

مدخل للتحليل

طبعة صياغة

قسم تدريس العلوم، معهد وايزمن للعلوم



مدخل للتحليل

طبعة صياغة



قسم تدريس العلوم، معهد وايزمن للعلوم

يصدر بمبادرة

المعهد الإسرائيلي لتدريس العلوم على اسم عاموس دي شليط

من تأسيس

وزارة المعارف والثقافة، والجامعة العبرية في القدس، ومعهد وايزمن للعلوم، رحوپوت



حقوق الطبع محفوظة، معهد وايزمن للعلوم

يمنع منعاً باتاً تكرار، أو نسخ، أو تصوير، أو تسجيل، أو ترجمة، أو اختزان في مجمع معلومات، أو بث بأية طريقة كانت، الكترونية، أو بصرية، أو ميكانيكية، أو بأية طريقة أخرى، أي جزء من هذا الكتاب، لاستخدامه لأغراض تجارية الأبدان خاص واضح ومكتوب من الناشر.

طبعة تجريبية 1997

לוחות דפוס וכריכה: גסטליט חיפה בע"מ.

تأليف:

عديت كوهن
أورلي جوتليب

استشارة:

أبراهام هرکبي
نوريت هداس
مکسيم بروکهايمر
ميخائيل كورن

رسم وتخطيط:

أفي طال
ياغيل عيمانوئيل - إدري

تصميم بياني ورسومات:

آجي (راحل) بكشفان
ترجمه الى العربية:
نافذ حنا

مراجعة واعداد:

ناصر فرنسيس

الى الطالب

ستطور، خلال التعلم في هذا الكراس، أدوات تساعدك على بحث الدوال.
في نهاية الكراس ستكون مهياً وقادراً على رسم رسم بياني لدالة معطاة
بالصورة الجبرية. (بإمكانك اليوم، عمل هذا الشيء مع الدالة الخطية
والتربيعية).
في القسم الأول من كل بند تتعرف من خلال التجربة والتدرب على الموضوع
والمصطلحات الجديدة الواردة فيه.
وفي القسم الثاني نقوم بحل تمارين لتأسيس وتثبيت المادة التي تعلمتها في
البند نفسه، وفي البنود التي سبقته.
نأمل ان تستمتع وتستفيد من دراستك في هذا الكراس.

نقدم شكرنا لتلاميذ الصفين العاشر ٣ والعاشر ٥ من مدرسة برز في جفعات برنز على ما
ابدوه من تعاون واستعداد عندما تعلموا في كراس الطبعة التجريبية ان ردود فعلهم
وملاحظاتهم ساهمت كثيراً في صياغة الطبعة الحالية للكتاب


الفهرس


7	تخطيط رسم بياني حسب نقاط
17	تخطيط رسم بياني حسب خواص
27	إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين
38	أدوات أخرى للبحث
48	تأشير ميل الدالة في نقطة
55	تساعد وتنازل في نقطة
61	تشخيص نقاط قصوى
68	الدالة المشتقة
78	تخطيط دالة بمساعدة الدالة المشتقة
85	الدالة المشتقة للدالة $f(x) = x^n$
93	الدالة المشتقة للخط المستقيم
98	كيف تتغير الدالة المشتقة؟
103	مشتقة المجموع
108	الميل، المماس ومعادلة المماس
115	اسئلة بحث
124	مزيداً من التمارين


توضيح رموز:

تمرين "مفتاح" للنقاش في الصف 


عمل ذاتي 

تمرين تحدٍ 

تحضير (استعداد) 

انتبه 

إجمال 

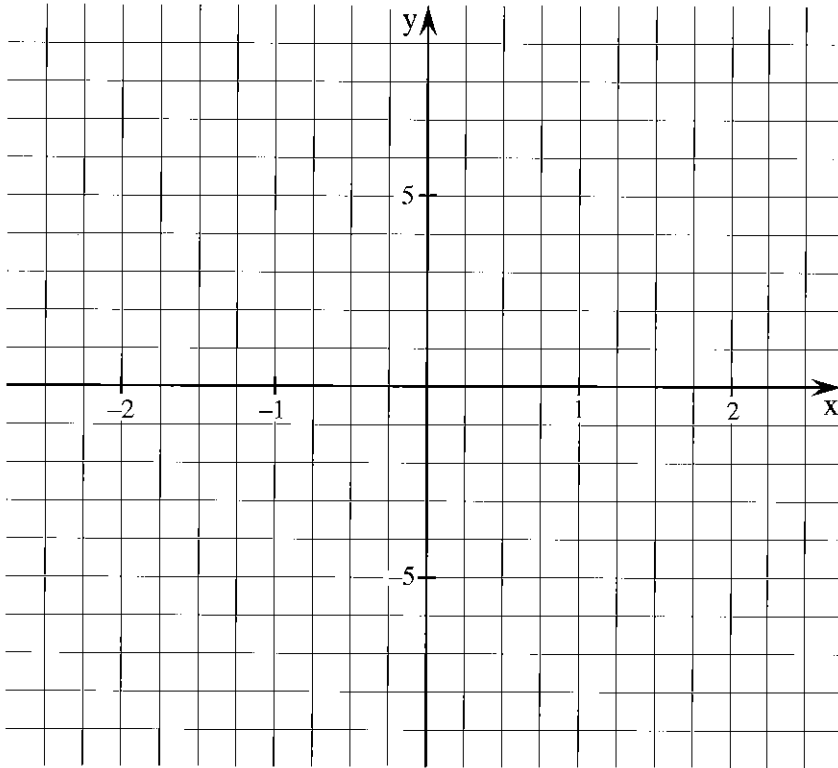
تذكير 

1. معطاة الدالة $f(x) = 4x^3 - 3x$

أ) أكمل الجدول.

x	-1	0	1
f(x)			

ب) عيّن النقاط التي وجدتها في هيئة المحاور التي تظهر أمامك. صل بينها.



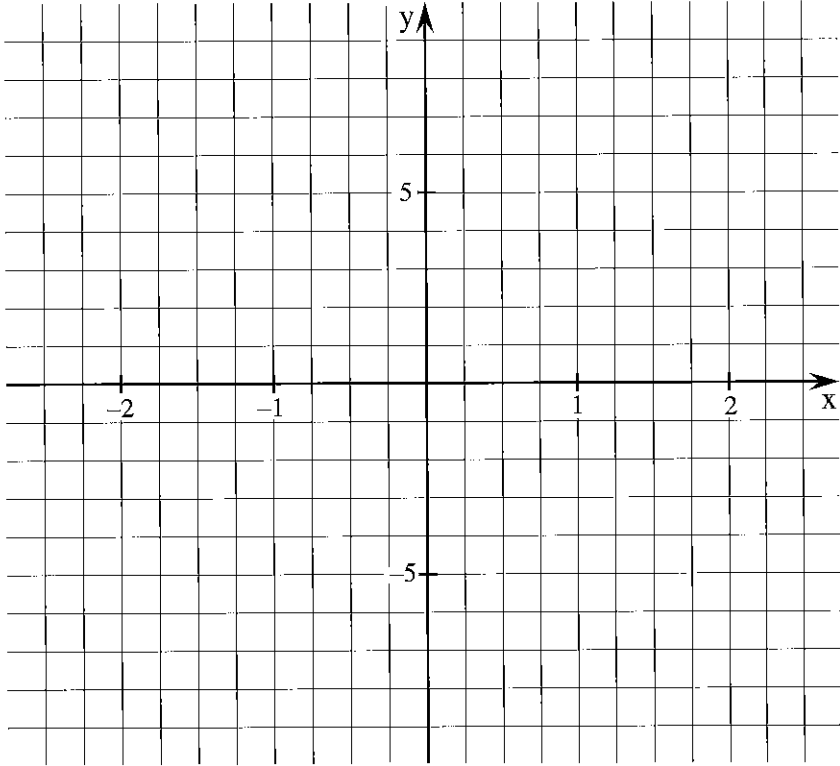
ج) حسب الرسم البياني المخطط $f(1\frac{1}{2}) \approx$ _____

حسب الدالة $f(1\frac{1}{2}) =$ _____

هل أنت مقتنع بأن هذا هو شكل الرسم البياني؟

د) أضف نقاطاً للجدول، وخطط الرسم البياني للدالة من جديد في مجموعة المحاور التي أمامك.

x	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$
f(x)		-1	0	1	



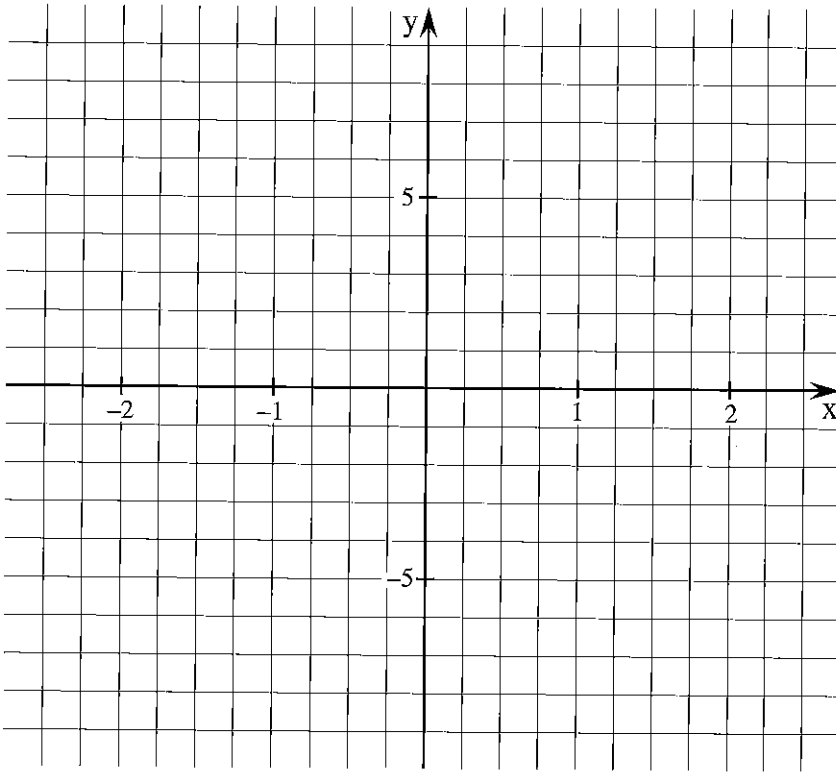
هـ) حسب الرسم البياني الجديد $f(\frac{1}{2}) \approx$ _____

حسب الدالة $f(\frac{1}{2}) =$ _____

هل أنت مقتنع، هذه المرة، بأن هذا هو شكل الرسم البياني؟

و) أضف نقاطاً للجدول، وخطط من جديد الرسم البياني للدالة في هيئة المحاور التي تظهر أمامك.

x	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$
f(x)	-9	-1		0		1	9



ز) هل أنت مقتنع، هذه المرة، بأن هذا هو شكل الرسم البياني؟

2. معطاة الدالة التربيعية $h(x) = x^2 - 18x + 80$

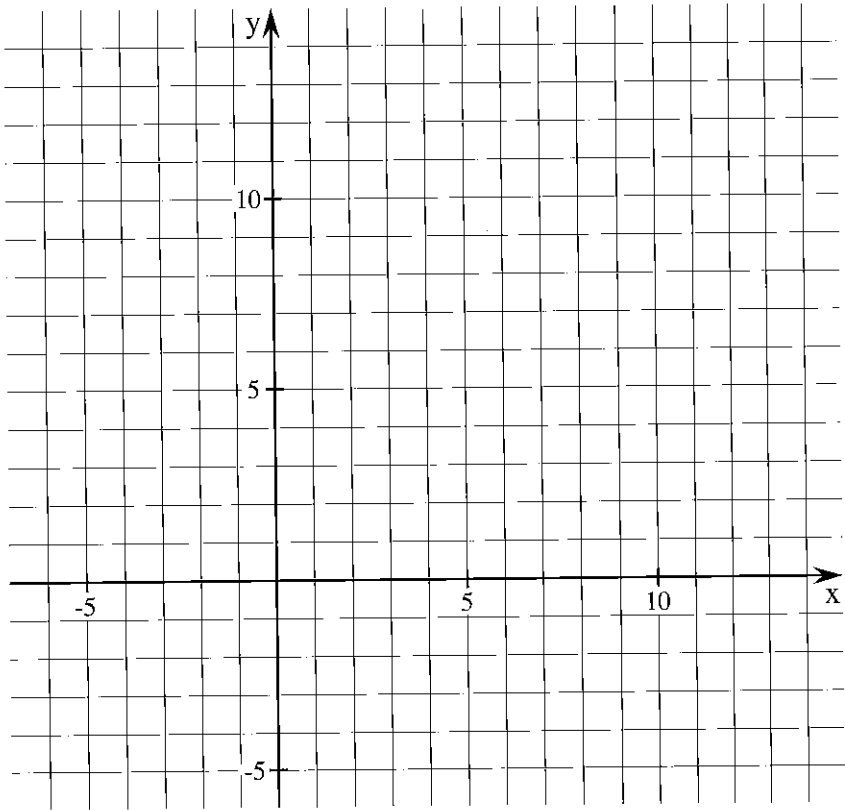
لقد تعلمت في الماضي رسم دالة تربيعية.

أ. جد رأس الدالة (تذكير $x_r = -\frac{b}{2a}$)

ب. أكمل الجدول، وخطِّط رسماً بيانياً.

رأس


x							
h(x)							



حسب الرسم البياني $f(10.5) \approx$ _____

حسب الدالة $f(10.5) =$ _____

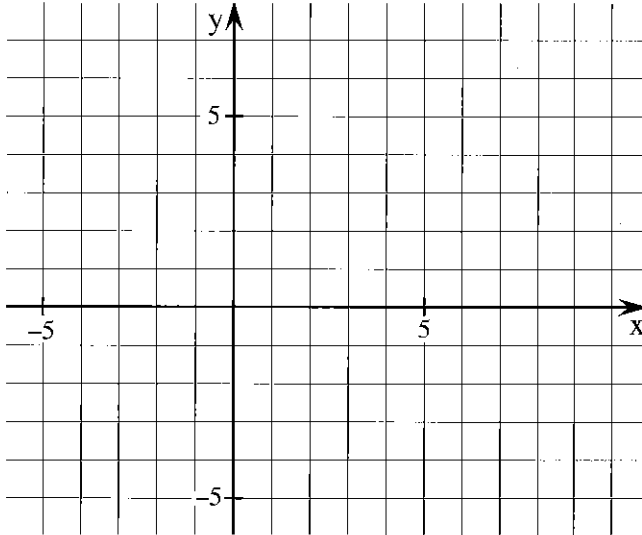
د. هل أنت مقتنع بأن هذا هو شكل الرسم البياني؟ **علّل!**

3. معطاة الدالة $p(x) = 3x + 5$ 

(أ) أكمل الجدول، وخطط رسماً بيانياً

x							
p(x)							

(ب) هل أنت مقتنع بأن هذا هو شكل الرسم البياني؟ **علّل!**



في تمرين 3، في تخطيط الرسم البياني $p(x) = 3x + 5$ ،
استعنا بمعرفتنا أن الرسم البياني لدالة من الصورة
 $y = ax + b$ هو خط مستقيم، ولذلك تكفي نقطتان على
الرسم البياني لتخطيطه.

في تمرين 2، في تخطيط الرسم البياني للدالة

$$h(x) = x^2 - 18x + 80$$

اعتمدنا على بحث أجريناه في الماضي: للرسم البياني
لدالة تربيعية محور تماثل ورأس. شكله بارابولا (قطع
مكافئ) كهذا \cup أو كهذا \cap .

عندما حاولنا تخطيط الرسم البياني للدالة $f(x) = 4x^3 - 3x$
حسب جدول، اضطررنا في كل مرة إلى أن نصحح شكل الرسم
البياني، وفي الحقيقة، فإنه بعد تصحيحين لم يكن واضحاً
لنا إذا حصلنا على الشكل الصحيح للرسم البياني.

نتيجة: لا نملك، ولا توجد بحوزتنا، الأدوات الكافية لكي
نرسم رسومات بيانية لدوال ليست خطية، ولا تربيعية.

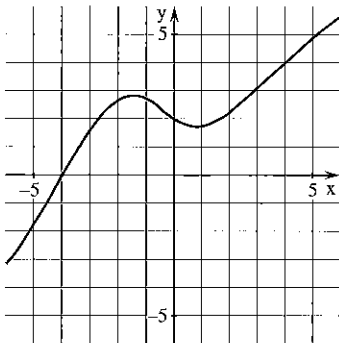
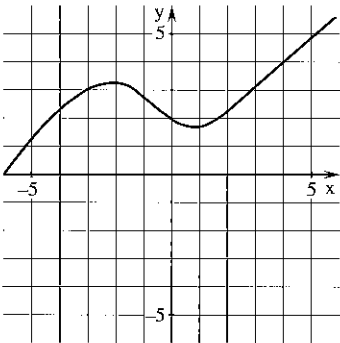
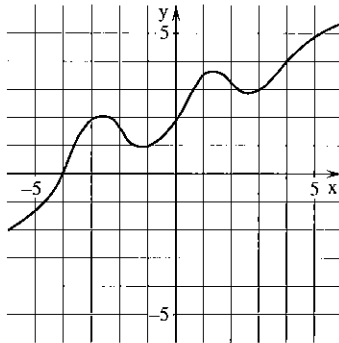
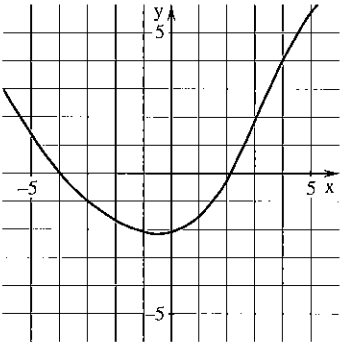
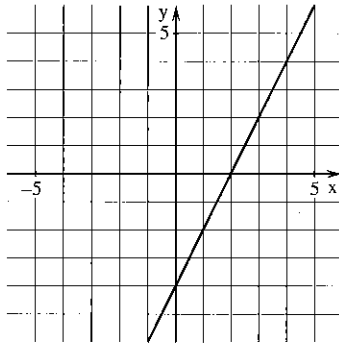
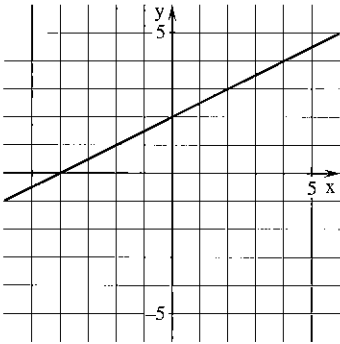
تمارين

x	-4	0	4
t(x)	0	2	4

4. أكمل سامي الجدول التالي حسب

قالب لدالة t.

أي من الرسوم البيانية الآتية يمكن أن يكون رسماً بيانياً للدالة t؟



5. حضر خمسة أولاد جداول لكي يخططوا الرسم البياني للدالة

$$t(x) = x^2 - 12x + 37$$

من منهم حضر جدولاً منطقياً؟ علّل! (لم يخطئ أي ولد في الحساب).

x	1	2	3	4	5
t(x)	26	17	10	5	2

سامي

x	7	8	9	10	11
t(x)	2	5	10	17	26

سعيد

x	4	5	6	7	8
t(x)	5	2	1	2	5

سليم

x	4	5	$5\frac{1}{2}$	6	$6\frac{1}{2}$	7	8
t(x)	5	2	$1\frac{1}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	2	5

توفيق

x	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0
t(x)	325	257	197	145	101	65	37

وائل

6. حضر ثلاثة أولاد جداول لتخطيط رسم بياني للدالة $k(x) = 2x + 5$. مَنْ منهم يحصل على "التصرف الكامل" للرسم البياني للدالة؟ علّل! (لم يخطئ أي ولد في الحساب).

x	-3	0	3
k(x)	-1	5	11

هيثم

x	1	2	3	4
k(x)	7	9	11	13

نزار

x	3	7
k(x)	11	19

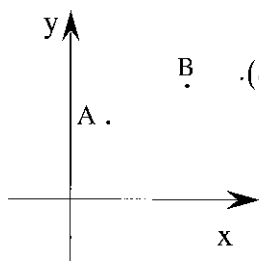
ايداد

7. معطاة نقطتان $A(1,2)$, $B(3,3)$.

I. أ) كم دالة خطية تمر في النقطتين A و B؟
ارسم! (إذا وجد أكثر من واحدة، فارسم اثنتين).

ب) كم دالة تربيعية تمر في النقطتين A و B؟

ارسم! (إذا وجد أكثر من واحدة فارسم اثنتين). B



ج) كم دالة تمر في النقطتين A و B؟ ارسم!

(إذا وجد أكثر من واحدة، فارسم اثنتين).

- II. افحص أيًا من الدوال الآتية تمر في النقطتين A و B.

m(x) = x + 1

د) t(x) = x² - 3.5x + 4.5

p(x) = - $\frac{1}{2}$ x² + 2 $\frac{1}{2}$ x

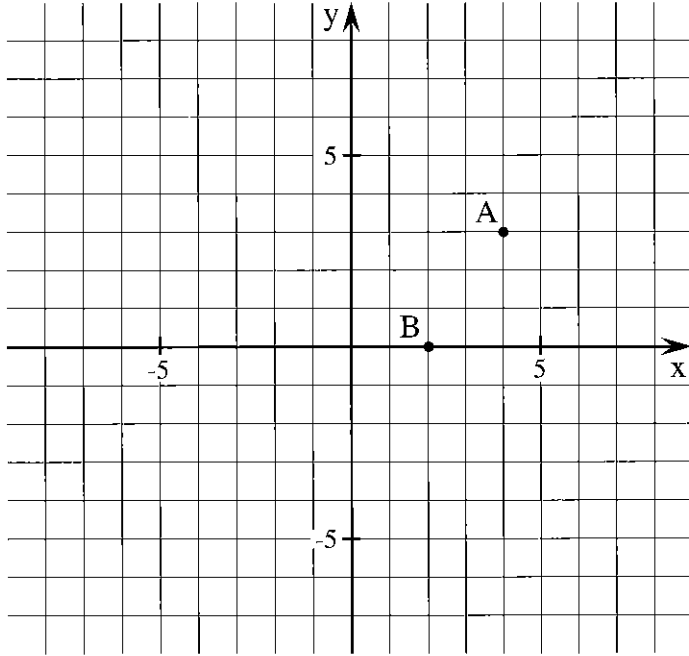
هـ) f(x) = $\frac{1}{2}$ x + 1 $\frac{1}{2}$ ب)

s(x) = x³ + x² - 16.5x + 16.5 و)

r(x) = 2x³ ج)

8. $f(x)$ هي دالة تربيعية.

معطى أن A هي رأس الدالة و B هي نقطة تقاطع للدالة مع محور x .



أ) جد نقطة تقاطع أخرى مع محور x .

ب) خطط رسماً بيانياً تقريبياً (غير دقيق) للدالة.

ج) أكمل.

الدالة تصاعدية عندما تكون _____

الدالة تنازلية عندما تكون _____

$f(x) = 0$ عندما تكون $x = \underline{\hspace{2cm}}$ أو $x = \underline{\hspace{2cm}}$

$f(x) > 0$ بين _____

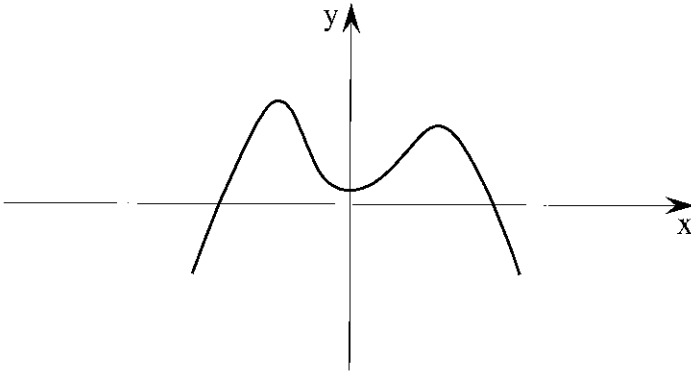
متى تكون $f(x) = 5$?

تخطيط الرسم البياني لدوال حسب خواص

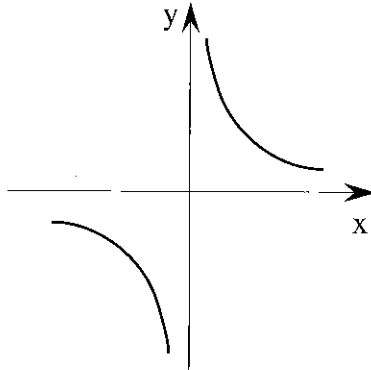
عملنا حتى الآن في هذا الكتاب بدوال معرفة لكل الأعداد الحقيقية، ويمكن رسم الرسم البياني بجرّة قلم واحدة "بدون ان نرفع القلم عن الورقة". سنرى في الدروس القادمة أن هذا الكتاب يعمل بدوال من هذا النوع (معرفة لكل الأعداد الحقيقية) الآ في بعض الحالات القليلة التي سنذكرها بوضوح.

مثال:

دالة متصلة

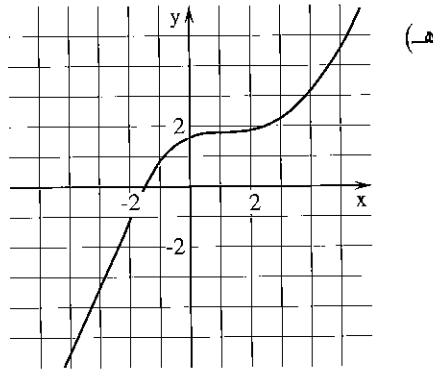
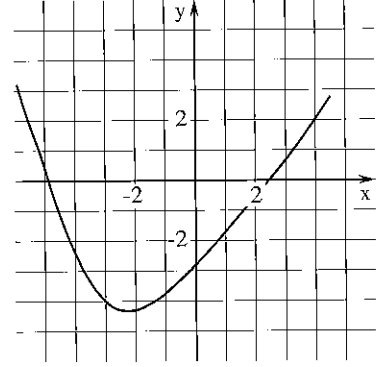
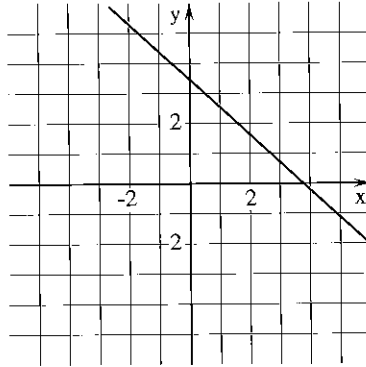
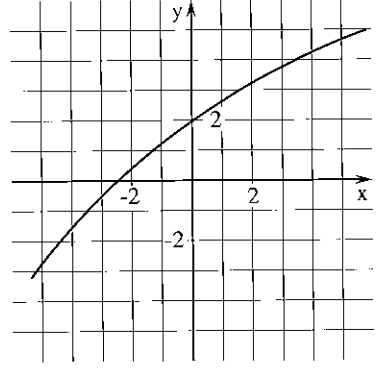
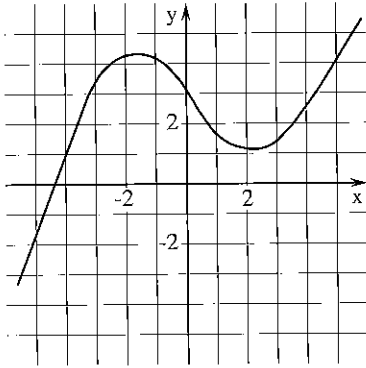


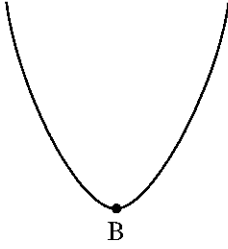
دالة ليست متصلة



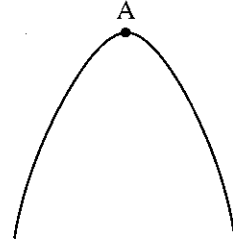


- I. 1. لون في كل رسم بياني، أجزاء تزايد الدالة في الرسم.
لون بلون آخر، أجزاء تناقص الدالة في الرسم.
- II لأي من الرسوم البيانية توجد نقاط انتقال من التزايد الى التناقص، أو نقاط انتقال من التناقص الى التزايد؟ عين هذه النقاط.





B نقطة انتقال من تنازل الى
تصاعد نقطة قيمة صغرى
(حضيض)



A نقطة انتقال من تصاعد الى تنازل
نقطة قيمة عظمى (قمة، ذروة)

تسمى نقاط القيمة العظمى ونقاط القيمة الصغرى باسم عام نقاط قصوى.



2. صحيح أم غير صحيح؟

أ) ليست نقطة قيمة عظمى
لأن النقطة F أعلى منها.

ب) C هي نقطة قيمة عظمى
لأنها نقطة انتقال من
تصاعد الى تنازل.

ج) D ليست نقطة قيمة صغرى
لأن A أوطأ منها.

د) يمكن ان توجد دالة مع نقطتي قيمة عظمى.

هـ) النقطتان F و C هما نقطتا قيمة عظمى لأنهما نقطتا انتقال من
تصاعد الى تنازل.

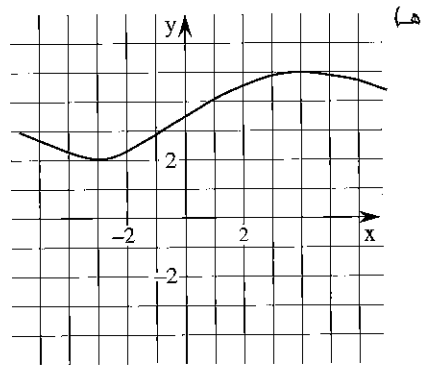
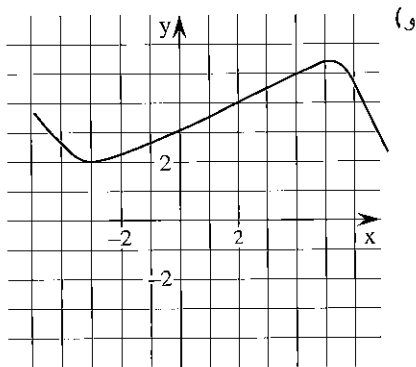
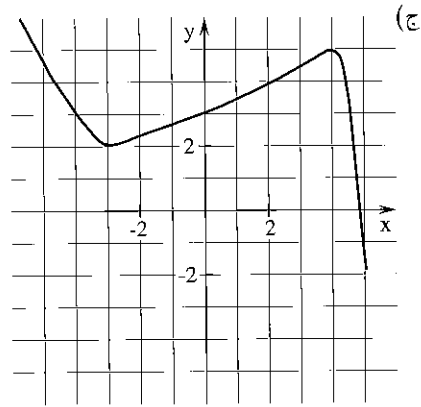
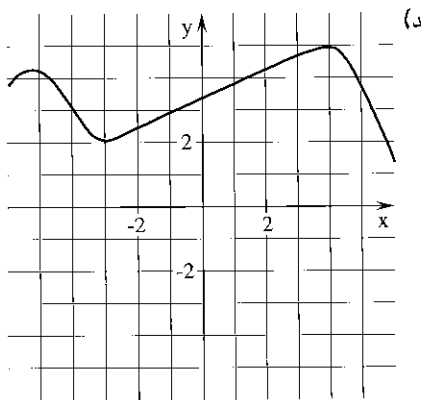
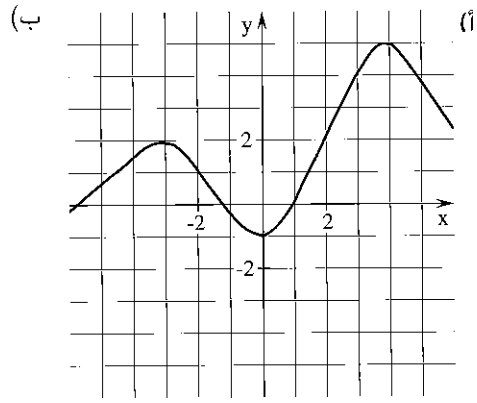
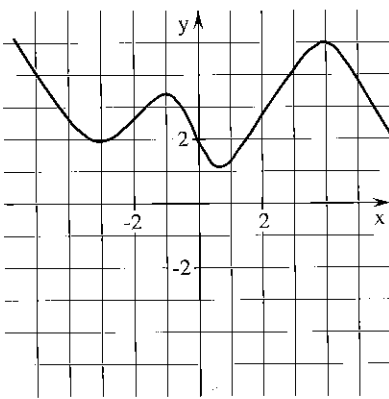
و) لهذه الدالة توجد ثلاث نقاط قيمة قصوى.

ز) يمكن ان توجد دالة مع نقطتي قيمة عظمى، ودون نقطة قيمة صغرى.

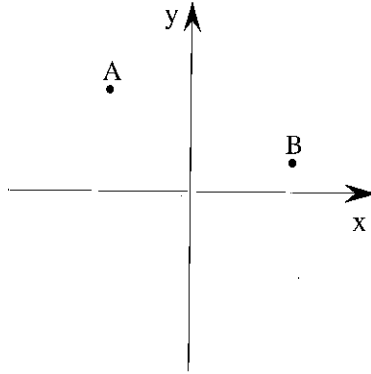
نقطة القيمة العظمى هي ليست بالضرورة "أعلى" نقطة على الرسم البياني.

نقطة القيمة الصغرى هي ليست بالضرورة "أوطأ" نقطة على الرسم البياني.

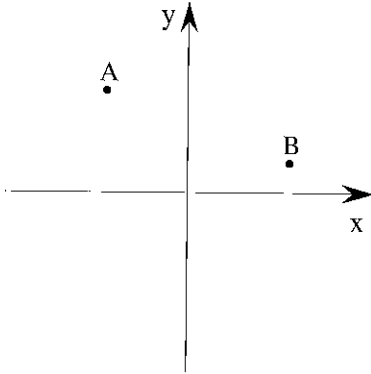
3. معلوم ان للدالة m نقطتا قيمة قصوى فقط: قيمة صغرى في النقطة $(-3, 2)$ وقيمة عظمى في النقطة $(4, 5)$. أي من الرسوم الآتية يمكن ان يكون رسماً بيانياً للدالة m ؟



4. أ) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً لدالة بحيث تكون A نقطة قيمة عظمى،
و B نقطة قيمة صغرى.



ب) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً لدالة بحيث تكون A نقطة قيمة صغرى، و B
نقطة قيمة عظمى.



5. أ) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً لدالة بحيث تكون النقطة $A(-2,3)$
نقطة قيمة عظمى، و $B(3,2)$ نقطة قيمة صغرى، وبحيث لا تكون
للدالة نقاط قصوى أخرى.



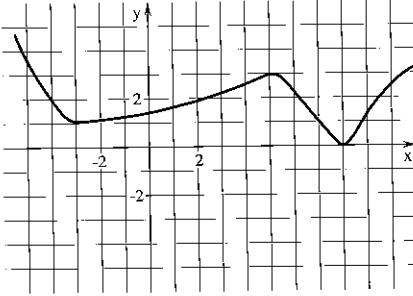
ب) سجل مجالات التزايد والتنازل للدالة التي رسمتها.



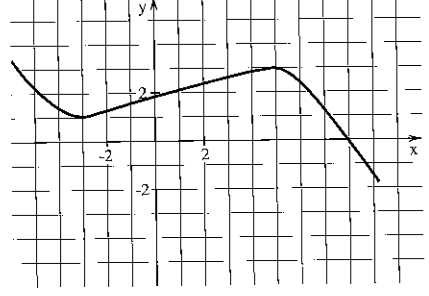
معطاة دالة f , ومعلوم ان النقاط القصوى الوحيدة هي: نقطة $A(-3,1)$ نقطة
قيمة صغرى، و $B(5,3)$ نقطة قيمة عظمى، و $C(8,0)$ نقطة التقاطع
(الوحيدة) مع محور x .

أشر الى كل رسم بياني، بـ $\sqrt{\quad}$ ، اذا كان يصلح لأن يكون رسماً بيانياً للدالة.
وإن كان لا يصلح، فاذكر السبب.

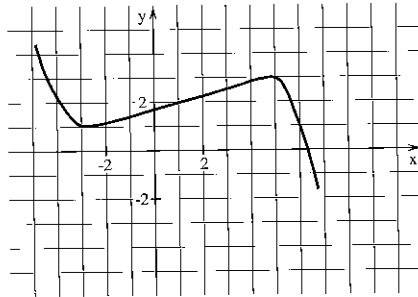
(ب)



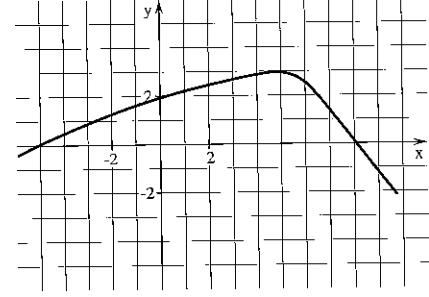
(أ)



(د)



(ج)

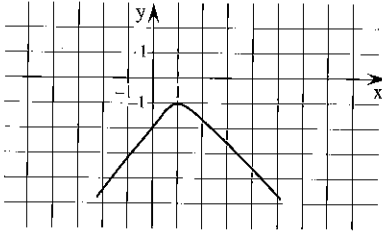


7. ارسم رسماً بيانياً تقريباً للدالة لها: نقطة قيمة عظمى وهي $A(-4, 5)$
ونقطة قيمة صغرى وهي $B(4, 2)$ ، ولها نقطة تقاطع واحدة مع محور x
وهي $C(-9, 0)$.



تمارين

8. في العمود الأيمن معطاة جميع النقاط القصوى، وجميع نقاط التقاطع مع المحورين لعدد من الدوال. لائم لكل مجموعة معطيات في العمود الأيمن،



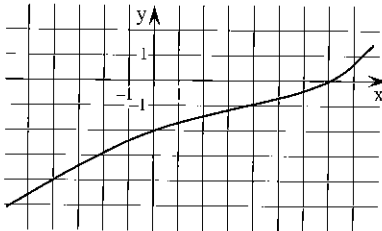
(f) الرسم البياني الملائم لها في العمود الأيسر.

(أ) قيمة عظمى: $(1, -1)$

قيمة صغرى: $(-2, -3)$ $(3, -2)$

تقاطع مع محور x : $(-4, 0)$ $(4, 0)$

(g) تقاطع مع محور y : $(0, -2)$

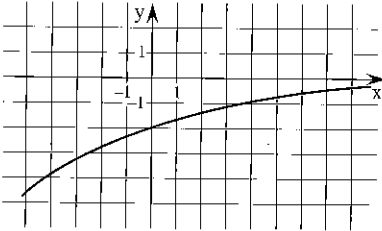


(ب) قيمة عظمى: $(1, -1)$

قيمة صغرى: لا يوجد

تقاطع مع محور x : لا يوجد

تقاطع مع محور y : $(0, -2)$

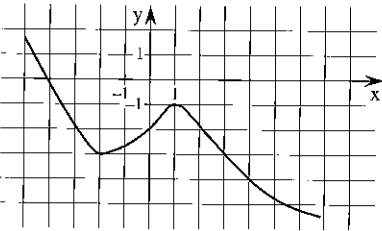


(ج) قيمة عظمى: $(1, -1)$

قيمة صغرى: $(-2, -3)$

تقاطع مع محور x : $(-4, 0)$

(k) تقاطع مع محور y : $(0, -2)$

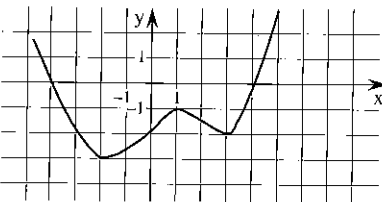


(د) قيمة عظمى: لا يوجد

قيمة صغرى: لا يوجد

تقاطع مع محور x : $(7, 0)$

تقاطع مع محور y : $(0, -2)$



(هـ) قيمة عظمى: لا يوجد

قيمة صغرى: لا يوجد

تقاطع مع محور x : لا يوجد في المجال المخطط

تقاطع مع محور y : $(0, -2)$

9. في كل من الفروع الآتية معطاة كل النقاط القصوى، وكل نقاط التقاطع مع المحورين لدالة، ارسم رسماً بيانياً تقريبياً حسب المعطيات.

(أ) قيمة عظمى: $(-2, 8)$ قيمة صغرى: $(4, 2)$
تقاطع مع محور x : $(-10, 0)$ تقاطع مع محور y : $(0, 7)$

(ب) قيمة عظمى: $(2, 0)$ قيمة صغرى: لا يوجد
تقاطع مع محور y : $(0, -6)$

(ج) قيمة عظمى: لا يوجد قيمة صغرى: لا يوجد
تقاطع مع محور y : $(0, 2)$

(د) قيمة عظمى: $(4, 8)$ قيمة صغرى: $(-5, 3)$ $(10, -4)$
تقاطع مع محور x : $(7, 0)$ $(15, 0)$ تقاطع مع محور y : $(0, 5)$

10. معلوم أن للدالة f نقطة قصوى واحدة فقط في النقطة $A(7, 8)$. كذلك

مكتوب أن النقاط $(8, 10)$ و $(5, 12)$ تقع على الرسم البياني للدالة.

أكتب "صحيح"، "غير صحيح" أو "لا نستطيع أن نقرر حسب المعطيات".

(أ) النقطة A هي قيمة عظمى.

(ب) النقطة A هي قيمة صغرى.

(ج) للدالة f نقطتا تقاطع مع محور x .

(د) للدالة f لا توجد نقاط تقاطع مع محور x .

(هـ) f تصاعدية في المجال $x > 7$ وتنزلية في المجال $x < 7$.

(و) f تصاعدية في كل المجال.

(ز) f تنازلية في كل المجال.

(ح) f تصاعدية في المجال $x < 7$ وتنزلية في المجال $x > 7$.

(ط) f تقطع محور y مرة واحدة.

(ي) f تقطع محور y أكثر من مرة واحدة.

ي (أ) f لا تقطع محور y .

ي (ب) النقطة $(6, 10)$ تقع على الرسم البياني للدالة.

ي (ج) النقطة $(9, 9)$ تقع على الرسم البياني للدالة.

11. معلوم أن للدالة g نقطة قصوى واحدة فقط في النقطة $A(-3, 5)$. كذلك معلوم أن النقطة $(0, 3)$ تقع على الرسم البياني للدالة. أكتب: "صحيح"، "غير صحيح" أو "لا نستطيع أن نقرر حسب المعطيات".
- (أ) النقطة A هي نقطة قيمة عظمى.
(ب) النقطة A هي نقطة قيمة صغرى.
(ج) للدالة g توجد نقطتا تقاطع مع محور x .
(د) للدالة g لا توجد نقاط تقاطع مع محور x .
(هـ) g تصاعدية في المجال $x > -3$ وتنازلية في المجال $x < -3$.
(و) g تصاعدية في المجال $x < -3$ وتنازلية في المجال $x > -3$.
(ز) g تصاعدية في كل المجال.
(ح) g تنازلية في كل المجال.
(ط) g لا تقطع محور y .
- (ي) النقطة $(-2, 4)$ تقع على الرسم البياني للدالة.
(ي أ) النقطة $(-1, 2)$ تقع على الرسم البياني للدالة.



12. في هذا التمرين سنعمل بدالة لا نستطيع رسمها بجرة قلم واحدة. الدالة g معرفة لكل الأعداد ما عدا العدد 3 النقاط القصوى الوحيدة هي: قيمة عظمى في النقطة $A(5, -3)$ ، قيمة صغرى في النقطة $B(0, 4)$. نقطة تقاطع مع محور x : لا يوجد. أرسم رسماً بيانياً للدالة g .
13. أعط، لكل فرع من الفروع الآتية، مثلاً لرسم بياني تقريبي للدالة. إذا كنت تعتقد أنه لا توجد دالة تحقق الشرط، فاذكر السبب؟
- دالة لها نقطة قصوى واحدة فقط.
 - دالة لها بالضبط نقطتا قيمة قصوى.
 - دالة لها بالضبط ثلاث نقاط قصوى.
 - دالة لها بالضبط عشر نقاط قصوى.
 - دالة لا توجد لها أية نقطة قصوى.
 - دالة لها نقطتا قيمة صغرى، ونقطة قيمة عظمى واحدة.
 - دالة لها نقطتا قيمة عظمى، ونقطة قيمة صغرى واحدة.
 - دالة لها ثلاث نقاط قيمة عظمى، ونقطة قيمة صغرى واحدة.

14. أ) كم نقطة قصوى توجد للدالة الخطية، ومن أي نوع؟
ب) كم نقطة قصوى توجد للدالة التربيعية، ومن أي نوع؟

15. تمرين في الاتصال - التمرين الآتي يعمل بثلاثات.

I. كل تلميذ يرسم لنفسه (من المهم أن لا يرى الآخرون عمله) رسماً بيانياً.

يجب المحافظة على القواعد الآتية:

أ) أن يكون الرسم البياني المرسوم رسماً بيانياً لدالة.

ب) أن يتم الرسم "بجرة قلم واحدة".

II. بعد أن تكون جميع الرسوم البيانية جاهزة (بحيث لا يرى أي تلميذ رسم زميله) يعطي كل واحد، وحسب دوره، تعليمات لصديقين له لكي يحاولوا رسم الرسم البياني المخبأ (وكأن التعليمات تعطى بواسطة التلفون).

بما أن الحديث عن مكالمة تلفونية، ولا يمكن رؤية الرسم البياني، فعلى مُعطي الرسم البياني أن يعطي معلومات دقيقة قدر الإمكان من خلال استعمال مفاهيم مثل: تصاعد، تنازل، قيمة صغرى، قيمة عظمى، نقاط تقاطع مع المحور، موجب، سالب.

بعد الانتهاء من "المكالمة التلفونية" يجتمع الثلاثة معاً ويقارنون رسوماتهم البيانية.

III. نكرر "المكالمة التلفونية" بحيث يعطي طالب آخر التعليمات للرسم البياني للدالة التي رسمها، في كل مرة.

إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين

حتى الآن قمنا برسم رسوم بيانية لدوال حسب نقاط التقاطع، وحسب النقاط القصوى المعطاة. وفي هذا البند فإننا سنجد نقاط التقاطع بأنفسنا.

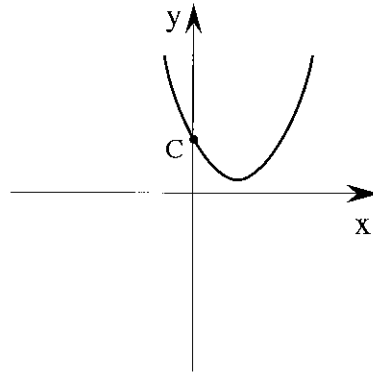
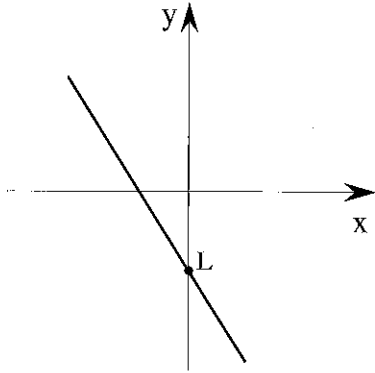
1. سجل احداثيات ثلاث نقاط واقعة على المحور y .

(ج) جد احداثيات النقطة L .

$$g(x) = -2x - 4$$

(ب) جد احداثيات النقطة C .

$$p(x) = x^2 - 2x + 3$$



في كل تمرين وجدت نقطة التقاطع مع محور y .

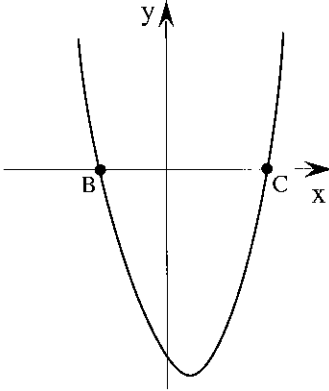
2. أ) اكتب قاعدة تناظر لدالة خطية تقطع محور y في النقطة $(0, 5)$.

ب) اكتب قاعدة تناظر لدالة تربيعية تقطع محور y في النقطة $(0, -1)$.

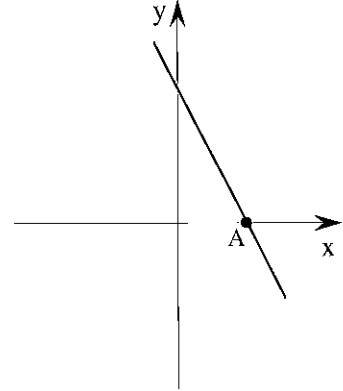
3. كيف نجد نقطة تقاطع دالة معينة مع محور y ؟

4. (أ) سجل احداثيات ثلاث نقاط واقعة على محور x .
 (ب) جد احداثيات النقطة A .
 (ج) جد احداثيات كل من النقطتين B و C .

$$k(x) = x^2 - x - 6$$



$$m(x) = -2x + 4$$



في كل تمرين وجدت نقاط التقاطع مع محور x .

5. كيف نجد نقاط تقاطع دالة معينة مع محور x ؟

6. معطاة الدالة $y(x) = x^3 - 3x^2 - 18x$. النقاط القصوى الوحيدة هي:
 قيمة عظمى في النقطة $(-1.6, 17)$ ، قيمة صغرى في النقطة $(3.6, -57)$.

(أ) عيّن النقاط في هيئة المحاور المخططة في الصفحة التالية:

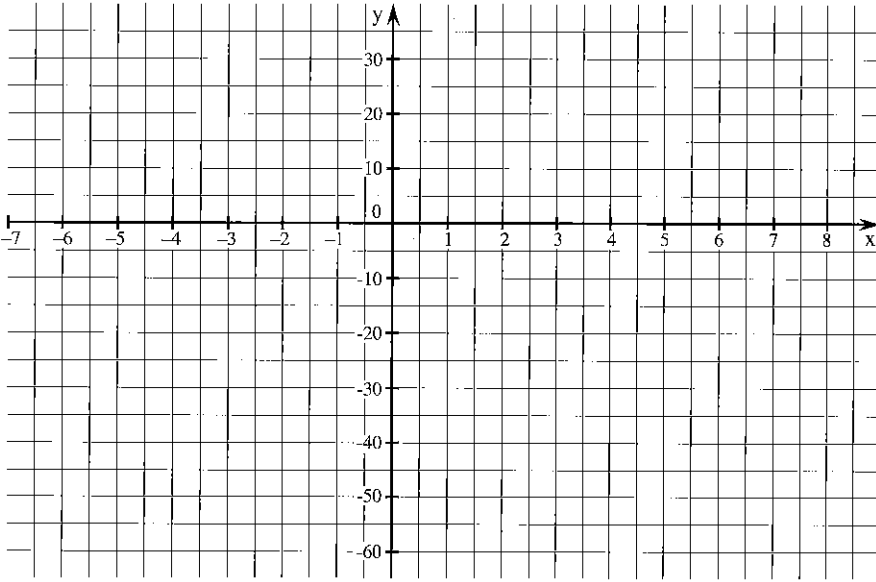
(ب) جد نقطة تقاطع مع محور y .

(ج) جد نقاط التقاطع مع محور x .

نقاط التقاطع هذه هي $(,)$ $(,)$ $(,)$

(د) عيّن جميع نقاط التقاطع في هيئة المحاور.

(هـ) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.



7. معطاة الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2$ ومعلوم أن النقاط القصوى الوحيدة هي نقطة قيمة عظمى $(0, 0)$ ونقطة قيمة صغرى وهي $(2, -4)$.



(أ) جد نقاط التقاطع مع محور x .

(ب) جد نقطة التقاطع مع محور y .

(ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.

(د) جد مجالات التصاعد والتنازل.

(هـ) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون الدالة سالبة؟

8. هل تقطع الدالة $p(x) = \frac{3}{x-1}$ محوري الإحداثيات؟



إذا أجبت بنعم، فما هي هذه النقاط؟ وإذا أجبت بلا، فاشرح.



9. هل تقطع الدالة $g(x) = \frac{x-9}{3}$ محوري الإحداثيات؟

إذا أجبت بنعم، فما هي هذه النقاط؟ وإذا أجبت بلا، فاشرح.

لإيجاد نقاط التقاطع مع محور y فإننا نعوض $x = 0$.

لإيجاد نقاط التقاطع مع محور x فإننا نعوض $f(x) = 0$.

ثم نحل المعادلة الناتجة.

لأجل ذلك سنعود على حل معادلات من أنواع مختلفة.

معادلات من أنواع مختلفة

10. معادلات خطية



(أ) $19 - x = -9$

(ب) $\frac{x}{5} = 6$

(ج) $17 + x = 5 + 4x$

(د) $4 - 5x = 5x + 4$

(هـ) $-1 + (9 - x)^2 = (9+x)(x - 8)$

إذا كان حلك صحيحاً، فإن مجموع الحلول هو 70.


11. معادلات فيها حاصل الضرب يساوي صفراً 

(i) $(x - 1)(x + 2) = 0$

(ب) $x(x + 2.5) = 0$

(ج) $x(x + 3) + 6 = 6$

إذا كان حلك صحيحاً، فإن لكل معادلة حلين، ومجموع كل الحلول هو -6.5.

12. معادلات تربيعية 

لائم لكل معادلة جذورها (حلولها)

الحلول

المعادلات

(a) 0, -1.5

(i) $-3x^2 + 30 = 9x$

(b) لا توجد حلول


(ب) $2x^2 - 18 = 0$

(c) 2, -5

(ج) $2x^2 + 3x = 0$

(d) 3, -3

(د) $x^2 - 4x + 9 = 0$

13. يمكن حل المعادلات التالية بواسطة إخراج عامل مشترك. حل كل معادلة، ثم 

صلها بخط مع كل حلولها.

0 •

1 •

5 •

-1 •

-2 •

-5 •

(أ) $2x + x^2 = 0$

(ب) $x^3 - x = 0$

(ج) $x^5 - 3x^4 - 10x^3 = 0$

(د) $x^3 + 4x^2 = 5x$

14. اكتشف ما كتبناه بالحبر السري.




حل كل معادلة، وسجّل بجانبها الحرف المسجل إلى جانب حلها.

أحرف الشيفرة	الحل
ط	{5}
ق	{0, 5}
ط	$\left\{\frac{5}{8}\right\}$
ق	{1, -1}
ع	{-5}
ل	$\left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$
ن	{1}
أ	$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$
ت	$\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$
أ	$\left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$
أ	{2, 5}

الحرف	المعادلة
	$(x - 4)(5 + x) = (5 + x)^2$
	$2x - 2 = 10x - 7$
	$(x + 5)(2x - 1) = 0$
	$x^2 - 1 = 0$
	$x(2x - 1) = 0$
	$(x + 5)(2x - 1) + 3 = 3$
	$x^2 - 7x + 10 = 0$
	$x^2 + 25 = 10x$
	$4x^2 - 1 = 0$
	$x(x^2 - 10x + 25) = 0$
	$(x - 1)^2(x^2 + 1) = 0$

اقرأ من الأسفل إلى الأعلى.

على ماذا حصلت؟


15. معادلات فيها خارج القسمة يساوي صفراً. 
لائم كل معادلة مع حلولها.

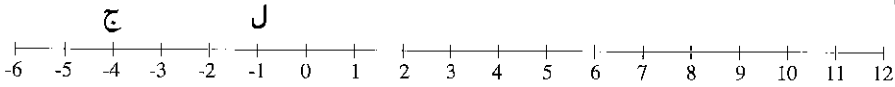
(I) $\{0, 1, -1\}$ (أ) $\frac{x+1}{3} = 0$

(II) لا يوجد حل (ب) $\frac{x^3 - x}{x+5} = 0$

(III) $\{-1\}$ (ج) $\frac{x^3 - x}{x(x-1)} = 0$

(د) $\frac{3}{x+1} = 0$

16. حل المعادلات، ثم رتب الأحرف على محور الأعداد. (أنظر المثال). 



ل، ج $x^2 + 5x + 4 = 0$

أ، ف $(x - 12)(x - 5) = 0$

ب، أ $x^2 + 27 = 12x$

ر $\frac{x-8}{3} = 0$

ق $\frac{3}{x-9} = 0$

ص، أ، ر $x^6 - 7x^5 - 3x^4 = 0$

ل، ف $(x + 2)(2x - 22) = 0$

م، ت $\frac{x^2 - 10x + 24}{x+4} = 0$

تمارين

17. معطاة الدالة $f(x) = \frac{x}{4}(12 - x^2)$. ومعلوم ان النقاط القصوى الوحيدة

هي $(2, 4)$ قيمة عظمى و $(-2, -4)$ قيمة صغرى.

(أ) جد نقاط التقاطع مع محور x .

(ب) جد نقاط التقاطع مع محور y .

(ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.

(د) جد مجالات التصاعد والتنازل.

(هـ) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون سالبة؟

18. معطاة الدالة $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. ومعلوم أن النقاط القصوى

الوحيدة هي: $(1, 4)$ قيمة عظمى و $(3, 0)$ قيمة صغرى.

(أ) جد نقاط التقاطع مع محور x .

(ب) جد نقاط التقاطع مع محور y .

(ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.

(د) جد مجالات التصاعد والتنازل.

(هـ) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون الدالة سالبة؟

19. معطاة الدالة $m(x) = (x + 2)^2(1 - x)$ ومعلوم ان النقاط القصوى

الوحيدة هي $(0, 4)$ قيمة عظمى و $(-2, 0)$ قيمة صغرى.

(أ) جد نقاط التقاطع مع محور x .

(ب) جد نقاط التقاطع مع محور y .

(ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.

(د) جد مجالات التصاعد والتنازل.

(هـ) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون الدالة سالبة؟

20. أ) سجّل قاعدة تناظر لدالة تقطع محور y في النقطة $(0, 6)$.
 ب) سجّل قاعدة تناظر لدالة تقطع محور x في النقطة $(3, 0)$.
 ج) سجّل قاعدة تناظر لدالة تقطع محور x في النقطتين $(5, 0)$ و $(-5, 0)$.
 د) سجّل قاعدة تناظر لدالة لا تقطع محور x .



21. في امتحان رياضيات للصف العاشر أعطيت دالة p . وطلب من التلاميذ إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين.

- أ) وجد إبراهيم أن نقطة التقاطع مع محور x هي $(0, 0)$. فهل يتوجب عليه أن يجد نقطة التقاطع مع محور y ? فسرّ.
 ب) وجد أيمن أولاً نقطة التقاطع مع محور y فكانت $(0, 0)$. هل يتوجب عليه ان يجد نقطة التقاطع مع محور x ? فسرّ.

22. معطاة الدالة $t(x) = x^2(2 - x^2)$. ومعلوم ان النقاط القصوى الوحيدة هي $(1, 1)$ ، قيمة عظمى و $(-1, 1)$ قيمة عظمى و $(0, 0)$ قيمة صغرى.

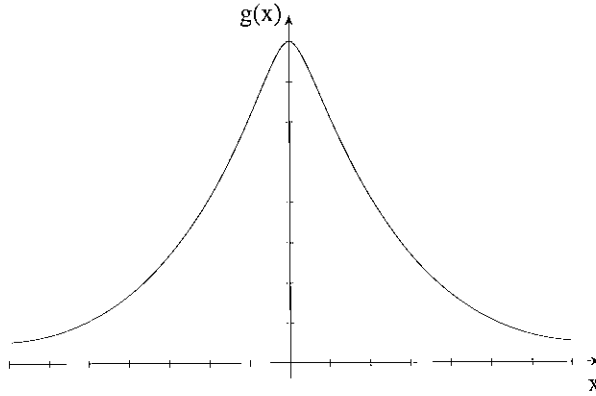
- أ) جد نقاط التقاطع مع محور x .
 ب) جد نقاط التقاطع مع محور y .
 ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.
 د) جد مجالات التصاعد والتنازل.
 هـ) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون الدالة سالبة؟

23. مغطاة الدالة $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2+3}$ ومعلوم أن النقاط القصوى الوحيدة هي

$(1, 1)$ ، قيمة عظمى و $(-3, -\frac{2}{3})$ قيمة صغرى.

- أ) جد الاحداثي y لنقطة القيمة العظمى.
 ب) جد نقاط التقاطع مع محور x .
 ج) جد نقاط التقاطع مع محور y .
 د) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.
 هـ) جد مجالات التصاعد والتنازل.
 و) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون الدالة سالبة؟

24. معطى الرسم البياني للدالة $g(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$



لم يسجلوا وحدات على المحاور.

(أ) هل تمثل كل إشارة على المحاور وحدة؟

(ب) جد نقطة تقاطع الخط البياني للدالة $g(x)$ مع محور y , أكتب ذلك كإحداثيي نقطة $(0,)$. افحص جوابك في قسم أ.

(ج) سجل وحدات على المحورين.

(د) احسب $g(50)$, $g(-50)$

(هـ) هل يقطع الخط البياني للدالة محور x ?

25. معطاة الدالة $n(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$. ومعلوم أن النقاط القصوى الوحيدة هي:

$(1,)$ ، قيمة عظمى و $(-1,)$ قيمة صغرى.

(أ) جد الاحداثي y للنقاط القصوى.

(ب) جد نقاط التقاطع مع محور x .

(ج) جد نقطة التقاطع مع محور y .

(د) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.


(هـ) جد مجالات التصاعد والتنازل.

(و) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون سالبة؟

26. معطاة الدالة $f(x) = \frac{3}{x^2 + 5}$. ومعلوم ان للدالة نقطة قصوى وحيدة

وهي قيمة عظمى في $(0, \frac{3}{5})$


- (أ) جد نقاط التقاطع مع محور x .
- (ب) جد نقطة تقاطع مع محور y .
- (ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً .
- (د) جد مجال التصاعد والتنازل .
- (هـ) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون سالبة؟

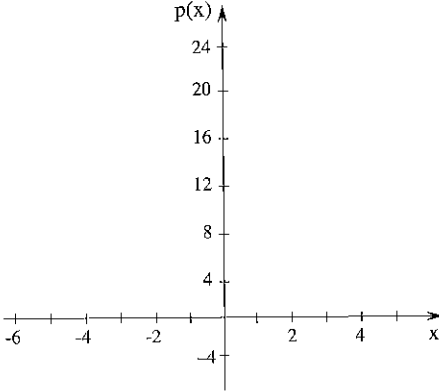
27. معطاة الدالة $f(x) = x^3 - 1$. ومعلوم أنه لا توجد نقاط قصوى لهذه الدالة. 

- (أ) جد نقاط التقاطع مع محور x .
- (ب) جد نقطة تقاطع الدالة مع محور y .
- (ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً .
- (د) جد مجال التصاعد والتنازل .
- (هـ) في أي مجال تكون الدالة موجبة؟ وفي أي مجال تكون سالبة؟



وسائل أخرى للبحث

1. معطاة الدالة $p(x) = (x + 2)^2 (x + 6)$ 



- (أ) جد نقطة تقاطع مع محور y .
(ب) جد نقاط تقاطع مع محور x .
(ج) عيّن النقاط التي وجدتها في هيئة محاور.

ما هي المعلومات الإضافية التي نحتاجها حتى نخطّط رسماً بيانياً تقريبياً للدالة؟

رسمت رسوماً بيانية لدوال حسب نقاط التقاطع التي وجدتها، والنقاط القصوى المعطاة.

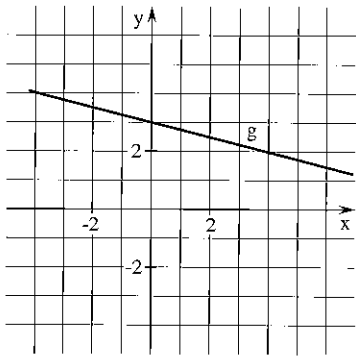
في هذه المرحلة تنقصنا وسائل، لإيجاد النقاط القصوى.

حتى تقدر ان ترسم رسماً بيانياً لدالة معطاة بالصورة الجبرية، ستتعلم كيف تجد النقاط القصوى لهذه الدالة.

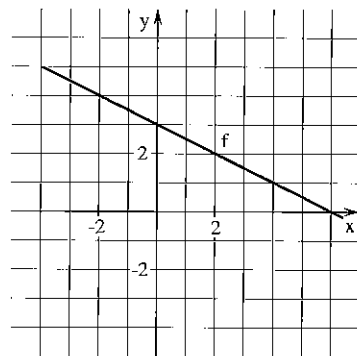
ستتعلم في البنود المقبلة عن ميل الدالة في نقطة، وتغير الميل على طول الرسم البياني للدالة.
- مشتقة الدالة في نقطة.
- دالة.

هذه المصطلحات تساعدك على إيجاد النقاط القصوى وخواص إضافية للدالة

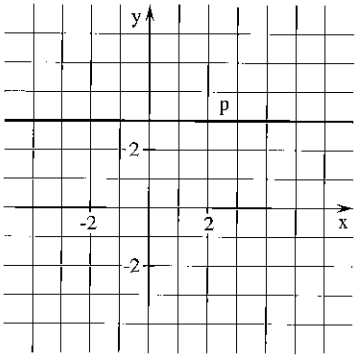
2. سجّل ميول الدوال الخطية المرسومة. (اقرأ الميل من الرسم البياني).



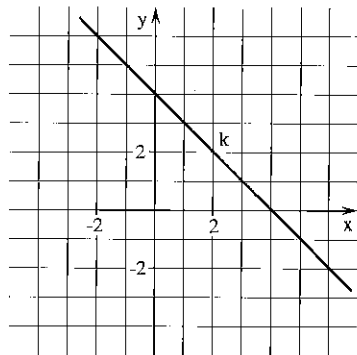
ما هو ميل g : ___



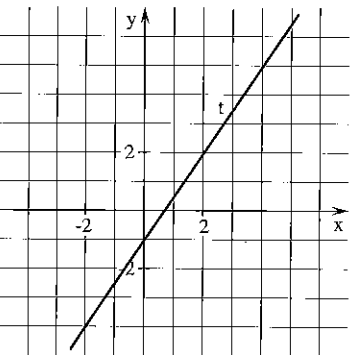
ما هو ميل f : ___



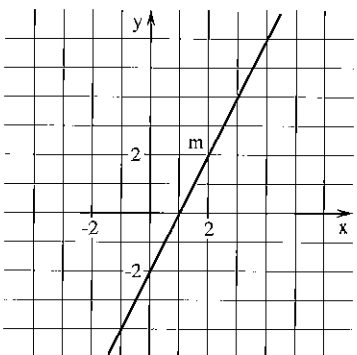
ما هو ميل p : ___



ما هو ميل k : ___



ما هو ميل t : ___



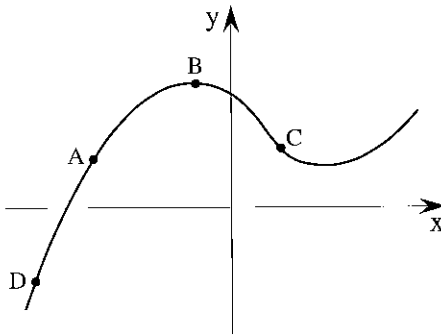
ما هو ميل m : ___

3. أ) ما هو المشترك لكل الدوال الخطية التي تكون ميلها موجبة؟
 ب) ما هو المشترك لكل الدوال الخطية التي تكون ميلها سالبة؟
 ج) ما هو المشترك لكل الدوال الخطية التي تكون ميلها صفراً؟

ميل الخط المستقيم هو مقدار ثابت ويمكن قياسه في كل نقطة، بينما ميل أي منحنى آخر يتغير من نقطة إلى أخرى في الرسم البياني.

سنحاول ان نكتشف ما هو ميل الدالة في نقطة.

4. حاول ان تقرر إذا كان الميل في النقطة المعينة موجباً، أو سالباً أو صفراً.



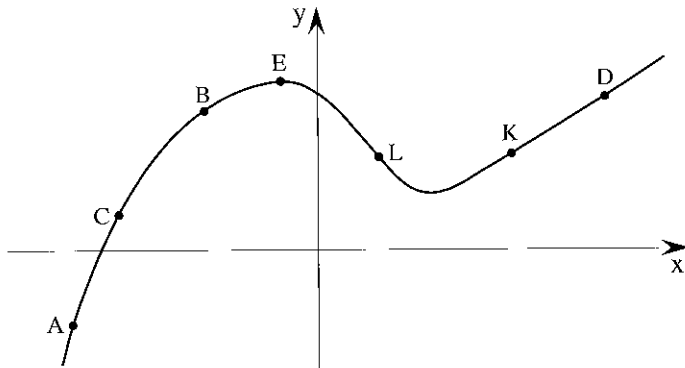
الميل في النقطة A _____

الميل في النقطة B _____

الميل في النقطة C _____

الميل في النقطة D _____

5. ضع اشارة < , > أو = في المكان الملائم.



أ) الميل في B _____ الميل في A

ب) الميل في C _____ الميل في A

ج) الميل في C _____ الميل في A

د) الميل في D _____ الميل في K

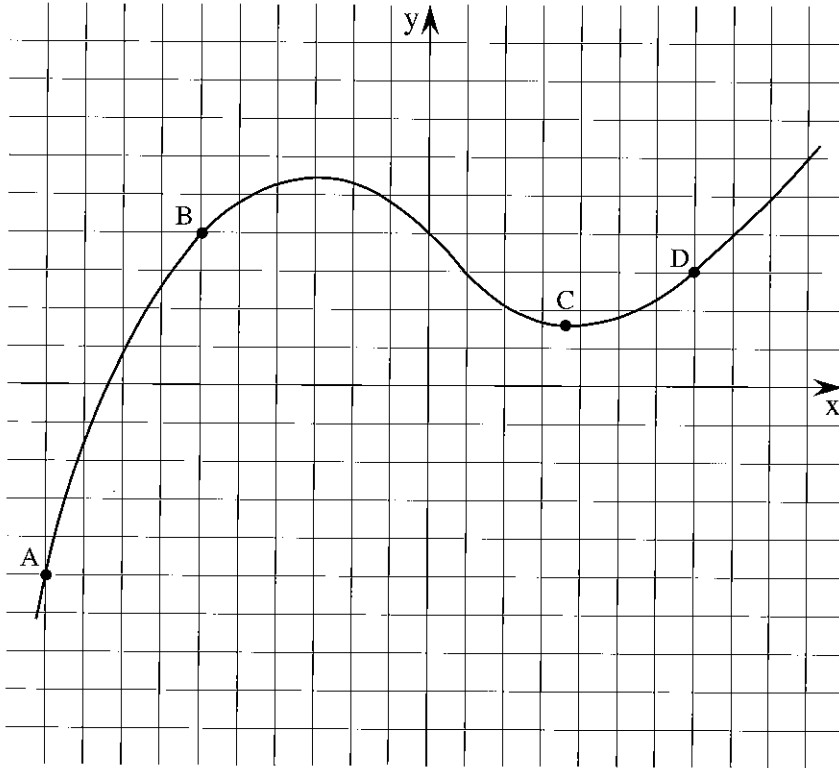
ب) الميل في C _____ الميل في B

في التمارين 4 و 5 عملت في ميل الدالة في نقطة:
 قرّرت كون الميل (موجباً، سالباً، صفراً) وقارنت بين الميول في نقاط مختلفة
 (أكبر، أصغر، يساوي).

يوجد عدد يمثل ميل الدالة في نقطة.

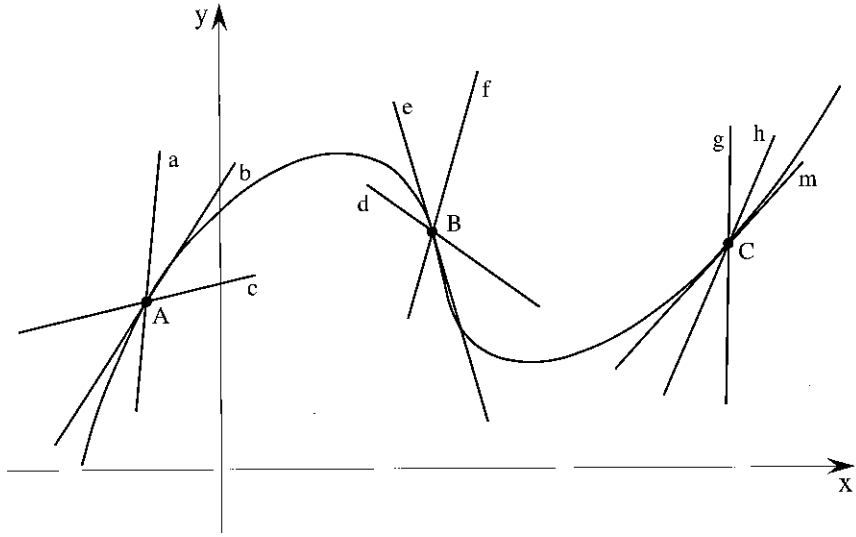
لحل التمرين الآتي (وتمارين كثيرة أخرى بعده) سنستعين بمستقيم مرسوم
 على شريحة، والذي سنطلق عليه اسم "مستقيم".

6. استعن بـ "مستقيم" وحاول أن تجد الميول في النقاط المعينة.



الميل في A: _____ الميل في B: _____
 الميل في C: _____ الميل في D: _____

7. في كل نقطة رُسمت ثلاثة مستقيمات. ميل أحد هذه المستقيمات فقط هو ميل الدالة في النقطة. اختر المستقيم الصحيح.



في النقطة A: المستقيم _____

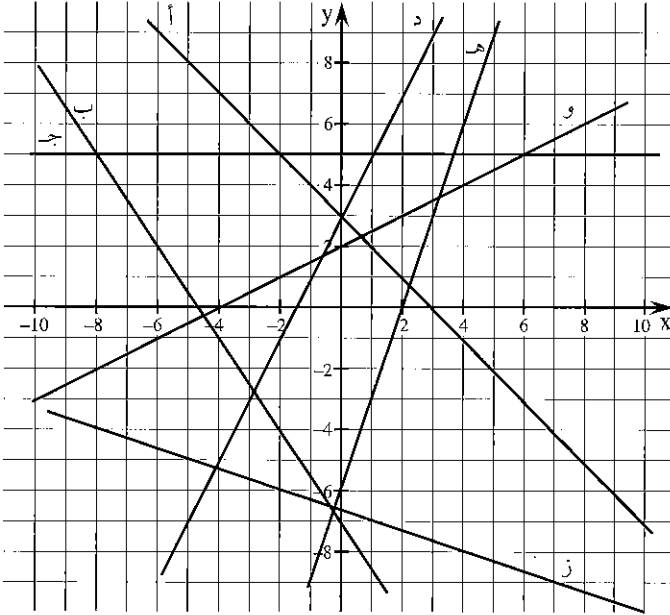
في النقطة B: المستقيم _____

في النقطة C: المستقيم _____

حتى نقررّ ميل دالة في نقطة، علينا أن نرسم "ماسا"
للدالة في النقطة الملائمة، وأن نحسب ميله

تمارين

8. لائم لكل مستقيم ميله.



الميل

المستقيم

-1

أ

2

ب

0

ج

$-\frac{1}{3}$

د

$-1\frac{1}{2}$

هـ

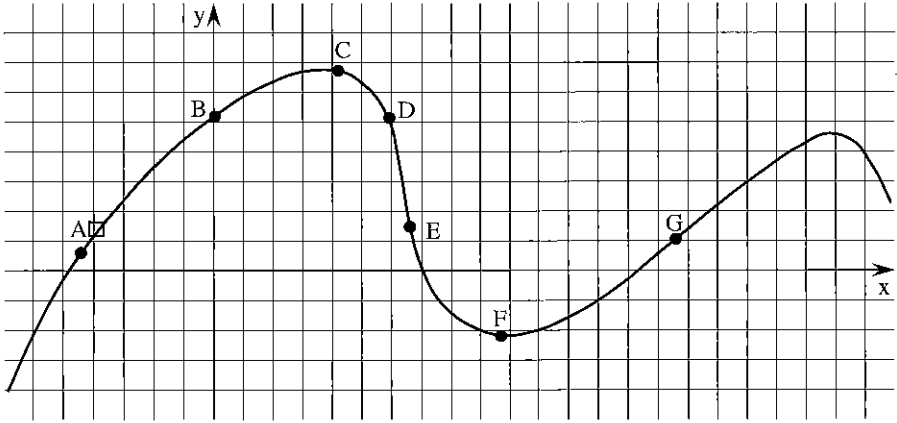
3

و

$\frac{1}{2}$

ز

9. استعمل "مستقيماً"، وحدد، بالتقريب، الميل في النقاط المعينة.



الميل في A: _____

الميل في E: _____

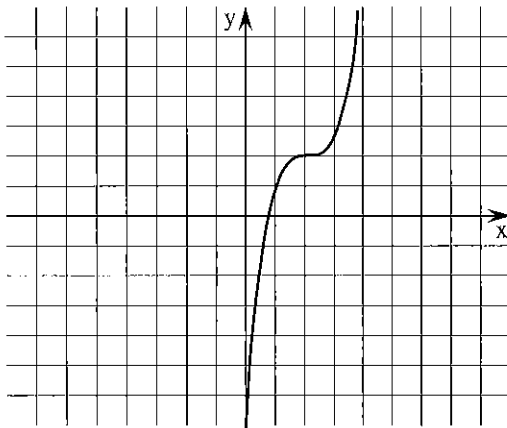
الميل في B: _____

الميل في G: _____

الميل في C: _____

الميل في D: _____

10. جد على الرسم البياني للدالة:

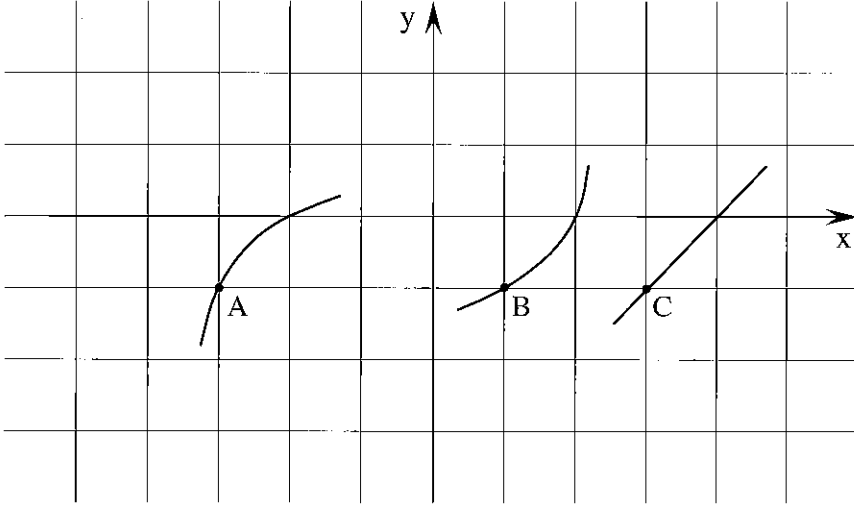


(أ) نقطة يكون الميل فيها موجباً.

(ب) نقطة يكون الميل فيها سالباً.

(ج) نقطة يكون الميل فيها صفراً.

11. أمامك تخطيطات لدوال مختلفة:



أ) ادّعت عناية: ميول الدوال الثلاث في النقاط A ، B ، و C تساوي 1، وذلك لأن "ارتفاع الدرجة" في ثلاثتها هو 1.

ب) ادّعت سعاد: الميل في A أكبر من 1.

الميل في B أصغر من 1.

الميل في C يساوي 1.

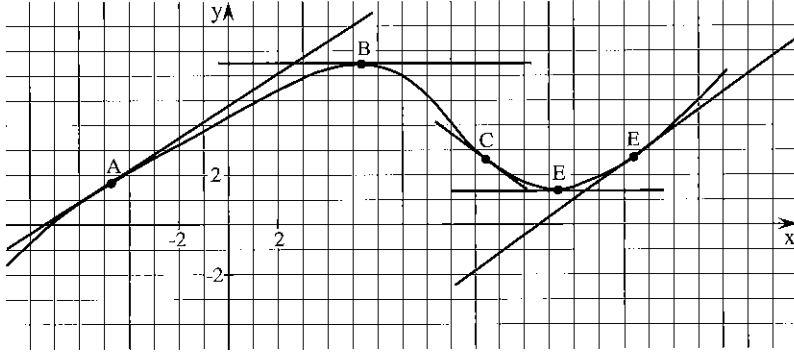
ج) ادّعت مزنة: الميل في A أصغر من 1.

الميل في B أكبر من 1.

الميل في C يساوي 1.

من التي صدقت في ادّعائها حسب رأيك؟ فسّر!

12. أمامك دالة ومستقيمات لقياس الميل في النقاط.



إختر الاجابة الصحيحة:

II الميل في A يساوي:

- أ) الميل في B
- ب) الميل في C
- ج) الميل في D
- د) الميل في E

I الميل في A هو:

- أ) بين -1 و 0
- ب) بين 0 و 1
- ج) بين 1 و 2
- د) بين 2 و 3

IV الميل في D يساوي:

- أ) الميل في A
- ب) الميل في B
- ج) الميل في C
- د) الميل في E

III الميل في B هو:

- أ) موجب
- ب) سالب
- ج) صفر
- د) لا يمكن أن نعرف

13. ارسم رسماً بيانياً لدالة تمر في النقطة $A(3, 7)$, وميلها في النقطة A أقل من 1.

14. هل يمكن أن يكون الميل متساوياً في نقطتين مختلفتين على الرسم البياني للدالة؟

15. هل يمكن أن يكون الميل نفسه لكل النقاط على الرسم البياني؟

16. سأل المعلم نسيان السؤال التالي في الامتحان:

"تمعّن في الرسم البياني الذي أمامك، وجد ما ميل الدالة f في نقطة القيمة العظمى $A(5,7)$ ؟"
المعلم نسيان نسي أن يرسم الرسم البياني للدالة.
علّت الضجة في الصف واشتكى الطلاب من أنه لا يمكن الحل.
(ابتسم المعلم نسيان وقال "أنا لا أجيب في وقت الامتحان")
لقد حل يوسف السؤال دون رسم بياني ومن دون أن يرسم، هل يمكن أن يكون حلّه صحيحاً، إذا أجبت نعم، فما هي إجابته؟

17. حاول أن ترسم دالة، عليها النقطة A ، وتحقق الشروط الآتية:

(أ) الميل في A هو صفر.

(ب) A ليست نقطة قصوى.

(ج) الدالة ليست خطية.




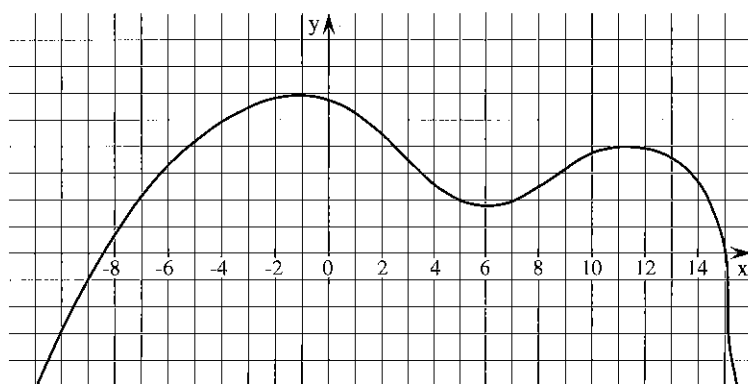
رمز ميل الدالة في نقطة

نرمز لميل الدالة f في النقطة التي فيها $x = 2$,
بالرمز $f'(2)$ فمثلاً:

إذا كان ميل الدالة f في النقطة $x = 2$, هو 5، فإننا
نكتب $f'(2) = 5$

ونقرأها f فتحة في النقطة التي فيها 2، هو 5.

1. أمامك رسم بياني للدالة f 



استعمل "مستقيماً" وأكمل:

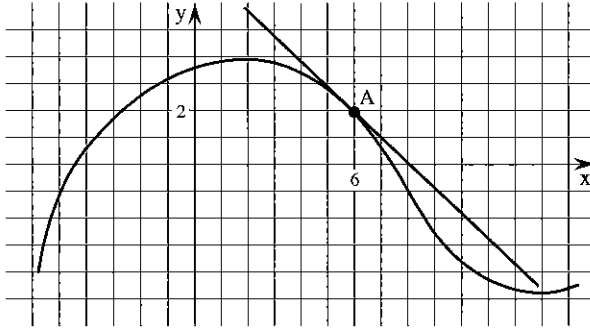
(الميل في $x = -4$) $f'(-4) =$

(الميل في $x = -2$) $f'(-2) =$

(الميل في $x = 2$) $f'(2) =$

(الميل في $x = 4$) $f'(4) =$

(الميل في $x = 6$) $f'(6) =$



انتبه! قيمة الدالة في النقطة A

هي 2.

وبلغة الرياضيات:

$$f(6) = 2$$

ميل الدالة في النقطة A

هو -1.

وبلغة الرياضيات:

$$f'(6) = -1$$

2. النقطتان $B(5, 3)$ و $D(8, 1)$ واقعتان على الرسم البياني للدالة g.

اكتب بلغة الرياضيات.



أ) قيمة الدالة في النقطة B هي 3. _____

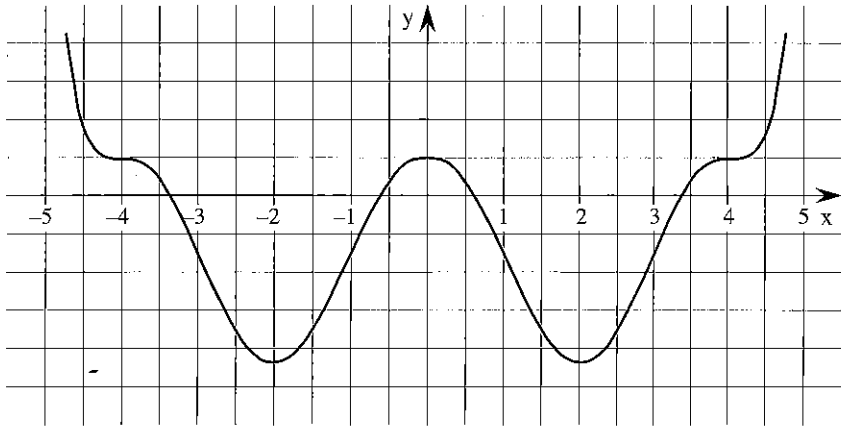
ب) ميل الدالة في النقطة B هو 2. _____

اكتب بالكلمات:

ج) $g'(8) = -2$ _____

د) $g(8) = 1$ _____

3. أمامك رسم بياني للدالة g.



سجّل $<$, $>$ أو $=$ (أنظر المثال).

$$g(-4) > 0$$

$$g'(-4) = 0 \quad \text{مثال:}$$

$$g(-3) < 0$$

$$g'(-3) < 0 \quad \text{(أ)}$$

$$g(-2) < 0$$

$$g'(-2) < 0 \quad \text{(ب)}$$

$$g(-1) < 0$$

$$g'(-1) < 0 \quad \text{(ج)}$$

$$g(0) < 0$$

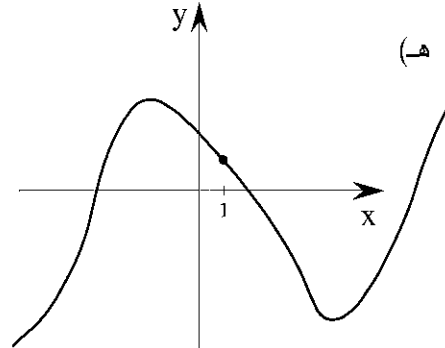
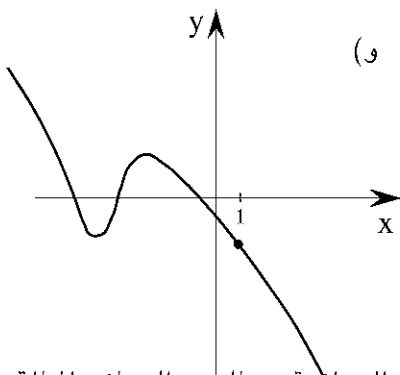
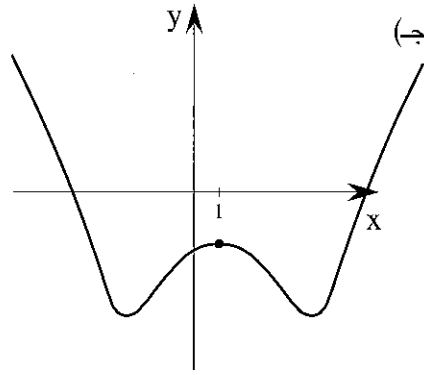
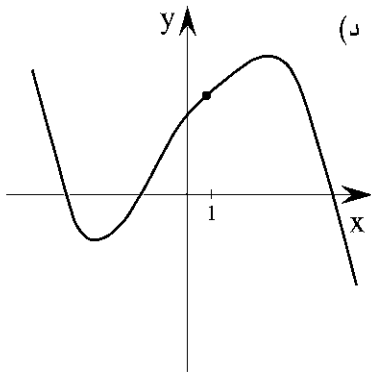
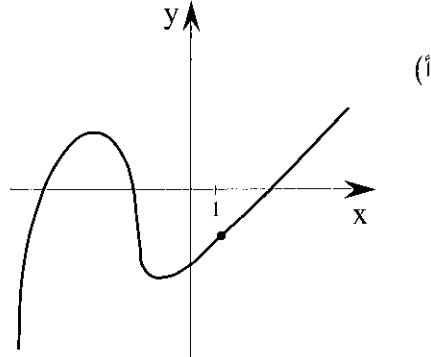
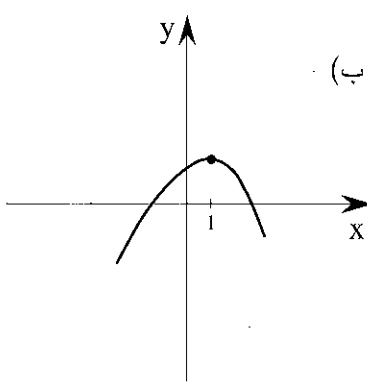
$$g'(0) < 0 \quad \text{(د)}$$

$$g(4.5) < 0$$

$$g'(4.5) < 0 \quad \text{(هـ)}$$

4. أحد الرسوم البيانية الآتية هو رسم بياني للدالة f .

(I) معطى أن $f(1) > 0$. أي من الرسوم البيانية يمكن ان يكون للدالة f ?



(II) معطى أيضا أن $f'(1) < 0$. أي الرسوم البيانية هو الرسم البياني للدالة f ?

تمارين

5. معطاة الدالة f والنقطة $A(5, 1)$ الموجودة على الرسم البياني للدالة f .
ميل الدالة في النقطة A هو 0 .

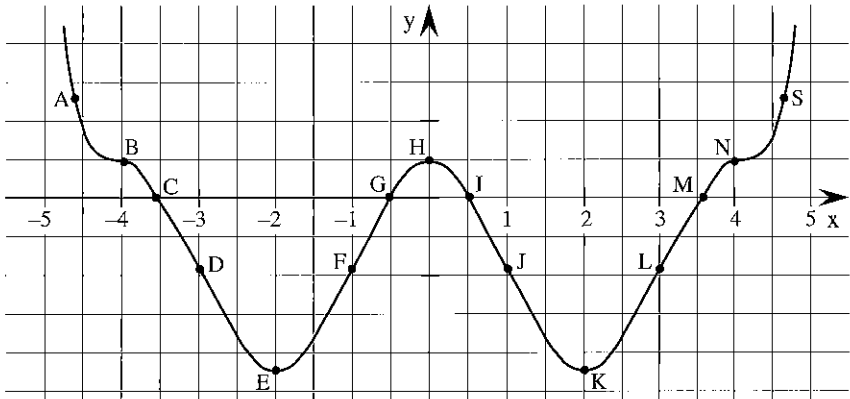
أشر: صحيح، غير صحيح، لا يمكن ان نعرف.

(أ) $f(5) = 1$ (د) $f'(1) = 5$

(ب) $f(1) = 5$ (هـ) $f'(5) = 0$

(ج) $f'(5) = 1$

6. معطى الرسم البياني للدالة $f(x)$



جد ايا من بين النقاط المتضمنة في الرسم البياني لبيان ما يلي: هل صحيح أم لا:
الآتية:

- أ. $f(x)$ موجب و $f'(x)$ موجب _____
 ب. $f(x)$ موجب و $f'(x)$ سالب _____
 ج. $f(x)$ سالب و $f'(x)$ سالب _____
 د. $f(x)$ سالب و $f'(x)$ موجب _____
 هـ. $f(x)$ صفر و $f'(x)$ موجب _____
 و. $f(x)$ صفر و $f'(x)$ سالب _____
 ز. $f(x)$ موجب و $f'(x)$ صفر _____
 ح. $f(x)$ سالب و $f'(x)$ صفر _____

7. (أ) ارسم رسماً بيانياً فيه: $f(3) = 2$ و $f'(3) > 0$

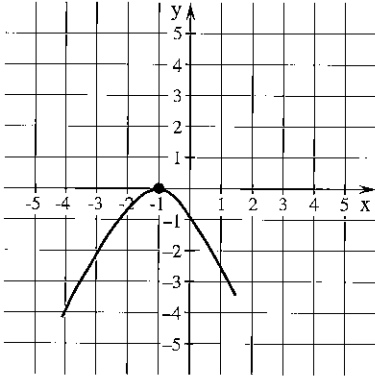
(ب) ارسم رسماً بيانياً فيه: $f(3) = 2$ و $f'(3) < 0$

(ج) ارسم رسماً بيانياً فيه: $f'(1) > 0$ و $f(1) < 0$ وله نقطة قصوى واحدة.

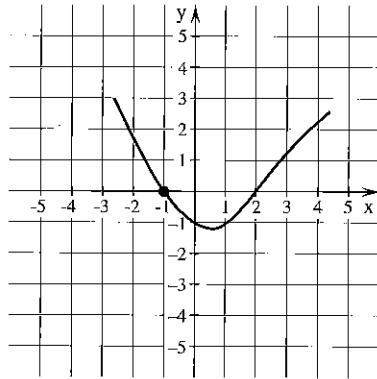
(د) ارسم رسماً بيانياً فيه: $f'(1) < 0$ و $f(1) > 0$ وله نقطتا قيمة قصوى.

8. معطى أن $f(-1) = 0$ و $f'(-1) < 0$ أي الرسوم البيانية الآتية يلائم الدالة f ؟

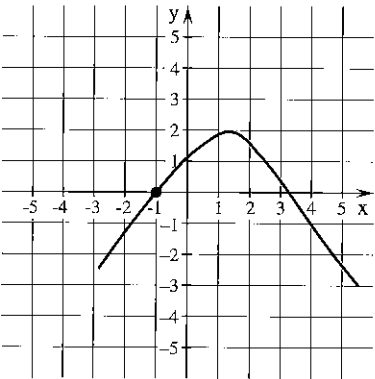
(ب)



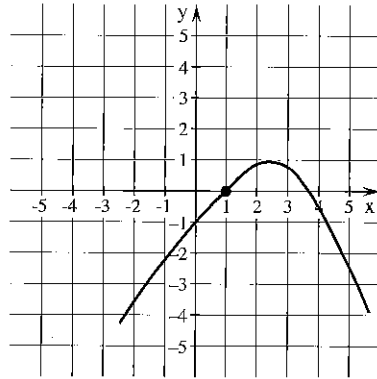
(أ)



(د)



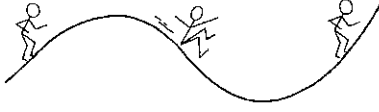
(ج)



9. عندما تصل لكل خانة، اقرأ التعليمات في قسمها الأسفل، واستمر حسبها.

<input type="radio"/> $f'(1) = 0$	<input type="radio"/> $f(3) > 0$	<input checked="" type="radio"/> ع ابدأ هنا
سجّل أ في الخانة المسجل فيها: ميل الدالة في النقطة A(3,1) موجب	أنهيت! موجب	سجل الحرف ت في الخانة المسجل فيها: ميل الدالة في النقطة A(3,) هو 2
<input type="radio"/> $f(3) = 2$	<input type="radio"/> $f(2) = 3$	<input type="radio"/> $f'(2) = 3$
سجّل م في الخانة المسجل فيها النقطة B(2,3) التي تقع على الرسم البياني للدالة.	سجّل ك في الخانة المسجل فيها: ميل الدالة في النقطة B(2,) هو 3.	معطى أن C(4,1) هي نقطة قصوى. سجّل ز في الخانة المسجل فيها: ميل الدالة في النقطة C.
<input type="radio"/> $f'(4) = 0$	<input type="radio"/> $f'(3) > 0$	<input type="radio"/> $f'(3) = 2$
معطى أن D(1,4) هي نقطة قوى. سجّل ل في الخانة المسجل فيها ميل الدالة في النقطة D.	سجّل م في الخانة المسجل فيها: قيمة الدالة في النقطة A(3,) موجبة.	سجّل م في الخانة المسجل فيها: النقطة A(3,2) تقع على الرسم البياني للدالة.

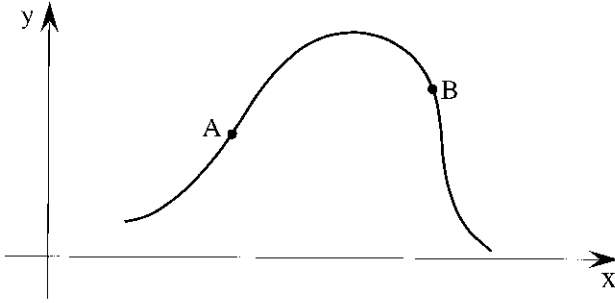
على ماذا حصلت؟



التصاعد والتنازل في نقطة

تعاملت في الماضي مع تصاعد الدالة وتنازلها في مجال معين، بواسطة المفهوم "الميل في نقطة"، فأننا نتحدث عن تصاعد وتنازل في نقطة.

1. أ) هل، حسب رأيك، الدالة تصاعدية أم تنازلية في النقطة A _____



ب) هل، حسب رأيك، ميل الدالة موجب أم سالب في النقطة A ؟ _____

ج) هل، حسب رأيك، الدالة تصاعدية أم تنازلية في النقطة B ؟ _____

د) هل، حسب رأيك، ميل الدالة موجب أم سالب في النقطة B ؟ _____

هـ) أكمل (تصاعدية أو تنازلية).

عندما يكون f' في نقطة موجب، فإن الدالة _____ في هذه النقطة.

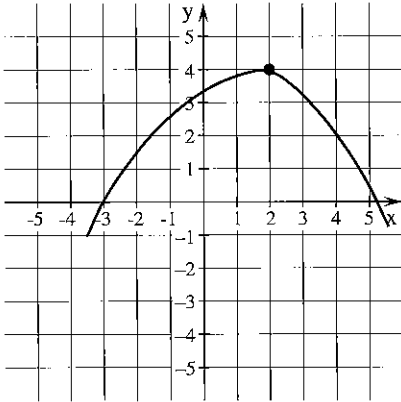
عندما يكون f' في نقطة سالب، فإن الدالة _____ في هذه النقطة.



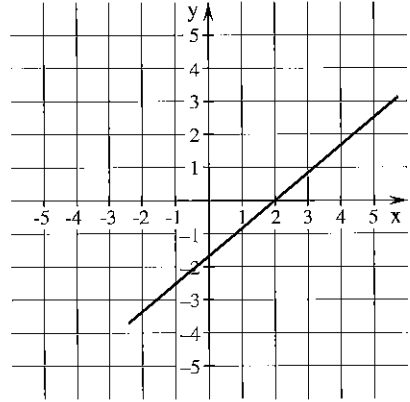
2. أي من بين الدوال المرسومة فيما يلي تحقق كل الشروط:

$$f'(1) < 0 \quad f'(2) = 0 \quad f'(5) > 0$$

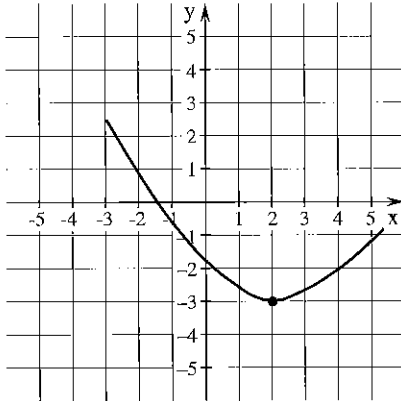
(ب)



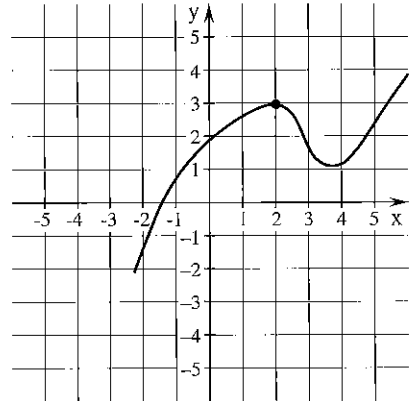
(أ)



(د)



(ج)



3. ارسم دالة تحقق كل الشروط الآتية:

$$f'(2) > 0 \quad f'(3) = 0 \quad f'(5) < 0$$





4. للدالة t توجد نقطة قصوى واحدة (تظهر في المعطيات) ومعطى أن:

$$t'(-1) = -2 \quad t'(1) = -\frac{1}{2} \quad t'(2) = 0 \quad t'(5) = \frac{1}{2} \quad t'(6) = 1$$

أكمل: اختر واحدة من بين الامكانيات : تصاعد، تنازل، قصوى.
(لا يمكن ان نجد قيمة t في هذه النقطة.)

(-1,) هي نقطة _____

(1,) هي نقطة _____

(2,) هي نقطة _____

(5,) هي نقطة _____

(6,) هي نقطة _____

حاول ان تقرّر إذا كانت النقطة القصوى هي نقطة قيمة عظمى أم قيمة صغرى. علل!

نسمي ميل الدالة في نقطة معينة مشتقة الدالة في النقطة.



5. معطاة الدالة f والنقطتان $A(2,3)$ و $B(5,0)$.
معطى أيضاً أن $f'(2) = -1$ و $f'(5) = 2$.

(أ) إذا كانت المشتقة في A سالبة، فسجل هـ، والآ فسجل ف

(ب) إذا كانت قيمة الدالة في A سالبة، فسجل ج، والآ فسجل ق

(ج) إذا كانت المشتقة في B صفراً، فسجل ك، والآ، فسجل ت

(د) إذا كانت الدالة تصاعدية في B ، فسجل ش، والآ، فسجل ل

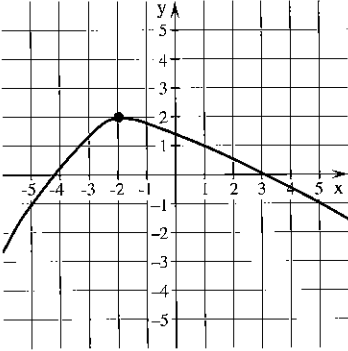
(هـ) إذا كانت المشتقة في B أكبر من 1، فسجل م، والآ فسجل ح

اقرأ من أسفل الى أعلى، على ماذا حصلت؟

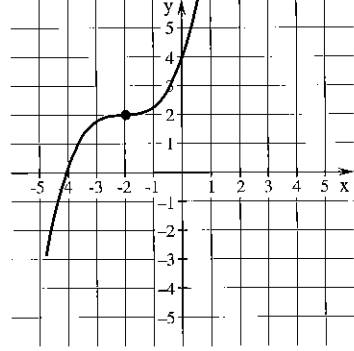
تمارين

6. أي من الدوال الآتية تحقق كل الشروط ؟

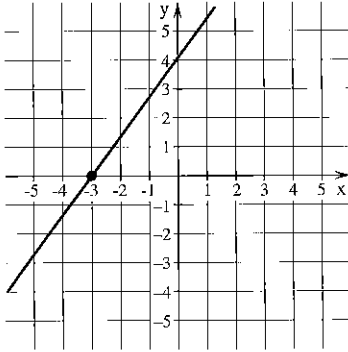
$$f'(-5) > 0 \quad f'(-2) = 0 \quad f'(1) > 0$$



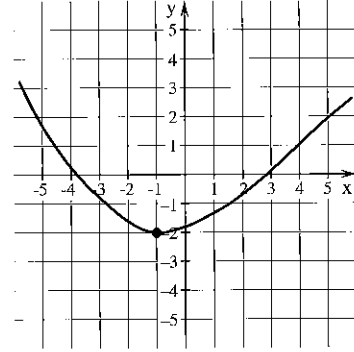
(ب)



(ا)



(د)



(ج)

7. ارسم دالة تحقق كل الشروط الآتية:

(أ) المشتقة في النقطة $(-4, -)$ سالبة.

(ب) المشتقة في النقطة $(-3, 0)$ تساوي 0.

(ج) المشتقة في النقطة $(-2, -)$ موجبة.

8. توجد للدالة k نقطة قصوى واحدة (تظهر في المعطيات) ومعطى أن:

$$k'(5) = 2 \quad k'(6) = 0 \quad k'(7) = -1 \quad k'(8) = -2$$

أكمل: اختر واحدة من بين الامكانيات: (تصاعد، تنازل، قصوى).

(لا يمكن ان نجد قيمة y في هذه النقاط).

(5,) هي نقطة _____

(6,) هي نقطة _____

(7,) هي نقطة _____

(8,) هي نقطة _____

حاول أن تقرّر نوع النقطة القصوى من حيث كونها نقطة قيمة عظمى أو نقطة قيمة صغرى، علّل.

9. (أ) معطى أن للدالة f نقطة قصوى وحيدة وهي (4,10)

$$f'(3) = -6 \quad f'(4) = 0 \quad f'(5) = 1$$

فهل النقطة (4,10) هي قيمة صغرى أم قيمة عظمى؟ علّل!

(ب) للدالة g نقطتا قيمة قصوى وهما (1,) (5,)

$$g'(0) = 3 \quad g'(1) = 0$$

$$g'(2) = -1 \quad g'(5) = 0 \quad g'(6) = 2$$

عيّن أيّاً من النقطتين هي قيمة عظمى، وأيّاً منهما هي قيمة صغرى. علّل!

10. بالنسبة للدالة g معلوم أنه لا توجد عليها نقطة حيث الميل فيها صفر.

$$g'(-5) = 5$$

اختر الإدعاء الصحيح. علّل اختيارك!

(أ) الدالة g تصاعدية في قسم من المجال، وتنازلية في قسم منه.

(ب) الدالة g تنازلية في كل المجال.

(ج) الدالة g تصاعدية في كل المجال.

(د) لا توجد معطيات كافية حتى نعرف ما إذا كانت الدالة تصاعدية أو تنازلية.

11. بالنسبة للدالة g معلوم عدم وجود نقطة حيث الميل فيها صفر.

معطى أيضا أن: $g(-5) = 5$.

اختر الادعاء الصحيح. علّل اختيارك.

(أ) الدالة g تصاعدية في قسم من المجال، وتنزلية في قسم منه.

(ب) الدالة g تنازلية في كل المجال.

(ج) الدالة g تصاعدية في كل المجال.

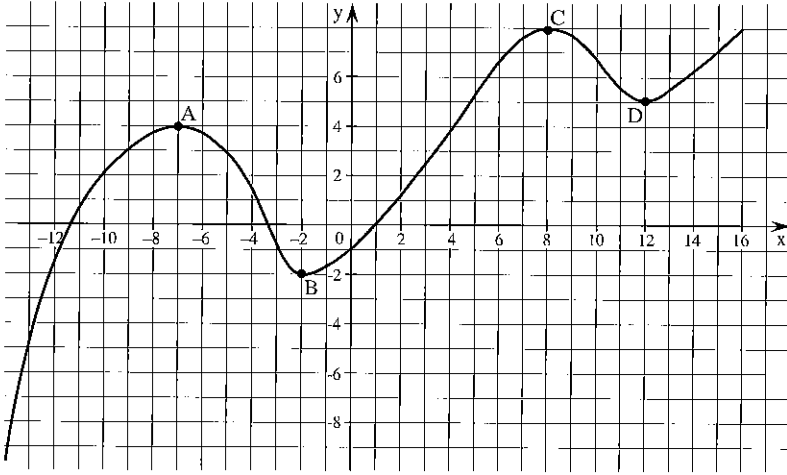
(د) لا توجد معطيات كافية حتى نعرف ما إذا كانت الدالة تصاعدية، أو

تنازلية.



إيجاد النقاط القصوى

1. في الدالة التي أمامك أربع نقاط قصوى.



(أ) أكمل حسب المثال:


إحداثيات النقطة A هي $(-7, 4)$ وهي نقطة قيمة عظمى $f'(-7) = 0$

إحداثيات النقطة B هي $(-, -)$ وهي نقطة $f'(-) = .$

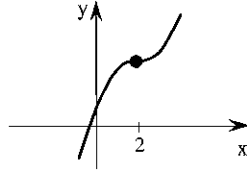
إحداثيات النقطة C هي $(-, -)$ وهي نقطة $f'(-) = .$

إحداثيات النقطة D هي $(-, -)$ وهي نقطة $f'(-) = .$

(ب) ما هو المشترك لكل النقاط القصوى؟

2. جد، لكل مجموعة، شروط في الطرف الأيمن، دالة ملائمة في الطرف الأيسر. 

I.

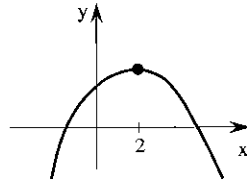


$$f'(1) > 0 \quad (\text{أ})$$

$$f'(2) = 0$$

$$f'(3) < 0$$

II.

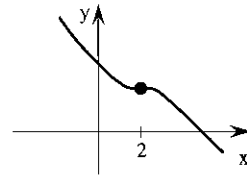


$$g'(1) < 0 \quad (\text{ب})$$

$$g'(2) = 0$$

$$g'(3) < 0$$

III.

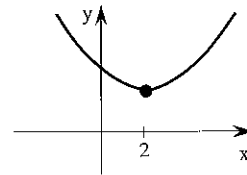


$$t'(1) > 0 \quad (\text{ج})$$

$$t'(2) = 0$$

$$t'(3) > 0$$


IV.



$$p'(1) < 0 \quad (\text{د})$$

$$p'(2) = 0$$

$$p'(3) > 0$$

3. إذا كانت نقطة معينة نقطة قصوى، فإن الميل في هذه النقطة يكون صفراً. 

(أ) اكتب نص نظرية معكوسة.

(ب) هل النظرية العكسية التي كتبتها صحيحة؟ علّل!

الميل في كل نقطة قصوى هو صفر، ولكن ليست كل

نقطة، الميل فيها صفر، نقطة قصوى.

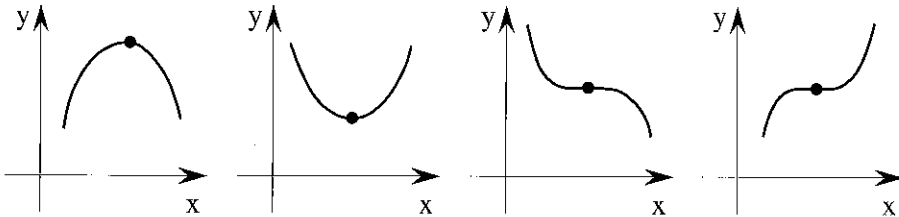
4. أشر بـ صحيح ، غير صحيح ، لا يمكن أن نعرف.



- (أ) إذا كان الميل في A صفراً، فإن A نقطة قصوى.
 (ب) إذا كانت B نقطة قصوى، فإن الميل في B هو صفر.
 (ج) إذا كان الميل في C موجباً، فإن C نقطة قيمة عظمى.
 (د) إذا كانت E نقطة قيمة عظمى، فإن الميل في E موجب.
 (هـ) إذا كانت F نقطة قيمة صغرى، فإن الميل في F هو صفر.
 (و) إذا كان الميل في G موجباً، فإن G ليست نقطة قصوى.
 (ز) إذا كان الميل في D سالباً، فإن D نقطة قيمة صغرى.

كيف نجد النقطة القصوى لدالة معينة f ؟

نبحث عن النقاط التي يكون فيها الميل صفراً، ولكننا لسنا متأكدين من أن كل نقطة كهذه هي نقطة قصوى.



تسمى النقطة التي يكون فيها الميل صفراً **نقطة حرجة**.

ولكي نفحص إذا كانت، فعلاً، نقطة قصوى، نفحص الميل قبلها وبعدها. أو نفحص قيمة الدالة قبلها وبعدها وربما يكون هذا أسهل.

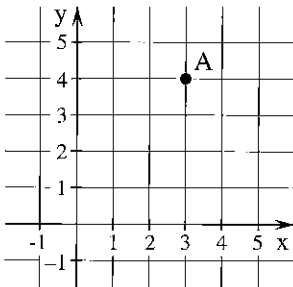
5. للدالة p نقطة "حرجة" واحدة وهي $A(3, 4)$




(أ) أكمل: $p'(3) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ب) معطى أن $(2, 3)$ و $(4, 2)$

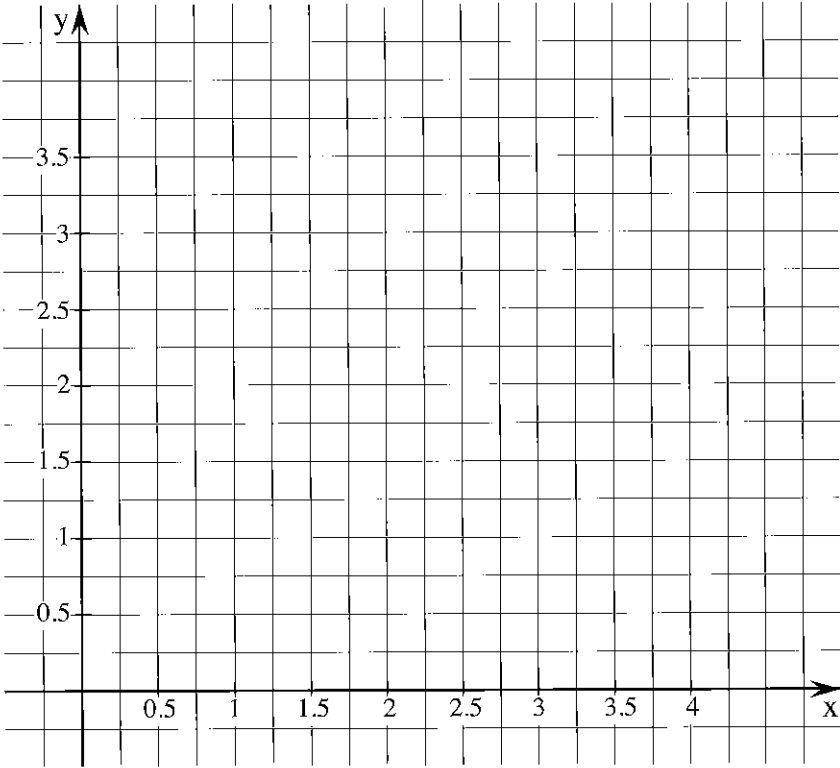
ارسم رسماً بيانياً تقريبياً للدالة p



(ج) هل النقطة A نقطة قصوى؟ إذا أجبت بنعم، فمن أي نوع هي؟ **علل!**

6.  $A(2, 3)$ هي نقطة "حرجة" على الرسم البياني للدالة f ومعطى أن $(1, 2)$ و $(3, 2)$ تقع على الرسم البياني للدالة.

- (أ) هل النقطة A هي نقطة قصوى؟ **علّل!**
 (ب) أمامك معطيات إضافية تتعلق بالدالة من البند السابق:
 للدالة نقطتان "حرجتان" A و $B(2.5, 3.5)$.
 ارسم رسماً بيانياً تقريبياً (استعن بالمعطيات السابقة في البندين).



- (ج) هل A و B نقطتا قيمة قصوى؟ إن كانتا كذلك، فمن أي نوع هما؟
 (د) هل كانت إجابتك صحيحة في قسم أ؟ إن لم تكن كذلك، فما كانت المشكلة؟

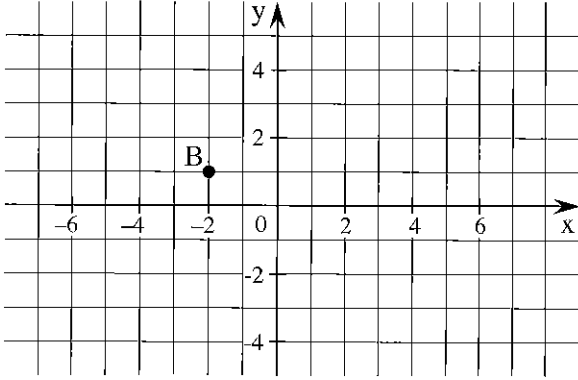


7. للدالة f نقطة "حرجة" واحدة وهي $B(-2, 1)$.

(أ) أكمل $f'(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ب) معطى أن $(-3, 5)$ و $(1, -2)$ تقع على الرسم البياني للدالة f .

ارسم رسماً بيانياً تقريبياً للدالة f .



(ج) هل B نقطة قصوى؟ إن كانت كذلك، فمن أي نوع هي؟ علّل!

تمارين

8. للدالة f نقطة "حرجة" واحدة وهي $C(6, -1)$.

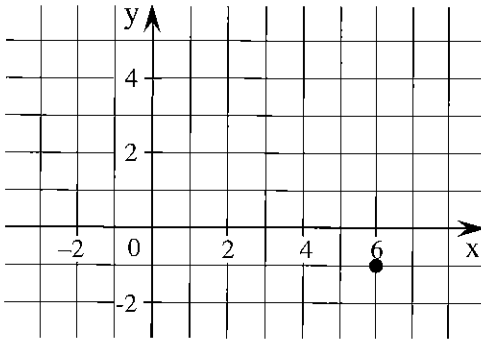
(أ) أكمل: $f'(\underline{\hspace{2cm}}) = 0$

(ب) معطى أن $(5, 3)$ و $(7, 5)$

موجودتان على الرسم

البياني للدالة.

ارسم رسماً تقريبياً للدالة f



(ج) هل النقطة C نقطة

قصوى؟

إن كانت كذلك، فمن أي

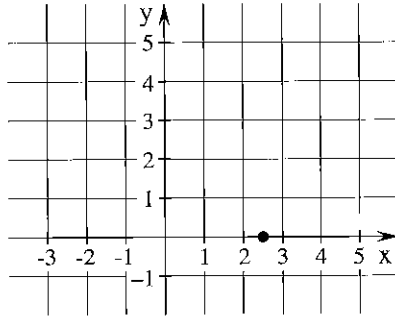
نوع هي؟ علّل!

9. للدالة s نقطة "حرجة" واحدة وهي $D(2.5, 0)$.

(أ) أكمل: $s'(\underline{\quad}) = 0$

(ب) معطى أن النقطتين $(2, 5)$ و $(5, 3)$ واقعتان على الدالة s .

ارسم رسماً بيانياً تقريبياً للدالة s .



(ج) هل النقطة D نقطة قصوى؟ إن كانت كذلك، فمن أي نوع هي؟ **علّل!**

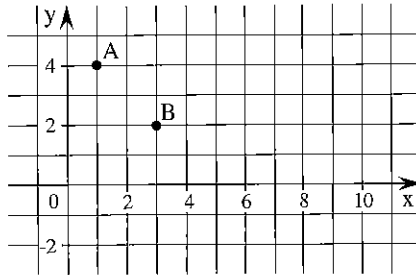
10. للدالة m نقطتان "حرجتان" $A(1, 4)$ و $B(3, 2)$

(أ) أكمل: $m'(1) = \underline{\quad}$ و $m'(3) = \underline{\quad}$

(ب) معطى أن: $(0, 2)$ ، $(2, 3)$ و $(4, 5)$ تقع على الرسم البياني

للدالة m .

ارسم رسماً بيانياً تقريبياً للدالة m .



(ج) هل النقطة A نقطة قصوى؟ إذا كانت كذلك، فمن أي نوع هي؟ **علّل!**

(د) هل النقطة B نقطة قصوى؟ إن كانت كذلك، فمن أي نوع هي؟ **علّل!**

11. للدالة k نقطتان "حرجتان" فقط: $C(5, 5)$, $D(10, 8)$.

ومعطى أن: $(4, 3)$, $(6, 7)$ و $(11, 10)$ تقع على الرسم البياني

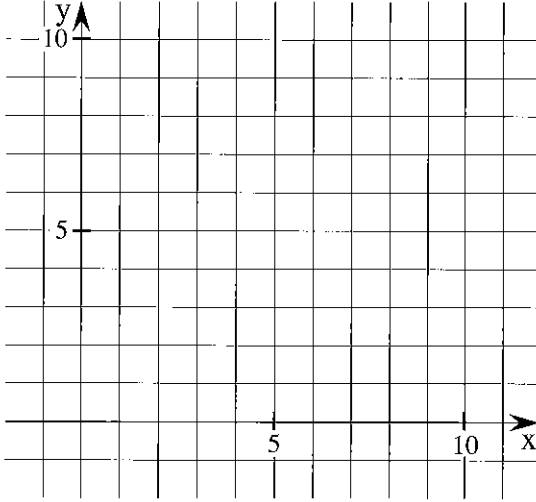
للدالة k .

ارسم رسماً بيانياً تقريبياً

للدالة k , وافحص هل

النقطتان C و D هي

نقاط قصوى. **علّل!**



12. للدالة t ثلاث نقاط "حرجة" فقط $A(-3, 2)$ $B(1, -3)$ $C(3, -2)$

ومعطى أن النقاط $(-4, 4)$, $(-2, 1)$, $(2, -2.5)$ و $(4, -6)$

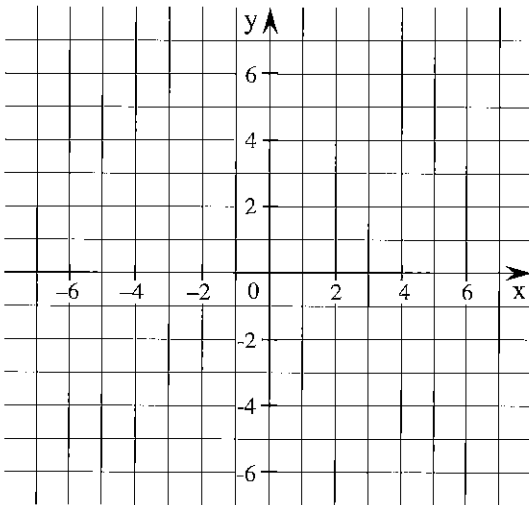
تقع على الرسم البياني للدالة t .

ارسم رسماً بيانياً تقريبياً

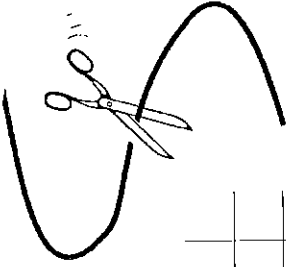
للدالة t وافحص اذا كانت

A , B , و C نقاطاً قصوى.

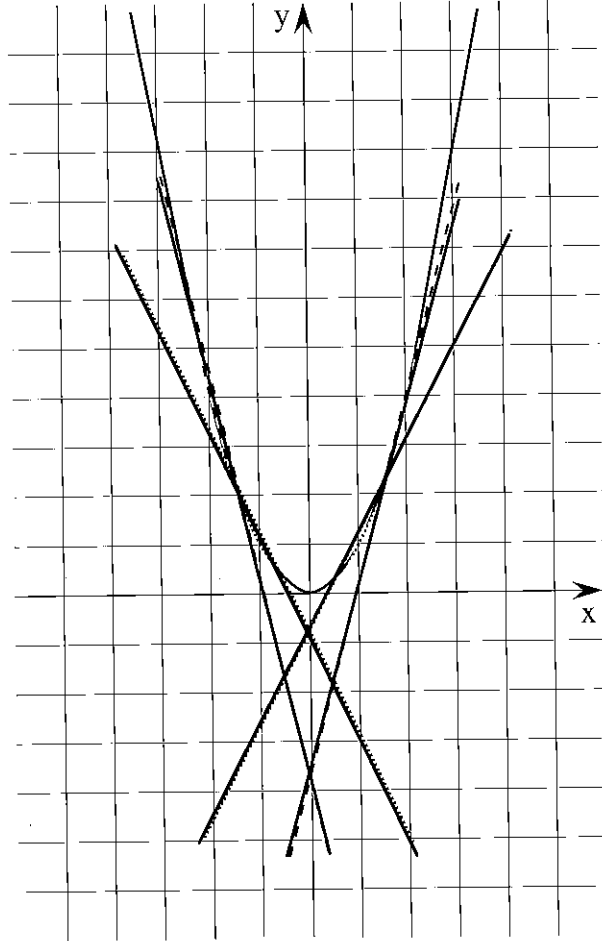
علّل!



الدالة المشتقة



1. معطاة الدالة $f(x) = x^2$.
 أ) استعمل التخطيط، وسجل الميول الآتية:



$$f'(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

(ب) هل تستطيع أن تكمل الميول الآتية بواسطة التخمين؟

$$f'(5) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f'(3.5) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f'(-\frac{1}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f'(-150) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f'(100) = \underline{\hspace{2cm}}$$

لقد خَمْنَا أنه إذا كانت $f(x) = x^2$ فإن $f'(x) = 2x$.
سنبرهن صحة هذا التخمين في المستقبل.

$f'(x)$ هي دالة جديدة وتسمى **الدالة المشتقة**.
الدالة المشتقة تلائم لكل مصدر (x) ميل
الدالة (الأصلية) في النقطة.

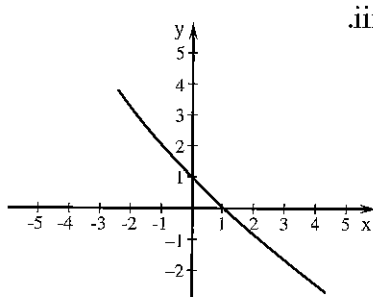
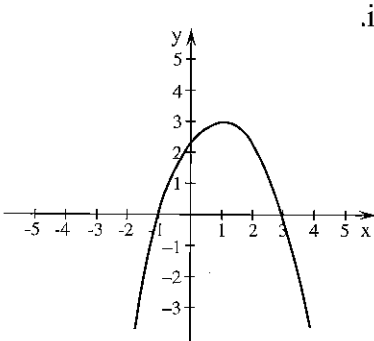
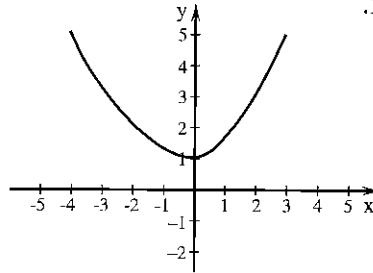
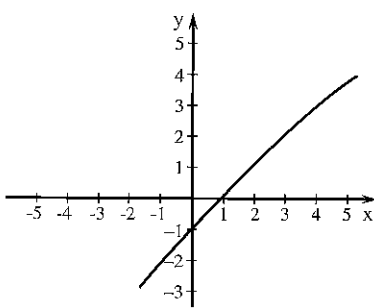


2. قاعدة تعريف الدالة g غير معروفة، معطى فقط ان الدالة المشتقة هي

$$g'(x) = -2x + 2$$

(أ) عوّض واحسب $g'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ب) حسب النتيجة في (أ)، أي الرسوم البيانية تلائم الدالة g ؟



ج) عوّض واحسب $g'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$. افحص اذا كانت النتيجة ملائمة للرسم البياني الذي اخترته، أم لا .

افحص، في كل من الأقسام الآتية، بواسطة التمعن في الرسم البياني، ثم تأكد بواسطة التعويض في الدالة المشتقة، (انتبه: بإمكانك أن تعرف دون معرفة الاحداثي y للنقطة).

د) هل النقطة (4,) هي نقطة تصاعد أم تنازل؟ $g'(4) = \underline{\hspace{2cm}}$ عوّض واحسب:

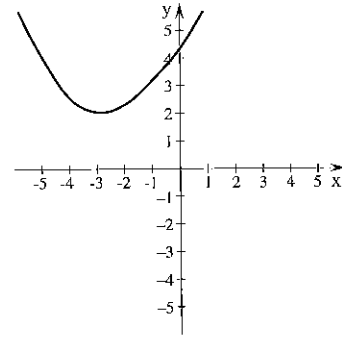
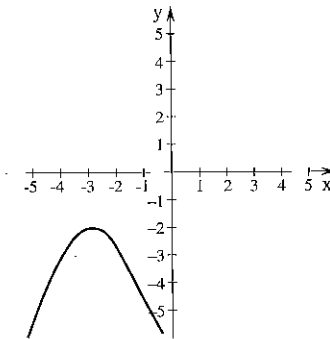
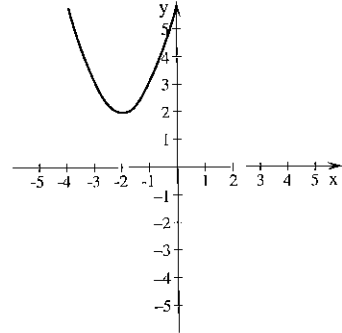
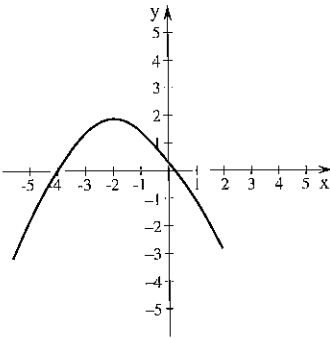
هـ) هل النقطة (3,) هي نقطة تصاعد أم تنازل؟ $g'(3) = \underline{\hspace{2cm}}$ عوّض واحسب:

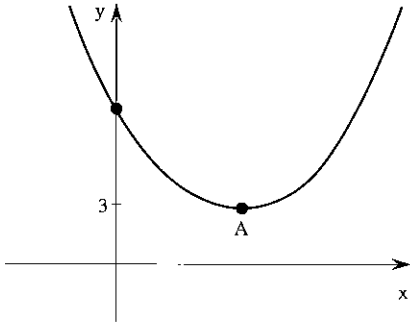
و) هل النقطة (0,) هي نقطة تصاعد أم تنازل؟ $g'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ عوّض واحسب:


3. قاعدة g غير معروفة، ومعلوم فقط أن المشتقة هي $g'(x) = 2x + 4$.

أ) عوّض واحسب: $g'(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

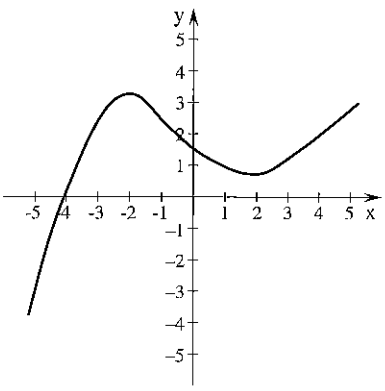
ب) حسب النتيجة في أ، جد أي الرسوم البيانية التقريبية الآتية يلائم g






4.  أمامك رسم بياني للدالة m .
 (أ) قاعدة تناظر m غير معلومة.
 ومعلوم ان $m'(x) = 5x - 50$.
 جد احداثيي النقطة A .

(ب) هل تستطيع ايجاد احداثيي A
 اذا لم يعط الرسم،
 ولكن قيل لك أن A نقطة
 قصوى؟



5.  أمامك رسم بياني للدالة p .

فيما يلي قائمة لست دوال إحداها هي الدالة المشتقة للدالة p .
 حاول ايجادها.

$p'(x) = 2 - x^2$ (II)

$p'(x) = x + 2$ (I)

$p'(x) = 2 - x$ (IV)

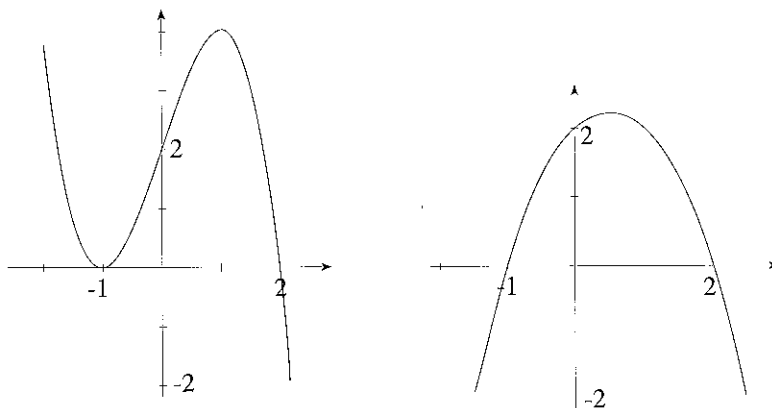
$p'(x) = x - 2$ (III)

$p'(x) = -2 - x$ (VI)

$p'(x) = x^2 - 4$ (V)

6. أمامك الرسمان البيانيان للدالتين:

$$g(x) = -(x-2)(x+1) \quad , \quad f(x) = (x+1)^2(2-x)$$



(أ) حاول أن تلائم لكل دالة رسمها البياني. علل!

(ب) جد نقاط تقاطع كل دالة مع محور x . هل يساعدك هذا في الإجابة على قسم (أ)؟

(ج) معطى أن:

$$f'(x) = 3(1-x^2) \quad \text{و} \quad g'(x) = 1-2x$$

جد نقاطاً يساوي ميل الدالة فيها صفراً.

(د) هل يساعدك هذا في الإجابة على قسم (أ)؟



7. معطى: $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x$ و $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 7$.
كل الأقسام الآتية تتبع للدالة f ، ولشتقتها f' . لا تحل حتى النهاية، بل
اكتب فقط "الترجمة الرياضية".

فمثلاً: في النقطة A الميل 3 . جد الاحداثي x لـ A .

الحل: $3 = 12x^3 - 6x^2 + 7$

(أ) في النقطة B $y = 2$. جد النقطة B .

(ب) جد ميل الدالة في النقطة التي يكون فيها $x = 3$.

(ج) في أية نقطة يكون الميل -2 ؟

(د) ما هي قيمة الدالة في النقطة التي فيها $x = -2$ ؟

(هـ) ما هو احداثي x للنقطة التي فيها قيمة الدالة -2 ؟



8. لائم بين الأعمدة

- | | |
|--|-------------------|
| • 1. ما هو ميل الدالة في النقطة التي فيها يكون $x = 3$ ؟ | • (أ) $g(3)$ |
| • 2. جد نقطة التقاطع مع محور y . | • (ب) $g'(3)$ |
| • 3. ما هي مشتقة الدالة في النقطة $(0, 0)$ ؟ | • (ج) $g(x) = 3$ |
| • 4. في أية نقطة تكون المشتقة صفراً؟ | • (د) $g'(x) = 3$ |
| • 5. ما هي قيمة الدالة في النقطة $x = 3$ ؟ | • (هـ) $g(0) =$ |
| • 6. جد نقطة تكون فيها قيمة الدالة 3 . | • (و) $g(x) = 0$ |
| • 7. أية نقطة يساوي الميل فيها 3 ؟ | • (ز) $g'(0) =$ |
| • 8. جد نقطة التقاطع مع محور x . | • (ح) $g'(x) = 0$ |

تمارين

9. قانون m , غير معروف، لكن معروف ان الدالة المشتقة هي

$$m'(x) = x^2 - 10$$

(أ) أكمل (سجل تزايد أو تناقص).

_____ النقطة التي الاحداثي x لها 2 هي نقطة

_____ النقطة التي الاحداثي x لها 3 هي نقطة

_____ النقطة التي الاحداثي x لها 4 هي نقطة

_____ النقطة التي الاحداثي x لها 5 هي نقطة

(ب) هل حسب رأيك توجد للدالة نقاط قصوى؟ علل!

10. قانون t , غير معروف، لكن معروف ان الدالة المشتقة هي

$$t'(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$$

(أ) أكمل (سجل تزايد أو تناقص).

_____ النقطة التي الاحداثي x لها -2 هي نقطة

_____ النقطة التي الاحداثي x لها -1 هي نقطة

_____ النقطة التي الاحداثي x لها 0 هي نقطة

_____ النقطة التي الاحداثي x لها 1 هي نقطة

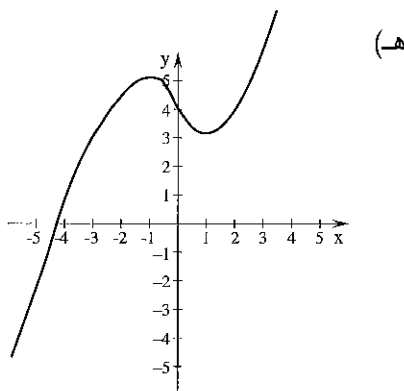
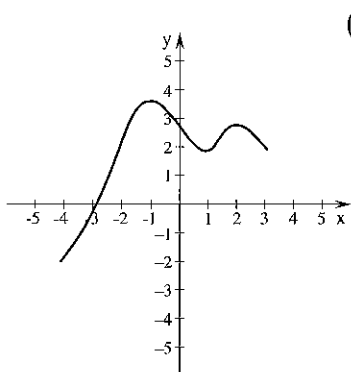
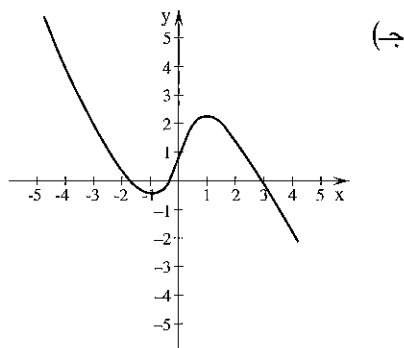
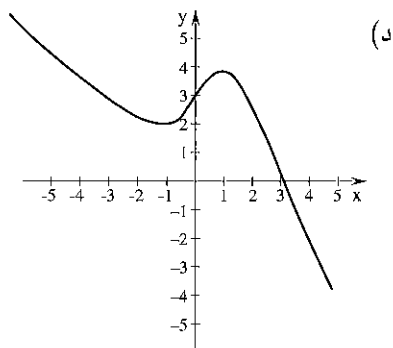
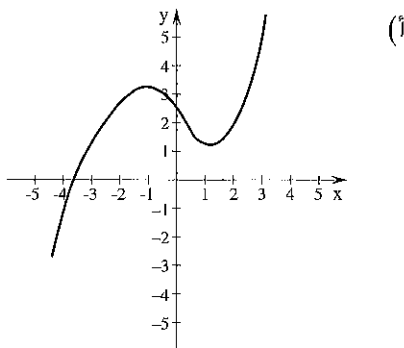
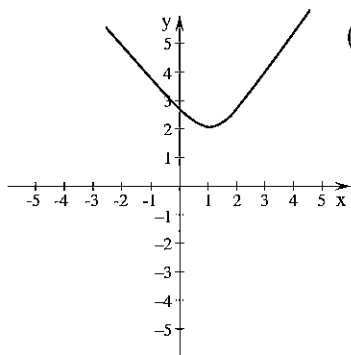
_____ النقطة التي الاحداثي x لها 2 هي نقطة


(ب) هل حسب رأيك توجد للدالة نقاط قصوى؟ علل!

11. قاعدة تعريف الدالة g , معلوم فقط أن الدالة المشتقة هي $g'(x) = x^2 - 1$.

I عوّض واحسب: $g'(-1) =$ $g'(1) =$ $g'(2) =$

II أي من الرسوم البيانية الآتية يمكن أن يكون رسماً بيانياً لـ g ؟



12. حل المعادلات الآتية: 


$$(x-2)(x+1) = 0 \quad \text{د)}$$

$$\frac{2x-6}{x^2+1} = 0 \quad \text{هـ)}$$

$$2x^2 - 12x - 14 = 0 \quad \text{ا)}$$

$$x^3 - 4x^2 = 0 \quad \text{ب)}$$

$$x^3 - x = 0 \quad \text{ج)}$$

13. أمامك 20 معادلة. 

أشتر $\sqrt{\quad}$ الى جانب كل معادلة تقدر أن تحلها، وب \times الى جانب كل معادلة لا تقدر أن تحلها.

$$x^2 + 20 = 0 \quad .11$$

$$(x+2)(x-5) = 0 \quad .1$$

$$x^2 - 20 = 0 \quad .12$$

$$(x+2)(x-5) = 60 \quad .2$$

$$x^5 - x^4 = 0 \quad .13$$

$$(x+3)(x-4)(x+1) = 0 \quad .3$$

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 = 5 \quad .14$$

$$(x+3)(x-4)(x+1) = 17 \quad .4$$

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0 \quad .15$$

$$x^2 - 16 = 0 \quad .5$$

$$\frac{(x+2)(x-5)}{17} = 0 \quad .16$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 2 \quad .6$$

$$x^7 + x^6 = 12 \quad .17$$

$$x^2 - 3x = 0 \quad .7$$

$$(x \neq -1) \quad \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} = 0 \quad .18$$


$$x^2 = 7x \quad .8$$

$$(x \neq 2) \quad \frac{8}{x-2} = 0 \quad .19$$

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \quad .9$$

$$\frac{x-2}{8} = 0 \quad .20$$

$$x^4 - 3x^3 - 4x - 3 = 0 \quad .10$$

14. حل المعادلات من البند السابق (التي أشترت الى جانبها ب $\sqrt{\quad}$). 

أجوبة لسؤال 14 (الأجوبة غير مرتبة حسب ترتيب السؤال)

$$x = 4$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 7$$

$$x = 2$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -1$$

$$x_1 = 4.47 \quad x_2 = -4.47$$

لا يوجد حل

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$


$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -1$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 5$$

$$x_1 = 10 \quad x_2 = -7$$

15. النقطتان $A(-2, 0)$ و $B(0, 5)$ هما نقطتان "حرجتان" موجودتان على الرسم البياني لدالة معينة. 

(أ) كم نقطة أخرى يجب أن تجد على هذه الدالة كي تقرر هل هذه النقاط هي نقاط قصوى؟

(ب) جد نقاطاً أخرى على الدالة، بحيث أن A هي نقطة نهاية صغرى و B هي نقطة نهاية صغرى.

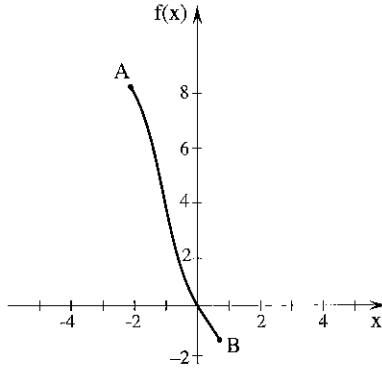
رسم الدالة بمساعدة الدالة المشتقة

تعلمنا في البنود السابقة كيفية رسم دالة اذا علمت النقاط القصوى لها. في البند السابق رأينا أن قيمة المشتقة في النقاط "الرجة" تكون صفراً. لكي تفحص أياً من النقاط "الرجة" هي نقطة قصوى وما نوعها (عظمى أو صغرى)، وجدت قيمة الدالة قبل وبعد النقطة "الرجة". في هذا البند سنعمل على إيجاد النقاط "الرجة" وفحصها.

1. للدالة $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$

يوجد نقطتان حرجتان A و B.

في هيئة المحاور رُسم جزء من الرسم البياني للدالة f وأبرزت النقطتان "الرجتان".



(أ) احسب احداثيي نقطة تقع على الرسم البياني للدالة f عن يسار الجزء المرسوم، وأشر الى هذه النقطة في هيئة المحاور. هل A هي نقطة قصوى؟ اذا كانت كذلك، فما نوعها؟

(ب) احسب احداثيي نقطة على الدالة f تقع عن يمين الجزء المرسوم، وأشر الى هذه النقطة في هيئة لمحاور. هل B هي نقطة قصوى؟ اذا كانت كذلك، فما نوعها؟



2. معطاة الدالة $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

والدالة المشتقة هي $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

سنجد النقاط القصوى.

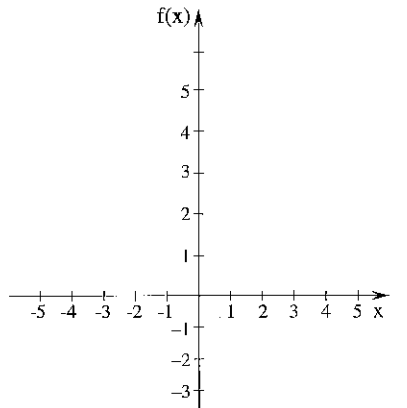
أ) نبحث عن النقاط "الحرجة": النقاط التي يكون فيها الميل صفراً.
أكمل:

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6x^2 - 18x + 12 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \underline{\hspace{1cm}} \quad \text{أو} \quad x = \underline{\hspace{1cm}}$$

ب) النقاط "الحرجة" هي (\quad , \quad) و (\quad , \quad) .
أشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور وصل بينها.



ج) جد نقطة على الدالة تقع عن يسار الجزء المرسوم، وأشر اليها في هيئة المحاور.

د) جد نقطة على الدالة تقع عن يمين الجزء المرسوم، وأشر اليها في هيئة المحاور.

هـ) هل النقاط "الحرجة" هي نقاط قصوى؟ اذا كانت كذلك - فما نوعها؟
- أكمل الرسم البياني للدالة.



3. معطاة الدالة $p(x) = 3x^4 - 4x^3$

والدالة المشتقة هي $p'(x) = 12x^3 - 12x^2$

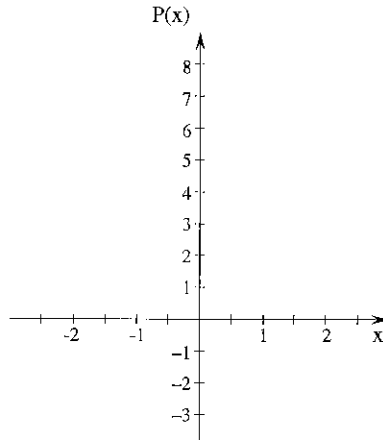
(أ) اكتب معادلة تجد بواسطتها النقاط "الدرجة".

$$\text{حل: } 12x^2(\quad - \quad) = 0$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{أو} \quad x = \underline{\hspace{2cm}}$$

النقاط "الدرجة" هي (\quad , \quad) و (\quad , \quad) . أشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور.

(ب) النقطتان $(0, 0)$ و $(1\frac{1}{3}, 0)$ هما نقطتا التقاطع مع محور x ، أشر اليهما في هيئة المحاور.



(ج) كم نقط أخرى عليك أن تجد على هذه الدالة، لكي تعرف نوع النقاط "الدرجة"؟ جد هذه النقاط الأخرى، وأشر اليها في هيئة المحاور.

(د) أكمل الرسم البياني للدالة.

6. معطاة الدالة $t(x) = -x^3 + 3x$

والدالة المشتقة هي $t'(x) = -3x^2 + 3$

(أ) جد النقاط "الدرجة"، وأشر إليها في هيئة المحاور.

(ب) احسب أحداثيات نقاط أخرى، لكي تعرف نوع النقاط "الدرجة". أشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور.

(ج) خطط الرسم البياني لدالة.

(د) اقرأ (بالتقريب) من الرسم البياني نقاط التقاطع مع محور x وسجلها: $(\text{---}, 0)$ $(\text{---}, 0)$.

(هـ) افحص جوابك بالتعويض في الدالة.

7. معطاة الدالة $m(x) = x^2 + 10x$

والدالة المشتقة هي $m'(x) = 2x + 10$

(أ) جد نقطة "درجة".

(ب) طُلب من سمير وسناء أن يقرر كل منهما نوع النقطة "الدرجة".

- سمير اختار النقطتين $(-6, -24)$, $(-2, -16)$

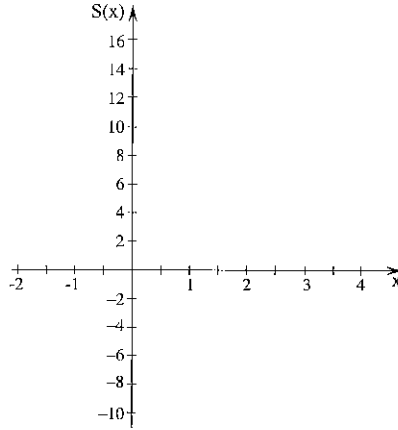
- سناء اختارت النقطتين $(-3, -21)$, $(-4, -24)$

من منهما يستطيع أن يقرر نوع النقطة "الدرجة"؟

(ج) هل النقطة القصى هي نقطة قيمة عظمى أم صغرى؟



4. معطاة الدالة $s(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ والدالة المشتقة هي $s'(x) = -3x^2 + 12x - 9$ (أ) جد النقاط "الرجة"، وأشر اليها في هيئة المحاور.



- (ب) النقطتان $(0, 0)$ و $(3, 0)$ هما نقطتا تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحاور. أشر اليهما في هيئة المحاور.
- (ج) احسب (إذا كانت هنالك حاجة) احداثيات نقاط أخرى. لكي تقرر إذا كانت النقاط "الرجة" نقاطاً قصوى وما نوعها. أشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور. أكمل الرسم البياني للدالة.

تمارين

5. النقطتان $A(-1, 3)$ و $B(4, -2)$ هما النقطتان "الرجتان" الوحيدتان لدالة معينة.

- (أ) كم نقطة أخرى عليك أن تجد على هذه الدالة؛ لكي تقرر إذا كانت هذه النقاط نقاطاً قصوى.
- (ب) اكتب احداثيات نقاط أخرى بحيث ينتج أن A هي نقطة قيمة عظمى و B هي نقطة قيمة صغرى.

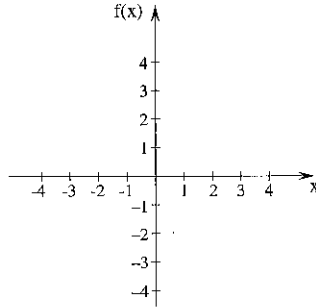
8. معطاة الدالة $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

والدالة المشتقة لها $f'(x) = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$

أ) سجل معادلة لإيجاد النقاط "الحرجة" (المشبوهة) لكي تكون قيمة الكسر صفراً، فقيمة البسط يجب ان تكون صفراً.
أي أن: $4 - 4x^2 = 0$.

$x = \underline{\hspace{2cm}}$ أو $x = \underline{\hspace{2cm}}$

النقاط "الحرجة" هي (\quad , \quad) (\quad , \quad) . عيّنهما في هيئة المحاور.



ب) جد نقاط التقاطع مع المحورين وعيّنهما في هيئة المحاور.

ج) احسب احداثيات نقاط أخرى كي تصف النقاط "الحرجة".

د) حاول رسم تخطيطي للرسم البياني للدالة.



(انتبه الى انه لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين غير $(0, 0)$)

في دراستك اللاحقة ستعمل أيضاً برسوم بيانية لدوال مشابهة.

9. للدالة g ثلاث نقاط قصوى فقط.
أمامك جدول قيم للدالة يحوي النقاط القصوى.

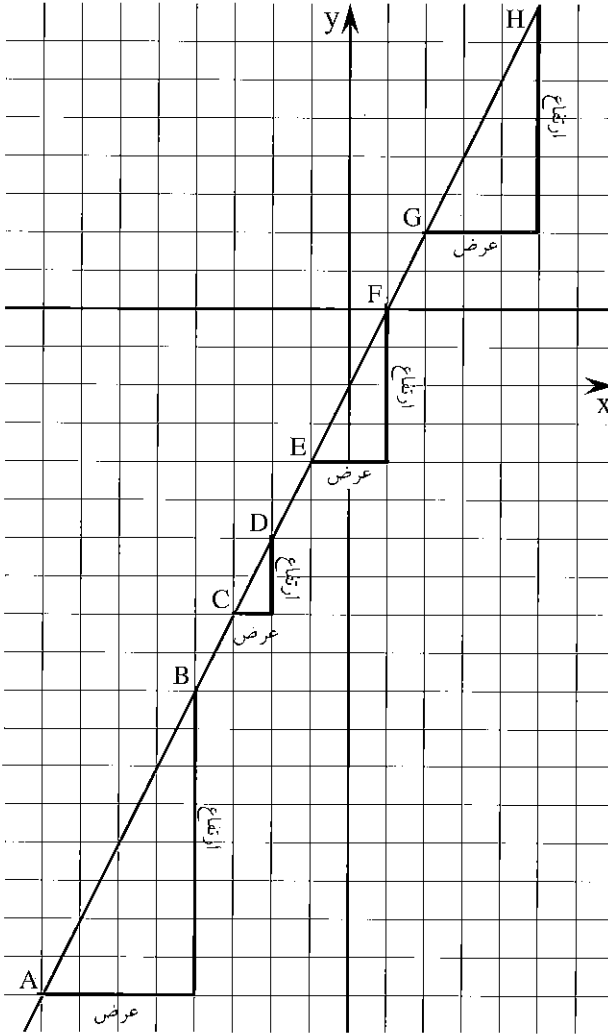
x	-2	-0.5	0	1.5	3	4	5
$g(x)$	1	0	3	4.5	4	-1	0

جد النقاط القصوى وعيّن نوعها. (أشر إليها في هيئة محاور، اذا رأيت ذلك ضرورياً).

الدالة المشتقة للدالة $f(x) = x^n$



(أ) ما هو ميل المستقيم الذي أمامك؟
 (ب) على المستقيم رُسمت أربع "درجات".



سجّل، لكل "درجة"، في الجدول الآتي، ارتفاعها وعرضها، والنسبة بين ارتفاعها وعرضها.

ارتفاع عرض	ارتفاع	عرض	
$\frac{8}{4} = 2$	8	4	I. "الدرجة" بين A و B
			II. "الدرجة" بين C و D
			III. "الدرجة" بين E و F
			IV. "الدرجة" بين G و H

(ج) ماذا يمكنك أن تقول عن كل المثلثات المرسومة؟

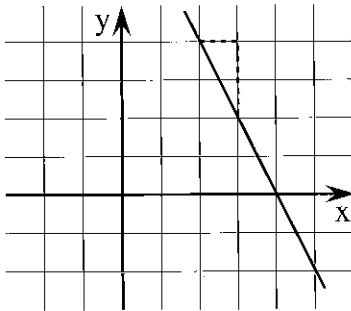
ما معنى $\frac{\text{ارتفاع}}{\text{عرض}}$ ؟

نتيجة: يمكن ان نحسب الميل بواسطة النسبة بين ارتفاع الدرجة وعرضها .

$$\frac{\text{ارتفاع}}{\text{عرض}} = \frac{\text{صعود}}{\text{تقدم}} = \text{الميل على كل خطوة}$$

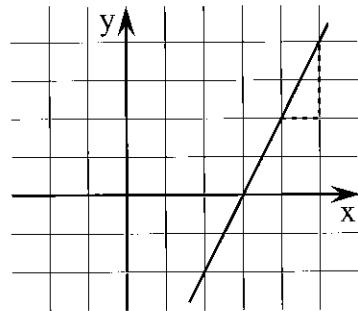
⚠️ تنازل: الميل سالب

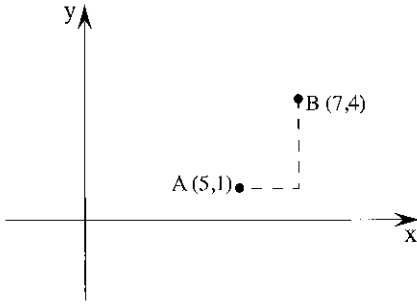
(في هذا الرسم البياني الميل -2)



⚠️ تصاعد: ميل موجب

(في هذا الرسم البياني الميل 2)





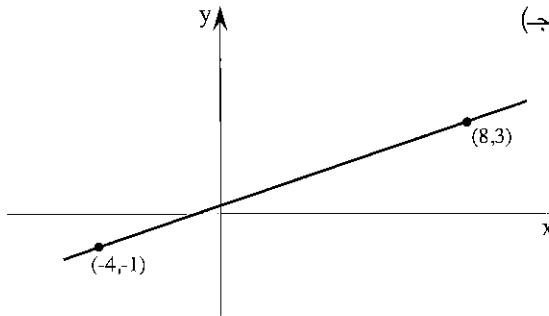
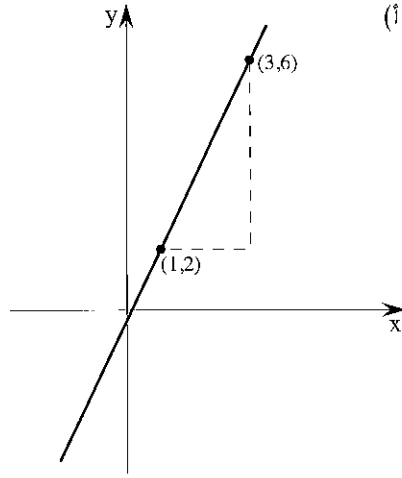
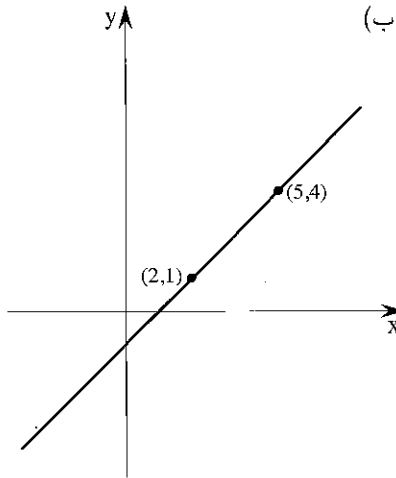
2. (أ) ما هو ارتفاع "الدرجة" بين A و B؟
 (ب) ما هو عرض "الدرجة" بين A و B؟
 (ج) ما هو ميل المستقيم المار بين A و B؟
 (د) ارسم مستقيماً في مجموعة محاور مقسمة إلى مربعات بحيث يمر بين النقطتين A(5, 1) و B(7, 4).

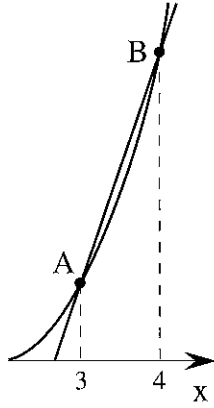
واقراً ميله.

هل النتائج متطابقة؟



3. احسب ميل كل ارتفاع = $\frac{\text{ارتفاع}}{\text{عرض}}$ الميل





4. في هذا السؤال نحسب ميل وتر. الوتر هو المستقيم الذي يصل بين نقطتين على الرسم البياني للدالة.

A, B هما نقطتان على الرسم البياني للدالة

$$f(x) = x^2$$

(أ) أكمل: $A(3, \quad)$ $B(4, \quad)$

(الوحدات على المحورين مختلفة).

(ب) احسب ميل الوتر AB .



5. (I) في كل صف في الجدول تظهر نقطتان على $f(x) = x^2$. عليك ان تحسب ميل الوتر المار بينهما.

ميل الوتر	عرض "الدرجة"	ارتفاع "الدرجة"	A	B
			(3, 9) (أ)	(4, 16)
			(3, 9) (ب)	(3.5, \quad)
			(3, 9) (ج)	(3.1, \quad)
			(3, 9) (د)	(2.9, \quad)
$2x + h$			(x, \quad) (هـ)	$[x+h, \quad]$

— ماذا يحدث لميل الأوتار عندما تقترب B من A ؟

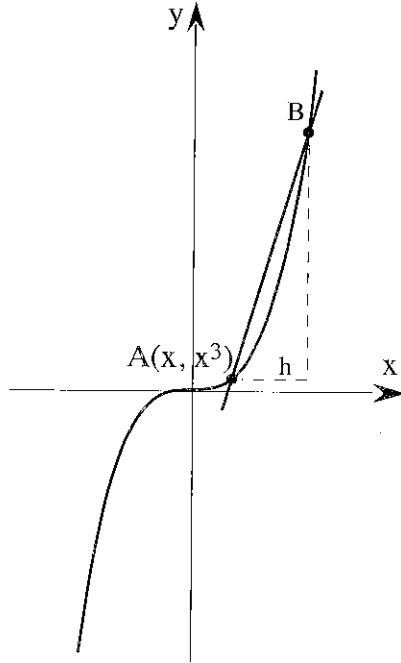
(II) نفحص العلاقة بين ميل المماس في A , وميل الأوتار التي وجدتتها.

— افرض مستقيماً وصغّر الوتر بحيث تجعل النقطة B تقترب من A على منحنى الدالة.

— ماذا يحدث لكبير h ؟

— ماذا يحدث للقاطع عندما تنطبق B على A ؟

ما هو، حسب رأيك، ميل المماس للدالة $f(x) = x^2$ في نقطة ما A أيًا كانت؟



(تمعن في صورة العدد التي حصلت عليها في سؤال 5 قسم هـ).

6. للاستطلاعيين فقط - إيجاد الدالة المشتقة لـ $f(x) = x^3$.

I في كل صف في الجدول معطاة نقطتان على $f(x) = x^3$.

أكمل قيمة y .

عليك أن تحسب ميل الوتر المارّ بينهما.

ميل الوتر	عرض "الدرجة"	ارتفاع "الدرجة"	A	B
			(2,)	(2.5,)

ب) (2,)	(2.1,)			
ج) (2,)	(1.9,)			
د) (x,)	[x+h,]			$3x^2+3xh+h^2$

(II) نفحص العلاقة بين ميل المماس في A وميل الوتر الذي وجدته.

- افرض "مستقيماً" وصغّر الوتر بحيث تقرب B من A على منحنى الدالة.
- ماذا يحدث لكبير h ؟
- ماذا يحدث للوتر عندما تنطبق B على A ؟
- ما هو ميل المماس للدالة $f(x) = x^3$ في النقطة A أياً كانت ؟ (استعن بالبند د).



حصلنا على أن مشتقة الدالة $f(x) = x^3$ هي الدالة $f'(x) = 3x^2$.

وبنفس الطريقة يمكن ان نبيّن أن مشتقة الدالة $f(x) = x^4$ هي الدالة $f'(x) = 4x^3$.

7. نحاول الآن أن نعمم لكل دوال القوى. أكمل:

الدوال	دالة المشتقة
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = x^5$	
$f(x) = x^6$	
$f(x) = x^{27}$	
$f(x) = x^n$	

تمارين

8. معطاة الدالة $f(x) = x^2$. جد.

- أ) ما هو ميل الدالة في النقطة (3, 9) ؟
 ب) ما هي مشتقة الدالة في النقطة (-1, 1) ؟
 ج) في أية نقطة على الرسم البياني للدالة يكون الميل 10 ؟
 د) في أية نقطة على الرسم البياني للدالة تكون المشتقة -5 ؟
 9. لائم لكل دالة في العمود الأيمن الدالة المشتقة في العمود الأيسر.
 أكمل الدوال المشتقة الناقصة

• $f(x) = x^2$ (1) • $f'(x) = 7x^6$ (أ)

• $f(x) = x^5$ (2) • $f'(x) = 11x^{10}$ (ب)

• $f(x) = x^7$ (3) • $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ (ج)

• $f(x) = x^{10}$ (4) • $f'(x) = 2x$ (د)

• $f(x) = x^{12}$ (5) • $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ (هـ)

• $f(x) = x^{11}$ (6) • $f'(x) = 17x^{16}$ (و)

• $f(x) = x^{20}$ (7) • $f'(x) = 5x^4$ (ز)

• $f(x) = x^{17}$ (8) • $f'(x) = 10x^9$ (ح)

10. معطاة الدالة $f(x) = x^3$.

أ) ما هي الدالة المشتقة ؟

ب) ما هو ميل الدالة في النقطة (2, 8) ؟

ج) ما هي مشتقة الدالة في النقطة (-1, -1) ؟

د) ما هو ميل الدالة في النقطة التي يكون فيها $x = 1.5$ ؟

هـ) ما هي النقاط على الرسم البياني للدالة، التي يكون الميل فيها 12 ؟

و) ما هي النقاط على الرسم البياني للدالة التي تكون فيها المشتقة 0.75 ؟

ز) ما هي مشتقة الدالة في النقطة التي يكون فيها $y = 125$ ؟ $f(x) = 125$.



11. جد ميل الدالة $f(x) = x^5$ في النقطة التي يكون فيها $x = 3$.

12. أ) جد ميل الدالة $p(x) = x^6$ في النقطة $(-1, 1)$.
 ب) هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في النقطة $(-1, 1)$ ؟
 13. في أية نقطة على الرسم البياني للدالة $f(x) = x^4$ يكون الميل -32 ؟
 14. معطاة الدالة $f(x) = x^4$.

جد:

أ) نقاط التقاطع مع المحورين.

ب) النقاط القصوى.

ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.

15. معطاة الدالة $g(x) = x^5$.

جد:

أ) نقاط التقاطع مع المحورين.

ب) النقاط القصوى.

ج) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً.

أجوبة لقسم من التمارين

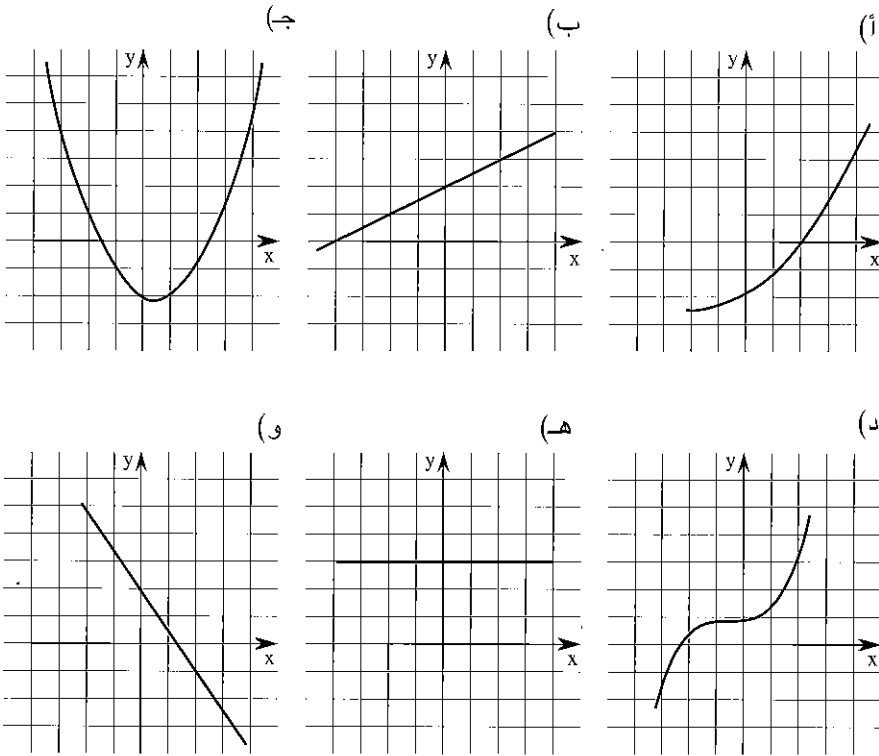
8. أ) 6 ب) -2 ج) $(5, 25)$ د) $(-2.5, 6.25)$

10. أ) $3x^2$ ب) 12 ج) 3 د) 6.75 هـ) $(2, 8)$ و) $(-2, -8)$

- و) $(0.5, 0.125)$ و) $(-0.5, -0.125)$

الدالة المشتقة للخط المستقيم

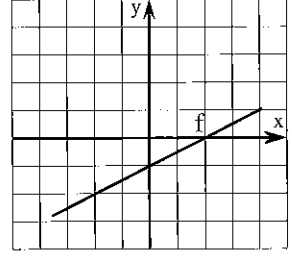
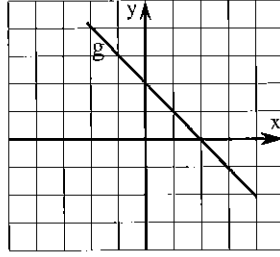
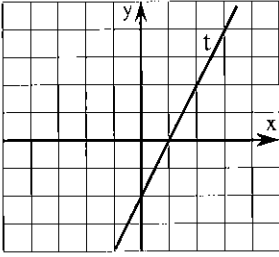
1. حاول ان ترسم رسماً بيانياً لدالة، يساوي الميل في كل النقاط الواقعة عليها، $f(x)$ ، 2 $(f'(x) = 2)$.



2. (I) عيّن الرسوم البيانية التي يكون الميل ثابتاً في كل نقطة من نقاطها.



3. في كل قسم سجّل تحت الرسم البياني ما هي الدالة وما هي الدالة المشتقة



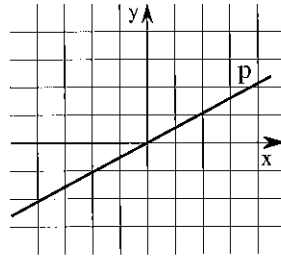
$t(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $t'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



4. (أ) ما هي مشتقة الدالة $p(x) = 3x + 2$ ؟
 (ب) ما هي مشتقة الدالة $g(x) = -2x + 1$ ؟
 (ج) سجّل دالة أخرى لها نفس مشتقة الدالة p .
 (د) سجّل دالة أخرى لها نفس مشتقة الدالة g .



5. (أ) ارسم دالة g تختلف عن p بحيث تكون مشتقاتهما متساويتين.



(ب) أكمل $p(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
 (ج) أكمل $p'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

- (د) سجّل ثلاث دوال مختلفة لها نفس دالة المشتقة (مثل مشتقة p).
 (II) سجّل الدالة المشتقة لكل دالة أشرت إليها وعينتها.

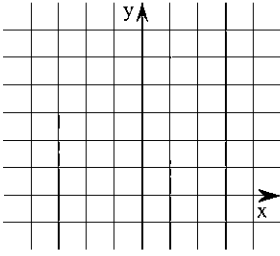


6. أ) ارسم الدالة $g(x) = 6$.

ب) أكمل $g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

ج) ارسم دالة أخرى لها نفس الدالة المشتقة.

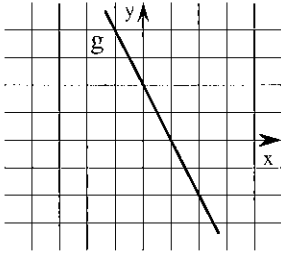
د) سجل ثلاث دوال مختلفة لها نفس المشتقة وقيمتها صفر.



تمارين

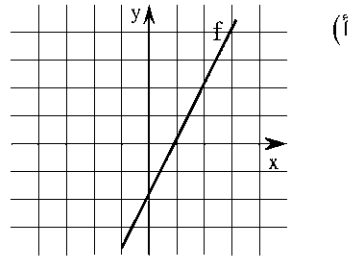
7. ما هي الدالة وما هي الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية.

(أكتب تحت الرسم البياني).



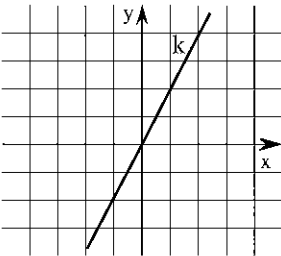
$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



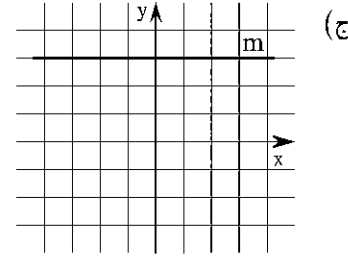
$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



$k(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$k'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



$m(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$m'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

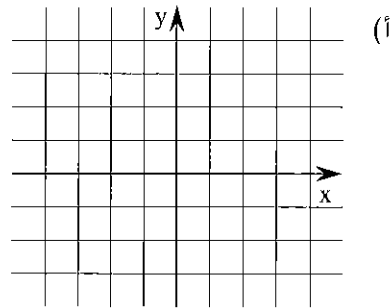
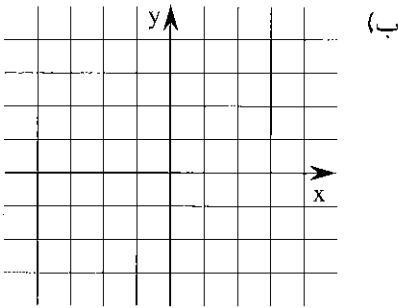
8. جد الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية.

(أ) $k(x) = 7$ (ب) $g(x) = 3x$ (ج) $f(x) = 3x + 7$

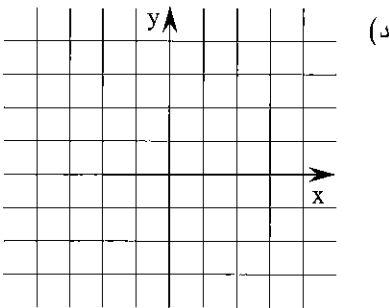
(د) $t(x) = 3$ (هـ) $m(x) = 2x + 3x$

9. في كل من الأقسام الآتية معطاة الدالة المشتقة.

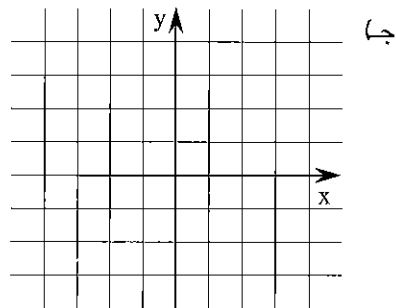
ارسم دالتين (في كل مجموعة محاور) بحيث تكون المشتقة المسجلة مشتقتها.



$g'(x) = 1$



$f'(x) = \frac{1}{2}$



$h'(x) = -2$

$m'(x) = 0$

10. سجّل خمس دوال مختلفة بحيث تكون مشتقتها $f'(x) = 3$.

ملاحظة: للاختصار نستعمل أحياناً الكلمة **مشتقة** بدلاً من دالة مشتقة.

فمثلاً: بدلاً من أن نقول الدالة هي $f(x) = x^2$ والدالة المشتقة لها هي $f'(x) = 2x$ ، يمكن أن نقول، وباختصار، أن مشتقة x^2 هي $2x$ ، ونرمز لذلك بـ $(x^2)' = 2x$. كذلك سنستعمل مصطلح "أشتق" ومعناه أن نجد المشتقة.

11. اشتقّ الدوال الآتية (جد الدوال المشتقة).

أ) $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $f(x) = x^7$

ب) $g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = 7x$

ج) مشتقة x^8 هي $\underline{\hspace{2cm}}$.

د) $(8x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

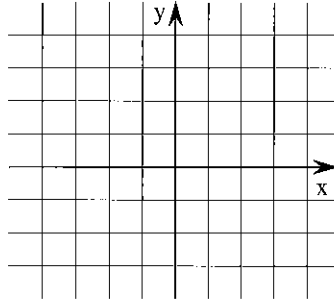
هـ) $(3x + 5)' = \underline{\hspace{2cm}}$

و) $(3x)' = \underline{\hspace{2cm}}$

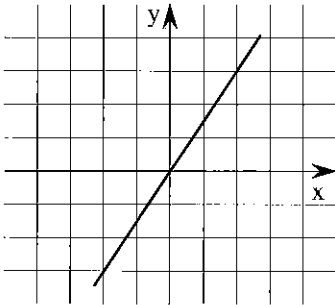
ز) $p'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $p(x) = 3$

كيف تتغير الدالة المشتقة؟

1. ارسم ثلاثة رسوم بيانية لدوال بحيث تساوي مشتقة كل منها -2 ،
 (ع.د) $f'(x) = -2$.

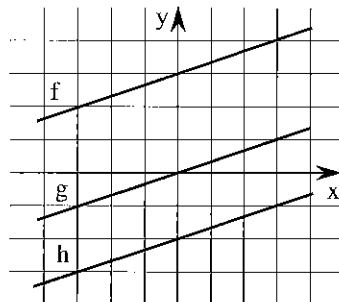


2. أمامك الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{2}x$ (ع.د)




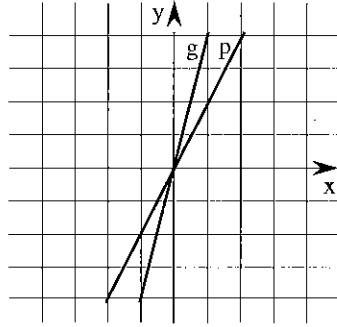
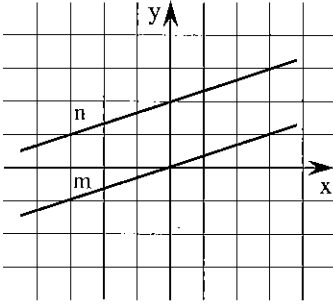
فما هي المشتقة؟
 حرك الرسم البياني 3 وحدات الى أعلى
 بشكل مواز لمحور y .
 ما هو قانون الدالة؟ وما هي المشتقة؟

3. أكمل! (ع.د)




$f(x) =$ $g(x) =$ $h(x) =$ $f'(x) =$ $g'(x) =$ $h'(x) =$

4.  في كل مجموعة محاور تخطيط لدالتين خطيتين. تمعن في التخطيطات، وأجب عن الأسئلة التي تحتها.



أ) $m(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $n(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ (ج) $p(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$


ب) $m'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $n'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ (د) $p'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

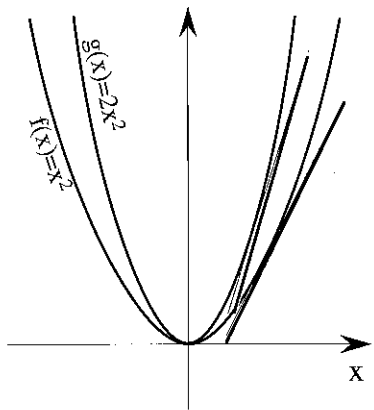
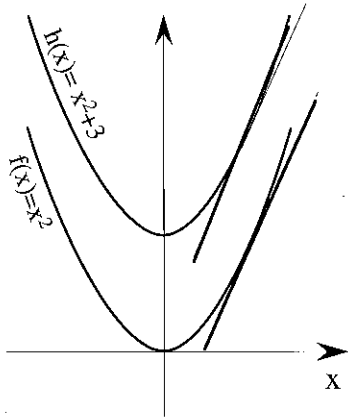
5.  ماذا يحدث لدالة المشتقة عندما:

أ) نضيف للدالة الخطية عدداً معيناً؟ فسّر.

ب) نضرب الدالة الخطية بعدد معين؟ فسّر.


نتيجة: إذا أضفنا لدالة خطية عدداً، فإن الدالة المشتقة لا تتغير، بينما إذا ضربنا الدالة الخطية بعدد، فإن الدالة المشتقة تتضاعف بمقدار العدد نفسه.

6.  أيضاً بالنسبة لدوال ليست خطية: إذا أضفنا للدالة عدداً، فإن المشتقة لا تتغير (لماذا؟) وإذا ضربنا الدالة بعدد، تتضاعف المشتقة بنفس مقدار العدد.




h(x) = _____ g(x) = 2x² f(x) = x² أكمل:

h'(x) = _____ g'(x) = _____ f'(x) = _____

7.  أكمل:

f'(x) = _____ f(x) = x³

g(x) = 5 · _____ = _____ g(x) = 5x³

8.  أكمل:

p'(x) = _____ p(x) = $\frac{1}{2}x^4$

h'(x) = _____ h(x) = $\frac{1}{2}x^4 + 10$

تمارين

9. اشتق الدوال الآتية: (جد الدوال المشتقة).

(أ) $f(x) = 10x$ $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ب) $p(x) = 3x^8$ $p'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ج) مشتقة الدالة $\frac{x^8}{2}$ هي $\underline{\hspace{2cm}}$.

(د) $(-7x^3)' = \underline{\hspace{2cm}}$

(هـ) $g(x) = x^5$ $g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(و) $h(x) = x + 13$ $h'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ز) مشتقة الدالة $\frac{x^5}{5} + 13$ هي $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. لائم لكل دالة في العمود الأيمن الدالة المشتقة في العمود الأيسر. أكمل الدوال المشتقة الناقصة.

(أ) • $f'(x) = -40x^4$ • $f(x) = 10x^2$ (1)

(ب) • $f'(x) = 8$ • $f(x) = -8x^5$ (2)

(ج) • $f'(x) = 20x$ • $f(x) = 0.5x^6$ (3)

(د) • $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ • $f(x) = 8x$ (4)

(هـ) • $f'(x) = x^9$ • $f(x) = \frac{x^{10}}{10}$ (5)

(و) • $f'(x) = -15x^4$ • $f(x) = 4x^2$ (6)

(ز) • $f'(x) = 3x^5$ • $f(x) = -3x^5$ (7)

(ح) • $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ • $f(x) = \frac{x^6}{3}$ (8)

11. لكل سؤال في العمود الأيمن جد إجابة ملائمة في العمود الأيسر، وأكمل.

- أ) ما هو ميل الدالة $f(x) = 3x^4$, في النقطة $x = 2$ ؟
- ب) ما هي مشتقة الدالة $p(x) = \frac{1}{2}x^{10}$, في النقطة $x = 1$ ؟
- ج) ما هي مشتقة الدالة $p(x) = 2x^2$ ؟
- د) ما هي مشتقة الدالة $t(x) = 2x^4$, في النقطة $x = -2$ ؟
- هـ) ما هي قيمة الدالة $m(x) = \frac{1}{2}x^{10}$, في النقطة $x = 1$ ؟

12. لائم لكل دالة في العمود الأيمن الدالة المشتقة في العمود الأيسر.

- أ) $x^2 + 10$
- ب) $10x^2$
- ج) x^2
- د) $10x^2 + 10$
- هـ) $10(x^2 + 10)$


13. معطاة الدالة $f(x) = x^4 - 5$.

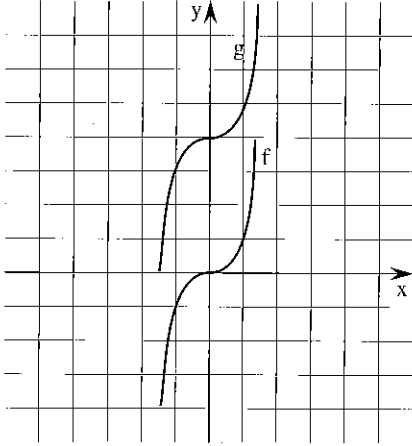
- أ) ما هي الدالة المشتقة للدالة $f(x)$.
- ب) احسب ميل الدالة في النقطة $(1, -4)$.

14. معطاة الدالة $g(x) = 2x^3 + 4$.

- أ) ما هي الدالة المشتقة للدالة $g(x)$.
- ب) جد ميل الدالة في النقطة التي فيها $x = -1$.

مشتقة المجموع


1. أكمل: 



$$f(x) = x^3 \quad f'(x) =$$


$$g(x) = \quad g'(x) =$$

في البند السابق وجدنا مشتقة مجموع دالة وعدد. أي وجدنا مشتقة مجموع دالتين عندما تكون إحداهما ثابتة.

2.  $h(x) = 2x^2 + 10x^3$ هي مجموع دالتين. أكتب الدالتين.

$k(x) = 7x^5 - 3x + x^4$ هي مجموع ثلاث دوال. أكتب هذه الدوال.

في التمرين الآتي سنرى كيف نجد مشتقات دوال مثل $h(x)$ و $k(x)$.

3.  معطاة الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$

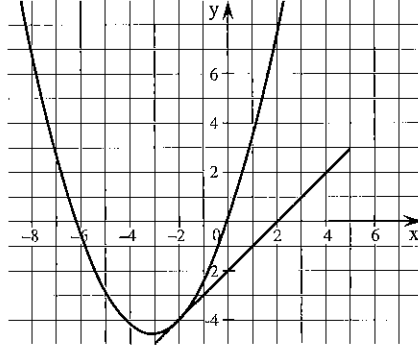
أ) حاول ان تخمّن ما هي مشتقة الدالة؟ $f(x)$.

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

ب) f' نفحص بالنسبة لنقطة معينة. لهذا عوض في المشتقة التي وجدتها

$$f'(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- (ii) الرسم البياني الأسود هو الرسم البياني لـ $f(x)$
 أكمل: المستقيم الأزرق هو مماس لـ $f(x)$ في النقطة (,).
 اقرأ من الرسم البياني الميل في النقطة $(-2, -4)$.
 قارن بالنتيجة في i.



(ج) خمن ما هي الدوال المشتقة لـ :

$f'(x) =$	$f(x) = 2x^2 + 4x$	I
$g'(x) =$	$g(x) = 4x^5 - 3x^2$	II
$m'(x) =$	$m(x) = \frac{1}{2}x^4 - 5$	III

الدالة المشتقة لمجموع دوال هي مجموع مشتقاتها
 $y = f(x) + g(x)$


$$y' = f'(x) + g'(x)$$

3. سجّل ما هي الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية.
 بسّط أولاً.



$y = 2x - x(x + 4)$	(ج)	$y = x(x - 7) + 15$	(أ)
$y = x^3 + (x - 3)^2$	(د)	$y = (x + 2)^2$	(ب)

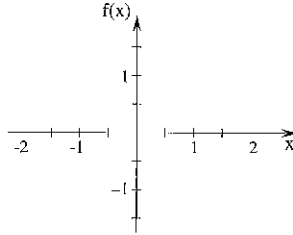
4. معطاة الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

4. معطاة الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. 


(أ) سجّل الدالة المشتقة.

$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ب) جد نقاطاً حرجة، وأشر إليها في هيئة المحاور.



(ج) احسب إحداثيات نقاط أخرى كي تقرر أيّاً من النقاط الحرجة هي نقاط قصوى، وما هو نوعها. أشر إليها في هيئة محاور. أكمل تخطيط الرسم البياني للدالة.

5. معطاة الدالة $f(x) = x^3 + 3x$. 

(أ) سجّل الدالة المشتقة لها.

(ب) جد نقاطاً حرجة (إذا وجدت نقاطاً كهذه).

(ج) جد نقاط التقاطع مع المحورين وأشر إليها في هيئة محاور.

(د) جد إحداثيات نقاط أخرى، وأشر إليها في هيئة المحاور. أكمل تخطيط الرسم البياني للدالة.

تمارين

6. سجل الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال الآتية. بسّط أولاً.

$$y = -8 \quad (\text{هـ}) \quad y = 3x^2 + 7x \quad (\text{أ})$$

$$y = \frac{2}{3}x^7 - 10 \quad (\text{و}) \quad y = \frac{1}{2}x^3 - 8x \quad (\text{ب})$$

$$y = (x + 2)(x - 3) \quad (\text{ز}) \quad y = -x^4 + 7 \quad (\text{ج})$$

$$y = (2x + 3) \cdot 2x \quad (\text{ح}) \quad y = \frac{x^3}{4} + 8x - 5 \quad (\text{د})$$

7. احسب ميل الدالة $f(x) = 3x^2 - 7x$ في النقطة $x = 2$.

8. جد نقطة على الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ يساوي ميل الدالة فيها 21.

9. النقطة A موجودة على الرسم البياني للدالة $p(x) = 4x^2 - 4x$.

ومعلوم أن الاحداثي x لهذه النقطة هو 1.

(أ) هل تقع النقطة A فوق محور x أم تحته؟ فسّر.

(ب) هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في النقطة A؟ فسّر.

10. معطاة الدالة $y = 2x^4 - x^2$

(أ) سجل الدالة المشتقة y' .

(ب) جد احداثيات النقاط "الحرجة"، وأشر إليها في هيئة محاور.

(ج) نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين هي: $(0, 0)$ و $(0.7, 0)$

و $(-0.7, 0)$. أشر إلى هذه النقاط في هيئة المحاور.

(د) استعن بهذه النقاط وبحساب احداثيات نقاط أخرى على الدالة، وجد

نوع النقاط "الحرجة". أكمل تخطيط الدالة.

$$11. \text{ معطاة الدالة } g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$$

أ) سجّل الدالة المشتقة $g'(x)$.

ب) جد نقاطاً "حرجة"، وأشر إليها في هيئة محاور.

ج) نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة g مع المحورين هي: $(0, 0)$ و

$(3, 0)$. أشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور.

د) احسب احداثيات نقاط اخرى، (اذا كانت هنالك حاجة) وجد نوع النقاط الحرجة. أكمل تخطيط الدالة.

$$12. \text{ معطاة الدالة } k(x) = x\left(\frac{x}{2} + 1\right) + 1$$

أ) سجل الدالة المشتقة. (بسّط أولاً).

ب) جد نقاطاً "حرجة"، وأشر إليها في هيئة محاور.

ج) جد نقاطاً أخرى تجد بواسطتها نوع النقاط "الحرجة".

أشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور.

د) خطّط الرسم البياني للدالة.

$$13. \text{ معطاة الدالة } f(x) = (x^2 - 1)^3$$

أ) أكمل النقاط الآتية الواقعة على الرسم البياني للدالة:

$(-2, \underline{\quad})$

$(2, \underline{\quad})$

$(-1, \underline{\quad})$

$(1, \underline{\quad})$

$(0, \underline{\quad})$

ب) أشر الى النقاط في هيئة محاور.

ج) الدالة المشتقة هي $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$.

جد نقاطاً "حرجة".


د) استعن بالنقاط التي أشرت إليها في البند أ وافحص ما نوع النقاط

"الحرجة".

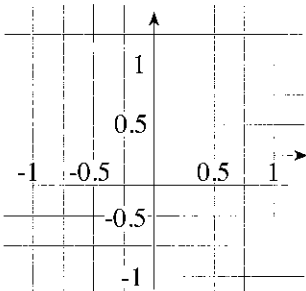
هـ) خطّط الرسم البياني للدالة.

الميل، المماس ومعادلة المماس

تعلمت سابقاً عن الخط المستقيم.
في هذا الكتيّب استعنن بالمستقيم "المماس" حتى تعرّف ميل الدالة في نقطة.
في هذا الفصل سنربط بين الموضوعين.

1.  الرسم البياني للدالة $g(x) = x^3 - x$ يقطع محور x في النقاط A ، B ، و C .

(أ) جد احداثيات النقاط A ، B ، و C ، وأشر اليها في هيئة المحاور.



(ب) لهذه الدالة توجد نقطة قيمة

عظمى في $(-0.58, 0.38)$

ونقطة قيمة صغرى في

$(0.58, -0.38)$.

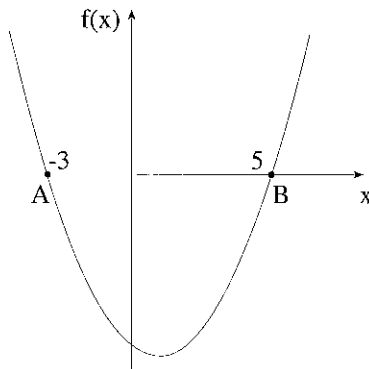
وغير هاتين النقطتين لا توجد


نقاط قصوى.

(ج) ارسم مماساً للدالة في النقطة $(-1, 0)$ وسجّل ميل المماس بالتقريب.

(د) استعن بالدالة المشتقة وجد ميل المماس في النقطة التي يساوي فيها

الاحداثي x ، -1 . قارن مع النتيجة في (ج).



2.  القطع المكافئ $f(x) = x^2 - 2x - 15$

يقطع محور x في النقطتين A و B

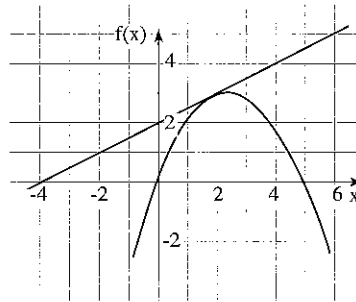
(أ) ارسم مماسين للدالة في

النقطتين A و B .

(ب) استعن بمشتقة الدالة ،

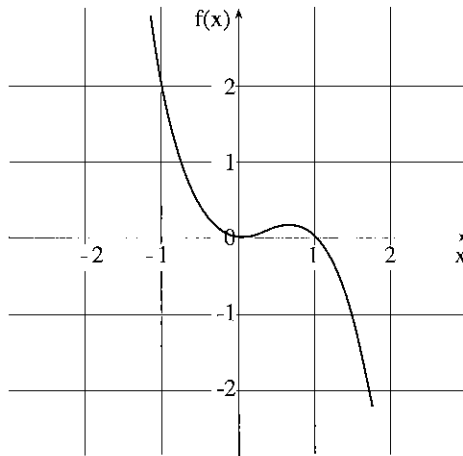
وجد ميل المماسين.

3. أمامك الرسم البياني للدالة $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x$ ومستقيم يمس الدالة في النقطة $(2, 3)$.



- (أ) اكتب معادلة المماس المرسوم.
 (ب) جد مشتقة الدالة $f(x)$ وافحص اذا كان ميل الدالة في النقطة $(2, 3)$ هو نفسه ميل المماس المرسوم.

4. أمامك الرسم البياني للدالة $f(x) = -x^3 + x^2$



- (أ) سجّل الدالة المشتقة للدالة f .
 (ب) جد ميل الدالة في النقطة $(1, 0)$ الواقعة على الدالة.
 (ج) - ارسم في هيئة الماور مستقيماً يمر من النقطة $(1, 0)$ وميله يساوي الميل الذي وجدته في ب.
 - افحص هل يمس هذا المستقيم الدالة.
 - اكتب معادلة المماس



5. معطاة الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 3$

(أ) النقطة $A(1, \underline{\quad})$ موجودة على الرسم البياني للدالة f .
أكمل الاحداثي y .

(ب) جد مشتقة الدالة، وجد ميل الدالة في النقطة A .
بيّن أن الميل في النقطة A هو -0.5 .

(ج) ارسم في هيئة محاور مستقيماً يمر من A وميله -0.5 .
ما هي معادلته؟

في التمارين 3-5 وجدت ميل المماس بالاستعانة بالمشتقة. أما قيمة b (في المعادلة $y = ax + b$) فوجدتها من الرسم.
في التمرين الآتي سنرى كيف نجد قيمة b دون رسم.



6. (أ) مستقيم ميله 2 ويمر في النقطة $(0, 3)$. ما هي معادلته؟

(ب) مستقيم ميله -2 ويمر في النقطة $(1, 4)$. ما هي معادلته؟

(ج) مستقيم ميله $-\frac{1}{2}$ ويمر في النقطة $(4, 3)$. ما هي معادلته؟

سجل عدداً داخل المربع \square $y = -\frac{1}{2}x + \square$ بحيث أن النقطة $(4, 3)$ تقع على المستقيم. (افحص برسم مستقيم).

(د) مستقيم ميله -3 ويمر في النقطة $(5, 5)$. ما هي معادلته؟



7. معطاة الدالة $f(x) = x^3 + x$

(أ) أكمل الاحداثي y للنقطة $A(1, \underline{\quad})$ الواقعة على الرسم البياني للدالة.

(ب) جد مشتقة الدالة، وجد ميل المماس للدالة في النقطة A .
ما هي قيمة a في معادلة المماس $y = ax + \square$ ؟

(ج) جد العدد الناقص في المربع (بالحساب أو برسم مستقيم).

8. معطاة الدالة $m(x) = -2x^2 + 8$



(أ) أكمل الاحداثي y للنقطة B(2, ___) الواقعة على الدالة.

(ب) ما هي مشتقة الدالة وميل المماس للدالة في النقطة B.

(ج) ما هي معادلة المماس في النقطة B؟ (جد بالحساب أو برسم مستقيم).

9. معطاة الدالة $y = x^2 - 6x$



(أ) سجّل مشتقة الدالة.

(ب) أمامك الرسم البياني للدالة المعطاة.

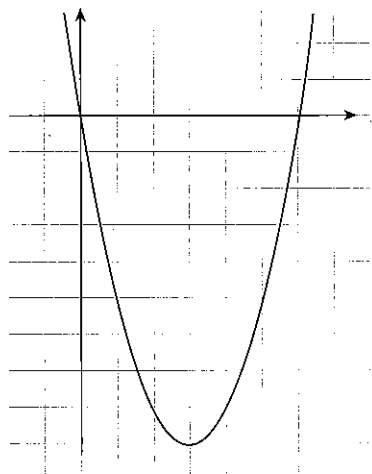
ضع مستقيماً وحاول أن تجد

نقطة يساوي ميل المماس

فيها 2.

سجل احداثيي النقطة

(بالتقريب).



(ج) في النقطة التي وجدتها $y' = 2x - 6 = \boxed{2}$

حل المعادلة- ما هما احداثيا النقطة؟

قارن بالبند ب.

10. معطاة الدالة $g(x) = x^2 + 4x$

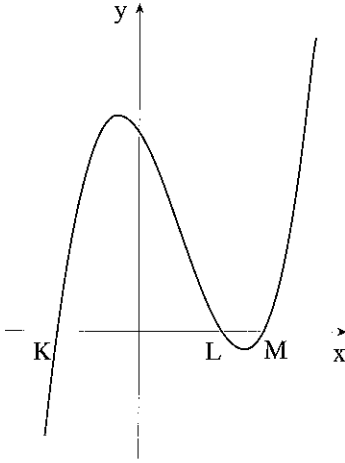


(أ) جد نقطة على الدالة ميل المماس فيها صفراً.

(ب) جد معادلة المماس في النقطة التي وجدتها في ب.

تمارين

11. الدالة $y = (x^2 - 4)(x - 3)$ تقطع محور x في النقاط L, K و M .



أ) جد احداثيات النقاط L, K و M .

ب) ارسم مماسات للدالة في هذه النقاط.

ج) سجل مشتقة الدالة (بسّط أولاً).

د) استعن بالمشتقة، واحسب ميل كل مماس من المماسات التي رسمتها.

12. معطاة الدالة $f(x) = -x^2 + 4x$

أ) أي من النقاط $A(1, 3)$, $B(2, 12)$, $C(0, 4)$ تقع على الرسم البياني للدالة.

ب) جد ميل الدالة في النقاط التي وجدتها في أ.

13. معطاة الدالة $y = x^4 - 3x$

أ) سجل الدالة المشتقة.

ب) جد ميل الدالة في النقطة $(1, -2)$ الواقعة على الرسم البياني للدالة.

ج) ارسم في هيئة محاور مستقيماً يمر في النقطة $(1, -2)$ وميله يساوي الميل الذي وجدته في ب، وسجل معادلته (هذا هو المماس للدالة في النقطة $(1, -2)$).

14. معطاة الدالة $g(x) = x^5 - 3x^2$

(أ) النقطة $C(1, \underline{\quad})$ تقع على الدالة g . أكمل احداثي y .

(ب) جد الدالة المشتقة، وبيِّن أن ميل الدالة في النقطة C هو -1 .

(ج) ارسم في هيئة محاور مستقيماً يمر في C وميله -1 . ما هي معادلته؟

15. معطاة الدالة $y = x^2 - 2x + 7$

(أ) أكمل الاحداثي y للنقطة $B(0, \underline{\quad})$ الواقعة على الدالة.

(ب) جد الدالة المشتقة، وجد ميل المماس للدالة في النقطة B .

(ج) ما هي معادلة المماس في النقطة B ؟

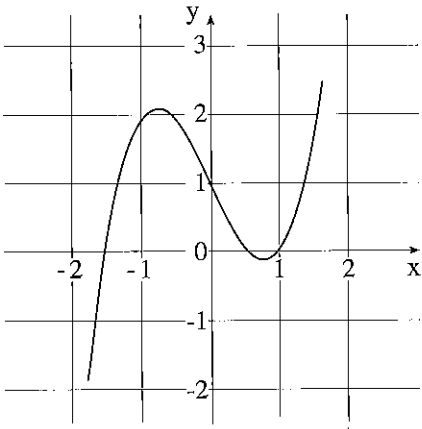
16. معطاة الدالة $y = x^3 - 2x + 1$

(أ) سجل مشتقة الدالة.

(ب) أمامك الرسم البياني للدالة المعطاة

ضع مستقيماً وحاول أن تجد نقاطاً يساوي ميل المماس فيها 1 .


سجل احداثيات النقاط، ودقق قدر الامكان.



(ج) في النقاط التي وجدتها $3x^2 - 2 = \boxed{1}$

حل. ما هي احداثيات النقاط؟ قارن بالبند ب.



17. معطاة الدالة $k(x) = x^2 - x$ 

أ) جد نقطة على الدالة يساوي ميل الدالة فيها 5 .

ب) جد معادلة المماس في النقطة التي وجدتها في البند أ.

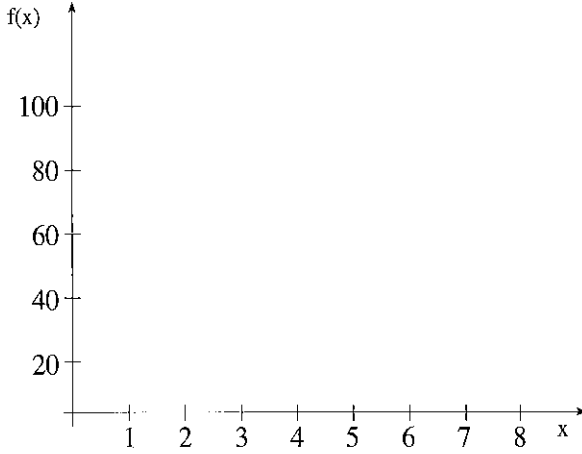
أسئلة بحث



1. قُذفت كرة الى أعلى.

الدالة $f(x) = -5x^2 + 40x$ تمثل ارتفاع الكرة (بالأمتار) بعد x ثانية.

أ) على أي ارتفاع تكون الكرة بعد 3 ثوان؟ بعد 6 ثوان؟
أشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور - دقق قدر الامكان.



ب) بعد كم ثانية تكون الكرة على ارتفاع 35 م؟
- أشر الى نقطة ملائمة في هيئة المحاور.

ج) متى تعود الكرة الى الارتفاع الذي قذفت منه؟
- أشر الى ذلك في هيئة المحاور.

د) جد نقطة قيمة عظمى للدالة.
- سجل ماذا تعني احداثيات النقطة التي وجدتها بالنسبة للكرة.

هـ) أكمل تخطيط الرسم البياني للدالة.

و) - بين أي قيمتين يمكن أن يكون الزمن؟
- بين أي قيمتين يمكن أن يكون ارتفاع الكرة؟



أ) طول أحد أضلاعه 2 سم. احسب طول الضلع الآخر ومحيط المستطيل.

ب) ارمز بـ x لطول أحد الأضلاع.
عبّر عن طول الضلع الآخر.



ج) بيّن أن الدالة التي تناظر لـ x محيط المستطيل، هي:

$$p(x) = 2 \cdot \left(\frac{9}{x} + x\right)$$

د) جد بواسطة الدالة محيط المستطيل إذا كان $x = 2$.
قارن بالجواب في قسم أ. أشر إلى النقطة في هيئة المحاور.

هـ) جد المحيط إذا كان

$$x = 1, \quad x = 6$$

- أشر إلى هذه
النقاط في هيئة
المحاور.

و) الدالة المشتقة هي:

$$p'(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2}$$

جد نقاطاً "حرجة".

- أي منها يلائم المسألة؟

- أشر إلى هذه النقطة

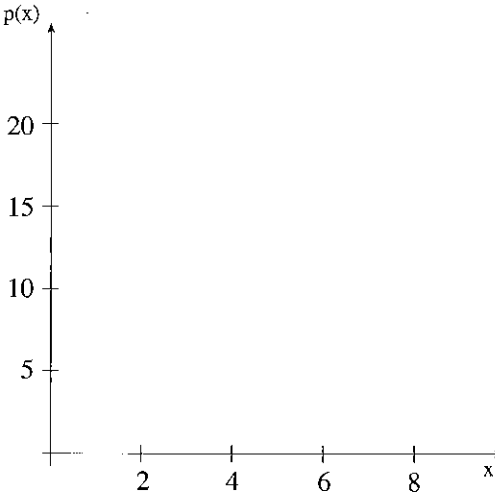
في هيئة المحاور.

- ما هو نوعها؟

- سجّل ماذا تمثّل احداثيات هذه النقطة بالنسبة للمستطيل ومحيطه

ز) خطط الرسم البياني للدالة.

سنعمل في المستقيم بدوال من هذا النوع.

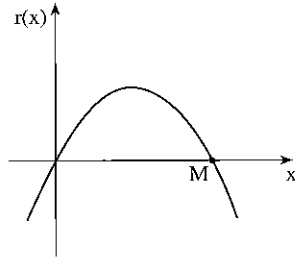




3. ينتج مصنع معين قمصاناً. x يمثل عدد القمصان التي ينتجها المصنع في اليوم. الدالة $r(x) = -0.01x^2 + 36x$ تمثل دخل المصنع (بالشواقل) في اليوم الواحد.

(أ) ما ربح المصنع من إنتاج 100 قميص؟

(ب) أتمامك الرسم البياني للدالة $r(x)$.



جد أحداثيات النقطة M .
- سجّل ماذا تعني النقطة M بالنسبة للمسألة.

(ج) جد أحداثيات رأس الدالة. سجّل ماذا تعني أحداثيات هذه النقطة بالنسبة للمسألة.

(د) سجّل خطأ أم صواباً- وعلّل.
- النقطة $(100, 3500)$ الواقعة على الدالة تمثل دخل المصنع من إنتاج 100 قميص في اليوم.

- كلما ازداد الإنتاج، ارتفع دخل المصنع.
- كلما ازداد الإنتاج، انخفض دخل المصنع.
- إنتاج المصنع يجب ألا يزيد عن 3,600 قميص في اليوم.

(هـ) بين أي قيمتين يمكن أن يكون عدد القمصان التي ينتجها المصنع يومياً؟

بين أي قيمتين يمكن أن يكون دخل المصنع؟



4. من سلك طوله 60 سم، يضعون إطاراً لصندوق قاعدته مربع.

- (أ) نفرض أن طول ضلع المربع 2 سم.
- احسب ارتفاع الصندوق في هذه الحالة.
(انتبه- كم عدد القطع التي طول الواحدة منها 2 سم في الشكل).
- احسب حجم الصندوق.
(مساحة القاعدة \times الارتفاع = حجم الصندوق).

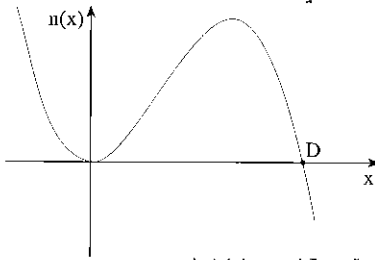
(ب) الدالة $n(x) = 15x^2 - 2x^3$ ، تمثل حجم الصندوق بالسم 3، حيث x يمثل طول ضلع القاعدة.

- جد حجم الصندوق اذا كان $x = 2$. قارن بالجواب في قسم (أ).

نفتش الآن عن أبعاد الصندوق ذي الحجم الأكبر.

- (ج) جد الحجم اذا كان طول ضلع القاعدة 6 سم.
جد الحجم اذا كان طول ضلع القاعدة 3 سم.

(د) أمامك الرسم البياني للدالة $n(x)$.
جد مشتقة الدالة، وجد نقاط القيمة الصغرى والقيمة العظمى.
- أشر الى هذه النقاط على الرسم البياني.



(هـ) أشر بالتقريب الى النقاط التي وجد

(و) سجّل احداثيي النقطة D.

- بين أي قيمتين يمكن أن يكون طول ضلع المربع؟
- بين أي قيمتين يمكن أن يكون حجم الصندوق؟

تمارين

5. معطى مستطيل محيطه 40 سم.

(أ) طول أحد أضلاعه 7 سم. احسب طول الضلع الآخر ومساحة المستطيل.

(ب) ارمز الى طول أحد أضلاع المستطيل بـ x .

- عبّر عن طول الضلع الآخر.

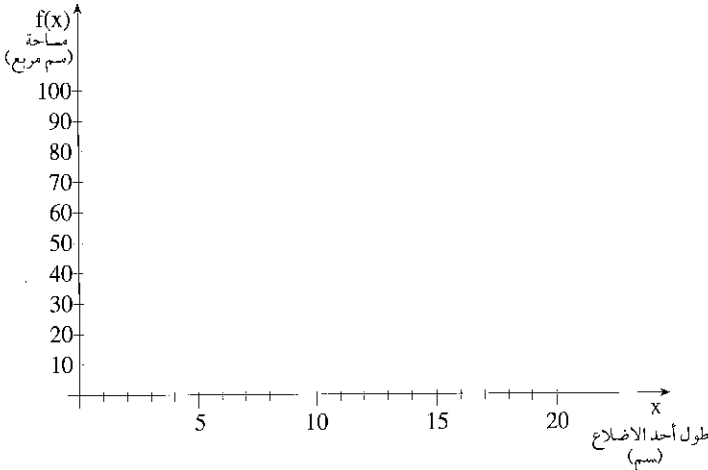
(ج) بيّن أن الدالة التي تناظر لـ x ، مساحة المستطيل هي:

$$f(x) = 20x - x^2$$

(د) جد، بالاستعانة بالدالة، المساحة إذا كان $x = 7$.

قارن بالجواب في القسم أ.

- أشر الى نقاط ملائمة في هيئة المحاور.



(هـ) جد المساحة إذا كان $x = 5$, $x = 12$, وأشر الى النقاط في هيئة المحاور.

(و) جد نقطة القيمة العظمى للدالة.

- أشر اليها في هيئة المحاور.

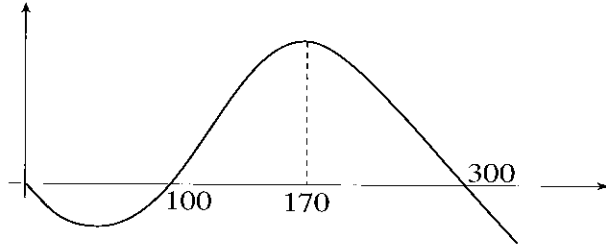
- أكمل تخطيط الرسم البياني للدالة.

- ماذا تمثل احداثيات الرأس بالنسبة للمستطيل ومساحته؟

(ز) - بين أي قيمتين يمكن أن يكون طول المستطيل؟

- بين أي قيمتين يمكن أن تكون مساحة المستطيل؟

6. الرسم البياني الآتي يبيّن دخل صاحب مشتل من بيع X وردة في الاسبوع.



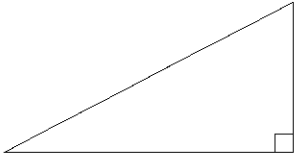
أكتب بالكلمات □

(أ) أية كميات من الورد لا يستحسن بيعها في الاسبوع؟

(ب) أية كميات من الورد يستحسن بيعها في الاسبوع؟

(ج) أية كمية من الورد بيعها في الاسبوع أفضل ما يكون؟ أشر على الرسم البياني.

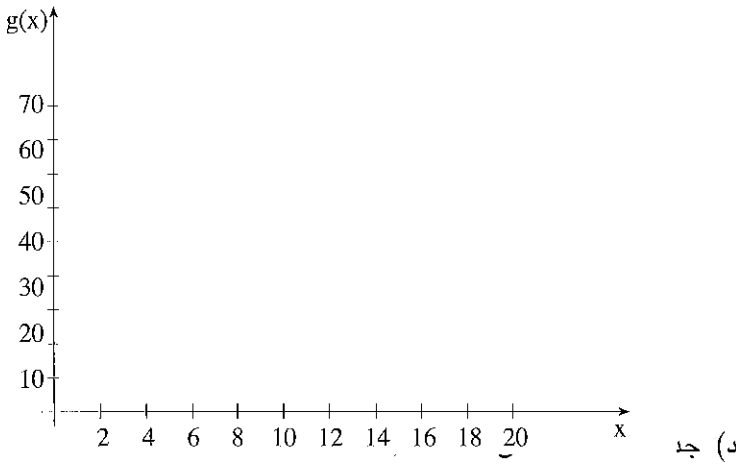
7. في مثلث قائم الزاوية مجموع طولي الضلعين القائمين هو 20.



(أ) طول أحد الضلعين القائمين 12 سم.
احسب طول الضلع القائم الآخر ومساحة المثلث.

(ب) ارمز بـ x لطول أحد الضلعين القائمين.
- عبّر عن طول الضلع القائم الآخر.

(ج) الدالة التي تناظر لـ x مساحة المثلث هي: $g(x) = \frac{1}{2}x(20 - x)$.
- جد مساحة المثلث إذا كان $x = 12$.
قارن بالجواب في القسم أ.
- أشر إلى النقطة في هيئة المحاور.

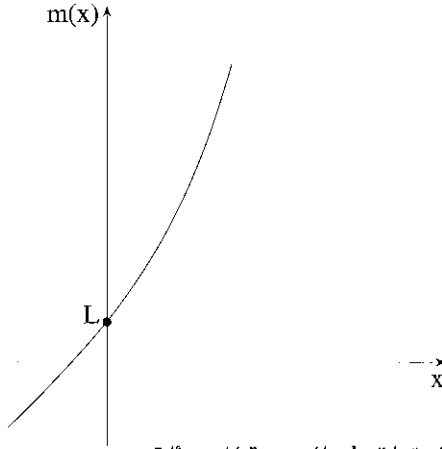


- (د) جد
- أشر إلى هذه النقاط في هيئة المحاور.
(هـ) جد نقطة القيمة العظمى.
- أشر إلى هذه النقطة في هيئة المحاور.
- سجل ماذا تمثل أحداثيات نقطة القيمة العظمى بالنسبة للمستطيل ومساحته.
(و) أكمل تخطيط الرسم البياني للدالة.
8. يصنع نجار x كراس في اليوم.

الدالة $m(x) = 0.01x^2 + 6x + 150$ ، تمثل مصروفات النجار في اليوم الواحد.

(أ) احسب المصروفات في اليوم عندما يصنع 100 كرسي.


(ب) أمامك الرسم البياني للدالة $m(x)$.



– سجل ماذا تعني النقطة L بالنسبة للمسألة.

(ج) سجّل صواباً أم خطأ، وعلّل.

- كلما ازداد إنتاج النجار من الكراسي قلت المصروفات.
- $m(20) = 274$ ، تمثل مصروفات النجار عندما يصنع 20 كرسيًا.
- النقطة $(10, 20)$ تقع على الرسم البياني للدالة.
- x يمكن أن يكون أي عدد أكبر أو يساوي صفرًا.

(د) ما هو أصغر قيمة للربح الذي على النجار أن يربحه حتى يكون صنع 20 كرسيًا في اليوم عملية مجدبة؟ 

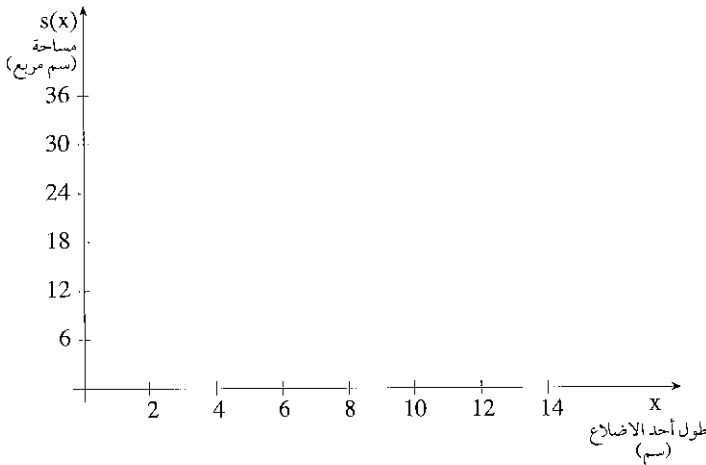
9. معطى مستطيل محيطه 24 سم.

(أ) سجّل أطوال أضلاع مستطيلين مختلفين محيط كل منهما 24 سم.
- احسب مساحة كل من المستطيلين.

(ب) ارمز الى طول أحد الأضلاع بـ x .
- عبّر عن طول الضلع الآخر.

(ج) بيّن أن الدالة التي تناظر لـ x مساحة المستطيل هي $s(x) = 12x - x^2$.

(د) افحص أجوبتك في القسم (أ) بالاستعانة بصورة العدد $s(x)$ ، وأشر الى النقاط في هيئة المحاور.



(هـ) جد المساحة اذا كان: $x = 1$, $x = 8$ ، وأشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور.

- (و) - جد نقطة القيمة العظمى للدالة.
- أشر الى هذه النقطة في هيئة المحاور.
- خطّط الرسم البياني للدالة
- ماذا تمثل احداثيات الرأس بالنسبة للمستطيل ومساحته؟
- (ز) - هل يمكن أن يكون طول أحد أضلاع المستطيل 13 سم؟ علّل.
- بين أي قيمتين يمكن أن يكون طول ضلع المستطيل؟

تمارين اضافية

ايجاد مشتقات دوال.

جد الدالة المشتقة.

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad .1$$

$$f(x) = x^2 + 3x \quad .2$$

$$f(x) = x(x + 3) + 5 \quad .3$$

$$f(x) = (x + 4)(2x - 8) \quad .4$$

$$f(x) = (x + 3)^2 \quad .5$$

$$f(x) = -x^4 + 8x + 2 \quad .6$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad .7$$

$$f(x) = \frac{4x^2 + 8x}{2} \quad .8$$

$$f(x) = 8x + 5 \quad .9$$

$$f(x) = 8 \quad .10$$

$$f(x) = 8x + 5x \quad .11$$

$$f(x) = x^3 + 12 \quad .12$$

$$f(x) = \frac{x^6}{3} \quad .13$$

$$f(x) = x(x - 2)^2 \quad .14$$

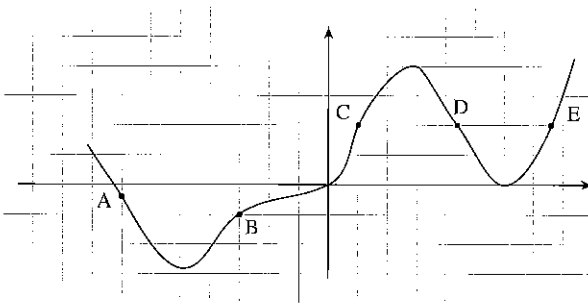


الأجوبة

- (1 $f'(x) = x$ (2,3 $f'(x) = 2x + 3$ (4 $f'(x) = 4x$ (5 $f'(x) = 2x + 6$ (6 $f'(x) = -4x^3 + 8$ (7 $f'(x) = 4x^5 - 2x^3 - x$ (8 $f'(x) = 4x + 4$ (9 $f'(x) = 8$ (10 $f'(x) = 0$ (11 $f'(x) = 13$ (12 $f'(x) = 3x^2$ (13 $f'(x) = 2x^5$ (14 $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$.

التصاعد والتنازل

1. أمامك الرسم البياني لدالة ونقاط أُبرزت عليه.



أ) سجل في أي من النقاط البارزة تكون الدالة تصاعدية وفي أي منها تكون تنازلية؟

ب) سجل المجالات التي تكون فيها الدالة تصاعدية والمجالات التي تكون فيها تنازلية.

2. أ) ارسم الخط البياني لدالة g بحيث تحقق الشروط الآتية:

- تمر في النقطتين $(-1, -2)$ و $(2, -1)$.

- تصاعدية في المجال $x < 0$.

ب) إذا قطع الخط البياني للدالة محور x , فسجل إحداثيات نقاط التقاطع.

3. معطاة الدالة $y = x^4 - 5x$

(أ) سجل الدالة المشتقة.

(ب) هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في النقطة (1,) ؟

4. (أ) معطاة الدالة $f(x) = x^2 + 31$

(ب) سجل في أي مجال تكون الدالة تصاعدية وفي أيها تكون تنازلية.

5. معطاة الدالة $f(x) = x^3 + 8x$

(أ) سجل الدالة المشتقة $f'(x)$.

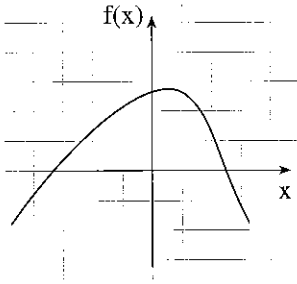
(ب) جد ميل الدالة في النقاط التي يكون فيها $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$.

(ج) قرر هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في كل نقطة من هذه النقاط.

(د) حاول ان تفسر كون هذه الدالة تصاعدية لكل x .



6. أمامك الرسم البياني للدالة $f(x)$



(أ) سجل المجال الذي يكون فيه ميل الدالة موجباً.

(ب) سجل المجال الذي يكون فيه ميل الدالة سالباً.

(ج) سجّل $>$, $<$. $f'(-4)$ _____ $f'(-1)$

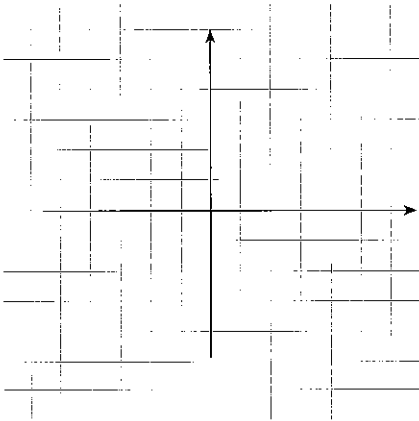
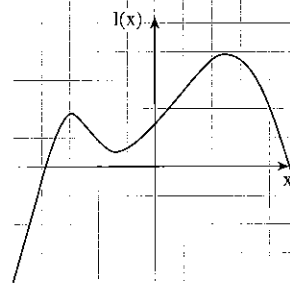
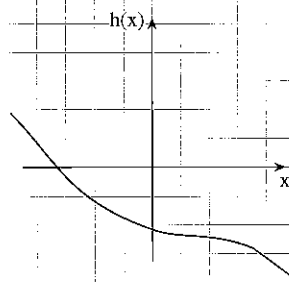
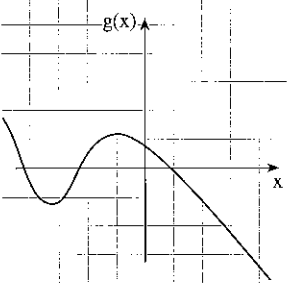
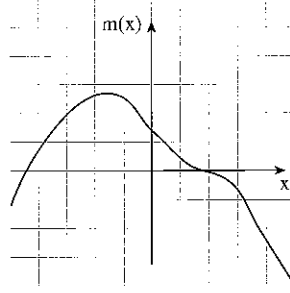
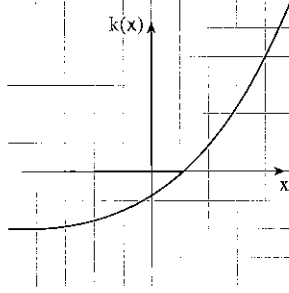
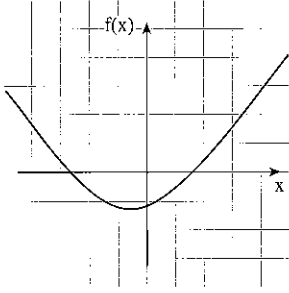
$f'(1)$ _____ $f'(2)$

$f'(1)$ _____ $f'(-2)$

النقاط القصوى وبحث الدالة

1. أمامك الرسوم البيانية لدوال.

أشـر، على الرسوم البيانية، إلى النقاط القصوى (إذا وُجـدت) واذكر إذا كانت هذه النقاط نقاط قيمة صغرى أم عظمى.



2. ارسم الخط البياني لدالة g , بحيث

تحقق جميع الشروط الآتية:

- للدالة نقطتا قيمة قصوى فقط

. $(3, -2)$, $(-2, 3)$

- ونقطة قيمة صغرى واحدة

. فقط $(2, -5)$

- الخط البياني للدالة يمر في

نقطة الأصل.

3. معطاة الدالة $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$

(أ) سجل الدالة المشتقة.

(ب) جد نقاطاً "حرجة"، وأشر إليها في هيئة محاور.

(ج) جد نوع النقاط "الحرجة".

(د) خَطِّط الرسم البياني للدالة.

4. معطاة الدالة $g(x) = x(2 - x) + 7$

(أ) سجِّل الدالة المشتقة.

(بسِّط أولاً).

(ب) جد نقاطاً "حرجة"، وأشر إليها في هيئة محاور.

(ج) جد نقاط تقاطع الدالة مع المحورين، وأشر الى هذه النقاط في هيئة المحاور.

(د) جد، اذا كان ذلك ضرورياً، احداثيات نقاط أخرى، وبين نوع النقاط "الحرجة".

(هـ) خَطِّط الرسم البياني للدالة.

5. معطاة 3 دوال.

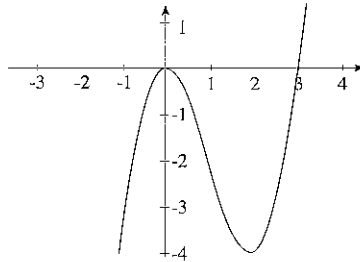
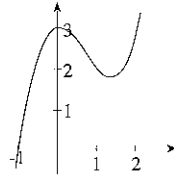
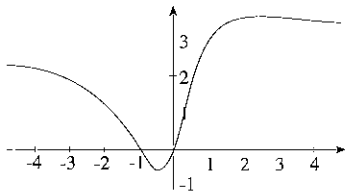
$$g(x) = \frac{3x^2 + 3x}{x^2 + 1}$$

$$h(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$

(أ) جد نقطة تقاطع كل دالة مع محور y .

(ب) أتمامك الرسوم البيانية للدوال الثلاث المذكورة أعلاه.
هل تستطيع أن تلائم لكل رسم الدالة التي يمثلها؟
حاول قدر المستطاع.

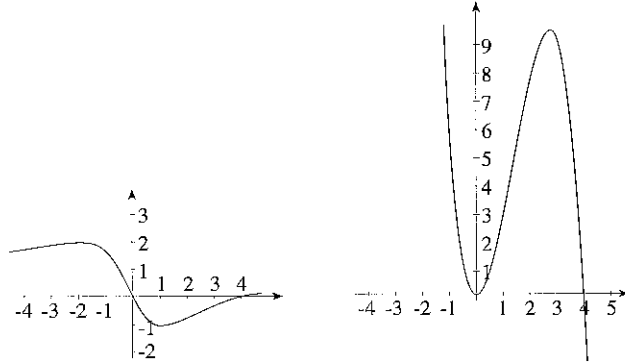


(ج) جد نقاط تقاطع $h(x)$ و $g(x)$ مع محور x .

(د) أكمل ملاءمة الرسوم للدوال التي تمثلها.

6. أمامك الرسوم البيانية للدوال.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}, \quad g(x) = -x^3 + 4x^2$$



حاول أن تلائم لكل دالة رسمها البياني.
(اذكر، على الأقل، سببين لجوابك).

الميل والمماس

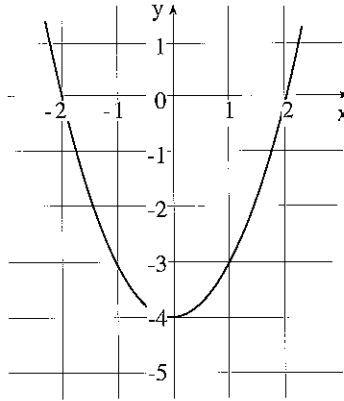
1. معطاة الدالة $f(x) = x^4 - 2$

أ) أكمل الاحداثي الناقص للنقطة $M(1, \underline{\quad})$ الواقعة على الرسم البياني للدالة.

ب) جد المشتقة، وجد ميل المماس للدالة في النقطة M .

ج) جد معادلة المماس في النقطة M .

2. معطاة الدالة $y = x^2 - 4$

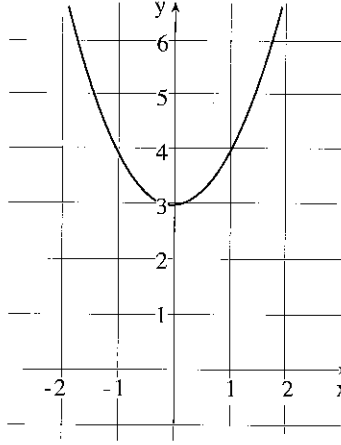


أ) جد الدالة المشتقة، وجد ميل المماس في النقطة $A(1, \underline{\quad})$.

ب) جد معادلة المماس في النقطة A .

ج) ارسم مماساً للدالة في النقطة A ، وافحص اذا كانت المعادلة التي كتبتها في القسم ب ملائمة له.

3. معطاة الدالة $y = x^2 + 3$



(أ) ضع مستقيماً، وحاول أن تجد نقطة على الدالة يساوي ميل المماس فيها 2.

(ب) جد مشتقة الدالة.

(ج) في النقطة التي وجدتها $2x = \boxed{2}$ ما هما احداثيا النقطة؟ قارن بالقسم أ. 