המתמטיקה של אוריגמי

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 4

תוכן עניינים

פרק 1

הקדמה

מסמך זה מפתח את המתמטיקה של אוריגמי תוך שימוש במתמטיקה של בית־ספר תיכון. המשוואות של קווים ניתנים בצורה של שיפוע ונקודת חיתוך $y = mx + b$.

פרק 2 מפתח את משוואות של שבעת האקסיומות ביחד עם דוגמאות נומריות. באיורים, קווים נתונים מוצגים בקווים רגילים, קיפולים בקווים מקווקווים, קווי עזר בקווים מנוקדים, וחצים מנוקדים מראים את כיוון הקיפול של הנייר.

פעולות הקיפול יכולות לבנות כל אורך שניתן לבנות עם סרגל ומחוגה. נתונים a, b: ניתן לבנות $a + b, a - b, a \times b, a/b, \sqrt{a}$ [פרק 4 ,5].

פעולת הקיפול חזקה יותר כי ניתן לבנות שורשים ממעולה שלוש. פרק 3 מציג שתי דרכים לחלק זווית לשלושה ופרק 4 מציג שתי דרכים להכפלת קוביה.

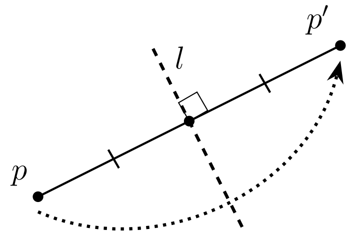
פרק 5 מסביר את השיטה הגיאומטרית של Eduard Lill למציאת שורשים ממשיים של פולינום. נציג את השיטה עבור פולינומים ממעלה שלוש. פרק 6 מביא את המימוש של Margharita P. Beloch לשיטה של Lill באמצעות קיפול.

נספח A מכיל קישורים לפרוייקטים בגיאוגרה המדגימים את האקסיומות. נספח B מפתח שוויונות טריגונומטריות. נספח C מסביר את ההגדרה הגיאומטרית של פרבולות.

הגדרות

לפי כל אחד מהאקסיומות, קיים **קיפול** המניח נקודות וקווים על נקודות וקווים, כך שתנאים מסויימים מתקיימים. המונח קיפול בא מהפעולה באוריגמי של קיפול דף נייר, אבל כאן נשתמש בו עבור הקו הגיאומטרי שנוצר על ידי קיפול דף נייר.

ניתן למצוא הגדרות פורמליות ב־[פרק 6, 10]. לתשומת לב הקורא, **לפי ההגדרה**, כתוצאה מקיפול נוצרים **שיקופים**. נתונה נקודה p, השיקוף שלה סביב הקיפול l הוא נקודה p', כך ש־l הוא האנך האמצעי של קטע הקו $\overline{pp'}$:

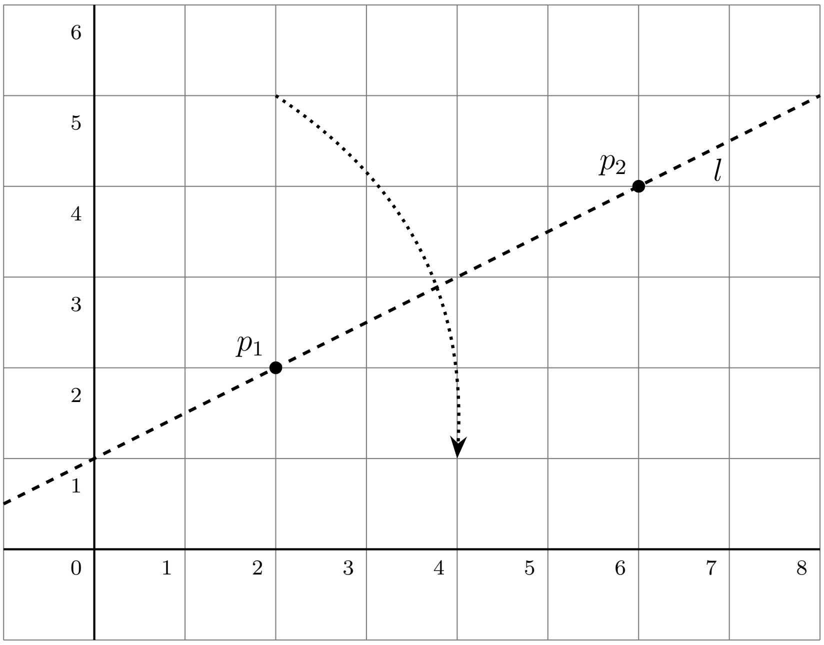


פרק 2

האקסיומות

2.1 אקסיומה 1

אקסיומה נתונות שתי נקודות שונות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, קיים קיפול יחיד l העובר דרך שתיהן.



פיתוח משוואת הקיפול

המשוואה של הקיפול l מתקבלת מהקואורדינטות של p_1 ו־p_2: השיפוע הוא המנה של הפרשי הקואורינטות ונקדות החיתוך עם ציר ה־y מתקבלת מ־p_1:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,. \tag{2.1}$$

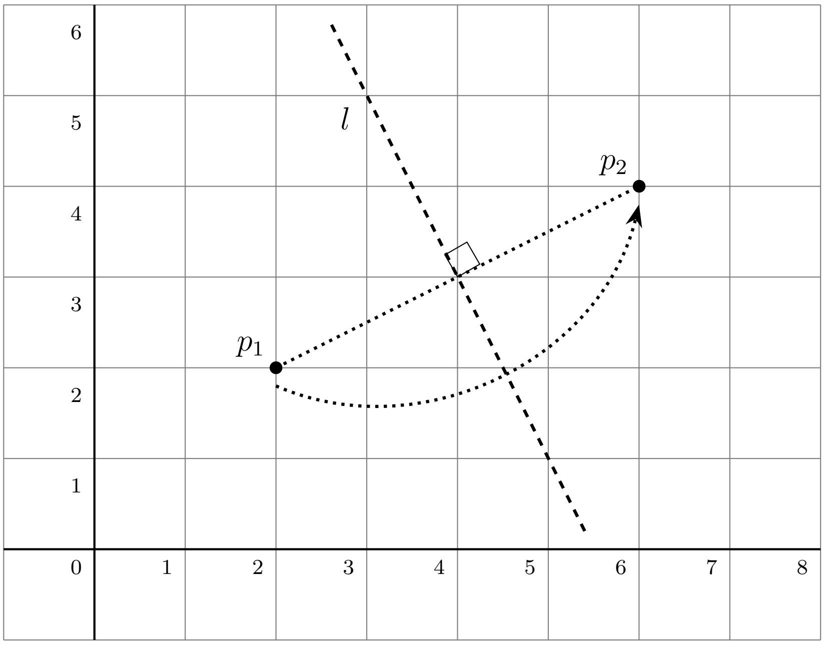
דוגמה

נסמן $p_1 = (2, 2), p_2 = (6, 4)$. המשוואה של l היא:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4-2}{6-2}(x-2) \\ y &= \frac{1}{2}x + 1\,. \end{aligned}$$

2.2 אקסיומה 2

אקסיומה נתונות שתי נקודות שונות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, קיים קיפול יחיד l המניח את p_1 על p_2.



פיתוח משוואת הקיפול

הקיפול l הוא האנך האמצעי של $\overline{p_1p_2}$. השיפוע שלו הוא ההופכי השלילי של השיפוע של הקו המחבר את p_1 ו־p_2. l עובר דרך נקודת האמצע בין שתי הנוקדות:

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) . \tag{2.2}$$

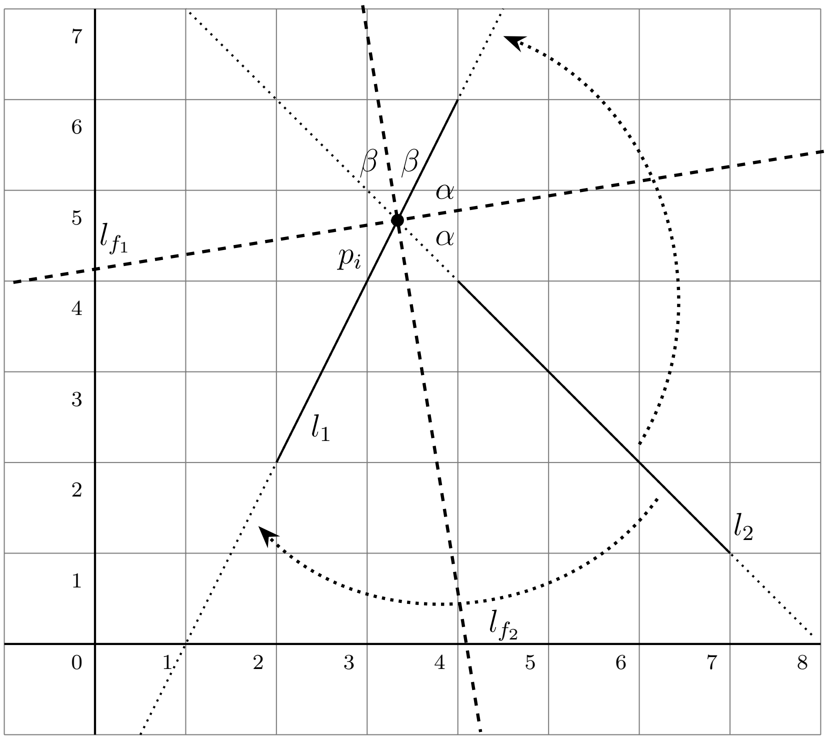
דוגמה

נסמן $p_1 = (2, 2), p_2 = (6, 4)$. המשוואה של l היא:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{2+4}{2}\right) &= -\frac{6-2}{4-2}\left(x - \left(\frac{2+6}{2}\right)\right) \\ y &= -2x + 11 \, . \end{aligned}$$

2.3 אקסיומה 3

אקסיומה נתונים שני קווים l_1 ו־l_2, קיים קיפול l המניח את l_1 על l_2.



פיתוח משוואת הקיפול עבור קווים מקבילים

אם הקווים מקבילים, l_1 הוא $y = mx + b_1$ ו־l_2 הוא $y = mx + b_2$. הקיפול הוא הקו המקביל ל־l_1, l_2 וחצי המרחק ביניהם: $y = mx + \dfrac{b_1 + b_2}{2}$.

פיתוח משוואת הקיפול עבור קווים נחתכים

אם הקווים נחתכים, l_1 הוא $y = m_1x + b_1$ ו־l_2 הוא $y = m_2x + b_2$.

$p_i = (x_i, y_i)$, נקודת החיתוך של שני הקווים, הוא:

$$\begin{aligned}
m_1x_i + b_2 &= m_2x_i + b_2 \\
x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\
y_i &= m_1x_i + b_1 \,.
\end{aligned}$$

דוגמה

נסמן ב־l_1 את הקו $y = 2x - 2$, ונסמן ב־l_2 את הקו $y = -x + 8$. נקודת החיתוך היא:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{8-(-2)}{2-(-1)} = \frac{10}{3} \approx 3.33 \\ y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4.67\,. \end{aligned}$$

פיתוח משוואת השיפוע של חוצה הזווית

שני קווים יוצרים זווית בנקודות החיתוך, למעשה, שני זוגות של זוויות קודקודיות. הקיפולים הם חוצי הזווית שלהן.

אם הזווית של l_1 יחסית לציר ה־x הוא θ_1 והזווית של l_2 יחסית לציר ה־x הוא θ_2, אזי קיפול הוא הקו היוצר זווית של $\theta_b = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ יחסית לציר ה־x.

$m_1 = \tan\theta_1$ ו־$m_2 = \tan\theta_2$ נתונים ו־m_b, השיפוע של חוצה הזווית, הוא:

$$m_b = \tan\theta_b = \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\,.$$

פיתוח המשוואה מחייב שימוש בשוויונות הטריגונומטריות:[1]

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_1+\alpha_2) &= \frac{\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2}{1 - \tan\alpha_1\tan\alpha_2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}\,. \end{aligned}$$

תחילה נמצא את m_s, השיפוע של $\theta_1 + \theta_2$:

$$m_s = \tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}\,.$$

אחר כך נמצא את m_b, השיפוע של חוצה הזווית:

$$\begin{aligned} m_b &= \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2(\theta_1+\theta_2)}}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+m_s^2}}{m_s}\,. \end{aligned}$$

[1] פיתוח המשוואות הללו נתון בנספח ב'.

דוגמה

עבור הקווים $y = 2x - 2$ ו־$y = -x + 8$, השיפוע של חוצה הזווית הוא:

$$\begin{aligned}
m_s &= \frac{2 + (-1)}{1 - (2 \cdot -1)} = \frac{1}{3}\\
m_b &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (1/3)^2}}{1/3} = -3 \pm \sqrt{10} \approx -6.16,\ 0.162\,.
\end{aligned}$$

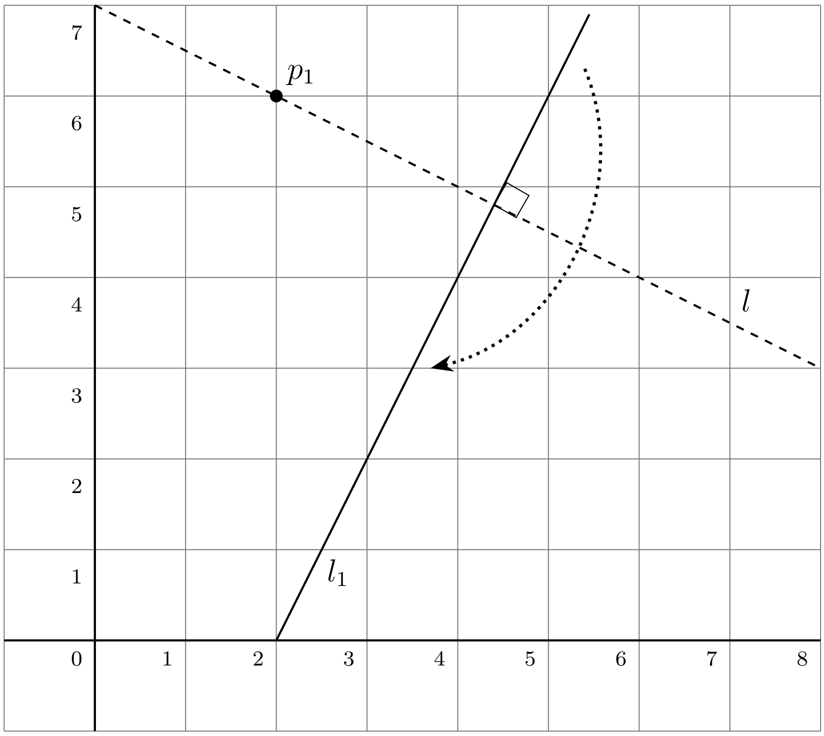
פיתוח משוואת הקיפול

נפתח את המשוואה של הקיפול l_{f_1} באיור עם שיפוע חיובי. אנו יודעים את הקואורדינטות של נקודת החיתוך של שני הקווים $m_i = \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{14}{3} &= (-3 + \sqrt{10}) \cdot \frac{10}{3} + b\\
b &= \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3}\\
y &= (-3 + \sqrt{10})x + \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 0.162x + 4.13\,.
\end{aligned}$$

2.4 אקסיומה 4

אקסיומה נתונים נקודה p_1 וקו l_1, קיים קיפול יחיד l הניצב ל־l_1 שעובר דרך p_1.



פיתוח משוואת הקיפול

נסמן את $y = m_1x + b_1$ ב־l_1, ונסמן $p_1 = (x_1, y_1)$. l ניצב ל־l_1 לכן השיפוע שלו הוא $-\dfrac{1}{m_1}$. הקו עובר דרך p_1 ונוכל לחשב את החיתוך שלו b ולכתוב את המשוואה:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -\frac{1}{m}x_1 + b \\
b &= \frac{(my_1 + x_1)}{m} \\
y &= -\frac{1}{m}x + \frac{(my_1 + x_1)}{m}\,.
\end{aligned}
$$

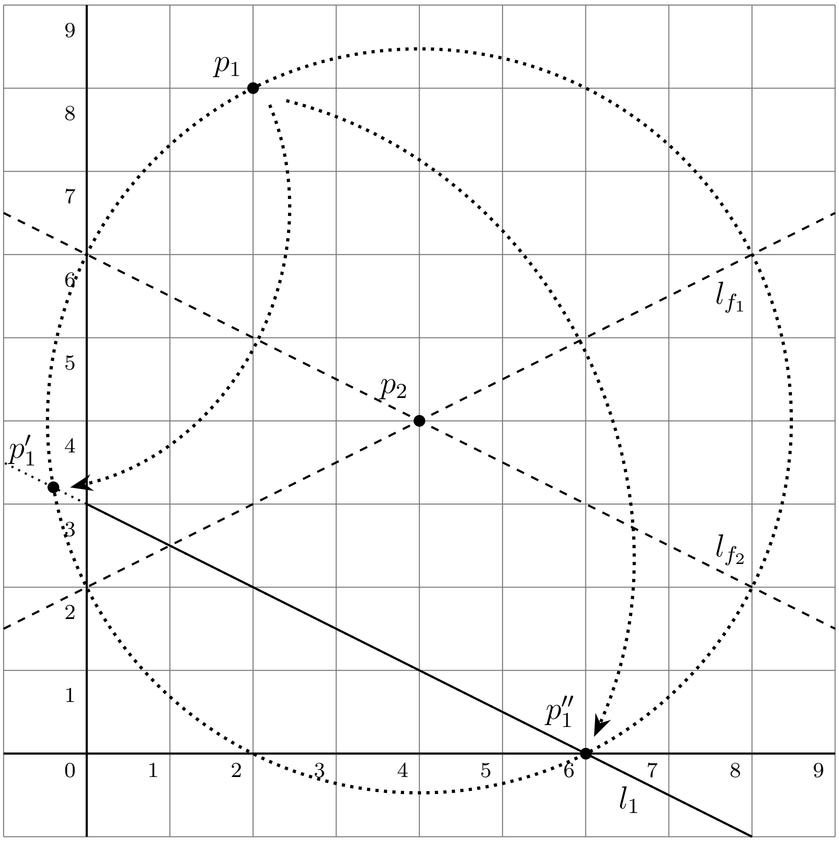
דוגמה

נסמן ב־p_1 את הנקודה $(2,6)$ ונסמן ב־l_1 את הקו $y = 2x - 4$. המשוואה של הקיפול l היא:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2 \cdot 6 + 2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7\,.$$

2.5 אקסיומה 5

אקסיומה נתונות נקודות p_1, p_2 ונתון קו l_1, קיים קיפול l המניח את p_1 מעל l_1 והעובר דרך p_2.



עבור זוג נקודות נתון וקו נתון, יכולים להיות אפס, אחד או שני קיפולים.

פיתוח משוואות עבור השיקופים

נסמן ב־l את הקיפול העובר דרך p_2, ונסמן ב־p_1' את השיקוף של p_1 מסביב ל־l. האורך של $\overline{p_1p_2}$ שווה לאורך של $\overline{p_2p_1}'$. המקום הגיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחק $\overline{p_1p_2}$ **מ־**p_2 הוא המעגל שמרכזו p_2 והרדיוס שלו הוא האורך $\overline{p_1p_2}$. נקודות החיתוך של מעגל זה עם הקו l_1 הן המקומות האפשריים עבור p_1'.

נסמן $y = m_1x + b_1$ ב־l_1, ונסמן $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$. המשוואה של המעגל שמרכזו p_2 עם רדיוס באורך של $\overline{p_1p_2}$ היא:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2$$

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{כאשר.}$$

נציב את המשוואה של הקו לתוך המשוואה של המעגל:

$$(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 = (x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 = r^2 \,,$$

ונקבל משוואה ריבועית עבור קואורדינטות ה־x של נקודות החיתוך האפשריות:

$$x^2(1+m_1^2) \;+\; 2(-x_2+m_1b-m_1y_2)x \;+\; (x_2^2+(b_1^2-2b_1y_2+y_2^2)-r^2)=0\,. \tag{2.3}$$

למשוואה ריבועית יש לכל היותר שני פתרונות x_1', x_1'', ונחשב את y_1', y_1'' מ־$y=m_1x+b_1$. נקודות השיקוף הן $p_1'=(x_1',y_1'), p_1''=(x_1'',y_1'')$.

דוגמה

נסמן ב־p_1 את הנקודה $(2,8)$ ונסמן ב־p_2 את הנקודה $(4,4)$. נסמן ב־l_1 את הקו $y=-\frac{1}{2}x+3$. משוואת המעגל היא:

$$(x-4)^2+(y-4)^2=r^2=(4-2)^2+(4-8)^2=20\,.$$

נציב את המשוואה של הקו לתוך המשוואה של המעגל ונפשט כדי לקבל משוואה ריבועית עבור קואורדינטות ה־x של נקודות החיתוך (אפשר גם להשתמש משוואה 2.3):

$$\begin{aligned}
(x-4)^2+\left(\left(-\frac{1}{2}x+3\right)-4\right)^2 &= 20\\
\frac{5}{4}x^2-7x-3 &= 0\\
5x^2-28x-12 &= 0\\
(5x+2)(x-6) &= 0\,.
\end{aligned}$$

שתי נקודות חיתוך הן:

$$p_1'=\left(-\frac{2}{5},\frac{16}{5}\right)=(-0.4,3.2)\,,\quad p_1''=(6,0)\,.$$

פיתוח המשוואות של הקיפולים

הקיפולים יהיו האנכים האמצעיים של $\overline{p_1p_1'}$ ו־$\overline{p_1p_1''}$. המשוואה של אנך אמצעי נתונה על ידי משוואה 2.2, שנעתיק כאן עבור p_1':

$$y-\frac{y_1+y_1'}{2}=-\frac{x_1'-x_1}{y_1'-y_1}\left(x-\frac{x_1+x_1'}{2}\right)\,. \tag{2.4}$$

דוגמה

עבור $p_1 = (2,8)$ ו־$p_1' = \left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$, משוואת הקיפול עבור l_{f_1} היא:

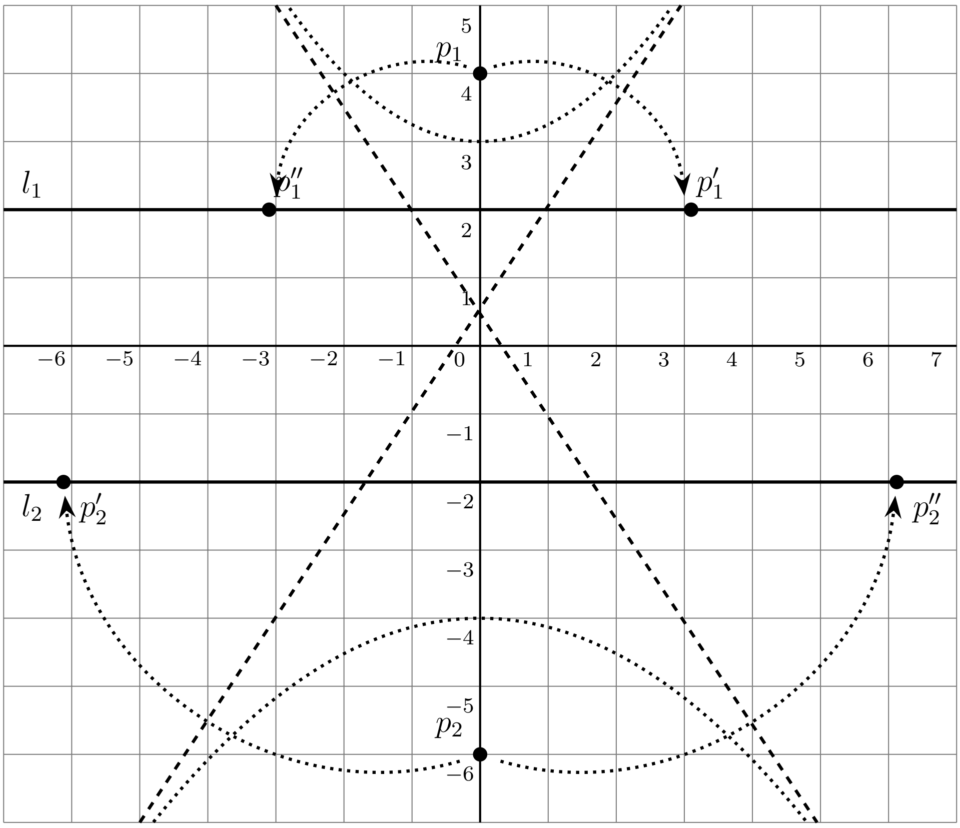
$$\begin{aligned} y - \frac{8 + (16/5)}{2} &= -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8}\left(x - \frac{2 + (-2/5)}{2}\right) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 6\,. \end{aligned}$$

עבור $p_1 = (2,8)$ ו־$p_1'' = (6,0)$, משוואת הקיפול עבור l_{f_2} היא:

$$\begin{aligned} y - \frac{8 + 0}{2} &= -\frac{6 - 2}{0 - 8}\left(x - \frac{2 + 6}{2}\right) \\ y &= \frac{1}{2}x + 2\,. \end{aligned}$$

2.6 אקסיומה 6

אקסיומה נתונות שתי נקודות p_1 ו־p_2 ונתונים שני קווים l_1 ו־l_2, קיים קיפול l המניח את p_1 על ל־l_1 ו־p_2 על ל־l_2.



עבור זוג נקודות נתון וזוג קווים נתון, יכולים להיות אפס, אחד, שניים או שלושה קיפולים. ניתן למצוא הוכחה ב־[6, פרק 10]; בנספח ד' הבאנו דוגמאות גרפיות לארבעת האפשרויות.

קיפול המניח את p_i על l_i הוא קו שמרחקו ל־p_i שווה למרחקו ל־l_i. המקום הגיאומטרי של נקודות שהן במרחק שווה מנקודה p_i ומקו l_i הוא פרבולה עם מוקד (focus) p_i ומדריך (directrix) l_i. קיפול הוא כל קו המשיק לפרבולה. הצדקה מפורטת של טיעון זה נמצא בנספח ג'.

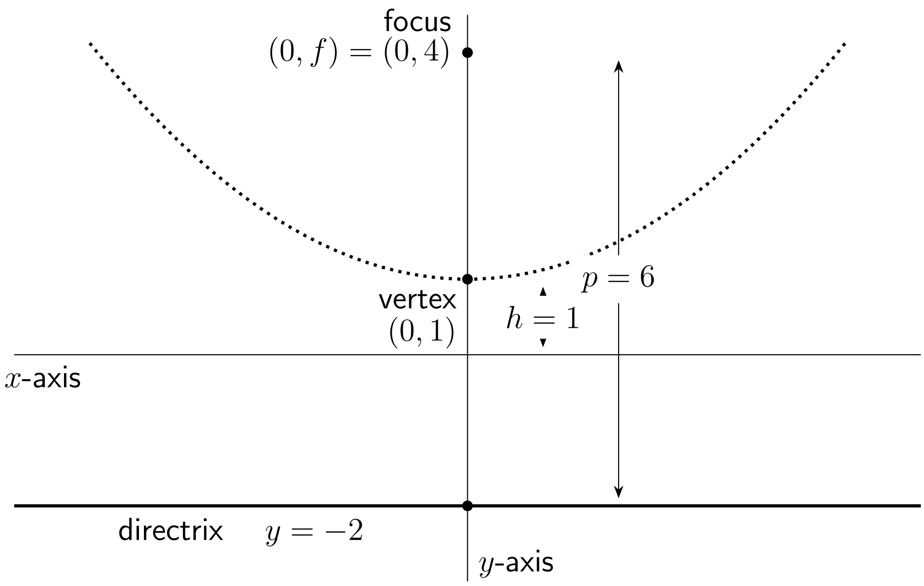
כדי שהקיפול יניח בו־זמנית את p_1 על ל־l_1 ו־p_2 על ל־l_2, הוא חייב להיות משיק משותף לשתי הפרבולות.

המשוואה עבור פרבולה שרירותית די מסובכת, לכן נגביל את הדיון לפרבולה שציר ה־y הוא ציר הסמטריה. אין כאן מגבלה משמעותית כי עבור כל פרבולה קיימים הזזה וסיבוב המעבירים אותה כך שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה־y.

נביא גם דוגמה עם פרבולה שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה־x.

פיתוח הנקודה של הקיפול

תהי $(0, f)$ מוקד של פרבולה עם מדריך $y = d$. נגדיר $p = f - d$, האורך (עם הסימן) של קטע הקו בין המוקד למדריך.[2] אם קודקוד (vertex) הפרבולה נמצא על ציר ה־x, המשוואה של הפרבולה היא $y = \dfrac{x^2}{2p}$. כדי להזיז את הפרבולה למעלה או למטה על ציר ה־y, כך שהקודקוד שלה היא $(0, h)$, יש להוסיף h למשוואת הפרבולה: $y = \dfrac{x^2}{2p} + h$.



נגדיר $a = 2ph$ כך שמשוואת הפרבולה היא:

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p}$$
$$x^2 - 2py + a = 0\,.$$

עבור הפרבולה באיור למעלה המשוואה היא:

$$x^2 - 2 \cdot 6\, y + 2 \cdot 6 \cdot 1 = 0$$
$$x^2 - 12y + 12 = 0\,.$$

נציב את המשוואה של קו **שרירותי** $y = mx + b$ במשוואה עבור הפרבולה ונקבל משוואה עבור נקודות החיתוך של הקו והפרבולה:

$$x^2 - 2p(mx + b) + a = 0$$
$$x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) = 0\,.$$

הקו יהיה משיק לפרבולה אם ורק אם למשוואה ריבועית זו קיים **בדיוק** פתרון אחד אם ורק אם הדיסקרימיננטה היא אפס:

$$(-2mp)^2 \; - \; 4 \cdot 1 \cdot (-2pb + a) = 0\,.$$

[2] השתמשנו בסימון p_i עבור נקודות, כך שהשימוש כאן ב־p עלול לבלבל, אבל סימון זה מקובל. השם הפורמלי עבור p הוא מחצית ה־latus rectum.

לאחר פישוט מתקבלת:

$$m^2p^2 + 2pb - a = 0\,. \tag{2.5}$$

משוואה זו עם המשתנה m היא המשוואה עבור השיפועים של המשיקים לפרבולה. קיימים אינסוף משיקים כי עבור כל m, קיים b שגורם למשיק לזוז למעלה או למטה.[3]

כדי למצוא את המשיקים המשותפים לשתי הפרבולות, יש לפתור את המשוואות של שתי הפרבולות, משוואות עם שני משתנים m ו־b.

דוגמה

פרבולה 1: מוקד $(0,4)$, מדריך $y = 2$, קודקוד, $(0,3)$ ו־$p = 2$, $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2 - 2 \cdot 2y + 12 = 0\,.$$

נציב לתוך משוואה 2.5 ונפשט:

$$m^2 + b - 3 = 0\,.$$

פרבולה 2: מוקד $(0,-4)$, מדריך $y = -2$, קודקוד, $(0,-3)$ ו־$p = -2$, $a = 2 \cdot -2 \cdot -3 = 12$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2 - 2 \cdot (-2)y + 12 = 0\,.$$

נציב לתוך משווארה 2.5 ופשט:

$$m^2 - b - 3 = 0\,.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$m^2 - b - 3 = 0\,,$$

הם $m = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$ ו־$b = 0$. המשיקים המשותפים שהם הקיפולים הם:

$$y = \sqrt{3}x\,, \quad y = -\sqrt{3}x\,.$$

דוגמה

פרבולה 1 ללא שינוי.

פרבולה 2: מוקד $(0,-6)$, מדריך $y = -2$, קודקוד, $(0,-4)$ ו־$p = -4$, $a = 2 \cdot -4 \cdot -4 = 32$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2 - 2 \cdot (-4)y + 32 = 0\,.$$

נציב לתוך משווארה 2.5 ונפשט:

$$2m^2 - b - 4 = 0\,.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$2m^2 - b - 4 = 0\,,$$

[3] פרט כמובן עבור קו המקביל לציר הסמטריה.

הם $\pm 1.53 \approx \pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ $m =$ ו־$b = \dfrac{2}{3}$. יש שני משיקים משותפים שהם קיפולים:

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}\,, \quad y = -\sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}\,.$$

דוגמה

כעת נגדיר פרבולה שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה־x.

פרבולה 1 ללא שינוי.

פרבולה 2: מוקד $(4,0)$, מדריך $x = 2$, קודקוד, $(3,0)$ ו־$p = 2$, $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. משוואת הפרבולה היא:

$$y^2 - 4x + 12 = 0\,.$$

שימו לב שזו משוואה עם x ו־y^2 במקום x^2 ו־y, כך שלא ניתן להשתמש במשוואה 2.5 ונצטרך לפתח את משוואות מחדש.

נציב את המשוואה עבור קו:

$$(mx+b)^2 - 4x + 12 = 0$$
$$m^2x^2 + (2mb-4)x + (b^2+12) = 0\,,$$

נשווה את הדיסקרימיננטה לאפס ונפשט:

$$(2mb-4)^2 \;-\; 4m^2(b^2+12) = 0$$
$$-3m^2 - mb + 1 = 0\,.$$

אם ננסה לפתור את שתי המשוואות:

$$m^2 + b - 3 = 0$$
$$-3m^2 - mb + 1 = 0\,,$$

נקבל משוואה ממעלה שלוש במשתנה m:

$$m^3 - 3m^2 - 3m + 1 = 0\,. \tag{2.6}$$

למשוואה ממעלה שלוש יש לפחות פתרון ממשי אחד ולכן היותר שלושה פתרונות ממשיים, לכן יכול להיות אחד, שניים או שלשה משיקים משתופים. אפשר שלא יהיה אף משיק אחד אם אין פתרון לשתי המשוואות, למשל, כאשר פרבולה אחת נמצאת בתוך השנייה: $y = x^2$, $y = x^2 + 1$.

המשוואה למציאת פתרונות למשוואה ממעלה שלוש די מסובכת, לכן השתמשתי במחשבון באינטרנט וקיבלתי שלושה פתרונות:

$$m = 3.73\,,\; m = -1\,,\; m = 0.27\,.$$

אם נבחר $m = 0.27$, $b = 3 - m^2 = 2.93$, משוואת הקיפול היא:

$$y = 0.27x + 2.93\,.$$

מהצורה של המשוואה 2.6, נוכל לנחש ש־1 או -1 הוא פתרון:

$$\begin{aligned}
&1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -4 \\
&(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 0\,.
\end{aligned}$$

נחלק את המשוואה 2.6 ב־$m - (-1) = m + 1$ ונקבל משוואה ריבועית $m^2 - 4m + 1$ ששורשיה הם $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$.

פיתוח המשוואות של השיקופים

נפתח את המיקום של $p_1' = (x_1', y_1')$, השיקוף של $p_1 = (x_1, y_1)$ מסביב למשיק l_t שהמשוואה שלה היא $y = m_t x + b_t$. הפיתוח זהה עבור כל משיק ועבור p_2.

כדי לשקף את p_1 מסביב ל־l_t, נמצא את הקו l_p עם המשוואה $y = m_p x + b_p$ שניצב ל־l_t ועובר דרך p_1:

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p \\
y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p \\
y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right)\,.
\end{aligned}$$

אז נמצא את נקודת החיתוך $p_t = (x_t, y_t)$ של l_t ו־l_p:

$$\begin{aligned}
m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right) \\
x_t &= \frac{\left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t\right)}{\left(m_t + \frac{1}{m_t}\right)}
\end{aligned}$$

$$y_t = m_t x_t + b_t\,.$$

קל למצוא את השיקוף p_1' כי נקודת החיתוך p_t היא נקודת האמצע בין p_1 והשיקוף שלו p_1':

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{x_1 + x_1'}{2}\,, \quad y_t = \frac{y_1 + y_1'}{2} \\
x_1' &= 2x_t - x_1\,, \quad y_1' = 2y_t - y_1\,.
\end{aligned}$$

דוגמה

נסמן $p_1 = (0,4)$ ונסמן ב־l_1 את $y = \sqrt{3}x$:

$$x_t = \frac{\left(4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0\right)}{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3}$$

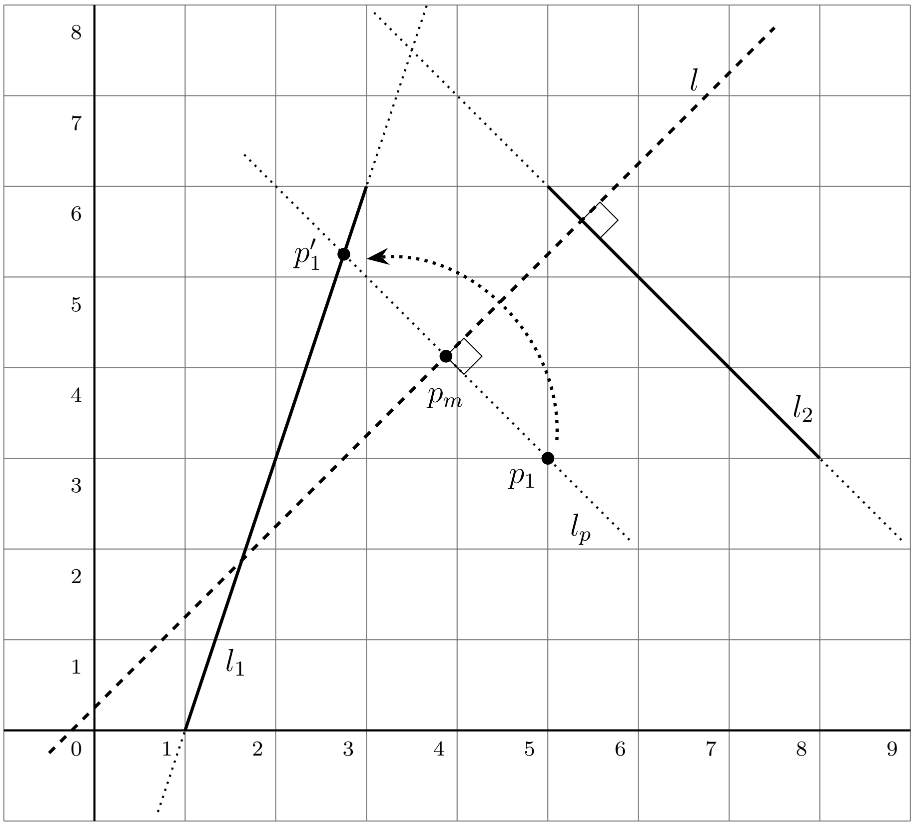
$$y_t = \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3$$

$$x_1' = 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3} \approx 3.46$$

$$y_1' = 2y_t - y_1 = 2 \cdot 3 - 4 = 2\,.$$

2.7 אקסיומה 7

אקסיומה נתונה נקודה אחת p_1, ונתונים שני קווים l_1, l_2, קיים קיפול l הניצב ל־l_2 שהמניח את p_1 על ל־l_1.



פיתוח משוואת הקיפול

נסמן $p_1=(x_1,y_1)$, נסמן ב־l_1 את $y=m_1x+b_1$ ונסמן ב־l_2 את $y=m_2x+b_2$.

הקיפול l ניצב ל־l_2, וגם לקו l_p המכיל את $\overline{p_1p_1'}$ והניצב ל־l, לכן אפשר להסיק ש־l_p מקביל ל־l_2:

$$y=m_2x+b_p\,.$$

l_p עובר דרך p_1 כך ש־$y_1=m_2x_1+b_p$ והמשוואה שלו היא:

$$y=m_2x+(y_1-m_2x_1)\,.$$

$p_1'=(x_1',y_1')$, השיקוף של p_1 מסביב לקיפול l, הוא נקודת החיתוך של l_1 ו־l_p:

$$\begin{aligned}
&m_1x_1'+b_1=m_2x_1'+(y_1-m_2x_1)\\
&x_1'=\frac{y_1-m_2x_1-b_1}{m_1-m_2}\\
&y_1'=m_1x_i'+b_1\,.
\end{aligned}$$

$p_m = (x_m, y_m)$, נקודת האמצע של l_p נמצא על הקיפול l:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_1'}{2}, \frac{y_1 + y_1'}{2}\right) .$$

הקיפול l הוא האנך האמצעי של $\overline{p_1 p_1'}$, וכדי לחשב את המשוואה שלו, תחילה נחשב את נקודת החיתוך של l שעובר דרך p_m:

$$y_m = -\frac{1}{m_2} x_m + b_m$$

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2} .$$

המשוואה של הקיפול l היא:

$$y = -\frac{1}{m_2} x + \left(y_m + \frac{x_m}{m_2}\right) .$$

דוגמה

נסמן $p_1 = (5, 3)$, נסמן ב־l_1 את $y = 3x - 3$,

ונסמן ב־l_2 את $y = -x + 11$.

$$x_1' = \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4}$$

$$y_1' = 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4}$$

$$p_m = \left(\frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2}\right) = \left(\frac{31}{8}, \frac{33}{8}\right) .$$

משוואת הקיפול היא:

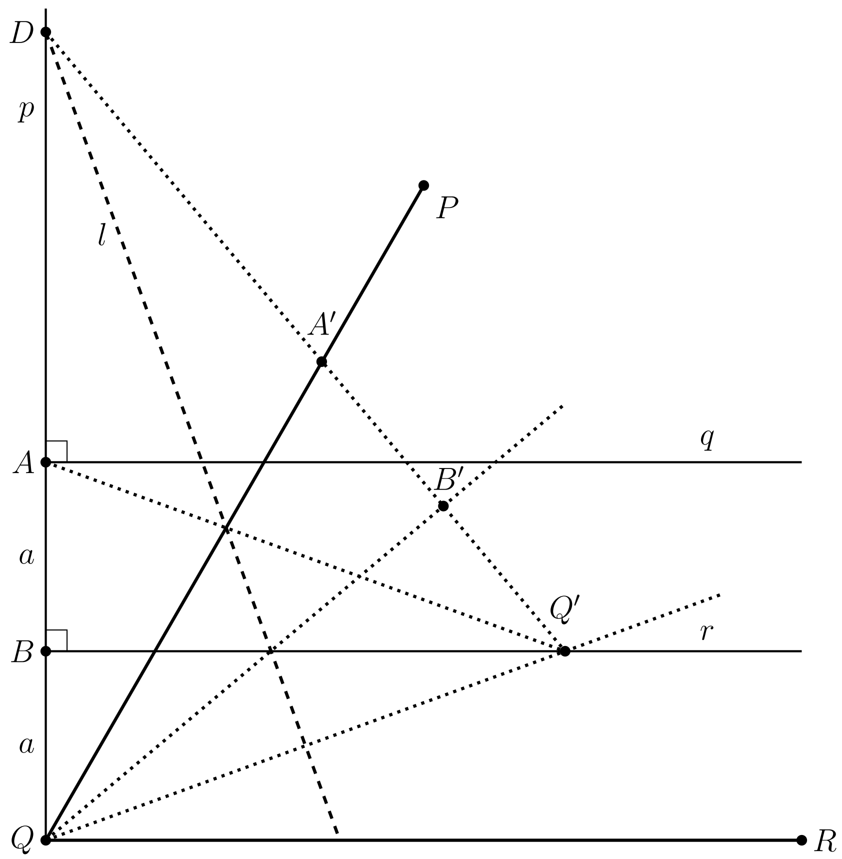
$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left(\frac{33}{8} + \frac{\frac{31}{8}}{-1}\right) = x + \frac{1}{4} .$$

פרק 3

חלוקת זווית לשלושה חלקים

3.1 הבנייה של Abe לחלוקת זווית לשלושה חלקים

3.1.1 הבנייה

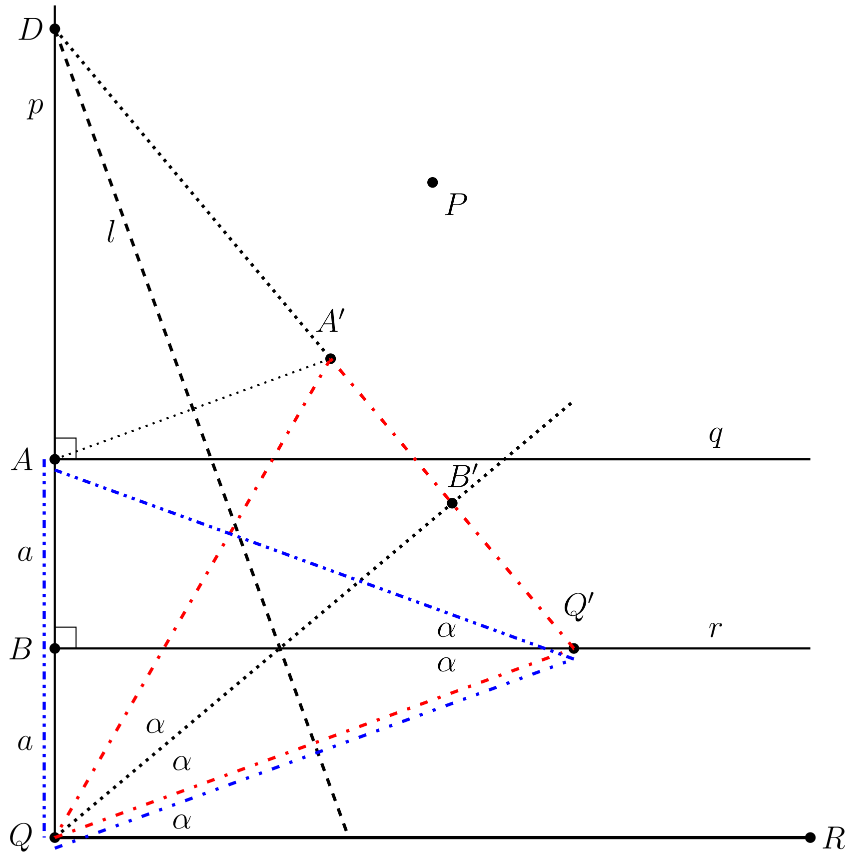


נתונה זווית חדה $\angle PQR$, יהי הקו p ניצב ל־$\overline{QR}$ ב־Q. יהי הקו q ניצב ל־p ב־A שחותך את $\overline{PQ}$, ויהי הקו r ניצב ל־p ב־B במחצית הדרך בין Q ו־A.

לפי אקסיומה 6 בנה קיפול l המניח את A על $\overline{PQ}$ בנקודה A', ומניח את Q על r בנקודה Q'. נסמן ב-B' את השיקוף של B מסביב ל-l.

בנה את הקווים $\overline{QB'}$ ו־$\overline{QQ'}$. טיעון: הזוויות $\angle PQB'$, $\angle B'QQ'$, $\angle Q'QR$ מחלקות לשלושה חלקים את הזווית $\angle PQR$.

3.1.2 הוכחה ראשונה



הנקודות A', B', Q' הן שיקופים סביב אותו קו l של הנקודות A, B, Q הנמצאות על קו אחד $\overline{DQ}$, ולכן גם הן נמצאות על קטע קו אחד $\overline{DQ'}$. לפי הבנייה, $\overline{AB} = \overline{BQ}$, $\overline{BQ'}$ ניצב ל־AQ ו־$\overline{BQ'}$ הוא צלע משותף, ולכן $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$ לפי צלע־זווית־צלע. מכאן ש: $\angle AQ'B = \angle QQ'B = \alpha$, כי $\overline{Q'B}$ הוא האנך האמצעי של המשולש שווי־שוקיים $\triangle AQ'Q$.

לפי זוויות מתחלפות, $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$.

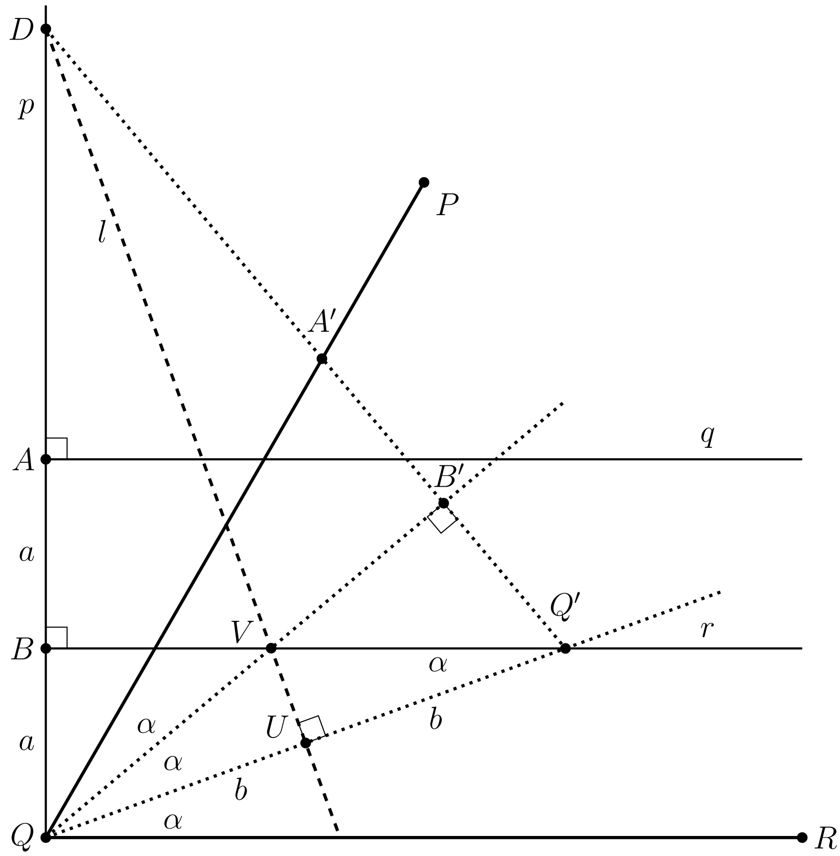
לפי שיקוף, $\triangle AQ'Q \cong \triangle A'QQ'$.[1]

הוכחה: הקיפול l הוא האנך האמצעי של $\overline{AA'}$ וגם של $\overline{QQ'}$; בנה ניצבים מ־A ו־A' ל־$\overline{QQ'}$; אזי $\overline{AQ} = \overline{A'Q'}$ לפי משולשים ישר זווית חופפים. $\overline{AA'Q'Q}$ הוא טרפז שווי־שוקיים כך שהאלכסונים שווים $\overline{AQ'} = \overline{A'Q}$.

מכאן ש־$\overline{QB'}$, השיקוף של $\overline{Q'B}$, הוא האנך האמצעי של משולש שווי־שוקיים $\triangle A'QQ'$, ו־ $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \angle QQ'B = \alpha$.

[1] שני המשולשים מודגשים על ידי קווים שונים של מקפים ונקודות, וכן על ידי הצבעים אדום וכחול.

3.1.3 הוכחה שנייה

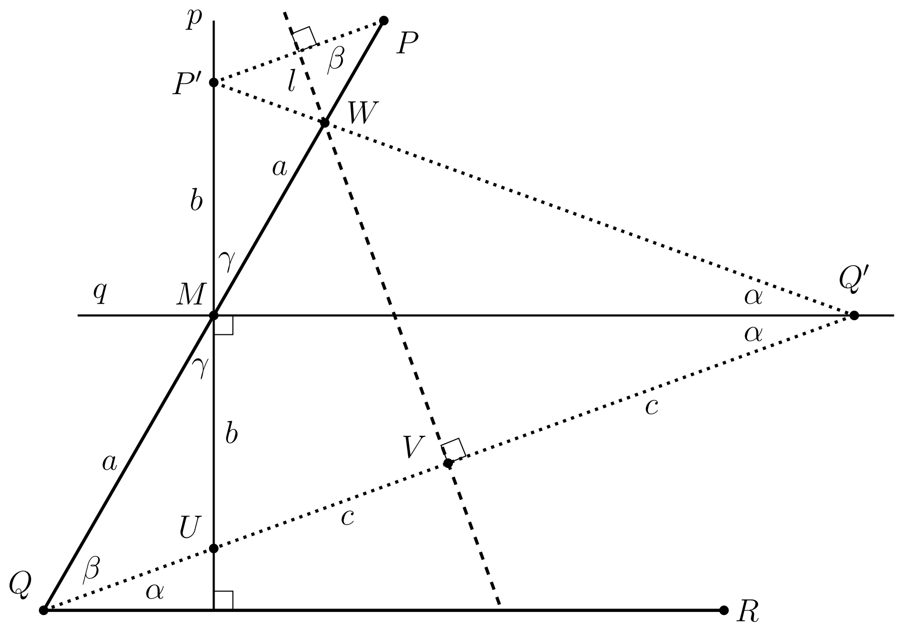


הקו l הוא קיפול, ולכן הוא האנך האמצעי של $\overline{QQ'}$. סמן ב־U את נקודת החיתוך של l עם $\overline{QQ'}$, וסמן ב־V את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{QB'}$. $\triangle VUQ \cong \triangle VUQ'$ לפי צלע־זווית־צלע כי: $\overline{VU}$ הוא צלע משותף, הזוויות ב־U הן זוויות ישרות, ו־$\overline{QU} = \overline{Q'U} = b$. מכאן ש־$\angle VQU = \angle VQ'U = \alpha$ ו־$\angle Q'QR = \angle VQ'U = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות.

כמו בהוכחה הראשונה, הנקודות A', B', Q' הן כולן שיקופים סביב l, לכן הן כולן נמצאות על קטע קו אחד $\overline{DQ'}$, ו־$\overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{B'Q'} = a$. מכאן ש־$\triangle A'B'Q \cong \triangle Q'B'Q$ ו־$\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$.

3.2 הבנייה של Martin לחלוקת זווית לשלושה חלקים

3.2.1 הבנייה



נתונה זווית חדה $\angle PQR$, תהי M נקודת האמצע של $\overline{PQ}$. בנה p ניצב ל־$\overline{QR}$ העובר דרך M ובנה q ניצב ל־p העובר דרך M. q מקביל ל־$\overline{QR}$.

לפי אקסיומה 6, בנה קיפול l המניח את P ב־P' על p, ומניח את Q ב־Q' על q. ייתכן שקיימים מספר קיפולים מתאימים; בחר את הקיפול החותך את $\overline{PM}$.

בנה את קטעי הקו $\overline{PP'}$ ו־$\overline{QQ'}$. סמן ב־U את נקודת החיתוך של $\overline{QQ'}$ עם p, וסמן ב־V את נקודת החיתוך שלו עם l. סמן ב־W את החיתוכים של $\overline{PQ}$ ו־$\overline{P'Q'}$ עם l.[2]

3.2.2 הוכחה

$\triangle QMU \cong \triangle PMP'$ לפי זווית־צלע־זווית: $\angle P'PM = \angle UQM = \beta$ לפי זוויות מתחלפות; $\overline{QM} = \overline{MP} = a$ כי M היא נקודת האמצע של $\overline{PQ}$; $\angle QMU = \angle PMP'$ הן זוויות קודקודיות. מכאן ש־$\overline{P'M} = \overline{MU} = b$.

$\triangle P'MQ' \cong \triangle UMQ'$ לפי צלע־זווית־צלע: הראנו ש־$\overline{P'M} = \overline{MU} = b$; הזוויות ב־$M$ הן זוויות ישרות; $\overline{MQ'}$ הוא צלע משותף. הגובה של המשולש שווה־שוקיים $\triangle P'Q'U$ הוא חוצה הזווית $\angle P'Q'U$ ולכן $\angle P'Q'M = \angle UQ'M = \alpha$.

$\triangle QWV \cong \triangle Q'WV$ לפי צלע־זווית־צלע: $\overline{QV} = \overline{VQ'} = c$ והזוויות ב־V הן זוויות ישרות כי הקיפול הוא האנך אמצעי של $\overline{QQ'}$; $\overline{VW}$ הוא צלע משותף. מכאן ש־$\angle WQV = \beta = \angle WQ'V = 2\alpha$. הראנו ש־$\angle PQR = \beta + \alpha = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$ ולכן $\angle Q'QR$ היא שליש מ־$\angle PQR$.

[2] לא ברור מאליו ש־$\overline{PQ}$ ו־$\overline{P'Q'}$ חותכים את l באותה נקודה. $\triangle PP'W \sim \triangle QQ'W$ כך שהגבהים מחלקים את הזוויות $\angle PWP', \angle QWQ'$ בצורה דומה וחייבים להיות על אותו קו.

פרק 4

הכפלת קוביה

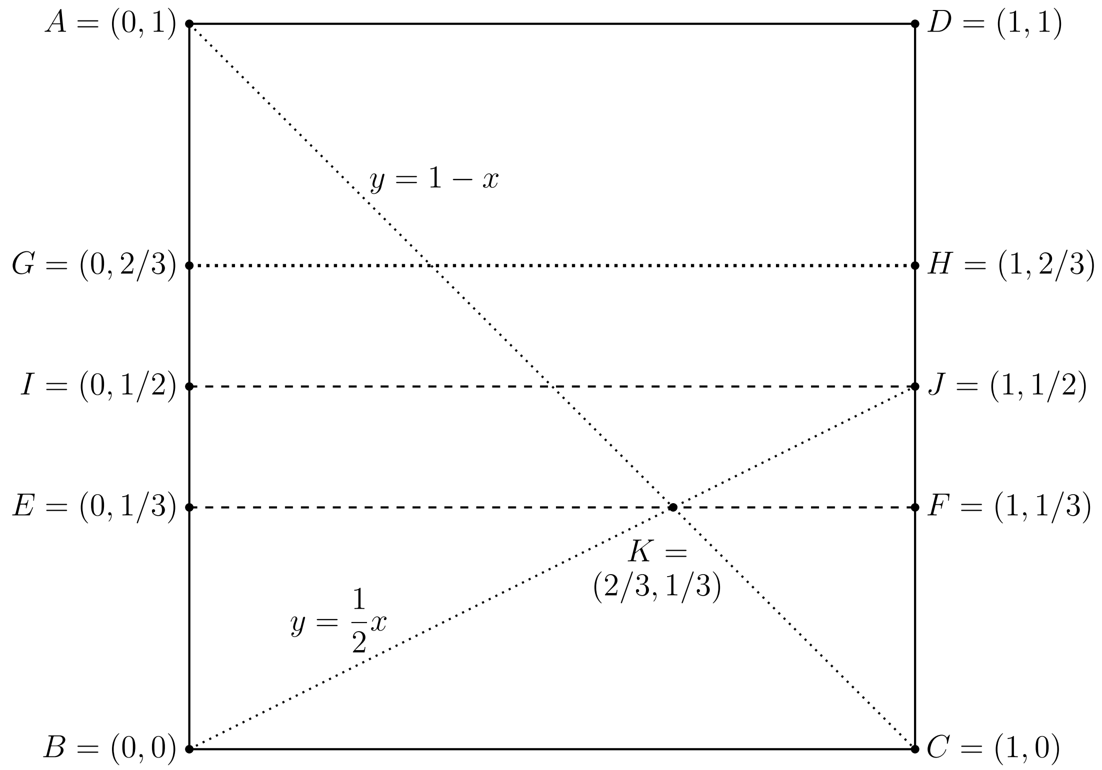
4.1 הבנייה של Messer להכפלת קוביה

לקוביה בנפח V צלעות באורך $\sqrt[3]{V}$. נפח קוביה שנפחה פי שניים הוא $2 \cdot V$, כך שיש לבנות קטע קו באורך $\sqrt[3]{2 \cdot V} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{V}$. אם נוכל לבנות קטע קו באורך $\sqrt[3]{2}$, נוכל להכפיל באורך הנתון $\sqrt[3]{V}$ כדי להכפיל את נפח הקוביה.

4.1.1 חלוקת קטע קו לשלוש

Lang [4] מביא בניות יעילות עבור שברים רציונליים של אורכו של צלע של (דף נייר שהוא) ריבוע. כאן עלינו לחלק צלע של ריבוע לשלושה חלקים.

תחילה, קפל את הריבוע לחצי כדי למצוא את הנוקדה $J = (1, 1/2)$. אחר כך, בנה את קטעי הקו $\overline{AC}$ ו-$\overline{BJ}$.



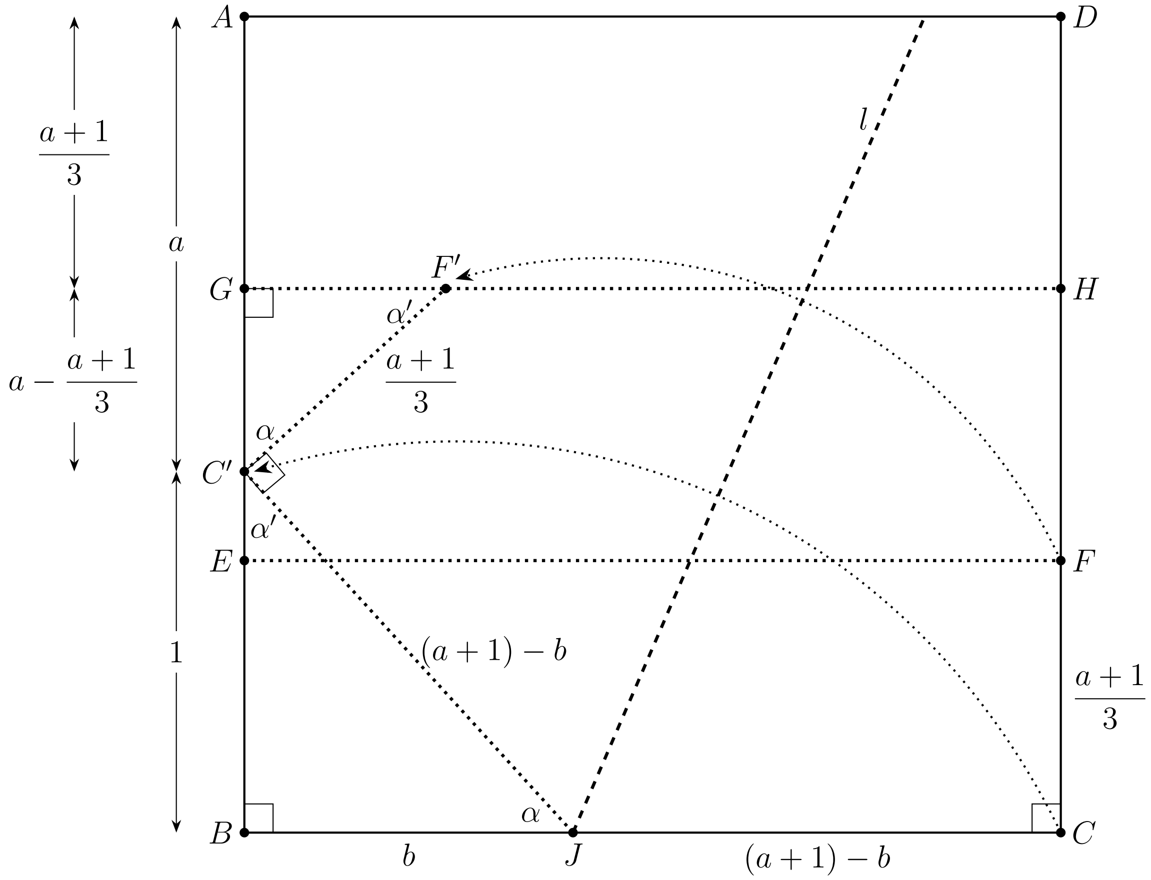
אפשר לחשב את הקואורדינטות של נקודה החיתוך K על ידי פתרון של שתי המשוואות הללו:

$$\begin{aligned} y &= 1-x \\ y &= \frac{1}{2}x\,. \end{aligned}$$

הפתרון הוא: $x=2/3, y=1/3$.

בנה את הקו $\overline{EF}$ ניצב ל־$\overline{AB}$ כך שהוא עובר דרך K, ובנה את $\overline{GH}$, השיקוף של $\overline{BC}$ סביב $\overline{EF}$. הצלע של הריבוע מחולק לשלושה חלקים.

4.1.2 בניית $\sqrt[3]{2}$



נסמן צלע של הריבוע $a+1$. הבנייה תראה ש־$a=\sqrt[3]{2}$.

נשמתש באקסיומה 6 כדי להניח את C ב־C' על $\overline{AB}$, ולהניח את F ב־F' על $\overline{GH}$. סמן את נקודת החיתוך של הקיפול עם $\overline{BC}$ ב־J, וסמן את אורכו של $\overline{BJ}$ ב־b. האורך של קטע הקו $\overline{JC}$ הוא $(a+1)-b$.

לאחר ביצוע הקיפול, קטע הקו $\overline{JC}$ הוא שיקוף של קטע הקו $\overline{JC'}$ מאותו אורך, וקטע הקו $\overline{CF}$ הוא שיקוף של קטע הקו $\overline{C'F'}$ באותו אורך. חישוב פשוט מראה שאורכו של $\overline{GC'}$ הוא:

$$a-\frac{a+1}{3}=\frac{2a-1}{3}\,. \tag{4.1}$$

לבסוף, $\angle FCJ$ היא זווית ישרה, לכן גם $\angle F'C'J$ היא זווית ישרה.

$\triangle C'BJ$ הוא משולש ישר־זווית ולפי משפט פתגורוס:

$$\begin{aligned}
1^2 + b^2 &= ((a+1)-b)^2 \\
a^2 + 2a - 2(a+1)b &= 0 \\
b &= \frac{a^2+2a}{2(a+1)} .
\end{aligned}$$

$\angle GC'F' + \angle F'C'J + \angle JC'B = 180°$ כי הם מרכיבים קו ישר $\overline{GB}$. נסמן $\alpha = \angle GC'F'$. אז:

$$\angle JC'B = 180° - \angle F'C'J - \angle GC'F' = 180° - 90° - \angle GC'F' = 90° - \angle GC'F = 90° - \alpha .$$

נסמן $\alpha' = 90° - \alpha$. המשולשים $\triangle C'BJ$, $\triangle F'GC'$ הם משולשים ישר־זווית, ולכן $\angle C'JB = \alpha$ ו־$\angle C'F'G = \alpha'$. מכאן שהמשולשים דומים וממשוואה 4.1 מתקבלת המשוואה:

$$\frac{b}{(a+1)-b} = \frac{\frac{2a-1}{3}}{\frac{a+1}{3}} .$$

נציב עבור b:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{a^2+2a}{2(a+1)}}{(a+1) - \frac{a^2+2a}{2(a+1)}} &= \frac{2a-1}{a+1} \\
\frac{a^2+2a}{a^2+2a+2} &= \frac{2a-1}{a+1} .
\end{aligned}$$

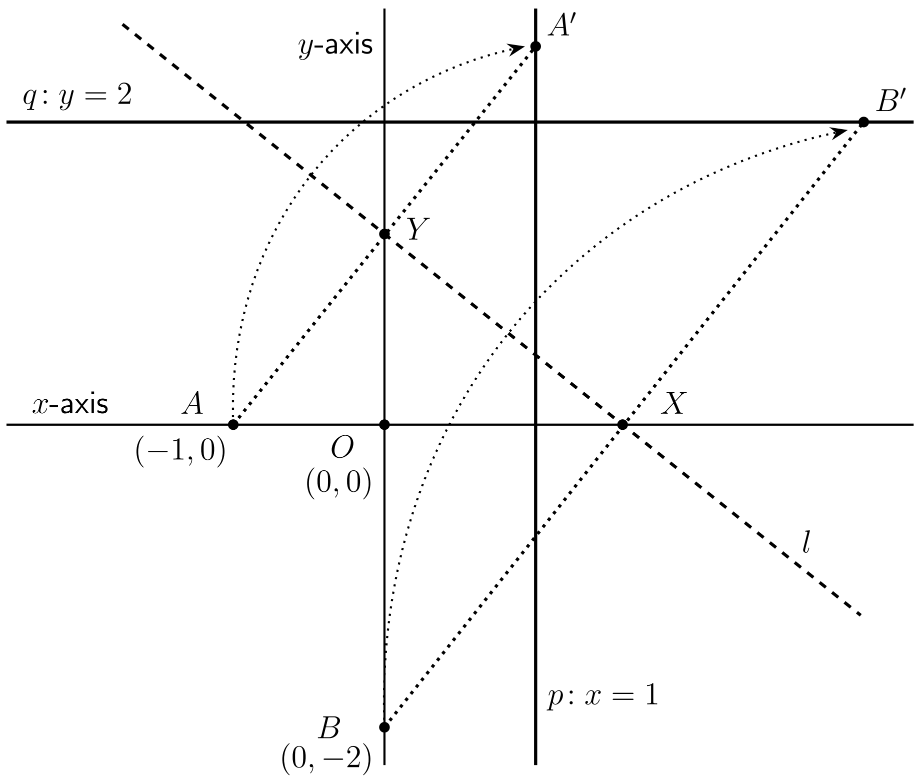
נפשט ונקבל $a^3 = 2$ ו־$a = \sqrt[3]{2}$.

4.2 הבנייה של Beloch להכפלת קוביה

ב־1936 Margharita P. Beloch נתנה הגדרה פורמלית לאקסיומה 6 (הנקרא לעתים הקיפול של Beloch). היא הראתה שניתן להשתמש באקסיומה כדי לפתור משוואות ממעלה שלוש. כאן אנחנו נביא את השיטה שלה להכפלת קוביה. נדון בפתרון של משוואות ממעלה שלוש בפרקים 5, 6.

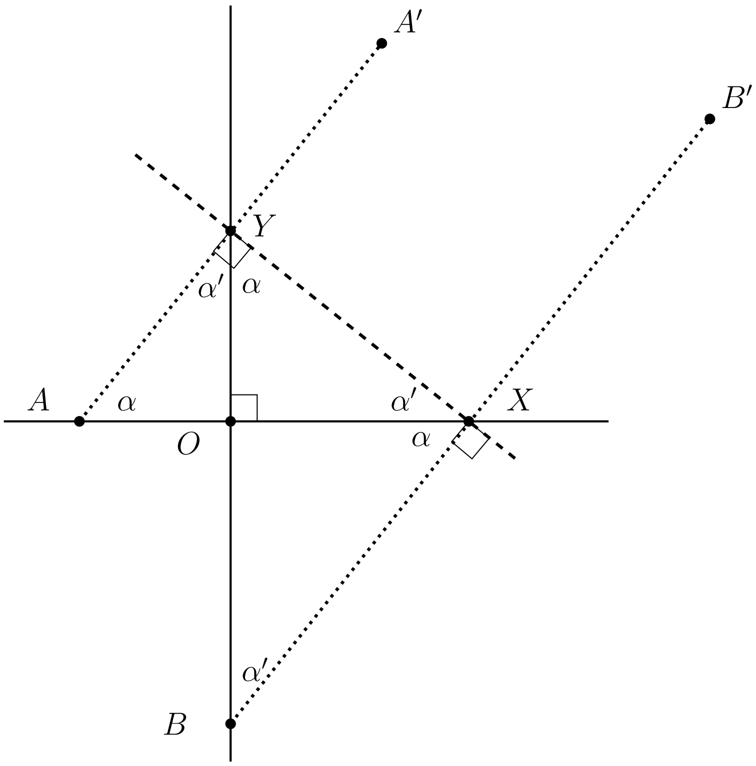
4.2.1 הבנייה

נסמן את הנקודה $(-1,0)$ ב־A ואת הנקודה $(0,-2)$ ב־B. נסמן ב־p את הקו $x=1$ וב־q את הקו $y=2$. לפי אקסיומה 6 ניתן לבנות קיפול l המניח את A ב־A' על p, והמניח את B ב־B' על q. נסמן ב־Y את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה־y, ונסמן ב־X את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה־x.



4.2.2 הוכחה

נחלץ איור פשוט יותר:



הקיפול הוא האנך האמצעי של $\overline{AA'}$ ו־$\overline{BB'}$. לכן $\angle AYX$ ו־$\angle YXB$ הן זוויות ישר־זווית ו־$\overline{AA'}$ מקביל ל־$\overline{BB'}$. לפי זוויות מתחלפות $\alpha = \angle BYO = \angle XAO$. אם זווית חדה אחת של משולש ישר־זווית היא α, הזווית החדה השנייה היא $90° - \alpha$ שנסמן α'. מכאן מתקבלים סימוני הזוויות האחרות באיור.

יש לנו שלושה משולשים דומים: $\triangle XOB \sim \triangle YOX \sim \triangle AOY$. קטעי קו $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 2$ נתונים ולכן:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}}$$
$$\frac{\overline{OY}}{1} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}$$
$$\overline{OY}^2 = \overline{OX} = \frac{2}{\overline{OY}} \ ,$$

מכאן ש־$\overline{OY}^3 = 2$ ו־$\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$.

פרק 5

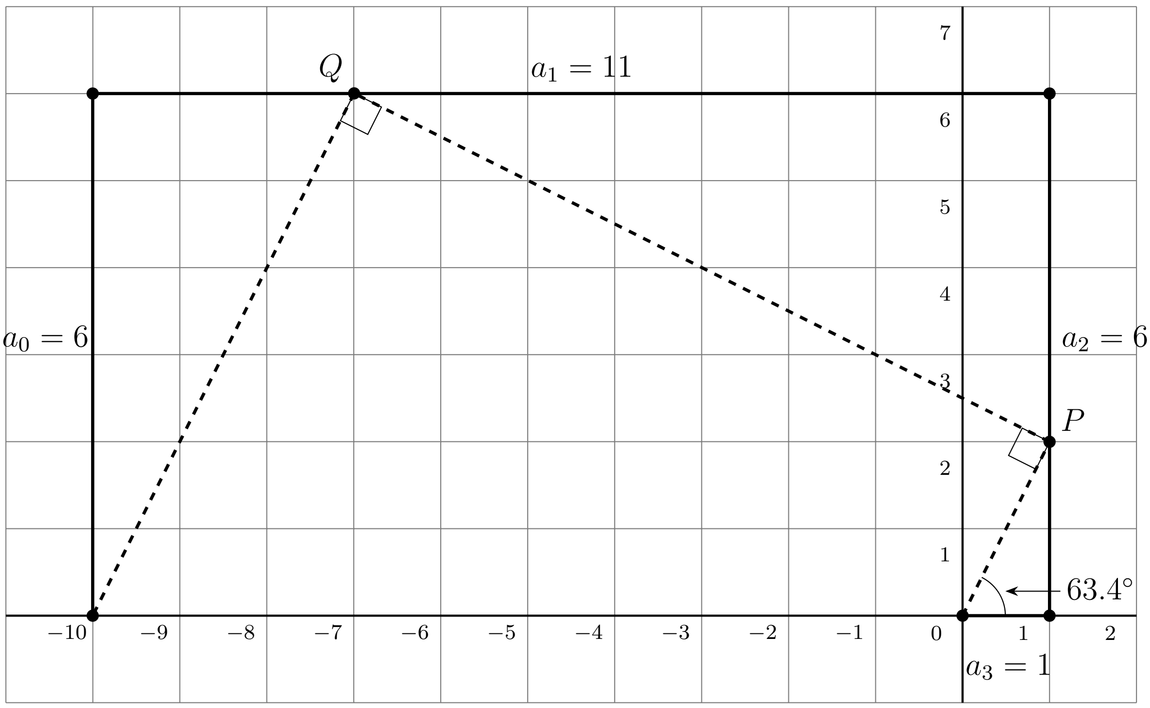
השיטה של Lill למציאת שורשים

5.1 קסם

בנה מסלול המורכב מארבע קטעי קו $\{a_3, a_2, a_1, a_0\}$ באורכים:

$$\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\} ,$$

החל ממרכז מערכת הצירים, תחילה בכיוון החיובי של ציר ה־x תוך סיבוב של $90°$ נגד כיוון השעון בין הקטעים. בנה מסלול שני כדלקמן: בנה קו ממרכז הצירים בזווית $63.4°$ יחסית לציר ה־x, וסמן ב־P את נקודת החיתוך שלו עם a_2. פנה שמאלה $90°$, בנה קו וסמן ב־Q את החיתוך שלו עם a_1. פנה שמאלה $90°$ פעם נוספת, בנה קו, ושים לב שהוא חותך את קצה המסלול הראשון הנמצא ב־$(-10, 0)$.



יהי $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. חשב $\tan 63.4° = 2$, הטנגנס של הזווית בתחילת המסלול השני. מתקבל:

$$p(-\tan 63.4°) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0 .$$

בשעה טובה! מצאת שורש של $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, פולינום ממעלה שלוש.

5.2 מבוא

דוגמה זו מדגימה שיטה גרפית למציאת שורשים ממשיים של כל פולינום שגילה Eduard Lill ב־1867 [2, 3, 8]. נגביל כאן את הדיון לפולינומים ממעלה שלוש.

ברור שאין כאן שיטה אלגברית לחישוב שורשים של פולינומים ממעלה שלוש; למעשה, בדוגמה וידאנו ש־-2 הוא שורש. יש עניין חדש בשיטה של Lill כי ניתן לממש אותה באוריגמי (פרק 6).

בסעיפים 5.3–5.4 נרחיב את הדוגמה הראשונה כדי למצוא שורשים נוספים, ונראה שאם α היא זווית כך ש־$-\tan\alpha$ **אינה** שורש, הבנייה לא תצליח.

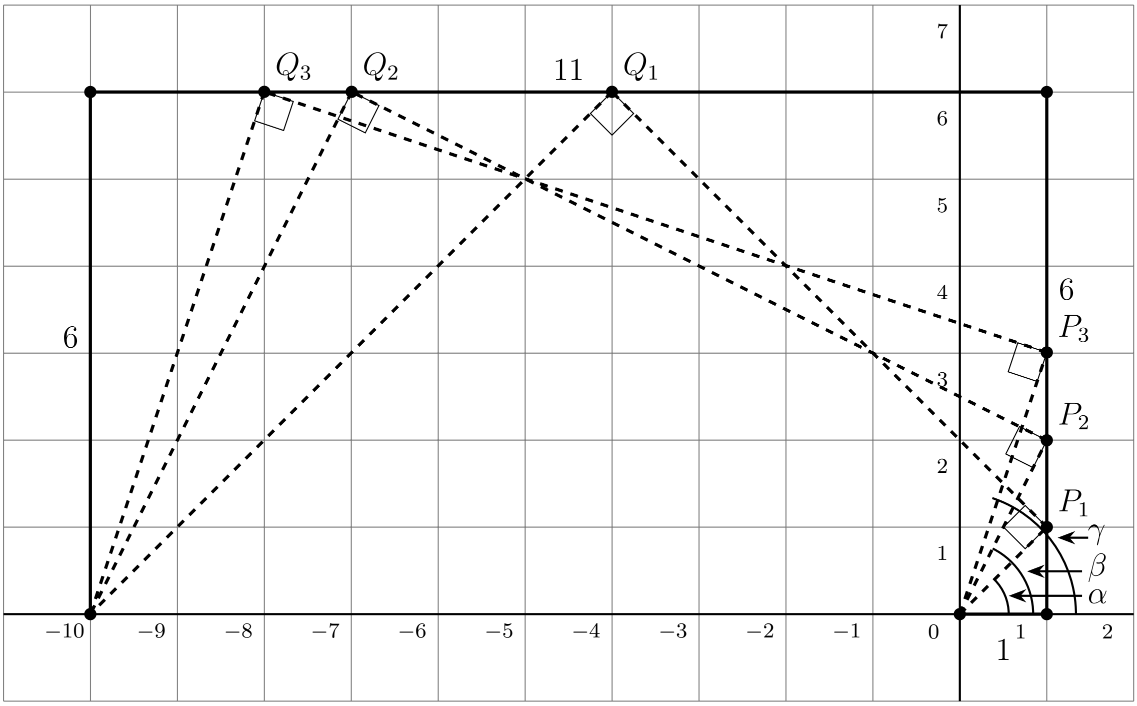
סעיף 5.5 מביא פירוט מלא של השיטה של Lill. חלקים מהתיאור עלולים להיות לא ברורים, אבל יתבהרו כאשר נביא דוגמאות נוספות בסעיפים 5.6–5.8. השיטה של Lill מסוגלת למצוא שורש ממשי של כל פולינום ממעלה שלוש, לכן ניתן להשתמש בה לחלק זווית לשלושה חלקים. אפשר גם למצוא את $\sqrt[3]{2}$ כשורש של x^3-2, ולכן אפשר להכפיל קוביה כפי שנראה בסעיף 5.9. 5.10 מביא הוכחה שהשיטה של Lill יכולה למצוא שורשים ממשיים של כל פולינום ממעלה שלוש. להוכחה עבור פולינום כלשהו מבנה דומה.

5.3 שורשים מרובים

נמשיך את הדוגמה. לפולינום $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ שלושה שורשים $-1, -2, -3$. מחישוב השלילה של הטנגס שלהם מתקבל:

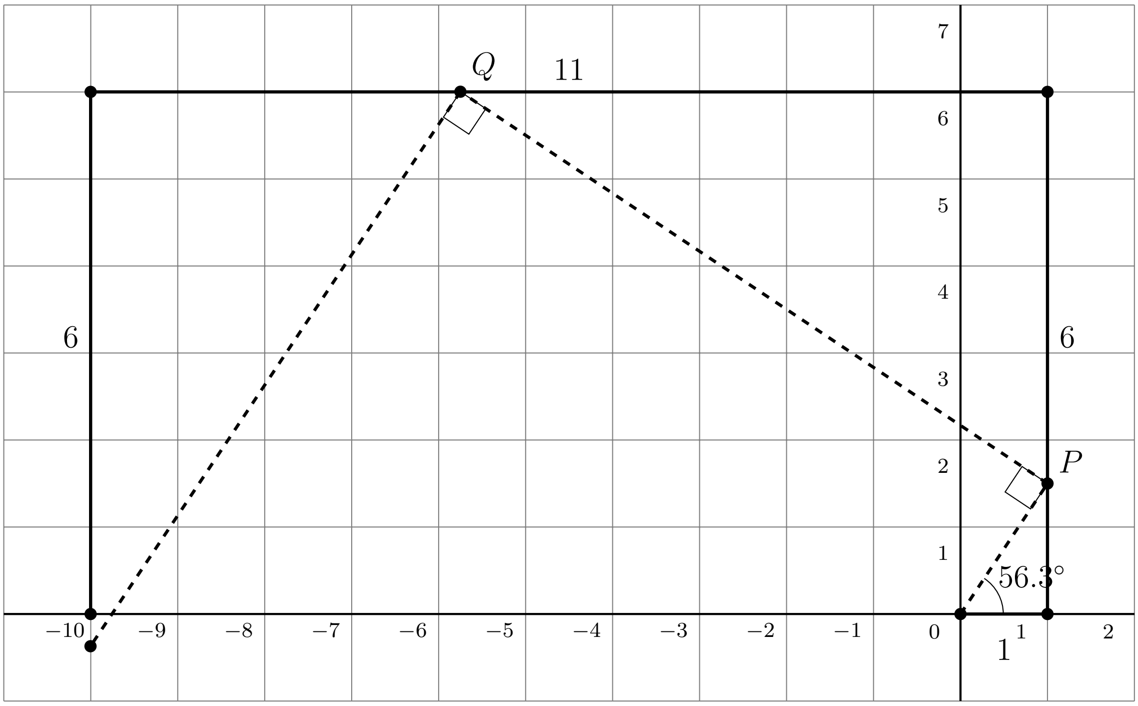
$$\alpha = -\tan^{-1} -1 = 45^\circ, \quad \beta = -\tan^{-1} -2 = 63.4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1} -3 = 71.6^\circ \,.$$

באיור רואים שעבור כל אחת מהזוויות, המסלול השני חותך את הקצה של המסלול הראשון.



5.4 מסלולים שלא תואמים לשורשים

אולי המסלול השני חותך את המסלול הראשון עבור **כל** זווית, למשל, $56.3°$. באיור שלהלן, המסלול השני חותך את המשך הקו עבור המקדם a_0, אבל לא ב־$(-10,0)$, הקצה של המסלול הראשון. נסיק ש־$-\tan 56.3 = -1.5$ **אינו** שורש של הפולינום.



5.5 מפרט של השיטה של Lill

כדי להבין את פרטי השיטה מומלץ לעיין בדוגמאות בסעיפים הבאים.

- נתון פולינום שרירותי $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
- בנה את המסלול הראשון כך:
  - לכל מקדם a_3, a_2, a_1, a_0 (בסדר זה) בנה קטע קו המתחיל במרכז הצירים $O = (0, 0)$ בכיוון החיובי של ציר ה־x. פנה $90°$ נגד השעון בין כל קטע.
- בנה את המסלול השני כך:
  - נסמן ב־a_i את קטע הקו שאורכו a_i.
  - בנה קו מ־O בזווית θ יחסית לכיוון החיובי של ציר ה־x. נסמן ב־P את הנקודה בה חותך הקו את a_2.
  - פנה $\pm 90°$ ובנה קו מ־P וסמן ב־Q את הנקודה בה חותך הקו את a_1.
  - פנה $\pm 90°$ ובנה קו מ־Q וסמן ב־R את נקודה בה חותך הקו את a_0.
  - אם R היא נקודת הקצה של המסלול הראשון, אזי $-\tan\theta$ הוא שורש של $p(x)$.
- מקרים מיוחדים:
  - כאשר בונים את קטעי הקו של המסלול הראשון, אם מקדם הוא שלילי בנה את קטע הקו **בכיוון ההפוך**.
  - כאשר בונים את קטעי הקו של המסלול הראשון, אם מקדם הוא אפס, אל תצייר את קטע הקו, אבל המשך לפנייה הבאה של $\pm 90°$.
- הערות:
  - "חותך הקו את a_i" כולל המקרה "חותך את קטע הקו a_i או כל המשך שלו" או "חותך את הקו המכיל את קטע הקו a_i".
  - כאשר בונים את המסלול השני, בחר לפנות ימינה או שמאלה ב־$90°$ כך שלמסלול השני תהיה נקודת חיתוך עם המסלול הראשון.

5.6 מקדמים שליליים

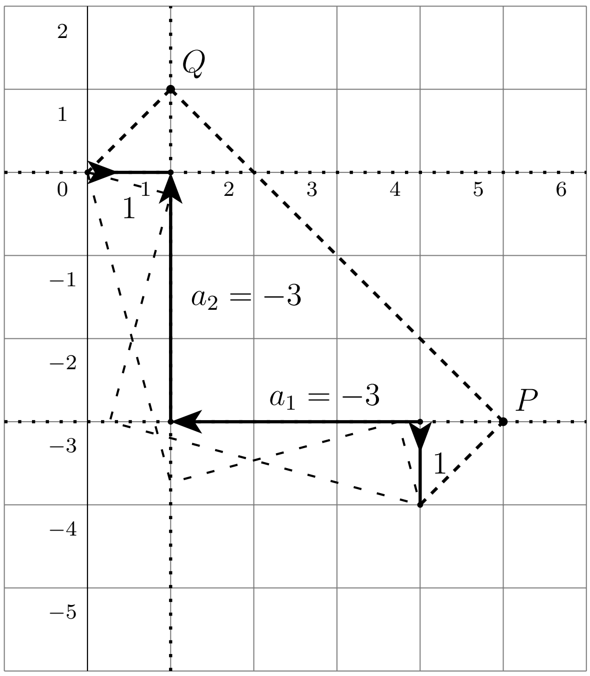
בסעיף 2.6 הפעלת אקסיומה 6 יצרה את הפולינום $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ עם מקדמים שליליים. נתחיל בבניית קטע קו באורך 1 לכיוון החיובי של ציר ה־x. אחר כך נפנה $90°$ עם הפנים למעלה, אבל המקדם שלילי, ולכן נבנה קטע קו באורך 3 **למטה**, הפוך מהכיוון שאנו פונים אליו. לאחר פנייה $90°$ לשמאל, המקדם שוב שלילי כך שנבנה קו באורך 3 לאחור, לכיוון ימין. לבסוף, נפנה עם הפנים למטה ונבנה קטע קו באורך 1.

המסלול השני מתחיל עם קו בזווית $45°$ יחסית לציר ה־x. נקודת החיתוך של הקו עם ההמשך של קטע הקו a_2 היא $(1,1)$. נפנה שוב $-90°$ (לכיוון ימין), נבנה קו שנקודת החיתוך שלה עם ההמשך של a_1 היא $(5,-3)$. נפנה שוב $-90°$, נבנה קו שנקודת החיתוך שלו היא בנוקדת הקצה של המסלול הראשון ב־$(4,-4)$.

$-\tan 45° = -1$, ולכן שורש ממשי של הפולינום הוא -1:

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0\,.$$

בסעיף 5.8 נדון בקווים המקווקווים עם רווחים ארוכים.



5.7 מקדמים שהם אפס

a_2, המקדם של x^2 בפולינום $x^3 - 7x - 6 = 0$, הוא אפס. עבור מקדם אפס, אנו "בונים" קטע קו באורך 0, כלומר, אנחנו לא מציירים קו, אבל כן פונים $\pm 90°$ לפני ש"בונים" אותו, כפי שניתן לראות באיור: חץ הפונה למעלה בנקודה $(1, 0)$. אחר כך, נפנה שוב ונבנה קו באורך -7, קו באורך 7 אחורה לנקודה $(8, 0)$. לבסוף, פונים שוב ובונים קו באורך -6 לנקודה $(8, 6)$.

קיימים שלושה מסלולים החותכים את קצה המסלול הראשון. הם מתחילים עם הזוויות:

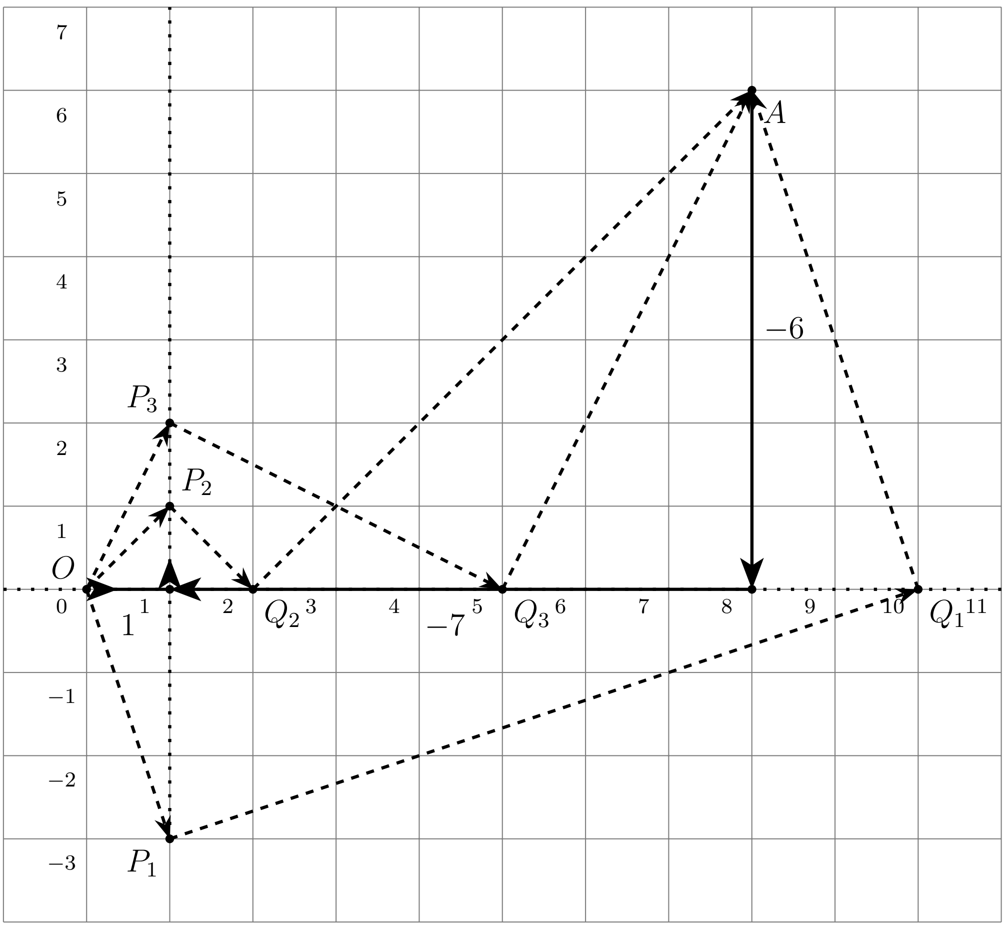
$$\alpha = 45°, \quad \beta = 63.4°, \quad \gamma = -71.6° \,.$$

מכאן אפשר להסיק שיש שלושה שורשים ממשיים:

$$-\tan 45° = -1, \quad -\tan 63.4° = -2, \quad -\tan(-71.6°) = 3 \,.$$

בדיקה:

$$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3) = x^3 - 7x - 6 \,.$$



5.8 שורשים שאינם מספרים שלמים

נבדוק את הפולינום $p(x) = x^3 - 2x + 1$. הקטע הראשון של המסלול הראשון עובר מ־$(0,0)$ ל־$(1,0)$ ואז פונה למעלה. המקדם של x^2 הוא אפס כך שלא נצייר קטע קו ונפנה שמאלה. המקדם הבא הוא -2 כך שהקטע הבא נבנה לאחור מ־$(3,0)$ ל־$(1,0)$. לבסוף, המסלול פונה למטה וקו באורך 1 נבנה מ־$(3,0)$ ל־$(3,-1)$.

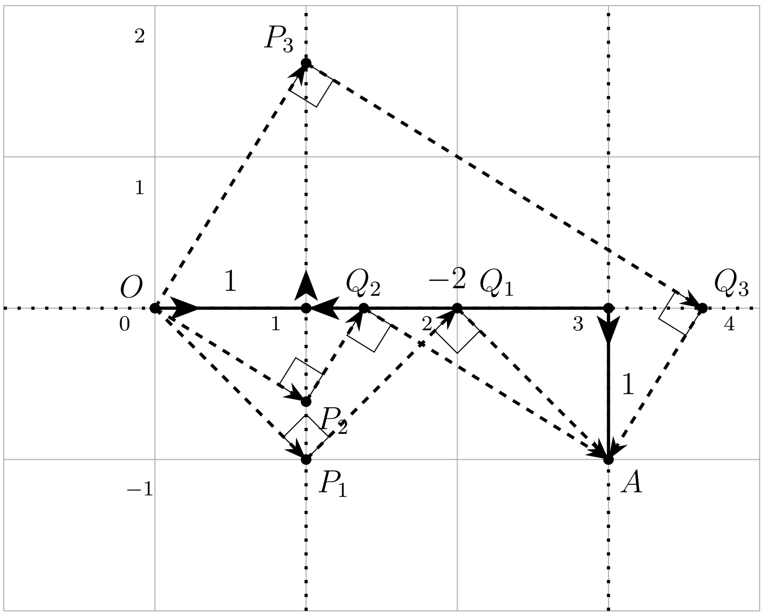
קל לראות ש־1 הוא שורש של $p(x)$. $-\tan^{-1} 1 = -45^\circ$, ולכן קיים מסלול $\overline{OP_1Q_1A}$.

אם נחלק את $p(x)$ ב־$x-1$, נקבל פולינום ריבועי $x^2 + x - 1$ ששורשיו הם:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 0.62,\ -1.62\,.$$

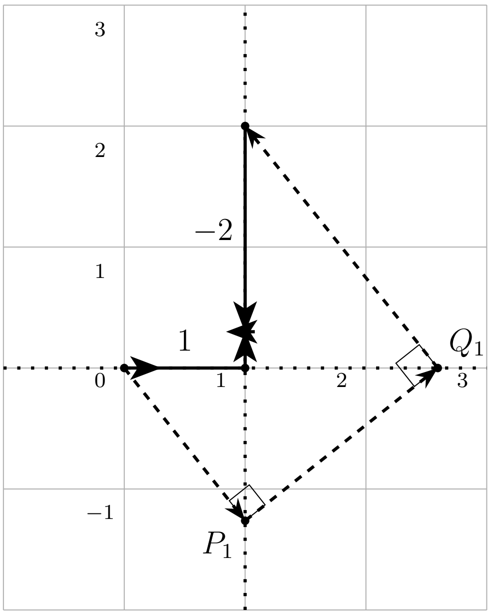
לכן קיימים שני מסלולים נוספים: אחד שמתחיל בזווית -31.8° כי $-\tan^{-1} 0.62 = -31.8^\circ$, ואחד שמתחיל בזווית 58.3° כי $-\tan^{-1} 1.62 = 58.3^\circ$.

באופן דומה, לפולינום בסעיף 5.6 שני שורשים $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$. הזוויות הן -75° ו־-15°, כי $-\tan(-75^\circ) \approx 3.73$ ו־$-\tan(-15^\circ) \approx 0.27$.



5.9 השורש ממעלה שלוש של שניים

כדי להכפיל קוביה עלינו למצוא $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$, שורש של הפולינום ממעלה שלוש $x^3 - 2$. בבנייה של המסלול הראשון, אנו פונים פעמיים שמאלה בלי לבנות קטעי קו, כי המקדמים a_2 ו־a_1 שניהם אפס. אז פונים שוב שמאלה (לכיוון למטה) ובונים קו לאחור כי $a_0 = -2$ שלילי. הקטע הראשון של המסלול השני נבנה בזווית של $-51.6°$ ו־$\sqrt[3]{2} \approx 1.26 \approx -\tan(-51.6°)$.



5.10 ההוכחה של השיטה של Lill

נגביל את הדיון לפולינומים שהמקדם הראשי שלהם הוא אחד $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.[1] באיור למטה, הקטעים של המסלול הראשון מסומנים עם המקדמים ועם $b_2, b_1, a_2 - b_2, a_1 - b_1$.

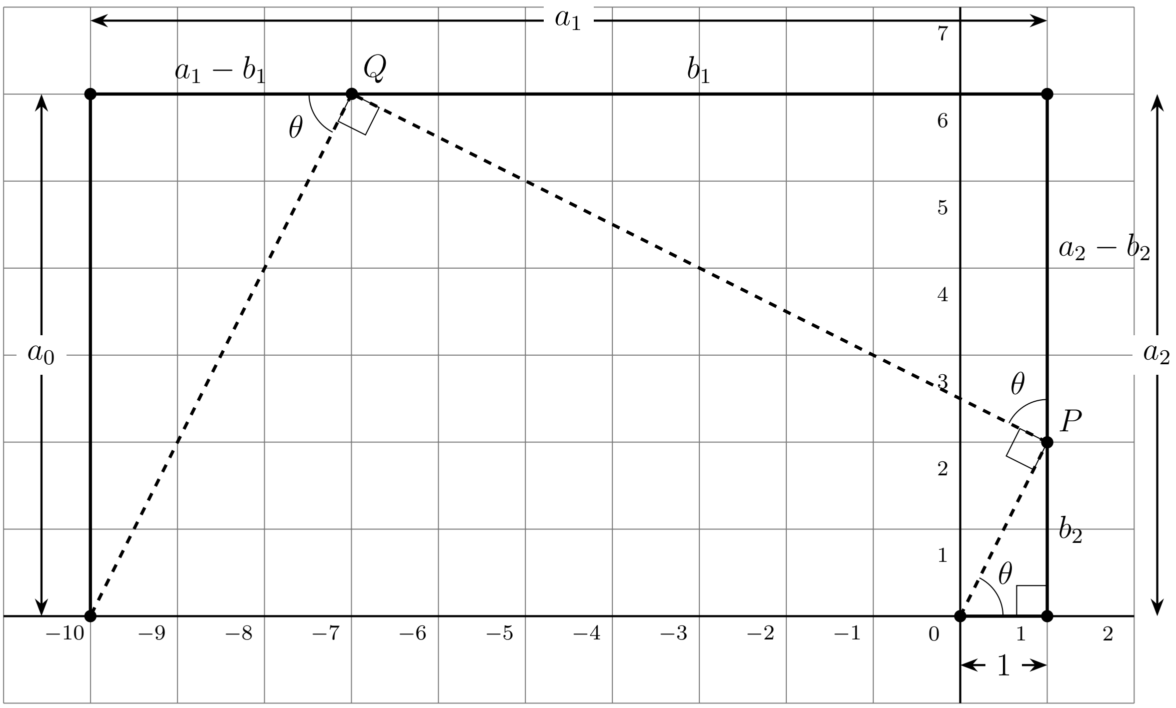
סכום הזוויות של משולש הוא 180°, ולכן אם זווית חדה אחת היא θ, השנייה היא $90^\circ - \theta$. מכאן שהזווית מעל ל־P והזווית משמאל ל־Q שוות ל־θ. כעת נפתח סדרת משוואות עבור $\tan\theta$:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{b_2}{1} = b_2\\
\tan\theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan\theta}\\
b_1 &= \tan\theta(a_2 - \tan\theta)\\
\tan\theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan\theta(a_2 - \tan\theta)}\,.
\end{aligned}$$

נפשט את המשוואה האחרונה ונקבל:

$$\begin{aligned}
(\tan\theta)^3 - a_2(\tan\theta)^2 + a_1(\tan\theta) - a_0 &= 0\\
-(\tan\theta)^3 + a_2(\tan\theta)^2 - a_1(\tan\theta) + a_0 &= 0\\
(-\tan\theta)^3 + a_2(-\tan\theta)^2 + a_1(-\tan\theta) + a_0 &= 0\,.
\end{aligned}$$

נסיק ש־$-\tan\theta$ הוא שורש ממשי של $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.



[1] אחרת, אפשר לחלק ב־a_3 ולפולינום המתקבל אותם שורשים.

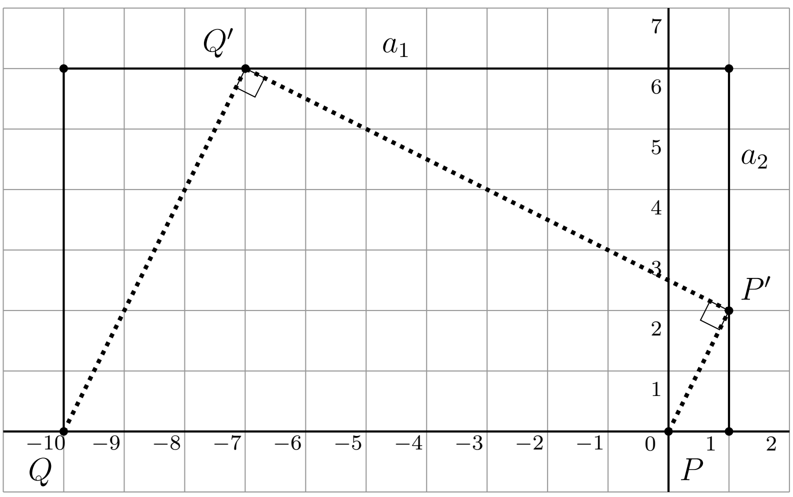
פרק 6

הקיפול של Beloch והריבוע של Beloch

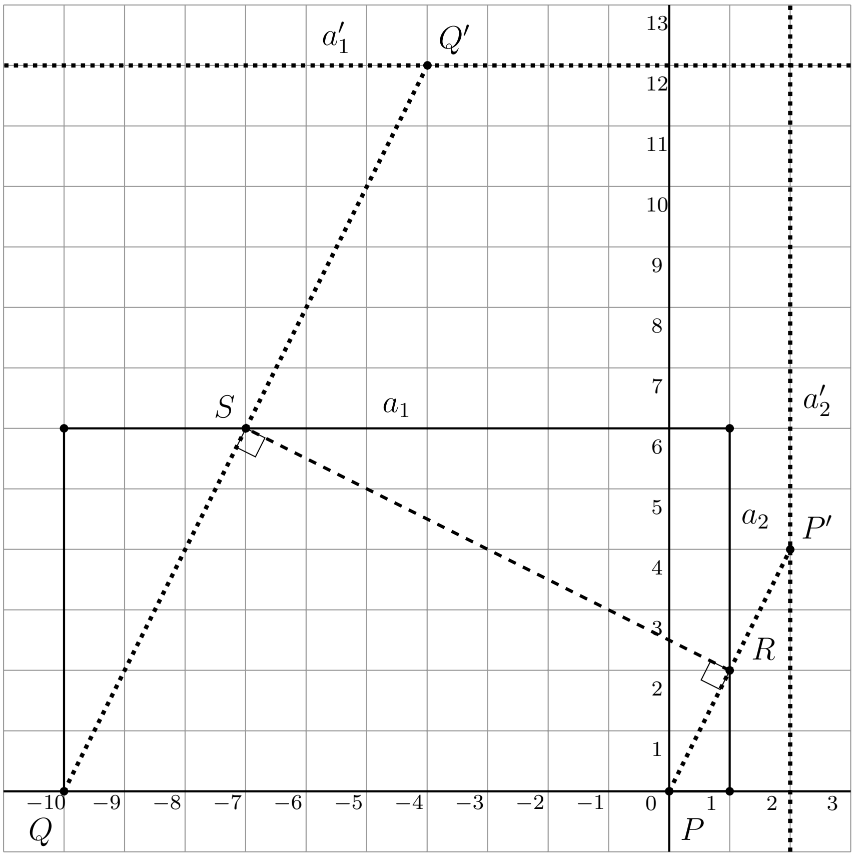
6.1 הקיפול של Beloch

Margharita P. Beloch גילתה קשר מרתק בין אוריגמי והשיטה של Lill למציאת שורשים של פולינומים ממעלה שלוש. היא מצאה ששהפעלה אחת בלבד של אקסיומה 6 (פרק 2.6) מאפשרת מציאת שורש ממשי של כל פולינום ממעלה שלוש. לכבודה, לעתים מכנים את הפעולה של האקסיומה "הקיפול של Beloch".

נדגים את השיטה על הפולינום $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ מסעיף 5.1. באיור שלהלן הדגשנו את המסלול השני ושנינו את הסימנים של מספר נקודות. כדי לפתור את המשוואה, כל שעלינו לעשות הוא להפעיל קיפול של Beloch כדי להניח בבת אחת את הנקודות P', Q' על הקווים a_1, a_2, בהתאמה. לכאורה זה נראה כשימוש פשוט של הקיפול של Beloch. אולם, עם מפעילים את האקסיומה, המסלול מוצא פתרון למשוואה: Q' נמצא רחוק ימינה, כך שהזווית ב־P' ו־Q' אינן זוויות ישרות.

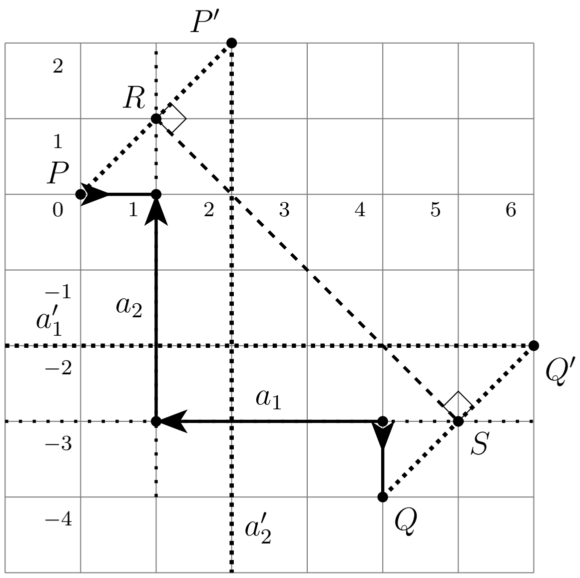


נזכור שקיפול הוא האנך האמצעי של קטע הקו בין נקודה ושיקופה מסביב לקיפול. אנו רוצים שהקיפול יהיה $\overline{P'Q'}$ כך שהוא יהיה ניצב גם ל־$\overline{QQ'}$ וגם ל־$\overline{PP'}$. אם $\overline{P'Q'}$ הוא האנך האמצעי של $\overline{QQ'}$ ו־$\overline{PP'}$, אזי P', Q', השיקופים של P, Q, חייבים להיות באותו מרחק מהקיפול כמו P ו־Q, בהתאמה. עם שינוי קל בסימונים, מתקבל האיור שלהלן:



נבנה את הקו a'_2 מקביל ל־a_2 ובאותו מרחק מ־a_2 כמו המרחק של a_2 מ־P. באופן דומה נבנה את הקו a'_1 מקביל ל־a_1 ובאותו מרחק מ־a_1 כמו המרחק של a_1 מ־Q. נפעיל את אקסיומה 6 כדי להניח בו־זמנית את P ב־P' על a'_2 ולהניח את Q ב־Q' על a'_1. הקיפול $\overline{RS}$ הוא האנך האמצעי של הקווים $\overline{PP'}$ ו־$\overline{QQ'}$. מכאן שהזוויות ב־R ו־S הן ישרות כפי שמתחייב.

ננסה את הקיפול של Beloch על הפולינום $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ מסעיף 5.6. a_2 הוא קטע הקו האנכי באורך 3 שהמשוואה לו הוא $x = 1$, והקו המקביל לו הוא a'_2 שהמשוואה שלו היא $x = 2$, כי P נמצאת במרחק 1 מ־a_2. a_1 הוא קטע הקו האופקי באורך 3 שהמשוואה שלו היא $y = -3$, והקו המקביל לו הוא a'_1 שהמשוואה שלו הוא $y = -2$ כי Q נמצאת במרחק 1 מ־a_1. הקיפול RS הוא האנך האמצעי של $\overline{PP'}$ וגם של $\overline{QQ'}$. המסלול $\overline{PRSQ}$ זהה למסלול בסעיף 5.6.

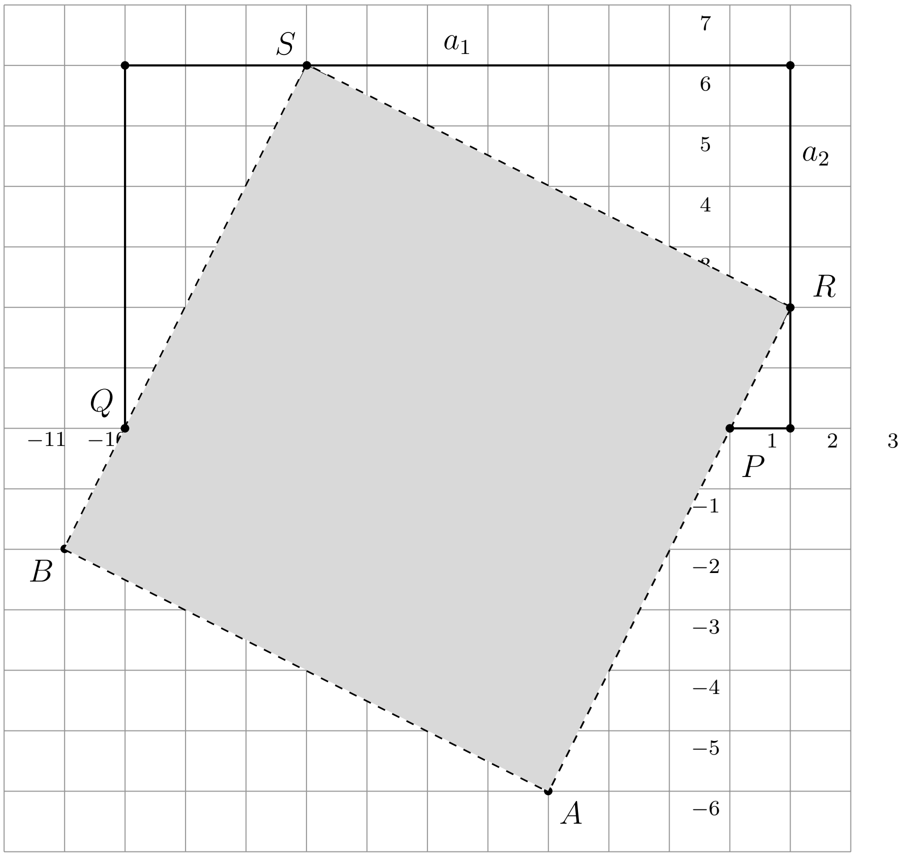


6.2 הריבוע של Beloch

ניתן להציג את הבנייה בסעיף הקודם לפי הריבוע של Beloch: נתונות שתי נקודות P, Q ושני קווים a_2, a_1, בנה ריבוע $\overline{ARSB}$ כך ש:

- צלע אחד הוא $\overline{RS}$ כאשר R נמצאת על a_2 ו־S נמצאת על a_1;
- P נמצאת על $\overline{RA}$ ו־Q נמצאת על $\overline{SB}$.

האיור שלהלן מדגים את הריבוע של Beloch עבור הפולינום $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. האורך של RS הוא $8.94 \approx 4\sqrt{5} = \sqrt{80}$. ניתן לבנות את הריבוע על ידי הוספת שלושה צלעות של אורך זה.



פרק 7

בניית מתושע

7.1 בניית מצולעים משוכללים

לפי משפט Gauss-Wantzel ניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה מצולע משוכלל שמספר צלעותיו:

$$n = 2^k \cdot F_1 \cdot \cdots \cdot F_m \,,$$

כאשר ה־F_i (אם הם קיימים) הם מספרי Fermat ראשוניים שונים $F_m = 2^{2^m} + 1$. ידוע שקיימים חמישה מספרי Fermat ראשוניים: $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$.[1] לכן לא ניתן לבנות **מתושע**, מצולע משוכלל עם תשעה צלעות.

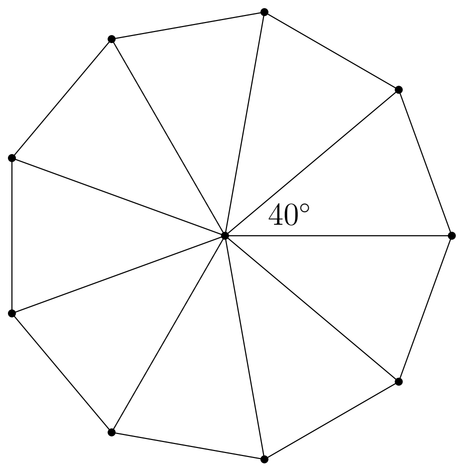
מצולעים משוכללים עם:

$$n = 2^i \cdot 3^j \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_m$$

צלעות ניתנים לבנייה באמצעות אוריגמי, אם ה־p_i (אם הם קיימים) הם מספרים ראשוניים שונים מהצורה $2^k \cdot 3^l + 1$ [1]. כאן נבנה מתושע תוך שימוש בשיטה של Lill והקיפול של Beloch.

7.2 המשוואה ממעלה שלוש עבור מתושע

ניתן לבנות מצולע משוכלל עם n צלעות על ידי בניית הזווית המרכזית $360°/n$. עבור מתושע הזווית המרכזית היא $\theta = 360°/9 = 40°$:



[1] בגיל 19 Gauss בנה מצולע משוכלל עם 17 צלעות והישג זה שיכנע אותו (לשמחתנו) להיות מתמטיקאי. מצולע משוכלל עם 257 צלעות נבנה על ידי Magnus Georg Paucker ב־1822 ועל ידי Friedrich Julius Richelot ב־1832. Johann Gustav Hermes טען בשנת 1894 שהוא בנה מצולע משוכלל עם 65537. צלעות. כתב היד שלו שמור באוניברסיטת Göttigen במקרה שתרצו לבדוק את נכונות הבנייה.

הזווית 40° היא שליש מ־120° שניתנת לבנייה על ידי הצמדת זווית של 30° (שניתנת לבנייה על ידי חציית זווית של משולש שווה צלעות) לזווית של 90° (שניתנת לבנייה על ידי בניית אנך). ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים באוריגמי, ולכן ניתן לבנות 40° באוריגמי. כאן נביא בנייה שונה המבוססת על מציאת פיתרון למשוואה ממעלה שלוש.

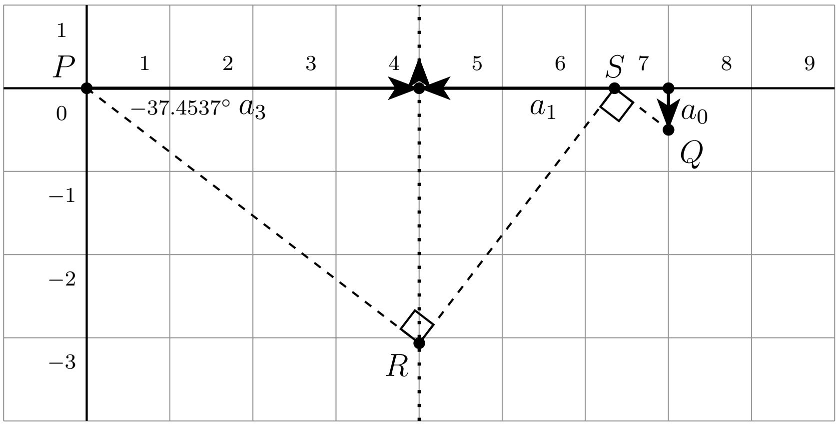
חישוב פשוט המשתמש בנוסחה עבור $\cos(\alpha+\beta)$ מראה ש:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,.$$

נציב $x=\cos\theta$ ו־$a=\cos 3\theta$. אם נצליח לפתור את המשוואה ממעלה שלוש $4x^3-3x-a=0$ עבור x, ניתן לבנות את הזווית על ידי בניית משולש ישר זווית עם צלע באורך x ויתר באורך 1. הבנייה מתוארת בהמשך.

עבור מתושע המשוואה היא $4x^3-3x+\frac{1}{2}=0$ כי $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

נבנה מסלול עבור המשוואה כפי שנדרש בשיטה של Lill:



המקדם a_2 הוא אפס ולכן מבצעים סיבוב של 90° אבל לא בונים קטע קו באותו כיוון.

המסלול השני מתחיל מ־P בזווית -37.4537° ומשתקף ב־$\pm 90^\circ$ כנדרש על ידי השיטה של Lill. הקטע האחרון חותך את Q, ולכן $x=-\tan -37.4537^\circ = 0.766044$ הוא שורש של $4x^3-3x+\frac{1}{2}$.

7.3 פתרון המשוואה על ידי הקיפול של Beloch

בתיאור לעיל רימיתי כי ידעתי ששורש המשוואה הוא $x=-\tan -37.4537^\circ = 0.766044$:

$$4(0.766044)^3 - 3(0.766044) + 0.5 \approx 0\,.$$

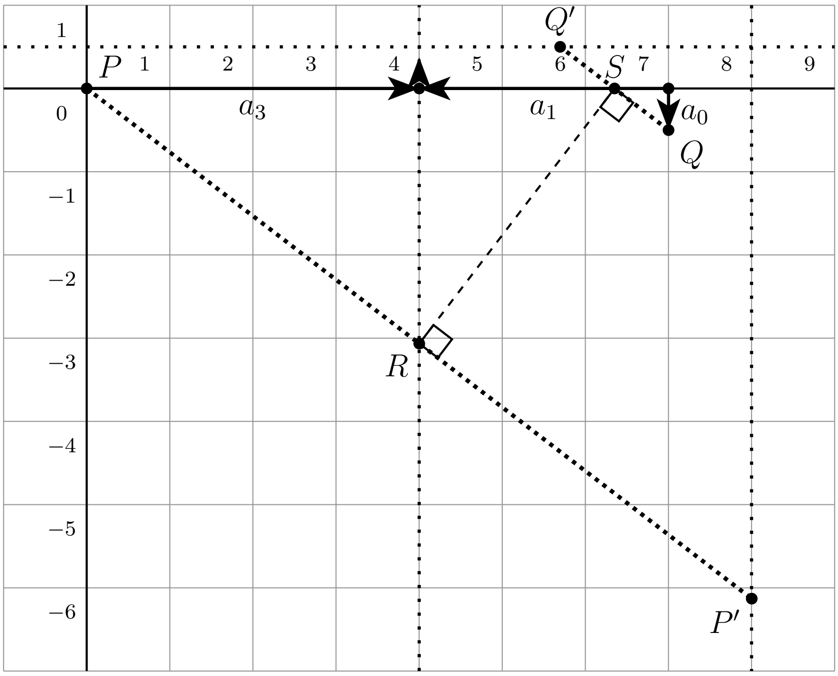
השתמשתי בערך זה כאשר ציירתי את המסלול השני.

ניתן למצוא את השורש באמצעות הקיפול של Beloch כפי שתיארנו בפרק 6.

נתחיל בלמתוח קו מקביל ל־a_2[2] באותו מרחק מ־a_2 כמו המרחק מ־a_2 ל־P. באופן דומה, נמתח קו מקביל ל־a_1 באותו מרחק מ־a_1 כמו המרחק מ־a_1 ל־Q. הקיפול של Beloch, הקו $\overline{RS}$, מניח

[2] בגלל ש־$a_2=0$ הקו נמתח מקביל לקו שהיינו מציירים אם a_2 היה שונה מאפס.

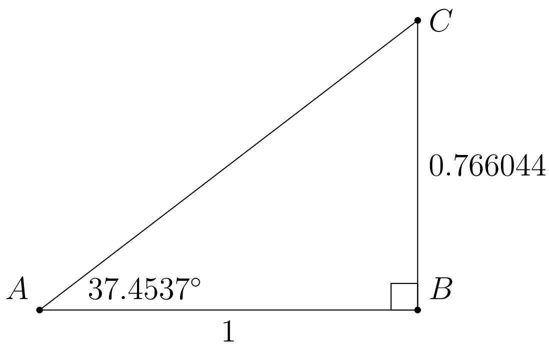
בו־זמנית את P ב־P' על הקו המקביל ל־a_2, ואת Q ב־Q' על הקו המקביל ל־a_1. כך בונים את הזווית $\angle SPR = -37.4537°$. המסלול השני של השיטה של Lill הוא $\overline{PRSQ}$.



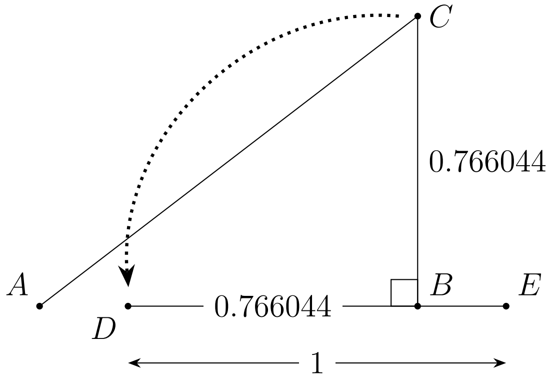
7.4 בניית הזווית המרכזית של המתושע

אנו יודעים ש־$\cos\theta = 0.766044$ הוא שורש של המשוואה. נוכל לבנות את המתושע אם נבנה $\cos^{-1} 0.766044 = 40°$. נשמתש בבנייה לעיל של הזווית $37.4537°$ שהטנגנס שלה הוא 0.766044.

נתונים קטע קו באורך 1 והזווית $37.4537°$, במשולש ישר זווית עם זווית זו הצלע ליד הזווית הוא 1 והצלע מול הזווית הוא 0.766044, לפי ההגדרה של טנגנס:

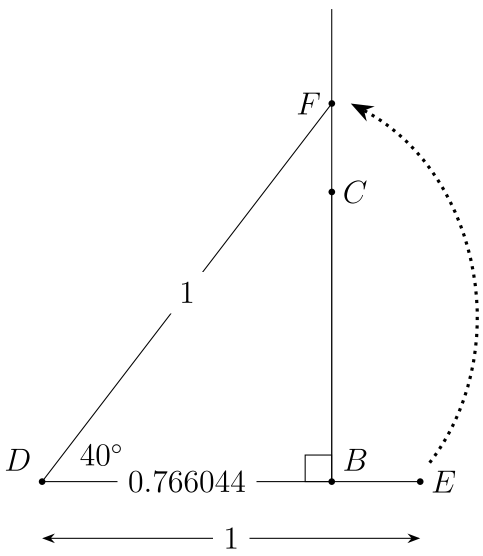


נקפל את הצלע $\overline{CB}$ מעל $\overline{AB}$ ונסמן את המקום עליו מונח הנקודה C ב־D. נעתיק את קטע הקו $\overline{AB}$ ימינה (ללא סיבוב) כך שהנקודה A מונחת על D, ונסמן את המקום עליו מונחת הנקודה B ב־E. [1] מסביר איך להעתיק קטע קו.



כעת,נקפל את $\overline{DE}$ מעל להמשך של $\overline{CB}$ כך שהנקודה E מונחת על הקו בנקודה F. נקבל:

$$\angle EDF = \cos^{-1}\frac{0.766044}{1} = 40^\circ\,.$$



מקורות

להלן רשימת המקורות ששימשו להכנת המסמך.

האקסיומות נמצאות במאמר בויקיפדיה[9], ביחד עם משוואות פרמטריות עבור חמשת האקסיומות הראשונות. Lee [פרק 4, 5] מביא סקירה טובה של המתמטיקה של אוריגמי. Martin [פרק 10, 6] מפתח את המתמטיקה של אוריגמי בצורה פורמלית. Lang [4] מראה כיצד ניתן לבנות באמצעות אוריגמי מספרים רציונליים, מקצת מספרים אי־רציונליים וקירובים לאחרים. חלוקת זווית לשולשה חלקים והכפלת הקוביה ניתנת על ידי Newton [7] ובן לולו מביא הוכחה שונה של חולקת הזווית. הבנייה להכפלת קוביה גם היא מופיעה אצל Newton [7] ו־[5]. Hull [3] מביא את השיטה של Lill למציאת שורשים של פולינינומים ואת המימוש של Beloch. Bradford [2] מביא איורים רבים של השיטה של Lill.

[1] Roger C. Alperin. A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics*, 6:119–133, 2000.

[2] Phillips Verner Bradford. Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May 2, 2010, at the Wayback Machine, `https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvb/ALG/rightpaths.html`, 2010.

[3] Thomas C. Hull. Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. *American Mathematical Monthly*, 118(4):307–315, 2011.

[4] Robert J. Lang. Origami and geometric constructions. `http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf`, 1996-–2015. Accessed 26/02/2020.

[5] Hwa Young Lee. Origami-constructible numbers. Master's thesis, University of Georgia, 2017.

[6] George E. Martin. *Geometric Constructions*. Springer, 1998.

[7] Liz Newton. The power of origami. `https://plus.maths.org/content/power-origami`. Accessed 26/02/2020.

[8] M. Riaz. Geometric solutions of algebraic equations. *American Mathematical Monthly*, 69(7):654–658, 1962.

[9] Wikipedia contributors. Huzita–Hatori axioms — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Huzita%E2%80%93Hatori_axioms&oldid=934987320`, 2020. Accessed 26/02/2020.

נספח א'

קישוריות לגיאוגברה

אקסיומה 1	https://www.geogebra.org/m/fq9d5hms
אקסיומה 2	https://www.geogebra.org/m/fgmfss27
אקסיומה 3	https://www.geogebra.org/m/ek3mqupw
אקסיומה 4	https://www.geogebra.org/m/renzzbdg
אקסיומה 5	https://www.geogebra.org/m/aszn9ywu
אקסיומה 6	https://www.geogebra.org/m/bxe5e5ku
אקסיומה 7	https://www.geogebra.org/m/yeq5gmeg
חקלוקת זווית לשלושה של Abe	https://www.geogebra.org/m/dxrcvjam
חקלוקת זווית לשלושה של Martin	https://www.geogebra.org/m/caky7edd
הכפלת קוביה של Messer	https://www.geogebra.org/m/mrcwjqh8
הכפלת קוביה של Beloch	https://www.geogebra.org/m/enzmmwua

לאור תקלה בגיאוגברה, בפרוייקטים המשתמשים באקסיומה 6, נקודות המוגדרות על ידי שיקוף מסביב למשיק המשותף אינן נשמרות או נשמרות בצורה שגויה.

נספח ב'

פיתוח הזהיות הטריגונומטריות

ניתן לפתח את הזהויות הטריגונומטריות עבור טנגנס שהשתמשנו בהוכחה של אקסיומה 3 מזהויות עבור סינוס וקסינוס:

$$\begin{aligned}
\tan(\theta_1+\theta_2) &= \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos(\theta_1+\theta_2)} \\
&= \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2} \\
&= \frac{\sin\theta_1+\cos\theta_1\tan\theta_2}{\cos\theta_1-\sin\theta_1\tan\theta_2} \\
&= \frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}\,.
\end{aligned}$$

נשמתש משוואה זו עם $\theta=(\theta/2)+(\theta/2)$ ונקבל משוואה ריבועית במשתנה $\tan(\theta/2)$:

$$\tan\theta = \frac{\tan(\theta/2)+\tan(\theta/2)}{1-\tan^2(\theta/2)}$$

$$\tan\theta\,(\tan(\theta/2))^2 \;+\; 2\,(\tan(\theta/2)) \;-\; \tan\theta = 0\,.$$

הפתרונות שלה הם:

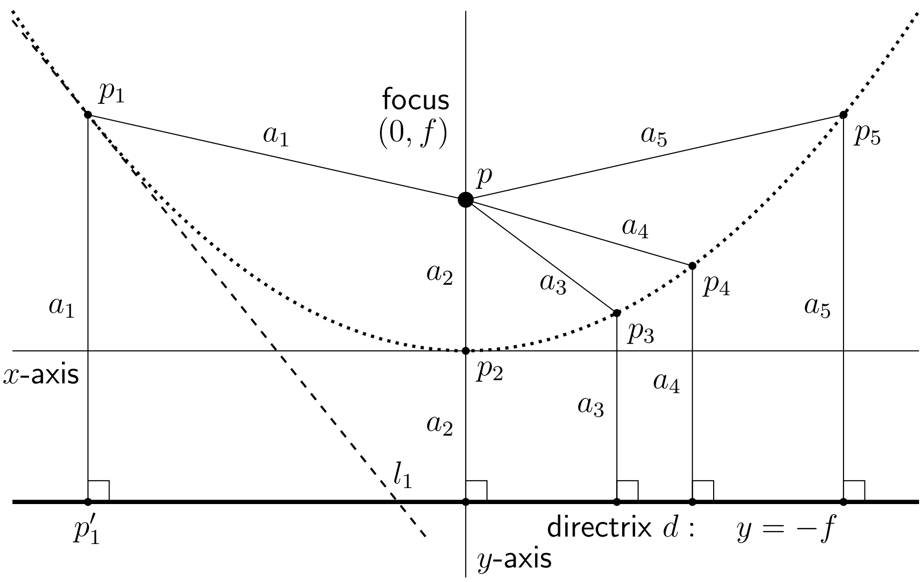
$$\tan(\theta/2) = \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}\,.$$

נספח ג'

פרבולות

בתחילת דרכם, תלמידים מכירים פרבולות כגרפים של פולינומים ריבועיים $y = ax^2 + bx + c$. אולם ניתן הגדיר פרבולות באמצעות גיאומטריה: נתונה נקודה, **המוקד** (focus), ונתון קו, **המדריך** (directrix), המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהמוקד ומהמדריך מגדיר פרבולה.

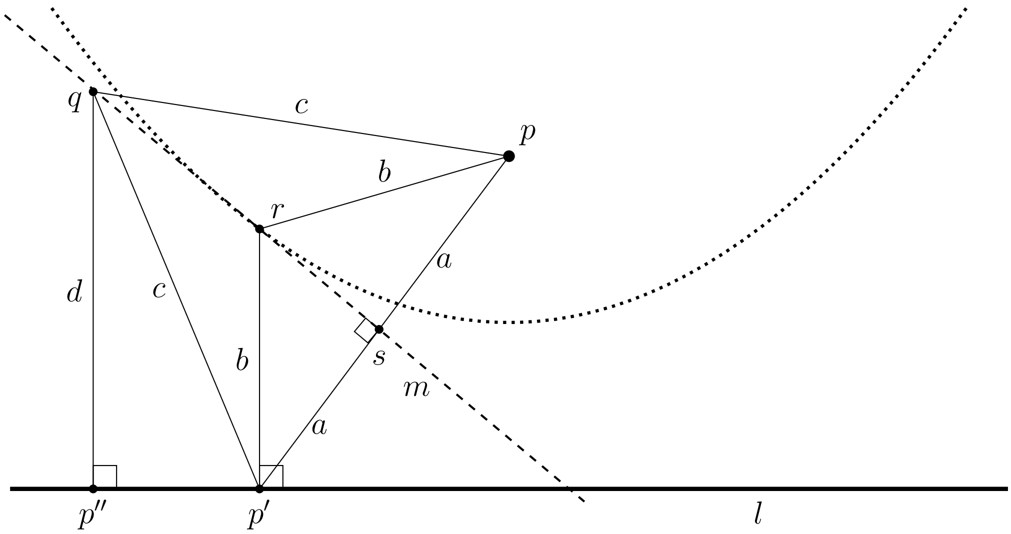
האיור שלהלן מראה את המוקד - הנקודה הגדולה ב־$p = (0, f)$, והמדריך - הקו העבה עם המשוואה $y = -f$. הפרבולה המתקבלת מוצגת בקו מנוקד. **הקודקוד** (vertex) שלה p_2 נמצא במרכז הצירים.



בחרנו חמש נקודות p_i, $i = 1, \ldots, 5$ על הפרבולה. כל נקודה p_i הוא במרחק a_i גם מהמוקד וגם מהמדריך. נוריד ניצב למדריך מ־p_i, ונסמן ב־p_i' את נקודת החיתוך של הניצב עם המדריך. נשתמש באקסיומה 2 ונבנה את הקו l_i דרך p_i שמשקף את p על p_i'. האיור מראה את הקיפול l_1 דרך p_1.

משפט הקיפולים הם משיקים לפרבולה.

הוכחה (אוריה בן לולו) באיור שלהלן, המוקד הוא p, המדריך הוא l, p' היא נקודה על המדריך, ו־m הוא הקיפול המשקף את p על p'. לפי ההגדרה, m הוא האנך האמצעי של הקו $\overline{pp'}$. תהי s החיתוך של $\overline{pp'}$ ו־m; אזי $\overline{ps} = \overline{p's} = a$ ו־$\overline{pp'} \perp m$.



תהי r החיתוך של הניצב ל־l דרך p' והקיפול m. אזי $\triangle psr \cong \triangle p'sr$ לפי צלע־זווית־צלע, כי $\overline{ps} = \overline{p's}$, $\angle psr = \angle p'sr = 90^\circ$ ו־$\overline{rs}$ הוא צלע משותפת. מכאן ש־$\overline{pr} = \overline{p'r} = b$ ולכן r נמצאת על הפרבולה.

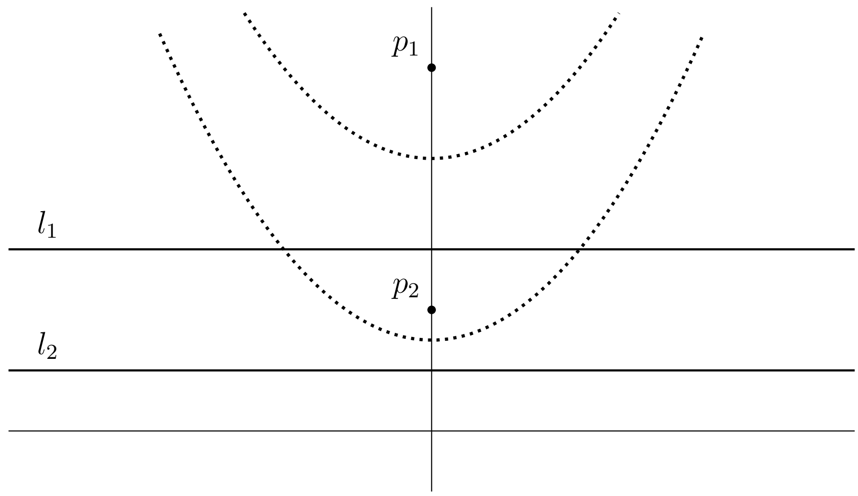
בחר נקודה p'' על המדריך שהיא שונה מ־p', והנח שהקיפול m גם משקף את p על p''. תהי q החיתוך של הניצב ל־l דרך p'' והקיפול m. כמו בהוכחה לעיל, נוכל להוכיח ש־$\overline{pq} = \overline{p'q} = c$. נסמן $\overline{qp''} = d$. אם q נמצאת על הפרבולה, אזי $d = \overline{qp''} = \overline{qp} = c$. אבל c הוא היתר של המשולש ישר־זווית $\triangle qp''p'$ ולא יכול להיות שווה לאחד הצלעות שלו d.

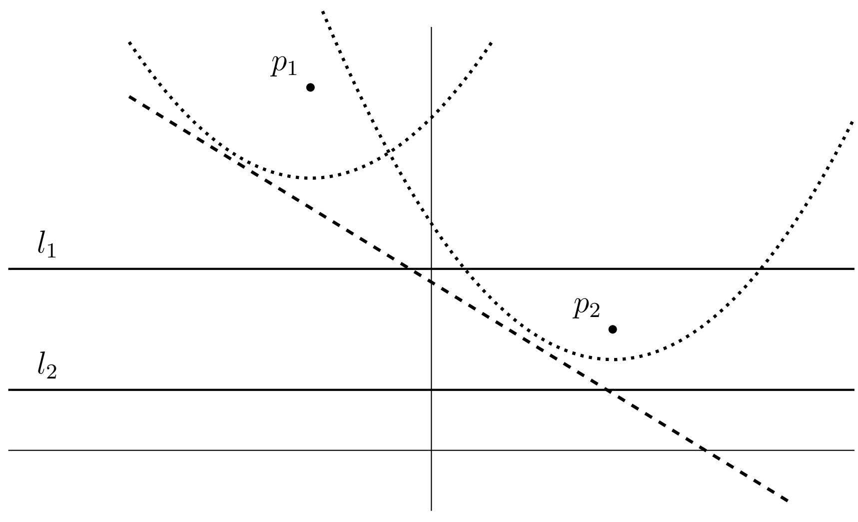
הוכחנו של־m נקודת חיתוך אחד עם בפרבולה ולכן הוא משיק לפרבולה.

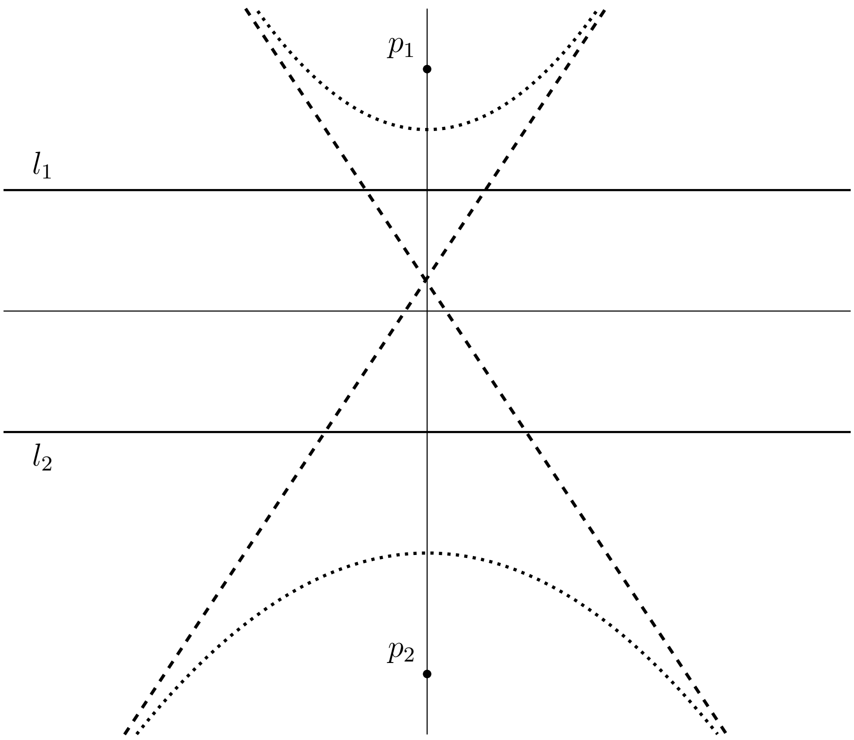
נספח ד'

משיקים המשותפים לשתי פרבולות

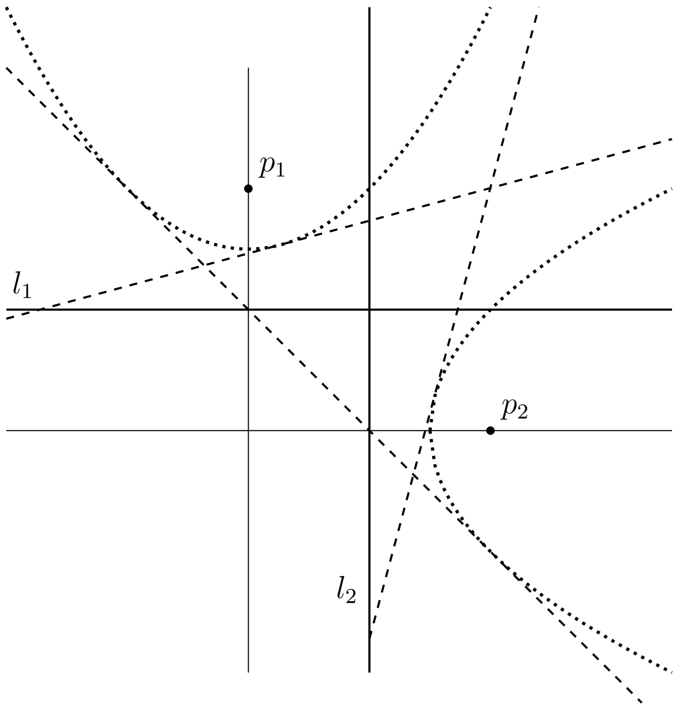
להלן איורים המדגימים את ארבעת האפשרויות:







p_1
l_1
l_2
p_2



p_1
l_1
p_2
l_2