העשרה מתמטית

מה הקשר בין סדרות פארי וסדרות פיבונאצ׳י?

תקציר

סדרת פארי (Farey) F_n היא סדרת כל השברים המצומצמים בין 0 ל- 1 אשר המכנה שלהם אינו גדול מ- n והם מסודרים בסדר עולה. במאמר אחר באוסף זה, "סריגים ושברים פשוטים: משפט פיק", נעזרנו בנוסחת פיק ובייצוג גיאומטרי להוכחת תכונות בסיסיות של סדרות פארי. במאמר זה נקשר את סדרות פארי לנושא מתמטי אחר: סדרות פיבונאצ׳י.

סדרת פיבונאצ׳י היא סדרה שבה כל איבר (החל מהשלישי) שווה לסכום שני האיברים הקודמים לו. למרות שבמבט ראשון אין קשר בין שתי הסדרות, נקשר בין סדרת פיבונאצ׳י וסדרות פארי על-ידי שנראה כיצד ניתן להוכיח את התכונות של סדרת פיבונאצ׳י (של מספרים שלמים) בעזרת השברים בסדרות פארי.

מבוא

סדרות פארי נקראות על שמו של מינרולוג (מומחה לתורת המחצבים) אנגלי בשם Farey (1766-1826), אשר פירסם לראשונה, בשנת 1816, מאמר המתאר אותן. לכל מספר טבעי n קיימת סדרת פארי המסומנת F_n. F_n מכילה את כל השברים *המצומצמים* $\frac{a}{b}$, המקיימים $0 \le \frac{a}{b} \le 1$, $b \le n$ ומסודרים בסדר עולה.
דוגמאות:

$$F_1: \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$F_2: \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$F_3: \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$F_4: \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

$$F_5: \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

$$F_6: \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$$

סדרת פיבונאצ׳י, הנקראת כך על שם המתמטיקאי האיטלקי Fibonacci (1170-1250), היא הסדרה שבה:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

כלומר, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots u_n, \dots$ (Fibonacci הוא כינוי לשמו האמיתי לאונרדו (Leonardo) מפיזה.)

מה הקשר בין השברים של פארי והשלמים של פיבונאצ׳י? במאמר נוכיח את התכונות של סדרת פיבונאצ׳י, בהסתמך על סדרות פארי - קשר מפתיע ויפה.

חלק 1: סמיכויות

לחיפוש קשרים בין הסדרות נרשום את סדרת השברים הבאה, שבה המונים והמכנים מהווים סדרת פיבונאצ׳י בצורה הבאה:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{u_n}{u_{n+1}}, \dots,$$

כלומר, רואים כי $\frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{u_n + u_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$. במלים אחרות, כל איבר (החל מהשלישי) הוא המנה של סכום המונים וסכום המכנים של שני קודמיו. נסכים לקרוא לו איבר ״תיכוני״.

קל להוכיח כי האיבר ה״תיכוני״ של שני שברים (חיוביים) תמיד נמצא ביניהם:

אם $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ אזי $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

הוכחה: מהנתון נובע כי $ad < bc$

נוסיף ab לשני האגפים $ad + ab < bc + ab$

$$a(b+d) < b(a+c)$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

באופן דומה נוכיח את אי השוויון הימני.

נעיר כי תכונה זו של שברים היתה ידועה מאות שנים, אך, כנראה, המסמך הראשון בו היא מתועדת הוא ספר של המתמטיקאי הצרפתי Nicolas Chuquet (1445-1488) משנת 1484, אשר התגלה והתפרסם רק במאה ה- 19.

קשרים כאלה בין שברים פשוטים מופיעים בסדרות Farey. במאמר ״סריגים ושברים פשוטים: משפט פיק״, המופיע באוסף מאמרים זה, הוכחנו בכלים גיאומטריים את התכונות הבאות:

I. אם $\frac{c}{d} < \frac{e}{f} < \frac{a}{b}$ הם איברים סמוכים ב- F_n, אזי $\frac{a+c}{b+d} = \frac{e}{f}$

II. אם $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ סמוכים בסדרה F_n, ומופרדים על-ידי $\frac{e}{f}$ בסדרה F_{n+1} אזי $e = a + c$ ו- $f = b + d$

המשמעות של תכונות אלו היא כי אם $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ סמוכים באיזו שהיא סדרה F_n, אזי בפעם הראשונה שהם אינם סמוכים באיזו שהיא סדרה F_{n+k}, הם יופרדו על-ידי $\frac{a+c}{b+d}$, ושבר זה הוא בצורתו המצומצמת.

נחזור לסדרה

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{u_n}{u_{n+1}}, \dots, \qquad (1)$$

אנו רואים, לדוגמה, כי $\frac{1}{1}$ ו- $\frac{1}{2}$ הם סמוכים ב- F_2 אך מופרדים בפעם הראשונה ב- F_3 על-ידי $\frac{2}{3} = \frac{1+1}{1+2}$.

ועתה $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{2}{3}$ סמוכים ב- F_3 וב- F_4 אך מופרדים לראשונה ב- F_5 על-ידי $\frac{3}{5} = \frac{1+2}{2+3}$, וכך הלאה.

לפיכך, כל איבר בסדרה (1) יופיע לראשונה באיזו שהיא F, על-ידי הפרדת שני קודמיו המיידיים. ואולם, אם כך הדבר, כל השברים הללו הם מצומצמים. בזאת הראינו תכונה בסיסית של סידרת פיבונצ'י, כלומר:

שני איברים סמוכים בסדרת פיבונאצ'י זרים זה לזה (כלומר, אין להם גורם משותף).

בעזרת שיקולים אלה נוכל להוכיח עתה כי גם u_n ו- u_{n+2} הם זרים.
לשם כך, ניצור את הסדרה

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{u_n}{u_{n+2}}, \dots,$$

גם כאן רואים כי: $\frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{u_n + u_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+2}}$, כלומר, כל איבר החל מהשלישי הוא "תיכוני" לשני קודמיו המיידיים. ההוכחה היא בדיוק כמו שראינו לעיל.

<u>הערה</u>: יכולנו להוכיח תכונה זו ישירות על-סמך העובדה כי $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ והתוצאה הקודמת, היינו כי u_n ו- u_{n+1} הם זרים. בחרנו להוכיח את התכונה בשיקולי האיבר ה"תיכוני", על מנת להדגיש כי תכונה זו אינה מתקיימת עבור u_n ו- u_{n+3}.

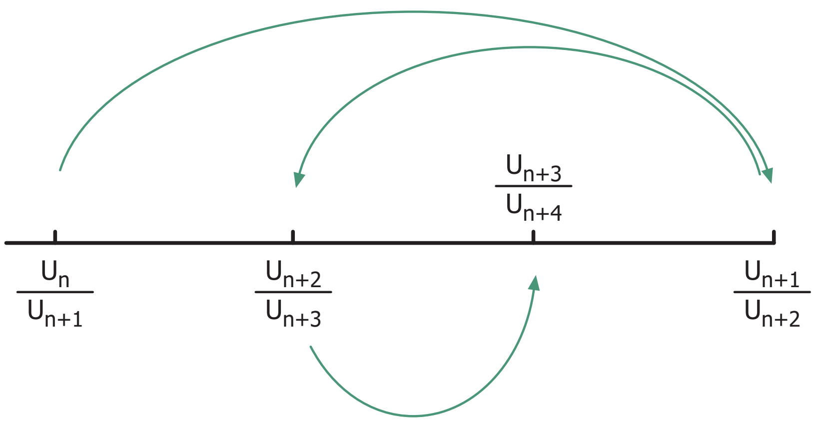
ואמנם, התבוננות באיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י מספקת מיד דוגמה נגדית: $u_3 = 2$ ו- $u_6 = 8$.
אם כך, היכן נופל השיקול הקודם?
הסדרה תהיה:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{13}, \frac{5}{21}, \dots, \frac{u_n}{u_{n+3}}, \dots,$$

כל איבר הוא עדיין "תיכוני" לשני קודמיו המיידיים, אבל $\frac{1}{3}$ ו- $\frac{1}{5}$ אינם סמוכים ב- F_5; הם מופרדים על-ידי $\frac{1}{4}$. כך שהשיקול נכשל כבר מן ההתחלה: ה"תיכוני" של $\frac{1}{3}$ ו- $\frac{1}{5}$ הוא $\frac{2}{8}$, כלומר, $\frac{1}{4}$ אבל הוא אינו שבר מצומצם.

חלק 2: סמיכויות (המשך)

התבוננות בסדרה $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \ldots$ מלמדת כי כל איבר, כפי הנראה, *לסירוגין* קטן או גדול מהאיבר הקודם לו. מהאיבר השלישי ואילך, כל איבר הוא מהצורה $\frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{u_n + u_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$, כלומר האיבר ה"תיכוני" של שני קודמיו, ומאחר והאיבר התיכוני של שני מספרים הוא תמיד מספר ביניהם, הסדרה (1) נראית באופן הגרפי כך:



הוכחנו אם כך כי כל איבר, לסירוגין קטן או גדול מקודמו.
נחזור שוב לתכונות של סדרות פארי. במאמר "סריגים ושברים פשוטים: משפט פיק" הוכחנו גם את התכונה הבאה:

III. אם $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ סמוכים ב- F_n, אזי $bc - ad = 1$

מאחר ואנו יודעים כבר כי שני איברים סמוכים בסדרה (1) הם סמוכים גם ב- F_n מסוים, נובע כי:

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = +1 \text{ או } -1 \qquad (2)$$

מקורם של הסימנים + או – באגף ימין הוא בעובדה שאיברי הסדרה (1) גדולים או קטנים, לסירוגין מקודמיהם. נראה שניתן לקבל תוצאה מדויקת יותר:

מאחר ו- $\frac{u_1}{u_2} > \frac{u_2}{u_3}$ וגם $\frac{u_2}{u_3} < \frac{u_3}{u_4}$, הרי ש- $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ הוא קטן או גדול מ- $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ לפי הזוגיות או

האיזוגיות של n בהתאמה. לכן, נוכל לנסח את הקשר (2) באופן הבא:

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = (-1)^n \qquad (3)$$

זוהי תכונה יסודית נוספת של סדרות פיבונאצ׳י, אשר צומחת מתוך פרשנות מחודשת של תכונה יסודית של סדרות פארי.

חלק 3: חיתוך הזהב

בסדרת פיבונאצ׳י, היחס בין כל שני מספרים רצופים הולך ומתקרב אל המספר, הידוע בשם ״יחס הזהב״ (1.61803...): היחס המתקבל כאשר נקודה C מחלקת קטע AB באופן ש- AC : CB = AC : AB.

אם נחלק את שני האגפים של (3) ב- $u_{n+1} \cdot u_{n+2}$ נקבל:

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{u_{n+1} \cdot u_{n+2}}$$

ברור כי, עבור כל ε, נוכל למצוא N כך ש:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - \frac{1}{u_{n+1} \cdot u_{n+2}} < \varepsilon \quad \text{עבור כל } n \geq N$$

מאחר ו- $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ נמצא ברווח $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, אנו מסיקים כי הגבול כאשר $n \to \infty$ קיים וערכו r, כך ש- $0 < r < 1$.

את הגבול אפשר למצוא בקלות מההגדרה הרקורסיבית של סדרת פיבונאצ׳י

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

חלוקה ב- u_n נותנת:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

בגבול

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} \to r \quad \text{ו-} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{r}$$

כך שהמשוואה עבור r היא $\frac{1}{r} = 1 + r$ או $r^2 + r - 1 = 0$ שפתרונה החיובי הוא $\frac{1}{\phi} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, כאשר ϕ הוא **יחס הזהב**.

סדרת פיבונאצ׳י וחיתוך הזהב מוכרים בהקשר של בעיית הארנבים:

כמה זוגות ארנבים יוליד זוג ארנבים בתוך שנה, אם נניח שכל זוג מוליד זוג חדש מדי חודש, והזוג החדש מתחיל להוליד בחודש השני.

חיתוך הזהב הופיע במשך הדורות בהקשרים שונים. (ראו מריו ליביו, 2002). במאמר זה הראינו כיצד ניתן ״לחזור 600 שנה אחורנית״ ולהוכיח תכונות של סדרת פיבונאצ׳י בעזרת הסדרות של פארי, שהן מאוחרות בהרבה.

רשימת מקורות

כרמית ברקת - סדרות *Farey*, *שבבים - עלון למורי המתמטיקה*, תיק מס׳ 18.

מריו ליביו (2002). *חיתוך הזהב*, תרגום לעברית בהוצאת אריה ניר.

Bruckheimer, M. and Arcavi, A. (1995). A visual approach to some elementary number theory, *The Mathematical Gazette* 79, pp. 471-478.

Arcavi, A. and Bruckheimer, M. (2000). Farey rabbits, *The Mathematical Gazette* 84, pp. 223-226.