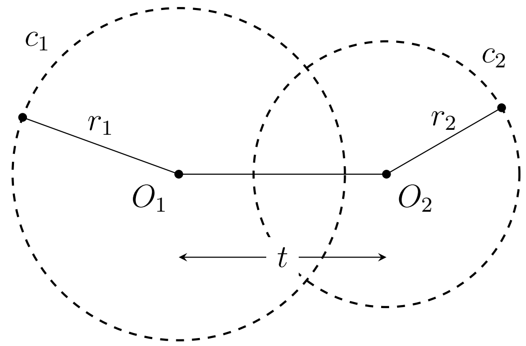
$\triangle OMX$ הוא מעגל ישר זווית, ולכן $s^2 = r^2 - t^2 = (r+t)(r-t)$. r נתון כרדיוס המעגל, ו־t הוגדר כאורך של OM, קטע הקו שבין O ו־M. לפי 5.3 ניתן לבנות קטעי קו באורך t מהנקודה O בשני הכיוונים RO ו־OR. התוצאה היא שני קטעי קו שאורכם $r+t, r-t$.

לפי 5.5 ניתן לבנות קטע קו באורך $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$. שוב לפי 5.3, ניתן לבנות קטעי קו באורך s על הקו הנתון l מהנקודה M בשני הכיוונים. הקצה השני של כל אחד מקטעי הקו האלה הוא נקודת חיתוך של l עם המעגל c.

5.7 בניית נקודות חיתוך של שני מעגלים

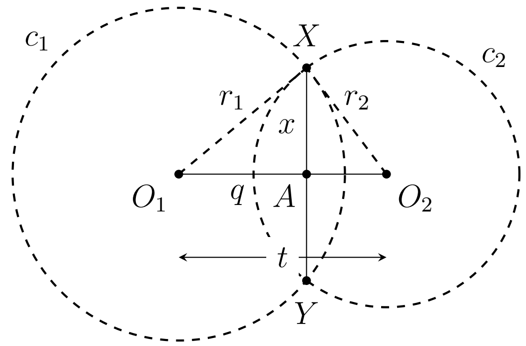
נתון שני מעגלים עם מרכזים O_1, O_2 ורדיוסים r_1, r_2. ניתן לבנות את נקודות החיתוך שלהם X, Y.

עם סרגל ניתן לבנות את קטע הקו O_1O_2 המחבר את שני המרכזים. נסמן את אורכו ב־t.



$t = O_1O_2$

נסמן ב־A את נקודת החיתוך של O_1O_2 עם XY, ונסמן את האורכים $x = XA$,$q = O_1A$.



$t = O_1O_2$
$q = O_1A$
$x = XA$

שימו לב שלא בנינו את הנקודה A, אבל אם נצליח לבנות את האורכים q, x, לפי 5.3 נוכל לבנות את A באורך q מהנקודה O_1 לכיוון O_1O_2. לפי 5.2 ניתן לבנות את האנך ל־O_1O_2 בנקודה A, ושוב לפי 5.3 ניתן לבנות קטעי קו באורך x מהנקודה A בשני הכיוונים לאורך האנך. הקצה השני של כל קטע קו X, Y הוא נקודת חיתוך של שני המעגלים.

בניית האורך q: נסמן $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$, אורך היתר של משולש ישר זווית. ניתן לבנות אותו מ־r_1, t, האורכים הידועים של שני הצלעות האחרים: על קו כלשהי נבנה קטע קו RS באורך r_1, אחר כך אנך ל־RS דרך R, ולבסוף קטע קו RT באורך t מ־R על האנך. אורך היתר ST שווה ל־d. ניתן לבנות את המשולש בכל מקום במישור, לאו דווקא בקירבת המעגלים.

לפי משפט הקוסינוסים ב־$\triangle O_1O_2X$:

$$\begin{aligned}
r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1 t \cos \angle XO_1O_2 \\
&= t^2 + r_1^2 - 2tq \\
q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t} \,.
\end{aligned}$$

לפי 5.3 ניתן לבנות את האורכים האלה, ולפי 5.4 ניתן לבנות את q מהביטויים $d + r_2, d - r_2, 2t$.

בניית האורך x: $\triangle AO_1X$ הוא משולש ישר זווית, ולכן $x^2 = r_1^2 - q^2 = \sqrt{(r_1 + q)(r_1 - q)}$. לפי 5.3 ניתן לבנות $h = r_1 + q$ ו־$k = r_1 - q$, ולפי 5.5 ניתן לבנות $x = \sqrt{hk}$.

פרק 6 האם משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חופפים?

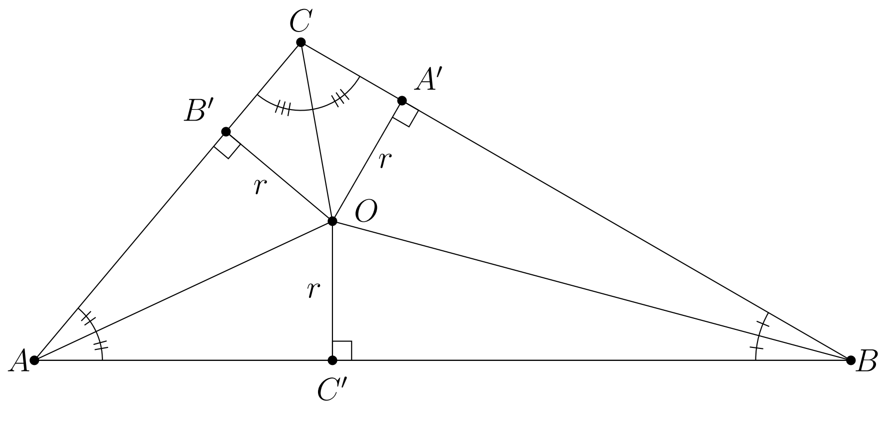
האם משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חופפים? לא בהכרח: לשני המשולשים הלא־חופפים עם הצלעות $(17, 25, 28)$ ו־$(20, 21, 27)$ היקף 70 ושטח 210. ברבש [1] מראה שנתון משולש שווה־צלעות, קיימים משולשים לא חופפים עם אותו היקף ואותו שטח. אולם, ההוכחה שלה לא כוללת בנייה. פרק זה (המבוסס על [6]) מראה שנתון משולש עם אורכי צלעות רציונליים, ניתן לבנות משולש לא־חופף עם אורכי צלעות רציונליים, ועם אותו היקף ושטח.

בסוף הפרק הבאתי הוכחה אלגנטית לנוסחה של הרון לשטח של משולש.

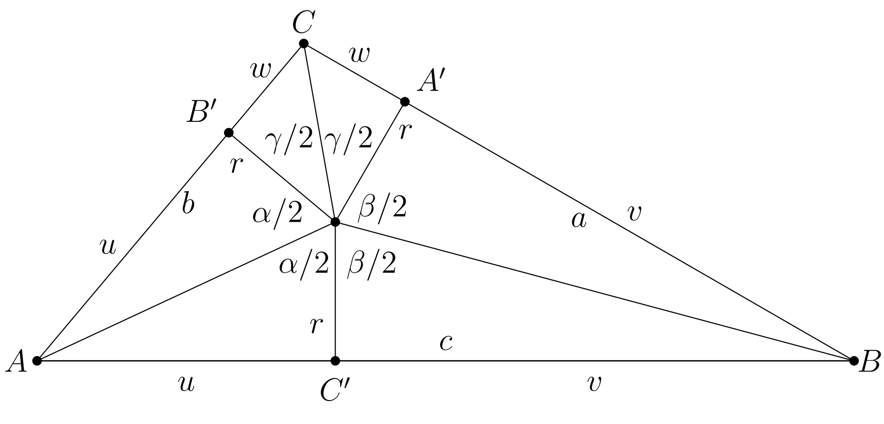
6.1 ממשולשים לעקומות אליפטיות

התרשים שלהלן מציג את O, מרכז המעגל החסום על ידי המשולש $\triangle ABC$, שהוא החיתוך של חוצי הזווית בקודקודים. נוריד גבהים מ־O לצלעות. לכל הגבהים אורך r, הרדיוס של המעגל החסום. הגבהים וחוצי הזוויות מייצרים שלושה משולשים **ישר זווית** חופפים:

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB' .$$



התרשים שלהלן מציג את הצלעות a, b, c המחולקות לקטעי קו u, v, w, והזוויות $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$:



השטח של $\triangle ABC$ הוא סכום השטחים של $\triangle AOC, \triangle BOC, \triangle AOB$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(w+v)r + \frac{1}{2}(v+u)r + \frac{1}{2}(u+w)r = \frac{1}{2}\cdot 2(u+v+w)r = rs\,, \tag{6.1}$$

כאשר s הוא מחצית ההיקף: $s = u+v+w$. נחשב את האורכים של u, v, w מהזוויות ו־r:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r} \tag{6.2}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{v}{r} \tag{6.3}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}\,. \tag{6.4}$$

כעת ניתן לבטא את s במונחים של טנגנסים:

$$s = u+v+w = r\tan\frac{\alpha}{2} + r\tan\frac{\beta}{2} + r\tan\frac{\gamma}{2} = r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,,$$

ולפי משוואה 6.1 השטח הוא:

$$A = rs = r^2\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,. \tag{6.5}$$

מ־$A = rs$ אנו יודעים ש־$r = A/s$, ולכן ניתן לבטא את משוואה 6.5 כ:

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{(A/s)^2} = \frac{s^2}{A}\,. \tag{6.6}$$

סכום הזוויות α, β, γ הוא 2π, ולכן:

$$\gamma/2 = \pi - (\alpha/2 + \beta/2) \tag{6.7}$$

$$\tan\gamma/2 = \tan(\pi - (\alpha/2 + \beta/2)) \tag{6.8}$$

$$= -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \tag{6.9}$$

$$= \frac{\tan\alpha/2 + \tan\beta/2}{\tan\alpha/2\ \tan\beta/2 - 1}\,. \tag{6.10}$$

הנה הוכחה של הנוסחה לטנגנס של סכום של שתי זוויות:

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos(\theta+\phi)} \tag{6.11}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi} \tag{6.12}$$

$$= \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}\,, \tag{6.13}$$

כאשר חילקנו את 6.12 ב־$\cos\theta\cos\phi$.

נפשט את הסימון על ידי הגדרת נעלמים עבור הטנגנסים:

$$\begin{aligned} x &= \tan\frac{\alpha}{2} \\ y &= \tan\frac{\beta}{2} \\ z &= \tan\frac{\gamma}{2}\,. \end{aligned}$$

לפי משוואה 6.10 ניתן להחליף את $z = \tan\gamma/2$ בביטוי עם x, y:

$$z = \frac{x+y}{xy-1}\,. \tag{6.14}$$

עם סימון זה משוואה 6.6 היא:

$$x + y + \frac{x+y}{xy-1} = \frac{s^2}{A}\,. \tag{6.15}$$

האם קיימים פתרונות שונים למשוואה 6.15?

עבור משולש ישר־הזווית $(3,4,5)$, השטח ומחצית ההיקף שווים ל־6:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}(3+4+5)\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4} = \frac{6^2}{6} = 6\,. \tag{6.16}$$

אם קיים פתרון נוסף למשוואה 6.15 עבור $s = 6, A = 6$, ניתן לבטא אותה כ:

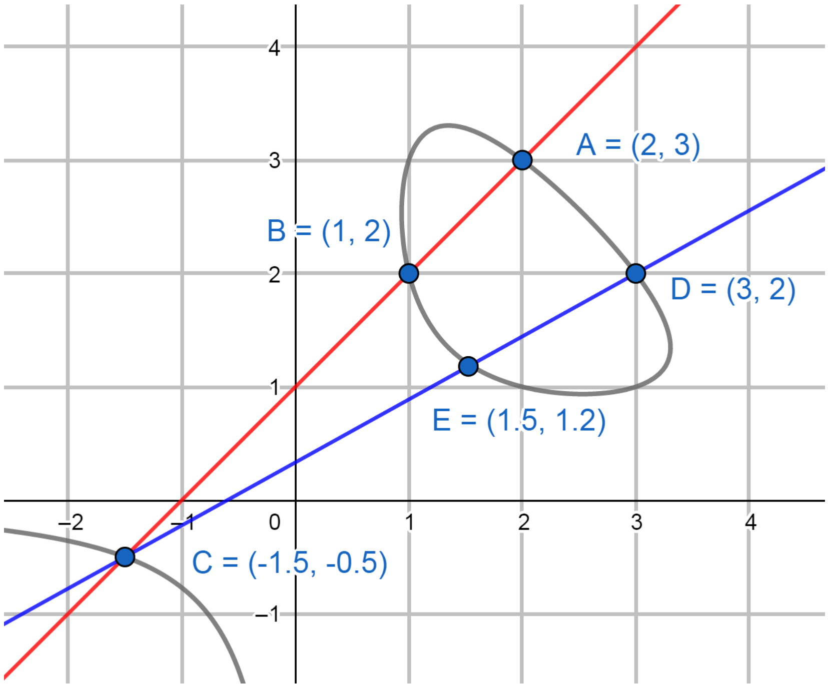
$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0\,. \tag{6.17}$$

זו משוואה עבור **עקומה אליפטית**. Andrew Wiles השתמש בעקומות אליפטיות בהוכחה של המשפט האחרון של Fermat. משתמשים בעקומות אליפטיותגם בהצפנה עם מפתח ציבורי.

6.2 פתרון המשוואה לעקומה האליפטית

העקומה האפורה בגרף להלן מראה את 6.17. כל נקודה בעקומה ברביע הראשון היא פתרון, כי אורכי הצלעות חייבים להיות חיוביים. A, B, D מתאימות למשולש $(3,4,5)$ כפי שנראה בהמשך. כדי למצוא פתרונות **רציונליים** נוספים, נשתמש ב־**שיטת שני סקנסים** (*method of two secants*).[1]

[1] McCallum [2] כותב שיש מספר אינסופי של פתרונות רציונליים.



ציירו סקנס דרך הנקודות $(2,3) = A$ ו־$(1,2) = B$. הוא חותך את העקומה ב־$C = (-1.5, -0.5)$. נקודה זו אינה פתרון כי הקואורדינטות שליליים. אם נצייר סקנס שני מ־C ל־$D = (3,2)$, החיתוך שלו עם העקומה ב־E כן מהווה פתרון נוסף.[2]

המשוואה של הקו (האדום) דרך A, B היא $y = x + 1$. נציב עבור y במשוואה 6.17:

$$x^2(x+1) + x(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6 = 0,$$

ונפשט:

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0\,.$$

מהנקודות A, B אנו יודעים שני שורשים $x = 2, x = 1$, כך שאפשר לפרק את הפולינום מדרגה שלוש כך:

$$(x-2)(x-1)(ax+b) = 0\,,$$

כאשר רק השורש השלישי לא ידוע. נכפיל את הגורמים ונראה מיד ש־a, המקדם של הגורם מדרגה שלוש x^3, חייב להיות 2, ו־$2b$, הקבוע, חייב להיות 6. לכן, הגורם השלישי הוא $2x + 3$ ומכאן שהשורש השלישי הוא $x = -\frac{3}{2}$. נחשב $y = x + 1 = -\frac{1}{2}$. הקואורדינטות של הנקודה C הן $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

המשוואה של הסקנס שני דרך D, E (בכחול) היא:

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\,. \tag{6.18}$$

נציב עבור y במשוואה 6.17:

$$x^2\left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\right) + x\left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\right)^2 - 6x\left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\right) + 6 = 0\,,$$

---

[2] $(1.5, 1.2)$ הוא קירוב המוצג על ידי גיאוגברה. בהמשך נחשב את הקואורדינטות המדוייקות של E.

ונפשט:

$$\frac{70}{81}x^3-\frac{71}{27}x^2-\frac{17}{9}x+6=0\,.$$

שוב יש לנו שני שורשים $x=3, x=-\frac{3}{2}$, וניתן לפרק את הפולינום מדרגה שלוש כ:

$$(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)(ax+b)=0\,.$$

נשווה את המקדם של x^3 ונשווה את הקובע ונקבל:

$$\frac{70}{81}x-\frac{4}{3}=0\,,$$

ולכן:

$$x=\frac{81}{70}\cdot\frac{4}{3}=\frac{27\cdot 4}{70}=\frac{54}{35}\,.$$

נחשב את y ממשוואה 6.18 והקואורדינטות של E הן:

$$\left(\frac{54}{35},\frac{25}{21}\right)\,.$$

לבסוף, נחשב את z ממשוואה 6.14:

$$z=\frac{x+y}{xy-1}=\left(\frac{54}{35}+\frac{25}{21}\right)\,/\,\left(\frac{54}{35}\cdot\frac{25}{21}-1\right)=\frac{2009}{615}=\frac{49}{15}\,.$$

6.3 מפתורונות לעקומה האליפטית למשולשים

מ־x,y,z, a,b,c, ניתן לחשב את אורכי הצלעות של המשולש $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}
a &= w+v=r(z+y)=(z+y)\\
b &= u+w=r(x+z)=(x+z)\\
c &= u+v=r(x+y)=(x+y)\,,
\end{aligned}$$

כי $r=\frac{A}{s}=\frac{6}{6}=1$.

עבור הפתרון $A=(2,3)$ של העקומה האליפטית, ערכו של z הוא:

$$z=\frac{x+y}{xy-1}=\frac{2+3}{2\cdot 3-1}=1\,,$$

והצלעות של המשולש הם:

$$\begin{aligned}
a &= z+y=1+3=4\\
b &= x+z=2+1=3\\
c &= x+y=2+3=5\,.
\end{aligned}$$

המשולש ישר־זווית עם $s=A=6$. חישוב הצלעות המתאימים ל־B ו־D נותן את אותו משולש. עבור E:

$$\begin{aligned} a &= z+y=\frac{49}{15}+\frac{25}{21}=\frac{156}{35}\\ b &= x+z=\frac{54}{35}+\frac{49}{15}=\frac{101}{21}\\ c &= x+y=\frac{54}{35}+\frac{25}{21}=\frac{41}{15}\,, \end{aligned}$$

נבדוק את התוצאה. מחצית ההיקף היא:

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{156}{35}+\frac{101}{21}+\frac{41}{15}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{468+505+287}{105}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1260}{105}\right)=6\,,$$

וניתן לחשב את השטח באמצעות הנוסחה של הרון:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &= \sqrt{6\left(6-\frac{156}{35}\right)\left(6-\frac{101}{21}\right)\left(6-\frac{41}{15}\right)}\\ &= \sqrt{6\cdot\frac{54}{35}\cdot\frac{25}{21}\cdot\frac{49}{15}}\\ &= \sqrt{\frac{396900}{11025}}\\ &= \sqrt{36}=6\,. \end{aligned}$$

6.4 הוכחה של הנוסחה של הרון

אם $\phi+\theta+\psi=\pi$, הנוסחה של סכום שלושת הזוויות היא:

$$\tan\phi+\tan\theta+\tan\psi=\tan\phi\tan\theta\tan\psi\,. \qquad (6.19)$$

ההוכחה היא מיידית ממשוואה 6.13:

$$\begin{aligned} \tan\psi &= \tan(\pi-(\phi+\theta))=-\tan(\phi+\theta)\\ &= \frac{\tan\phi+\tan\theta}{\tan\phi\tan\theta-1}\\ \tan\phi\tan\theta\tan\psi-\tan\psi &= \tan\phi+\tan\theta\\ \tan\phi\tan\theta\tan\psi &= \tan\phi+\tan\theta+\tan\psi\,. \end{aligned}$$

ממשוואות 6.2–6.5 ו־$r = A/s$:

$$\begin{aligned}
A &= r^2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)\\
&= r^2\left(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\right)\\
&= r^2\left(\frac{u}{r}\frac{v}{r}\frac{w}{r}\right)\\
&= \frac{u\,v\,w}{r}\\
&= \frac{s}{A}\,u\,v\,w\\
A^2 &= s\,u\,v\,w\,.
\end{aligned}$$

$s = u + v + 2$ ולכן:

$$\begin{aligned}
s-a &= (u+v+w)-(w+v) = u\\
s-b &= (u+v+w)-(u+w) = v\\
s-c &= (u+v+w)-(u+v) = w\,,
\end{aligned}$$

ואנו מקבלים את הנוסחה של הרון:

$$\begin{aligned}
A^2 &= s\,u\,v\,w\\
&= s(s-a)(s-b)(s-c)\\
A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.
\end{aligned}$$

מקורות

[1] Marita Barabash. A non-visual counterexample in elementary geometry. *The College Mathematics Journal*, 36(5), 2005.

[2] Benjamin Bold. *Famous Problems of Mathematics: A History of Constructions with Straight Edge and Compass*. Van Nostrand, 1969.

[3] Heinrich Dörrie. *100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. Dover, 1965.

[4] Heinrich Dörrie. 100 problems of elementary mathematics: Their history and solution. Newly reworked by Michael Woltermann. `http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm`, 2010.

[5] Norbert Hungerbühler. A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem. *American Mathematical Monthly*, 101(8):784–787, 1994.

[6] William McCallum. A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves. `http://blog.kleinproject.org/?p=4`, 2012.

[7] Timothy Peil. The rusty compass theorem. `http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm`.

[8] משה סטופל, קלרה זיסקין, editor. בניות גיאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות. הוצאת שאנן, 2015.

[9] Ramanujan. Squaring the circle. *Journal of the Indian Mathematical Society*, page 13, 1913. `http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf`.

[10] Ramanujan. Modular equations and approximations to π. *Quarterly Journal Mathematics*, XLV:350–372, 1914.

[11] Godfried Toussaint. A new look at Euclid's second proposition. *The Mathematical Intelligencer*, 15(3):12–23, 1993.

[12] Edward C. Wallace and Stephen F. West. *Roads to Geometry (Third Edition)*. Pearson, 2003.