

דניאל שמיר

חיים אבירי

טריגונומטריה

בהתאם לתכנית הלימודים
של ארבע או חמש יחידות לימוד



הוצאת "חדוש" בע"מ תל-אביב

דניאל שמיר

חיים אבירי

טריגונומטריה

בהתאם לתכנית הלימודים

של ארבע או חמש יהודות לימוד



הוצאת „חידוש“ בע"מ תל-אביב

הקדמה

בשנת 1962, בו יצא לאור לראשונה הספר "טריגונומטריה", לא נודע כלל השימוש במחשב-כיס בקרב תלמידי המדינה, והם ערכו את חישוביהם הטריגונומטריים באמצעות לוחות הלוגריתמים בלבד. עתה, כשבידי כל תלמיד מצוי מחשב כיס, ובטל השימוש בלוחות, נתעורר הצורך בשינוי משמעותי של הספר, בכדי להתאימו למציאות החדשה.

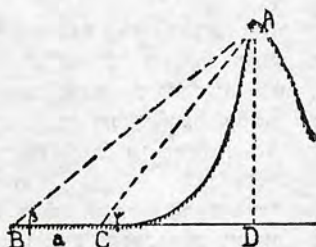
בהזדמנות זו, של הוצאת עבוד חדש של הספר הקודם, צירפנו לספר תרגילים נוספים, חלקם עקב הנסיונות, השולטות לאחרונה בשאלוני בחינות-הבגרות, וחלקם עקב ערכם העצמי של בעיות ותרגילים אלה בפיתוח החשיבה המתמטית, וכן בגלל השינויים בתוכנית הלימודים, שחלו מאז הופעת הספר הקודם.

מאחר והספר מיועד לתלמידים הלומדים במסלולים של 4 ושל 5 יחידות-לימוד, הרי שהמורה, המלמד את המסלול הנמוך יותר, חייב לקבוע באילו בעיות ותרגילים עליו להתרכז, ועל אילו נושאים, או סעיפים לדגל בכלל — הכל בהתאם לרמת הכיתה ויכולת תלמידה. אנו מקווים, כי הספר החדש יתאים לצורכי תלמידי בתי הספר התיכוניים, לנבחנים החיצוניים, ולמתכוננים לבחינות כניסה, מיון וקונקורס לבתי ספר גבוהים, וכל אלה יפיקו ממנו את התועלת המירבית.

המחברים

מבוא

הטריגונומטריה משמשת בעיקר לחישוב אורכי קטעים וחזיות בעזרת נתונים מספיקים (כגון שתי צלעות וחזוית הכלואה ביניהן במשולש), ועל כן הגה אמצעי עזר עיקרי במדעים רבים. נזכיר כאן כדוגמאות בולטות את השימוש בטריגונומטריה באסטרונומיה, בגיאוגרפיה, בגיאודזיה (מדידת קרקעות) ובענפים רבים של הפיסיקה. נדגים את השימוש בטריגונומטריה כדוגמה אחת, אשר תבהיר את הצורך בחשובים טריגונומטריים.



קל להבין שאין אפשרות ישירה למדידת גובהו של הר מעל מישור. על מנת למצוא את גובה ההר AD אפשר להתבונן בפסגת ההר A מנקודה B במישור, ולקבוע, בעזרת מד-זווית מיוחד, את הזווית β , בה נראית פסגת ההר. אח"כ אפשר להתקרב a מטרים אל ההר (עד לנקודה C) ולקבוע את הזווית γ , בה נראית פסגת ההר ממקום התצפית החדש.

שלושת המספרים γ, β, a קובעים את המשולש ABC (לפי משפט החפיפה השני), ועל כן אפשר לצייר קטע a מוקטן לפי קנה מידה מתאים ולבנות לידו את הזווית β ו- $(180^\circ - \gamma)$. אם מורידים את האנך AD להמשך הצלע a מן הקודקוד A, אפשר למדוד את אורך האנך AD ולחשב את גובה ההר לפי קנה המידה על פיו שרטט הקטע a.

השיטה הגיאומטרית המתוארת לעיל אינה מאפשרת קבלת תוצאות מדויקות בגלל מידת הדיוק המוגבלת בשרטוט, ועל כן מחליפים שיטה זו בשיטת חישוב טריגונומטרית. המאפשרת חישוב הגובה AD במידת דיוק רצויה לנו. מקצוע הטריגונומטריה עוסק בשיטות חישוב מסוג זה.

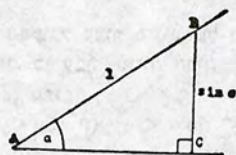
פירוש השם "טריגונומטריה" הוא מדידת משולשים. ואכן נפתרות רוב הבעיות ע"י פירוק הצורות הגיאומטריות למשולשים, וחישוב הצלעות והזוויות במשולשים אלה.

פרק א'

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות חדות. התרת משולשים ישרי זווית

א. 1. סינוס של זווית חדה.

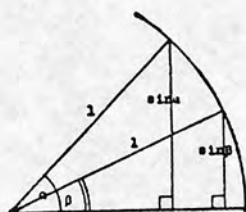
אם נקצה על שוק אחת של זווית חדה α (החל מקודקוד הזווית A) קטע AB שאורכו יחידה אחת (ראה ציור א.1), ונוריד



ציור א.1.

מהקצה B אנך BC לשוק, השניה — יהיה אורך אנך זה תלוי בגודל הזווית α . קל להוכיח שככל שהזווית α גדולה יותר, כן

גדול יותר אורך האנך BC, וככל שהזווית α קטנה יותר, כן אורך האנך BC קטן יותר (העזר בציור א.2.) אורך אנך זה הוא איפוא



ציור א.2.

פונקציה של הזווית α — אחת הפונקציות הטריגונומטריות בהן נעסוק בספר זה. אם נתונה זווית (חדה) α נוכל לבנות בנקל את האנך BC ולמדוד את אורכו, וכן נוכל לבנות את הזווית α אם נתון אורך האנך BC. אחר הקדמה זו לא קשה להבין את

ההגדרה: סינוס של זווית חדה נמדד על פי אורך האנך המורד מנקודה על שוק הזווית, במרחק יחידת אורך אחת מהקודקוד, על השוק השני.

הסימן המתימטי המקובל עבור סינוס של זווית α הוא $\sin \alpha$. ברור מן ההגדרה לעיל, כי עבור זוויות הדות α הערך של $\sin \alpha$ הוא מספר חיובי, הקטן מ-1;

$$0 < \sin \alpha < 1 \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

הסינוסים של זוויות חדות חושבו (בשיטה שהסברה חורג ממסגרת ההסברים של ספר זה) וערכיהם רשומים בלוחות של הפונקציות הטריגונומטריות אשר מצורפים לרוב ללוחות לוגריתמים. מכיוון שערכי הסינוסים קטנים מאחד, רשומים בלוחות רק הספרות אחר הנקודה העשרונית, באשר ברור שלפני הנקודה העשרונית כתובה הספרה 0.

תרגילים:

- א.1. הוכח בעזרת הציור א.2, כי אם $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$ הרי $\sin \alpha > \sin \beta$
- א.2. הוכח: אם $0^\circ < 2\beta < \alpha$ הרי $\sin \alpha < 2 \sin \beta$
- א.3. מצא בעזרת משפטים הנדסיים את הערכים המספריים של $\sin 30^\circ$ (א) $\sin 45^\circ$ (ב) $\sin 60^\circ$ (ג)
- א.4. הוכח שאם α ו- β זוויות חדות וגם $\alpha + \beta$ זווית חדה, הרי $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$
- א.5. אם α ו- β זוויות חדות, $\alpha > \beta$, הוכח כי $\sin(\alpha - \beta) > \sin \alpha - \sin \beta$
- א.6. אם α זווית חדה, הוכח כי $\sin \alpha < 2 \sin \frac{1}{2}\alpha$
- א.7. אם α זווית חדה (הנמדדת במעלות) ו- n מספר טבעי, הוכח כי $\sin \alpha < n \sin(\alpha/n) < \pi\alpha/180$ (היעזר בתרגיל א.4.)



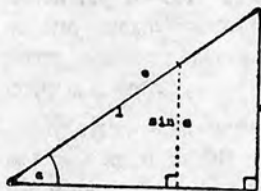
על מנת שנוכל להעזר בפונקציה סינוס, לשם חישוב צלעות חזויות במשולשים, נוכיח מספר משפטים.

משפט 1: במשולש ישר זווית — סינוס של זווית חדה שווה ליחס בין אורך הניצב מול הזווית לבין אורך היתר.

הוכחה: (ראה ציור א.3.) אם נקצה על היתר c של המשולש ישר הזווית (או על המשכו) קטע שאורכו יחידה אחת.

ונוריד אנך מקצה הקטע על הנניצב ליד הזווית α , יהיה אורך ניצב זה (לפי התגדרה לעיל) שווה ל- $\sin \alpha$. כיון שהמשולש שנוצר ע"י הורדת האנך דומה למשולש הנתון (היות וזוויות המשולשים שוות בהתאמה), הרי צלעות המשולש פרופורציוניות, ולפיכך:

$$\sin \alpha : a = 1 : c \quad (1.1.א)$$



ציור א.3.

לכן:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\alpha \text{ מול יתר}}{\text{יתר}} \quad (2.1.א)$$

הנוסחה האחרונה יכולה גם לשמש בתור הגדרה אחרת של הפונקציה סינוס:

הגדרה: סינוס של זווית חדה במשולש ישר זווית נמדד על פי היחס בין אורך הניצב מול זווית זו לבין אורך היתר.

מן הנוסחה (1.1.א) מתקבלות (ע"י העברה מאגף לאגף) גם הנוסחות

$$a = c \cdot \sin \alpha \quad (3.1.א)$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (4.1.א)$$

שאפשר לנסחן במלים בצורת

משפט 2: ניצב במשולש ישר זווית שווה למכפלת היתר בסינוס הזווית מול הניצב, ואורך היתר במשולש ישר זווית שווה לאורך ניצב המשולש מחולק בסינוס הזווית מול ניצב זה.

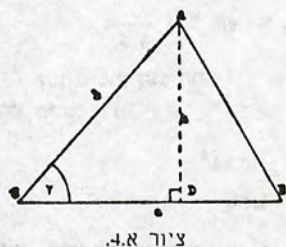
אחד השימושים החשובים בפונקציה סינוס מובע

במשפט 3: שטחו של משולש ניתן לחישוב על פי מחצית מכפלת שתי צלעות המשולש בסינוס הזווית הכלואת ביניהן. בנוכחה מתקבלת:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad (5.1.א)$$

הערה: נזכיר את המשפט כאן בהנחה שהזווית γ חדה. המשפט נכון גם כאשר זווית זו אינה חדה — אך הוכחתו במקרה זה שונה במקצת, והקורא יוכל להשלימה בנקל, אתר שילמד את הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות שאינן חדות. בסעיף 4.א. להלן.

הוכחה: ראה ציור (4.א). מהנדסת המישור ידוע, כי $S = \frac{1}{2} ab$ מקום שם h הוא גובה המשולש המורד על הצלע a . לפי משפט 1 לעיל לגבי המשולש ישר הזווית ACD ידוע, כי $h = b \sin \gamma$ ועל כן



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad (5.1.3)$$

להלן מספר דוגמות לחישוב
 בים טריגונומטריים, אשר נערכים
 כרגיל בעזרת לוגריתמים.

דוגמות:

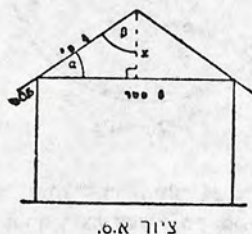
- (i) אורכו של סולם 4.25 מ'. עד
 לאיזה גובה מגיע סולם זה אם
 הוא נשען אל קיר זקוף, ויוצר זווית בת 75° על הקרקע האופקית?
 התרה: (צ'ור א. 5.) לפי משפט 2 הגובה המבוקש הוא:



$$x = 4.25 \sin 75^\circ$$

$$x = 4.10$$

- (ii) רוחבו של צריף 6 מ'. אורך הקרשים המשמשים לבניית הגג
 המשופע (ראה צ'ור א. 6.) הוא 4 מ' וקרשים אלה בולטים 0.5 מ'
 מעבר לקצה הגג. מצא את שיפוע הגג (α) ואת גובהו ($\times$).
 התרה: היות והגובה $\times$ במשולש שווה שוקיים חוצה את
 בסיס המשולש. הרי:



$$\beta = 59^\circ \leftarrow \sin \beta = \frac{1}{3.5}$$

לכן שיפוע הגג הוא $\alpha = 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ$
לפי משפט 2:

$$x = 3.5 \cdot \sin 31^\circ$$

$$x = 1.80 \text{ מ'}$$

(iii) מצא את שטחו ואת היקפו של מצולע משוכלל בעל 12 צלעות
החסום במעגל, שמחוגו 15 ס"מ.

התרה: (ראה ציור א.7) אם נסמן את צלע המצולע ב- a
ואת מחוג המעגל ב- R , הרי

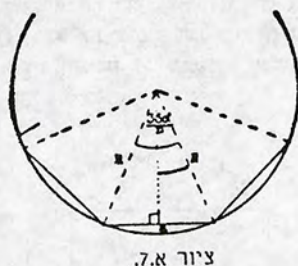
$$\frac{a}{2} = R \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$$

ולפיכך יהיה היקף המצולע

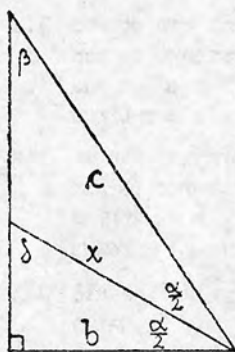
$$H = na = 12 \cdot 30 \cdot \sin 15^\circ = 93.17 \text{ ס"מ}$$

כמו כן, אם נסמן ב- S_Δ את השטח של אחד המשולשים הנוצרים
על ידי קישור קודקודי המצולע עם מרכז המעגל, הרי שטח המצולע
יהיה

$$S = n \cdot S_\Delta = n \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15^2 \cdot \sin 30^\circ = 675 \text{ סמ"ר}$$



(iv) במשולש ישר זווית אורך היתר 34 ס"מ ואורך ניצב אחד
26 ס"מ. מצא את אורך חוצה הזווית בין שתי הצלעות הנגזל.



התרה: (ראה ציור א.8.)

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{26}{34}$$

$$\beta = 49^{\circ}53'$$

$$\alpha = 40^{\circ}7'$$

$$\frac{\alpha}{2} = 20^{\circ}3'$$

$$\delta = 69^{\circ}57' \quad \text{ציור א.8.}$$

לכן אפשר למצוא את אורך הוצה הזווית x בעזרת משפט 2:

$$x = \frac{b}{\sin \delta} = \frac{26}{\sin 69^{\circ}57'}$$

$$x = 27.68 \text{ ס"מ}$$

תרגילים:

8. א. להלן נתונים היתר c והזווית החדה α של משולש ישר זווית. מצא את הניצבים של המשולש בצורה כללית, ואח"כ הצב.

$$\alpha = 67^{\circ} \quad c = 23.4 \text{ ס"מ} \quad \text{(א)}$$

$$\alpha = 26^{\circ}34' \quad c = 5.678 \text{ ס"מ} \quad \text{(ב)}$$

9. א. במשולש ישר זווית נתון הניצב a, והזווית החדה α הנמצא מולו. מצא את אורך היתר, את אורך הניצב השני והצב

$$\alpha = 25^{\circ} \quad a = 10 \text{ מ' } \quad \text{(א)}$$

$$\alpha = 36^{\circ}12' \quad a = 23.57 \text{ מ' } \quad \text{(ב)}$$

10. א. במשולש ישר זווית נתון אחד הניצבים a, והיתר c. מצא את הזווית החדות של המשולש ואת הניצב השני.

$$c = 12 \text{ ס"מ} ; a = 3.5 \text{ ס"מ} \quad \text{(א)}$$

$$c = 6.789 \text{ מ' } ; a = 0.246 \text{ מ' } \quad \text{(ב)}$$

11. במשולש שווה שוקיים נתון אורך הבסיס a , ואורך השוק b .
מצא את זוויות המשולש
(א) $a = 8$ מ' ; $b = 13$ מ'
(ב) $a = 6.17$ מ' ; $b = 5.28$ מ'
12. במשולש שווה שוקיים נתון אורך השוק b , חזוית הראש α
מצא את בסיס המשולש, את שטחו, והצב.
(א) $b = 15$ ס"מ ; $\alpha = 20^\circ$
(ב) $b = 2.69$ מ' ; $\alpha = 35^\circ 36'$
13. מצא את שטח המשולש ע"פ שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן
(א) 6.8 ס"מ ; 14.5 ס"מ ; $39^\circ 51'$
(ב) 10.64 ס"מ ; 26.53 ס"מ ; $68^\circ 11'$
14. בעיגול רשום מיתר, שאורכו a . מהו מחוג העיגול, אם הזווית המרכזית השייכת למיתר זה היא α ?
(א) $a = 9.24$ מ' ; $\alpha = 52^\circ 28'$
(ב) $a = 13.7$ מ' ; $\alpha = 108^\circ 14'$
15. מהו אורך המיתר בעיגול שמחוגו R אם הזווית המרכזית השייכת למיתר זה היא α
(א) $R = 7.52$ ס"מ ; $\alpha = 56^\circ 14'$
(ב) $R = 21.8$ ס"מ ; $\alpha = 136^\circ 16'$
16. בעיגול שמחוגו R רשום מיתר, שאורכו a . מצא את הזווית ההיקפית הנשענת על המיתר הזה, במקטע הגדול.
(א) $R = 6.08$ ס"מ ; $a = 3.82$ ס"מ
(ב) $R = 25.64$ ס"מ ; $a = 48.96$ ס"מ
17. מיתר שאורכו 15 ס"מ חותך מעיגול, שמחוגו 9 ס"מ, מקטע. מהו שטח המקטע הזה ?
18. מיתר שאורכו 5 ס"מ וחתך מעיגול, שמחוגו 7 ס"מ, מקטע. מהו היקף המקטע הזה ?
19. נתון מחוג המעגל המקיף משולש, ושתיים מזוויותיו. מצא את צלעות המשולש ואת שטחו.
(א) 15.3 ס"מ ; 48° ; 64°
(ב) 6.14 ס"מ ; $36^\circ 10'$; $54^\circ 54'$

20. א. מצא את היקפו ואת שטחו של מצולע משוכלל, בעל n צלעות, החסום במעגל שמחוגו
 א) $R = 12$ ס"מ ; $n = 5$
 ב) $R = 2.56$ ס"מ ; $n = 3$
 ג) $R = 36.5$ מ' ; $n = 12$
 ד) $R = 8.64$ מ' ; $n = 13$
21. א. מצא את שטח המצולע המשוכלל ע"פ היקפו H ומספר צלעותיו n
 א) $H = 72$ ס"מ ; $n = 6$ ג) $H = 68.5$ ס"מ ; $n = 20$
 ב) $H = 354.2$ ס"מ ; $n = 10$ ד) $H = 128.4$ ס"מ ; $n = 27$
22. א. מנקודה, שמרחקה ממרכז עיגול d רואים את העיגול בזווית α . מהו מחוג העיגול?
 א) $d = 8$ ס"מ ; $\alpha = 68^\circ$ ב) $d = 17.3$ ס"מ ; $\alpha = 163^\circ$
23. א. מנקודה שמרחקה ממרכז מעגל d , יוצאים שני משיקים למעגל. אורך כל אחד מהם t . מהי הזווית בין המשיקים?
 א) $d = 6$ ס"מ ; $t = 5.5$ ס"מ
 ב) $d = 48.2$ מ' ; $t = 31.6$ מ'
24. א. מצא שטחה של מקבילית שצלעותיה a ו- b , והזווית החדה שביניהן היא γ . הצב:
 א) $a = 10$ ס"מ ; $b = 18$ ס"מ ; $\gamma = 30^\circ$
 ב) $a = 0.84$ מ' ; $b = 0.67$ מ' ; $\gamma = 65^\circ 26'$
25. א. שטחו של מלבן הוא S והזווית בין אלכסוניו היא φ . מצא את צלעות המלבן.
 א) $S = 156$ סמ"ר ; $\varphi = 30^\circ$
 ב) $S = 10.7$ מ"ר ; $\varphi = 40^\circ$
26. א. אלכסונו של מלבן הוא k . הזווית שבין אלכסוני המלבן היא ε . מצא את צלעות המלבן ואת שטחו.
 א) $k = 33$ ס"מ ; $\varepsilon = 60^\circ$
 ב) $k = 7.25$ מ' ; $\varepsilon = 32^\circ 18'$
27. א. צלע המעוין היא 8.54 ס"מ, ואורך אחד האלכסונים 6.37 ס"מ. מצא את זוויות המעוין ואת שטחו.

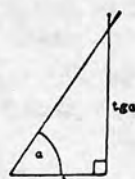
28. א. במשולש ישר זווית אחד היציבים 7 ס"מ ואורך היתר 25 ס"מ. מצא את אורך חוצה הזווית שביניהם.
29. א. השוק בטרפז שווה שוקיים היא 13 ס"מ, הבסיס הגדול 40 ס"מ, והזווית שביניהם $67^{\circ}23'$. מצא את שטח הטרפז.
30. א. בטרפז ישר זווית אורך השוק הארוכה וגם אורך הבסיס הגדול 20 ס"מ. הזווית ביניהם היא $53^{\circ}8'$. מצא את שטח הטרפז.
31. א. טרפז ישר זווית חוסם מעגל שמחוגו 4 ס"מ. הזווית הקהה של הטרפז היא $151^{\circ}56'$. מהו שטח הטרפז?
הדרכה: העזר במשפט על דבר מרובע חוסם מעגל.
32. א. הזוויות הבלתי שוות של הדלתון הן $123^{\circ}52'$, $73^{\circ}44'$, ואורך האלכסון המחבר את קודקודי הזוויות השוות הוא 28 ס"מ. מצא את צלעות הדלתון ואת שטחו.
33. א. על כל אחת מצלעות הריבוע בנו, מחוץ לריבוע, משולש שווה צלעות, וחברו את ארבעת הקודקודים של המשולשים האלו. כך שנוצר ריבוע שני, גדול יותר. הוכח: כי יחס השטחים של שני הריבועים הוא $4 \sin^2 75^{\circ}$.
34. א. שטחו של משולש שווה שוקיים הוא S. זווית הראש שלו היא α . מצא את אורך השוק ואת אורך הבסיס של המשולש.
35. א. היקפו של מעגל הוא P. מהו שטח המצולע המשוכלל בעל n צלעות החסום במעגל זה, ומהו היקף המצולע הזה?
36. א. מצולע משוכלל בעל n צלעות חוסם מעגל, וחסום במעגל שני. מצא את יחס היקפיהם של שני המעגלים ואת יחס שטחיהם.
37. א. שטחו של מעגל הוא S. מהו שטחו של מצולע משוכלל בעל n צלעות, החסום במעגל הזה?
38. א. הוכח, כי שטח המקטע, השייך לקשת בת α° במעגל, שמחוגו R הוא $R^2 \left(\frac{\pi \alpha}{180^{\circ}} - \sin \alpha \right)$.
39. א. מחסן, שרוחבו 3.5 מ' כוסה בגג רעפים. שיפועו $37^{\circ}10'$. מצא את אורך הקרשים הדרושים לתמיכת הגג, וכן בכמה גבוה הקצה האחד של הגג מעל קצהו השני.

40. א. ארכו של כביש 2250 מ' ושיפועו 17° . מה יהיה ארכו של כביש זה על מפה בעלת קנה מידה של 1:20000?
41. א. בתוך גיורת עיגול, שמחוגו R , ובעלת זווית α , חסום עיגול הנוגע במחוגי הגיורת ובקשתה. הבע את מחוג העיגול השני r בעזרת R ו- α , וחשב את יחס שטחי העיגול והגיורת, אם הזווית α שווה (א) 60° (ב) 90° (ג) 120° (ד) 180°
42. א. בסיסו של משולש שווה שוקיים הוא 20 ס"מ, והמרחק בין מרכז המעגל החסום בו ובין קודקוד הבסיס 13 ס"מ. חשב את אורך שוק המשולש.

א. 2. הגדרת הפונקציה טנגנס עבור זוויות חדות.

במקרים בהם נתונים הניצבים במשולש ישר זווית — אל שנתון ניצב אחד וזווית חדה במשולש ישר זווית, ומבוקש אורך הניצב השני — לא נוח להשתמש בפונקציה סינוס שהוגדרה בסעיף הקודם, ועל כן משתמשים בפונקציה טריגונומטרית נוספת — טנגנס.

הגדרה: טנגנס של זווית חדה α (בסימנים מתימטיים $\tan \alpha$ או $\operatorname{tg} \alpha$) נמדד על פי הקטע הנחתך על ידי שוק אחת מהאנך לשוק השניה המוועלה מנקודה על השוק השניה, המרוחקת יחידת אורך אחת מהקודקוד (ראה ציור א.9).



ציור 9.א.

מהגדרה זו נובע, כי עבור זוויות חדות קיימת התכונה הבאה של פונקציה טנגנס: אם זווית אחת גדולה מחברתה, גם טנגנס זווית זו גדול מטנגנס הזווית השניה.

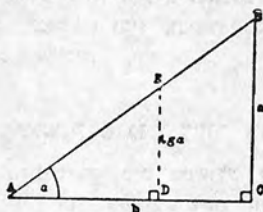
ערכי הפונקציה טנגנס עבור זוויות חדות, וכן ערכי הלוגריתם מוס טנגנס רשומים בלוחות המסוירים בצורה דומה מאוד ללוחות

הסינוס ולוגריתמוס סינוס, ועל כן כל הנאמר על השימוש בלוחות הסינוס ולוגריתמוס סינוס מתאים גם לשימוש בלוחות טנגנס ולוגריתמוס טנגנס.

נוכיח עתה מספר משפטים הנחוצים לניצול יעיל של הפונקציה טנגנס.

משפט 4: במשולש ישר זווית – הטנגנס של זווית חדה בו שווה ליחס בין הניצב מול זווית זו ובין הניצב הסמוך לאותה זווית.

הוכחה (ראה ציור א.10) נקצה על הניצב b קטע AD , שאורכו יחידה אחת. ונעלה אנך DE לניצב זה בנקודה D . לפי הגדרת הטנגנס של הזווית α : $\tan \alpha = \operatorname{tg} \alpha = DE : AD$ אולם מדמיון המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADE$ (השווים בזוויותיהם) נובע:



ציור 10.א

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1} = \frac{a}{b} \quad (1.2.א)$$

או בצורה אחרת

$$\tan \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{ניצב מול } \alpha}{\text{ניצב סמוך ל-}\alpha} \quad (2.2.א)$$

בזה הוכח משפט 4, אשר מהווה למעשה הגדרה אחרת של הפונקציה טנגנס.

הגדרה: טנגנס של זווית חדה במשולש ישר זווית שווה ליחס בין הניצב מול זווית זו ובין הניצב הסמוך לאותה זווית.

מן הנוסחה (1.2.א) אפשר להסיק גם, כי

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} ; a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.2.א)$$

דבר שאפשר להביעו במלים כדלהלן:

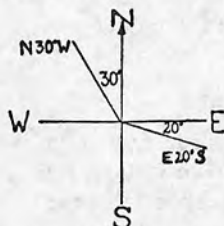
משפט 5: ניצב במשולש ישר זווית שווה למכפלת הניצב השני בטנגנס הזווית הנמצאת מול הניצב המבוקש, או למנת הניצב השני בטנגנס הזווית הסמוכה לניצב המבוקש.

נגדיר עוד מספר מושגים חשובים המופיעים בניסוח של בעיות טריגונומטריות רבות — הרי הם המושגים: „זווית גובה” ו-„זווית עומק”, „זווית ראייה” וציוני כיוון.

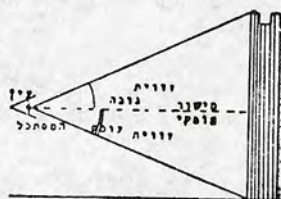
„זווית גובה” בה נראית נקודה אחת מנקודה נמוכה הימנה היא הזווית בין קו הראייה לבין מישור אופקי העובר דרך עין המסתכל (ראה ציור א. 11)

„זווית עומק” בה נראית נקודה אחת מנקודה הגבוהה ממנה היא הזווית בין קו הראייה לבין מישור אופקי העובר דרך עין המסתכל.

„זווית הראייה” של עצם, היא הזווית הגדולה ביותר הנוצרת בין קווי ראייה אל נקודות קיצוניות של הגוף (למשל הזווית בין קו הראייה אל ראש המגדל לבין קו הראייה אל בסיס המגדל בציור 11.א.).



ציור 12.א



ציור 11.א

כוונים אופקיים מציינים בדרך כלל בעזרת שתי אותיות ומספר ביניהן. לדוגמה: $N 30^\circ W$ (קרי: 30° מערבית מצפון) פירושו: יש לסטות מכיוון הצפון בזווית בת 30° לצד מערב. או: $E 20^\circ S$ (קרי: 20° דרומית ממזרח) פירושו: יש לסטות מכיוון המזרח בזווית בת 20° לצד דרום (ראה ציור א. 12).

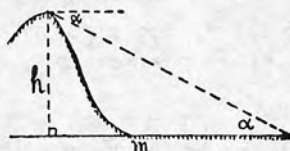
והרי כמה דוגמות לחישובים בעזרת הפונקציה טנגנס:

(I) ניצבי משולש ישר זווית הם 3.54 ס"מ ו-8.32 ס"מ. מהם זוויות המשולש?
פתרון:

$$\alpha = 23^\circ 3' \leftarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3.54}{8.32}$$

$$\wedge \quad \beta = 90^\circ - \alpha = 66^\circ 57' \quad \gamma = 90^\circ$$

(ii) מבדיקת תצלום אווירי נתברר שהמרחק האופקי בין נקודת תצפית על ראשו של הר לבין גשר קטן לרגלי ההר הוא 3 ק"מ. הגשר נראה מנקודת התצפית על ההר בזווית עומק של $7^{\circ}15'$. נכמה גבוהה נקודת התצפית מהגשר?
פתרון: (ראה ציור א.13)



ציור א.13.

$$h = m \operatorname{tg} \alpha = 3000 \operatorname{tg} 7^{\circ}15' = 381.6 \text{ מ'}$$

תרגילים:

א.43. הוכח בעזרת משפטים הנדסיים: (א) אם $0^{\circ} < \alpha < \beta < 90^{\circ}$,

הרי $\tan \alpha < \tan \beta$.

(ב) אם $0^{\circ} < \alpha = 2\beta < 90^{\circ}$, הרי $\tan \alpha > 2 \tan \beta$.

א.44. מצא בעזרת משפטים הנדסיים את הטנגנסים של הזוויות

(א) 30° (ב) 45° (ג) 60°

א.45. הוכח בעזרת משפטים הנדסיים, כי אם α זווית חדה, ומקימת

$$\tan \alpha = 0.75, \text{ או } \tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2},$$

א.46. הוכח בעזרת המשפט הגיאומטרי ע"ד חוצה זווית במשולש,

המחלק את הצלע הנגדית ביחס שתי הצלעות הכולאות את

הזווית החצויה, כי אם α זווית חדה שעבורה $\tan \alpha = 0.5$,

$$\tan 2\alpha = 4/3 \text{ הרי}$$

א.47. הוכח שאם α, β וגם $\alpha + \beta$ זוויות חדות, הרי

$$\tan(\alpha + \beta) > \tan \alpha + \tan \beta$$

א.48. הוכח בעזרת משולש ישר זווית שאחת מזוויותיו החדות

היא α , כי

$$(\sin \alpha)^2 + [\sin(90^{\circ} - \alpha)]^2 = 1$$

א.49. הוכח בעזרת משולש ישר זווית שאחת מזוויותיו היא α , כי:

$$[1 + (\tan \alpha)^2] \cdot [1 - (\sin \alpha)^2] = 1$$

א.50. הניצבים של משולש ישר זווית הם 12 ס"מ ו-35 ס"מ. מצא את סינוס הזווית הקטנה ביותר במשולש, ואת טנגנס הזווית החדה הגדולה ביותר.

א.51. במשולש ישר זווית נתונים הניצב a , והזווית החדה α המונחת מולו. מצא את הניצב השני.

$$(א) \quad \alpha = 28^\circ ; a = 42 \text{ ס"מ}$$

$$(ב) \quad \alpha = 32^\circ 36' ; a = 35.42 \text{ ס"מ}$$

א.52. במשולש ישר זווית נתון הניצב b , והזווית החדה α שלידו. מצא את הניצב השני.

$$(א) \quad \alpha = 37^\circ ; b = 67.12 \text{ ס"מ}$$

$$(ב) \quad \alpha = 69^\circ 19' ; b = 0.382 \text{ מ'}$$

א.53. במשולש ישר זווית נתונים שני הניצבים a ו- b . מצא את הזווית החדה שמול הניצב a .

$$(א) \quad a = 33 \text{ ס"מ} ; b = 50 \text{ ס"מ}$$

$$(ב) \quad a = 2.48 \text{ ס"מ} ; b = 31.45 \text{ ס"מ}$$

א.54. גבהו של משולש שווה שוקיים הוא h , וזווית הראש שלו α . מצא את שטח המשולש, והצב

$$(א) \quad h = 8.66 \text{ ס"מ} ; \alpha = 30^\circ ; h = 5.6 \text{ מ' (ב)} \quad \alpha = 106^\circ 12'$$

א.55. מחוג המעגל החסום במצולע משוכלל בעל n צלעות הוא r . מצא את היקף המצולע ואת שטחו.

$$(א) \quad n = 5 ; r = 12 \text{ מ' (ב)} \quad n = 6 ; r = 3\frac{1}{2} \text{ מ'}$$

$$(ג) \quad n = 8 ; r = 4.12 \text{ ס"מ (ד)} \quad n = 7 ; r = 5.6 \text{ ס"מ}$$

א.56. צלע אחת של המלבן ארוכה פי 4 מהשניה. מהי הזווית החדה שבין אלכסוני המלבן?

א.57. מנקודה המרוחקת 300 מ' מבסיסו של מגדל שידור ראו את ראשו בזווית גובה של 22° . מהו גובה המגדל?

א.58. מראש התורן של אניה, שגבהו 8.75 מ' מעל פני הים ראו סירה בזווית עומק של $12^\circ 28'$. מהו מרחק הסירה מן האניה?

59.א. המרחק בין שני בתים סמוכים הוא 8 מ'. גובה הבית הראשון 9:5 מ', וגובה הבית השני 6.7 מ'. חוט אנטינה נמתח מגג אל גג. מהו שיפוע החוט, ומה ארכו?

60.א. בכדי לקבוע את גובה השמש התקינו מוט מאונך לקרקע. אורך המוט היה 2.35 מ' ואילו אורך צילו 1.55 מ'. מה היתה זווית הגובה של השמש? (כלומר זווית הגובה שבה נראתה השמש).

61.א. צילו של מוט המאונך לקרקע, כאשר גובה השמש הוא α , הוא m . מהו צילו של המוט כאשר גובה השמש הוא β ? הצב $2\text{ מ'} = m$, $\alpha = 49^{\circ}40'$; $\beta = 58^{\circ}30'$.

62.א. מגדלור "כוכב הים" (סטלה מריס) בחיפה נמצא בגובה 280 מ' מעל פני הים. באיזה מרחק מהמגדלור נמצאת אניה, אם רואים את המגדלור בזווית גובה של $8^{\circ}14'$ מעל סיפונה. וגובה הסיפון מעל הים הוא 5 מ'?

63.א. תחנת "כרמלית" שעל הכרמל גבוהה כ-360 מ' מתחנות "כיכר פריז" שבעיר התחתית. המרחק בין שתי התחנות על גבי המפה הוא 1620 מ'. מהו שיפוע מסילת ה"כרמלית" ומהו אורך המסילה?

64.א. מנקודה שמחוץ למעגל שמחוגו 10 ס"מ, יוצאים שני משיקים למעגל הזה. אורך כל משיק 20 ס"מ. חשב את השטח המגבל ע"י שני המשיקים והמעגל.

65.א. צלע אחת של משולש היא 8.135 ס"מ, והגובה היורד עליה הוא 5.89 ס"מ. מצא את זוויות המשולש, אם אחת הזוויות ליד הצלע הנתונה היא $56^{\circ}15'$.

66.א. המגדלור הקטן ליד תחנת הכוח נמצא 12.5 ק"מ מצפון לנמל יפו. באיזה כיוון נראה המגדלור מאניה, העוגנת במרחק 4.5 ק"מ מערבית מנמל יפו?

67.א. מנקודה, הנמצאת על גדה אחת של נהר בגובה של 2.56 מ' מעל פני הים, מודדים זווית עומק של בסיס עץ, הגדל על הגדה השניה, $3^{\circ}48'$ ואת זווית הגובה של ראשו $8^{\circ}24'$. מהו רוחב הנהר ומהו גובה העץ?

- א.68. מטוס, הטס בגובה של 350 מ', עובר מעל צריף, ו-5 שניות לאחר מכן נראה הצריף מהמטוס בזווית עומק של 74° . מצא את מהירות המטוס במטר לשניה.
- א.69. מהירותו של מטוס 360 ק"מ בשעה. 10 שניות אחר שעבר מעל פתח נמל חיפה נראה פתח זה בזווית עומק של $5^\circ 30'$. באיזה גובה טס המטוס?
- א.70. סירת מפרש מנסה לשוט צפונה, נגד רוח צפונית. תחילה היא שטה 5 ק"מ בכיוון $22^\circ 30'$ מערבית מצפון, ואח"כ משנה את כיוונה, ושטה עוד 4 ק"מ בכיוון $18^\circ 40'$ מזרחית מצפון. בכמה ק"מ התקדמה הסירה צפונה?
- א.71. אדם, העומד במרחק 300 מ' מגבעה, שגבהה 135 מ' רואה בנין על פיסגתה בזווית ראייה של 2° . מצא את גבהו של הבנין.
- א.72. בסיס משולש שווה שוקיים הוא 6 ס"מ, ואורך כל שוק 5 ס"מ. הבסיס חולק לשלושה חלקים שווים, ונקודות החלוקה חוברו עם ראש המשולש. מהן שלוש הזוויות שנוצרו ליד ראש המשולש?
- א.73. הניצבים של משולש ישר זווית הם 9 ס"מ, 40 ס"מ. מצא את אורך חוצה הזווית הנמצאת מול הניצב הגדול.
- א.74. מצא אורך מחוג המעגל החסום במשולש שווה שוקיים, שבו נתונים:
- (א) הבסיס a והזווית לידו β
 (ב) השוק b והזווית הראש α
 (ג) הגובה h והזווית הבסיס β .
- א.75. שטחו של משולש ישר זווית הוא S, והזווית חדה שלו α . מצא את אורכי הצלעות.
- א.76. חוצה הזווית הישרה במשולש ישר זווית מחלק את היתר לשני קטעים, שארכיהם m ו-n. הוכח, כי אחת מזוויות המשולש α מקיימת את השוויון $\tan \alpha = \frac{m}{n}$, וחשב את הזוויות החדות של המשולש שבו $m = 5$ ס"מ, $n = 9$ ס"מ.

א.77. חוצה זווית הבסיס של משולש שווה שוקיים מחלק את השוק מול הזווית לשני קטעים, זה שליד הבסיס 5 ס"מ והשני 8 ס"מ. מצא את זווית הבסיס של המשולש ואת מחוג המעגל החסום בו.

א.79. אורך ניצב אחד במשולש ישר זווית הוא 48.52 ס"מ ואורך היתר 55.67 ס"מ. חשב את שטח המשולש בעזרת משפט פיתגורס ובלעדיו. השווה את התוצאות ואת כמות העבודה המושקעת בחישובים בכל אחת מן הדרכים הללו.

א.80. כל שוק, וכן הבסיס הקטן, של טרפז שווה שוקיים הם 2a. הבסיס הגדול הוא 3a. א) מצא את הזווית החדה של הטרפז ואת שטחו. ב) חשב את הזווית החדה שבין אלכסוניו של הטרפז.

א.3. הפונקציות הטריגונומטריות האחרות של זוויות חדות.

למען נוחיות החישובים הוגדרו עוד מספר פונקציות טריגונומטריות, אשר מאפשרות לפעמים רישום קצר יותר של נוסחות טריגונומטריות.

הגדרה: קוסינוס של זווית חדה α (בסימנים מתמטיים: $\cos \alpha$) שווה לסינוס הזווית המשלימה את הזווית הנתונה α ל- 90°).

בסימנים מתמטיים אפשר לרשום הגדרה זו כך:

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha) \quad (1.3.א)$$

וכן נכון גם, כי

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha) \quad (2.3.א)$$

(*) האותיות co באות להזכיר את המונח "Complementary angle", שפירושו בעברית "זווית משלימה ל- 90° ".

אם אחת הזוויות החדות במשולש ישר זווית היא α , הרי הזווית החדה השנייה היא $(90^\circ - \alpha)$, ועל כן גובע ממשפט 1 לעיל, ומהגדרת הפונקציה קוסינוס

משפט 6: קוסינוס של זווית חדה במשולש ישר זווית שווה ליחס בין הניצב הסמוך לזווית זו ובין היתר.

את התכונה של הקוסינוס של זווית חדה במשולש ישר זווית, המובעת במשפט לעיל אפשר לרשום בצורת נוסחה

$$\cos \alpha = \frac{\text{ניצב סמוך ל-}\alpha}{\text{יתר}} \quad (3.3.4)$$

ונוסחה זו אף יכולה לשמש בתור הגדרה אחרת של הפונקציה קוסינוס (של זווית חדה); כמו כן גובע ממשפט 2 לעיל ומהגדרת הפונקציה קוסינוס

משפט 7: אורך ניצב במשולש ישר זווית שווה למכפלת קוסינוס הזווית החדה הסמוכה לניצב זה באורך חיתר, ואורך חיתר במשולש ישר זווית שווה לאורך ניצב במשולש מחולק בקוסינוס הזווית החדה, הסמוכה לאותו ניצב.

כאשר הזווית α גדלה, הרי הזווית $(90^\circ - \alpha)$, קטנה, ולכן קטנה הפונקציה $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$. פונקציה זו היא איפוא פונקציה יורדת של α .

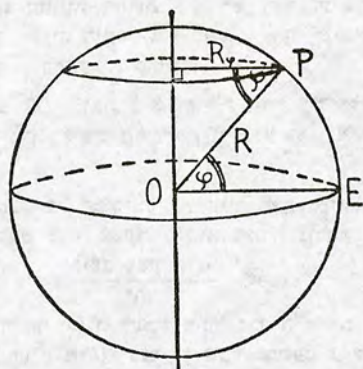


נדגים את השימוש בקוסינוס בדוגמה חשובה מתחום הגיאוגרפיה המתימטית:

נניח כי הארץ היא כדור מושלם בעל מחוג R ו- P נקודת על קו הרוחב φ . פירושו של דבר, כי הזווית POE בין מחוג כדור הארץ לנקודה P , OP , לבין מישור קו המשווה (ראה ציור 14) היא φ .

נחשב את מחוג קו הרוחב φ שנסמנו ב- R_φ ; במשולש ישר זווית MOP הזווית MPO מתחלפת עם φ ועל כן גודלה גם כן φ ולפיכך

$$R_\varphi = R \cos \varphi \quad (4.3.4)$$



ציור 14.א.

לכן, היקף קו הרוחב φ יהיה

$$2\pi R_{\varphi} = 2\pi R \cos \varphi$$

אך מכיון שהיקף כדור הארץ $2\pi R$ הוא 40 000 ק"מ הרי מתקבל כי

$$2\pi R_{\varphi} = 40000 \cos \varphi \quad (5.3.א)$$

פונקציה מקובלת אחרת בטריגונומטריה וזו "קוטנגנס".

הגדרה: קוטנגנס של זווית חדה α (בסימנים מתמטיים $\cot \alpha$ או $\text{ctg } \alpha$) הוא הטנגנס של הזווית המשלימה את α ל- 90° . בסימנים:

$$\cot \alpha = \text{ctg } \alpha = \text{tg } (90^\circ - \alpha) \quad (6.3.א)$$

וכמו כן

$$\cot (90^\circ - \alpha) = \text{ctg } (90^\circ - \alpha) = \text{tg } \alpha \quad (7.3.א)$$

מן ההגדרה הנ"ל והמשפטים 4; 5 נובעים בנקל

משפט 8: קוטנגנס של זווית חדה במשולש ישר זווית שווה ליחס בין הניצב הסמוך לזווית לבין הניצב מול זווית זו.

משפט 9: אורך הניצב ליד זווית חדה במשולש ישר זווית שווה לאורך הניצב השני מוכפל בקוטנגנס הזווית הנ"ל, ואורך ניצב מול זווית חדה במשולש ישר זווית שווה לאורך הניצב השני מחולק בקוטנגנס הזווית הנ"ל.

תכונת הקוטנגנס של זווית חדה במשולש ישר זווית המובעת
במשפט 8 ניתנת לרישום בצורת נוסחה

$$\cot \alpha = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{ניצב סמוך ל-}\alpha}{\text{ניצב מול } \alpha} \quad (8.3.א)$$

ותכונה זו יכולה אף לשמש בתור הגדרה אחרת של הקוטנגנס.
הפונקציה $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$ היא פונקציה יורדת
של הזווית α , ועל כן כל הנאמר על השימוש בלוחות בנוגע
לקוסינוס ולוגריתמוס קוסינוס מתאים גם לשימוש בלוחות הקוטנגנס
או לוגריתמוס קוטנגנס.

נזכיר לבסוף שקיימות עוד שתי פונקציות טריגונומטריות אחרות
אשר אין מרבית להשתמש בהן, ונביאם כאן רק למען השלמות:

הגדרה: סקנס של זווית (בסימנים מתימטיים $\sec \alpha$)
שווה לערך ההפוך של קוסינוס אותה זווית וסקנס של
זווית (בסימנים מתימטיים $\operatorname{cosec} \alpha$) שווה לערך ההפוך של
סינוס אותה זווית.

בצורת נוסחות נוכל להביע זאת כך:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (9.3.א)$$

תרגילים:

- א.81. הוכח בעזרת ההגדרות והמשפטים ההנדסיים, כי:
 - (א) אם $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$, הרי $\cos \alpha > \cos \beta$
 - (ב) אם α זווית חדה, הרי $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$
- א.82. הוכח בעזרת ההגדרות והמשפטים ההנדסיים, כי
 - (א) אם $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$, הרי $\cot \alpha < \cot \beta$
 - (ב) אם α זווית חדה, הרי $\cot \alpha + \tan \alpha \geq 2$
- א.83. הוכח: אם α זווית חדה, אז
 - (א) $\sin \alpha < \tan \alpha < \sec \alpha$
 - (ב) $\cos \alpha < \cot \alpha < \operatorname{cosec} \alpha$
- א.84. חשב בעזרת משפטים הנדסיים את הקוסינוסים של הזוויות
 - (א) 30° (ב) 45° (ג) 60°
- א.85. חשב בעזרת משפטים הנדסיים את הקוטנגנסים של הזוויות
 - (א) 30° (ב) 45° (ג) 60°

א.86. רשום נוסחות, הנחות לחישוב בלוגריתמים, למציאת שטחו

של משולש ישר זווית לפי

(א) היתר c , והזווית החדה α .

(ב) הניצב a , והזווית החדה α מולו.

(ג) הניצב b , והזווית החדה α לידו.

(ד) הגובה על היתר h , והזווית החדה α .

(ה) התיכון ליתר nm והזווית החדה α .

(ו) הזווית החדה α , ואורך החוצה שלה l .

א.87. רשום נוסחות, הנחות לחישוב בעזרת לוגריתמים, למציאת

שטח משולש שווה שוקיים לפי

(א) השוק b וזווית הראש α

(ב) השוק b וזווית הבסיס β

(ג) הבסיס a וזווית הראש α

(ד) הבסיס a וזווית הבסיס β

(ה) הגובה לבסיס b וזווית הראש α

(ו) הגובה לבסיס h וזווית הבסיס β

א.88. רשום נוסחות לחישוב שטחו של מלבן לפי

(א) הצלע a , והזווית φ בין צלע זו והאלכסון

(ב) האלכסון k , והזווית φ בין האלכסון ובין הצלע

(ג) האלכסון k , והזווית ε בין האלכסונים.

א.89. רשום נוסחות לחישוב שטח מקבילית לפי

(א) הצלעות a ו- b והזווית החדה α ביניהן.

(ב) הצלע a , האלכסון k , והזווית החדה φ ביניהן.

(ג) האלכסונים k ו- l והזווית ביניהם φ .

א.90. הבע שטחו של מעוין $ע"פ$ זוויתו החדה α וע"פ

(א) צלעו a

(ב) מחוג המעגל החסום בו r .

(ג) אורך אלכסונו הקצר k

(ד) אורך אלכסונו הארוך l .

א.91. רשום נוסחות לחישוב שטחו של טרפז שווה שוקיים לפי

(א) הבסיסים a ; b והזווית החדה α שליד הבסיס הגדול

(ב) הגובה h , הבסיס הקטן a , והזווית α ליד הבסיס הגדול

(ג) האלכסון k והזווית φ בינו ובין הבסיס הגדול

(ד) הבסיסים a ; b והזווית ε בין המשכי השוקיים.

92. א. הוויית השוות של הדלתון הן ישרות, אורך האלכסון המחבר קודקודיהן של הוויית האלה הוא k , ואחת הוויית האחרות היא α . הבע את אורך האלכסון השני l של הדלתון ואת שטחו. חשב גדלים אלה, כאשר $k = 3.5$ ס"מ, $\alpha = 20^\circ$.
93. א. אלכסוני המרובע הם m ו- n . הוויית החדה ביניהם φ . הוכח, כי שטח המרובע הוא $\frac{1}{2} m n \sin \varphi$.
94. א. השוק הקצרה של טרפז ישר זוויית היא h , והוויית בינה ובין האלכסון הקצר α . מצא את שטח הטרפז, אם נתון, כי האלכסון הקצר מאונך לשוק הארוכה של הטרפז. הצב בנוסחה שמצאת $h = 12.5$ ס"מ, $\alpha = 32^\circ 8'$.
95. א. האלכסון הקצר של טרפז ישר-זוויית מאונך לשוק הארוכה. הבסיס הגדול של הטרפז הוא a , והוויית החדה α . מצא את שטח הטרפז, וחשב אותו כאשר $a = 35.8$ ס"מ, $\alpha = 64^\circ 32'$.
96. א. אלכסוניו של טרפז שווה השוקיים מאונכים לשוקיו. הבע את שטח הטרפז בעזרת
(א) האלכסון k והוויית החדה α של הטרפז.
(ב) השוק b והוויית החדה α של הטרפז.
(ג) הבסיס הגדול a והוויית החדה α של הטרפז.
97. א. האלכסון הקצר k של המקבילית מאונך לצלע הקטנה שלה. הבע את שטח המקבילית בעזרת k והוויית החדה α שלה. הצב: $k = 18.7$ ס"מ, $\alpha = 68^\circ 10'$.
98. א. מהו אורך מעלה אחת בקו רוחב של
(א) 60° (ב) 85° (ג) 0°
99. א. באיזה רוחב גיאוגרפי אורך מעלה אחת על קו הרוחב היא 30 ק"מ?
100. א. מהירותו של מטוס 1000 ק"מ לשעה. באיזה רוחב גיאוגרפי עליו לטוס (לאורך קו הרוחב) על מנת שהשמש לא תשקע עבורו לעולם?
101. א. אחד מגבהי המשולש הוא h , ושתי הוויית החדות של המשולש שאינן על ידו הן α ו- β . הוכח, כי שטח המשולש הזה הוא $\frac{1}{2} h^2 (\cot \alpha + \cot \beta)$.

א.102. הוכח, כי במשולש, שצלעותיו $a; b; c$ וזוויותיו החדות $\alpha; \beta; \gamma$ קיים $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$.

א.103. זוויותיו החדות של המשולש ABC הן α, β, γ וצלעותיו המתאימות $a; b; c$. הישר k יוצר עם הצלע c זווית φ . הוכח, כי $b \cos(\alpha + \varphi) + a \cos(\beta - \varphi) = c \cos \varphi$. בהנחה, כי הזוויות $(\beta - \varphi); (\alpha + \varphi)$ הן חדות.

א.104. (א) הוכח: יחס ההיקפים של שני מצולעים משוכללים, בעלי n צלעות, שאחד מהם חוסם, והשני חסום באותו המעגל, הוא $\cos \frac{180^\circ}{n}$ ואילו יחס שטחיהם הוא $\cos^2 \frac{180^\circ}{n}$.

(ב) הוכח: אם יחס השטחים של שני מצולעים משוכללים בעלי מספר שווה של צלעות, שאחד מהם חוסם מעגל והשני חסום בו, הוא $4:3$ הרי המצולעים האלה הם משושים.

א.106. מעגל, ששטחו S , חוסם מצולע משוכלל בעל n צלעות. וחסום במצולע משוכלל בעל n צלעות. הוכח, כי שטח "הטבעת" בין שני המצולעים הוא:

$$\frac{nS}{2\pi} \sin \frac{360^\circ}{n} \tan^2 \frac{180^\circ}{n}$$

א.106. מצולע משוכלל בעל n צלעות חוסם מעגל, ומצולע משוכלל שני בעל n צלעות חסום באותו המעגל. הוכח: אם שטח "הטבעת" בין שני המצולעים שווה לשטחו של המצולע הקטן, הרי המצולעים הם ריבועים.

א.107. מיתר המעגל a יוצר זווית α עם המשיק למעגל, העובר דרך קצהו. הוכח, כי מחוג המעגל הוא $\frac{a}{2 \sin \alpha}$, ומרחק מרכז המעגל מן המיתר הוא $\frac{a}{2} \cot \alpha$.

א.108. מנקודה O יוצאות 5 קרניים, היוצרות זו עם זו 5 זוויות שוות. הנקודה A נמצאת במרחק 10 ס"מ מ- O , על אחת הקרניים. מנקודה זו הורד אנך AA_1 על הקרן הסמוכה, ומנקודה A_1 הורד אנך A_1A_2 על הקרן הסמוכה, וכן הלאה. הוכח, כי אורך הקטע OA_n הוא $10 \cos^* 72^\circ$, ואילו אורך הקטע $A_n A_{n+1}$ הוא $10 \cos^* 72^\circ \sin 72^\circ$.

א. 4. הקשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות.

בין הפונקציות הטריגונומטריות השונות של אותה זווית קיימים קשרים, אשר בעזרתם אפשר למצוא את ערכי כל הפונקציות הטריגונומטריות של הזווית ברגע שידוע ערכה של אחת מהן. והרי הקשרים העיקריים בין הפונקציות הטריגונומטריות.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1.4.א)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (2.4.א)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (3.4.א)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \quad (4.4.א)$$

הערה: $\sin^2 \alpha$ אינו אלא סימן מקוצר עבור $(\sin \alpha)^2$ וכן במקרה של הפונקציות האחרות $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$ וכו'. לקשרים כאלה קוראים זהויות טריגונומטריות, כל' אלה שוויונים בין ביטויים המכילים פונקציות טריגונומטריות, אשר נכונים עבור כל ערכי הזוויות שנציב בהן.

כדי להוכיח את הזהויות האלה עבור זוויות חדות α נבנה משולש ישר זווית בעל זווית חדה α (ראה ציור) ובעל יתר c . לפי משפט 2 ומשפט 7 נוכל לרשום

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

ולפי משפט 4 ומשפט 8 ידוע כי

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{c \cos \alpha}{c \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

ובזה הוכחו הנוסחות (1.4.א). מנוסחות אלה נובע כי

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

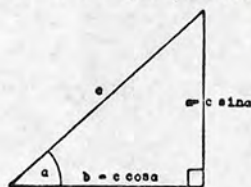
ובזה הוכחה גם הנוסחה (2.4.א).

לפי משפט פיתגורס

$$a^2 + b^2 = c^2$$

או בצורה אחרת

$$(c \sin \alpha)^2 + (c \cos \alpha)^2 = c^2$$



ציור 15.א

ואם נצמצם שוויון זה ב- c^2 נקבל את הנוסחה:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (3.4.א)$$

על מנת להוכיח את הזהויות (4.4.א) נעזר בזהויות הקודמות שכבר הוכחו:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

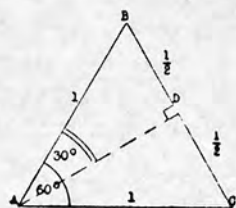
נדגים את השימוש בזהויות אלה על ידי חישוב הפונקציות הטריגונומטריות של הזוויות 30° , 45° , 60° (ראה תרגילים 3.א; 4.א; 4.א.85).

על מנת לחשב את הפונקציות הטריגונומטריות של 45° נקצה על שוק אחת של זווית זו קטע שאורכו יחידה אחת (ראה ציור 16.א). ונעלה אנך לאותה שוק מקצה הקטע. יוצר משולש ישר זווית ושווה שוקיים שזוויותיו החדות 45° . מכאן נובע, לפי הגדרת הפונקציה טנגנס, כי $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ ומהות (2.4.א) מקבלים מייד כי

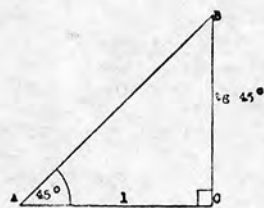
$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1 + 1^2 = 2 \quad \text{לפי הזהות (4.4.א):}$$

$$\cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{לכן:}$$

$$\sin 45^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ולפי זהות (1.4.א):}$$



ציור 17.א



ציור 16.א

על מנת לחשב את הפונקציות הטריגונומטריות של 30° ושל 60° נבנה משולש שווה צלעות שאורך צלעו יחידה אחת ונחצה אחת מזוויותיו (ראה ציור 17.א). במשולש ישר הזווית ABD

שנחשב יש זווית חדה בת 30° , ולפי הגדרת הפונקציות סינוס וקוסינוס:

$$\sin 30^\circ = BD = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \sin (90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

ובעזרת הזהות (3.4.א) מתקבלים:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$$

$$\therefore \cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \cos (90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

אם נשתמש עתה בזהויות (1.4.א), נקבל:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ולפי הגדרת הקוטנגנס:

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} (90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} (90^\circ - 60^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

נוכל לרכז את כל התוצאות שנחשבו בטבלה הבאה:

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$	$\frac{1}{2} = 0.5$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$	1	$\sqrt{3} = 1.7321$
ctg	$\sqrt{3} = 1.7321$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$

בעזרת הזהויות היסודיות (1.4.א) — (4.4.א) אפשר להוכיח בנקל זהויות נוספות אשר דרושות לעתים בהתרת בעיות שונות. נדגים זאת במספר דוגמאות:

$$\left(\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right)^2 = 4 \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (1)$$

ה ת ר ה : נפתח את רבוע סכום שני השורשים לפי הנוסחה :
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; נקבל :

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} \right)^2 = \\ &= \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} - 2 + \frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha} = \\ &= \frac{(1+\sin \alpha)^2 - 2(1+\sin \alpha)(1-\sin \alpha) + (1-\sin \alpha)^2}{(1-\sin \alpha)(1+\sin \alpha)} = \\ &= \frac{[(1+\sin \alpha) - (1-\sin \alpha)]^2}{1-\sin^2 \alpha} = \frac{(2\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} = 4 \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

(ו) אם α ; β הזוויות החדות במשולש ישר זווית הרי

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$$

ה ת ר ה : במקרה זה $\beta = 90^\circ - \alpha$. לכן

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 (90^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = \cos^2 (90^\circ - \alpha) = \\ &= \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

תרגילים :

א. 109. מצא את שאר הפונקציות הטריגונומטריות של הזווית החדה $(\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha)$, אם ידוע, כי סינוס הזווית α שווה
 (א) 0.8 (ב) $\frac{40}{41}$ (ג) $\frac{7}{25}$ (ד) $\frac{8}{17}$

א. 110. מצא את שאר הפונקציות הטריגונומטריות של הזווית החדה $(\sin \alpha, \cos \alpha, \cot \alpha)$, אם ידוע, טנגנס הזווית α שווה
 (א) $\frac{1}{2}$ (ב) $\frac{11}{60}$ (ג) 0.225 (ד) 1.875

א. 111. מצא את שאר הפונקציות הטריגונומטריות של הזווית החדה $(\sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha)$, אם ידוע, כי קוסינוס הזווית α שווה
 (א) $\frac{5}{13}$ (ב) $\frac{84}{85}$ (ג) $\frac{1}{2}$ (ד) 0.75

א. 112. מצא את שאר הפונקציות הטריגונומטריות של הזווית החדה $(\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha)$, אם ידוע, כי קוטנגנס הזווית α שווה
 (א) $\frac{15}{112}$ (ב) 3 (ג) $\frac{1}{2}$ (ד) $\sqrt{2}-1$

א.113. הוכח את הזהויות α זווית חדה:

$$\tan \alpha \cdot \sin (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (\text{א})$$

$$\sin \alpha \cdot \cos (90^\circ - \alpha) + \cos \alpha \sin (90^\circ - \alpha) = 1 \quad (\text{ב})$$

$$(1 - \sin^2 \alpha) (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad (\text{ג})$$

$$(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (\text{ד})$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \tan \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \quad (\text{ה})$$

$$\sec \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha \tan^2 \alpha \quad (\text{ו})$$

א.114. הוכח את הזהויות α, β זוויות חדות:

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{א})$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \cot \alpha \cdot \cot \beta \quad (\text{ג})$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (\text{ד})$$

$$1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \tan \alpha = (1 + \cos \alpha) (1 + \tan \alpha) \quad (\text{ה})$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{ו})$$

א.115. הוכח את הזהויות α זווית חדה:

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \quad (\text{א})$$

$$(1 + \sin \alpha) (1 + \cos \alpha) = (\sin \alpha + \tan \alpha) (\cos \alpha + \cot \alpha) \quad (\text{ב})$$

$$(1 + \tan \alpha) \cos^3 \alpha + (1 + \cot \alpha) \sin^3 \alpha = \sin \alpha + \cos \alpha \quad (\text{ג})$$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha) (1 - \sin \alpha \cos \alpha) \quad (\text{ד})$$

$$\tan^3 \alpha - \cot^3 \alpha = (\tan \alpha - \cot \alpha) \left(\tan^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \quad (\text{ה})$$

$$\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = 2 + 4 \tan^2 \alpha \quad (\text{ו})$$

א.116. הוכח, כי א) $\sec^2 \alpha$ ו- $\operatorname{cosec}^2 \alpha$ הם שני מספרים כך

שסכומם שווה למכפלתם. ב) $\cos^2 \alpha$ ו- $\cot^2 \alpha$ הם שני

מספרים כך שהבדלם שווה למכפלתם.

א.117. α ו- β הן זוויותיו החדות של משולש ישר זווית. הוכח:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 \quad (\text{א})$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \quad (\text{ב})$$

$$\cot^2 \alpha \cos^2 \beta (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad (\text{ג})$$

א.118. הבע כל אחד מהבטויים הבאים בצורה הפשוטה ביותר:

$$\frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} + \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \quad (\text{א})$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} \quad (\text{ב})$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}} \quad (\text{ג})$$

$$\frac{\cos \beta}{1 - \tan \beta} + \frac{\sin \beta}{1 - \cot \beta} \quad (\text{ד})$$

א.119. נתון $\sin \alpha = n$. הבע ע"י n את ערכי הפונקציות

$$\cos \alpha \quad (\text{ב}) \quad \tan \alpha \quad (\text{ג}) \quad \cot \alpha \quad (\text{א})$$

א.120. נתון $\tan \alpha = k$. דבע ע"י k את ערכי (א) $\sin \alpha$ (ב) $\cos \alpha$.

א.121. נתון, כי $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. הוכח, כי

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2} \quad (\text{א})$$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = \frac{m}{2} (3 - m^2) \quad (\text{ב})$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \sqrt{2 - m^2} \quad (\text{ג})$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{m^2 - 1} \quad (\text{ד})$$

א.122. נתון, כי $\tan \alpha + \cot \alpha = p$. הוכח, כי

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{p} \quad (\text{א})$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\frac{p+2}{p}} \quad (\text{ב})$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = \pm \sqrt{p^2 - 4} \quad (\text{ג})$$

א.123. נתון, כי $\cos \alpha + \sec \alpha = q$. הוכח, כי

$$\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha = q^2 - 3 \quad (\text{א})$$

$$\sec \alpha - \cos \alpha = \sqrt{q^2 - 4} \quad (\text{ב})$$

$$\cos \alpha = \frac{q - \sqrt{(q+2)(q-2)}}{2} \quad (\text{ג})$$

א.124. מצא בלי עזרת לוחות, את ערכי זבטויים הבאים:

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ \\ \sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ \\ \sin^2 90^\circ + \tan 60^\circ \cot 30^\circ \\ \sin 60^\circ : \tan 30^\circ - \tan^2 45^\circ \end{aligned}$$

א.125. העזר במשפט ע"ד חלוקת צלע המשולש ע"י חוצה הזווית הנגדית, על מנת לחשב את הפונקציות הטריגונומטריות $(\sin, \cos, \tan)$ של 15° .

א.126. העזר במשפט הנ"ל על מנת לחשב את הפונקציות הטריגונומטריות $(\sin, \cos, \tan)$ של $22^\circ 30'$. בדוק תשובותיך בעזרת הלוח.

א.127. הוכח בעזרת חוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים, בעל זווית ראש 2α , כי

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

א.128. הזווית α במשולש ABC קטנה מ- 45° , והזווית γ היא ישרה. D היא נקודה על AC, כך שהזווית ABD שווה ל- α . הוכח, בעזרת ציור זה, כי

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{א})$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (\text{ב})$$

א.129. הוכח: חוצה זווית הבסיס במשולש שווה שוקיים, בעל זווית ראש 36° , מחלק את המשולש לשני משולשים שווים שוקיים, כך שאחד מהם דומה למשולש כולו. השתמש במשפט הזה על מנת להוכיח, כי

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

א.130. הגובה במשולש חד זווית מחלק את הזווית, שדרך קודקודה הוא עובר, לשתי זוויות α ו- β . חשב את שטח המשולש בשני אופנים שונים, והוכח ע"י חישובים אלה את הנוסחות

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{א})$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (\text{ב})$$

א.131. הוכח בעזרת ציור מתאים (השווה עם הבעיה הקודמת), כי

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (א)$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (ב)$$

א.132. במשולש ישר זווית מחלק חוצה הזווית החדה α את הניצב הנגדי לשני קטעים שאורכיהם m, n ($m > n$). הוכח, כי:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} \quad (א) \quad \cos \alpha = \frac{n}{m} \quad (ב)$$

$$l = n \sqrt{\frac{2m}{m-n}} \quad (ג) \quad (l \text{ חוצה הזווית } \alpha)$$

א.133. זווית הראש α במשולש שווה שוקיים קטנה מ- 60° . דרך אחד מקצות הבסיס מעבירים ישר, היוצר עם הבסיס זווית α , והחותך את השוק הנגדית לשני קטעים, שאורכיהם m ו- n (ליד הבסיס). הוכח, כי

$$\cos \alpha = \frac{2n+m}{2(n+m)} \quad (א) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{m+n}} \quad (ב)$$

א.134. במשולש ישר זווית, בעל זווית α הקטנה מ- 45° , מחלק חוצה הזווית הישרה את היתר לשני חלקים שאורכיהם m ו- n ($m > n$). הוכח, כי חוצה הזווית הישרה l שווה $m \sqrt{2 \sin \alpha} = n \sqrt{2 \cos \alpha}$.

א.135. הוכח: אם שני גבהים במשולש שווים זה לזה — המשולש הוא שווה שוקיים.

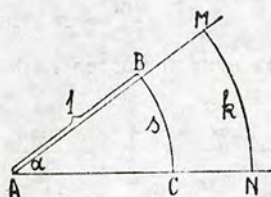
5. רדיאנים. פונקציות של זוויות קטנות.

המידה המקובלת ביותר של זווית, המעלה, נקבעה על ידי הבבלים לפני כ-3000 שנה כחלק ה-360 של זווית שלמה. המספר 360 הוא שרירותי ואין לו שום קשר מהותי עם זוויות, ועל כן חיפשו אנשי המדע מידה טבעית יותר של הזווית, שלא תהיה תלויה במספר שרירותי המוכנס מבחוץ. מידה כזאת היא "הרדיאן".

אם נבנה מעגל שמחוגו יחידת אורך אחת סביב קודקוד הזווית α , תחתונה שוקי הזווית קשת BC מזו המעגל, ואורך

קשת זו, s , יוכל לשמש מידה לגודל הזווית — כיון שקשת זו גדלה כאשר הזווית גדלה, וקטנה כאשר הזווית קטנה.

הגדרה: מידת זווית ברדיאנים היא אורך הקשת הנחתכת ע"י שוקי הזווית ממעגל שמחוגו יחידה אחת ומרכזו בקודקוד הזווית.



ציור 18.

בנוסחה נוכל להביע זאת בצורה:

$$\alpha = s \quad (1.5.א) \quad (\text{ברדיאנים})$$

אם נבנה סביב קודקוד הזווית, A , מעגל בעל מחוג כל שהוא r , תחתוכנה שוקי הזווית ממעגל זה קשת MN שאורכה k משיקור לים גיאומטריים נובע כי אורך הקשת k פרופורציונלי למחוג r , ולפיכך

$$\frac{s}{l} = \frac{k}{r}$$

מכאן מקבלים בעזרת (1.5.א) את הנוסחה

$$\alpha = \frac{k}{r} \quad (2.5.א) \quad (\text{ברדיאנים})$$

אשר מאפשרת להגדיר את מידת הזווית α ברדיאנים גם בצורה אחרת:

הגדרה: מידת זווית ברדיאנים היא היחס בין אורך קשת מעגל הנחתכת ע"י שוקי הזווית ממעגל, שמרכזו בקודקוד הזווית, לבין מחוג אותו מעגל.

מהגדרה זו נובע שמידת הרדיאנים היא חסרת מימד (ולכן בלתי תלויה במערכת היחידות) מכיון שהיא יחס בין שני אורכים שהוא מספר טהור (בלתי מכווה). מכאן שהפונקציות

הטריגונומטריות הן פונקציות של מספרים ואפשר לטפל בהן בלי קשר לזוויות.

כדי להרגיל את הקוראים למידת הרדיאנים נמצא את מספר הרדיאנים המתאימים לזוויות הנפוצות ביותר.

אם נשרטט מעגל בעל מחוג r , הרי הקשת המתאימה לזווית שלמה (360°) היא אורך המעגל $2\pi r$, ולפיכך תהיה מידת זווית

$$\text{שלמה } (360^\circ) \text{ ברדיאנים } = 2\pi \cdot \frac{2\pi r}{r}.$$

מכאן קל להסיק את המסקנות הרשומות בטבלה הבאה:

מספר הרדיאנים	מספר המעלות	מספר הרדיאנים	מספר המעלות
$\frac{\pi}{4}$	45°	2π	360°
$\frac{\pi}{6}$	30°	π	180°
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\pi}{2}$	90°
0	0°	$\frac{\pi}{3}$	60°

רדיאן אחד יתאים איפוא ל- $\frac{360^\circ}{2\pi}$ מעלות שהן בקירוב 57.19° .

אם משתמשים ברדיאנים נעשות הרבה נוסחות הקשורות במעגל פשוטות יותר. נדגים זאת בשני מקרים חשובים:

(א) נוסחת חשוב אורך הקשת השייכת לזווית מרכזית בת α רדיאנים במעגל שמחוגו r . מן הנוסחה (א.2.5) נובע כי אורך הקשת k ניתן לחישוב לפי

$$k = r \alpha \quad (3.5.א)$$

(ב) נוסחת חשוב שטח הגזרה של מעגל שמחוגו r שזוויתה המרכזית α רדיאנים:

כיון ששטח העיגול השלם הוא πr^2 הרי שטח הגזרה שזוויתה המרכזית אחד היא

$$\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$$

ולפיכך, אם הזווית המרכזית בת α רדיאנים יהיה שטח הגזרה גדול

פי α משטח הגזרה שזוויתה רדיאן אחד. לכן יהיה שטח גזרה זו, S שווה ל-

$$S = \frac{1}{2} r^2 \alpha \quad (4.5.א)$$

נוכיח עתה שעבור זוויות קטנות מאוד אין כמעט הבדל בין ערך הסינוס של זווית לבין מידת הזווית ברדיאנים. בסימנים אפשר להביע זאת בצורה

$$\sin \alpha \sim \alpha \quad (5.5.א) \quad (\text{עבור זוויות } \alpha \text{ קטנות})$$

או בצורה מדויקת יותר:

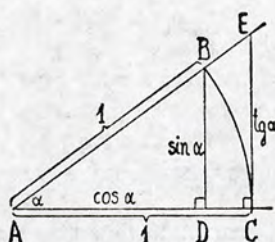
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \quad (6.5.א)$$

(קרי: הגבול של $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ כאשר α שואף ל-0 הוא 1).

פירוש הנוסחה (6.5.א) הוא: ככל שהזווית α קטנה יותר

(קרובה יותר ל-0) הרי השבר $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ קרוב יותר ל-1.

על מנת להוכיח את הנוסחה (6.5.א) נעזר בציור א.19.



ציור א.19.

סביב קודקוד הזווית α שרטט מעגל שמחוגו יחידה אחת ודרך קצות הקשת BC שנחתכה מן המעגל ע"י שוקי הזווית גבנו אנכים לשוק אחת, BD ו-CE.

כיון שהגזרה ABC מכילה את המשולש ABD ומוכלת במשולש ACE, הרי שטח הגזרה ABC גדול משטח המשולש ABD, אך קטן משטח המשולש ACE. מכאן

$$\frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2} < \frac{1^2 \cdot \alpha}{2} < \frac{1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

ואם נחלק את אי השוויון הכפול הזה במספר החיובי $\sin \alpha$,
ונכפילו ב-2, נקבל:

$$\cos \alpha < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

ככל שהזווית α קטנה יותר -- כן $\cos \alpha$ גדול יותר ועולה

ל-1, בשעה ש- $\frac{1}{\cos \alpha}$ קטן יותר ויורד ל-1. לכן,

$$1 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \leq 1$$

וא

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$$

אך משוויון זה נובע כי גם

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \quad (6.5.א)$$

בעזרת השוויון (6.5.א) קל להוכיח את השוויון הנוסף

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1 \quad (7.5.א)$$

אשר אומר שעבור זוויות קטנות אין כמעט הבדל בין טנגנס הזווית לבין גודל הזווית ברדיאנים. לכן מותר להחליף בלי שגיאה גדולה, במקרה של זוויות קטנות, את טנגנס הזווית בסינוס הזווית, ובגודל הזווית α (ברדיאנים!) — דבר המנוצל לעתים קרובות בחישובים מקורבים.

על מנת להוכיח את השוויון (7.5.א) נחשב כדלקמן:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \alpha} = 1 \end{aligned}$$

נוכיח לבסוף עוד את השוויון

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \quad (8.5.א)$$

אשר פירושו: עבור זוויות קטנות

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} \sim \frac{1}{2}$$

לכן

$$1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2} \alpha^2$$

$$\cos \alpha \sim 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$$

(9.5.א)

כל, עבור זוויות קטנות $\cos \alpha$ קרוב מאוד ל-1, וההפרש בין 1 לבין $\cos \alpha$ הוא בקירוב $\frac{1}{2} \alpha^2$.

הרי הוכחת השוויון (8.5.א):

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\alpha^2(1 + \cos \alpha)} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\alpha^2(1 + \cos \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

נדגים את השמוש בהערכות של הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות קטנות ע"י הדוגמות הבאות:

(I) קוטרו של מטבע 2 ס"מ. באיזו זווית ראייה רואים מטבע זה ממרחק 5 מטרים?
התרה:

$$\sin \alpha \sim \alpha = \frac{2}{500} = 0.0040 \quad (\text{ברדיאנים})$$

$$\therefore \alpha = 14'$$

(II) מגדל נראה ממרחק 5 ק"מ בזווית ראייה של 30'. מהו גובה המגדל?

התרה: נסמן את גובה המגדל ב-x

$$\tan 30' \sim \sin 30' \sim \frac{\pi}{360} = \frac{x}{5000}$$

$$x = \frac{5000 \pi}{360} = 43.75 \text{ מ'}$$

(III) מאיזה מרחק ייראה מוט שאורכו מטר בזווית ראייה של 1"?

התרה: נסמן מרחק זה ב-x

$$\sin 1'' \sim \tan 1'' \sim \frac{\pi}{180 \cdot 3600} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{180 \cdot 3600}{\pi} = 206,300 \text{ מ'} = 206.3 \text{ ק"מ}$$

תרגילים :

א.136. הבע את הזוויות הבאות ברדיאנים :

(א) 20° (ב) $22^\circ 30'$ (ג) 75° (ד) $3^\circ 20'$ (ה) 15° (ו) $66^\circ 40'$

א.137. הבע את הזוויות הבאות במעלות :

(א) $\frac{3\pi}{4}$ (ב) $\frac{\pi}{5}$ (ג) $\frac{5\pi}{9}$ (ד) $\frac{7\pi}{10}$ (ה) $\frac{8\pi}{27}$ (ו) $\frac{11\pi}{9}$

א.138. רשום ערכי הפונקציות הטריגונומטריות הבאות בלי להעזר בלוחות

(א) $\sin \frac{\pi}{3}$ (ב) $\cos \frac{\pi}{4}$ (ג) $\tan \frac{\pi}{6}$ (ד) $\cot \frac{\pi}{4}$

(ה) $\sin \frac{\pi}{6}$ (ו) $\cot \frac{\pi}{3}$

א.139. הוכח את הזהויות :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad (\text{א})$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha \quad (\text{ב})$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 \quad (\text{ג})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \quad (\text{ד})$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1 \quad (\text{ה})$$

א.140. הזווית בין שני המשיקים למעגל שמחוגו R היא α רדיאנים.

הוכח, כי השטח הכלוא בין המשיקים ובין הקשת הקטנה

של המעגל, בין נקודות ההשקה, הוא

$$R^2 \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

א.141. דרך נקודה מחוץ למעגל שמחוגו R, עובר משיק למעגל,

וכן חותך דרך מרכז המעגל, היוצרים ביניהם זווית α .

הוכח, כי השטחים המוגבלים ע"י המשיק, החותך וקשתות

המעגל הם :

$$\frac{1}{2} R^2 \left(\cot \alpha + \alpha + \frac{\pi}{2} \right) ; \frac{1}{2} R^2 \left(\cot \alpha + \alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

א.142. חשב בקירוב (בלי עזרת לוחות טריגונומטריים) את הסינוס
 סים של הזווית הבאות, והשווה את התוצאות עם הרשום
 בלוחות: (א) $\frac{1}{2}^\circ$ (ב) 3° (ג) 5° (ד) 10°

א.143. שאלה כנ"ל לגבי הטנגנסים של הזוויות.

א.144. בדוק בעזרת לוחות עבור איזה זוויות α ישאר ההפרש בין
 α ו- $\sin \alpha$ קטן מ- (א) $\frac{1}{4}\%$ (ב) 1% (ג) 5%

א.145. שאלה כנ"ל לגבי הטנגנסים של הזוויות.

א.146. חשב בקירוב (בלי עזרת לוחות טריגונומטריים) את הקוסינוס
 סים של הזוויות הבאות, והשווה את התוצאות עם הרשום
 בלוחות (א) $\frac{1}{2}^\circ$ (ב) 4° (ג) 10° (ד) 20°

א.147. קוטר הלבנה הוא 3476 ק"מ, ומרחקה ממרכז כדור הארץ
 384000 ק"מ. מהי זווית הראייה הגדולה ביותר בה רואים
 את הלבנה מפני כדור הארץ אם מחוג כדור הארץ 6370 ק"מ?

א.148. כדור פורח, המגיע לעננים, בגובה 3600 מ', נראה מן הקרקע
 בזווית ראייה $2.5'$. מצא את קוטר הכדור.

א.149. חייל ראה, דרך משקפתו, אדם ניצב שגבהו 1.75 מ' בזווית
 ראייה של $12'$. מהו המרחק של האדם מהחייל?

א.150. אדם העומד במרחק 4000 מ' ממגדל רואה את ראש המגדל
 בזווית גובה של $15'$. מצא את גובה המגדל ואת הזווית
 שבה רואה האדם מוט דגל בראש המגדל, אם גובה המוט
 5 מ'. (אין צורך בלוחות טריגונומטריים!)

א.151. מראש התורן של אניה נראתה סירת מנוע, המתקרבת לאניה,
 תחילה בזווית עומק של $23'$, וכעבור 2 דקות בזווית עומק
 של $27'$. מהי מהירות הסירה בקמ"ש, אם גובה התורן מעל
 פני הים הוא 15 מ'?

א.152. מצא בדרך גרפית את השרשים של המשוואות הבאות,
 ובדוק את התוצאות בעזרת לוחות. (x היא זווית חדה)

$$\begin{array}{ll} \sin x = 0.25 & \text{(א)} \\ \cos x = 0.6 & \text{(ב)} \\ \tan x = 1.5 & \text{(ג)} \\ \cot x = 2 & \text{(ד)} \end{array}$$

153. פתור את המשוואות הבאות בדרך גרפית, ובדוק את התוצאות בעזרת לוחות. (x זווית חדה)

$$\sin x + \cos x = 1.4 \quad (\text{ב}) \quad \sin x = \cos x \quad (\text{א})$$

$$2 \sin x = \cos x \quad (\text{ג})$$

154. פתור בעזרת תיאורים גרפיים את המשוואות הבאות, ובדוק את התוצאות בעזרת לוחות. (x זווית חדה)

$$\tan x = 2x \quad (\text{ג}) \quad \cos x = x \quad (\text{ב}) \quad \sin x = \frac{x}{10} \quad (\text{א})$$

155. חשב את הגבולות

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 3\alpha}{\alpha} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\alpha^3} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \tan \alpha} \quad (\text{ד})$$

156. שרטט תיאור גרפי של הפונקציה $y = \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (קנה המידה: 10 משבצות יחידה אחת) והתר בעזרת תיאור זה את המשוואה

$$\sin x = \frac{2}{3} - \frac{x}{\pi}$$

157. שרטט תיאור גרפי של הפונקציה $y = \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (קנה המידה: 10 משבצות יחידה אחת) ומצא בעזרת

$$\cos x = + \sqrt{1 - \frac{3x}{\pi}}$$

158. התר בעזרת תיאור גרפי את המשוואה (x זווית חדה):

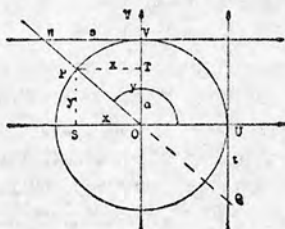
$$x \sin x = 1$$

**פרק ב': ההגדרה הכללית של הפונקציות
הטריונומטריות. הקשרים בין הפונקציות**

ב.1. המעגל הטריגונומטרי והגדרת הפונקציות הטריגו-
נומטריות בעזרתו.

הגדרה: מעגל טריגונומטרי הינו מעגל שמרכזו בראשית הצירים של מערכת צירים ישרת זווית ומחוגו יחידה אחת. על מנת להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות של זווית α כל שהיא (לאו דווקא חדה) משרטטים זווית זו במעגל הטריגונומטרי באופן שקודקוד הזווית בראשית הצירים, שוק אחת שלה מונחת על הקרן החיובית של ציר ה-x'ים, ובאופן שיגיעו משוק זו אל השוק השניה על ידי סיבוב בכיוון מתמטי חיובי בשעור α° . כיוון מתמטי חיובי הוא כיוון מנוגד לכיוון תנועת מחוגי השעון, השוק השניה של הזווית חותכת את המעגל הטריגונומטרי בנקודה P (ראה ציור 1.1.) ולנקודה זו שני שעורים: $OS = x$ ו- $OT = y$. כמו כן חותכת שוק שניה זו (או המשכה) את המשיק למעגל הטריגונומטרי בנקודת חיתוכו U עם ציר ה-x'ים בנקודה Q ואת המשיק בנקודת חיתוכו V עם ציר ה-y'ים בנקודה W. נכנה את המרחקים: $UQ = t$; $VW = s$ (שני המרחקים הם בעלי סימן, למשל, בציור 1.1. t ו-s שליליים!).

עתה מגדירים את הפונקציות הטריגונומטריות כדלקמן:



$$\begin{aligned}\sin \alpha &= y \\ \cos \alpha &= x \\ \operatorname{tg} \alpha &= t \\ \operatorname{ctg} \alpha &= u\end{aligned}$$

(1.1.2)

ציור 1.1.

היות וכל הקטעים $x; y; z; u$: נמדדים על גבי צירים בעלי כיוון — הם בעלי סימן, ולכן גם הפונקציות הטריגונומטריות הן בעלות ערכים חיוביים ושליילים.

לדוגמה — ברביע הראשון, כל' עבור זוויות בין 0° לבין 90° . כל הערכים של הפונקציות הטריגונומטריות הם חיוביים. קל גם להיווכח כי אין ההגדרה החדשה של הפונקציות הטריגונומטריות סותרת את ההגדרות הקודמות (הקורא מתבקש לבדוק טענה זאת!). ערכי הפונקציות הטריגונומטריות רשומים עבור זוויות אלה בלוחות. ברביע השני — כל' עבור זוויות α הנמצאות בין 90° לבין 180° (ראה ציור ב.1) — ערך הסינוס הנמדד על ידי הקטע y הוא חיובי, אך ערכי כל שאר הפונקציות הטריגונומטריות הנמדדים ע"י הקטעים $x; z; u$; שליילים. אין למצוא את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות אלה (זוויות קהות) בלוחות באופן ישיר, אלא באמצעות הנוסחות

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha^\circ = \sin(180^\circ - \alpha^\circ) \\ \cos \alpha^\circ = -\cos(180^\circ - \alpha^\circ) \\ \operatorname{tg} \alpha^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha^\circ) \\ \operatorname{ctg} \alpha^\circ = -\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha^\circ) \end{array} \right. \quad \text{או} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) \\ \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha) \\ \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \\ \operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \end{array} \right. \quad (2.1.ב)$$

הקורא מתבקש להיווכח באמיתות נוסחות אלה על ידי שרטוט הזוויות α ו- $(180^\circ - \alpha)$ במעגל טריגונומטרי והשוואת שני אנפיו השוויונים (2.1.ב).

ברביע השלישי — כל' עבור זוויות בין 180° לבין 270° — ערכי הסינוס והקוסינוס שליילים וערכי הטנגנס והקוטנגנס חיוביים. על מנת למצוא את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות אלה בעזרת לוחות נעזרים בנוסחות:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha^\circ = -\sin(\alpha^\circ - 180^\circ) \\ \cos \alpha^\circ = -\cos(\alpha^\circ - 180^\circ) \\ \operatorname{tg} \alpha^\circ = \operatorname{tg}(\alpha^\circ - 180^\circ) \\ \operatorname{ctg} \alpha^\circ = \operatorname{ctg}(\alpha^\circ - 180^\circ) \end{array} \right. \quad \text{או} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = -\sin(\alpha - \pi) \\ \cos \alpha = -\cos(\alpha - \pi) \\ \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) \\ \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) \end{array} \right. \quad (3.1.ב)$$

קל להיווכח באמיתות נוסחות אלה על ידי שרטוט הזוויות α ו- $(\alpha - 180^\circ)$ במעגל טריגונומטרי והשוואת שני אנפיו הנוסחות. ברביע הרביעי — כל' עבור זוויות בין 270° לבין 360° — ערך הקוסינוס בלבד הוא חיובי וערכי שאר הפונקציות שליילים מציאת ערכי הפונקציה הטריגונומטריות בעזרת לוחות נעשית באמצעות הנוסחות:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha^{\circ} = -\sin(360^{\circ} - \alpha^{\circ}) \\ \cos \alpha^{\circ} = \cos(360^{\circ} - \alpha^{\circ}) \\ \operatorname{tg} \alpha^{\circ} = -\operatorname{tg}(360^{\circ} - \alpha^{\circ}) \\ \operatorname{ctg} \alpha^{\circ} = -\operatorname{ctg}(360^{\circ} - \alpha^{\circ}) \end{array} \right. \quad \text{או} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = -\sin(2\pi - \alpha) \\ \cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha) \\ \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) \\ \operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) \end{array} \right. \quad (4.1.3)$$

מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות נובע כי תוספת 360° (או 2π רדיאנים) לזווית כל שהיא אינה משנה את ערך הסינוס או הקוסינוס של הזווית. וכן תוספת של 180° (או π רדיאנים) לזווית כל שהיא אינה משנה את ערכי הטנגנס והקוטנגנס של הזווית. אפשר להביע עובדות אלו במילים גם כך: הפונקציות סינוס וקוסינוס הן בעלות מחזור של 360° (או 2π רדיאנים) בשעה שהפונקציות טנגנס וקוטנגנס הן בעלות מחזור של 180° (או π רדיאנים).

הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות שליליות מוגדרות בעזרת המעגל הטריגונומטרי בדומה להגדרות עבור זוויות חיוביות, אלא שמגיעים מן השוק הראשונה של הזווית אל השניה על ידי סיבוב בכיוון מתימטי שלילי — כל' בכיוון תנועת מחוגי השעון.

קל להוכיח בעזרת הנוסחות (2.1.ב); (3.1.ב); ו-(4.1.ב) כי הזהויות היסודיות (3.3.א) עד (8.3.א), שהוכחו עבור זוויות חדות בלבד, נשארות בעלות תוקף עבור זוויות שאינן חדות. כמו כן נשארת בתוקפה הנוסחה (5.1.א) לחישוב שטח של משולש גם כאשר המשולש הוא קהה זווית. הקורא מתבקש לרשום הוכחות לעובדות אלה.

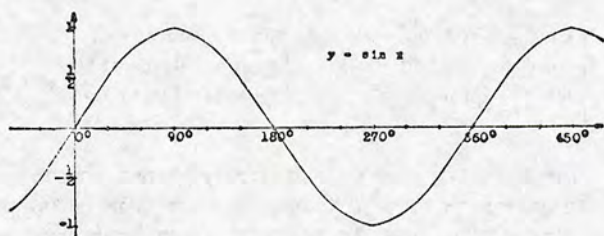
אם רוצים לתאר תיאור גרפי של הפונקציה $y = \sin x$, צריך להכין תחילה טבלת ערכים של פונקציה זו, כדוגמת הטבלה הבאה:

$$y = \sin x$$

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°
y	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87

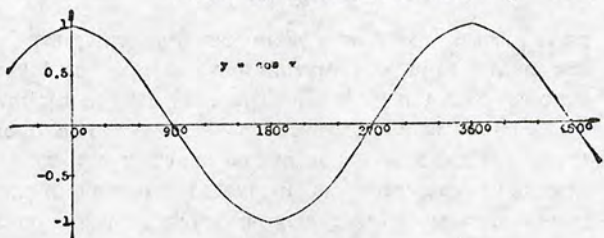
x	270°	300°	330°	360°	390°	...
y	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	...

אחר כך אפשר לשרטט בעזרת טבלה זו את התיאור הגרפי:



ציור ב.2.

קו עקום זה נקרא בשם קו הסינוס (סינוסואידה).
באופן דומה אפשר להכין טבלת ערכים עבור הפונקציה $y = \cos x$ ולשרטט בעזרתה את התיאור הגרפי:



ציור ב.3.

בתיאורים גרפיים אלה בולט הדמיון בין התיאורים הגרפיים של הפונקציות סינוס וקוסינוס, ואפשר לקבל מתוך אחד התיאורים האלה את השני על ידי הזזת ראשית הצירים. כמו כן בולטת המחזוריות של הפונקציות האלה. ה"מחזור" של פונקציות אלה הוא 2π (או 360°), דבר שאפשר להביעו בנוסחות:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \sin (\alpha + 2\pi) = \sin (\alpha + 2k\pi) \\ \cos \alpha &= \cos (\alpha + 2\pi) = \cos (\alpha + 2k\pi) \\ \sin \alpha &= \sin (\alpha + 360^\circ) = \sin (\alpha + k \cdot 360^\circ) \\ \cos \alpha &= \cos (\alpha + 360^\circ) = \cos (\alpha + k \cdot 360^\circ) \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (5.1.2) \\ k=0; \pm 1; \pm 2 \dots \end{matrix}$$

כמו כן רואים מתיאור הגרפי של הפונקציה $y = \sin x$ כי

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$$

תכונה זו של הפונקציה $y = \sin x$ נקראת "אי זוגיות"

כאשר זו תכונה אופיינית לכל הפונקציות מהצורה

$$y = ax + bx^3 + cx^5 + \dots$$

אשר מכילות חזקות עם מעריכים טבעיים אי-זוגיים בלבד.
לעומת זאת רואים מהתיאור של הפונקציה $y = \cos x$, כי

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

תכונה זו של הפונקציה $y = \cos x$ נקראת "זוגיות" באשר
תכונה זו אופיינית לכל הפונקציות מהצורה

$$y = a + bx^2 + cx^4 + \dots$$

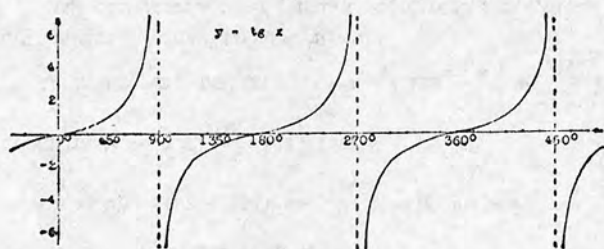
אשר מכילות חזקות עם מעריכים טבעיים זוגיים בלבד.
על מנת לשרטט תיאור גרפי של הפונקציות טנגנס וקוטנגנס,
אפשר להכין שוב טבלות ערכים של פונקציות אלה, אך בגלל
הסיבוך היחסי של התיאורים הגרפיים, צריך למצוא ערכים רבים
יותר של פונקציות אלה. לדוגמה:

$$y = \operatorname{tg} x$$

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
y	0	0.27	0.58	1	1.73	3.73	∞	-3.73	-1.73

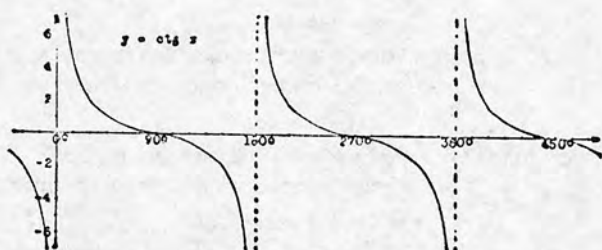
x	135°	150°	165°	180°	195°	...
y	-1	-0.58	-0.2	0	0.27	...

התיאור הגרפי של פונקציה זו יהיה איפוא



ציור 4.1

רואים בבירור מן התיאור הגרפי, כי לפונקציה זו נקודות
"קשיחה" ב-90° ; 270° ; ...
באופן דומה, התיאור הגרפי של הפונקציה $y = \operatorname{ctg} x$ יהיה



ציור 5.1

גם בתיאורים הגרפיים של הפונקציות טנגנס וקוטנגנס בולטת מחזוריות הפונקציות, אך במקרים אלה המחזור הוא " π " (או 180°), דבר שאפשר להביעו בנוסחות

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha + k \cdot \pi) \\ \cot \alpha &= \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha + k \cdot \pi) \\ \tan \alpha^\circ &= \tan(\alpha^\circ + 180^\circ) = \tan(\alpha^\circ + k \cdot 180^\circ) \\ \cot \alpha^\circ &= \cot(\alpha^\circ + 180^\circ) = \cot(\alpha^\circ + k \cdot 180^\circ) \end{aligned} \right\} k=0; \pm 1; \pm 2 \dots \quad (6.1.2)$$

שתי הפונקציות $y = \cot x$; $y = \tan x$ הן פונקציות אי-זוגיות באשר הן מקיימות

$$\begin{aligned} \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

להלן כמה דוגמות לקביעת המחזור של פונקציות טריגונומטריות או לבדיקת "זוגיותן" או אי זוגיותן:

(i) המחזור של הפונקציה $y = \sin 5x$ הוא $\frac{2\pi}{5}$ (או $\frac{360^\circ}{5}$)

כי אם נחליף את x ב- $\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$ נקבל

$$y = \sin 5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin(5x + 2\pi) = \sin 5x$$

כמו כן ברור כי פונקציה זו אי זוגית, כי

$$\sin[5(-x)] = \sin(-5x) = -\sin 5x$$

(ii) המחזור של הפונקציה $y = \cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}$ הוא 12π

בין שזו הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של מחזור הפונקציה

$$\cos \frac{x}{2}, \text{ שהוא } 4\pi \text{ ושל מחזור הפונקציה } \frac{x}{2}. \text{ שהוא } 3\pi.$$

כמו כן ברור כי פונקציה זו זוגית, כיון ש-

$$\cos\left(-\frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}^2 \frac{-x}{3} = \cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}$$

תרגילים:

- 1.1. הבע את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של הזוויות הבאות בעזרת פונקציות טריגונומטריות של זוויות חדות
(א) 100° (ב) 200° (ג) 250° (ד) 350° (ה) 400° (ו) 500°
(ז) 1000° (ח) -100° (ט) -200°

- 2.2. מצא, בלי עזרת לוחות, את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של הזוויות:
(א) 120° (ב) 135° (ג) 150° (ד) 0° (ה) 90° (ו) 180°
(ז) 240° (ח) 270° (ט) 300° (י) 315° (יא) 330° (יב) 405°

3. חשב:

$\cos \frac{200\pi}{3}$	(ב)	$\sin \frac{100\pi}{3}$	(א)
$\cot \frac{85\pi}{6}$	(ד)	$\tan \frac{45\pi}{4}$	(ג)
$\cos \frac{75\pi}{4}$	(ו)	$\sin \frac{25\pi}{2}$	(ה)
$\cot \frac{40\pi}{3}$	(ח)	$\tan \frac{55\pi}{6}$	(ז)

- 4.4. הוכח, בלי עזרת לוחות, כי
(א) $\cos 240^\circ \cos 225^\circ = \cos 315^\circ \cos 300^\circ$
(ב) $\tan 210^\circ \cos 150^\circ = \tan 150^\circ \cos 330^\circ$
(ג) $\tan 135^\circ \cos 150^\circ = \sin 120^\circ \tan 225^\circ$

- 5.5. הוכח, בלי עזרת לוחות, כי
(א) $4 \sin 120^\circ \tan 300^\circ + 6 = 0$
(ב) $4 \cos 150^\circ \sin 240^\circ \tan 225^\circ = 3$
(ג) $2 \sin 135^\circ \cos 315^\circ + \tan 405^\circ = 2$
(ד) $3 \cot 120^\circ \cot 240^\circ + \cot 225^\circ = 0$

6. הוכח, בלי עזרת לוחות, כי

$$2 \sin^2 \frac{17\pi}{4} + \tan^2 \frac{33\pi}{4} \cot \frac{3\pi}{4} = 0 \quad (\text{א})$$

$$\cos^2 \frac{10\pi}{3} + \sin^2 \frac{20\pi}{3} = \tan^2 \frac{25\pi}{4} \quad (\text{ב})$$

7. הבע בעזרת פונקציות של הזווית החדה α את הערכים של

$$\begin{aligned} & \tan(270^\circ - \alpha) \quad (\text{א}) \quad \cos(180^\circ - \alpha) \quad (\text{ב}) \quad \sin(90^\circ + \alpha) \quad (\text{ג}) \\ & \cos(270^\circ - \alpha) \quad (\text{ד}) \quad \cot(270^\circ + \alpha) \quad (\text{ה}) \quad \sin(180^\circ + \alpha) \quad (\text{ו}) \\ & \cot(180^\circ - \alpha) \quad (\text{ז}) \quad \tan(360^\circ - \alpha) \quad (\text{ח}) \end{aligned}$$

8. הוכח את הזהויות α זווית חדה:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) \quad (\text{א})$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad (\text{ב})$$

$$1 + \tan \alpha \tan(90^\circ + \alpha) = 0 \quad (\text{ג})$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha \quad (\text{ד})$$

9. הוכח את הזהויות α זווית חדה:

$$\sin(2\pi - \alpha) \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \quad (\text{א})$$

$$= \cos(2\pi + \alpha) \tan(\pi + \alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cos(-\alpha) = \quad (\text{ב})$$

$$= \sin \alpha \cot(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

10. מצא את ערכי שאר הפונקציות הטריגונומטריות, אם ידוע, כי

$$\left(\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right) \quad \sin \alpha = -0.5 \quad (\text{א})$$

$$\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right) \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{ב})$$

$$(90^\circ < \alpha < 180^\circ) \quad \tan \alpha = -1 \quad (\text{ג})$$

$$(180^\circ < \alpha < 270^\circ) \quad \cot \alpha = \sqrt{3} \quad (\text{ד})$$

$$\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha} \quad (\text{א}) \quad \text{מהו ערך הבטוי}$$

$$\text{כאשר } \tan \alpha = -2$$

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\cot \alpha - \cos \alpha} \quad (\text{ב}) \quad \text{מהו ערך הבטוי}$$

$$\text{כאשר } \cos \alpha = -0.8 \quad \text{ו-} \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

12. מצא בצורה כללית את הזוויות α שעבורן קיים

$$\begin{array}{lll} \sin \alpha = 0 & (\text{א}) & \sin \alpha = -0.5 & (\text{ב}) & \sin \alpha = 0.5 & (\text{ג}) \\ \sin \alpha = 1.5 & (\text{ד}) & \sin \alpha = -1 & (\text{ה}) & \sin \alpha = 1 & (\text{ו}) \end{array}$$

13. מצא בצורה כללית את הזוויות α שעבורן קיים

$$\begin{array}{lll} \cos \alpha = 0 & (\text{א}) & \cos \alpha = -0.5 & (\text{ב}) & \cos \alpha = 0.5 & (\text{ג}) \\ \cos \alpha = -2 & (\text{ד}) & \cos \alpha = -1 & (\text{ה}) & \cos \alpha = 1 & (\text{ו}) \end{array}$$

14. מצא בצורה כללית את הזוויות α שעבורן קיים

$$\begin{array}{lll} \tan \alpha = 0 & (\text{א}) & \tan \alpha = -1 & (\text{ב}) & \tan \alpha = 1 & (\text{ג}) \\ \tan \alpha = \infty & (\text{ד}) & \tan \alpha = -\sqrt{3} & (\text{ה}) & \tan \alpha = \sqrt{3} & (\text{ו}) \end{array}$$

15. מצא בצורה כללית את הזוויות α שעבורן קיים

$$\begin{array}{lll} \cot \alpha = 0 & (\text{א}) & \cot \alpha = -1 & (\text{ב}) & \cot \alpha = 1 & (\text{ג}) \\ \cot \alpha = \infty & (\text{ד}) & \cot \alpha = -\sqrt{3} & (\text{ה}) & \cot \alpha = \sqrt{3} & (\text{ו}) \end{array}$$

16. ב. γ, β, α הן זוויות המשולש. הוכח, כי

$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma & (\text{א}) \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma = 0 & (\text{ב}) \\ \tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma = 0 & (\text{ג}) \\ \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2} & (\text{ד}) \\ \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2} & (\text{ה}) \\ \sin(2\alpha + \beta + \gamma) + \sin \alpha = 0 & (\text{ו}) \\ \cos(2\alpha + 2\beta + \gamma) = \cos \gamma & (\text{ז}) \\ \cos \frac{2\alpha + \beta + \gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = 0 & (\text{ח}) \\ \tan(\alpha + \beta + 2\gamma) = \tan \gamma & (\text{ט}) \\ \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \frac{\alpha + 2\beta}{2} & (\text{י}) \end{array}$$

17. ב. γ', β', α' הן שלוש הזוויות החיצוניות של משולש. הוכח, כי

$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha' + \beta') + \sin \gamma' = 0 & (\text{א}) \\ \cos(\alpha' + \beta') = \cos \gamma' & (\text{ב}) \\ \sin \frac{\alpha' + \beta'}{2} = \sin \frac{\gamma'}{2} & (\text{ג}) \end{array}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha' + \beta') + \tan \gamma' &= 0 & (ד) \\ \cos(\alpha' + 2\beta') &= \cos(\beta' - \gamma') & (ה) \\ \tan\left(\alpha' + \frac{\gamma'}{2}\right) + \tan\left(\beta' + \frac{\gamma'}{2}\right) &= 0 & (ו)\end{aligned}$$

ב.18. $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ הן ארבע זוויות המרובע. הוכח, כי

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin \delta &= 0 & (א) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\gamma + \delta) & (ב) \\ \tan \alpha + \tan(\beta + \gamma + \delta) &= 0 & (ג) \\ \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \sin \frac{\gamma + \delta}{2} & (ד)\end{aligned}$$

ב.19. לאילו ערכי הזווית x מתקיימים השוויונים

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(\pi - x) & (ב) & \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) & (א) \\ \cos(\pi + x) &= \cos(\pi - x) & (ד) & \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & (ג) \\ \tan x &= \tan(\pi - x) & (ו) & \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) & (ה) \\ \cot x &= \cot 2x & (ז) & \tan x = \tan(\pi + x) & (ז) \\ \tan x &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & (י) & \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & (ט)\end{aligned}$$

ב.20. מצא את המחזור של הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned}y &= \tan 3x & (ג) & y = \cos \frac{1}{2}x & (ב) & y = \sin 2x & (א) \\ y &= \cos \frac{\pi - x}{2} & (ה) & y &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & (ד) \\ y &= \cot \frac{\pi - x}{3} & (ו)\end{aligned}$$

ב.21. אילו מן הפונקציות הבאות הן זוגיות!

$$\begin{aligned}y &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & (ב) & y &= \sin x^2 & (א) \\ y &= \tan^2 x & (ד) & y &= \cos 2x & (ג) \\ y &= \sin 3x & (ו) & y &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & (ה)\end{aligned}$$

22. ב. הוכח את הנוסחה להישוב שטחו של משולש ע"פ שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן, אם הזווית הזו היא קהה.

23. ב. תאר את הפונקציה $y = 1 + \sin 2x$ תיאור גרפי, לערכי x המקיימים $-90^\circ \leq x \leq 450^\circ$, והשתמש בגרף על-מנת להתיר את המשוואות

$$1 + \sin 2x = 1.5 \quad (\text{ב}) \quad 1 + \sin 2x = 0 \quad (\text{א})$$

$$1 + \sin 2x = 2 \quad (\text{ד}) \quad 1 + \sin 2x = 0.5 \quad (\text{ג})$$

בדוק את התוצאות ע"י הצבה.

24. ב. תאר את הפונקציה $y = \sin x + \cos x$ תיאור גרפי לערכי x המקיימים $-90^\circ \leq x \leq 450^\circ$, והשתמש בגרף על-מנת להתיר את המשוואות

$$\sin x + \cos x = 0 \quad (\text{ב}) \quad \sin x + \cos x = 1 \quad (\text{א})$$

$$\sin x + \cos x + 1 = 0 \quad (\text{ד}) \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \quad (\text{ג})$$

25. ב. תאר תיאור גרפי את הפונקציות

$$0^\circ \leq x \leq 360^\circ \quad y = \sin \frac{1}{2}x \quad (\text{א})$$

$$0^\circ \leq x \leq 180^\circ \quad y = \tan 2x \quad (\text{ב})$$

$$0^\circ \leq x \leq 360^\circ \quad y = \cos x + \cos 2x \quad (\text{ג})$$

$$0^\circ \leq x \leq 720^\circ \quad y = \frac{1}{2} \sin x + \sin \frac{1}{2}x \quad (\text{ד})$$

$$0^\circ \leq x \leq 360^\circ \quad y = 2 \cos x - \sin 2x \quad (\text{ה})$$

$$0^\circ \leq x \leq 360^\circ \quad y = \tan 2x - \cot x \quad (\text{ו})$$

26. ב. התר בעזרת תיאורים גרפיים את אי-השוויונים

$$\sin x > -1 \quad (\text{ג}) \quad \sin x < \frac{1}{2} \quad (\text{ב}) \quad \sin x > 0 \quad (\text{א})$$

$$\cos x < 0 \quad (\text{ו}) \quad \cos x > \frac{1}{2} \quad (\text{ה}) \quad \sin x \leq 1 \quad (\text{ד})$$

$$\tan x < 1 \quad (\text{ט}) \quad \cos x < -1 \quad (\text{ח}) \quad \cos x \geq 1 \quad (\text{ז})$$

$$\tan x > 0 \quad (\text{י})$$

27. ב. בדוק מהו המחזור של הפונקציות הרשומות באי השוויונים הבאים, והעזר בו על-מנת למצוא את הפתרון הכללי של אי-השוויונים:

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2} \quad (\text{ב}) \quad \sin 2x > -\frac{1}{2} \quad (\text{א})$$

$$\cot^2 5x > 3 \quad (\text{ה}) \quad \tan\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) < -1 \quad (\text{ג})$$

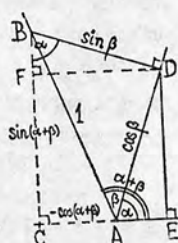
ב.2. פונקציות של סכום או הפרש שתי זוויות

לעיתים קרובות יש צורך לבטא פונקציה של סכום שתי זוויות, נאמר $(\alpha + \beta)$, בעזרת הפונקציות הטריגונומטריות של הזוויות α ו- β . זאת עושים בעזרת הנוסחות

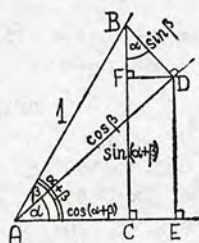
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1.2.ב)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.2.ב)$$

נוכיח נוסחות אלה תחילה עבור זוויות חדות α ו- β , שעבורן גם $\alpha + \beta < 90^\circ$. נעזר בציור 6. בו משרטטת זווית $\alpha + \beta$.



ציור 7.



ציור 6.

אם נקצה על שוק אחת של זווית זו קטע AB , שארכו יחידה אחת, ונבנה את האנך BC לשוק השניה, נקבל, לפי הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות, כי:

$$BC = \sin(\alpha + \beta)$$

$$AC = \cos(\alpha + \beta)$$

כמו כן, אם נבנה את האנך BD לשוק השניה של הזווית β , נקבל

$$BD = \sin \beta ; AD = \cos \beta$$

כמו כן קל להוכיח באמצעים גיאומטריים כי הזווית $\angle CBD$ שווה ל- α (שוקי הזוויות מאונכות בהתאמה 1). לכן, אם נבנה עוד את האנך DE לישר AC ואת האנך DF לישר BC נוכל לאמר:

$$\sin(\alpha + \beta) = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{DE}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \overline{AC} = \overline{AE} - \overline{FD}$$

אבל, אם נעזר במשולשים ישרי הזווית $\triangle ADE$; $\triangle BDF$

$$\overline{BF} = \overline{BD} \cdot \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha$$

$$\overline{DE} = \overline{AD} \cdot \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$$

$$\overline{AE} = \overline{AD} \cdot \cos \alpha = \cos \beta \cos \alpha$$

$$\overline{FD} = \overline{BD} \cdot \sin \alpha = \sin \beta \sin \alpha$$

ולכן:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1.2.ב)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.2.ב)$$

נוכל להוכיח שנוסחות אלה נשארות בחקפן גם כאשר α ו- β זוויות חדות, אשר סכומן גדול מ- 90° . לשם כך נעזר בציור ב.7. לפי ציור זה:

$$\sin(\alpha + \beta) = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{DE}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\overline{AC} = \overline{AE} - \overline{FD}$$

הקורא מתבקש להשלים את ההוכחה בדומה להוכחה של המקרה

הקודם.

אפשר להוכיח שהנוסחות (1.2.ב); (2.2.ב) נכונות גם אם α ו- β זוויות שאינן חדות, אך מספר המקרים שיש לפרט רב מאוד, ולא נוכל להביא את ההוכחה המלאה בכל המקרים. נדגים את השלמת ההוכחה במקרה שהזווית α קהה, β חדה והסכום $(\alpha + \beta)$ קטן מ- 180° . בהוכחה זו נציין את הזווית $(\alpha - 90^\circ)$ ב- γ . כך ש- $\alpha = 90^\circ + \gamma$ ונעזר בזהויות

$$\sin(90^\circ + \varphi) = \cos \varphi$$

$$\cos(90^\circ + \varphi) = -\sin \varphi$$

אשר נובעות מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות בעזרת המעגל הטריגונומטרי. לפי הסימון לעיל:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ + \gamma + \beta) = \cos(\gamma + \beta) =$$

$$= \cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \beta =$$

$$= \sin(90^\circ + \gamma) \cos \beta + \cos(90^\circ + \gamma) \sin \beta =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

עתה נוכל להוכיח גם את הנוסחות לחישוב סינוס או קוסינוס

של הפרש שתי זוויות:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (3.2.ב)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (4.2.ב)$$

נרשום את הזווית α כסכום שתי זוויות

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$$

ונעזר בנוסחות (1.2.ב) ו-(2.2.ב). נקבל:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \sin (\alpha - \beta) \cos \beta + \cos (\alpha - \beta) \sin \beta \\ \cos \alpha &= \cos (\alpha - \beta) \cos \beta - \sin (\alpha - \beta) \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

עתה נטפל בנוסחות אלה כאילו היו מערכת של שני משוואות עם שני נעלמים, הלא הם $\sin(\alpha - \beta)$ ו- $\cos(\alpha - \beta)$. על מנת לחשב את הנעלם $\sin(\alpha - \beta)$ נוכל להכפיל את הנוסחה הראשונה ב- $\cos \beta$ ואת השנייה ב- $(-\sin \beta)$. אחר חיבור יתקבל:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta &= \sin (\alpha - \beta) \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = \\ &= \sin (\alpha - \beta) \cdot 1 \end{aligned}$$

ובוה הוכחה הנוסחה (3.2.ב). לו הכפלנו את הנוסחה הראשונה ב- $\sin \beta$ ואת השנייה ב- $\cos \beta$ וחיברנו את הנוסחות המתקבלות אחרי ההכפלה — הרי התוצאה היתה הנוסחה (4.2.ב).

אפשר להוכיח את הנוסחות (3.2.ב) ו-(4.2.ב) גם באופן ישיר בעזרת ציורים הדומים לציורים 6. ו-7. הקורא מתבקש לצייר ציורים אלה ולנסות להוכיח את הנוסחות באופן ישיר, מבלי להסתמך על הנוסחות (1.2.ב) ו-(2.2.ב).

כמו כן אפשר להוכיח את הנוסחות (3.2.ב) ו-(4.2.ב) ע"י החלפת הזווית β בזווית $(-\beta)$ בנוסחות (1.2.ב) ו-(2.2.ב). הקורא מתבקש לבצע החלפה זו, ולהוכיח באמיתות הטענה.

והרי כמה דוגמות לשימוש בנוסחות אלה:

ו) נתון, כי α, β זוויות חדות. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\sin \beta = \frac{8}{17}$.

מצא את ערכי $\sin(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$.

תחילה יש לחשב $\cos \alpha$ ו- $\cos \beta$.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}; \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}; \quad \cos \beta = \frac{15}{17}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5} = \frac{45 + 32}{85} = \frac{77}{85}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{45 - 32}{85} = \frac{13}{85}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{17} - \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{17} = \frac{60-24}{85} = \frac{44}{85}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{60+24}{85} = \frac{84}{85}$$

(II) נתון, כי α, β חדות. $\tan \alpha = \sqrt{2}$; $\tan \beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. מצא ערך $\sin(\alpha+\beta)$.

$$\sec^2 \alpha = 1 + 2 = 3; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\sec^2 \beta = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}; \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7};$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{2}{7}\sqrt{7} = \frac{1}{7}\sqrt{21}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{2}{7}\sqrt{7} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{7}\sqrt{21} = \\ &= \frac{2}{21}\sqrt{42} + \frac{1}{21}\sqrt{63} = \frac{2\sqrt{42} + 3\sqrt{7}}{21} \end{aligned}$$

(III) $\sin(\alpha-30^\circ)$. חשב את $\sin \alpha$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). (III)

$$\cos \alpha = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha-30^\circ) = \sin \alpha \cos 30^\circ - \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$$

(IV) הוכח, כי $\sin(45^\circ+\alpha) \cos(45^\circ+\alpha) = \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$

$$\sin(45^\circ+\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\cos(45^\circ+\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \alpha - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)$$

ומכאן המסקנה הדרושה.

(V) חשב $\sin(\alpha-\beta+\gamma)$.

$$\sin(\alpha-\beta+\gamma) = \sin[(\alpha-\beta)+\gamma] =$$

$$= \sin(\alpha-\beta) \cos \gamma + \cos(\alpha-\beta) \sin \gamma =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma +$$

$$+ \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

תרגילים:

28. ב. פשט כל אחד מהבטויים הבאים:
- (א) $\sin(\alpha + 30^\circ) - \sin(\alpha - 30^\circ)$
 - (ב) $\cos(\alpha + 45^\circ) - \cos(\alpha - 45^\circ)$
 - (ג) $2 \sin 10^\circ \cos 50^\circ + 2 \cos 10^\circ \sin 50^\circ$
 - (ד) $\cos 78^\circ \cos 18^\circ + \sin 78^\circ \sin 18^\circ$
 - (ה) $\frac{\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin \alpha}$
 - (ו) $\sin(60^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha)$
 - (ז) $\sin(30^\circ - \alpha) \cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha) \sin(30^\circ + \alpha)$
29. ב. α, β הן זוויות חדות. נתון, כי $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{5}{13}$. מצא את ערכי $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$.
30. ב. הראה, כי $\sin 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.
31. ב. α, β הן זוויות חדות. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; $\sin(\alpha + \beta) = \frac{24}{25}$. מצא את $\sin \beta$.
32. ב. α, β הן זוויות חדות. $\cos \alpha = \frac{40}{41}$; $\cos(\beta - \alpha) = \frac{3}{5}$. מצא את $\cos \beta$.
33. ב. נתון, כי $-\frac{1}{7} = \cos \alpha$; $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$. הוכח, כי $\beta = 60^\circ$.
34. ב. α חדה, $\cos \alpha = 0.6$. מצא $\sin(\alpha + 30^\circ)$.
35. ב. α חדה, $\sin \alpha = \frac{8}{17}$. מצא $\cos(\alpha + 45^\circ)$; $\sin(\alpha + 45^\circ)$.
36. ב. α חדה, $\cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. מצא $\cos(\alpha - 30^\circ)$.
37. ב. $\tan \alpha = \sqrt{2}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. מצא $\sin(60^\circ - \alpha)$.
38. ב. $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$, β חדה, $\cos \beta = 0.96$. מצא $\sin(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$.
39. ב. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $270^\circ < \beta < 360^\circ$. מצא $\cos(\alpha \pm \beta)$.
40. ב. הראה, כי
41. ב. הוכח את הנוסחות
- $$\sin(\alpha + \beta - \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma +$$
- $$- \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

$$\cos(\alpha - \beta - \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \\ + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma$$

ב.42. α, β, γ הן זוויות חדות.

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}; \cos \beta = \frac{5}{13}; \cos \gamma = \frac{24}{25}$$

מצא את ערך $\cos(\alpha - \beta + \gamma)$.

ב.43. הוכח את ההוויות:

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (א)$$

$$\cos(\alpha + 60^\circ) \cos(\alpha - 60^\circ) = \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \quad (ב)$$

$$\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta \quad (ג)$$

$$\sin \alpha + \cot \beta \cos \alpha = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \quad (ד)$$

ב.44. מצא בדרך הקצרה ביותר את ערכי הבטויים:

$$\sin 15^\circ + \tan 30^\circ \cos 15^\circ \quad (א)$$

$$\sin 15^\circ + \tan 60^\circ \cos 15^\circ \quad (ב)$$



בעזרת הנוסחות (1.2); (2.2) קל להוכיח גם את הנוסחה לחישוב $\tan(\alpha + \beta)$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (5.2.ב)$$

הוכחה:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

אם נחלק כל אחד מהבטויים שבמונה ובמכנה ב- $\cos \alpha \cos \beta$ נקבל:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

באופן דומה מוכיחים, בעזרת הנוסחות (3.2) ו-(4.2) כי

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (6.2.ב)$$

הקורא מתבקש להשלים את פרטי ההוכחה, וכן לרשום את הנוסחת הנוסחת

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \quad (7.2.ב)$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha} \quad (8.2.5)$$

דוגמות:

(i) α, β חדות. $\tan \beta = 4$; $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. מצא $\tan(\alpha \pm \beta)$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{2}{3} + 4}{1 - \frac{8}{3}} = -2.8$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{2}{3} - 4}{1 + \frac{8}{3}} = -1\frac{1}{11}$$

(ii) α, β חדות. $\tan \beta = \frac{1}{3}$; $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. הראה, בלי שמוש בלוח, כי $\alpha + \beta = 45^\circ$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

ומכאן: $\alpha + \beta = 45^\circ$

(iii) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. מצא $\tan(\alpha - 45^\circ)$. אם $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, הרי כאן $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, ולכן

$$\tan(\alpha - 45^\circ) = \frac{-\frac{4}{3} - 1}{1 - \frac{4}{3}} = 7$$

(iv) מצא את ערך $\cot 75^\circ$.

$$\cot 75^\circ = \cot(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\cot 45^\circ \cot 30^\circ - 1}{\cot 45^\circ + \cot 30^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

תרגילים:

ב. 45. α, β זוויות חדות. $\tan \alpha = 0.6$, $\tan \beta = 0.4$. מצא $\tan(\alpha \pm \beta)$.

ב. 46. α, β זוויות חדות. $\cot \beta = 5$; $\cot \alpha = 3$. מצא $\cot(\alpha \pm \beta)$.

ב. 47. α, β חדות. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = 0.28$. מצא $\tan(\alpha \pm \beta)$.

ב. 48. הוכח, כי $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

ב. 49. α, β חדות. $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan(\alpha + \beta) = 1\frac{1}{3}$. מצא $\tan(\beta - \alpha)$.

ב. 50. α חדה, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $\tan \alpha = \frac{2}{3}$; $\tan \beta = -\frac{1}{2}$. מצא $\cot(\beta - \alpha)$.

ב. 51. α חדה, $\tan \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. מצא $\tan(\alpha + 60^\circ)$.

ב. 52. $\sin \alpha = \frac{-12}{13}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. מצא $\tan(\alpha - 45^\circ)$.

ב. 53. $\sin \beta = \cos \alpha = \frac{-3}{5}$, $270^\circ < \beta < 360^\circ$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. מצא $\tan(\beta + \alpha)$.

ב. 54. (א) הוכח, כי

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \tan \gamma - \tan \beta \tan \gamma}$$

(ב) הראה בעזרת הנוסחה הנ"ל, כי טכום הטנגנסים של זוויות המשולש שווה למכפלתם.

ב. 55. הבע בצורה פשוטה יותר כל אחד מהבטויים:

א.	$\frac{\tan 2\alpha - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan 2\alpha}$	ב.	$\frac{\cot 2\alpha \cot \alpha + 1}{\cot \alpha - \cot 2\alpha}$
ד.	$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$	ג.	$\frac{1}{1 - \tan \alpha} - \frac{1}{1 + \tan \alpha}$

ב. 3. פונקציות של זווית כפולה ושל חצי זווית.

אם מציבים בנוסחות (1.2), (2.2), (5.2), (7.2) במקום הזווית β את הזווית α , מתקבלות הנוסחות לחישוב פונקציות טריגונומטריות של הזווית הכפולה 2α .

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.3.ב)$$

הוכחה:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (2.3.ב)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = \\ &= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (3.3.ב)$$

הוכחה:

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2\cot \alpha} \quad (4.3.ב)$$

ההוכחה דומה להוכחת הנוסחה הקודמת.

דוגמות:

(I) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, מצא $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2 \cdot 25}{169} = \frac{119}{169}$$

(II) $\sin \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, מצא $\tan 2\alpha$.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}; \quad \tan \alpha = \sqrt{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1 - 2} = -2\sqrt{2}$$

(III) $\cos \alpha = -\frac{17}{25}$, מצא $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{17}{25}$$

$$2\cos^2 \alpha = \frac{8}{25}; \quad \cos \alpha = \frac{2}{5}$$

(IV) הבע בצורה פשוטה ביותר,

$$\frac{2\tan 15^\circ (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ} \quad \text{א.}$$

$$\sin 15^\circ \sin 75^\circ \quad \text{ג.} \quad \frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{2\cos^2 29^\circ - 1} \quad \text{ב.}$$

ה ת ר ה :

$$\tan(2 \times 15^\circ) \times \cos(2 \times 15^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{א)}$$

$$\frac{1}{2} \sin 32^\circ : \cos 58^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{ב)}$$

$$\frac{1}{2} (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{ג)}$$

$$\sqrt{1 - \sin 2\alpha} \quad \text{מצא} \quad \sin \alpha = \frac{3}{4} \quad \alpha \text{ חדה,} \quad \text{ו)}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sin 2\alpha} &= \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \pm \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \pm (\sin \alpha - \cos \alpha) = \\ &= \pm \frac{3 - \sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

תרגילים :

$$\text{ב.56. א) } \alpha \text{ חדה, } \sin \alpha = \frac{7}{25}, \text{ מצא } \cos 2\alpha, \sin 2\alpha \text{ ב) כנ"ל, אם } 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

$$\text{ב.57. א) } \alpha \text{ חדה, } \sin \alpha = \frac{4}{5}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ, \text{ מצא } \tan 2\alpha$$

$$\text{ב.58. א) } \alpha \text{ חדה, } \tan \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{5}, \text{ מצא } \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$$

$$\text{ב.59. א) } \alpha \text{ חדה, } \cos \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3}, 270^\circ < \alpha < 360^\circ, \text{ מצא } \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$$

$$\text{ב.60. א) } \alpha \text{ חדה, } \cos 2\alpha = \frac{3}{4}, \text{ מצא } \cot \alpha, \cos \alpha$$

$$\text{ב.61. א) } \alpha \text{ חדה, } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{-5}{\sqrt{41}}, 180^\circ < \alpha < 360^\circ, \text{ מצא } \cos \alpha$$

ב.62. מצא את ערכי הבטויים

$$\text{א) } 4 \cos 15^\circ \cos 75^\circ \quad \text{ב) } \sin 22\frac{1}{2}^\circ \cos 22\frac{1}{2}^\circ$$

$$\text{ג) } 4 \sin^2 15^\circ - 2 \quad \text{ד) } \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ - \frac{1}{2}$$

$$\text{ה) } \frac{\tan 22\frac{1}{2}^\circ}{1 - \tan^2 22\frac{1}{2}^\circ} \quad \text{ו) } \cot 22\frac{1}{2}^\circ - \tan 22\frac{1}{2}^\circ$$

$$\text{ב.63. א) } \tan 2\alpha, \alpha \text{ חדה, מצא } \cot \alpha$$

$$\text{ב.64. א) } \alpha \text{ חדה, } \tan \alpha = 2, \text{ הוכח, כי } \tan(2\alpha - 45^\circ) = 7$$

$$\text{ב.65. א) } \alpha, \beta \text{ חדות, } \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{5}, \sin \beta = \frac{1}{2} \sqrt{5}, \text{ מצא } \cos(2\alpha - \beta) \quad \text{ב)}$$

$$\text{א) } \sin(\alpha + 2\beta) \quad \text{ב)}$$

ב.66. הבע בצורה פשוטה ביותר :

$$(2\sin^2 65^\circ - 1) : 2\sin 20^\circ \quad (\text{א})$$

$$(\cos^2 18^\circ - \cos^2 72^\circ) : 2\cos 27^\circ \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ \sin 80^\circ} \quad (\text{ד}) \quad \frac{2\tan 35^\circ \sin 20^\circ}{1 - \tan^2 35^\circ} \quad (\text{ג})$$

ב.67. הוכח את הזהויות הבאות :

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad (\text{א})$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha} = \cos 2\alpha \quad (\text{ג})$$

$$\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2\cot 2\alpha \quad (\text{ד})$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha \quad (\text{ה})$$

$$\frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha \quad (\text{ו})$$

$$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha \quad (\text{ז})$$

$$\sqrt{1 + \sin 50^\circ} = \sin 25^\circ + \sin 65^\circ \quad (\text{ח})$$

$$\sin 2\alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 2 \quad (\text{ט})$$

$$4\sin^3 \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha = \sin 2\alpha \quad (\text{י})$$

$$\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = 2\cot 2\alpha \quad (\text{יא})$$

$$\cot \alpha - 2\cot 2\alpha = \tan \alpha \quad (\text{יב})$$

$$\tan (45^\circ + \alpha) - \tan (45^\circ - \alpha) = 2\tan 2\alpha \quad (\text{יג})$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha} \quad (\text{יד})$$

$$2\cot 2\alpha \tan \alpha + \tan^2 \alpha = 1 \quad (\text{טו})$$

ב.68. α, β חדות. $2\tan \frac{\beta}{2} = 7\tan \frac{\alpha}{2} = 1$. מצא $\tan(\beta - \alpha)$.

נוכיח עתה מספר נוסחות לחישוב פונקציות טריגונומטריות של חצי הזווית. נוסחות אלה נובעות מן הנוסחה (2.3.ב), אם מחליפים בה את הזווית α ב- $\frac{\alpha}{2}$.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (5.3.ב)$$

הערה: סימני השורשים יקבעו על פי הרביע בו נמצאת הזווית $\frac{\alpha}{2}$.

הוכחה: לפי (2.3.ב)

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

לפי אותה נוסחה:

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

הנוסחות לחישוב טנגנס וקוטנגנס של חצי זווית מתקבלות מהנוסחות (5.3.ב).

(6.3.ב)

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

הערה: הסימנים יקבעו לפי הרביע בו נמצאת הזווית $\frac{\alpha}{2}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)^2}} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \\ &= \pm \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \end{aligned}$$

את התוצאה האחרונה מקבלים ע"י הכפלת השבר שמתחת לשרש

בבטוי

$$\cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

(7.3.2)

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

הערה: הסימנים יקבעו לפי הרביע בו נמצאת הזווית $\frac{\alpha}{2}$.
ההוכחה דומה להוכחת הנוסחה הקודמת.

דוגמות:

(I) α חדה, $\cos \alpha = \frac{7}{25}$. מצא $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

(II) α חדה, $\sin \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{2}$. מצא $\tan \frac{\alpha}{2}$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}; \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{2}}{\frac{1}{3}\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

(III) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, α חדה. מצא $\sin \alpha$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$1 + \cos \alpha = 4 - 4 \cos \alpha$$

$$5 \cos \alpha = 3; \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

(IV) מצא ערך $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$

$$\sin 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

תרגילים:

ב.69. $\cos \alpha = -\frac{17}{25}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, מצא $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$.

ב.70. α חדה. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. מצא $\cot \frac{\alpha}{2}$.

ב.71. α חדה. $\cos \alpha = 0.75$. מצא $\tan \frac{\alpha}{2}$.

ב.72. מצא א) $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$ ב) $\tan^2 22\frac{1}{2}^\circ$.

ב.73. $180^\circ < \alpha < 270^\circ$; $\sin \alpha = \frac{-4}{5}$. מצא $\cos \frac{\alpha}{2}$.

ב.74. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$. מצא $\tan \frac{\alpha}{2}$.

ב.75. $0 < \alpha < 180^\circ$; $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{12}$. מצא $\sin \frac{\alpha}{4}$.

ב.76. α חדה, $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. מצא $\tan \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

ב.77. הבע בצורה פשוטה ביותר כל אחד מהבטויים:

א) $\sqrt{\frac{1 + \cos 4\alpha}{2}}$ ב) $\frac{\sin 3\alpha}{1 + \cos 3\alpha}$

ג) $\frac{\sin 78^\circ}{1 - \sin 12^\circ}$ ד) $\frac{\cos 42^\circ}{1 + \sin 42^\circ}$

ב.78. נתון, כי $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. הראה, כי $\frac{\sin \alpha}{2 - 3 \cos \alpha} = 4$.

ב.79. הוכח את הזהויות:

א) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$

ב) $\tan \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sec \alpha + \tan \alpha$

ג) $2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin \alpha = 1$

4. נוסחות לחישוב סכום או הפרש של פונקציות טריגונומטריות.

לעיתים קרובות יש צורך להפוך סכום או הפרש של פונקציות טריגונומטריות למכפלה, הן על מנת לאפשר חישוב נוח יותר בלוגריתמים, והן לשם יצירת אפשרות צמצום בשברים. במקרים אלה משתמשים בנוסחות:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.4.ב)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (2.4.ב)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (3.4.ב)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (4.4.ב)$$

הוכחת הנוסחות (1.4.ב) עד (4.4.ב) מבוססת על התחבולת שאפשר לרשום את α ואת β כסכום וכהפרש של שתי זוויות

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

לכן:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \\ &+ \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

ובזה הוכחה הנוסחה (1.4.ב). באופן דומה מוכיחים את שאר הנוסחות.

דוגמות:

(i) היפוך למכפלה:

$$\sin 40^\circ + \sin 70^\circ = 2 \sin 55^\circ \cos 15^\circ \quad (\text{א})$$

$$\cos 32^\circ + \cos 22^\circ = 2 \cos 27^\circ \cos 5^\circ \quad (\text{ב})$$

$$\sin 85^\circ - \sin 25^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 55^\circ = \cos 55^\circ \quad (\text{ג})$$

$$\cos 2\alpha - \cos 6\alpha = 2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha \quad (\text{ד})$$

(ii) פישוט ביטויים:

$$\frac{\sin 42^\circ + \sin 28^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{2 \sin 35^\circ \cos 7^\circ}{2 \sin 35^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\cos 7^\circ}{\cos 35^\circ} \quad (\text{א})$$

$$\frac{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha} = \frac{2 \cos 4\alpha \cos \alpha}{2 \sin 4\alpha \cos \alpha} = \cot 4\alpha \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\sin 84^\circ - \sin 16^\circ}{\cos 84^\circ + \cos 16^\circ} = \frac{2 \sin 34^\circ \cos 50^\circ}{2 \cos 34^\circ \cos 50^\circ} = \tan 34^\circ \quad (\text{ג})$$

$$\frac{1 + \cos 20^\circ}{\frac{1}{2} + \sin 10^\circ} = \frac{\cos 0^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 30^\circ + \sin 10^\circ} = \quad (\text{ד})$$

$$= \frac{2 \cos^2 10^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{2 \sin 10^\circ}$$

$$\frac{\sin 20^\circ + \sin 8^\circ - \sin 4^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 8^\circ + \cos 4^\circ} = \quad (\text{ה})$$

$$= \frac{2 \sin 8^\circ \cos 12^\circ + \sin 8^\circ}{2 \cos 12^\circ \cos 8^\circ + \cos 8^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 8^\circ (2 \cos 12^\circ + 1)}{\cos 8^\circ (2 \cos 12^\circ + 1)} = \tan 8^\circ$$

$$\sin^2 18^\circ - \sin^2 12^\circ =$$

$$= (\sin 18^\circ + \sin 12^\circ) (\sin 18^\circ - \sin 12^\circ) =$$

$$= 2 \sin 15^\circ \cos 3^\circ \times 2 \sin 3^\circ \cos 15^\circ =$$

$$= 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \cdot 2 \sin 3^\circ \cos 3^\circ =$$

$$= \sin 30^\circ \sin 6^\circ = \frac{1}{2} \sin 6^\circ$$

לפעמים יש צורך להשתמש בנוסחות הג'ל בכיוון הפוך, כלומר להפוך מכפלה לסכום, או הפרש, של פונקציות. במקרים אלו משתמשים בנוסחות

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)] \quad (5.4.2)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)] \quad (6.4.2)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)] \quad (7.4.2)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] \quad (8.4.2)$$

למשל:

$$\begin{aligned} \frac{4 \sin 25^\circ \cos 5^\circ - 1}{4 \cos 70^\circ \cos 50^\circ + 1} &= \frac{2(\sin 30^\circ + \sin 20^\circ) - 1}{2(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) + 1} = \\ &= \frac{1 + 2 \sin 20^\circ - 1}{-1 + 2 \cos 20^\circ + 1} = \tan 20^\circ \end{aligned}$$

או במקרה אחר:

$$\begin{aligned} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{1}{2} \cos 80^\circ (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \cos 80^\circ \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \right) = \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \cos 80^\circ \cos 20^\circ \\ &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4} (\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) = \\ &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ - \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

תרגילים:

80. הוכח, כי

$$\sin 50^\circ + \sin 10^\circ = \sin 70^\circ \quad (א)$$

$$\sin 80^\circ - \sin 10^\circ = \sqrt{2} \sin 35^\circ \quad (ב)$$

$$\cos 20^\circ + \cos 40^\circ = \sqrt{3} \cos 10^\circ \quad (ג)$$

$$\cos 10^\circ - \cos 70^\circ = \cos 50^\circ \quad (ד)$$

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{6} \quad (ה)$$

$$\sin 78^\circ - \sin 42^\circ = \sin 18^\circ \quad (ו)$$

$$\sin 10^\circ - \sin 70^\circ + \sin 130^\circ = 0 \quad (ז)$$

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -\cos 72^\circ \quad (ח)$$

$$\frac{1}{2} + \sin 40^\circ = 2 \sin 35^\circ \sin 85^\circ \quad (ט)$$

$$\sin (30^\circ + \alpha) + \sin (30^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad (י)$$

$$\cos 20^\circ - \frac{1}{2} = 2 \cos 50^\circ \cos 70^\circ \quad (יא)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} - \cos 2\alpha = 2 \sin (22\frac{1}{2}^\circ + \alpha) \sin (\alpha - 22\frac{1}{2}^\circ) \quad (יב)$$

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \quad (ג)$$

$$1 - \sin \alpha = 2 \cos \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \quad (ד)$$

$$= 2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos (\alpha - 45^\circ) \quad (טו)$$

$$\sin 20^\circ + \sin 26^\circ + \sin 40^\circ + \sin 46^\circ = \quad (טז)$$

$$= 4 \sin 33^\circ \sin 80^\circ \sin 87^\circ$$

81. פשט את הבטויים הבאים:

$$\frac{\cos 25^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 25^\circ - \cos 15^\circ} \quad (א) \quad \frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ} \quad (ב)$$

$$\frac{\sin 9\alpha - \sin 7\alpha}{\cos 9\alpha + \cos 7\alpha} \quad (ג) \quad \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \quad (ד)$$

$$\frac{\sin 19^\circ - \sin 37^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 22^\circ} \quad (ה) \quad \frac{\cos 35^\circ + \cos 17^\circ}{\sin 52^\circ} \quad (ו)$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \quad (ז)$$

82. הוכח, כי $\tan A \pm \tan B = \frac{\sin (A \pm B)}{\cos A \cos B}$

83. הוכח, בעזרת הנוסחה בתרגיל הקודם, כי $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = 4$

84. פתח נוסחות עבור $\cot A \pm \cot B$ ו- $\tan A \pm \cot B$

85. הוכח, כי:

$$\frac{\cos A + 2\cos 2A + \cos 3A}{\sin A + 2\sin 2A + \sin 3A} = \cot 2A \quad (א)$$

$$\frac{\sin 5B + \sin 2B - \sin B}{\cos 5B + \cos 2B + \cos B} = \tan 2B \quad (ב)$$

$$2\sin 2C \cos C - \sin 3C = \sin C \quad (ג)$$

$$\sin 85^\circ \cos 5^\circ - \cos 55^\circ \sin 25^\circ = \frac{1}{4} \quad (ד)$$

$$2\sin 55^\circ \cos 25^\circ - 2\sin 35^\circ \cos 5^\circ = \sin 20^\circ \quad (ה)$$

86. הוכח, כי

$$2 \sin 40^\circ \cos 10^\circ = \frac{1}{2} + \sin 50^\circ \quad (\text{א})$$

$$2 \sin 35^\circ \cos 52^\circ = \sin 87^\circ - \cos 73^\circ \quad (\text{ב})$$

$$2 \cos 46^\circ \cos 12^\circ - \sin 32^\circ = \cos 34^\circ \quad (\text{ג})$$

$$2 \sin 15^\circ \sin 55^\circ + \sin 20^\circ = \sin 50^\circ \quad (\text{ד})$$

$$\frac{\cos 10^\circ \cos 50^\circ - 0.25}{\sin 25^\circ \cos 25^\circ} = 1 \quad (\text{ה})$$

$$\frac{4 \sin 18^\circ \sin 27^\circ + \sqrt{2}}{\sin 81^\circ} = 2 \quad (\text{ו})$$

$$16 \sin 5^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 85^\circ = 1 \quad (\text{ז})$$

87. מצא, בלי שימוש בלוחות, את ערכי הבטויים:

$$\sin 12^\circ \sin 72^\circ + \sin 18^\circ \sin 78^\circ \quad (\text{א})$$

$$\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ \quad (\text{ב})$$

88. נתון $\tan 2\alpha$ מצא $\tan(\alpha + 45^\circ) = a$

89. במשולש ישר זווית ושווה-שוקיים ABC (A ישרה), M

היא אמצע הצלע AC. הוכח, כי $\cot MBC = 3$.

90. א. נתון $\tan A = \sqrt{2} - 1$ (A חדה). הוכח, בלי שימוש

בלוח, כי $2A = 45^\circ$.

ב. נתון $\cos B = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ (B חדה). מצא $\cos 2B$.

והוכח, כי $B = 15^\circ$.

91. A יא זווית הבסיס של משולש שווה שוקיים. B זווית

הראש שלו. $\cos A = 0.75$. מצא $\cos B$.

92. נתון, כי $\cos 78^\circ = m$ הבע את $\cos 33^\circ$ בעזרת m

93. A, B הן זוויות חדות. זון, כי $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$

הראה, כי $A + B = 45^\circ$.

94. נתון, כי $\tan A = 3$, $\tan B = 1$. הראה, כי $\tan(2A - B) = \frac{3}{41}$

95. A חדה, $\cot A = \frac{1}{2}$. מצא $\sin 4A$.

96. $180^\circ < A < 270^\circ$. $\tan A = 1\frac{1}{3}$. הוכח, כי

$$2 \tan \frac{A}{2} + 3 \tan A = 0$$

ב.97. נתון, כי $\sin 2A + 2\cos 2A = 2$ (חדה, A). הראה, כי $\tan A = 0$ או $\tan A = \frac{1}{2}$.

ב.98. A, B הן זוויות חדות. נתון, כי $4\cot B = 3\cot A$. הראה, בלי שמוש בלוחות, כי $A + B = 135^\circ$.

ב.99. A, B, C הן חדות. נתון, כי $\tan A = 0.6$, $\tan B = 0.75$, $\tan C = \frac{8}{19}$. הראה, בלי שמוש בלוחות, כי $A + B - C = 45^\circ$.

ב.100. A, B הן זוויות חדות. נתון, כי $\tan A = \frac{1}{7}$; $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$. הראה, בלי שמוש בלוחות, כי $A + 2B = 45^\circ$.

ב.101. A, B הן זוויות חדות. נתון, כי $\tan A = 1 - \frac{1}{m}$; $\tan B = \frac{1}{2m-1}$. הראה, כי $A + B = 45^\circ$.

ב.102. A, B הן זוויות חדות. $\tan A = 1\frac{1}{3}$; $\tan B = \frac{1}{7}$. הראה בלי שמוש בלוחות, כי $A = B + 45^\circ$.

ב.103. A, B הן זוויות חדות. נתון, כי $\cot A \cot B = 6$, $\cot A + \cot B = 5$. הראה, כי $A + B = 45^\circ$.

ב.104. A, B, C הן חדות. נתון, כי $\cot A = 2$; $\cot B = 5$; $\cot C = 8$. הראה בלי שמוש בלוחות, כי $A + B + C = 45^\circ$.

ב.105. A, B הן חדות. נתון, כי $\sqrt{3}\tan A = 2m-1$; $m\sqrt{3}\tan B = 2-m$. הראה, כי $A + B = 60^\circ$.

ב.106. A, B הן חדות. $\tan A = \frac{1}{5}$; $\tan B = \frac{1}{239}$. הראה, כי $4A - B = 45^\circ$.

ב.107. $\tan A = m$ מצא $\tan(45^\circ - \frac{A}{2})$.

ב.108. A זווית חדה, $\sin A + \cos A = 1.4$ מצא $\tan \frac{A}{2}$.

ב.109. הוכח, כי המשולש ABC שזוויות מקיימות את השוויון

$$\frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \cot \frac{B}{2}$$

הוא ישר זווית.

הדרך ב':

$$\frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{1 + \cos B}{\sin B}$$

$$2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2 \cos^2 \frac{B}{2}$$

אולם, $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{A+C}{2} \right) = \cos \frac{B}{2}$

ב.110. הוכח, כי משולש ABC שזוויות מקיימות את השוויון

$$\sin A = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

הוא שווה שוקיים.

הדרך ב':

$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\cos \frac{A}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

אולם,

$$\cos \frac{A}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right) = \sin \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)$$

ולכן,

$$\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

ב.111. הראה, כי משולש ABC , שזוויותיו מקיימות את השוויון

(א) $\tan A - \cot B = \frac{\cot B}{\cos A}$ הוא שווה שוקיים.

(ב) $\cos A + \cos B = \sin C$ הוא ישר זווית.

$$\sin A = 2 \sin B \cos C \quad \text{הוא שווה שוקיים.} \quad (ג)$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B}{\cos A} \quad \text{הוא ישר זווית או שווה שוקיים.} \quad (ד)$$

$$\sin C = \frac{\sin B + \sin A}{\cos B + \cos A} \quad \text{הוא ישר זווית.} \quad (ה)$$

$$\left(\frac{\sin A}{\sin B} \right)^2 = \frac{\tan A}{\tan B} \quad \text{הוא ישר זווית או שווה שוקיים.} \quad (ו)$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \quad \text{הוא ישר זווית.} \quad (ז)$$

$$2 \cos A \cos B + \cos C = 1 \quad \text{הוא שווה שוקיים.} \quad (ח)$$

$$\tan A - \tan B = \sin(A-B) \quad \text{הוא שווה שוקיים.} \quad (ט)$$

$$\tan B = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)} \quad \text{הוא ישר זווית.} \quad (י)$$

$$\frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C} + \tan(A+C) = 0 \quad \text{הוא ישר זווית.} \quad (יא)$$

$$\sin(A-B) = \sin A - \sin(A+C) \quad \text{הוא שווה שוקיים.} \quad (יב)$$

$$\tan A + \tan(A+C) = \tan(A-B) \quad \text{הוא שווה שוקיים.} \quad (יג)$$

$$\cos^2(A-B) = \cos^2 A + \sin^2 B \quad \text{הוא ישר זווית או שווה שוקיים.} \quad (יד)$$

ב.112. הראה, כי המשולש ABC , שבו $\sin A = 2 \sin B$, $\cos C = \frac{1}{2}$, הוא שווה שוקיים.

ב.113. הראה, כי כל אחד מהבטויים הבאים לא ישתנה, אם נחליף בו את הזווית A בזווית B , ואת הזווית B בזווית A .

$$\cos^2 A + \sin^2 A \cos 2B \quad (א)$$

$$\sin^2 A - \cos^2 A \cos 2B \quad (ב)$$

ב.114. נתון, כי $\sin A - \cos A = \frac{1}{2}$. הראה, כי $\sin^8 A - \cos^8 A = \frac{11}{16}$.

ב.115. A, B מקיימות: $\tan(A+B) = 4$, $\tan A + \tan B = 2$. מצא $\tan A$, $\tan B$.

ב.116. A, B, C הן זוויות המשולש. הראה, כי:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

ב.117. השתמש בזהות $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$. כדי להראות, כי

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

ב. 118. $\tan A, \tan B, \tan C$ הן זוויות המשולש. המספרים $\tan A, \tan B, \tan C$

יוצרים סידרה חשבונית. הוכח, כי גם המספרים

$\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ יוצרים סידרה כזו.

ב. 119. $0^\circ < A < 180^\circ$. הוכח, כי $\cot \frac{A}{2} - \cot A \geq 1$

ב. 120. הוכח, כי

$$-\sqrt{3} \leq \frac{3 \sin A}{2 + \cos A} \leq \sqrt{3}$$

הוכח * הזהויות הבאות:

$$1 + \tan A \tan 2A = \sec 2A \quad \text{ב. 121.}$$

$$\frac{1 - \tan A \tan 2A}{1 + \tan A \tan 2A} = \frac{\cos 3A}{\cos A} \quad \text{ב. 122.}$$

$$\frac{\sin 2A}{\sin A} - \frac{\cos 2A}{\cos A} = \sec A \quad \text{ב. 123.}$$

$$\cos A + \cos(A + 120^\circ) + \cos(A + 240^\circ) = 0 \quad \text{ב. 124.}$$

$$\frac{\sin 3A}{\cos A} - \frac{\cos 3A}{\sin A} = \cot A - \tan A \quad \text{ב. 125.}$$

$$\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} = 2 \quad \text{ב. 126.}$$

$$\frac{\sin(A-C)}{\cos A \cos C} + \frac{\sin(B-A)}{\cos B \cos A} + \frac{\sin(C-B)}{\cos C \cos B} = 0 \quad \text{ב. 127.}$$

$$\frac{\sin(A-C)}{\sin A \sin C} + \frac{\sin(B-A)}{\sin B \sin A} = \frac{\sin(B-C)}{\sin C \sin B} \quad \text{ב. 128.}$$

$$\frac{\sin 2A \cos A}{1 + \cos 2A} = \sin A \quad \text{ב. 129.}$$

$$\frac{1 + \sin B - \cos B}{1 + \sin B + \cos B} = \tan \frac{B}{2}$$

$$2(1 + \cos B) \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 B = 1$$

$$\sin 2B (\tan B + \cot 2B) = 1$$

$$\sin C - \cos C \tan \frac{C}{2} = \tan \frac{C}{2}$$

$$\sin 2C - \tan C = \cos 2C \tan C \quad .134.ב$$

$$\operatorname{cosec} C - \cot C = \tan \frac{C}{2} \quad .135.ב$$

$$\sin 3A + \cos A = (\sin A + \cos A)(\sin 2A + \cos 2A) \quad .136.ב$$

$$\sin A + \cos 3A = (\cos A - \sin A)(\sin 2A + \cos 2A) \quad .137.ב$$

$$\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\tan 75^\circ + \tan 15^\circ} = \frac{1}{8} \sqrt{2} \quad .137.ב$$

$$\sin^2(22\frac{1}{2}^\circ + \alpha) - \sin^2(22\frac{1}{2}^\circ - \alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}} \quad .138.ב$$

$$\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} \times \frac{\cos A}{1 + \cos A} = \tan \frac{A}{2} \quad .139.ב$$

$$\frac{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A} = \sec 2A \quad .140.ב$$

$$\sin 4B \cos B - \cos 2B \sin B = \sin 3B \cos 2B \quad .141.ב$$

$$\frac{1 - \sin B}{1 + \sin B} = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{B}{2} \right) \quad .142.ב$$

$$\frac{\tan 2B \tan B}{\tan 2B - \tan B} = \sin 2B \quad .143.ב$$

$$\frac{\cot C + \tan C}{\cot C - \tan C} = \sec 2C \quad .144.ב$$

$$\frac{\cos C + \sin C}{\cos C - \sin C} = \tan 2C + \sec 2C \quad .145.ב$$

$$\frac{\tan^2 C}{1 + \sec C + \tan^2 C} = 2\sin^2 \frac{C}{2} \quad .146.ב$$

$$\sqrt{1 + \sin A} - \sqrt{1 - \sin A} = 2\sin \frac{A}{2} \quad (\text{חידה}) \quad .147.ב$$

$$\frac{\sin 2B - \sin B}{\cos 2B - \cos B + 1} = \tan B \quad .148.ב$$

$$\frac{\sin 2C + \sin C}{\cos 2C + \cos C + 1} = \tan C \quad .149.ב$$

$$\tan A \tan B + (\tan A + \tan B) \cot(A+B) = 1 \quad .150.ב$$

$$\frac{\tan A}{1 + \tan^2 A} + \frac{\cot A}{1 + \cot^2 A} = \sin 2A \quad .151.ב$$

$$\frac{\tan(A+B) + \tan(A-B)}{\tan(A+B) - \tan(A-B)} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B} \quad .152.2$$

$$\frac{1}{1 + \tan A \tan 2A} = \cos 2A \quad .153.2$$

$$\tan A + 2\sin^2 A \cot 2A = \sin 2A \quad .154.2$$

$$\frac{\tan^2(B+45^\circ) - 1}{\tan^2(B+45^\circ) + 1} = \sin 2B \quad .155.2$$

$$4\sin A \sin(60^\circ + A) \sin(60^\circ - A) = \sin 3A \quad .156.2$$

$$4\cos B \sin(30^\circ + B) \sin(30^\circ - B) = \cos 3B \quad .157.2$$

$$(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2 = 4\cos^2 \frac{A+B}{2} \quad .158.2$$

$$(\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 = 4\sin^2 \frac{A-B}{2} \quad .159.2$$

$$\cos^2 C - \sin(30^\circ + C) \sin(30^\circ - C) = \frac{1}{4} \quad .160.2$$

$$\sin^2 B - \sin^2 A = \cos^2 A - \cos^2 B = \sin(B+A) \sin(B-A) \quad .161.2$$

$$\cos^2 B - \sin^2 A = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B) \cos(A-B) \quad .162.2$$

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \sin 83^\circ \quad .163.2$$

$$16\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = 3 \quad .164.2$$

$$\cos C + \sqrt{3} \sin C = 2\sin(C+30^\circ) \quad .165.2$$

$$\sin A + \sin B \cos(A+B) = \sin(A+B) \cos B \quad .166.2$$

$$\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ = 4\sin 15^\circ \sin 80^\circ \sin 85^\circ \quad .167.2$$

$$\sqrt{3} + 2\sin C = 4\sin\left(30^\circ + \frac{C}{2}\right) \cos\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right) \quad .168.2$$

$$1 + \cos C + \cos 2C = 4\cos C \cos\left(\frac{C}{2} + 30^\circ\right) \cos\left(\frac{C}{2} - 30^\circ\right) \quad .169.2$$

$$\cos C + 2\cos 2C + \cos 3C = 4\cos 2C \cos^2 \frac{C}{2} \quad .170.2$$

$$1 + \sin C + \cos C = 2\sqrt{2} \cos \frac{C}{2} \cos\left(\frac{C}{2} - 45^\circ\right) \quad .171.2$$

$$1 - 2\cos C + \cos 2C = -4\sin^2 \frac{C}{2} \cos C \quad .172.2$$

$$(\tan^2 C - 3) \cos^2 C = 4 \sin(C - 60^\circ) \sin(C + 60^\circ) \quad \text{ב.170.}$$

$$\cos^2 C - \sin^2 2C = \cos C \cos 3C \quad \text{ב.171.}$$

$$1 - 4\sin^2 C = 4 \sin(30^\circ + C) \sin(30^\circ - C) \quad \text{ב.172.}$$

$$\sin C + \sin 2C + \sin 3C = 4 \sin \frac{3C}{2} \cos C \cos \frac{C}{2} \quad \text{ב.173.}$$

$$\tan(A+B) - \tan A - \tan B = \tan(A+B) \tan A \tan B \quad \text{ב.174.}$$

$$\tan 70^\circ \tan 65^\circ - \tan 65^\circ - \tan 70^\circ = 1 \quad \text{ב.175.}$$

$$\tan 10^\circ \tan 20^\circ + \tan 20^\circ \tan 60^\circ + \tan 60^\circ \tan 10^\circ = 1 \quad \text{ב.176.}$$

$$\tan 3C - \tan 2C - \tan C = \tan 3C \tan 2C \tan C \quad \text{ב.177.}$$

$$\cos^2(A+B) + \cos^2(A-B) = 1 + \cos 2A \cos 2B \quad \text{ב.178.}$$

$$\frac{\cos^3 C - \cos 3C}{\cos C} + \frac{\sin^3 C + \sin 3C}{\sin C} = 3 \quad \text{ב.179.}$$

$$1 - \tan C + \sec C = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos(45^\circ - \frac{C}{2})} \quad \text{ב.180.}$$

$$\frac{1 + \tan A \tan 2A}{\cot A + \tan A} = \frac{1}{2} \tan 2A \quad \text{ב.181.}$$

$$\cos^3 A + \cos^3(A + 60^\circ) + \cos^2(A - 60^\circ) = 1\frac{1}{2} \quad \text{א. ב.182.}$$

$$\sin^2 B + \sin^2(B + 120^\circ) + \sin^2(120^\circ - B) = 1\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

$$\cos 2C \cot(45^\circ - C) = 2\cos^2(45^\circ - C) \quad \text{ב.183.}$$

$$\sqrt{\tan A + \sin A} + \sqrt{\tan A - \sin A} = \quad \text{A) חדה.} \quad \text{ב.184.}$$

$$= 2\sin\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \sqrt{\tan A}$$

$$\text{ב.185. נתון, כי } A + B + C = 180^\circ \text{ הוכח:}$$

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$$

$$\text{ב.186. במשולש ישר זווית } ABC \text{ (} \angle A \text{ ישרה) הנקודה } D \text{ היא}$$

$$\text{על } AC. \text{ נתון כי } AD = DC; \angle DBC = \frac{1}{4}\sqrt{2}; \tan \angle ABD = \frac{1}{2} \text{ הוכח, כי}$$

$$\tan^2 \angle ABD = \frac{1}{2}$$

ב.5. המשוואות הטריגונומטריות.

המשוואה הטריגונומטרית זוהי משוואה שבה מופיעות הפונקציות הטריגונומטריות של הזוויות הנעלמות.
למשל:

$$\begin{aligned}\sin^2 x + 2\cos^2 x &= 1 \\ \tan(2x - 10^\circ) &= \cot x \\ 1 - \sin 2x &= \tan^2 x \\ 3\tan x \sin 2x &= 5\end{aligned}$$

כל אלה הן משוואות טריגונומטריות.

למשוואה טריגונומטרית המתקיימת לכל ערך של הנעלם המופיע בה קוראים זהות. משוואה טריגונומטרית שאינה מתקיימת לשום ערך של הנעלם קוראים משוואה חסרת פתרונות.
הרי דוגמות של משוואות שהן זהויות:

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos x \tan x \quad \text{או} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \text{ודוגמות של משוואות חסרות פתרונות:} \\ \tan x \cot x &= 3 \quad \text{או} \quad \sin^2 x + \cos x = 5\end{aligned}$$

נטפל תחילה בשלוש משוואות בסיסיות, שידיעה יסודית של פתרון הכללי דרושה לשם התרה של כל המשוואות הטריגונומטריות האחרות:

$$\sin x = \sin \alpha \quad (1.5.ב)$$

$$\cos x = \cos \alpha \quad (2.5.ב)$$

$$\cot x = \cot \alpha \quad \text{או} \quad \tan x = \tan \alpha \quad (3.5.ב)$$

במקרה (1.5.ב) אחד השרשים הוא α שאר השרשים מתקבלים מתוך הזהויות

$$\begin{array}{l|l} \text{(ברדיאנים)} & \text{(במעלות)} \\ \sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi k) & \sin \alpha^\circ = \sin(\alpha^\circ + 360^\circ k) \\ \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha + 2\pi k) & \sin \alpha^\circ = \sin(180^\circ - \alpha^\circ + 360^\circ k) \\ k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots & \text{כאשר} \end{array}$$

מכאן, כי כל שרשי המשוואה (1.5.ב) הם מהצורה:

$$\begin{array}{l|l} \text{(ברדיאנים)} & \text{(במעלות)} \\ x = \alpha + 2\pi k & x = 360^\circ k + \alpha^\circ \\ x = \pi - \alpha + 2\pi k & x = 360^\circ k + (180^\circ - \alpha^\circ) \end{array} \quad (4.5.ב)$$

k — מספר שלם. פתרון כזה נקרא פתרון כללי של המשוואה.
במקרה (2.5.ב) מתוך הזהויות

$$\begin{array}{l|l} \cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi k) & \cos \alpha^\circ = \cos (\alpha^\circ + 360^\circ k) \\ \cos \alpha = \cos (-\alpha + 2\pi k) & \cos \alpha^\circ = \cos (-\alpha^\circ + 360^\circ k) \end{array}$$

נובע, כי שרשי המשוואה ה' הם:

$$\begin{array}{l|l} x = \alpha + 2\pi k & x = 360^\circ k + \alpha^\circ \\ x = -\alpha + 2\pi k & x = 360^\circ k - \alpha^\circ \end{array}$$

או, בצורה מרוכזת יותר:

$$x = \pm \alpha + 2\pi k \quad | \quad x = 360^\circ k \pm \alpha^\circ \quad (5.5.ב)$$

במקרה (ב.5.3) מתוך הזהויות

$$\begin{array}{l|l} \tan \alpha = \tan (\alpha + 2\pi k) & \tan \alpha = \tan (180^\circ k + \alpha^\circ) \\ \cot \alpha = \cot (\alpha + 2\pi k) & \cot \alpha = \cot (180^\circ k + \alpha^\circ) \end{array}$$

נובע, כי שרשי המשוואה (ב.5.3) הם:

$$x = \alpha + \pi k \quad | \quad x = 180^\circ k + \alpha^\circ \quad (6.5.ב)$$

הערה: במקרים המיוחדים

$$\cos x = 0 \quad | \quad \sin x = 0 \quad (7.5.ב)$$

רצוי לרשום את הפתרונות בצורה

$$\begin{array}{l|l} x = 90^\circ + 180^\circ k & x = 180^\circ k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k & x = \pi k \end{array} \quad \text{או} \quad (8.5.ב)$$

דוגמות:

(i) $\sin x = 1$ (או $\sin x = \sin 90^\circ$). השרשים הם:

$$x = 90^\circ + 360^\circ k$$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ (או $\cos x = \cos 60^\circ$). השרשים הם:

$$x = \pm 60^\circ + 360^\circ k$$

(iii) $\tan x = -1$ (או $\tan x = \tan 135^\circ$). השרשים הם:

$$x = 135^\circ + 180^\circ k$$

(iv) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ (או $\sin 3x = \sin 30^\circ$). השרשים הם:

$$\begin{array}{l} x = 10^\circ + 120^\circ k \quad \text{או} \quad 3x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 50^\circ + 120^\circ k \quad \text{או} \quad 3x = 150^\circ + 360^\circ k \end{array}$$

(v) $\cos(2x+10^\circ) = \cos 90^\circ$ (או $\cos(2x+10^\circ) = 0$)

השרשים הם:

$$2x + 10^\circ = 360^\circ k \pm 90^\circ$$

$$2x = 360^\circ k \pm 90^\circ - 10^\circ$$

$$x = 180^\circ k \pm 45^\circ - 5^\circ$$

— ● —

אם במשוואה מופיעות שתיים, או יותר, פונקציות שונות של הנעלם, הרי לשם התרת המשוואה יש להביע תחילה את כל הפונקציות ע"י אחת מהן בלבד.

דוגמות:

(I) $\sin x = \cos x$ ע"י חילוק שני האגפים ב" $\cos x$ (השונה

מאפס) מקבלים $\tan x = 1$

$$x = 45^\circ + 180^\circ k$$

(II) $2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$

ע"י הצבת $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ מקבלים:

$$2 - 2\cos^2 x - 9\cos x + 3 = 0$$

$$2\cos^2 x + 9\cos x - 5 = 0$$

$$\cos x = \frac{-9 \pm 11}{4} = \frac{1}{2}$$

(התשובה השלילית, הקטנה מ"1- לא תתכן)

$$x = 360^\circ k \pm 60^\circ$$

(III) $2\tan x + \cot x = 3$

ע"י הצבת $\cot x = \frac{1}{\tan x}$: $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$

$$\tan x = \frac{3 \pm 1}{4}$$

(א) $x = 45^\circ + 180^\circ k$; $\tan x = 1$

(ב) $x = 26^\circ 34' + 180^\circ k$; $\tan x = \frac{1}{2}$

— ● —

אם אפשר לשנות את צורתה של משוואה טריגונומטרית, כך שבאגף אחד יהיה רשום אפס, ובאגף השני מכפלה של מספר

גורמים — אפשר למצוא את פתרונות המשוואה ע"י השוואת כל אחד מהגורמים לאפס.

דוגמות:

(I) המשוואה:

$$\sin \frac{x}{2} (\cos 3x + 1) = 0$$

התרה:

$$\begin{array}{ll} \cos 3x = -1 & \text{(ב)} \quad \sin \frac{x}{2} = 0 & \text{(א)} \\ 3x = 180^\circ + 360^\circ k & \frac{x}{2} = 180^\circ k \\ x = 60^\circ + 120^\circ k & x = 360^\circ k \end{array}$$

(II) המשוואה:

$$\sin x \tan x + \sin x + \tan x + 1 = 0$$

התרה ע"י פירוק לגורמים:

$$\sin x (\tan x + 1) + (\tan x + 1) = 0$$

$$(\sin x + 1)(\tan x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{ll} \sin x = -1 & \text{(ב)} \quad \tan x = -1 & \text{(א)} \\ x = 270^\circ + 360^\circ k & x = 135^\circ + 180^\circ k \end{array}$$



להלן כמה דוגמות לפתרון משוואות בעזרת נוסחות טריגונו-

מטריות:

$$\tan^2 x + \sec x = 5 \quad (I)$$

ע"י הצבת $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ נקבל

$$\sec^2 x + \sec x - 6 = 0$$

$$\sec x = \frac{-1 \pm 5}{2};$$

$$\sec x = -3 \quad \text{(ב)} \quad \sec x = 2 \quad \text{(א)}$$

$$\cos x = -\frac{1}{3} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 360^\circ k \pm 109^\circ 28' \quad x = 360^\circ k \pm 60^\circ$$

$$2\cos x = \sin 2x \quad (II)$$

ע"י שמוש בנוסחת הזווית הכפולה

$$2\cos x = 2\sin x \cos x$$

ע"י פירוק לגורמים

$$2\cos x (\sin x - 1) = 0$$

ההמשך כמו בדוגמות הקודמות.

$$\sin x + \cos 2x = 1 \quad (III)$$

ע"י שימוש בנוסחת הזווית הכפולה

$$\sin x + (1 - 2\sin^2 x) = 1$$

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0$$

$$\sin x (1 - 2\sin x) = 0, \text{ וכן הלאה.}$$

$$3\tan x = \tan(x + 45^\circ) \quad (IV)$$

ע"י הנוסחת פונקציה הסכום:

$$3\tan x (1 - \tan x) = 1 + \tan x$$

$$3\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$$

זוהי משוואה חסרת פתרונות.

$$\sin 5x = \sin x \quad (V) \text{ נכתוב משוואה זו בצורה}$$

$$\sin 5x - \sin x = 0$$

ואז בשימוש נוסחות סכום או הפרש:

$$2\sin 2x \cos 3x = 0$$

$$\cos 3x = 0 \quad (ב) \quad \sin 2x = 0 \quad (א)$$

$$3x = 90^\circ + 180^\circ k \quad 2x = 180^\circ k$$

$$x = 30^\circ + 60^\circ k \quad x = 90^\circ k$$

$$-\sin x + \cos x = \sin 3x - \cos 3x \quad (VI) \text{ או בצורה אחרת:}$$

$$\cos x + \cos 3x = \sin 3x + \sin x$$

$$2\cos 2x \cos x = 2\sin 2x \cos x \quad \text{ע"י היפוך למכפלה:}$$

$$\cos x (\cos 2x - \sin 2x) = 0 \quad \text{ע"י פירוק לגורמים:}$$

$$\cos 2x = \sin 2x \quad (ב) \quad \cos x = 0 \quad (א)$$

$$\tan 2x = 1 \quad x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$2x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$x = 22\frac{1}{2}^\circ + 90^\circ k$$

$$1 - \cos 3x = \sin 3x \quad \text{או} \quad \cos 3x + \sin 3x = 1 \quad (VII)$$

$$2\sin^2 \frac{3x}{2} = 2\sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} \quad \text{מכאן:}$$

וע"י פירוק לגורמים:

$$\sin \frac{3x}{2} \left(\sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) = 0$$

ההמשך כמו בדוגמות הקודמות.

$$\sin x + \tan \beta \cos x = \frac{-1}{2 \cos \beta} \quad (\text{VIII})$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad \text{נציב}$$

$$\sin x \cos \beta + \sin \beta \cos x = \frac{-1}{2}$$

$$\sin (x + \beta) = -\frac{1}{2}$$

$$x + \beta = -30^\circ + 360^\circ k \quad \text{או} \quad x + \beta = 210^\circ + 360^\circ k$$

(IX) מערכת של שתי משוואות טריגונומטריות עם שני נעלמים:

$$x + y = 120^\circ; \quad \cos x + \cos y = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad \text{נהפוך למכפלה:}$$

$$2 \cos 60^\circ \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad \text{ומכאן}$$

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{2}$$

$$\frac{x-y}{2} = 360^\circ k \pm 45^\circ$$

$$x-y = 720^\circ k \pm 90^\circ$$

$$x+y = 120^\circ \quad \text{אולם:}$$

$$x = 360^\circ k + 15^\circ \quad (\text{ב}) \quad x = 360^\circ k + 105^\circ \quad (\text{א}) \quad \text{וע"י חיבור:}$$

$$y = 105^\circ - 360^\circ k \quad y = 15^\circ - 360^\circ k$$

(X) בעיות שהתרתן ע"י פתרון משוואה טריגונומטרית. למשל,

(בציור): הריבוע KLMN חסום בתוך הריבוע ABCD, כך

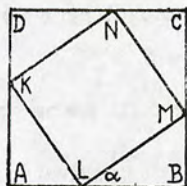
שיתח שטחי שני הריבועים הוא 2:3. מצא את הזווית $\angle MLB = \alpha$.

$$LM = x, \quad BC = a$$

ואז:

$$BC = a = MB + LB = x \sin \alpha + x \cos \alpha$$

$$x = \frac{a}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$



מתוך $3x^2 = 2a^2$, נקבל, כי

$$\frac{3}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = 2$$

$$1 + \sin 2\alpha = 1\frac{1}{2} \quad \text{או}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ$$

תרגילים:

פתור פתרון כללי:

187. ב. $\sin(3x - 60^\circ) = \sin 15^\circ$

188. ב. $\cos(5x + 20^\circ) = \cos 70^\circ$

189. ב. $\tan(40^\circ - \frac{1}{2}x) = \tan 20^\circ$

190. ב. $\sin(x - 5^\circ) = \sin 200^\circ$

191. ב. $\cot(4x - 80^\circ) = \cot 100^\circ$

192. ב. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

193. ב. $\cos 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

194. ב. $\tan 2x + 1 = 0$

195. ב. $\cot^2 x = 3$

196. ב. $\sin(2x - 30^\circ) = -1$

197. ב. $\cos(120^\circ - x) = -\frac{1}{2}$

198. ב. $3\tan(x + 18^\circ) + \sqrt{3} = 0$

199. ב. $\sin(\frac{1}{2}x - 15^\circ) = 0$

200. ב. $\cos(10^\circ + 2x) = 0$

201. ב. $\tan 4(3x - 15^\circ) = 0$

202. ב. לאילו ערכי β , α קיים $\sin \alpha = \sin \beta$? השתמש בתוצאה

כדי לפתור את המשוואה $\sin 2x = \sin 3x$

203. ב. לאילו ערכי β , α קיים $\sin \alpha = -\sin \beta$? השתמש בתוצאה

כדי לפתור את המשוואה $\sin \frac{1}{2}x = -\sin 2x$.

ב.204. לאילו ערכי β , α קיים $\sin \alpha = \cos \beta$? השתמש בתוצאה

כדי לפתור את המשוואה $\sin(x-30^\circ) = \cos 3x$.

ב.205. לאילו ערכי β , α קיים $\cos \alpha = \cos \beta$? השתמש בתוצאה

כדי לפתור את המשוואה $\cos(2x+15^\circ) = \cos(15^\circ-4x)$.

ב.206. לאילו ערכי β , α קיים $\tan \alpha = \tan \beta$? השתמש בתוצאה

כדי לפתור את המשוואה $\tan(22\frac{1}{2}^\circ-x) = \tan(45^\circ-3x)$.

ב.207. לאילו ערכי β , α קיים $\tan \alpha + \tan \beta = 0$? השתמש בתוצאה

כדי לפתור את המשוואה $\tan 3x + \tan(90^\circ - \frac{x}{3}) = 0$.

ב.208. לאילו ערכי β , α קיים $\tan \alpha = \cot \beta$? השתמש בתוצאה

כדי לפתור את המשוואה $\tan(30^\circ + \frac{x}{2}) = \cot(30^\circ - 2x)$.

התר את המשוואות (פתרון כללי):

ב.209. $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$

ב.210. $\sqrt{3} \tan x = 2 \sin x$

ב.211. $\sin^2 x = -\cos x$

ב.212. $2 \sin x \tan x = 3$

ב.213. $\cos x + 2 \sin x \tan x = 1$

ב.214. $\tan x + 5 \cot x = 6$

ב.215. $2(1 + 2 \tan^2 x) = 3 \sec^2 x$

ב.216. $\sin^2 3x = \cos^2 3x$

ב.217. $\operatorname{cosec}^2 2x = 1 + \cot 2x$

ב.218. $1 + \sin x \cos x = \sin x + \cos x$

ב.219. $\cos^2 x = \cos x \sin 3x$

ב.220. $(\tan 3x + 1)(2 \sin 10x - 1) = 0$

ב.221. $\tan^2 x + \cos 2x = 1$

ב.222. $3 \cos 5x + \cos 10x = 1$

- $$5\cos 2x = 3\cos x \quad .223.ב$$
- $$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \quad .224.ב$$
- $$\sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{2} \quad .225.ב$$
- $$1 + \cos^2 x = 3\sin x \cos x \quad .226.ב$$
- $$\tan(30^\circ + x) \tan(30^\circ - x) + 1 = 0 \quad .227.ב$$
- $$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 2\cos 2x \quad .228.ב$$
- $$\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 1 \quad .229.ב$$
- $$\cos(60^\circ + x) + \cos 5x = 0 \quad .230.ב$$
- $$\sin(x + 75^\circ) + \cos(x + 105^\circ) + \sin 2x = 1 \quad .231.ב$$
- $$\cos x - \sin x = \cos 3x - \sin 3x \quad .232.ב$$
- $$\cos x = \cos 2x + \sin 3x \quad .233.ב$$
- $$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0 \quad .234.ב$$
- $$\cos x - \cos 3x = \cos 5x \quad .235.ב$$
- $$\sin 4x + \sin 2x = \sqrt{2}\cos x \quad .236.ב$$
- $$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 4x \quad .237.ב$$
- $$\sin(x + 40^\circ) + \sin(x + 20^\circ) = \cos 10^\circ \quad .238.ב$$
- $$\sin x + \sin 8x = \sin 9x \quad .239.ב$$
- $$\sin x + \cos x = \cos 2x \quad .240.ב$$
- $$\sin(x + 60^\circ) = \frac{1}{2} + \sin x \quad .241.ב$$
- $$\sin(30^\circ + x) = \frac{1}{2} - \sin(30^\circ - x) \quad .242.ב$$
- $$\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x \quad .243.ב$$
- $$\sin x \sin 11x = \sin 3x \sin 9x \quad .244.ב$$
- $$\sin 6x = 2\sin x \cos 5x \quad .245.ב$$
- $$\sin 6x = \sin x \cos 5x \quad .246.ב$$

$$\begin{aligned}
\cos 10x &= \sin x \sin 11x & .247. \text{ב} \\
\cos 5x \cos 7x &= \cos^2 6x & .248. \text{ב} \\
\sin 3x \cos x &= \sin 7x \cos 5x & .249. \text{ב} \\
\sin (x+34^\circ) \sin (x-56^\circ) &= -\frac{\sqrt{2}}{4} & .250. \text{ב} \\
2\cos 5x \cos 7x - \cos 4x &= \cos 2x & .251. \text{ב} \\
\tan (x+45^\circ) + \tan (x-45^\circ) &= 2\sqrt{3} & .252. \text{ב} \\
1 - \tan x &= \cos 2x & .253. \text{ב} \\
\tan (45^\circ + x) &= 3 \tan (45^\circ - x) & .254. \text{ב} \\
\tan 3x &= \sin 6x & .255. \text{ב} \\
\sin^3 x + \cos^3 x &= \cos x & .256. \text{ב} \\
3(\tan x - \cot x) &= 4 \sin 2x & .257. \text{ב} \\
\sin x \tan x + \cos x \cot x &= \sin x + \cos x & .258. \text{ב} \\
2\sin \frac{x}{2} - \cos x &= -1 & .259. \text{ב} \\
\sin 2x \tan x &= 1 & .260. \text{ב} \\
1 + \cos 2x + \sin x &= 2\cos^2 \frac{x}{2} & .261. \text{ב} \\
\sin x + \tan x + \cos x &= \sec x & .262. \text{ב} \\
\sin 5x + \cos 4x &= 2 & .263. \text{ב} \\
\sin x + \sin 2x + 2 &= 0 & .264. \text{ב} \\
\sin 2x + \tan 37^\circ \cos 2x &= 1 & .265. \text{ב} \\
\sin 4x - \cos 4x \tan \alpha &= 1 & .266. \text{ב} \\
\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} &= \tan 27^\circ & .267. \text{ב} \\
\frac{\cos x - \cos 5x}{\sin x + \sin 5x} &= \tan \alpha & .268. \text{ב} \\
\cos 7x + \sin^2 2x &= \cos^2 2x - \cos x & .269. \text{ב}
\end{aligned}$$

- $$\sin^2 2x + 2\sin^2 x = 2 \quad .270.ב$$
- $$\left(\frac{1}{2} + \sin x \cos x\right)(\cos x - \sin x) = \frac{1}{2} - \sin^2 x \quad .271.ב$$
- $$1 + \sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x = 0 \quad .272.ב$$
- $$4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x = 1 \quad .273.ב$$
- $$\tan x + \tan(45^\circ - x) = 1 \quad .274.ב$$
- $$\sin x \sin 3x - 0.5 = 0 \quad .275.ב$$
- $$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x \quad .276.ב$$
- $$3\sin^2 x - 4\cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad .277.ב$$
- $$\sin 5x + (\sin 1.5x - \cos 1.5x)^2 = 1 \quad .278.ב$$
- $$\tan x + \tan 2x = \tan 3x \quad .279.ב$$
- $$2\sin x \sin 2x = -\cos 3x \quad .280.ב$$
- $$\sin^2(45^\circ - \frac{x}{2}) + \sin x = 1 \quad .281.ב$$
- $$\sin^2(x + 10^\circ) - \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin 20^\circ \quad .282.ב$$
- $$\sin 2x + 2\sin x = \sin \frac{\pi}{2} \quad .283.ב$$
- $$\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cos x \quad .284.ב$$
- $$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \quad .285.ב$$
- $$\sin x + \sin 5x + 1 = \cos 6x \quad .286.ב$$
- $$\cot \frac{\pi}{2} = 2\tan x + \tan \frac{\pi}{2} \quad .287.ב$$
- $$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{5}{8} \quad .288.ב$$
- $$\cos^3 x + \cos^3 2x + \cos^3 3x = 1 \quad .289.ב$$
- $$\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2} \quad .290.ב$$
- $$\tan x - \tan 3x = 2 \quad .291.ב$$

פתר את מערכות המשוואות :

292. ב. $x + y = 45^\circ$; $\tan x + \tan y = 1$
293. ב. $x + y = 150^\circ$; $\cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}$
294. ב. $x + y = 60^\circ$; $3 \tan x \tan y = 1$
295. ב. $\cos 2y - \cos 2x = 1$; $4 \sin x \cos y = 3$

בעיות

296. ג. סכום שני הגבהים השווים של משולש שווה שוקיים שווה לגובה השלישי. מצא את זוויות המשולש.
297. ב. הגובה על יתרו של משולש ישר זווית שווה להפרש הטלי הניצבים על היתר. מצא את זוויות המשולש.
298. ב. היחס בין הגובה על היתר והיתר במשולש ישר זווית הוא $\sqrt{3}:4$. מצא את זוויות המשולש.
299. ב. במשולש ישר זווית היתר הוא $3\sqrt{3}$ ס"מ, ואורך חוצה הזווית החדה 3 ס"מ. מצא את זוויות המשולש.
300. ב. מסינוסים של זוויות משולש ישר זווית יוצרים סדרה הנדסית. מצא את הזוויות.
301. ב. ריבוע צלע המעוין שווה למכפלת אלכסוניו. מהי הזווית החדה של המעוין?
302. ב. הגובה על בסיסו של משולש שווה שוקיים גדול כפליים מההפרש שבין השוק והבסיס. מצא את זווית הראש של המשולש.
303. ב. במלבן ABCD גדול ארכו של הקו השבור ACDB פי $1\frac{1}{4}$ מן ההיקף. מצא את הזווית CAB.
304. ב. היחס שבין יתרו של משולש ישר זווית ובין סכום הניצבים הוא 9:7. מצא את זוויות המשולש.
305. ב. שתי צלעות המשולש הן 4 ס"מ, 5 ס"מ. מצא את הזווית שבין הצלעות האלה, אם ידוע, כי הגדלתה ב- 30° תגדיל את שטח המשולש ב-2.4 סמ"ר.

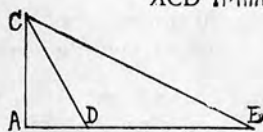
ב.306. הזווית המרכזית AOB במעגל היא בת 80° . על הקשת AB נמצאת נקודה M, אשר יחס מרחקיה אל שני המחוגים AO ו-BO הוא 3:4. מצא את הזווית AOM.

ב.307. הטנגנטים של חצאי הזוויות של משולש ישר זווית יוצרים סידרה חשבונית. מהי הזווית הקטנה ביותר של המשולש?

ב.308. על כל אחת משוקי הזווית בת 60° נמצאת נקודה, כך שמרחק אחת מהן מקדקד הזווית גדול כפליים מזה של השנייה. דרך הקדקד, ובתוך הזווית, עובר ישר, הנמצא במרחקים שווים משתי הנקודות. אילו זוויות יוצר הישר הזה עם שוקי הזווית בת 60° ?

ב.309. בציור: הזווית $BCD = 45^\circ$, $\widehat{CAB} = 90^\circ$, $\frac{BD}{AC} = 3.155$

מצא את הזווית ACD



ב.6. אי-שוויונים טריגונומטריים.

על מנת לטפל באי-שוויונים טריגונומטריים נעזר בדרך כלל בפתרונות אי-שוויונים יסודיים:

$$\left. \begin{array}{l} \sin x > 0 \text{ כאשר } k \cdot 360^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 180^\circ \\ \sin x < 0 \text{ כאשר } k \cdot 360^\circ + 180^\circ < x < (k+1) \cdot 360^\circ \\ \cos x > 0 \text{ כאשר } k \cdot 360^\circ - 90^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 90^\circ \\ \cos x < 0 \text{ כאשר } k \cdot 360^\circ + 90^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 270^\circ \\ \tan x > 0 \text{ או } \cot x > 0 \text{ כאשר } k \cdot 180^\circ < x < k \cdot 180^\circ + 90^\circ \\ \tan x < 0 \text{ או } \cot x < 0 \text{ כאשר } k \cdot 180^\circ + 90^\circ < x < (k+1) \cdot 180^\circ \end{array} \right\} \quad (ב.6.1)$$

הפתרונות הנ"ל נובעים מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות (או מהסתכלות בתיאורים הגרפיים של הפונקציות האלה). נדגים את דרך ההתרה של אי-שוויונים בדוגמות אחדות:

$$\sin x < \cos x \quad (I)$$

על מנת להתיר אי-שוויון זה נשנה את צורתו ונרשום סידרת אי-שוויונים השקולים לו:

$$\sin x - \cos x < 0$$

$$\sin x - \sin(90^\circ - x) < 0$$

$$2\cos 45^\circ \sin(x - 45^\circ) < 0$$

$$\sin(x - 45^\circ) < 0$$

אי-השוויון האחרון יתקיים לפי (ב.1) כאשר

$$k \cdot 360^\circ + 180^\circ < x - 45^\circ < (k+1) 360^\circ$$

כלומר, כאשר

$$k \cdot 360^\circ + 225^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 405^\circ$$

או, בצורה אחרת, כאשר

$$k' \cdot 360^\circ - 135^\circ < x < k' \cdot 360^\circ + 45^\circ$$

במיוחד, אם מדובר על התחומים בהם קיים אי השוויון כאשר

$$0^\circ \leq x \leq 360^\circ, \text{ הרי תחומים אלה הם } 0 \leq x < 45^\circ \text{ או } 225^\circ < x \leq 360^\circ$$

$$\cos x \geq \cos 2x \quad (II)$$

כדי להתיר אי שוויון זה, נרשום גם כאן מספר אי-שוויונים

השקולים לו:

$$\cos x - \cos 2x \geq 0$$

$$2\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} \geq 0$$

$$\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} \geq 0$$

אי השוויון האחרון יתקיים לכל ערכי x שעבורם שני הגורמים

בעלי סימנים שווים:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} \geq 0 \\ \sin \frac{3x}{2} \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{או} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} \leq 0 \\ \sin \frac{3x}{2} \leq 0 \end{array} \right.$$

לכן:

$$\left\{ \begin{array}{l} k \cdot 360^\circ + 180^\circ \leq \frac{x}{2} \leq (k+1) 360^\circ \\ k' \cdot 360^\circ + 180^\circ \leq \frac{3x}{2} \leq (k'+1) 360^\circ \end{array} \right.$$

או

$$\begin{cases} k \cdot 360^\circ \leq \frac{x}{2} \leq k \cdot 360^\circ + 180^\circ \\ k' \cdot 360^\circ \leq \frac{3x}{2} \leq k' \cdot 360^\circ + 180^\circ \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} k \cdot 720^\circ + 360^\circ \leq x \leq (k+1) \cdot 720^\circ \\ k' \cdot 240^\circ + 120^\circ \leq x \leq (k'+1) \cdot 240^\circ \end{cases}$$

או

$$\begin{cases} k \cdot 720^\circ \leq x \leq k \cdot 720^\circ + 360^\circ \\ k' \cdot 240^\circ \leq x \leq k' \cdot 240^\circ + 120^\circ \end{cases}$$

מן הרשום לעיל נובע שהמחזור של הפתרונות יהיה 720°

ולכן יהיו הפתרונות:

$$k \cdot 720^\circ + 240^\circ \leq x \leq k \cdot 720^\circ + 480^\circ$$

או

$$k \cdot 720^\circ - 120^\circ \leq x \leq k \cdot 720^\circ + 120^\circ$$

במיוחד, בתחום $0 \leq x \leq 360^\circ$ יהיו הפתרונות

$$0^\circ \leq x \leq 120^\circ \quad \text{או} \quad 240^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

תרגילים:

ב.310. התר את אי־השוויונים:

$$\sin 2x > \sin x \quad (\text{א})$$

$$\cos 3x < \cos x \quad (\text{ב})$$

$$\sin x + \cos x > 1 \quad (\text{ג})$$

$$\tan 2x \geq 2 \tan x \quad (\text{ד})$$

ב.311. התר את אי־השוויונים:

$$\sin(2x - 90^\circ) > \cos(x + 60^\circ) \quad (\text{א})$$

$$\tan x \tan 2x > 1 \quad (\text{ב})$$

$$\cos x - \sin x \leq \sqrt{2} \sin 2x \quad (\text{ג})$$

$$\cos 2x < \cos^2 x \quad (\text{ד})$$

ב.312. מצא באיזה תחום חייבת להמצא הזווית α ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$)

בכדי ששרשיה של המשוואה

$$2x^2 \cos 2\alpha - 4x \cos \alpha + 3 = 0$$

יהיו ממשיים.

313. ב. הוכח, כי א) למשוואה $\sin x + \cos x = 2 \sin \alpha$ ישנם שרשים

ממשיים אך ורק כאשר

$$-45^\circ + 180^\circ k \leq \alpha \leq 45^\circ + 180^\circ k$$

ב) למשוואה

$$\sin \alpha \cos \alpha + \sin(x+\alpha) \sin(x-\alpha) = 0$$

ישנם שרשים ממשיים כאשר

$$90^\circ k + 45^\circ \leq \alpha \leq (k+1) 90^\circ$$

314. ב. הסכום של היתר ואחד הניצבים של משולש ישר זווית הוא

8 ס"מ. באיזה תחום צריכה להמצא הזווית α ביניהם, כדי

שהיקפו של המשולש הזה יהיה קטן מ-12 ס"מ?

315. ב. א) הוכח, כי הגובה היורד על השוק (או על המשכה) של

משולש שווה שוקיים קטן מפעמיים הגובה היורד על בסיס

המשולש הזה.

ב) באיזה תחום נמצאת זווית הראש α של משולש שווה

שוקיים אם הגובה על השוק גדול לפחות פי $\sqrt{3}$ מהגובה

על הבסיס?

316. ב. איזה תנאי צריכה לקיים זווית הבסיס של משולש שווה

שוקיים, כדי שהגובה על בסיס משולש זה יהיה קטן

מ- $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ של ההיקף?

317. ב. זווית הבסיס של משולש שווה שוקיים היא α הוכח, כי

חוצה זווית זו גדול לפחות פי שניים מהגובה היורד על

בסיס המשולש, כאשר $\alpha \leq 36^\circ$.

318. ב. היתר של משולש ישר זווית הוא 12 ס"מ, והגובה היורד

עליו h ס"מ. הוכח:

א) $6 \leq h$ ס"מ ב) אם $3\sqrt{2}$ ס"מ b אז כל אחת מזוויות

המשולש גדולה מ- $22^\circ 30'$.

319. ב. יתרו של משולש ישר זווית הוא 4 ס"מ, זוויתו החדה

β ; α מצא באיזה תחום נמצאות הזוויות האלה, אם

א) שטח המשולש גדול מ- $2\sqrt{3}$ סמ"ר

ב) שטח המשולש קטן מ-4 סמ"ר

פרק ג. התרת המשולש הכללי. שימושים בהנדסת המישור והמרחב

בפרקים הקודמים הוסברו דרכים ושיטות להתרת משולשים מיוחדים: ישרי זווית ושווי שוקיים. הפרק הזה יטפל בהתרת משולשים כלשהם. לשם כך יובאו כאן 3 משפטים, הנקראים משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים ומשפט הטנגנסים.

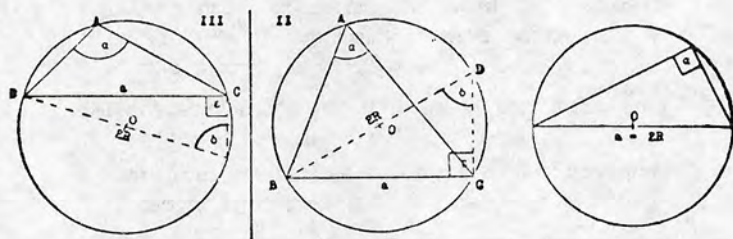
1.ג. משפט הסינוסים.

משפט: במשולש קיים יחס קבוע בין כל צלע ובין סינוס הזווית שממולה. היחס הזה שווה לקוטר המעגל החוסם את המשולש.

$$(1.1.ג) \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \text{בנוסחה:}$$

נבחין בין שלושה מקרים:

$$\alpha > 90^\circ \quad (\text{ג}) \quad \alpha < 90^\circ \quad (\text{ב}) \quad \alpha = 90^\circ \quad (\text{א})$$



ציור 1.ג.

נוכיח תחילה, כי בכל אחד מהמקרים הנ"ל מתקיים

$$(2.1.ג) \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

במקרה (א) (ראה ציור 1.ג) הזווית הישרה α נשענת על קוטר ולפיכך: $\sin \alpha = 1$; $a = 2R$. לכן הנוסחה (2.1.ג) נכונה.

המקרים (ב) ו-(ג) נבדלים זה מזה רק בפרט הבא: במקרה (ב) מרכז המעגל O וקודקוד הזווית α נמצאים מאותו צד של הצלע a , בשעה שבמקרה (ג) מרכז המעגל O, וקודקוד הזווית α נמצאים מצדדים שונים של הצלע a .

בשני המקרים נבנה את הקוטר BL, ונקשר את קצה הקוטר D עם קצה הצלע a , C. על ידי זה נוצרת בשני המקרים זווית ישרה ε (זווית היקפית הנשענת על קוטר), וזווית חדה δ . מכאן נובע שבשני המקרים

$$2R = \frac{a}{\sin \delta}$$

אולם $\sin \delta = \sin \alpha$ כי במקרה (ב) $\delta = \alpha$ (זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת), ובמקרה (ג) $\alpha + \delta = 180^\circ$ (זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל), ולכן

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \delta$$

לכן נכון בכל שלושת המקרים כי

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad (2.1.1.1)$$

באופן דומה נוכל להוכיח גם כי

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R ; \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

ומכאן:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (1.1.1.2)$$

במשפט הסינוסים אפשר להשתמש כאשר נתונות במשולש כללי צלע אחת, הזווית המונחת מולה ונתון נוסף: זווית שניה או צלע שניה.

דוגמות:

(1) במשולש נתונה הצלע a , והזוויות B, C שלידה. מצא בנוסחות (א) את הצלעות האחרות (ב) את הגובה לצלע a (ג) את שטח המשולש החרה: לפי

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)}$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)} \quad \text{ובאותו האופן:}$$

$$h_a = b \sin C = \frac{a \sin B \sin C}{\sin (B + C)} ; S = \frac{ah_a}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$$

(ii) במשולש ABC נתון: $\hat{C} = 121^\circ 53'$, $a = 23.84$, $c = 32.32$.
לפתור את המשולש (למצא $\hat{A}$, $\hat{B}$, b).
ה ת ר ה:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \hat{A}: \text{מוצאים תחילה את}$$

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{23.84 \sin 58^\circ 7'}{32.32} ; \hat{A} = 38^\circ 49'$$

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 19^\circ 18' \quad \text{והמשך לפי:}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{23.84 \sin 19^\circ 18'}{\sin 38^\circ 49'} = 12.66$$

(iii) במקרה שנתונות שתי צלעות המשולש, והזווית שמול הקטנה שבהן יתכנו שני פתרונים. למשל: להתיר משולש לפי $A = 40^\circ$,

$$a = 9, b = 11$$

ה ת ר ה:

לפי משפט הסינוסים:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{11 \sin 40^\circ}{9}$$

$$\hat{B}_1 = 51^\circ 48' \quad \text{ומכאן} \quad \hat{B}_2 = 180^\circ - 51^\circ 48' = 128^\circ 12' \quad \text{או:}$$

במקרה הראשון:

$$\hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}_1 = 88^\circ 12'$$

במקרה השני:

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}_2 = 11^\circ 48'$$

ומכאן

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} = \frac{9 \sin 88^\circ 12'}{\sin 40^\circ} = 13.92$$

$$c_2 = \frac{9 \sin 11^\circ 48'}{\sin 40^\circ} = 2.86$$

(iv) במעגל חסום משולש, שאחת מצלעותיו 13 ס"מ והזווית מולה $107^{\circ}25'$. מהו מחוג המעגל?

$$2R = \frac{a}{\sin A} \quad \text{ה ת ר ה : לפי}$$

$$R = \frac{13}{2 \sin 107^{\circ}35'} = \frac{13}{2 \sin 72^{\circ}35'} = 13.6 \text{ ס"מ}$$

(v) בתוך מעגל שמחוגו 15 ס"מ חסום משולש, שאחת מצלעותיו 22 ס"מ, c, והזווית שלידה $\hat{A} = 38^{\circ}$. התר את המשולש הזה.
ה ת ר ה :

$$\sin \hat{C} = \frac{22}{30}; \hat{C} = 47^{\circ}10'; \hat{B} = 94^{\circ}50'$$

$$a = \frac{22 \sin 38^{\circ}}{\sin 47^{\circ}10'}; b = \frac{22 \sin 85^{\circ}10'}{\sin 47^{\circ}10'}$$

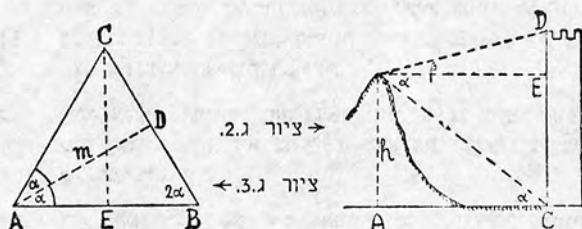
(vi) אדם, העומד על גבעה שגובהה h, רואה את יסודו של מגדל שממול בזווית עומק α , ואת ראשו בזווית גובה β . מהו גבהו של המגדל?

ה ת ר ה :

$$BC = \frac{h}{\sin \alpha} \quad \text{לפי הציור:}$$

$$\frac{CD}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{BC}{\sin(90^{\circ}-\beta)} = \frac{BC}{\cos \beta} : BDC \text{ במשולש}$$

$$CD = \frac{h \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$$



(vii) במשולש שווה שוקיים זווית הבסיס 2α , ואורך החוצה שלה m. מצא את שטח המשולש.

$$\frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{m}{\sin 2\alpha} \quad \text{במשולש ABD :}$$

$$AB = \frac{m \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$CE = \frac{1}{2} AB \tan 2\alpha = \frac{m \sin 3\alpha \tan 2\alpha}{2 \sin 2\alpha} = \frac{m \sin 3\alpha}{2 \cos 2\alpha}$$

$$S = \frac{m^2 \sin^2 3\alpha}{4 \cos 2\alpha \sin 2\alpha} = \frac{m^2 \sin^2 3\alpha}{2 \sin 4\alpha}$$

(viii) הוכח, כי המחוג R של המעגל החוסם משולש ABC הוא

$$R = \frac{abc}{4S} \quad (S \text{ השטח}).$$

ה ת ר ה :

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin A} \cdot \frac{bc}{bc} = \frac{abc}{2bc \sin A} = \frac{abc}{4S}$$

תרגילים :

1.1. (א) מחוג המעגל החוסם משולש, שזוויותיו α, β, γ הוא R.

הבע בנוסחה את שטח המשולש, וחשב את צלעותיו, כאשר

$$R = 50 \text{ ס"מ} ; \alpha = 50^\circ ; \beta = 60^\circ$$

(ב) מהו שטח משולש ששתיים מזוויותיו $48^\circ 16'$, $113^\circ 17'$,

ומחוג המעגל החוסם אותו 79.2 ס"מ?

2.2. צלע המשולש $2\sqrt{2}$ ס"מ, זווית לידה 30° , זווית מולה 45° .

מצא, בלי שימוש בלוחות, את הצלע שמול הזווית בת 30° .

3.2. צלע המשולש 145 ס"מ, הזוויות שלידה $64^\circ 20'$, $48^\circ 20'$.

מצא את שתי הצלעות האחרות.

4.2. שתי צלעות המשולש הן 26.73 ס"מ, 22.98 ס"מ, הזווית

מול הגדולה מהן היא בת 63° . מצא את הצלע השלישית

של המשולש.

5.2. צלע המשולש 24.3 ס"מ, הזווית מולה $22^\circ 11'$, הזווית

לידה $112^\circ 21'$. מצא את שתי הצלעות האחרות ואת שטח

המשולש.

- 6.ג. שתי צלעות המשולש הן 163 ס"מ, 134 ס"מ, והזווית מול הגדולה מהן $70^{\circ}12'$. מצא את שטח המשולש.
- 7.ג. נתון הגובה h_a במשולש ABC וכן הזוויות A, B, C. מצא את הצלע a ואת שטח המשולש. $B = 115^{\circ}10'$, $h_a = 53.7$, $C = 5^{\circ}8'$. מהו שטח המשולש?
- 8.ג. אלכסון המקבילית, שהוא 250 ס"מ, יוצר עם הצלעות זוויות של $27^{\circ}23'$ ו- $39^{\circ}33'$. מצא את הצלעות.
- 9.ג. מצא שטח מקבילית שאחת מזוויותיה $107^{\circ}57'$, צלעה 3 ס"מ ואלכסונה הגדול 8.8 ס"מ.
- 10.ג. בטרפז שווה שוקיים הבסיס הגדול 10 ס"מ, הזווית שלידו 60° , והאלכסון 9 ס"מ. מצא את הבסיס הקטן (הבחן שני מקרים).
- 11.ג. זווית המקבילית 47° , אלכסונה הגדול 4 ס"מ, הצלע הגדולה 3 ס"מ. מצא את הצלע הקטנה.
- 12.ג. שטח המשולש S, זוויותיו A, B, C. מצא את הצלעות, וחשב אותן כאשר $S = 502$ סמ"ר, $B = 45^{\circ}$, $A = 15^{\circ}28'$.
- 13.ג. צלע המשולש a, זוויות שלידה B, C. הוכח, כי מחוג המעגל החסום במשולש הוא
$$\frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$
- 14.ג. מחוג המעגל החסום במשולש, שזוויותיו α, β, γ , הוא r. מצא את שטח המשולש.
- 15.ג. אדם העומד במישור בסיס החר רואה את פיסגתו בזווית גובה α . הוא מתקרב אל החר m מ' וממקומו החדש רואה את הפיסגה בזווית גובה β . מהו גובה החר?
- 16.ג. מגדלור, שנבחו a מ', עומד על סלע. מהאניה רואים את בסיס המגדלור בזווית גובה α , ואת ראשו בזווית גובה β . מהו המרחק האופקי של האניה מהמגדלור?
- 17.ג. אדם שגובה עיניו מעל הקרקע a מ', רואה בסיס עמוד טלגרף בזווית עומק α . ואת ראשו בזווית גובה β . מהו גבוהו של העמוד?

18.ג. מאוירון שהיה בגובה h נמדדו זוויות העומק של ראש מגדל שידור (α) ובסיסו (β) . מצא את גובה המגדל.

19.ג. אדם רואה פיסגת הר בזווית גובה α . הוא מתקרב אל ההר בקו ישר מרחק m , תוך עליה בשביל ששיפועו β ($\beta < \alpha$). ממקומו החדש הוא רואה את הפיסגה בזווית גובה γ . מהו גובה ההר מעל נקודת התצפית הראשונה.

20.ג. אחת הזוויות החדות של משולש ישר זווית היא α , ואורך החוצה של הזווית הישרה הוא m . הוכח, כי מחוג המעגל החוסם משולש זה הוא

$$\frac{m \sin(\alpha + 45^\circ)}{\sin 2\alpha}$$

21.ג. בטרפז שווה שוקיים שבסיסו הגדול a , האלכסונים מאונכים זה לזה. הזווית בין האלכסון לבין השוק, הנמצאת מול הבסיס הקטן היא α . הוכח, כי שטח הטרפז הוא

$$\frac{a^2 \sin^2(\alpha + 45^\circ)}{2 \cos^2 \alpha} \quad \text{או} \quad \frac{a^2}{4} (1 + \tan \alpha)^2$$

22.ג. גובהו של משולש הוא h , ושתי זוויות המשולש שאינן סמוכות לו הן α ו- β . הוכח, כי מחוג המעגל החוסם את המשולש

$$R = \frac{h}{2 \sin \alpha \sin \beta} \quad \text{הוא}$$

$$r = \frac{h \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \quad \text{הוא מחוג המעגל החוסם בו הוא}$$

2.ג. משפט הקוסינוסים.

קל לראות, כי אי-אפשר להתיר משולש כללי בעזרת משפט הסינוסים, כאשר נתונות שתיים מצלעותיו והזווית שביניהן, או כאשר נתונות שלשת צלעותיו. במקרים אלה יש להשתמש במשפט הקוסינוסים, והוא:

ריבוע צלע המשולש שווה לסכום הריבועים של שתי הצלעות האחרות פחות פעמיים מכפלת הצלעות האחרות אחת בשנייה ובקוסינוס הזווית שביניהן.

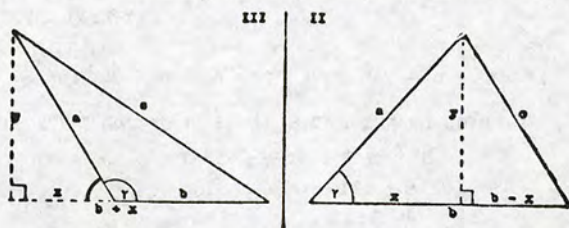
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{בנוסחה:} \quad (1.2.ג)$$

הוכחה:

נבדיל שוב בין שלושה מקרים:

(א) $\gamma = 90^\circ$ (ב) $\gamma < 90^\circ$ (ג) $\gamma > 90^\circ$.

במקרה (א) משפט הקוסינוסים אינו אלא ניסוח לא מקובל של משפט פיתגורס. כי במקרה זה $\cos \gamma = 0$ ולפיכך: $a^2 + b^2 = c^2$.
במקרה (ב) ו-(ג) נבנה את הגובה y לצלע c ונכנה את הטל הצלע a על b (או על המשכה) ב- x (ראה ציור 4.2):



ציור 4.2

מקרה (ג)
 $\gamma > 90^\circ$

מקרה (ב)
 $\gamma < 90^\circ$

במקרה (ג):

במקרה (ב):

$$\begin{aligned} y &= a \sin (180^\circ - \gamma) = a \sin \gamma \\ x &= a \cos (180^\circ - \gamma) = -a \cos \gamma \\ c^2 &= y^2 + (b + x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= a \sin \gamma \\ x &= a \cos \gamma \\ c^2 &= y^2 + (b - x)^2 \end{aligned}$$

לכן בשני המקרים:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \sin \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2 = \\ &= a^2 \sin^2 \gamma + b^2 - 2ba \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma = \\ &= a^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cos \gamma, \end{aligned}$$

לכן:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (1.2.2)$$

דוגמות:

(1) שתי צלעות המשולש הן 25 ס"מ, 19 ס"מ. הזווית שביניהן 67° . מצא את הצלע השלישית x .

התרה:

$$x^2 = 625 + 361 - 2 \cdot 25 \cdot 19 \cos 67^\circ = 986 - 371 = 615$$

$$x = 24.8 \text{ ס"מ}$$

(ii) שתי צלעות המשולש הן 14 ס"מ, 8 ס"מ והזווית שביניהן $120^{\circ}10'$. מצא את הצלע השלישית x.
ה ת ר ה :

$$\begin{aligned}x^2 &= 196 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 14 \cos 120^{\circ}10' = \\&= 260 + 224 \cos 59^{\circ}50' = 372.6 \\x &= 19.3 \text{ ס"מ}\end{aligned}$$

(iii) אלכסוני המקבילית הם 2a, 2b. הזווית ביניהם α , מהן הצלעות (x, y)?
ה ת ר ה :

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha ; y^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$

(iv) צלעות המשולש הן 16, 11, 8 ס"מ. מצא את הזוויתיו.

$$\begin{aligned}\text{ה ת ר ה : } 8^2 &= 11^2 + 16^2 - 352 \cos \hat{A} \\ \cos \hat{A} &= \frac{256 + 121 - 64}{352} = \frac{313}{352} ; \hat{A} = 27^{\circ}14' \\ 11^2 &= 8^2 + 16^2 - 256 \cos B ; \\ \cos B &= \frac{256 + 64 - 121}{256} = \frac{199}{256} ; \hat{B} = 38^{\circ}58' \\ 16^2 &= 8^2 + 11^2 - 176 \cos C ; \\ \cos \hat{C} &= \frac{121 + 64 - 256}{176} = -\frac{71}{176} ; \hat{C} = 113^{\circ}48'\end{aligned}$$

(v) במרובע ABCD : AB = 6 ; CB = 4 ; CD = 5 ; AD = 8.
הזווית $C = 60^{\circ}$. מצא את הזווית A.

$$\begin{aligned}\text{ה ת ר ה : } DB^2 &= 4^2 + 5^2 - 40 \cos 60^{\circ} = 8^2 + 6^2 - 96 \cos A \\ 16 + 25 - 20 &= 64 + 36 - 96 \cos A \\ \cos A &= \frac{79}{96} ; A = 34^{\circ}38'\end{aligned}$$

(vi) זווית המשולש 60° , הצלע מולה 7 ס"מ, ההפרש בין שתי הצלעות האחרות 3 ס"מ. מצא את הצלעות האחרות.
ה ת ר ה :

אחת הצלעות המבוקשות היא x ס"מ, השנייה $(x+3)$ ס"מ. מכאן :

$$\begin{aligned}7^2 &= x^2 + (x+3)^2 - 2 \cos 60^{\circ} x(x+3) \\ &= x^2 + x^2 + 6x + 9 - x^2 - 3x = x^2 + 3x + 9 \\ x^2 + 3x - 40 &= 0 ; x = 5\end{aligned}$$

הצלעות הן 5 ס"מ, 8 ס"מ.

(vii) במשולש ABC: $AC = 5$ ס"מ, $BC = 7$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ.
מצא את אורך הקו התיכון CD.

התרה: במשולש ABC:

$$5^2 = 7^2 + 8^2 - 112 \cos B$$

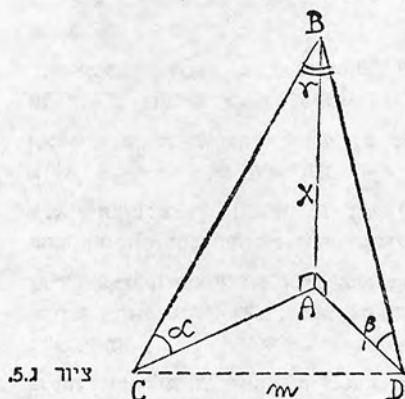
$$\cos B = \frac{58}{112} = \frac{11}{14}$$

במשולש ACD:

$$CD^2 = 49 + 16 - 56 \cdot \frac{11}{14} = 65 - 44 = 21$$

$$CD = \sqrt{21} \sim 4.58 \text{ ס"מ}$$

(viii) מפסיגת גבעה רואים שתי נקודות, שבמישור בסיסה, בזוויות עומק α , β , ואילו את הקטע המחבר נקודות אלו, ואשר ארכו m, רואים בזווית ראייה γ . מצא את גובה הגבעה.
לפי הצירור: ($AB = x$)



$$BC = \frac{x}{\sin \alpha} ; BD = \frac{x}{\sin \beta}$$

$$m^2 = \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{x^2}{\sin^2 \beta} - \frac{2x^2 \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

ומכאן:

$$x = \frac{m}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}}}$$

תרגילים:

- 23.ג. במשולש נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן. מצא את הצלע השלישית, ואת שתי הזוויות האחרות.
 (א) 4 ס"מ, 5 ס"מ, 65°
 (ב) 3.5 ס"מ, 4 ס"מ, 132°
- 24.ג. שתי צלעות המשולש 34.7 ס"מ, 40 ס"מ. הזווית ביניהן $82^\circ 30'$. מצא את הצלע השלישית.
- 25.ג. שתי צלעות המשולש הן 80 ס"מ, 110 ס"מ. הזווית ביניהן $42^\circ 40'$. מצא את הזוויות האחרות של המשולש.
- 26.ג. במשולש נתונות שלש צלעות. מצא את הזווית הגדולה של המשולש.
 (א) 8 ס"מ, 9 ס"מ, 11 ס"מ
 (ב) 12 מ', 15 מ', 25 מ'
- 27.ג. מצא את הזווית הגדולה של המשולש, שהיחס בין צלעותיו הוא $13:15:18$ (א) $37:65:93$ (ב)
- 28.ג. הוכח, כי הזווית הגדולה של המשולש שצלעותיו $2\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ היא 120° .
- 29.ג. צלעות המשולש הן 14 ס"מ, 16 ס"מ, 19 ס"מ. מצא את אחת מזוויותיו ובעזרתה את שטח המשולש.
- 30.ג. שטח המקבילית הוא 66910 סמ"ר, אחת מצלעותיה 135 ס"מ, והזווית החדה שלה $36^\circ 36'$. מצא את האלכסון הגדול של המקבילית.
- 31.ג. צלעות המקבילית 22 ס"מ, 26 ס"מ. אחד מאלכסוניה 40 ס"מ. מצא את הזווית החדה של המקבילית ואת אלכסונה השני.
- 32.ג. (א) הוכח בעזרת משפט הקוסינוסים, כי סכום ריבועי שני האלכסונים במקבילית שווה לסכום ריבועי ארבעת צלעותיה.
 (ב) אלכסוני המקבילית הן 13 ס"מ, 15 ס"מ ואחת מצלעותיה 7 ס"מ. מצא את הצלע השנייה.
- 33.ג. (א) a, b, c הן צלעות המשולש ו-m הוא התיכון לצלע c. הוכח, כי $2a^2 + 2b^2 = 4m^2 + c^2$.
 (ב) שתי צלעות המשולש הן 9 ו-16 ס"מ. התיכון לצלע השלישית 6 ס"מ. מצא את הצלע השלישית.

34.ג. מצא זוויתיו החדות של טרפז שבסיסיו הם 87.2 ס"מ, 54.9 ס"מ ושוקיו 16.5 ס"מ, 26 ס"מ.

35.ג. הבסיס הגדול של הטרפז הוא 43.2 ס"מ, אחת השוקיים שלו 11.52 ס"מ, הזווית ביניהם $70^{\circ}53'$. הבסיס הקטן של הטרפז הוא 23.04 ס"מ. מצא את השוק השניה.

36.ג. שתי אוניות יצאו בעת ובעונה אחת מנמל חיפה. הראשונה שטה במהירות של 28 ק"מ לשעה ובכיוון $39^{\circ}16'$ מערבית מצפון. והשניה בכיוון $16^{\circ}8'$ דרומית ממערב. במהירות של 34 ק"מ לשעה. מה היה המרחק בין שתי האוניות מקץ 3 שעות מצאתן?

37.ג. סירת מפרש יצאה מפי הירקון בכיוון $19^{\circ}3'$ צפונית ממערב, ואחר שעברה מרחק של 7 ק"מ שינתה כיוונה, ועברה 8 ק"מ בכיוון $23^{\circ}23'$ דרומית ממערב. מצא את מרחק הסירה מפי הירקון, ואת הכיוון בו נראית הסירה מפי הירקון.

38.ג. שני כחות, ששיעוריהם 4 ק"ג, 5 ק"ג פועלים על גוף, ויוצרים ביניהם זווית של 60° . מצא את שיעור הכח השקול כנגדם ואת כיוונו (ז. א. את הזווית שהוא יוצר עם הכח הגדול).

39.ג. צלעות הממשולש הן 10.31 ס"מ, 11.59 ס"מ, 15.25 ס"מ. מצא את אורך חוצה הזווית שמול הצלע 11.59 ס"מ.

40.ג. בסיסי הטרפז הם 90 ס"מ, 30 ס"מ. אחד האלכסונים של הטרפז, שארכו 80 ס"מ יוצר עם השוק זווית בת 108° . מהו אורך האלכסון השני?

41.ג. סכום שתי צלעות המשולש 80 ס"מ, והזווית ביניהן 120° . מצא את הצלעות האלו, אם הצלע השלישית היא 70 ס"מ.

42.ג. השתמש במשפט הקוסינוסים ובנוסחה

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

על-מנת להוכיח, כי בכל משולש

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

כאשר p הוא חצי ההיקף של המשולש.

43.ג. צלעות המשולש הן 13 ס"מ, 14 ס"מ, 15 ס"מ. מצא את מחוג המעגל (א) החוסם (ב) החסום במשולש.

44.ג. הזווית החדה של המעוין היא α , ואורך הקטע הקצר מבין שני הקטעים המחברים אמצע אחת הצלעות עם אחד מקצות הצלע מולה, הוא m . הוכח, כי שטח המעוין הוא

$$\frac{m^2 \sin \alpha}{1.25 - \cos \alpha}$$

45.ג. בתוך ריבוע ABCD נמצאת נקודה N. נתון, כי $AN = 4$ ס"מ, $BN = \sqrt{17}$ ס"מ, $CN = \sqrt{10}$ ס"מ. מצא את צלע הריבוע.

הדרכה: הוכח תחילה, כי סכום ריבועי הקוסינוסים של הזוויות $\widehat{ABN}$ ו- $\widehat{NBC}$ הוא 1.

3.ג. משפט הטנגנסים ונוסחות חצאי הזוויות במשולש.

השימוש במשפט הקוסינוסים אינו נוח כשאורכי הצלעות אינם מבוטאים ע"י מספרים שלמים, מאחר שאינו מתאים לחישובים בעזרת לוגריתמים. לכן מחליפים אותו, במקרה שידועות שתי צלעות במשולש והזווית הכלואה ביניהן, ובמקרים אחדים נוספים, במשפט אחר, הנקרא משפט הטנגנסים, אשר נוח יותר לחישובים כאלה.

משפט הטנגנסים: יהיה בין סכום שתי צלעות במשולש ובין הפרשן שווה ליהם בין הטנגנסים של חצי סכום הזוויות מול צלעות אלה ובין הטנגנס של חצי הפרש אותן הזוויות.

בצורת נוסחה אפשר לכתוב זאת כך:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} \quad (1.3.2)$$

או גם בצורה

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cot \frac{C}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} \quad (2.3.2)$$

הוכחה: ממשפט הסינוסים נובע, כי במשולש ABC.

$$b = 2R \sin B ; a = 2R \sin A$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{2R \sin A + 2R \sin B}{2R \sin A - 2R \sin B} = \\ &= \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} \end{aligned}$$

או בצורה אחרת:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cot \frac{C}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} \quad (2.3.2)$$

לעתים יש להתיר משולש בו נתון סכום או הפרש שתי צלעות, ושני זוויות נוספים, כגון צלע ושלישית והזווית מולה, או שתי זוויות. במקרים אלה אפשר להוכיח את הנוסחות הבאות (הנקראות „נוסחות מולידה“). באותה שיטה בה הוכח משפט הטנגנסים:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \quad (3.3.2)$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \quad (4.3.2)$$

הקורא מתבקש להשלים את הוכחת הנוסחות.



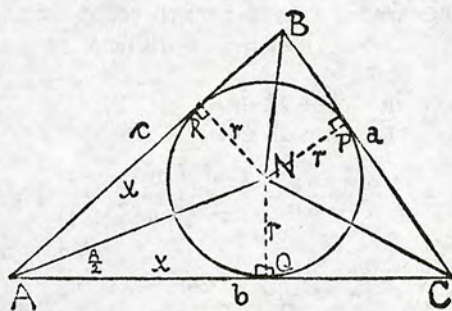
הנוסחות לעיל אינן מתאימות להתרת משולש בו נתונות שלושת הצלעות. במקרה זה נוהג להשתמש בנוסחות חצי זוויות המשולש:

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad (5.3.2)$$

מקום שם p מציין את חצי היקף המשולש

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

הוכחה: במשולש ABC (ראה ציור 6.2) N היא נקודת החיתוך של חוצי הזוויות. כל מרכזו המעגל החסום במשולש



ציור 6.ג

ר"ר $NQ \perp AC$ כך ש- $r = NQ$ הוא מחוג מעגל זה. אם נציין
 $x = AQ$ נוכל לחשב את טנגנס בזווית $\frac{A}{2}$ לפי

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{x} \quad (6.3.2)$$

המחוג r ניתן לחישוב בעזרת שטח המשולש ABC , S ,
 והיקפו $2p$:

$$r = \frac{S}{p} \quad (7.3.2)$$

נוסחה זו ניתנת להוכחה בצורה הבאה: שטח המשולש ABC
 שווה לסכום שטחי המשולשים ABN , BCN ו- CAN , לכן:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \\ &= \frac{r}{2} (a+b+c) = \frac{r}{2} \cdot 2p = r \cdot p \end{aligned}$$

ומכאן נובעת הנוסחה (7.3.2).

אם נעזר במשפט הרון לחישוב שטח משולש בעזרת שלושת
 הצלעות a , b , c (וחצי ההיקף p).

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (8.3.2)$$

נראה כי אפשר לחשב את המחוג r גם בעזרת הנוסחה

$$r = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \quad (9.3.2)$$

על מנת לחשב את הקטע $AR = AQ = x$ נעזר במשפט על דבר אורכי המשיקים למעגל מנקודה חיצונית:

$$BP = BR$$

$$PC = QC$$

$$\therefore x = BC = BR + QC$$

לכן היקף המשולש הוא

$$2p = 2x + 2a$$

ומכאן, כי

$$x = p - a \quad (10.3.2)$$

מן הנוסחות (6.3.2); (9.3.2) ו-(10.3.2) נובע עתה, כי

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad (5.3.2)$$

ובאופן דומה מוכיחים כי

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

דוגמות:

(1) שתי צלעות המשולש הן $a = 42.16$ ס"מ $b = 40.98$ ס"מ, והזווית שביניהן $\hat{C} = 47^{\circ}32'$. להתיר את המשולש.

התרה:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{83.14}{1.18} = \frac{\cot 23^{\circ}46'}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{1.18 \cot 23^{\circ}46'}{83.14}$$

$$\frac{A-B}{2} = 1^{\circ}50'; \quad A-B = 3^{\circ}40'$$

ומכאן:

$$A+B = 180^{\circ} - 47^{\circ}32' = 132^{\circ}28'$$

$$A-B = 3^{\circ}40'$$

$$A = 68^{\circ}4'; \quad B = 64^{\circ}24'$$

מסיימים את פתרון המשולש בעזרת משפט הסינוסים.

(ii) סכום שתי צלעות המשולש 15.2 ס"מ, $a + b$, זוויותיו $A = 75^\circ 45'$, $B = 46^\circ 24'$, $C = 57^\circ 51'$. החר את המשולש.
התרה:

$$\frac{15.2}{a - b} = \frac{\cot 28^\circ 55'}{\tan 14^\circ 40'};$$

$$a - b = \frac{15.2 \tan 14^\circ 40'}{\cot 28^\circ 55'} = 2.2$$

ומכאן, $a = 8.7$ ס"מ $b = 6.5$ ס"מ.

(iii) חבל שארכו 10.44 מטר נקשר אל שני ווים בתקרת אולם שהמרחק ביניהם 6 מטרים. ילד קפץ ונתלה בנקודה של החבל כך ששני חלקי החבל יצרו זווית בת 70° זו עם זו. מה היו אורכי שני חלקי החבל?
התרה: אם נציין את אורכי שני החלקים ב- a ו- b , נקבל בעזרת נוסחות מולידה

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{A - B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

$$\frac{10.44}{6} = \frac{\cos \frac{A - B}{2}}{\sin 35^\circ}$$

מכאן מקבלים $A - B = 7^\circ 12'$ ולכן, כיון ש- $A + B = 110^\circ$, הזווית A היא בת $58^\circ 36'$. עתה מחשבים את a לפי משפט הסינוסים ומקבלים כי $a = 5.44$ מ' ולכן $b = 5$ מ'.

(iv) מצא זוויות המשולש, שצלעותיו הן 17.44 ס"מ, 20 ס"מ, 12 ס"מ.

התרה: ($p = 24.72$)

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4.72 \times 7.28}{24.72 \times 12.72}}; \frac{A}{2} = 18^\circ 18'; A = 36^\circ 36'$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{12.72 \times 7.28}{24.72 \times 4.72}}; \frac{B}{2} = 41^\circ 42'; B = 83^\circ 24'$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{4.72 \times 12.72}{24.72 \times 7.28}}; \frac{C}{2} = 30^\circ; C = 60^\circ$$

תרגילים:

46.ג. התר משולש לפי שתיים מצלעותיו 26.38 ס"מ, 22.5 ס"מ והזווית בת 78° שביניהן, הן בעזרת משפט הקוסינוסים והן בעזרת משפט הטנגנסים.

47.ג. זוויות המשולש הן $\hat{A} = 60^\circ 40'$; $\hat{B} = 63^\circ 38'$. סכום הצלעות 5746 מ"מ $a + c$. מצא את הצלע b .

48.ג. במשולש ABC נתון: $b = 76$ ס"מ, $c = 65$ ס"מ, הפרש הזוויות $\hat{B} - \hat{C} = 11^\circ 27'$. מצא את הצלע a .

49.ג. מצא זוויות של משולש, שצלעותיו 38.67 ס"מ, 58.43 ס"מ, 25.98 ס"מ ע"פ נוסחות לחצאי הזוויות.

50.ג. (א) הוכח, כי שטחו של משולש הוא:

$$s = p^2 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$$

(ב) הוכח, כי מחוג המעגל החסום במשולש הוא:

$$r = p \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$$

51.ג. סכום שתי צלעות המשולש הוא s , והזוויות מול צלעות אלה הן α ; β . הוכח, כי הצלע השלישית היא

$$c = s \cdot \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

52.ג. סכום שתי צלעות המשולש הוא 10 ס"מ והצלע השלישית 9.5 ס"מ. מצא את שתי הצלעות הראשונות, אם הזווית המונחת מול הצלע השלישית היא בת $140^\circ 11'$.

53.ג. הפרש שתי צלעות המשולש הוא 4 ס"מ, הצלע השלישית 7.423 מ' והזווית הכלואה בין שתי הצלעות הראשונות היא $37^\circ 14'$. מצא את שאר הזוויות של המשולש.

54.ג. המרחק בין שני מגדורים 15.42 ק"מ. מאוניה בלב ים, הקרובה לאחד המגדורים ב-1.5 ק"מ יותר מאשר לשני, רואים את קטע החוף בין המגדורים בזווית ראייה של $168^\circ 38'$. מצא את המרחקים של האוניה מהמגדורים.



55.ג שטח המשולש הוא S, זוויותיו α, β, γ . מצא את מחוג המעגל החוסם את המשולש.

56.ג שתי צלעות המקבילית הן 55 ס"מ ו-65 ס"מ. אחד האלכסון-נים 100 ס"מ. מצא את האלכסון השני.

57.ג הוכח, כי אחת מזוויות המשולש, שצלעותיו

$$\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

היא בת 60° .

58.ג צלע המשולש 35 ס"מ, הזווית שלידה $40^\circ 32'$. הגובה לצלע הזו הוא 22 ס"מ. מצא את הצלע מול הזווית הנתונה.

59.ג זווית המשולש $70^\circ 36'$, והגבהים היורדים על שוקיה 65 ס"מ ו-55 ס"מ. חשב את אורך הצלע מול הזווית הנתונה.

60.ג בטרפז נתון הבסיס הגדול 261.4 ס"מ, והזווית שלידו $35^\circ 17'$, $28^\circ 45'$. האלכסון היוצא מקדקד הגדולה שבין הזוויות האלו יוצר זווית בת $12^\circ 58'$ עם הבסיס. מצא את הבסיס הקטן של הטרפז.

61.ג במשולש ABC, $AC = 7$, $AB = 10$, $BC = 6$. F היא על AB. $AF = 3$. מצא את CF.

62.ג מצא את שטח המשולש, ששתיים מזוויותיו $48^\circ 44'$, $35^\circ 37'$ ואורך החוצה של הזווית השלישית 7.62 ס"מ?

63.ג שתיים מצלעות המשולש, החסום במעגל שמחוגו 5 ס"מ, הן 7 ס"מ, 8 ס"מ. מצא את הצלע השלישית.

64.ג שטחו של משולש 210 סמ"ר, שתיים מצלעותיו 17 ס"מ, 25 ס"מ. מצא את הצלע השלישית.

65.ג הוכח, כי מחוג המעגל החוסם משולש ABC הוא

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{abc}{\sin A \sin B \sin (A+B)}}$$

66.ג הוכח, כי שטחו של משולש ABC הוא $\frac{1}{4} \tan A (b^2 + c^2 - a^2)$.

67.ג במשולש ABC הזווית $A = 120^\circ$ וכן $a^2 = 3bc$. הוכח, כי משולש זה הוא שווה שוקיים.

ג.68. הזווית החדה של המקבילית היא α , והמרחקים של מרכז המקבילית משתי צלעותיה הם n , m . מצא את שטח המקבילית ואת אלכסוניה.

ג.69. שלשה מעגלים, שמחוגיהם 1 ס"מ, 2 ס"מ, 3 ס"מ נוגעים זה בזה. מצא את השטח המגבל על ידם.

ג.70. צלע המשולש a , זווית מולה α . היחס בין הצלעות האחרות 1:2. מצא את שטח המשולש.

ג.71. בתוך משולש שווה צלעות, שצלעו 10 ס"מ נמצאת נקודה, שמרחקה משני קדקדים 5 ס"מ ו-7 ס"מ. מהו מרחקה מהקדקד השלישי?

ג.72. הוכח, כי משולש ABC שבו קיים

$$a + c \sin A = b + c \sin B$$
 הוא שווה שוקיים

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \cos^2 B - \cos^2 A$$
 הוא שווה שוקיים או ישר זווית.

ג.73. צלעות המשולש הן 4 ס"מ, 3 ס"מ, 2 ס"מ. הוכח, כי הקסינוס של ההפרש של שתי הזוויות הקטנות של המשולש הוא $\frac{61}{64}$.

ג.74. הקפו של המשולש $2p$, זוויותיו α, β, γ . הוכח, כי שטח המשולש הוא

$$\frac{2p^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2} = p^2 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$$

ג.75. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) העבירו גובה $h = AD$, ודרך אמצע הגובה הוה העבירו ישר היוצר אתו זווית β . הישר הוה חותך את שוקי המשולש בנקודות E ו-F. זווית הראש של המשולש היא 2α . הוכח, כי

$$EF = \frac{h \sin \beta \sin 2\alpha}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}$$

ג.76. הזוויות B, D של המרובע ABCD הן ישרות. הזוויות $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{DAC} = \beta$, ואורך האלכסון AC הוא m . הוכח, כי שטח מרובע זה הוא $\frac{1}{4} m^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$, ומצא את אלכסונו השני.

77.ג. הזווית החדה של משולש ישר-זווית היא α . 2. הוכח, כי היחס בין מחוג המעגל החוסם ובין מחוג המעגל החוסם במשולש הוא

$$2\sqrt{2} \sin \alpha \sin (45^\circ - \alpha)$$

78.ג. הצלעות של מרובע החסום במעגל הן, לפי הסדר, 4 ; 3 ; 2 ; 1 ס"מ. מצא את הקוסינוסים של זוויות המרובע, ואת מחוג המעגל החוסם אותו.

79.ג. הוכח, כי במשולש ABC קיים :

$$\frac{b^2 - c^2}{a} = b \cos C - c \cos B \quad (\text{א})$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{\sin(B - C)}{\sin A} \quad (\text{ב})$$

80.ג. במעגל שקטרו $AB = 2R$ חסום מרובע ABCD. האלכסון AC של המרובע חוצה את הזווית $\widehat{DAB}$, שהיא 2α . הוכח, ששטח המרובע הוא $4R^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha$.

81.ג. r הוא מחוג המעגל החסום במשולש שזוויותיו α, β, γ . R היא מחוג המעגל החוסם אותו. הוכח, כי

$$r : R = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

82.ג. צלעות המשולש הן 9, 16, 20. הוכח, בלי שימוש בלוחות, כי הזווית הגדולה של המשולש גדולה פי שניים מהזווית הבינונית.

83.ג. ארכי הקוים התיכוניים של המשולש הם 5, 6, 3 ס"מ. מצא את הזווית הקטנה של המשולש.

84.ג. הריבועים של ארכי צלעות המשולש הם

$$a^2 ; (a-1)^2 ; 3a^2 - 3a + 1$$

הראה, כי הזווית הגדולה של המשולש היא 120° .

85.ג. זווית המשולש 120° , והיחס בין שתי שוקייה 1:2. מצא את שתי הזוויות האחרות של המשולש.

86.ג. צלעות המקבילית הן a, b , $a > b$, ואילו הזווית שבין אלכסוניה היא α . הוכח, כי שטח המקבילית הוא

$$\frac{1}{2} (a^2 - b^2) \tan \alpha$$

87.ג. צלעות המרובע הן a, b, c, d . הזווית שבין האלכסונים שלו α . הוכח, כי שטח המרובע הוא

$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \tan \alpha$$

88.ג. הזווית החדה של המעוין היא α . הזווית בין הקטעים המחברים אמצע אחת מצלעות המעוין עם קצות הצלע שמולה, היא β . הוכח, כי

$$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$$

89.ג. הוכח, כי שטחו של משולש ABC הוא

$$\frac{1}{4}(b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B)$$

90.ג. הוכח, כי בכל משולש ABC קיים:

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2}$$

91.ג. מפסיגת הר, הנמצאת בגובה m מעל האגם, רואים פיסגת הר שני, שמעברו השני של האגם, בזווית גובה α , ואילו את בבואתו במים רואים בזווית עומק β . הוכח, כי גבהה של הפיסגה השניה מעל פני האגם היא

$$\frac{m \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

92.ג. א) a, b הן שתיים מצלעות המשולש. C הזווית ביניהן.

הוכח, כי אורך חוצה זוויית זו הוא

$$\frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a + b}$$

ב) שתי צלעות המשולש הן 17.32 ס"מ 34.64 ס"מ, ואורך חוצה הזווית ביניהן הוא 20 ס"מ. מצא את הצלע השלישית.

93.ג. a, b הן שתי צלעות המשולש, m אורך חוצה הזווית ביניהן.

הוכח, כי שטחו של המשולש הוא

$$\frac{(a+b)m}{4ab} \sqrt{4a^2 b^2 - (a+b)^2 m^2}$$

94.ג. במעגל, שמחוגו 22.1 ס"מ חסום משולש, שסכום שתיים

מצלעותיו 61 ס"מ, והזווית בין הצלעות האלה היא $61^\circ 56'$.

מצא את שתי הצלעות.

- 95.ג. במשולש ABC הפרש ריבועי הצלעות $BC^2 - AC^2 = d$. הוכח, כי קוטר המעגל החוסם את המשולש הוא

$$2 \sqrt{\frac{d}{\sin C \sin(A - B)}}$$

ושטחו של המשולש הוא

$$\frac{d \sin A \sin B}{2 \sin(A - B)}$$

- 96.ג. במשולש ABC ההפרש בין היטלי הצלעות b ו-c על הצלע a הוא d. הוכח, כי שטח המשולש הוא

$$\frac{d^2 \sin A \sin B \sin C}{2 \sin^2(B - C)}$$

- 97.ג. שטחו של משולש 577.5 סמ"ר, אחת מזוויותיו $84^\circ 33'$, והיחס בין שוקי זווית זו 5:9. מצא את הצלע מול הזווית הנחונת.

- 98.ג. סכום הצלעות a + b של המשולש ABC הוא s. הוכח, כי שטח המשולש הוא

$$\frac{s^2 \sin A \sin B \tan \frac{1}{2} C}{4 \cos^2 \frac{A-B}{2}}$$

- 99.ג. ABCD הוא מעוין שזוויתו החדה β . M היא אמצע הצלע CD, N היא אמצע הצלע BC. הזווית $\widehat{MAN} = \alpha$. הוכח, כי

$$\sin \alpha = \frac{3 \sin \beta}{5 + 4 \cos \beta} \quad (\text{ב}) \quad 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \quad (\text{א})$$

- 100.ג. הוכח, כי יגבל משולש קיים:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{\tan B}{\tan C}$$

- 101.ג. מצא את זוויותיו של המשולש, אם ידוע, כי הן יוצרות סדרה חשבונית, והצלע הגדולה ביותר של המשולש גדולה פי שניים מהצלע הקטנה ביותר בו.

- 102.ג. ABC הוא משולש שווה שוקיים שבסיסו AB. AD הוא חוצה זווית. $BD = 5$ ס"מ, $CD = 3$ ס"מ. מצא את זווית הבסיס של המשולש ואת האורך של AD.

4.ג. שימושים בהנדסה.

בסעיף זה מובאות בעיות בהנדסת המישור ובהנדסת המרחב, שלשם התרתם יש להשתמש בנוסחות ובמשפטים טריגונומטריים שהובאו בפרקים הקודמים. גרבה כאן להשתמש בנוסחות המעבר מסכום או הפרש של פונקציות למכפלה, לשם קבלת נוסחות הנוחות לחישוב בלוגריתמים.

הנדסת המישור.

103.ג. בסיסו של טרפז שווה השוקיים הם a ; b הזווית בין האלכסונים היא α . הוכח, כי שטחו של הטרפז הוא $\frac{1}{4}(a+b)^2 \cot \frac{\alpha}{2}$ או $\frac{1}{4}(a+b)^2 \tan \frac{\alpha}{2}$.

104.ג. מנקודה, שמרחקה הקטן ביותר להיקף המעגל הוא m , רואים את המעגל הזה בזווית ראייה α (הזווית שבין המשיקים היוצאים מנקודה זו). הוכח, כי מחוג המעגל הוא

$$\frac{m \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2(45^\circ + \frac{\alpha}{4})}$$

105.ג. במעוין ABCD, שצלעו a , חותך המעגל, שקוטרו הצלע AB, את הצלע AD בנקודה E. האורך של CE הוא $\frac{a}{2} \sqrt{5}$. מצא את הזווית החדה של המעוין.

106.ג. בטרפז ישר זווית, האלכסון הקצר שווה לבסיס הגדול שאורכו a , והזווית החדה היא α . הוכח, כי שטח הטרפז הוא $2a^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha$.

107.ג. במעגל שמחוגו R חסום משולש ABC. הוכח, כי האורך של מיתר המעגל החוצה את הזווית C הוא

$$2R \sin(A + \frac{C}{2})$$

108.ג. זווית הראש של משולש שווה שוקיים היא 2α . מחוג המעגל החסום במשולש הוא r . הוכח, כי שטח המשולש הוא

$$r^2 \cot \alpha \cot^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

109.ג. בטרפז שווה שוקיים השוק a שווה לבסיס הקטן. הזווית ליד הבסיס הגדול היא α . הוכח, כי שטח הטרפז הוא

$$2a^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

110.ג. אחת מהזוויות החדות של משולש ישר זווית היא 2α . מחוג המעגל החסום במשולש הוא r . הוכח, כי שטח המשולש הוא $r^2 \cot \alpha \cot(45^\circ - \alpha)$.

111.ג. הזווית החדה של טרפז ישר זווית הוא α . הטרפז חוסם מעגל שמחוגו r . הוכח, כי שטח הטרפז הוא

$$\frac{4r^2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha}$$

112.ג. היקפו של משולש שווה שוקיים הוא $2p$, זווית הבסיס שלו 2α . הוכח, כי מחוג המעגל החסום במשולש הוא

$$\frac{p \sin 4\alpha}{8 \cos^4 \alpha}$$

113.ג. בטרפז שווה שוקיים, עם זווית בסיס α , חסום מעגל שקטרו d . הוכח, כי שטח הטרפז הוא $\frac{d^2}{\sin \alpha}$.

114.ג. היתר של משולש ישר זווית הוא c , ואחת הזוויות שלידו היא α . הוכח, כי מחוג המעגל החסום במשולש הזה הוא $c\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$

$$\text{ואילו היקפו של המשולש הוא } 2c\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

115.ג. בסיסו של משולש שווה שוקיים הוא a , הזווית שלידו α . הוכח, כי היקף המשולש הוא $a \tan \alpha \cot \frac{\alpha}{2}$.

116.ג. במעגל חסום דלתון, שאלכסונו הראשי (המחבר את קדקדי הזוויות הבלתי שוות) הוא k , ואחת הזוויות הנחצות על ידו היא 2α . הוכח, כי מחוג המעגל החסום בדלתון הזה

$$\frac{k \sin 2\alpha}{2\sqrt{2} \cos(\alpha - 45^\circ)} \quad \text{הוא}$$

117.ג. שתי צלעות נגדיות של מרובע החוסם מעגל הן 60° ס"מ, 35° ס"מ, ושתיים מהזוויות הנגדיות הן $36^\circ 52'$, $78^\circ 28'$. מצא את ארכן של שתי הצלעות האחרות.

118.ג. במשולש ABC נתון $AC = BC$, $AB = 2a$, והזווית $\widehat{ABC} = \alpha$. הנקודה M נמצאת על AC , הנקודה N על BC . נתון, כי $AM = MN = CN$. הוכח, כי

$$AM = \frac{a}{\cos 3\alpha}$$

119.ג. במשולש ABC נתון $AB = c$, והזוויות α, β, γ . הנקודה M היא על AC, הנקודה N על BC. נתון, כי MN מקביל לצלע AB, וכי $AM = CN$. הוכח, כי

$$MN = \frac{c \sin \beta}{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

120.ג. צלע המשולש a, זוויותיו A, B, C. בתוך המשולש חסום חצי מעגל, כך שמרכזו על הצלע a, והוא משיק לשתי הצלעות האחרות. הוכח, כי מחוג המעגל הוא

$$\frac{a \sin B \sin C}{2 \cos \frac{A}{2} \sin (C + \frac{A}{2})}$$

121.ג. במעגל שמחוגו R חסום טרפו, כך שבסיסו הגדול הוא קוטר המעגל. הזווית החדה של הטרפו היא α . הוכח, כי אורך קו האמצעים של הטרפו הזה הוא $2R \sin^2 \alpha$.

122.ג. בתוך גזירת עיגול בת זווית מרכזית 2α חסמו מעגל, הנוגע בשני המחוגים ובקשת. מחוג המעגל הוא R. הוכח, כי מחוג המעגל החסום הוא

$$\frac{R \sin \alpha}{2 \cos^2 (45^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$

123.ג. השוק של הטרפו שווה השוקים היא a, והיא שווה לבסיס הקטן. אלכסון הטרפו חוצה את זוויתו החדה, שהיא 2α . הוכח, כי שטחו של הטרפו הוא $4a^2 \cos^3 \alpha \sin \alpha$.

124.ג. בטרפו שווה שוקיים מעבירים מאמצע הבסיס הגדול אנך לאחת השוקים. האנך הזה, שארכו m, יוצר עם הבסיס זווית α , וחוצה את השוק. הוכח, כי שטח הטרפו הוא $2m^2 \sin 2\alpha$.

125.ג. במשולש ישר זווית, שיתרו הוא m, ההפרש שבין הזוויות החדות הוא φ . הוכח, כי שטח המשולש הוא $m^2 \cos \varphi$.

126.ג. בטרפו שווה שוקיים הבסיס הגדול הוא m, אלכסוניו מאונכים לשוקים ויוצרים זווית α עם הבסיס הגדול. הוכח, כי אורך הבסיס הקטן של הטרפו הוא $m \cos 2\alpha$, ומצא את שטח המרובע.

127.ג. בטרפז, החסום במעגל שמחוגו R , יוצר אחד האלכסונים זוויות α ו- 2α עם השוקיים. הוכח, כי שטח הטרפז הוא

$$2R^2 \sin 3\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

128.ג. סכום אלכסוני המעוין $2m$, והזווית החדה שלו α . מצא את היקף המעוין ואת שטחו.

129.ג. במשולש ישר זווית נתון היתר c ואחת הזוויות שלידו α . במשולש חסום ריבוע, כך ששניים מקודקודיו על הניצבים ושני האחרים על היתר. הוכח, כי צלע הריבוע היא

$$\frac{c \sin 2\alpha}{2 + \sin 2\alpha}$$

130.ג. במשולש שווה שוקיים, שבסיסו a , והזווית לידו α , חסום מלבן, כך שצלעו המקבילה לבסיס גדולה פי שניים מהצלע השניה. הוכח, כי אורך צלעו הקטנה של המלבן הוא

$$\frac{a\sqrt{2} \sin \alpha}{4 \cos(45^\circ - \alpha)}$$

131.ג. הזווית החדה של משולש ישר זווית היא α . המרחק בין קודקוד הזווית השניה ובין מרכז המעגל החסום במשולש הוה הוא m . הוכח, כי שטח המשולש הוא $\frac{1}{2} m^2 \cos \alpha \cot^2 \frac{\alpha}{2}$

132.ג. בתוך מעוין שזוויתו החדה α חסום ריבוע שצלעותיו מקבילים לאלכסוני המעוין. הוכח, כי יחס שטחי שני המרובעים

$$\frac{\sin \alpha}{2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$

133.ג. זוויות המשולש הן α, β, γ ($\alpha > \beta$). הוכח, כי האנך האמצעי של הצלע שמול זווית γ מחלק את הצלע שמול זווית α לפי היחס $\sin \gamma : \sin(\alpha - \beta)$.

134.ג. דרך נקודה A , הנמצאת מחוץ למעגל, שמחוגו r , עוברים משיק AB וחותך AC למעגל (C היא הקרובה שבין שתי נקודות החיתוך). נתון, כי $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \beta$. הוכח,

$$\text{כי שטח המשולש } ABC \text{ הוא } \frac{2r^2 \sin^3(\alpha + \beta) \sin \beta}{\sin \alpha}$$

ג.135. הצלע של הריבוע ABCD היא a . הנקודה E נמצאת על BC, הנקודה F על DC. $\widehat{EAB} = \widehat{DAF} = 2\alpha$. הוכח.

כי מחוג המעגל החסום במרובע AECF הוא

$$\frac{a \cos(2\alpha + 45^\circ) \cos(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha \cos 2\alpha}$$

ג.136. בתוך גיורת עיגול AOB ($AO = BO = r$) חסום ריבוע, כך שאחת מצלעותיו על המחוג AO, אחד הקדקדים האחרים על OB, והשני על הקשת AB. הוכח, כי אורך צלע

$$\text{הריבוע הוא } (\widehat{AOB} = \alpha < 90^\circ) \cdot \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha}}$$

ג.137. במעגל שמחוגו R עובר קוטר AB, ועליו מסומנת הנקודה M. דרך M עובר מיתר CD, היוצר עם הקוטר זווית α , $\widehat{BMD} = \alpha$, ועם המיתר BD זווית β . הוכח, כי שטחו של המשולש BMD הוא $\frac{r^2 \sin 2(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \sin \beta}{\sin \alpha}$

ג.138. שני ישרים, שהזווית ביניהם 2α משיקים לאותו המעגל, שמחוגו R. מעגל שני, שמחוגו קטן מ-R, משיק אף הוא לשני הישרים האלה ולמעגל הגדול. הוכח, כי מחוג המעגל הקטן הוא $R \tan^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$.

ג.139. סכום שני גבהיו השונים של משולש שווה שוקיים הוא m , זווית הבסיס של המשולש היא α . הוכח, כי אורך בסיס

$$\text{המשולש הוא } \frac{m \cos \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

ג.140. במעגל, שמחוגו R חסום טרפז, כך שבסיסו הגדול הוא קוטר המעגל, ובסיסו הקטן חותך מן המעגל קשת (קטנה) של 2α . הוכח, כי שטח הטרפז הוא

$$2R^2 \cos \alpha \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

ג.141. במעגל עובר מיתר, שארכו a , ואשר חותך מן המעגל קשת (קטנה) של 4α . בקצות המיתר עוברים משיקים למעגל. הוכח, כי מחוגו של הקטן בין שני המעגלים המשיקים למעגל

$$\text{הגתן ולשני המשיקים הוא } \frac{a \sin \alpha}{4 \cos^3 \alpha}$$

142.ג. זווית הבסיס של משולש שווה שוקיים היא α , ואורך הקטע היוצא מאמצע שוק אחת, והמאונך לשוק השניה הוא m .

הוכח, כי מחוג המעגל החוסם את המשולש הוא $\frac{m}{2\sin^2 \alpha \cos \alpha}$

ואילו מחוג המעגל החסום הוא $\frac{m}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$.

143.ג. דלתון, שזוויותיו השונות הן 2α ו- 2β , חוסם מעגל שמחוגו R . הוכח, כי שטח הדלתון הוא

$$\frac{2R^2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{4R \tan \frac{\alpha+\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \alpha \sin \beta} \quad \text{והיקפו}$$

144.ג. במעגל שמחוגו R רשום מיתר AB , היוצר עם קוטר המעגל העובר דרך A זווית α . המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הקוטר הנ"ל בנקודה C . הוכח, כי שטח המשולש ABC הוא $\pm R^2 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha$.

145.ג. שני המשיקים למעגל היוצאים מנקודה A כולאים ביניהם זווית 2φ , ואורך כל אחד מהם m . חשב את שטח המשולש הנוצר ע"י שני המשיקים הנ"ל והמשיק למעגל דרך הנקודה עליו, אשר קרובה ביותר לנקודה A .

146.ג. במעגל שמחוגו r רשום מיתר שאורכו $\frac{r}{2}\sqrt{13}$. מיתר זה מחלק קוטר של המעגל ביחס $1:3$. מצא את הזווית בין המיתר לקוטר.

147.ג. מצא את הקוסינוסים של זוויות משולש שווה שוקיים, אם אורך הקטע המקביל לבסיס המשולש, ואשר מחלק את שוקיו ביחס $1:2$, שווה לאורך שוק המשולש.



הנדסת המרחב.

להלן נתיר מספר בעיות האופייניות לשימוש בנוסחות ומשפטים טריגונומטריים בהנדסת המרחב.

(I) בפירמידה מרובעת משוכללת וישרה צלע הבסיס a , הזווית בין הפאה והבסיס α . מצא את נפח הפירמידה ואת פניה.

התרה: לפי הציור $EF = FG \tan \alpha$

$$= \frac{a}{2} \tan \alpha$$

ומכאן הנפח V הוא

$$V = \frac{a^3}{6} \tan \alpha$$

חישוב הפנים P

שטח הפאה BEC הוא:

$$\frac{a}{2} \times \frac{a}{2 \cos \alpha} = \frac{a^2}{4 \cos \alpha}$$

לכן יהיה שטח הפנים:

$$P = \frac{a^2}{\cos \alpha} + a^2 = \frac{a^2(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{2a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$

(II) הגובה של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה גדול פי שניים מצלע בסיסה. מצא את הזווית α בין המקצוע הצדדי והבסיס (ב) בין שני מקצועות צדדיים סמוכים.

התרה:

(א) (ראה ציור קודם)

$$FB = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

$$\tan \widehat{EBF} = \frac{2a}{\frac{1}{2} a \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}; \widehat{EBF} = 70^\circ 32'$$

$$EG^2 = 4a^2 + \frac{1}{4}a^2 \quad (\text{ב})$$

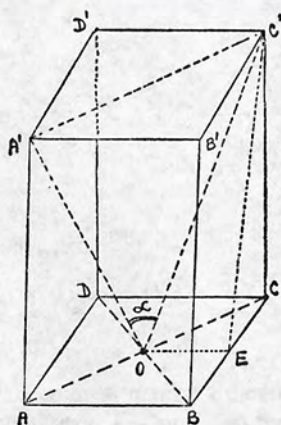
$$EG = \frac{a}{2} \sqrt{17}$$

$$\tan \widehat{BEG} = \frac{a}{2} : \frac{a}{2} \sqrt{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\widehat{BEG} = 13^\circ 38'$$

$$\widehat{BEC} = 2 \cdot \widehat{BEG} = 27^\circ 16'$$

(III) בסיסה של תיבה הם הריבועים $ABCD$, $A'B'C'D'$
 במרכז O של הבסיס $ABCD$ רואים את הקטע $A'C'$ בזווית α ,
 (א) מהו נפח התיבה V אם צלע בסיסה a ? (ב) מצא את הזווית
 בין OG' והפאה $BB'C'C$, אם $\alpha = 60^\circ$.



התרה:

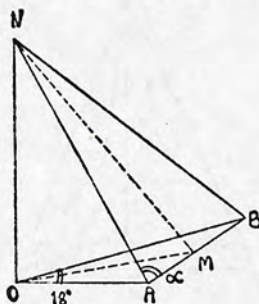
$$\begin{aligned} CO &= \frac{a}{2} \sqrt{2}; \quad CC' = \frac{a}{2} \sqrt{2} \tan \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (*) \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{2} \cot \frac{\alpha}{2} \\ V &= \frac{a^3}{2} \sqrt{2} \cot \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

(ב) הזווית המבוקשת היא $\widehat{OC'E}$: ($CE = BE$)

$$\begin{aligned} \sin \widehat{OC'E} &= \frac{OE}{OC'} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2} a \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sin 30^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.3535 \\ \widehat{OC'E} &= 20^\circ 42' \end{aligned}$$

ומכאן:

(iv) הבסיס של פירמידה ישרה הוא מצולע משוכלל, בעל 20 צלעות. מחוג המעגל החסום בבסיס זה הוא r , והזווית בין צלע הבסיס והמקצוע הצדדי היא α . מצא את פני הפירמידה.



התרה:

בציור: AB היא צלע הבסיס, $OM = r$ מחוג המעגל החסום בבסיס. שטח המשולש AOB הוא $r^2 \tan 9^\circ$; על כן שטח הבסיס הוא $20 r^2 \tan 9^\circ$. נמצא עתה את גובה הפאה:
 $MN = AM \tan \alpha = r \tan 9^\circ \tan \alpha$

לכן שטח הפנים P הוא:

$$\begin{aligned} P &= 20 r^2 \tan 9^\circ + 20 r \tan 9^\circ \cdot MN = \\ &= 20 r^2 \tan 9^\circ + 20 r^2 \tan^2 9^\circ \tan \alpha = \\ &= 20 r^2 \tan 9^\circ (1 + \tan 9^\circ \tan \alpha) = \\ &= 20 r^2 \tan 9^\circ \left(1 + \frac{\sin 9^\circ \sin \alpha}{\cos 9^\circ \cos \alpha} \right) = \\ &= \frac{20 r^2 \tan 9^\circ \cos (\alpha - 9^\circ)}{\cos 9^\circ \cos \alpha}. \end{aligned}$$

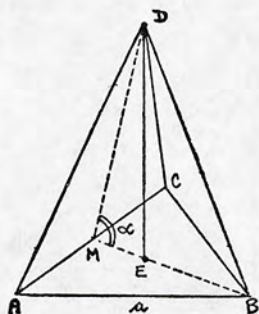
(v) נפחה של פירמידה משולשת משוכללת וישרה היא V, הזווית בין בסיסה והפאה היא α . מצא את מעטפת הפירמידה.

התרה:

ABC הוא בסיס הפירמידה, DE גובהה, $\widehat{DME} = \alpha$. צלע הבסיס a

$$ME = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{6} \sqrt{3}$$

$$DE = ME \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}a \tan \alpha}{6}$$



ומכאן:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \cdot DE = \frac{a^3 \tan \alpha}{24}$$

ולכן:

$$a = \sqrt[3]{24V \cot \alpha} = 2 \sqrt[3]{3V \cot \alpha}$$

חישוב המעטפת M:

$$M = 3 \times \frac{a}{2} \cdot DM = \frac{3a}{2} \cdot \frac{ME}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha} = \frac{\sqrt[3]{9V^2 \cot^2 \alpha}}{\cos \alpha} \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9V^2}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}}$$

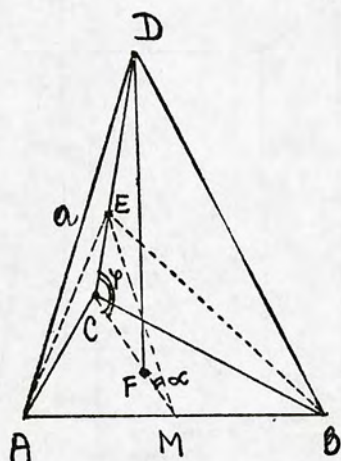
(vi) הבסיסים של מנסרה ישרה הם המשושים המשוכללים $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$. גובה המנסרה גדול פי 3 מצלע בסיסה. מצא א) את הזווית $\angle BE'D$ ב) את הזווית בין BD' ובסיס המנסרה ג) את הזווית בין BD' והפאה $EDD'E'$.
ה ת ר ה:

צלע בסיס המנסרה היא a , גובהה $3a$.

הזווית $\angle EDC = \angle BCD = 120^\circ$, והיות וקיים $\angle BDC = 30^\circ$,

הרי הזווית $\angle EDB = 90^\circ$.

(vii) הווית בין המקצוע הצדדי a והבסיס של פירמידה משולשת משוכללת וישרה היא φ . דרך אחת מצלעות הבסיס מעבירים מישור, היוצר עם הבסיס וווית α , והחותך את הפירמידה. מוז שטח החתך?



ח ת ר ה :

ABC הוא בסיס הפירמידה, DF הגובה, $\widehat{EMC} = \alpha$, $\widehat{DCF} = \varphi$ הוא החתך, ABE הוא החתך, $\widehat{EMC} = \alpha$. נסמן את צלע הבסיס ב- x , ואז

$$CF = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} \sqrt{3} = \frac{x}{3} \sqrt{3} = a \cos \varphi$$

$$x = a \sqrt{3} \cos \varphi \quad \text{ולכן:}$$

$$CM = \frac{x}{2} \sqrt{3} = \frac{3}{2} a \cos \varphi$$

נמצא עתה את הגובה EM של החתך ABE (לפי משפט

הסינוסים):

$$\frac{EM}{\sin \varphi} = \frac{CM}{\sin (\varphi + \alpha)}$$

$$EM = \frac{3 a \cos \varphi \sin \varphi}{2 \sin (\varphi + \alpha)} = \frac{3 a \sin 2 \varphi}{4 \sin (\varphi + \alpha)}$$

השטח של החתך (S) הוא :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot EM = \frac{1}{2} a \sqrt{3} \cos \varphi \cdot \frac{3a \sin 2\varphi}{4 \sin (\alpha + \varphi)} =$$

$$= \frac{3a^2 \sqrt{3} \cos \varphi \sin 2\varphi}{8 \sin (\alpha + \varphi)}$$

(VIII) מצא את פניו של חרוט, שגבהו h אם הזווית בין נובהו ובין הקו היוצר שלו היא φ .

ה ת ר ה :

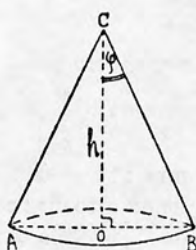
הפנים P הם :

$$P = \pi \cdot \overline{OB}^2 + r \cdot OB \cdot CB =$$

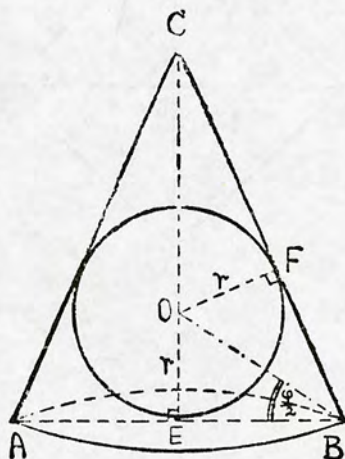
$$= \pi h^2 \left(\tan^2 \varphi + \frac{\tan \varphi}{\cos \varphi} \right) =$$

$$= \pi h^2 \tan \varphi \cdot \frac{\sin \varphi + 1}{\cos \varphi} =$$

$$= \frac{2\pi h^2 \tan \varphi \sin^2 (45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\cos \varphi}$$



(IX) הזווית בין הקו היוצר של החרוט ובין בסיסו היא φ . בחרוט חסום כדור שפניו הם P . מהו שטח החתך הצירי של החרוט?



התרה:

r הוא מחוג הכדור החסום. נתון, כי
 $\widehat{EBC} = \widehat{COF} = \varphi$

$$P = 4\pi r^2 ; r^2 = \frac{P}{4\pi}$$

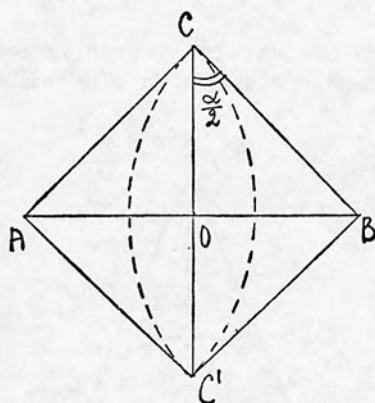
$$EB = r \cot \frac{\varphi}{2}$$

$$CE = EB \tan \varphi = r \frac{\tan \varphi}{\tan \frac{\varphi}{2}}$$

לכן שטח החתך הצירי הוא

$$S = BE \cdot EC = r^2 \tan \varphi \cot^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{P}{4\pi} \tan \varphi \cot^2 \frac{\varphi}{2}.$$

(X) משולש שווה שוקיים, ששטחו S , זווית הראש שלו α ,
 מסתובב סביב בסיסו. מהו הנפח V של הגוף הסיבובי המתקבל?
 מהם פניו P ?



התרה:

נסמן $BO = m$, $CO = h$, ואז

$$mh = S$$

$$\frac{m}{h} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

ומכאן :

$$m^2 = S \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$h^2 = S \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$V = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot CO^2 \cdot BO = \frac{2}{3} \pi h^2 m =$$

$$= \frac{2}{3} \pi \cdot S \cot \frac{\alpha}{2} \sqrt{S \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3} \pi S \cdot \sqrt{S \cot \frac{\alpha}{2}}$$

$$P = 2\pi \cdot OC \cdot BC =$$

$$= 2\pi \cdot h \cdot \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\pi h^2}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\pi S \cot \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\pi S}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

תרגילים:

148.ג. מקצועות בסיסה של תיבה הם a ו- b . אלכסון התיבה יוצר זווית α עם בסיסה. מצא את נפח התיבה.

149.ג. בפירמידה מרובעת משוכללת וישרה מקצוע הבסיס a , והזווית בין המקצוע הצדדי והבסיס היא α . מצא את נפח הגוף ואת פניו.

150.ג. הגובה של פירמידה מעושרת משוכללת וישרה הוא h , והזווית בינו ובין המקצוע הצדדי היא α . מצא את נפח הפירמידה.

151.ג. מהי הזווית בין שני אלכסונים של קוביה?

152.ג. מהי הזווית בין הקטעים המחברים מרכז של פאת הקוביה עם שני קדקדים סמוכים של הפאה ממול?

153.ג. המקצוע הצדדי של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה שווה לצלע בסיסה. מצא את הזווית בין פאת הפירמידה ובסיסה.

154.ג. הגובה של פירמידה משולשת משוכללת וישרה גדול פי שניים מצלע בסיסה. מהי הזווית בין המקצוע ובין מקצוע הבסיס?

- 155.ג. בפירמידה משולשת משוכללת וישרה זוויות הראש של הפאות הן ישרות. α היא הזווית בין הבסיס והפאה, β היא הזווית בין המקצוע הצדדי והבסיס. הוכח, כי $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.
- 156.ג. צלע בסיסה של פירמידה משולשת משוכללת וישרה היא 5 ס"מ. גובה הפירמידה 7 ס"מ. מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי ובסיס הפירמידה, וכן את הזווית בין הפאה והבסיס.
- 157.ג. שטחה של פאה אחת של פירמידה מעושרת משוכללת וישרה שווה לשליש שטח בסיסה. מצא את הזווית בין גובה הפאה ובין בסיס הפירמידה.
- 158.ג. מחוג המעגל החסום בבסיסה של פירמידה משוכללת וישרה, בעלת 15 מקצועות צדדיים, הוא R. הזווית בין הפאה והבסיס היא α . מצא את נפח הפירמידה ואת מעטפתה.
- 159.ג. שטח המעגל החסום את בסיסה של פירמידה מתושעת משוכללת הוא S, והזווית בין המקצוע הצדדי וגובה הפירמידה הוא α . מצא את נפח הפירמידה.
- 160.ג. שטח הבסיס של פירמידה מחומשת משוכללת וישרה הוא S. הזווית בין המקצוע הצדדי והבסיס היא α . מצא את נפח הפירמידה.
- 161.ג. הנפח של פירמידה משולשת משוכללת הוא V. הזווית בין גובה הפירמידה ופאתה היא α . מצא את אורך מקצוע בסיס הפירמידה.
- 162.ג. מחוג המעגל החסום את בסיסה של פירמידה מחומשת משוכללת הוא R. הזווית בין גובה הפירמידה ובין גובה הפאה שלה היא α . מצא את נפח הפירמידה.
- 163.ג. בסיסה של מנסרה ישרה הם מחומשים משוכללים ABCDE ו- $A'B'C'D'E'$. גבהה של המנסרה גדול פי שניים ממקצוע בסיסה. מהי הזווית בין הקטע AD' ובסיס הפירמידה?
- 164.ג. במנסרה משושה משוכללת וישרה הבסיסים הם ABCDEF ו- $A'B'C'D'E'F'$. גובה המנסרה שווה למקצוע בסיסה. מצא את הזווית $AD'C$.

165.ג. הבסיס של מנסרה ישרה הוא משולש שווה שוקיים, ובו זווית הבסיס היא α והשוק m . גובה המנסרה שווה לקוטר המעגל החוסם את בסיסה. הוכח, כי נפח המנסרה הוא $m^3 \cos \alpha$.

166.ג. גבהו של חרוט הוא h , והזווית בינו ובין הקו היוצר היא α . הוכח, כי פני החרוט הם

$$\frac{2\pi h^2 \sin \alpha \cdot \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^3 \alpha}$$

167.ג. נפחו של חרוט הוא V , והזווית בין בסיסו ובין הקו היוצר שלו, היא α . מצא את האורך של הקו היוצר.

168.ג. המעטפת של חרוט היא M והזווית בין הגובה ובין הקו היוצר שלו α . מצא את גובה החרוט ואת נפחו.

169.ג. פניו של חרוט הם P , הזווית בין הבסיס והמעטפת היא α . הוכח, כי גובה החרוט הוא

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2P}{\pi \cos \alpha}}$$

170.ג. בכדור שמחוגו R חסום חרוט, שהזווית בין בסיסו והקו היוצר שלו היא α . הוכח, כי נפח החרוט הוא $\frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha$, ומעטפתו היא $2\pi R^2 \sin \alpha \sin 2\alpha$.

171.ג. הזווית בין גובה החרוט והקו היוצר שלו היא α . בחרוט הזה חסום כדור, שמחוגו R . הוכח, כי נפח החרוט הוא

$$\frac{\pi}{3} R^3 \cot^3 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cot \alpha$$

172.ג. גיורת עיגול, בעלת זווית מרכזית של 130° קופלה לחרוט. מצא את הזווית בין בסיס החרוט הזה והקו היוצר שלו.

173.ג. גיורת עיגול, בעלת זווית מרכזית של 100° , ושטח של 407 סמ"ר קופלה לחרוט. מצא את נפח החרוט.

174.ג. בחרוט, שהזווית בין הקו היוצר והגובה שלו היא α , חסום גליל, כך שבבסיסי שני הגופים הם על מישור אחד. גבהו של הגליל שווה לקוטר בבסיסו. מצא את היחס בין נפחי שני הגופים. מהו היחס הזה כאשר $\alpha = 45^\circ$?

175.ג. הבסיס של מנסרה ישרה הוא ריבוע שצלעו a . הזווית בין אלכסון המנסרה והפאה שלה היא α . מצא את נפח המנסרה. מהו התנאי לקיום פתרון?

176.ג. הנפח של פירמידה מחומשת משוכללת וישרה הוא V , והזווית בין הבסיס והמקצוע הצדדי היא α . מצא את אורך מקצוע בסיס הפירמידה.

177.ג. צלע הבסיס של פירמידה משולשת משוכללת היא a , והזווית בין בסיסה והפאה היא α . הוכח, כי פני הפירמידה הם

$$\frac{a^2 \sqrt{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}$$

178.ג. פניה של פירמידה משולשת משוכללת וישרה הם P . הזווית בין הפאה והבסיס היא α . הוכח, כי שטח בסיס הפירמידה

$$\frac{P \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{הוא}$$

179.ג. הנפח של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה הוא V . הזווית בין המקצוע הצדדי והבסיס של הפירמידה היא α . הוכח, כי אורך מקצוע הבסיס הוא

$$\sqrt[3]{3V \sqrt{2} \cot \alpha}$$

180.ג. שטח הפאה של פירמידה מרובעת משוכללת הוא S . הזווית בין הפאה והבסיס שלה היא α . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{2S}{3} \sin 2\alpha \sqrt{\frac{S}{\cos \alpha}}$$

181.ג. בחרוט שגבהו h חסומה פירמידה מרובעת משוכללת. הזווית בין פאת הפירמידה ובסיס החרוט היא α . מצא את נפח החרוט.

182.ג. משולש ישר זווית שיתרו c , ואחת מזוויותיו החדות α , מסתובב סביב היתר. הוכח, כי נפח הגוף הצוצר הוא

$$\frac{\pi}{12} c^3 \sin^2 2\alpha$$

183.ג. משולש ישר זווית, שאת מווייתו החדות היא α , והגובה על יתרו הוא h , מסתובב סביב הניצב מול הזווית α . מהו הנפח של הגוף הסיבובי הנוצר?

184.ג. משולש שווה שוקיים, ששטחו S , וזווית הראש שלו α , מסתובב סביב הגובה על הבסיס. מצא את נפחו של הגוף הסיבובי ואת פניו.

185.ג. משולש שצלעו a והזוויות שלידה γ, β מסתובב סביב צלע זו. מצא את נפחו של הגוף הסיבובי הנוצר.

186.ג. בסיסו הגדול של טרפז שווה שוקיים הוא $4a$, השוק $3a$, והזווית ביניהם α . הוכח, כי נפח הגוף הסיבובי המתקבל מסיבובו של הטרפז סביב הבסיס הגדול הוא

$$72\pi a^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

187.ג. זווית הראש של החרוט היא α , סכום גבהו והקו היוצר שלו הוא m . הוכח, כי פני החרוט הם

$$\frac{\pi m^2 \tan \alpha \sin^2 (45^\circ + \alpha)}{\cos^2 \alpha}$$

188.ג. שטח החתך שלאורך צירו של החרוט הוא S , והזווית שבין מעטפת החרוט ובסיסו היא α . הוכח, כי פני החרוט הם

$$\pi S \cot \frac{\alpha}{2}$$

189.ג. צלע הבסיס של פירמידה מרובעת משוכללת היא a , זווית הראש של כל פאה היא α . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ ופניה הם } \frac{a^2 \sqrt{2 \sin (45^\circ + \frac{\alpha}{2})}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

190.ג. בסיסה של פירמידה הוא טרפז שווה שוקיים, שזווית הבסיס החדה שלו היא 2α . הבסיס הקטן של הטרפז שהוא b , שווה לשוק. כל אחד מהמקצועות הצדדיים של הפירמידה יוצר זווית β עם מישור הבסיס. מצא את נפח הפירמידה.

191.ג. הגובה של מנסרה משולשת משוכללת וישרה הוא h . הזווית בין בסיס המנסרה ובין הקטע המחבר את מרכזו עם אמצע מקצוע הבסיס השני היא α . הוכח, כי פני המנסרה הם

$$\frac{6\sqrt{6}h^2 \cot \alpha \cos (45^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$$

192.ג. צלע הבסיס של פירמידה משולשת משוכללת וישרה היא a . הזווית בין המקצוע הצדדי והבסיס היא α . דרך מקצוע הבסיס עובר מישור החותך את הפירמידה, והיוצר זווית β עם בסיסה. הוכח, כי שטח החתך הוא

$$\frac{a^2 \sqrt{3} \sin \alpha}{4 \sin(\alpha + \beta)}$$

193.ג. הבסיס של פירמידה הוא ריבוע, שצלעו a ; שתיים מהפאות הסמוכות של הפירמידה מאונכות לבסיסה, וכל אחת מהשתיים האחרות יוצרת עם הבסיס זווית α . הוכח, כי מעטפת הפירמידה היא

$$\frac{2\sqrt{2} a^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\cos \alpha} \quad \text{ופניהה הם} \quad \frac{2a^2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\cos \alpha}$$

194.ג. צלע בסיסה של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה היא a , והזווית בין המקצוע הצדדי ובסיסה היא α . בחוך הפירמידה חסומה קוביה, כך שקדקדי בסיסה העליון מונחים על המקצועות הצדדיים של הפירמידה, ובסיסה התחתון על בסיס הפירמידה. מצא את אורך מקצוע הקוביה.

195.ג. הבסיס של מנסרה הוא מקבילית, שצלעותיה a ו- b , והזווית ביניהן α . האלכסון הגדול של המקבילית שווה לאלכסון הקטן של המנסרה. הוכח, כי נפח המנסרה הוא

$$\frac{\sqrt{2} (ab)^3 \sin \alpha \sin 2\alpha}{3}$$

196.ג. בסיסה של מנסרה ישרה הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו $2a$, והזווית הבסיס שלו היא α . מעטפת המנסרה שווה למחצית שטח פניה. הוכח, כי נפח המנסרה הוא

$$\frac{a^3 \tan \alpha \tan \frac{\alpha}{2}}{2}$$

197.ג. בחרוט חסום כדור שמחוגו R . ממרכז הכדור רואים את הקו היוצר של החרוט בזווית α . הוכח, כי נפח החרוט הוא

$$-\frac{\pi}{3} R^3 \tan^3 \alpha \tan 2\alpha$$

198.ג. בנקודת חיתוך O של אלכסוני המקבילית $ABCD$ מעמי-דים אנך OE למישור המקבילית. נתון $BD = a$, והזווית

DBA היא α . EF הוא מרחק הנקודה E מהצלע AB. הזווית בין EF ובין מישור המקבילית היא β . מצא את האורך של EF.

199.ג. האלכסון הגדול של מנסרה מתומנת (משומנת) משוכללת, שארכו a, יוצר עם המקצוע הצדדי, היוצא מאותו קודקוד הבסיס, זווית α . הוכח, כי נפח המנסרה הוא

$$\frac{a^3}{4} \sqrt{2} \sin \alpha \sin 2\alpha$$

200.ג. דרך היתר של משולש ישר זווית מעבירים מישור. כל אחד מהניצבים של המשולש יוצר עם המישור הזה זווית α . הזווית בין המישור הזה ובין מישור המשולש היא β . הוכח, כי $\sin \beta = \sqrt{2} \sin \alpha$.

201.ג. בסיסה של מנסרה ישרה הוא משולש שווה צלעות. דרך מקצוע בסיס התחתון, והקודקוד הנגדי לו של הבסיס העליון עובר מישור, החותך את המנסרה. שטח החתך הוא S, והמישור החותך יוצר עם הבסיס התחתון זווית α . מצא את נפחה של המנסרה, וחשב אותה, כאשר $32.4 \text{ ס"מ}^2 = S$, $\alpha = 69^\circ 32'$.

202.ג. המעטפת של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה היא M. זווית הראש של הפאה היא α . מצא את שטחו של חתך הפירמידה, העובר דרך קודקודה ואלכסון בסיסה.

203.ג. אלכסון הבסיס של מנסרה מרובעת משוכללת וישרה, שהוא a, יוצר עם אלכסון הפאה, היוצא מאותו הקודקוד, את הזווית α . מצא את נפח המנסרה. מהו התנאי לקיום הפתרון?

204.ג. צלע הבסיס של פירמידה משושה משוכללת וישרה הוא a. הזווית בין הפאה ובסיס הפירמידה היא 2α . הוכח, כי פני הכדור החסום בפירמידה הם $3\pi a^2 \tan^2 \alpha$.

205.ג. בסיסה של מנסרה ישרה הוא משולש ישר זווית, שאחד מניצביו הוא a, והזווית מולו α . הזווית בין אלכסוני הפאות היוצאים מקודקוד הזווית החדה, השונה מזווית α , גם היא α . הוכח, כי נפח המנסרה הוא

$$\frac{a^3 \cot \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}}{2 \sin^2 \alpha}$$

ג.206. צלע בסיסה של מנסרה מרובעת משוכללת וישרה היא a .
הזווית בין האלכסונים של שתי פאות, היוצאים מאותו
הקודקוד היא α . מצא את נפח המנסרה.

ג.207. הבסיס של פירמידה שקדקדה M , הוא ריבוע $ABCD$,
שאורך צלעו a . המקצוע AM מאונך לבסיס הפירמידה,
והזווית BCM היא α . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{a^3 \sqrt{1 - \cos 2\alpha}}{3 \cos \alpha}$$

ג.208. כל אחת מזוויות הראש של הפאות בפירמידה משולשת
היא α . אחד מהמקצועות הצדדיים מאונך לבסיס הפירמידה.
אורכו a . הוכח, כי מעטפת הפירמידה היא

$$\frac{a^2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \alpha}$$

ג.209. מקצועות הבסיס של תיבה הם 2 ס"מ ו- 3 ס"מ. אלכסון
התיבה יוצר עם הקטן שבין המקצועות האלה זווית α .
נתון, כי $\cos \alpha = \frac{2}{7}$. מצא את נפח התיבה.

ג.210. אלכסון התיבה יוצר עם שלשה המקצועות הצדדיים, היוצאים
מאותו הקודקוד זוויות α, β, γ . הוכח, כי
 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

ג.211. אלכסון התיבה d יוצר עם בסיסה זווית α , ואילו אלכסון
הבסיס יוצר זווית β עם אחת הצלעות. הוכח, כי מעטפת
התיבה היא $d^2 \sqrt{2} \sin 2\alpha \sin (\beta + 45^\circ)$.

ג.212. בכדור, שמחוגו R חסומה פירמידה ישרה, שבסיסה מלבן.
הזווית בין אלכסוני המלבן היא α , והזווית בין המקצוע
הצדדי של הפירמידה ובין בסיסה הוא β . הוכח, כי נפח
הפירמידה הוא

$$\frac{2}{3} R^3 \sin^3 2\beta \tan \beta \sin \alpha$$

ג.213. צלע בסיס פירמידה מרובעת משוכללת היא a , והזווית בין
הפאה שלה ובסיסה היא α ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$). דרך מקצוע
בסיס הפירמידה עובר מישור, המאונך לפאה שממול. מצא
את שטח החתך.

ג.214. בסיסה של מנסרה משולשת משוכללת וישרה הם ABC ,
 $A'B'C'$, וגבהה h . נתון, כי הזווית $AC'B$ היא 2α .

הוכח, כי שטח המשולש $AC'B$ הוא

$$\frac{h^2 \sin 2\alpha}{\sin(30^\circ + \alpha) \sin(30^\circ - \alpha)}$$

ג.215. הגובה של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה הוא h ,
 הזווית הראש של הפאה היא α . הוכח, כי מעטפת הפירמידה

$$\text{היא } 2h^2 \tan \alpha$$

ג.216. בסיסה של פירמידה הוא משולש ABC שבו $AB = AC$.
 כל אחד מהמקצועות הצדדיים גם הוא שווה ל- AB . נתון,
 כי הזווית BAC היא α , והזווית בין המקצוע הצדדי
 ובסיס הפירמידה היא β . הוכח, כי $2 \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} = 1$.

ג.217. נתונים שני מישורים מאונכים זה לזה, ובתוך כל אחד מהם
 עובר ישר, כך ששני הישרים נחתכים על קו החיתוך של שני
 המישורים, ביוצרים עם הקו הזה זוויות α ו- β . הזווית בין
 הישרים היא γ . הוכח, כי

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$$

ג.218. הבסיס של מנסרה ישרה הוא משולש שווה שוקיים. שהשוק
 שלו a , והזווית שבין השוקיים α . דרך בסיס המשולש
 הוזה עובר מישור, החותך את המנסרה, והיוצר זווית α עם
 הבסיסה. מצא את שטח החתך.

ג.219. מצא נפח של פירמידה משולשת משוכללת וישרה, שמקצועה
 הצדדי a , וזווית הראש של הפאה α .

ג.220. מקצוע הבסיס של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה שווה
 למקצוע הצדדי. מצא את הזווית בין הקטע המחבר קודקוד
 הבסיס עם מרכז פאה מולו ובין מקצוע היוצא מאותו קודקוד.

ג.221. צלע הבסיס של פירמידה משולשת משוכללת היא a , והזווית
 בינה ובין המקצוע הצדדי היא α . מצא את שטח חתך
 הפירמידה, העובר דרך מקצועה הצדדי וגבהה.

ג.222. המקצוע הצדדי של פירמידה משולשת משוכללת וישרה
 הוא a , והוא יוצר זווית α עם בסיס הפירמידה. בתוך
 הפירמידה חסום גליל, שגבהו שווה שקוטר בסיסו, כך

שבסיסי שני הגופים הם על מישור אחד. הוכח, כי גובה הגליל הוא

$$\frac{a \sin 2\alpha}{\sqrt{2} \sin (\alpha + 45^\circ)}$$

223.ג. בכדור חסומה פירמידה משולשת משוכללת וישרה, בעלת מקצוע צדדי a , היוצר זווית α עם הבסיס. הוכח, כי מחוג

$$\frac{a}{2 \sin \alpha}$$

הכדור הוא

224.ג. המקצוע הצדדי של פירמידה משולשת נושכללת וישרה הוא a , והוא יוצר עם גובה הפירמידה זווית של 30° . הפירמידה נחתכה ע"י מישור, העובר דרך אחד ממקצועות הבסיס, והיוצר אתו זווית α . הוכח, כי שטח החתך הוא

$$\frac{9a^2}{32 \sin (\alpha + 60^\circ)}$$

225.ג. בסיסה של פירמידה ישרה הוא ריבוע, שצלעו a . המקצוע הצדדי של הפירמידה יוצר זווית α עם בסיסה. דרך אלכסון הבסיס עובר מישור, החותך את הפירמידה, והמאונך למקצועה הצדדי. הוכח, כי שטח החתך הוא $\frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$.

226.ג. בסיסה של מנסרה ישרה הם משולשים ישרי זווית, ABC ו- $A'B'C'$ ($\hat{C}$ ישרה). הזווית BAC היא α , והניצב מולה הוא a . הזווית $A'B'C'$ אף היא שווה α . הוכח, כי נפח המנסרה הוא

$$\frac{a^3 \cot \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}}{2 \sin^2 \alpha}$$

227.ג. צלע הבסיס של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה היא a . זווית הראש של כל פאה היא α . דרך קודקוד הפירמידה מעבירים מישור, המקביל למקצוע הבסיס, והחותך את הבסיס ביוצרו אתו זווית β . הוכח, כי שטח החתך הוא

$$\frac{a^2 \sqrt{\cos \alpha}}{4 \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}}$$

228.ג. מחוג הבסיס של החרוט הוא R , ואילו הזווית בין הבסיס והקו היוצר היא α . דרך קודקוד החרוט עובר מישור, ההותך את החרוט, והיוצר עם גבהו זווית β . הוכח, כי שטח החתך שווה

$$\frac{R^2 \sin \alpha \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\beta - \alpha)}}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

229.ג. זווית הראש של הפאה בפירמידה משולשת משוכללת וישרה הוא 2α , ומחוג המעגל החוסם את הפאה הוא R . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\alpha \cos \alpha \sqrt{\sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)}$$

230.ג. מצא את המעטפת של פירמידה משושה משוכללת וישרה, שגובהה h , וזווית הראש של הפאה 2α .

231.ג. בסיסה של מנסרה ישרה הוא מעוין, שצלעו a וזוויתו החדה 60° . הזווית בין אלכסוני הפאות, היוצאים מקודקוד זווית זו יוצרים ביניהם זווית 2α . הוכח, כי נפח המנסרה הוא

$$\frac{a^3 \sqrt{3 \sin(30^\circ + \alpha) \sin(30^\circ - \alpha)}}{2 \sin \alpha}$$

232.ג. הזווית בין גובה החרוט ובין הקו היוצר שלו היא α . המרחק בין מרכז הכדור החסום ובין קודקוד החרוט הוא m . הוכח, כי נפח החרוט הוא

$$\frac{8}{3} \pi m^3 \sin^6(45^\circ + \frac{\alpha}{2}) \tan^2 \alpha$$

233.ג. הזווית בין מעטפת החרוט ובין בסיסו היא α . מצא את היחס בין נפח החרוט הזה ובין נפח הכדור החסום בו.

234.ג. הבסיס של פירמידה הוא משולש, שצלעותיו a, b, c . כל אחד מהמקצועות הצדדיים של הפירמידה יוצר זווית α

$$\frac{abc \tan \alpha}{12}$$

עם בסיסה. הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

235.ג. זווית הראש של הפאה של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה היא 20° . דרך קודקוד הפירמידה ודרך האמצעים של שני מקצועות הבסיס הסמוכים עובר מישור. מצא את הזווית בין המישור הזה ובין בסיס הפירמידה.

מעטפתה של פירמידה מרובעת משוכללת וישרה היא M ,
וויית הראש של הפאה 2α . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{M \sqrt{M \tan \alpha \cos 2\alpha}}{6 \cos \alpha}$$

237.ג. במנסרה ישרה, שבסיסה מלבן, הקטע המחבר את מרכז
הבסיס עם האמצע של אחד המקצועות הצדדיים, הוא בעל
אורך a , ויוצר זווית α עם הבסיס, וזווית 2α עם הפאה.
הוכח, כי נפח המנסרה הוא

$$8a^3 \sin \alpha \sin 2\alpha \sqrt{\cos \alpha \cos 3\alpha}$$

238.ג. בסיסה של פירמידה הוא משולש שווה שוקיים, שזווית
הראש שלו 2α . המקצוע הצדדי, היוצא מקודקוד זווית
זו, שהוא בעל אורך m , מאונך לבסיס הפירמידה. פאת
הפירמידה, המכילה את הצלע של הבסיס שמול הזווית
של 2α , יוצרת עם הבסיס זווית β . הוכח, כי נפח הפירמידה
הוא $\frac{1}{3} m^3 \cot^2 \beta \tan \alpha$.

239.ג. הקודקוד של פירמידה הוא בנקודה D , ובסיסה משולש
ישר זווית ABC , שבו הזווית B ישרה, והזווית A בת
 30° . אורך היתר AC הוא b . המקצוע הצדדי AD מאונך
לבסיס, הזווית BCD היא α . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{b^3}{24 \cos \alpha} \sqrt{3 \sin(\alpha + 60^\circ) \sin(\alpha - 60^\circ)}$$

240.ג. מחוג המעגל החסום בבסיסה של פירמידה משולשת משוכללת
וישרה, הוא R . זווית הבסיס של פאת הפירמידה היא α .
הוכח, כי פני הפירמידה הם

$$\frac{18R^2 \sin(\alpha + 30^\circ)}{\sqrt{3} \cos \alpha}$$

241.ג. בסיסה של מנסרה ישרה הוא מלבן, החסום במעגל שמחוגו
 R . הזווית המרכזית של המעגל, הנשענת על הצלע הקטנה
של המלבן הוזה היא α . המעטפת של המנסרה הוא S .
הוכח, כי נפח המנסרה הוא

$$\frac{\sqrt{2} SR \sin \alpha}{4 \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$

242.ג. הישר a מקביל למישור P . הישר b חותך את הישר a , ויוצר אתו זווית α , ואילו עם המישור P הוא יוצר זווית β . הזווית בין המישור P ובין המישור הנוצר ע"י הישרים a ו- b היא γ . הוכח, כי

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin \gamma$$

243.ג. השטח של פאה אחת של פירמידה משולשת משוכללת וישרה הוא S , וזווית הראש של הפאה 2α . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{2S \tan \alpha}{3} \sqrt{\frac{2S \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 2\alpha}}$$

244.ג. כל אחד מהמקצועות הצדדיים של פירמידה, שבסיסה מלבן, הוא a . הזוויות שבין אחד המקצועות הצדדיים ומקצועות הבסיס הן α ו- β . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{4}{3} a^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$

245.ג. הבסיס של פירמידה ישרה הוא ריבוע, שצלעו a . הזווית בין הפאה ובסיס הפירמידה הוא α . דרך מקצוע הבסיס עובר מישור, החותך את הפירמידה, והיוצר עם בסיסה זווית β . מצא את שטח החתך.

246.ג. במנסרה ישרה, שבסיסה מלבן, ואשר גבהה הוא h , יוצר האלכסון זווית α עם הבסיס, וזווית β עם הפאה. מצא את נפח המנסרה. מהו התנאי לקיום הפתרון?

247.ג. זווית הראש של פאת הפירמידה המשולשת, המשוכללת וישרה, והחסומה בכדור שמחוגו R , היא 2α . הוכח, כי גבהה של הפירמידה הוא

$$\frac{8R}{3} \cos(\alpha + 30^\circ) \cos(\alpha - 30^\circ)$$

248.ג. בסיסה של פירמידה הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו a והזווית מולו 2α . כל פאה יוצרת עם בסיס הפירמידה זווית 2β . הוכח, כי פני הפירמידה הם

$$\frac{a^2 \cot \alpha \cos^2 \beta}{2 \cos 2\beta}$$

249.ג. צלע בסיסה של פירמידה משולשת משוכללת וישרה היא a , והזווית בין מקצוע הבסיס והמקצוע הצדדי היא α . מצא את נפח הפירמידה. מהו תנאי לקיום פתרון?

250.ג. צלע הבסיס של פירמידה משולשת משוכללת וישרה היא a , והזווית בין המקצוע הצדדי והבסיס היא α . נתון, כי $\tan \alpha = \sqrt{5}$. הוכח, כי שטח חתך הפירמידה העובר דרך מקצוע הבסיס והאמצע של המקצוע הצדדי שווה לשטח בסיס הפירמידה.

251.ג. הגובה של פירמידה משולשת משוכללת וישרה הוא h , והזווית בין שתי פאות הפירמידה היא α . הוכח, כי נפח הפירמידה הוא

$$\frac{h^3 \sqrt{3} (4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1)}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

והפוך ביטוי זה לביטוי הנוח לחישוב בלוגריתמים.

252.ג. טרפז ישר זווית, שבבסיסו a וז, והזווית החדה α , מסתובב סביב השוק שליד הזווית הישרה. מצא את הנפח ופני הגוף הסיבובי הנוצר.

253.ג. החתך הצירי של חרוט קטום, הוא טרפז שווה שוקיים. שטחו S , גבהו h , והזווית החדה שלו α . הוכח, כי נפח החרוט הוא

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{S^2}{h} + \frac{h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3} \right)$$

254.ג. אלכסון החתך הצירי של חרוט קטום שהוא בעל אורך m , יוצר עם הבסיס הגדול זווית α , ועם הקו היוצר זווית ישרה. הוכח, כי מעטפתו של החרוט היא $\pi m^2 \sin \alpha$.

255.ג. בתוך חרוט קטום, שהזווית בין מעטפתו ובסיסו הגדול היא α , חסום כדור, שמחוגו R . הוכח, כי נפח החרוט הוא

$$\frac{4\pi R^3}{3 \sin^2 \alpha} \quad \text{ומעטפתו} \quad \frac{2\pi R^3}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{3} \cos^2 \alpha + 1 \right)$$

פרק ד. בעיות שונות

בפרק זה מובאות בעיות שונות אשר אינן משהלכות ישירות באף אחד מהפרקים הקודמים באשר הן דורשות לרוב צירוף ידיעות מכל הפרקים. הן נועדו לחזרה ולביסוס ידיעות הקורא בשאר פרקי הספר.

1.ד. בתוך זווית α נמצאת נקודה, כך שמרחקיה מהשוקיים של הזווית הם a ו- b . מהו מרחק הנקודה מקודקוד הזווית?

2.ד. זווית המשולש היא $79^{\circ}37'$, ואורך חוצה זווית זו 59.69 ס"מ, ואילו אורך הגובה היוצא מקודקוד הזווית הוא 54.82 ס"מ. חשב את צלעות המשולש.

3.ד. מכל אחד מקצותיו של קטע כביש, שארכו $2a$, רואים פסגת גבעה בזווית גובה α , ואילו מאמצע הקטע נראית הפסגה בזווית גובה β . הראה, כי גובה הפסגה הוא

$$\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}}$$

4.ד. במעגל שמחוגו $2m$ מעבירים שני מיתרים בלתי נחתכים, כל אחד במרחק m ממרכז המעגל. המשכי המיתרים האלה יוצרים כיניהם זווית α . מצא את שטחו של הטרפז ששוקיו הם שני המיתרים האלו.

5.ד. במשולש שווה שוקיים, שבסיסו a , הזווית בין הקווים התיכוניים, היוצאים מקודקודי הבסיס, היא φ . הראה, כי שטח המשולש הוא $\frac{3}{4} a^2 \cot \frac{\varphi}{2}$ או $\frac{3}{4} a^2 \tan \frac{\varphi}{2}$.

6.ד. טרפז חסום במעגל, כך שבסיסו הגדול הוא קוטר המעגל $2R$, הזווית הקהה בין אלכסוני הטרפז היא α . הראה, כי שטח הטרפז הוא $2R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha$ ובסיסו הקטן $-2R \cos \alpha$.

7.ד. שני מעגלים שווים, שמרכזיהם A ו- B נוגעים זה בזה. מעגל שלישי, שמרכזו C נוגע בכל אחד משני המעגלים הנ"ל ובמשיק המשותף שלהם. הוכח, כי $\sin ACB = 0.96$.

8.7. ABC הוא משולש שווה צלעות. X, Y, Z נקודות על AB, CB, AC בהתאמה. נתון כי $AX = BZ = CY$. וכי שטח המשולש ABC גדול פי 3 משטח המשולש XYZ. מצא את הזווית CXY.

9.7. במשולש ABC מתקיים $\frac{c}{a} = 2 \cos A$. הוכח, כי המשולש הוא שווה שוקיים, או שזווית אחת של המשולש הוה גדולה פי שניים מאחת הזוויות האחרות.

10.7. במשולש ABC הזווית A ישרה. N היא אמצע הגובה על היתר. הזווית NBC היא φ . הוכח, כי שטח המשולש $\frac{CB^2}{\cot \varphi + 4 \tan \varphi}$ הוא

11.7. במשולש ABC נתון $a = 102$ מ"מ, h הגובה לצלע a 40 מ"מ, והתיכון m לצלע a 58 מ"מ. הוכח, כי $\frac{\cos(B+C)}{\sin B \sin C} = \frac{a^2 - 4m^2}{4h^2}$ ומצא את זוויות המשולש.

12.7. סכום שני גבהיו הבלתי שווים של משולש שווה שוקיים הוא 201 מ"מ, m , וזווית הראש של המשולש היא $\alpha = 75^\circ 32'$. מצא את אורך השוק של המשולש.

13.7. צלע המשולש היא a , הזווית שלידה γ . β . קטע, שארכו x , מחבר נקודה שעל הצלע שמול γ עם נקודה שעל הצלע שמול β , ויוצר עם הצלעות האלו את הזוויות γ ו- β בהתאמה. הקטע הוה חותך מן המשולש מרובע ששטחו S . הוכח, כי $x^2 = a^2 - 2S(\cot \beta + \cot \gamma)$.

14.7. אחת הזוויות של המשולש היא בת 60° והיחס שבין שוקיה הוא $1 : (2 + \sqrt{3})$. מצא את שאר זוויות המשולש.

15.7. היקפו של משולש, שאחת מזוויותיו 60° הוא 56 ס"מ. מצא את צלעות המשולש, אם ידוע, כי הגדולה שבהן גדולה ב-5 ס"מ מן הקטנה.

16.7. שתי זוויות ליד צלע המשולש הן α, β ($\beta > \alpha$). התיכון לצלע זו יוצר איתה את הזווית φ . הוכח, כי $\cot \varphi = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$. חשב את φ , כאשר $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 40^\circ$.

17.ד. במשולש שווה שוקיים זווית הבסיס היא α . דרך קודקוד הבסיס עובר ישר, היוצר עם הבסיס זווית β , והחוצה את שטח המשולש. הוכח, כי $\tan \alpha : \tan \beta = 3$.

18.ד. יתרו של משולש ישר זווית הוא c , ואחת מהזוויות החדות היא α . הוכח, כי חוצה הזווית הישרה הוא $\frac{c \sin 2\alpha}{2 \sin(45^\circ + \alpha)}$.

והשתמש בתוצאה זו כדי להראות, כי חוצה הזווית הישרה של משולש שווה שוקיים שווה לחצי היתר.

19.ד. לאילו ערכים של α ו- β מתקיים השוויון:

$$(א) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$$

$$(ב) \tan(\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta$$

20.ד. α, β הן זוויות של משולש, שהיקפו $2p$. נתון, כי

$$p \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = p - a$$

הוכח, כי משולש זה הוא שווה שוקיים.

21.ד. הנקודה N נמצאת בתוך המשולש ABC . נתון, כי

$$\widehat{CAN} = \widehat{ABN} = \widehat{BCN} = \alpha$$

הוכח, כי $\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C$.

22.ד. במשולש ABC נתון, כי $AC = BC$, AD הוא חוצה זווית (הנקודה D על BC), וכי $CD = 2BD$. הוכח, כי

$$\cos \widehat{C} = \frac{1}{3}$$

23.ד. במשולש ABC נמצאת הנקודה M על הצלע AB , והנקודה N על הצלע AC . $MN \parallel BC$ וכן

$$MN = BM + CN$$

$$MN = \frac{BC \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \quad \text{הוכח, כי}$$

היכול היחס בין MN ו- BC לשוות לחצי?

24.ד. צורתו של מגרש הוא מלבן $ABCD$. בקצה A עומד

מגדל הנראה מן הנקודה B בזווית גובה α , ומן הנקודה C

בזווית גובה β . אורך הצלע BC היא m . הוכח, כי גובה

המגדל הוא

$$\frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}}$$

25. ד. הוכח: ישר העובר דרך קודקוד זווית המשולש, והמחלק את הצלע מול הקודקוד ביחס של שתי הצלעות האחרות, הוא חוצה זווית זו.
- הדרך: במשולש ABC , CD הוא הישר הנ"ל. נתון, כי $AC:OB = AD:BD$, כלומר $AC:AD = CB:BD$; עתה השתמש במשפט הסינוסים.
26. ד. הוכח: ישר החוצה זווית המשולש מחלק את הצלע מול הזווית לשני קטעים, המתיחסים זה לזה כמו שתי הצלעות האחרות של המשולש.
27. ד. הוכח: משולש שבו שניים מהגבהים שווים זה לזה הוא משולש שווה שוקיים.
28. ד. הוכח: משולש שבו שניים מהקווים התיכוניים שווים זה לזה הוא משולש שווה שוקיים.
- הדרך: AN ו- BM הם קווים תיכוניים במשולש ABC . לפי משפט הקוסינוסים:
- $$AN^2 = c^2 + \frac{1}{4}a^2 - ac \cos B; \quad BM^2 = c^2 + \frac{1}{4}b^2 - bc \cos A$$
- ומן השוויון $\frac{1}{4}b^2 - bc \cos A = \frac{1}{4}a^2 - ac \cos B$ מסיקים, כי $\hat{A} = \hat{B}$.
29. ד. הוכח: משולש ששניים מחוצי זוויותיו שווים זה לזה הוא משולש שווה שוקיים.
- הדרך: השתמש במשפט הסינוסים בשני המשולשים החלקיים הנוצרים ע"י חוצי הזוויות אשר מכילים את זווית הקודקוד. העזר גם במשפט ע"ד חלוקת צלע ע"י חוצה זווית במשולש.
30. ד. הוכח: משולש, שבו ריבוע הגובה לאחת הצלעות שווה למכפלת ההיטלים של שתי הצלעות האחרות על אותה הצלע, הוא משולש ישר זווית.
31. ד. הוכח: אם שני חוצי זוויות המשולש מחלקים האחד את השני באותו היחס — המשולש הוא שווה שוקיים.
32. ד. במשולש ABC נתון $AC=BC$. AD הוא חוצה הזווית CAB , BD הוא חוצה הזווית הצמודה לזווית ABC . הוכח, כי המשולשים ACB ו- ADB הם שווים שטח.

33. ד. חוצה הזווית α ליד בסיסו של משולש שווה שוקיים מחלק את שטח המשולש לשני חלקים, שאחד מהם גדול פי 2 מן השני. מצא את הזווית α .

34. ד. הוכח, כי בין כל המרובעים החסומים במעגל נתון, הריבוע הוא הגדול ביותר בשטחו.

35. ד. הוכח, כי משולש ABC שבו קיים:

$$(א) \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} \quad \text{הוא שווה שוקיים או ישר זווית.}$$

$$(ב) \quad \frac{a}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta+\gamma)} \quad \text{הוא שווה שוקיים.}$$

$$(ג) \quad \frac{a+c}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{b+c}{\sin(\beta+\gamma)} \quad \text{הוא שווה שוקיים.}$$

$$(ה) \quad \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \quad \text{הוא שווה שוקיים או ישר זווית.}$$

$$(ד) \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \gamma} \quad \text{הוא בעל זווית בת } 60^\circ.$$

$$(ו) \quad \sin \alpha = 2 \sin \beta ; \cos \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{הוא שווה שוקיים.}$$

$$(ז) \quad a^2 = 3bc, \alpha = 120^\circ \quad \text{הוא שווה שוקיים.}$$

$$(ח) \quad 3 \sin \alpha \sin \beta = (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)(\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma) \quad \text{הוא בעל זווית בת } 60^\circ.$$

$$(ט) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin(\beta - \gamma) \quad \text{הוא בעל זווית בת } 60^\circ.$$

$$(י) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin(\gamma - \beta) \quad \text{הוא שווה שוקיים.}$$

$$(יא) \quad \frac{a+b}{c} = 2 \cos \frac{\gamma}{2} \quad \text{הוא בעל זווית אחת הגדולה פעמיים מאחת הזוויות האחרות.}$$

$$(יב) \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 \quad \text{הוא ישר זווית, או אפשר לחלקו ע"י ישר למשולש ישר זווית ולמשולש שווה שוקיים.}$$

$$(יג) \quad \frac{1}{2} c^2 \sin B \quad \text{השטח שווה } \frac{1}{2} c^2 \sin A \sin B \quad \text{הוא שווה שוקיים.}$$

$$(יד) \quad \frac{1}{2} c^2 \sin A \sin B \quad \text{הוא ישר זווית.}$$

36. ד. צלעות המרובע החסום במעגל הן a, b, c, d , ואלכסוניו m, n . הוכח, כי $mn = ac + bd$.

37.ד. משולש, שצלעותיו $a; b; c$ חסום במעגל, שמחוגו R . הוכח, כי סכום שטחי המקטעים הנמצאים מחוץ למשולש הוא

$$\frac{4\pi R^3 - abc}{4R}$$

38.ד. שתי צלעות המרובע החסום במעגל הן 6 ס"מ ו- 8 ס"מ, והזווית ביניהן 120° . הוכח, כי שטח המרובע אינו יכול לעלות על $49\sqrt{3}$ סמ"ר.

39.ד. שתי צלעות מרובע החסום מעגל הן a ו- b . הזווית בין צלעות אילו בת 120° ; והנגדית לה בת 30° . הוכח, כי שטח המרובע הוא $ab(1.5 + \sqrt{3})$.

40.ד. מרובע שאחת מצלעותיו היא בעלת אורך a , חסום במעגל שמחוגו a . שתי הזוויות ליד הצלע הנ"ל הן בנות 30° ו- 135° . הוכח, כי שטח המרובע הוא $\frac{1}{2}a^2$.

41.ד. זוויות המשולש הן γ ; β ; α ($\alpha > \beta$). הוכח, כי האנך האמצעי לצלע שמול הזווית γ מתחלק ע"י מרכז המעגל החוסם את המשולש לשני קטעים, שהיחס ביניהם הוא $1 : (\tan \beta \tan \gamma - 1)$.

42.ד. בתוך זווית 2α חסום מעגל, שמחוגו r , מעגל שני, שמחוגו קטן מ- r , נוגע במעגל הראשון ובשוקי הזווית. מעגל שלישי נוגע במעגל השני ובשוקי הזווית, וכן הלאה, נוצרת סידרה אינסופית של מעגלים. הוכח, כי סכום שטחי כל המעגלים האלה הוא

$$S_\infty = \frac{\pi r^2 \cos^4(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha}$$

לאיזה ערך של הזווית α גדול הסכום הזה פי $1\frac{1}{2}$ משטח המעגל הראשון?

43.ד. על השוק של הזווית α , במרחק m מקודקודה מסמנים נקודה, ומורידים ממנה אנך לשוק השניה של הזווית. מעקב האנך הזה מורידים שוב אנך לשוק הראשונה, וכן הלאה, חוזרים על פעולות אילו מספר אינסופי של פעמים. הוכח, כי סכום כל אינסוף האנכים הוא $m \cot \frac{\alpha}{2}$.

ד.44. מצא סכום אינסוף איבריהן של הסדרות הבאות :

$$(א) \quad 2 \tan x; 2 \tan^2 x; 2 \tan^4 x; \dots \quad |\tan x| < 1$$

$$(ב) \quad \sin x; 2 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}; 4 \sin x \cos^4 \frac{x}{2}; \dots$$

ד.45. פתור ע"י גרף את המשוואות

$$(א) \quad x = 2 \sin x$$

$$(ב) \quad 2 \tan 2x + 3x = 6$$

$$(ג) \quad 3 \cos x + 4 \sin x = 2 \quad (0 < x < 360^\circ)$$

ד.46. א. הוכח, ע"י גזירת הפונקציה $y = \sin(x + \alpha)$ בשני אופנים,

את הנוסחה לקוסינוס הסכום של שתי זוויות.

ב. הוכח, בעזרת הנוסחה $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, כי אם הנגזרת

של הפונקציה $\sin x$ היא $\cos x$, אז הנגזרת של הפונקציה

$\cos x$ היא $-\sin x$.

ד.47. א, β הן זוויות חדות. נתון, כי $3 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \beta = 1$

$$\text{וכן כי } \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{2}{3} \quad \text{הראה בלי עזרת לוחות, כי}$$

$$\alpha + 2\beta = 90^\circ$$

ד.48. α, β הן שתיים מזוויות המשולש (שכולן חדות!). הוכח,

$$\text{כי } \tan \alpha \tan \beta > 1$$

הדרך ה: הראה, כי הבטוי $(\tan \alpha \tan \beta - 1)$ הוא חיובי

ע"י הפיכתו למכפלה.

ד.49. נתון, כי $\cos(x - \alpha) = m \cos x$. הוכח, כי

$$\tan x = \frac{m - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

ד.50. הוכח את הזהויות :

$$(א) \quad 1 + \sin^2 80^\circ - 3 \sin^2 10^\circ = 2 \sin 70^\circ$$

$$3 \sin^2 85^\circ - \sin^2 5^\circ = 1 + 2 \sin 80^\circ$$

$$(ג) \quad 2 \sin 15^\circ (2 \sin 15^\circ + \sqrt{2}) = 1$$

$$(ד) \quad \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$$

ד.51. α, β, γ הן זוויות המשולש. נתון, כי

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 13 : 14 : 15$$

(א) הוכח, כי $\cos \alpha : \cos \beta = 13 : 11$

(ב) מצא את היחס $\tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma$

52. ד. התר את המשוואות :

(א) $4^{\sin x} = 2^{\sec x}$

(ב) $4^{\cos(x+10^\circ)} = \sqrt[{\cos x}]{2^{\cos 10^\circ}}$

(ג) $(0.5)^{\log_4 \sin^2 x} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$ (x חדה)

(ד) $\sin(\pi \cos x) = 1$

(ה) $\tan(40^\circ + x) \tan(80^\circ - x) = 3$

הדרך כה: $x - 20^\circ = y$; סמן :

53. ד. התר את מערכת המשוואות

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = R \sin \varphi ; x \sin \alpha + y \cos \alpha = R \cos \varphi$$

54. ד. הוכח, כי למשוואה $3 + \sin 2x + \cos x = \sin x$

אין שרשים ממשיים.

55. ד. הוכח, כי לכל אחת מהמשוואות הבאות ישנם שרשים ממשיים

לכל ערך של φ :

(א) $\tan x + \varphi \cot x = \varphi + 1$

(ב) $x^2 \sin \varphi + 2x + 2 \cos \varphi = 0$

56. ד. (א) לאילו ערכי הזווית החדה α יהיה סכום הערכים ההפוך

כים של שרשי המשוואה $(2 \sin \alpha - 1)x^2 - 2x + \sin \alpha = 0$

שווה ל- $4 \cos \alpha$?

(ב) לאילו ערכי α (בין 0° ו- 360°) ישנם למשוואה הנ"ל

שרשים ממשיים ?

57. ד. שרשי המשוואה $(m-3)x^2 - 2mx\sqrt{3} + 3(m-1) = 0$

הם טנגנסים של שתיים מזוויות המשולש. מצא את הזווית

השלישית של המשולש הזה.

58. ד. (א) לאילו ערכי הזווית α שרשי המשוואה

$$\sin x + \cos x = 2 \sin \alpha$$

הם ממשיים ?

(ב) שאלה כנ"ל לגבי המשוואה $3 \sin x + 4 \cos x = \alpha$

59. ד. (א) הוכח: תנאי מספיק לקיום שורש ממשי של המשוואה

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0 \quad \text{הוא: } a^2 > c^2$$

(ב) אם קיים, לגבי המשוואה הנ"ל, התנאי $b^2 < c^2 + 2ac$,

הרי אין למשוואה שורשים ממשיים.

ד.60. הוכח את נכונות השוויונים הבאים לזוויות קטנות β .

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \beta \cos \alpha \quad (\text{א})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha - \beta \sin \alpha \quad (\text{ב})$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan \alpha + \beta(1 + \tan^2 \alpha) \quad (\text{ג})$$

ד.61. חשב את הגבולות

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan \alpha}{\cos 2\alpha} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos 3\alpha - \cos 7\alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3\alpha}{2\cos \alpha - 1} \quad (\text{ג})$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad \text{ה ד ר כ ה :}$$

ד.62. שני מיתרים במעגל, שמחוגו R , יוצאים מנקודה אחת על

המעגל, ושייכים לזוויות מרכזיות α ו- β , שסכומן $\frac{\pi}{3}$. הוכח, כי השטח הכלוא בין המיתרים ובין קשת המעגל הגדולה הוא $\frac{1}{4}R^2(3\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 5\pi)$.

ד.63. שני מיתרים שווים במעגל, שארכיהם a , הם בעלי קצה משותף

ויוצרים ביניהם זווית α (ברדיאנים). הוכח כי השטח הכלוא בין המיתרים ובין הקשת עליה נשענת α הוא

$$\frac{a^2(\alpha + \sin \alpha)}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

ד.64. דרך מקצוע של פירמידה משולשת, שכל 6 מקצועותיה הם

a , מעבירים מישור, היוצר זווית φ עם אחת הפאות, המכילות את המקצוע הזה. הוכח, כי

$$(\text{א}) \quad \frac{a^2\sqrt{6}}{4(\sqrt{2}\cos \varphi + \sin \varphi)} \quad \text{שטח החתך הוא}$$

(ב) המישור הנ"ל מחלק את נפח הפירמידה לשני חלקים שהיחס ביניהם הוא $3 : (2\sqrt{2}\cos \varphi - 1)$.

(ג) מצא את הזווית φ , אם המישור הנ"ל חוצה את נפח הפירמידה.

65.ד. אלכסון התיבה, שבסיסה ריבוע, יוצר עם מקצוע הבסיס

זווית α , ועם המקצוע הצדדי זווית β . הוכח, כי

$$\sin^2 \beta + 2 \sin^2 \alpha = 2$$

66.ד. הוכח ע"י שימוש במשפטים הנדסיים את הנוסחה

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

67.ד. במשולש שווה שוקיים, שזווית הראש שלו 2α מעבירים

ישר המקביל לבסיס, והמחלק את המשולש לטרפז החוסם

מעגל, ולמשולש שווה שוקיים. הוכח, כי יחס מחוגי המעגלים

החסומים בשתי הצורות הנ"ל הוא $(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$, ומצא

את הזווית α , אם היחס הזה הוא 3:1.

68.ד. בסיסו של גג רעפים הוא מלבן שארכו a מטרים ורוחבו b

מטרים. ארבעת משטחי הגג יוצרים זוויות α עם בסיס הגג.

הוכח כי נפח החלל בין הגג לבין בסיסו הוא $\frac{b^2}{12}(3a-b)\tan \alpha$

מטרים מעוקבים.

69.ד. שטח הבסיס של פירמידה בעלת n פאות הוא S . כל אחת

מן הפאות יוצרת זווית 2φ עם הבסיס. מהם פני הפירמידה?

70.ד. הוכח בעזרת אינדוקציה מתימטית, או בדרך אחרת את

הנוסחות הבאות:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (א)$$

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (ב)$$

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin (2n-1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin \alpha} \quad (ג)$$

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2\sin \alpha} \quad (ד)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin 2\alpha}{2^{n+1} \sin \frac{\alpha}{2^n}} \quad (ה)$$

$$\cos \alpha + 2\cos 2\alpha + 3\cos 3\alpha + \dots + n \cos n\alpha =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha + 2\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + \dots + n \sin n\alpha =$$

$$= \frac{\sin n\alpha}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{n \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$$

הדרך (דרך פתרון שאינה אינדוקציה):

לגבי (א) ב): הכפל את האגף השמאלי ב- $\frac{2\sin \alpha}{2\sin \alpha}$ והפרד את המונים להבדלים של שני קוסינוסים או של שני סינוסים. (לגבי ג) ד): אם נסמן את הסכום ב-(א) או ב-(ב) ב- $s_n(\alpha)$, נחשב את ערך הבטוי $s_{2n}(\alpha) - s_n(2\alpha)$. (לגבי ו) ז): השתמש במושג הנגזרת לגבי הסכומים שחושבו ב-(א) ו-(ב).

71.ד. על צלעותיו של משולש ABC נבנו משולשים שווים-צלעות,

כך שכל אחד מהם הוא מחוץ למשולש ABC. הוכח, כי מרכזי המעגלים החוסמים את שלשת המשולשים האלה הם קודקודים של משולש שווה צלעות.

הדרך כ: משולשים שווים הצלעות הם ABD; CBE; CAF ומרכזיהם בהתאמה K, L, M. לפי משפט הקוסינוסים

$$KL^2 = KB^2 + BL^2 - 2KB \cdot BL \cos(\widehat{B} + 60^\circ) =$$

$$= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ac}{3} \cos(\widehat{B} + 60^\circ)$$

$$ML^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(\widehat{C} + 60^\circ)$$

יש להוכיח, כי $KL^2 = ML^2$.

72. מצא את הגבולות

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\alpha}{n} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \tan \frac{\alpha}{2^n} \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n} \right) \quad \text{ב}$$

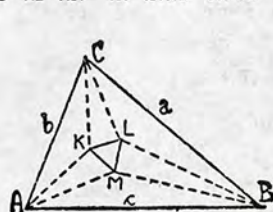
73. ד. n , קרנים יוצאות מנקודה O , כך שנוצרות n זוויות שוות ($n > 4$). מנקודה A הנמצאת על אחת הקרנים, במרחק a מ- O , יורד אנך AA_1 לקרן הסמוכה. מהנקודה A_1 יורד אנך A_1A_2 לקרן הסמוכה שאחריה וכו'. הוכח, כי אורך הקטע AA_n , הנמצא על הקרן הראשונה, הוא $\left(1 - \cos^n \frac{2\pi}{n}\right)$ והוכח, כי קטע זה קטן עד אפס, כאשר מספר הקרנים n גדל עד אינסוף.

74. ד. $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ הוא קו שבור כך שהקטעים המכוונים

$\overrightarrow{A_{n-1} A_n}; \dots; \overrightarrow{A_3 A_4}; \overrightarrow{A_2 A_3}; \overrightarrow{A_1 A_2}$ יוצרים זוויות $\alpha_{n-1}; \dots; \alpha_2, \alpha_1$ עם הישר המכוון k . הוכח שאם הזווית בין

הקטע המכוון $A_1 A_n$ ובין k היא φ , הרי $A_1 A_2 \cos \alpha_1 + A_2 A_3 \cos \alpha_2 + \dots + A_{n-1} A_n \cos \alpha_{n-1} = A_1 A_n \cos \varphi$
הבע את הנוסחה לעיל במלים בצורת משפט (אשר נקרא בשם משפט של, על שם המתמטיקאי הצרפתי Chasles).

75. ד. הוכח: אם מעבירים בכל זווית של משולש שני ישרים אשר מחלקים את הזווית לשלוש זוויות שוות, אזי תהיינה 3



נקודות החיתוך M, L, K (ראה ציור) של ישרים אלה קודקודים של משולש שווה צלעות (משפט מורלי (Morley).

הדרך: מביעים את CL (במשולש CLB) ואת CK (במשולש CKA)

בעזרת מחוג המעגל המקיף את המשולש ABC ושלושת זוויות המשולש, ומחשבים בעזרתם את KL^2 . אם משתמשים

$$60^\circ - \frac{1}{3}A = \frac{1}{3}(B+C)$$

$$(60^\circ + \frac{1}{3}A) + (60^\circ + \frac{1}{3}B) + \frac{1}{3}C = 180^\circ$$

$$\sin A = 4 \sin \frac{1}{3}A \sin (60^\circ - \frac{1}{3}A) \sin (60^\circ + \frac{1}{3}A)$$

(הוכח זהויות אלה), הרי מקבלים כי KL^2 הוא בסמי סימטרי בזוויות A, B, C . מכאן קל להסיק כי $KL = LM = MK$.

פרק ה'. שאלות חזרה

א. זהויות והוכחות

ה.1. הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ מקיימות את התנאי:

$$(a) \quad (\cos \gamma + 2 \cos \alpha) \sin \alpha = (\cos \gamma + 2 \cos \beta) \sin \beta$$

או המשולש הוא ישר זווית או שווה שוקיים.

$$(b) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

או המשולש הוא שווה שוקיים.

$$(g) \quad \frac{\tan \alpha}{\tan \beta + \tan \gamma} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha + \tan \gamma}$$

או המשולש הוא שווה שוקיים.

$$(d) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}$$

או המשולש הוא ישר זווית.

$$(h) \quad \sin \alpha \sin (\beta + \gamma) = \sin \beta \sin (\alpha + \gamma)$$

או המשולש הוא שווה שוקיים.

$$(v) \quad \sin \alpha = \tan \frac{1}{2} (\beta + \gamma)$$

או המשולש הוא ישר זווית.

$$(z) \quad 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} = \sin \alpha + \sin \gamma$$

או המשולש הוא ישר זווית.

$$(ch) \quad \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \beta$$

או המשולש הוא ישר זווית.

$$(t) \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

או המשולש הוא ישר זווית.

$$(i) \quad \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \gamma = \sin^2 \beta + \sin \beta \sin \gamma$$

או המשולש הוא שווה שוקיים.

$$(ia) \quad \sin (\alpha + \gamma) \sin (\gamma - \alpha) + \cos^2 \beta = 1$$

או המשולש הוא ישר זווית.

$$(ib) \quad \cos \frac{1}{2} (\alpha - \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \frac{\beta}{2}$$

או המשולש הוא ישר זווית או שווה שוקיים.

$$(ig) \quad \frac{\sin (\alpha + \gamma) \cos \gamma}{\sin (\alpha + \beta) \cos \beta} = \frac{1 - \cos 2\beta}{1 - \cos 2\gamma}$$

או המשולש הוא ישר זווית או שווה שוקיים.

$$(id) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = \sin \beta + \cos \beta$$

או המשולש הוא ישר זווית או שווה שוקיים.

$$(iv) \quad \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 2 \tan \frac{\beta}{2}$$

או המשולש הוא שווה שוקיים.

$$3 \sin \gamma \tan \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \alpha \quad (\text{טו})$$

וגם $\alpha = \beta$, או המשולש הוא שווה צלעות.

$$\cos \alpha (\sin \gamma - \sin \beta) + \sin (\gamma - \beta) \cos (\gamma + \beta) = 0 \quad (\text{יו})$$

או המשולש הוא ישר זווית או שווה שוקיים.

$$\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha \sin (\beta - \gamma) \quad (\text{יח})$$

או המשולש הוא ישר זווית או שווה שוקיים.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 2 \quad (\text{יט})$$

או המשולש הוא שווה שוקיים, או אחת מזוויותיו גדולה

פי 2 מאחרת.

$$\sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} \gamma = \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{כ})$$

או המשולש הוא ישר זווית.

$$(1 - \sin \gamma) : (1 + \sin \gamma) = \tan^2 \frac{1}{2} \beta \quad (\text{כא})$$

או זווית α ישרה.

ה.2. α, β, γ הן זוויות של משולש אחד — a, b, c הצלעות

המתאימות. הוכח:

$$(\cot \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \beta) \sin \alpha = (\cot \frac{1}{2} \beta + \cot \frac{1}{2} \gamma) \sin \gamma \quad (\text{א})$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} < \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \quad (\text{ב})$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1.5 \quad (\text{ג})$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8} \quad (\text{ד})$$

$$4S (\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma) = a^2 + b^2 + c^2 \quad (\text{ה})$$

(— השטח, S)

$$\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \quad (\text{ו})$$

$$\sin \alpha - \sin (\beta - \gamma) = 2 \cos \beta \sin \gamma \quad (\text{ז})$$

$$(c - a \cos \beta) \tan \alpha = a \sin \beta \quad (\text{ח})$$

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \quad (\text{ט})$$

$$\tan \beta \tan \gamma = 2 \quad \text{או} \quad \tan \alpha = \tan \beta + \tan \gamma \quad (\text{י})$$

$$a \sin (\beta - \gamma) + b \sin (\gamma - \alpha) + c \sin (\alpha - \beta) = 0 \quad (\text{יא})$$

ה.3. במשולש ABC הזוויות הן α, β, γ , והצלעות המתאימות הן

a, b, c . אם מתקיים:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < 1 \quad (\text{א})$$

$$\tan \alpha \tan \beta > 1 \quad (\text{ב})$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2 \quad (\text{ג})$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$$

ד) אורכי a, b, c מהווים, בסדר זה, סידרה חשבונית. הוכח כי

$$\cot \frac{1}{2} \alpha \cdot \cot \frac{1}{2} \gamma = 3$$

ה) $2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta > 1$. הוכח כי הזווית γ היא חדה.
ו) $\cos \alpha + \cos \beta < \sin \gamma$. הוכח כי המשולש הוא קהה זווית.

ז) $\tan \alpha = \tan \beta + \tan \gamma$. הוכח כי המשולש הוא חד זווית.

ח) $a^2 + b^2 = c^2 + ab$, וגם $4 \sin \alpha \sin \beta = 3$. הוכח כי המשולש הוא שווה צלעות.

ה.4. נתון, כי $\tan \alpha \tan \beta = 1$. הוכח, כי $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ וגם $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 0$.

ה.5. הוכח, בלי להיעזר בלוחות, כי $\sin 52.5^\circ \sin 7.5^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)$

ה.6. הזוויות החדות α, β, γ מקיימות את התנאי:
 $\sin(\alpha + \beta) \tan \gamma = \cos(\alpha + \beta)$

הוכח כי $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

ה.7. הזוויות החדות α, β מקיימות את התנאי:
 $\sin(\alpha + \beta) < 2 \sin \alpha$. הוכח כי $\alpha < \beta$.

ה.8. הוכח כי עבור זווית α כל שהיא נכון

$$|\sin \alpha + \cos \alpha| \leq \sqrt{2} \quad (\text{א})$$

$$2 \sin \alpha \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) \leq 1.5 \quad (\text{ב})$$

$$4 \sin \alpha \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \sin 3\alpha \quad (\text{ג})$$

$$|\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha| \leq 2 \quad (\text{ד})$$

ה.9. α היא זווית חדה. הוכח כי $1 + \cot \alpha \leq \cot \frac{1}{2} \alpha$.

ה.10. הוכח, בלי שימוש בלוחות, כי $\operatorname{cosec} 10^\circ - 4 \cos 20^\circ = 2$.

ה.11. נתון: α ו- β הן זוויות חדות, $a > b > 0$;

$$\sin \beta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad ; \quad \sin \alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

הוכח כי $\alpha + \beta = 90^\circ$.

ה.12. נתון:

$$\cos \alpha + \sin \beta = n \quad ; \quad \sin \alpha + \cos \beta = m$$

הוכח כי:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) - 1$$

ה.13. הוכח כי ערך הביטוי

$$\cos^2(x - \alpha) + \cos^2(x + \alpha) - \cos 2x \cos 2\alpha$$

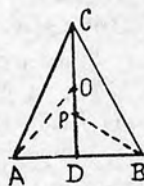
אינו תלוי בזוויות x ו- α .

- ה.14. הוכח כי ערך הביטוי
- $$\frac{1 - \sec^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 - \operatorname{cosec}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{4}{\sin^2 2\alpha}$$
- אינו תלוי בזווית α .
- ה.15. נתון $\tan \alpha + \cot \alpha = m$
- הוכח: (א) $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = m^3 - 3m$
- (ב) $\tan^4 \alpha + \cot^4 \alpha = m^4 - 4m^2 + 2$
- ה.16. במשולש ABC, בו $\angle A = 90^\circ$, נתון כי $\frac{a+b}{c} = m$.
- הוכח כי $\tan \frac{1}{2} \angle B = \frac{m-1}{m+1}$
- ה.17. הוכח כי $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}(3 + \cos 4\alpha)$
- וקבע בהסתמך על זהות זו, את מחזור הפונקציה $y = \sin^4 x + \cos^4 x$
- ה.18. הוכח כי $\sin^2(2\alpha + 45^\circ) - \sin^2(2\alpha - 45^\circ) = \sin 4\alpha$
- וקבע, בהסתמך על זהות זו, את מחזור הפונקציה $y = \sin^2(2x + 45^\circ) - \sin^2(2x - 45^\circ)$
- ה.19. הוכח כי $\sin 2\alpha \cdot \sin(2\alpha - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2} - \cos(4\alpha - \frac{1}{3}\pi)]$
- וקבע, בהסתמך על זהות זו, את מחזור הפונקציה: $y = \sin 2x \cdot \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$
- ה.20. מהו המחזור המינימלי של הפונקציה $y = \cos 1.5x - \sin \frac{1}{2}x$?
- ה.21. הוכח כי עבור זווית α כל שהיא נכון:
- (א) $1 \geq \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \geq \frac{1}{2}$
- (ב) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha \geq \frac{1}{2}$
- ה.22. זוויות המשולש α, β, γ מקיימות את התנאי: $\sin^2 \alpha : \sin^2 \beta : \sin^2 \gamma = 1 : 3 : 4$
- הוכח כי משולש זה הוא ישר-זווית.
- ה.23. שתי זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו 1:3, ואורכי הצלעות מול זוויות אלה מתייחסים זה לזה כמו 1:2. הוכח, כי משולש זה הוא ישר זווית.
- ה.24. נתון: $\sin \alpha + \sin \beta = 0.75$; $\cos \alpha + \cos \beta = 0.8$. הוכח, בלי שימוש בלוחות, כי $8 \tan(\alpha + \beta) = 15$.
- ה.25. הוכח: אם $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$, אז $\tan 2\alpha > 2 \tan \alpha$.
- ה.26. הוכח: אם $\cot(\alpha + \beta) = 0$, אז $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha$.

ה.27. נתון כי $\tan 2\alpha - \sin 2\alpha = x$; $\tan 2\alpha + \sin 2\alpha = y$

הוכח, כי $x = y \tan^2 \alpha$.

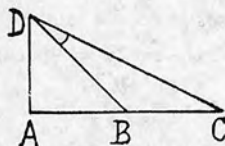
ה.28. CD הוא גובה על הבסיס AB של משולש שווה שוקיים. נתון: $CO = DO$; BP הוא חוצה הזווית ABC ; שטח המשולש ADO גדול פי 2 משטח המשולש BDP. חשב את הזווית ABC.



ה.29. במשולש ABC נתון: הזווית BAC ישרה ; AM החוצה שלה ; MN מקביל לניצב AC ; אורך AC גדול פי 3 מאורך MN. חשב את הזווית B.

ה.30. במשולש DAC נתון: הזווית DAC ישרה ; $AD = AB = BC$; הוכח :

$$3 \tan \angle BDC = 1$$



ב. משוואות ואי-שוויונים

ה.31. פתור את המשוואות הבאות :

$$\tan \frac{1}{2}x + \tan x = \tan \frac{3}{2}x \quad (\text{א})$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \quad (\text{ב})$$

$$4 \cos^2 \frac{1}{2}x - 1 = (1 + 2 \cos x) \sin x \quad (\text{ג})$$

$$3 (\cot x - \cos x) = 2(1 - \sin x) (\cot x + \cos x) \quad (\text{ד})$$

$$8 (\sin x \sin \frac{1}{2}x)^2 = 1 + \cos x \quad (\text{ה})$$

$$4 \sin 3x \cos 3x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin 12x \quad (\text{ו})$$

$$\cos 5x + 2 \sin 2x \sin 3x = 1 \quad (\text{ז})$$

$$\tan x + \tan (x + 120^\circ) + \tan (x + 240^\circ) = 0 \quad (\text{ח})$$

$$\begin{aligned}
\tan x + \cot x &= 4 \sin 2x & (ט) \\
\sin x - \cos x &= 1 - \frac{1}{2} \sin 2x & (י) \\
(\cos 5x + \cos 7x)^2 &= (\sin 5x + \sin 7x)^2 & (יא) \\
3 \cos^2 x + \sin x \cos x + 2 \sin^2 x &= 3 & (יב) \\
\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} &= 2 & (יג) \\
(0^\circ < x < 360^\circ) \quad 4 \cos \frac{1}{2} x \cos x \cos \frac{3x}{2} &= 1 & (יד) \\
(0^\circ < x < 360^\circ) \quad 2 \cos x (\cos x + \cos 2x) &= 1 & (טו) \\
(\sin x + \cos x) \sin 2x &= 2 (\sin^3 x + \cos^3 x) & (טז) \\
\sin x + \cos x + 2\sqrt{2} \sin x \cos x &= 0 & (יז) \\
1 + \sin 3x &= \sin x + \cos 2x & (יח) \\
(1 + \tan^2 x) [(\sin x + \cos x)^2 + 3] &= 6 & (יט) \\
1 + \frac{1}{\cos 2x} &= \cot^2 x & (כ) \\
\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x &= 0.75 & (כא) \\
\sin 4x \sin 6x &= 3 (\sin x + \sin 5x) & (כב) \\
\tan x \tan 2x &= \tan x + \tan 2x & (כג) \\
\cos x - \cos 2x &= \sin 3x & (כד) \\
\sin x &= (1 + \cos x)(2 - \cot x) & (כה) \\
(3 \tan^2 x - 1)(1 + \cos 2x) &= 2 & (כו) \\
\cos 3x \cos x &= \sin^2 2x & (כז) \\
\cot 2x - \tan 2x &= \frac{2}{3} \tan 4x & (כח) \\
8 \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \sec x & (כט) \\
(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) &= 1 + \tan x & (ל) \\
\tan(x + 45^\circ) + \tan x + 2 &= 0 & (לא) \\
\frac{\sin x}{\sin x - \cos x} - \frac{1}{\cos x} &= \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} & (לב) \\
\frac{\cos x}{1 + \tan x} + \frac{\sin x}{1 + \cot x} &= \frac{1}{2} \sqrt{2} & (לג) \\
\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x &= 1 & (לד) \\
\sin x + \sin 3x &= 4 \sin^3 x & (לה) \\
2 \sin^3 x &= \cos 2x + \sin x & (לו) \\
\sin 9x : \sin 3x &= 2 & (לז) \\
\sin^2 3x - \sin^2 x &= 2 \cos 2x & (לח) \\
\sin x + \cos x &= 1 + \sin x \cos x & (לט) \\
\cot^2 2x &= \cot x \cot 3x & (מ)
\end{aligned}$$

ה.32. פתור את אי-השוויונים הבאים

$$\sin 2x > \sin 4x \quad (x$$

$$|\sin x| > |\cos x| \quad (ב)$$

$$|\sin x + \cos x| < 1 \quad (2)$$

$$(0^\circ \leq x < 360^\circ) \quad \sin x + \cos 2x \geq 0 \quad (7)$$

$$(0^\circ \leq x \leq 360^\circ) \quad \sin 2x \geq \sqrt{3} \sin x \quad (7)$$

$$(0^\circ \leq x \leq 180^\circ) \quad \cos x - \sin x < \sqrt{2} \sin x \quad (1)$$

$$2\cos x + \sin 2x \geq 0 \quad (1)$$

$$(0^\circ \leq x \leq 90^\circ) \quad \cos 3x - \cos 7x > \cos x \quad (\pi$$

$$(0^\circ \leq x \leq 90^\circ) \quad 2\cos 3x - \cos x > \cos 7x \quad (\text{v})$$

$$2\cos^2 x + \sin 2x \leq 1 \quad (*)$$

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x > \sqrt{2} \quad (N)$$

$$(0^\circ < x < 360^\circ) \quad \frac{1 - 2\sin x}{\cos 2x} > 0 \quad (1)$$

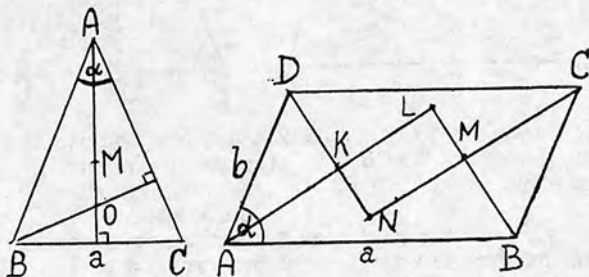
$$(0^\circ < x < 180^\circ) \quad \sin x + \sin 2x < 0 \quad (1)$$

$$(0^\circ < x < 360^\circ) \quad \cos x + \tan x < 1 + \sin x \quad (7)$$

ג. שימושים בהנדסת המישור

ה.33. צלעות המקבילית הן a ו-b, והזווית ביניהן היא a. DN, CN, BL, AL שהם חוצי זוויות המקבילית, יוצרים ביניהם בהחתכם מרובע KLMN. הוכח. כי:

(א) שטח המרובע KLMN הוא $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin \alpha$
(ב) $KM = a - b$.



ה.34. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB=AC$) אורך הבסיס הוא a
והזווית מולו α .

(א) מצא במשולש זה את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את המשולש (M) לבין נקודת הפגישה של הגבהים (O).
(ב) קח $\alpha < 60^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha > 60^\circ$, ומצא את הסימן

של המרחק OM, שמצאת ב-(א). הסבר את משמעותו ההנדסית.

35. ה. מרובע ABCD חסום במעגל אשר קוטרו הוא $AB = a$, והאלכסונים AC ו-BD יוצרים עם הצלע AB זוויות השוות כל אחת ל- α ($\angle CAB = \angle DAB = \alpha$). הוכח:

$$DC = a \cos 2\alpha$$

(ב) שטח המרובע ABCD הוא $a^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha$.

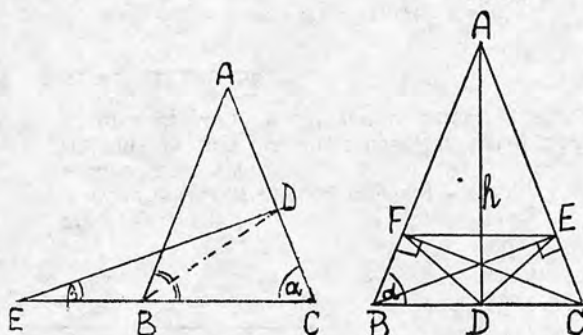
36. ה. משולש, שזוויותיו γ, β, α חסום במעגל, שמחוגו R. הוכח, כי אם מתקיים $a = 4R \sin \beta \cos \gamma$, הרי המשולש הוא שווה שוקיים.

37. ה. במשולש שווה-שוקיים ABC הורידו את שלושת הגבהים: AD, BE ו-CF, זווית הבסיס במשולש הנ"ל שווה ל- α . והגובה על הבסיס הוא $AD = h$.

(א) הוכח, כי שטח המשולש FDE הוא:

$$-\frac{1}{2}h^2 \cot^2 \alpha \sin 4\alpha$$

(ב) באיזה תחום צריכה הזווית α להימצא שיהיה פתרון לבעיה?



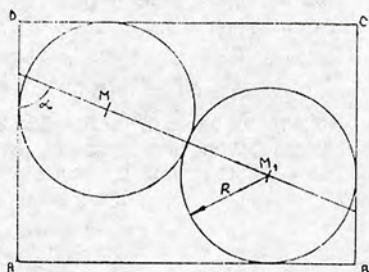
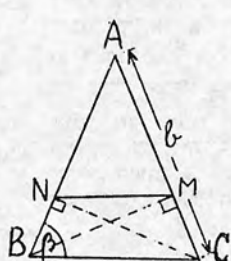
38. ה. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) הבסיס הוא $BC = a$ והזוויות ליד הבסיס הן $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$, חוצה את הזווית ABC, $\angle DEB = \beta$, הבע את אורך הקטע EB באמצעות a, α, β .

39. ה. שטחו של משולש 577.5 מ"ר, ואחת מזוויותיו בת $84^{\circ}33'$. היחס בין אורכי שוקי זווית זו הוא 5:9. מצא את אורך הצלע מול הזווית הנתונה.

40. ה. במלבן ABCD חסמו שני מעגלים שווים בעלי רדיוס R, באופן שאחד מהם נוגע בצלעות AD ו-DC, והשני — ב-AB ו-BC, והם גם נוגעים זה בזה כמתואר בציור. הישר המחבר את מרכזי המעגלים הנ"ל M ו-M1 חותך את הצלע AD של המלבן בזווית α .

הוכח, כי אורכי צלעות המלבן הם:

$$AB = 4R \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad AD = 4R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$



ציור 1

41. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$), אורך השוק הוא b וזווית הבסיס β . במשולש זה הורידו את שני הגבהים על שוקי המשולש — BM ו- CN וחברו את הנקודות M ו- N . הוכח כי שטח המרובע $BCMN$ שווה ל- $\frac{1}{2}b^2 \sin^3 2\beta$.

42. בטרפז שווה שוקיים שבו הבסיס הקטן שווה לשוק, אחד האלכסונים הוא d . הזווית בין האלכסונים שווה ל- α . הוכח: (א) אורך הבסיס הגדול בטרפז הנ"ל שווה ל-

$$- d \cos \frac{3\alpha}{2} / \sin \alpha$$

(ב) שטח הטרפז הנ"ל שווה ל- $\frac{1}{2}d^2 \sin \alpha$.

43. המשולש ABC שבו $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, חסום במעגל. המרובע $AEDF$ הוא מעוין. הוכח:

$$AD = a \sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) / \sin \alpha \quad (\text{א})$$



(ב) שטח המעוין הוא:

$$\frac{1}{2} \left[a \sin \left(\beta + \frac{1}{2}\alpha \right) / \cos \frac{1}{2}\alpha \right]^2$$

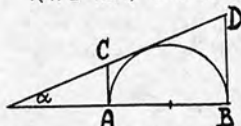
ה.44. האלכסונים AC ו-BD של טרפז ישר-זווית ABCD מאונכים זה לזה. הזווית החדה של הטרפז היא α והשוק הארוכה שלה m. AB הוא הבסיס הגדול של הטרפז.

$$\text{הוכח: } CD = \frac{1}{2}m(\sqrt{4 - 3\cos^2 \alpha} - \cos \alpha)$$

ה.45. הקפס של משולש הוא $2p$, ושתיים מזוויותיו הן α ו- 2α . הוכח, כי (א) אורך הצלע המחברת את קודקדי הזוויות הנ"ל הוא $(\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}) : p \cos \frac{3\alpha}{2}$;

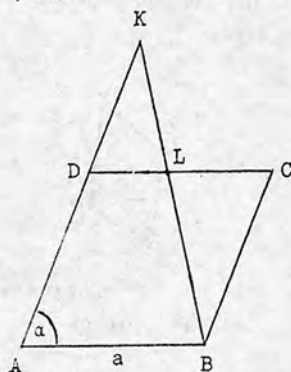
$$(ב) \text{ שטח המשולש הוא } p^2 \tan \alpha \tan \frac{\alpha}{2} : \tan \frac{3\alpha}{2}$$

ה.46. קוטר חצי מעגל הוא $AB = 2R$. לחצי המעגל העבירו משיקים בנקודות A ו-B, וכן משיק לחצי המעגל בנקודה אחרת, החותך את המשיקים הקודמים בנקודות C ו-D ויוצר עם הישר AB זווית α (ראה ציור).



הבע את אורכי הקטעים AC ו-BD באמצעות R ו- α .
ה.47. בטרפז שווה-שוקיים שווה הבסיס הגדול ל- a , והזוויות החדות שעל-יד בסיסו זה, שוות כל אחת ל- α . הבסיס הקטן של הטרפז הנ"ל גדול פי שניים מגובהו של הטרפז. הבע את אורך בסיסו הקטן של הטרפז, וכן את אורך שוקו באמצעות a ו- α .

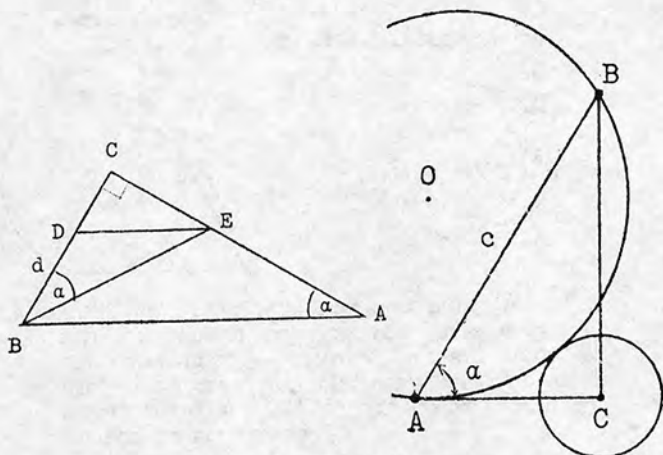
ה.48. במעוין ABCD, שצלעו a וזוויתו החדה שקדוקדה A היא α המשיכו את הצלע AD בכיוון ל-D. על המשכה של הצלע בחרו נקודה K (ראה ציור). הקטע KB חותך את הצלע DC בנקודה L. שטח הטרפז ABLD שווה ל- $\frac{1}{2}a^2$.
(א) הבע את אורך הקטע AK באמצעות a ו- α .
(ב) מהו התנאי ל- α כדי שיהיה פיתרון לבעיה?



ה.49. נתון משולש ישר-זווית ABC (C — קודקוד הזווית הישרה), שבו שווה היתר ל-c, והזווית BAC ל- α , העבירו דרך הקודקים A ו-B מעגל, הנוגע בניצב AC בנקודה A. סביב הקודקוד C חגו מעגל הנוגע באופן חיצוני במעגל ה"ל.

הוכח, כי רדיוס המעגל, שחגו סביב C שווה ל-

$$\frac{1}{2}c(\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha} - 1)/\sin \alpha$$



ה.50. במשולש ישר זווית ABC (C — קודקוד הזווית הישרה) העבירו מקביל ליתר החותך את הניצבים AC, BC בנקודות E, D בהתאמה.

נתון: $BD = d$; $\angle BAC = \angle DBE = \alpha$

הוכח כי שטח הטרפז ABDE שווה ל- $\frac{1}{2}d^2 \cot \alpha / \cos 2\alpha$.

ה.51. משולש ABC חסום במעגל. במשולש זה העבירו חוצה זווית A, החותך את הצלע BC בנקודה K, ואת המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה L. נתון:

$\angle ABC = \beta$; $\angle BAC = \alpha$; $BC = a$

הוכח כי:

$$AK = \frac{a \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin [(\alpha/2) + \beta]} ; KL = \frac{a \tan \alpha/2}{2 \sin [(\alpha/2) + \beta]}$$

ה.52. במשולש ישר-זווית ABC (C — קודקוד הזווית הישרה) אורך היתר הוא c, והזווית, שקודקודה A, היא α . על היתר הורידו גובה CD (D — קצהו השני של הגובה), ועל

גובה זה כעל הקוטר בנו מעגל, החותך את הניצבים AC ו-BC בנקודות E ו-F בהתאמה.

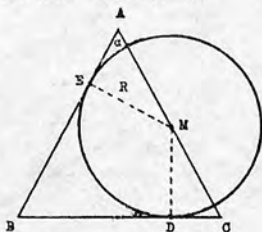
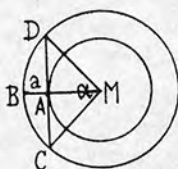
הוכח, כי שטח המלבן ECFD שווה ל- $\frac{1}{2}c^2 \sin^2 2\alpha$.

ה.53. נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB=AC) בו זווית הראש α .

מעגל שמרכזו בנקודה M על אחת משוקי המשולש, נוגע בבסיס המשולש בנקודה D ובשוקו השנייה בנקודה E (ראה ציור), רדיוס המעגל הוא R.

(א) הבע את שוק המשולש שווה השוקיים הנ"ל ואת בסיסו באמצעות R ו- α .

(ב) הבע את שטח המרובע MEED באמצעות R ו- α .



ה.54. נתונים שני מעגלים שונים בעלי מרכז משותף M. במעגל

הגדול העבירו רדיוס, החותך את המעגל הקטן בנקודה A,

ואת המעגל הגדול — בנקודה B, $AB = a$. בנקודה A

העבירו משיק למעגל הקטן הנ"ל החותך את המעגל הגדול

בנקודות C ו-D, $\angle CMD = \alpha$. הוכח כי שטח הטבעת בין

שני המעגלים הנ"ל הוא

$$\frac{\pi a^2 \cot^2 \frac{\alpha}{4}}{4}.$$

ה.55. במקבילית שווה האלכסון הקטן לצלע הקטנה, וזו שווה

ל- a , הזווית החדה במקבילית שווה ל- α .

(א) הבע את שטח המקבילית באמצעות a ו- α .

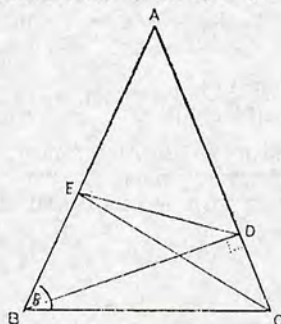
(ב) חשב את אלכסונה הגדול של המקבילית ואת הזווית

בינו ובין הצלע הקטנה של המקבילית, אם $a = 23.6$ ס"מ

ו- $\alpha = 43^\circ 16'$.

ה.56. נתון משולש שווה-שוקיים ABC, שבו $AB = AC = b$ וזווית

הבסיס היא β . מקודקוד B הורידו גובה של השוק AC



הפוגע בשוק בנקודה D. דרך הקדקוד C העבירו חוצה זווית ACB, החותך את השוק AB בנקודה E.

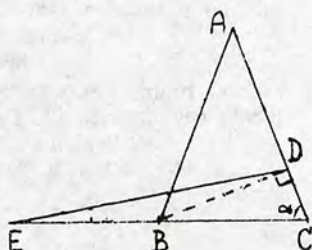
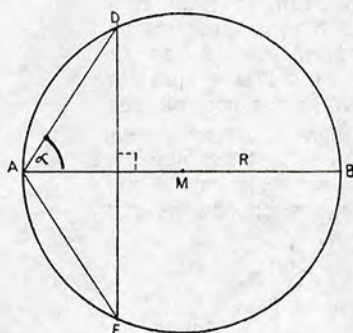
הבע את שטח המשולש ADE באמצעות b ו- β .

ה.57. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) הורידו גובה על השוק AC. דרך קצהו D של גובה זה העבירו ישר החותך את המשך בסיס המשולש הנ"ל בנקודה E.

נתון: $AB = a$; $\angle ACB = \alpha$; $\angle DEB = \beta$.
הבע את הקטע EB באמצעות a , α , β .

ה.58. במעגל שמרכזו M ורדיוסו R העבירו קוטר AB. מנקודה D על המעגל הורידו אנך על הקוטר AB. האנך חותך את המעגל בנקודה E. $\angle BAD = \alpha$.

(א) הבע את שטח המשולש ADE באמצעות R ו- α .
(ב) במשולש ADE הבע את חוצה הזווית ADE באמצעות R ו- α .

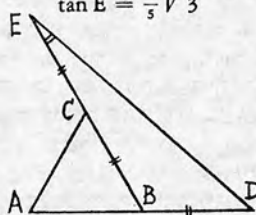


ה.59. אורך הצלע הארוכה של מקבילית נתונה הוא a , והזווית החדה שלה היא α . שטח המקבילית הוא $\frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha$. הוכח כי האלכסון הקצר של המקבילית מאונך לצלע הקצרה שלה.

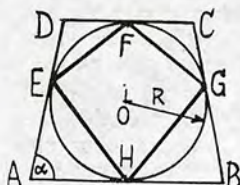
ה.60. הזווית ליד הבסיס הגדול של טרפז הן α ו- 2α . אורך הבסיס הקטן, וגם אורך השוק הקצרה, הוא a . הוכח כי שטח הטרפז הוא $a^2 (\sin 2\alpha + \cos \alpha \sin 3\alpha)$.

ה.61. ABC הוא משולש שווה צלעות. $EC = CB = BD$.

הוכח כי $\tan E = \frac{1}{3} \sqrt{3}$



- ה.62. שתי צלעות המשולש הן a ו- b , והזווית ביניהן היא 120° .
הוכח, כי אורך חוצה זווית זו הוא $ab : (a+b)$.
ה.63. ה- AB ו- CD הם שני קטרים מאונכים במעגל O . הנקודה E חוצה את הרדיוס OA . CF הוא מיתר, העובר דרך E .
הוכח כי $\tan A = 3$.

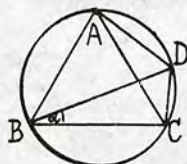


- ה.64. בתוך טרפז שווה-שוקיים DCBA חסום מעגל בעל רדיוס R . זווית הטרפז ליד הבסיס הגדול שווה ל- α . צלעות הטרפז משיקים למעגל בנקודות E, F, G, H .
(א) הבע את שטח המרובע EFGH באמצעות R ו- α .
(ב) נתון: $R = 12.6\text{cm}$; $\alpha = 68^\circ 20'$.
חשב את שטח המרובע EFGH.
ה.65. במעגל, שמרכזו M , חסום טרפז ABCD. הזווית המרכזית המתאימה לבסיס הגדול היא α , וזו המתאימה לבסיס הקטן היא β , גובה הטרפז שווה ל- h . (ראה ציור).
הבע את שטח הטרפז באמצעות h , α ו- β .

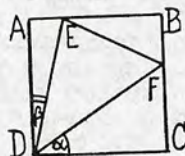


- ה.66. הוכח, כי בכל משולש מתקיים השוויון:
 $bc \cos \alpha - ac \cos \beta = b^2 - a^2$
(a, b, c — הן צלעות המשולש; α, β — הן זוויותיו).
ה.67. בטרפז ישר-זווית ABCD (AB — הבסיס הגדול, A — קדקוד הזווית הישרה שע"י בסיס זה) הזווית החדה ליד B היא β ($\beta > \frac{1}{4}\pi$) ומרחק הקדקוד A מהשוק BC שווה ל- k ; בטרפז זה שווה הבסיס הגדול לאלכסונו הקטן של הטרפז. הוכח, כי שטח הטרפז שווה ל- $k^2 \sin 2\beta$.
ה.68. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB=AC$) זווית הבסיס היא β ($\beta < \frac{1}{6}\pi$). על הגובה AD (D — קצהו השני של הגובה) בחרו נקודה M כך ש- $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC$.
(א) הבע באמצעות β את היחס AM/MD .

- (ב) מתוך היחס שנחבקשת למצוא ב-(א) קבע את הזווית β שעבורה יהיה יחס זה (MD/AM) שווה ל-2.
הסבר את המשמעות ההנדסית של התוצאה שקיבלת.
- ה.69. במעגל בעל רדיוס R חסום משולש שווה-צלעות ABC; נקודה D על היקף המעגל חיברו עם קדקודי משולש זה. (א) סמן $\angle DBC = \alpha$ והבע את הקטעים AD ו-DC באמצעות R ו- α .
(ב) הוכח, בהסתמך על שקיבלת ב-(א), כי $AD+DC=DB$;

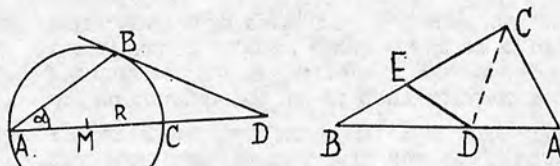


- ה.70. היחס בין טנגנס זווית הראש ובין טנגנס זווית הבסיס של משולש שווה שוקיים הוא 2:3. מהו טנגנס של זווית הבסיס?
- ה.71. DEF הוא משולש, החסום בריבוע ABCD, באופן המתואר בציור. הוכח כי שטח המשולש מתייחס לשטח הכולל של חלקי הריבוע שמחוץ למשולש כמו $\cos(\alpha + \beta) : \cos(\alpha - \beta)$.



- ה.72. שתי צלעות המשולש הן a ו-b. התיכון לצלע השלישית, c, יוצר אתה זווית חדה α . הוכח, כי שטח המשולש הוא $\frac{1}{4} |a^2 - b^2| \tan \alpha$.

- ה.73. במשולש ABC נתון: חוצה הזווית C חותך את הצלע AB בנקודה D; E נקודה על BC; $AC = EC$. הוכח כי היחס בין אורכי המחוגים החוסמים את המשולשים DEB ו-ABC הוא $\sin \frac{1}{2}C : \cos \frac{1}{2}(A - B)$.



- ה.74. AB הוא מיתר ו-AC הוא קוטר המעגל, שמרכזו M,

רדיוסו R ו- $\angle BAC = \alpha$. המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשיך הקוטר AC בנקודה D.
הוכח, כי שטח המשולש ABD הוא: $R^2 \operatorname{tg} 2\alpha \cos^2 \alpha$.

75. ה-ABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AB=AC$) החסום במעגל בעל רדיוס R ומרכזו M. את BC האריכו עד הנקודה D וחברו את D עם A. חותך את המעגל בנקודה E.
נתון: $\angle ABE = \beta$; $\angle DBE = \alpha$.
(א) הבע את CD ואת AC באמצעות α, β ו-R.
(ב) איזה תנאי צריכות למלא הזוויות α ו- β , כדי ש- $AC = CD$?



76. הקדקודים B ו-C של משולש ABC נמצאים על היקפו של מעגל שמרכזו O ומחוגו R. הקדקוד השלישי A נמצא על הקוטר העובר דרך C; $\angle BCA = \gamma$; $\angle ABC = \beta$.
הבע את שטחו של המשולש ABC באמצעות R, β ו- γ .

77. ה-AB הוא קוטר המעגל שמרכזו M ורדיוסו R. AC הוא מיתר במעגל זה היוצר זווית α עם הקוטר AB.
דרך M עובר אנך ל-AB, החותך את המיתר AC ב-E ואת קשת המעגל, שאינה מכילה את C, בנקודה D.
הבע את שטח המשולש CDE באמצעות רדיוס המעגל R והזווית α .



78. מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו M. הצלע AB עוברת דרך M ואורך הצלע BC של המרובע הוא m. כמו כן נתונות שתי זוויות של המרובע: $\angle BAD = \alpha$; $\angle ABC = \beta$.
הבע את כל הצלעות של המרובע ABCD בעזרת m, α ו- β .

79. במשולש שווה שוקיים המרחק בין מרכז המעגל החוסם לבין מרכז המעגל החסום הוא d. זווית הבסיס במשולש זה היא α . הבע את בסיס המשולש באמצעות d ו- α .

ה.80. הקטרים AB ו-CD של מעגל, שמרכזו O ומחוגו R, נחתכים בזווית α . הזווית בין המיתר BE ובין הקוטר AB היא β . המיתר BE חותך את המחוג OD בנקודה F. הוכח, כי שטח המשולש CEF הוא:

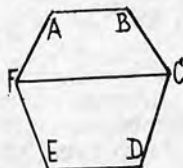
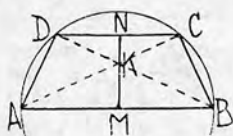
$$2R^2 \sin(\alpha - 2\beta) \sin \frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{\alpha}{2} - \beta) / \sin(\alpha - \beta)$$

ה.81. נתונים שני טרפזים FABC ו-FEDC, בעלי בסיס משותף FC, היוצרים משושה FEDCEA. נתון, כי

$$AF = AB = BC = 5 \text{ ס"מ}, EF = ED = DC = 6 \text{ ס"מ}$$

$$FC = 10 \text{ ס"מ}$$

(א) חשב את הזווית ליד הבסיס FC בכל אחד מהטרפזים;
(ב) מצא את אורך האלכסון AE של המשושה.



ה.82. במעגל, שמרכזו M, חסום טרפז, שבסיסו הגדול הוא קוטר המעגל, והזווית ליד בסיס זה היא α . נקודת הפגישות של אלכסוני הטרפז מחלקת את הגובה MN לשני קטעים KN ו-KM. (א) הבע את היחס $KN:KM$ באמצעות α ; (ב) עבור אילו ערכי α ניתן לבנות את הטרפז הנ"ל?

ה.83. דרך הקודקוד B של זווית הבסיס במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) העבירו ישר, החותך את השוק הנגדית AC בנקודה D. ישר זה יוצר עם בסיס המשולש הנ"ל זווית α . זווית הבסיס במשולש ABC היא β . הבע את היחס בין שטח המשולש BDC לבין שטח המשולש ABC באמצעות β ו- α .

ד. שימושים בהנדסת המרחב

ה.84. דלת ריבועית, העשויה עץ, מחוזקת על ידי פס ברזל אלכסוני. באיזו זווית מסתובב פס הברזל, כאשר הדלת עצמה מסתובבת סביב צירה בזווית בת 30° ?

ה.85. הבסיס של פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה, שקודקודה S, הוא ריבוע ABCD, שאורך צלעו a. נטיית כל פאה צדדית לבסיס היא α . מישור, החותך את הפירמידה, עובר דרך מרכז בסיסה, וחוצה את המקצועות SA ו-SB. הוכח, כי שטח החתך הוא $3a^2 / (16 \cos \alpha)$.

ה.86. יתרו של משולש ישר זווית נמצא על מישור נתון, ושני הניצבים יוצרים זוויות α ו- β עם מישור זה. הזווית בין

המישור הנ"ל לבין מישור המשולש היא γ . הוכח, כי

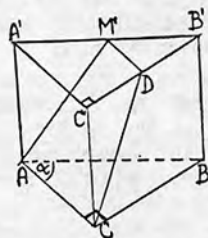
$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$$

ה.87. שטח החתך הצירי של חרוט הוא משולש, ששטחו קטן פי 4 משטח פני החרוט. מצא את הזווית בין הקו היוצר של החרוט ובין בסיסו.

ה.88. במשולש ישר זווית ABC (קודקוד הזווית הישרה) היתר הוא c והזווית החדה ליד הקודקוד A היא α . בקודקוד A העמידו אנך למישור המשולש ABC. נקודה K על אנך זה חיברו עם הקודקודים B ו-C של המשולש הנ"ל. האנך KA יוצר עם מישור המשולש KBC זווית β . הוכח כי שטח המשולש KBC שווה ל- $\frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha / \sin \beta$.

ה.89. הפירמידה ישרה שבסיסה רבוע, שווה הגובה ל- h והזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות ל- α . הוכח כי מקצוע הבסיס של הפירמידה שווה ל- $h \sqrt{-2 \cos \alpha / \cos \frac{\alpha}{2}}$.

ה.90. במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ (מקצועות צדדיים AA', BB', CC'), הבסיס הוא משולש ישר-זווית ABC ($AC \perp BC$) שבו $\angle BAC = \alpha$ ורדיוס המעגל החוסם משולש זה הוא R. דרך הניצב AC ומרכז המעגל (M') , החוסם את הבסיס העליון של המנסרה $(A'B'C')$, העבירו במישור היוצר עם בסיס המנסרה ABC זווית β וחותך את $A'B'$ בנקודה M' ואת $B'C'$ בנקודה D. מצא את שטח המרובע $ACDM'$.



ה.91. בפירמידה שבסיסה משולש, שווים המקצועות הצדדיים וה-בסיסים ביניהם, וכל אחד מהם שווה ל- a . מצא את הזווית בין שתי פאות של הפירמידה הנ"ל.

ה.92. חשב את הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות של פירמידה משושה משוכללת וישרה, שמקצועה הצדדי ארוך פי 2 ממקצוע הבסיס שלה.

ה.93. בסיסה של פירמידה הוא ריבוע שאורך צלעו m . שתי פאות סמוכות של הפירמידה מאונכות לבסיסה, וכל אחת משתי הפאות האחרות יוצרת זווית α עם הבסיס. הוכח כי שטח פני הפירמידה הוא:

$$2m^2 \sqrt{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) \sec \alpha}$$

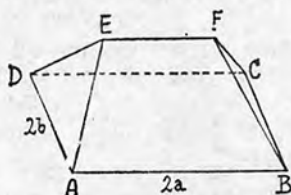
94. גבהה של פירמידה, שבבסיסה מלבן, הוא h . שתי פאות צדדיות של הפירמידה מאונכות לבסיסה, והאחרות יוצרות עם הבסיס זוויות α ו- β . הוכח כי שטח מעטפת הפירמידה הוא:

$$2h^2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) \cos(45^\circ - \frac{\beta}{2}) / (\sin \alpha \sin \beta)$$

95. בציר נמצא גג של בית. בסיס הגג ABCD הוא מלבן שבו $AB = 2a$ ו- $BC = 2b$ ($a > b$). כל אחת מארבע הפאות הצדדיות של הגג יוצרת עם בסיס הגג ABCD זווית α . וכן $AE = BF = CF = DE$. המקצוע AE יוצר עם בסיס הגג זווית β .

$$\tan \alpha = \sqrt{2} \tan \beta \quad (\text{א})$$

הוכח: (ב) שטח הפאה AEFB שווה ל- $b(2a - b) \sec \alpha$.



96. בפירמידה ישרה SABCD (S — ראש הפירמידה), שבבסיסה ריבוע ABCD, הגובה הוא h והוא יוצר עם כל אחד מהמקצועות הצדדיים זווית α . דרך האלכסון BD של הבסיס העבירו מישור היוצר עם הבסיס זווית β . מישור זה חותך את המקצוע SC בנקודה E.

הוכח, כי שטח המשולש BDE שווה ל-

$$h^2 \tan \alpha \sin \alpha \sec(\beta - \alpha)$$

97. אלכסון תיבה יוצר עם הבסיס זווית α ועם אחת הפאות הצדדיות — זווית β . גובהה של התיבה שווה ל- h . הוכח, כי גפח התיבה הוא:

$$h^3 \sin \beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \operatorname{cosec}^2 \alpha}$$

98. בפירמידה ישרה שבבסיסה ריבוע, יוצר המקצוע הצדדי זווית בת $63^\circ 10'$ עם בסיס הפירמידה. מצא את הזווית בין:

(א) פאה צדדית של הפירמידה ובין בסיסה;

(ב) שתי פאות צדדיות סמוכות של הפירמידה.

99. (א) נתונה מנסרה ישרה שבבסיסה הם משולשים שווים צלעות ABC ו- $A'B'C'$, AA' , BB' , CC' הם מקצועות צדדיים). אורך צלע הבסיס הוא a וגובה המנסרה הוא $\frac{1}{2}a$. הבע באמצעות a את הזווית שיוצר המישור דרך הנקודות A' , B ו- C' עם מישור הפאה $CBB'C'$.

(ב) מקוביה שאורך מקצועה a , נחתכה פינה; החתך נעשה על ידי מישור העובר דרך נקודות האמצע של שלושת המקצועות היוצאים מקודקוד הפינה. הבע באמצעות a את הנפח של הגוף שנשאר.

ה.100. במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$, AA' , BB' , CC' מקצועות צדדיים של המנסרה) שבסיסה התחתון משולש שווה צלעות ABC , שווה מקצוע הבסיס ל- a . את הקטע, המחבר את נקודות הפגישה של האלכסונים בפאות $ABB'A'$ ו- $BCC'B'$ רואים מאמצע המקצוע AC בזווית α .

(א) מצא את נפח המנסרה.
(ב) מה צריך להיות ערך הזווית α , כדי שיהיה פתרון לבעיה?

ה.101. בחיבה $ABCD A'B'C'D'$ AA' , BB' , CC' , DD' — המקצועות הצדדיים) הבסיס התחתון הוא מלבן $ABCD$ — הצלע הגדולה של בסיס החיבה, אלכסון בסיס החיבה הוא $d = 7.5$ ס"מ, $\alpha = 35^\circ 27'$, הזווית בין אלכסוני הבסיס שווה ל- $\beta = 57^\circ 33'$. המישור $ABC'D'$ יוצר עם בסיס החיבה זווית α ו- β .

(א) הבע את נפח החיבה באמצעות d , α ו- β .
(ב) חשב את נפח החיבה.

ה.102. בפירמידה משולשת משוכללת וישרה נתון אורך המקצוע הצדדי b , והזווית בין שתי פאות צדדיות α . הוכח כי נפח הפירמידה הוא:

$$\frac{1}{3} b^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ \right) / \sin^3 \frac{1}{2} \alpha$$

ה.103. בפירמידה מרובעת משוכללת וישרה, שטח הפאה הצדדית הוא S , זווית הראש של כל פאה היא α . הוכח כי נפח הפירמידה הוא

$$4S \sqrt{S \tan \frac{\alpha}{2} \cos \alpha / (3 \cos \frac{1}{2} \alpha)}$$

ה.104. הבסיס של פירמידה משולשת הוא משולש שווה שוקיים, בו חסום מעגל שמחוגו R . גובה הפירמידה עובר דרך מרכז המעגל החסום הנ"ל ויוצר עם המקצוע הצדדי, העובר דרך קודקוד הבסיס שממנו יוצאות שתי השוקיים, זווית α . זווית הבסיס של משולש שווה השוקיים היא 2α . הוכח כי נפח הפירמידה הוא $R^3 \cot^3 \alpha \tan 2\alpha : (3 \cos 2\alpha)$.

ה.105. במנסרה ישרה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע $ABCD$, חיברו את קצות אלכסון הבסיס BD עם האמצע K של המקצוע הצדדי CC' . המישור BKD יוצר עם המישור $BDD'B'$ זווית α . גובה המנסרה הוא h . הבע את שטח המשולש BKD באמצעות h ו- α .

ה.106. למישור המכיל משולש ישר-זווית ABC — קדקוד הזווית הישרה) העמידו אנך בקדקוד B ובחרו עליו נקודה D (שונה מ- B). נקודה D חיברו עם הקדקודים A ו- C באמצעות קטעי קו ישר; $\angle DAB = \beta$; $\angle DAC = \gamma$; $BA = c$.

(א) הבע את אורך הקטע DC ואת שטח המשולש DCA באמצעות c , β ו- γ .
(ב) חשב את שטח המשולש DCA אם $c = 56.7$ ס"מ; $\beta = 37^\circ 10'$; $\gamma = 65^\circ 8'$.

B ו-D אנכים על המקצוע SC, הנפגשים בנקודה E על מקצוע זה.

הוכח כי שטח המשולש BDE הוא $\frac{1}{2}a^2 \sqrt{\cos \alpha}$.

ה.113. בנקודה A המונחת על מישור P, העבירו ישר AD היוצר עם P זווית α . דרך הישר AD העבירו מישור Q, היוצר זווית β עם המישור P. הזווית בין AD והישר בו נחתכים המישורים P ו-Q היא γ . הוכח, כי $\sin \gamma = \sin \alpha : \sin \beta$.

ה.114. נתון קטע שאורכו a, המקביל למישור P. בקצות קטע זה מעבירים שני ישרים המאונכים לו, והחותכים את P בזוויות α ו- β ($\alpha > \beta$), בנקודות שהמרחק ביניהן b. הוכח, כי מרחק הקטע מהמישור P הוא

$$\sqrt{b^2 - a^2 \sin \alpha \sin \beta / \sin(\alpha - \beta)}.$$

ה.115. היתר של משולש ישר זווית הוא m, ואחת הזוויות החדות היא α . דרך היתר עובר מישור Q, היוצר עם מישור המשולש זווית β . הוכח, כי מרחק קודקוד הזווית הישרה מהמישור Q הוא $\frac{1}{2}m \sin 2\alpha \sin \beta$.

ה.116. במנסרה ישרה ABC A'B'C', שבסיסה משולש שווה-צלעות, חיברו את הקודקודים B ו-C' עם הקודקוד A'. גובה המשולש A'BC, המורד על הצלע BC הוא h, והזווית בין בסיס המנסרה הנ"ל ובין מישור המשולש A'BC שווה ל- α . הבע את נפח המנסרה באמצעות h ו- α .

ה.117. במנסרה ישרה ABC A'B'C' שבסיסה משולש שווה-צלעות, המקצועות הצדדיים הם AA', BB', CC'. מהקודקוד A הורידו גובה AD על הצלע BC (D — נקודת הפגישת של הגובה עם הצלע BC) וכן העבירו דרך קודקוד זה אלכסון AB'. הזווית B'AD שווה ל- α והאלכסון AB' — ל- d . (א) הוכח, כי נפח המנסרה שווה ל- $\frac{1}{3}d^3 \cos^2 \alpha \sqrt{3 - 4 \cos^2 \alpha}$.

(ב) מה צריך להיות הערך של α כדי שיהיה פתרון לבעיה?

ה.118. במנסרה ישרה ABC A'B'C' (AA', BB', CC' — מקצועות צדדיים) שבסיסה משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) ובו $\angle ABC = \beta$, $BC = a$, יוצר האלכסון A'B זווית α עם הפאה הצדדית BCC'B'.

(א) הבע את נפח המנסרה הנ"ל באמצעות a, β , α .

(ב) מהן ההגבלות לגבי הזוויות α ו- β ואילו מהן היא הגדולה?

ה.119. בפירמידה ישרה SABCD (S — ראש הפירמידה), שבסיסה ריבוע ABCD, זווית הפינה בין שתי פאות צדדיות סמוכות היא $118^\circ 40'$. $\alpha =$ מצא את הזווית בין שני מקצועות צדדיים סמוכים (כגון $\angle ASB$).

ה.120. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע ABCD חיברו את ראשה S של הפירמידה עם הנקודות E ו-F, הנמצאות על צלעות

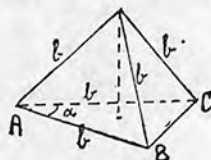
הבסיס AD ו-BC בהתאמה (E על AD ו-F על BC);
 EF מקביל ל-AB. צלע בסיס הפירמידה שווה ל-a, וכל
 אחת מהזוויות, שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים, שווה
 ל- α ("ז": $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle DSA = \alpha$)

המישור SEF יוצר עם בסיס הפירמידה זווית β .
 (א) הבע את גובה הפירמידה הנ"ל באמצעות a ו- α .
 (ב) הבע את שטח המשולש SEF באמצעות a, α ו- β .

ה.121. (א) נתונה פירמידה אשר בסיסה מצולע חסום במעגל. הוכח
 כי אם בפירמידה זו המקצועות הצדדיים שווים, הרי הישר
 המחבר את קודקוד הפירמידה עם מרכז המעגל החוסם את
 הבסיס מאונך לבסיס — ולהיפך.
 פירמידה כנ"ל נקראת "ישרה".

(ב) בסיסה של פירמידה ישרה הוא משולש שווה שוקיים,
 אורך השוק של המשולש הוא 40 ס"מ, בסיס המשולש הוא
 48 ס"מ ואורך המקצוע הצדדי של הפירמידה הוא 65 ס"מ.
 חשב את הזווית בין המקצועות הצדדיים לבין מישור הבסיס.

ה.122. בפירמידה שבבסיסה משולש שווים ביניהם המקצועות הצדדיים
 ושני מקצועות בסיס, וכל אחד מהם שווה ל-b. הזווית בין
 מקצועות הבסיס, השווים זה לזה, היא α (ראה ציור).



(א) הבע את נפח הפירמידה הנ"ל באמצעות b ו- α .
 (ב) באיזה תחום צריכה להמצא הזווית α , כדי שלבעיה
 יהיה פתרון?

ה.123. אלכסוני שתי פאות סמוכות של תיבה, היוצאים מקודקוד
 אחד, יוצרים ביניהם זווית γ . אלכסונים אלה יוצרים עם
 בסיס התיבה זוויות α ו- β . הוכח כי $\cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

ה.124. נתונה מנסרה מרובעת משוכללת וישרה ABCD-A'B'C'D'.
 שאורך צלע בסיסה a. $\angle BCD = \alpha$. הוכח כי נפח המנסרה
 הוא $\frac{1}{2}a^3 \sqrt{2 \cos \alpha / \sin \frac{1}{2}\alpha}$.

ה.125. הבסיס של מנסרה ישרה הוא מקבילית, שצלעותיה הן a
 ו-b, והזווית החדה ביניהן היא α . האלכסון הגדול של בסיס
 המנסרה שווה באורכו לאלכסון הקטן של המנסרה עצמה.
 הוכח כי נפח המנסרה הוא $2ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}$.

ה.126. הבסיס של מנסרה ישרה הוא מעוין שזוויתו החדה α . האלכסון
 הגדול של המנסרה, שהוא m, יוצר עם הפאה הצדדית זווית β .

הוכח כי נפח המנסרה הוא

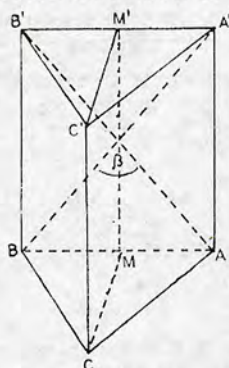
$$m^3 \sin^2 \beta \sqrt{\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta) \sin(\frac{\alpha}{2} - \beta) / (\sin \alpha \sin \frac{1}{2} \alpha)}$$

ה.127. בחרוט ישר חיברו את הראש S עם שתי נקודות A ו-B על היקף בסיסו. גובה החרוט SO (O — מרכז בסיס החרוט) יוצר עם מישור המשולש SAB זווית β ועם קו היוצר של החרוט זווית α . $\angle BSO = \alpha$. $SO = h$.

(א) הוכח, כי המיתר AB מאונך למישור, העובר דרך הגובה SO ודרך אמצע המיתר AB.

(ב) הבע את שטח המשולש SAB באמצעות h , α ו- β .

ה.128. במנסרה ישרה $ABC A'B'C'$ (AA' , BB' , CC' — מקצועות צדדיים שבסיסה משולש ישר זווית ABC ($AC=BC$), העבירו דרך המקצוע הצדדי CC' והתיכון ליתר CM מישור CMM'C' היוצר עם הפאה BCC'B' זווית α . מרחק הקדקדק



B מהמישור CMM'C' הוא a והזווית בין אלכסוני הפאה $ABB'A'$ היא β . הוכח כי נפח המנסרה הנ"ל הוא

$$2a^3 \cot \frac{\beta}{2} / \sin^2 2\alpha$$

ה.129. למישור המעוין ABCD העלו אנך בנקודה D. נקודה K, הנמצאת על אנך זה, חברו בקטעי קו ישר עם הנקודות A ו-B וקיבלו משולש ABK. אלכסוני המעוין הם $AC=k$, $BD=1$. מישור המשולש ABK יוצר עם מישור המעוין ABCD זווית α .

נתון: $8 \text{ ס"מ} = k$; $6 \text{ ס"מ} = 1$; $\alpha = 53^\circ 8'$. חשב את שטח המשולש ABK ואת זווית הנטיה של הצלע BK למישור המעוין ABCD.

ה.130. בחיבה $ABCD A'B'C'D'$ (מקצועות צדדיים — CC' , DD' , AA' , BB') אלכסון הבסיס הוא d , והזווית בין אלכסוני של הבסיס היא $\angle AOB = \alpha$ (O — נקודת החיתוך של האלכסונים); $\angle AD'B = \beta$.

הבע את נפח החיבה באמצעות d , α ו- β .

ה.131. הבסיס ABCD של פירמידה ישרה, שקודקודה S, הוא ריבוע, שאורך צלעו a. זווית הנטיה של כל מקצוע לבסיס היא α . דרך B מעבירים מישור, המאונך למקצוע הצדדי SD. הוכח כי שטח החתך הוא $a^2 \cos 2\alpha / \sin \alpha$.

ה.132. הבסיס של פירמידה ישרה הוא ריבוע ABCD, שאורך צלעו a. זווית הראש של כל פאה צדדית היא 2α . מהו שטח החתך, העובר דרך הצלע AB והמאונך לפאה הצדדית, המכילה את הצלע CD? לאילו ערכי α מוגבלת השאלה?

ה.133. בבסיסו של חרוט חסמו ריבוע, שצלעו a. מישור, העובר דרך קודקוד החרוט ואחת מצלעות הריבוע, חותך את החרוט, ויוצר משולש, שזווית הראש שלו α . מצא את נפח החרוט.

ה.134. נתון משולש שווה-שוקיים ABC שבו $AB = AC = b$. למישור המשולש ABC העלו אנך בקודקוד A ועליו הקצו קטע $AS = b$. הזווית בין מישורי המשולשים ABC ו-SBC שווה ל- α .

הבע את שטח המשולש SBC באמצעות b, α ו- α' .
ה.135. במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ (מקצועות צדדיים CC' ,

AA' , BB') הבסיס התחתון הוא משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) בעל שוק b וזווית הראש α . אלכסון הפאה הצדדית העוברת דרך הצלע BC יוצר עם כל אחת מהפאות הצדדיות הסמוכות לפאה זו זווית φ .
הבע את נפח המנסרה באמצעות α , α' ו- φ .

ה.136. למישור המלבן ABCD העמידו אנך בנקודה A וקבעו עליו נקודה S. את הנקודה S חיברו עם הקודקודים B, C ו-D. הישר SB יוצר עם מישור המלבן הנ"ל זווית α , והישר SD — זווית β , אורך הקטע SC הוא m.
הבע את אורך הקטע SA באמצעות α , m, β .

ה.137. נתונה מנסרה ישרה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבועים בעלי צלע a; AA' , BB' , CC' ו- DD' הם מקצועות צדדיים של מנסרה זו. דרך האלכסון AC של הבסיס התחתון ודרך הקודקוד D' העבירו מישור. הזווית $AD'C'$ שווה ל- α .
(א) הבע את שטח המעטפת של המנסרה הנ"ל בעזרת α ו- α' .
(ב) באיזה תחום צריכה להמצא הזווית α , כדי שלבעיה יהיה פתרון?

ה.138. הבסיס של מנסרה ישרה הוא משולש ישר זווית שאורך ניצבו a, והזווית החדה מולו α . אלכסוני הפאות הצדדיות, הנפגשים בקודקוד הזווית החדה האחרת של המשולש, יוצרים ביניהם גם זווית α . הוכח כי נפח המנסרה הוא

$$\frac{1}{2} a^3 \cdot \cos \alpha \sqrt{\cos 2\alpha / \sin^3 \alpha}$$

ה.139. דרך מקצוע הבסיס התחתון ודרך קודקוד נגדי של הבסיס העליון של מנסרה משולשת משוכללת וישרה העבירו מישור.

מישור זה יוצר זווית α עם בסיס המנסרה, ושטח החתך המתאים הוא S. הוכח כי נפח המנסרה הוא

$$S \sin \alpha \sqrt[3]{S \sqrt[3]{3 \cos \alpha}}$$

ה.140. אורך מקצוע הבסיס של מנסרה משושה, משוכללת וישרה, הוא b. הוויית, בה נטוי האלכסון הגדול ביותר של המנסרה לפאה הצדדית שלקודקודה הוא מחובר, היא α . הוכח כי נפח המנסרה הוא

$$3b^3 \sqrt[3]{3 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha) / \sin \alpha}$$

ה.141. משולש שווה-צלעות ABC שאורך צלעו a מונח במישור P. נקודה D, הנמצאת מחוץ למישור P היא במרחק של $\frac{2}{3}a$ מכל אחד מקדודי משולש ABC.
(א) מצא את מרחק הנקודה D ממישור P;
(ב) מצא את הזווית שיוצר הישר DA עם המישור P;
(ג) מצא את הזווית שיוצר המישור ADB עם המישור BAC.

ה.142. במנסרה ישרה ABCD A'B'C'D' (AA', BB', CC', DD') — מקצועות צדדיים) הבסיס התחתון הוא ריבוע ABCD, הגובה הוא h, $\angle B'AD' = \alpha$.

(א) הבע את שטח המעטפת במנסרה הנ"ל באמצעות h ו- α .
(ב) עבור אלו ערכים של α יש לבעיה פתרון?
ה.143. בפירמידה ישרה, שבסיסה משולש שווה צלעות, זווית הנטייה של המקצוע הצדדי לבסיס היא α , והזווית בין שתי פאות צדדיות היא β . הוכח כי $\cot \frac{\beta}{2} = \sqrt[3]{3 \sin \alpha}$.

ה.144. בסיס פירמידה SABC (S — ראש הפירמידה) הוא משולש ישר-זווית ABC ($AC \perp BC$), שבו $\angle BAC = \alpha$. המקצועות הצדדיים של הפירמידה שווים זה לזה, וכל אחד מהם שווה ל-m. זווית הנטייה של המקצוע הצדדי SA לבסיס היא β .
(א) הוכח, כי זוויות הנטייה של המקצועות הצדדיים לבסיס בפירמידה הנ"ל שוות.
(ב) הבע את נפח הפירמידה הנ"ל באמצעות m, α ו- β .

ה.145. היתר של המשולש ישר-הזווית ABC ($AC \perp BC$) הוא c, והזווית החדה ליד A היא α . דרך הקדקוד A העבירו ישר המאונך למישור המשולש ABC ובחרו עליו נקודה K כך ש- KA יוצר זווית β עם מישור המשולש KBC.
הבע את שטח המשולש KBC באמצעות c, α ו- β .

ה.146. בסיס מנסרה ישרה הוא טרפז שווה שוקיים שבסיסיו הם a ו-b (הבסיס הגדול), והזווית ע"י הבסיס הגדול היא α . דרך הבסיס הגדול של הבסיס העליון של המנסרה, ודרך הבסיס הקטן של הבסיס התחתון שלה העבירו מישור, אשר יצר עם מישור בסיס המנסרה זווית β . הבע את נפח המנסרה באמצעות a, b, α ו- β .

147. בפירמידה ישרה $SABCD$, שבסיסה ריבוע $ABCD$ וראשה S , הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות היא 2α והזווית בין מקצוע צדדי למקצוע הבסיס (הנפגשים בקדקוד הבסיס) היא β . הוכח, כי $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \sin 45^\circ$.

148. ה. בסיס הפירמידה הישרה $SABC$ (S — ראש הפירמידה) הוא משולש שווה-שוקיים ABC , שבו $AB = AC = b$ ו- $\angle BAC = \alpha$. כל המקצועות הצדדיים של הפירמידה יוצרים עם בסיס הפירמידה זווית β . הבע את נפח הפירמידה באמצעות b , α ו- β .

149. ה. מישור של משולש שווה-שוקיים DBC ($BD = CD$) מאונך למישור של משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים ACB ($AC \perp CB$). למשולש DBC זווית חדה β ב- B . (א) מהי הזווית שיוצר מישור ACD עם מישור ABC ? (ב) הוכח: אם α היא הזווית שיוצר מישור ABD עם מישור ABC , אז $\tan \alpha = \sqrt{2} \tan \beta$.

150. ה. בכדור שמחוגו R חסומה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה, שזווית הראש של פאתה הצדדית היא α . הוכח כי שטח מעטפת הפירמידה הוא $4R^2 \sin 2\alpha$.

151. ה. הבסיס של פירמידה מרובעת הוא מעוין שאורך צלעו a וזוויתו החדה β . כל פאה צדדית של המעוין נטויה לבסיס בזווית 2α . הוכח כי מחוג הכדור החסום בפירמידה הוא $\frac{1}{2}a \sin \beta \tan \alpha$.

152. ה. בכדור חסומה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה, ובפירמידה זו חסום כדור אחר. קוטר הכדור החוסם גדול פי 2.5 מקוטר הכדור החסום. מצא את זווית הראש של כל פאה צדדית של הפירמידה.

153. ה. בכדור שרדיוסו R חסום חרוט ישר. זווית הראש בחתך הצירי של החרוט שווה ל- α . מצא את נפח החרוט.

154. ה. (א) מעוין, שאורך צלעו — a וזוויתו החדה — α , מסתובב סביב האלכסון הגדול. חשב את נפח הגוף שנוצר. (ב) מהו נפח הגוף, שנוצר ע"י סיבוב המעוין הנ"ל סביב האלכסון הקטן? (ג) באיזה מקרה יהיו הנפחים שווים?

155. ה. בסיס פירמידה הוא משולש שווה-שוקיים, שבסיסו a וזווית ראשו היא 2α . כל פיאה יוצרת עם בסיס הפירמידה זווית β . הוכח כי שטח פני הפירמידה הוא $\frac{1}{2}a^2 \cot \alpha \cos^2 \beta / \cos 2\beta$.

156. ה. הפאות ABC ו- ABD של פירמידה משולשת $ABCD$ הם משולשים שווי שוקיים ($AB = AC = AD$) בעלי זווית הראש השווה ל- α . $\angle BAC = \angle BAD = \alpha$. מישורי המשולשים הנ"ל מאונכים זה לזה.

(א) חשב את זווית הנטיה של המקצוע CD לפאה ABC.
 (ב) הוכח כי טנגנס הזווית בין המישורים ACD ו-ACB שווה ל- $\sec \alpha$.

ה.157. בנקודה A, הנמצאת על מעגל שמרכזו M, העלו אנך למישור המעגל. את הנקודה K, שעל אנך זה, חיברו אל שתי נקודות B ו-C של המעגל.



נתון: $AB = 2R$ (AB — קוטר); $\angle ABC = \beta$. הוויית בין מישור המשולש KBC למישור המעגל הנ"ל היא γ .
 חשב את שטח המשולש KBC.

ה.158. הוכח שאם $A + B + C = 180^\circ$ (k מספר שלם), הרי

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \quad (\text{א})$$

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1 \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} + \frac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \frac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A} = 1 \quad (\text{ג})$$

ה.159. הוכח שאם $A + B + C = 90^\circ$, הרי

$$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C \quad (\text{א})$$

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1 \quad (\text{ב})$$

$$(\cot A + \cot B) \sin 2A = (\cot B + \cot C) \sin 2C \quad (\text{ג})$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin A \sin B \sin C = 1 \quad (\text{ד})$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 2 \cos A \cos B \sin C \quad (\text{ה})$$

ה.160. הוכח שאם A, B ו-C זוויות כל שהן, הרי

$$\sin^2 B - \cos^2 A + 2 \cos A \cos B \cos(A - B) = \cos^2(A - B) \quad (\text{א})$$

$$\sin^2(A + B) + \cos^2(A - B) = 1 + \sin 2A \sin 2B \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\sin(A - B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B - C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C - A)}{\cos C \cos A} = 0 \quad (\text{ג})$$

ד) הוכח כי סכום שלושת השברים

$$\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}, \frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B \tan C}, \frac{\tan C - \tan A}{1 + \tan C \tan A}$$

שווה למכפלת שלושת שברים אלה.

ה. 161. הוכח שאם x, y, z שלושה מספרים חיוביים כך שכל אחד מהם קטן מסכום שני האחרים (למשל אם הם אורכי צלעותיו של משולש), ואם $\cos 2C = z/(x+y)$; $\cos 2B = y/(z+x)$; $\cos 2A = x/(y+z)$ הרי שלושת הזוויות A, B, C מקיימות את השוויון:

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C = 1$$

ה. 162. אם A, B, C זוויות שסכומן 180° , הוכח כי

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C \quad (\text{א})$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \quad (\text{ב})$$

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C \quad (\text{ג})$$

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C - 1 \quad (\text{ד})$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C \quad (\text{ה})$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C \quad (\text{ו})$$

$$\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C \quad (\text{ז})$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C \quad (\text{ח})$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C \quad (\text{ט})$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C \quad (\text{י})$$

$$\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C \quad (\text{יא})$$

ה. 163. הוכח שאם צלעות משולש הן a, b, c וזוויותיו בהתאמה A, B, C , הרי קיימים הקשרים הבאים בין צלעות וזוויות אלה:

$$(a^2 - b^2) \sin(A+B) = c^2 \sin(A-B) \quad (\text{א})$$

$$(b^2 + c^2 - a^2) \tan A = (a^2 + c^2 - b^2) \tan B \quad (\text{ב})$$

$$(a^2 - b^2) \cot C + (b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B = 0 \quad (\text{ג})$$

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin C} = 0 \quad (\text{ד})$$

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0 \quad (\text{ה})$$

$$\frac{a \sin A + b \sin B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = 2R \quad (\text{ו})$$

(R מחוג המעגל המקיף את המשולש)

$$a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 4S \quad (\text{ז})$$

(S – שטח המשולש)

$$r = 4R \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \quad (\text{ח})$$

(r – רדיוס מחוגי המעגלים החסום והחוסם של המשולש)

$$r = p \tan \frac{1}{2} A \tan \frac{1}{2} B \tan \frac{1}{2} C \quad (\text{ט})$$

(p – מחצית היקף המשולש)

$$(a+b) \cos C + (b+c) \cos A + (c+a) \cos B = 2p \quad (\text{י})$$

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2} A}{a} + \frac{\cos^2 \frac{1}{2} B}{b} + \frac{\cos^2 \frac{1}{2} C}{c} = \frac{p^2}{abc} \quad (\text{יא})$$

$$\begin{aligned} & (\sin A + \sin B + \sin C) \cdot (\sin B + \sin C - \sin A) \cdot \\ & \cdot (\sin C + \sin A - \sin B) \cdot (\sin A + \sin B - \sin C) = \\ & = 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \end{aligned} \quad (\text{יב})$$

רמז: היעזר בנוסחות ה-162 ובנוסחת הרון לחישוב שטח משולש.

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 > 2\pi \sin A \sin B \sin C \quad (\text{יג})$$

ה-164. צלעות משולש הן a, b ו-c וזוויותיו A, B, C בהתאמה. הוכח כי:

$$\cot^2 B - \tan^2 B = \cot^2 C - \tan^2 C \quad (\text{א})$$

אם קיים $\cot^2 C - \tan^2 C$ הרי המשולש הוא שווה שוקיים.

$$a \cos B + b \cos A = 2b \sin \frac{1}{2} C \quad (\text{ב})$$

אם קיים $2b \sin \frac{1}{2} C$ הרי המשולש הוא שווה שוקיים.

$$\sin 2A + \sin 2B = 2 \sin A \sin B \sin C \quad (\text{ג})$$

אם קיים $2 \sin A \sin B \sin C$ הרי המשולש הוא ישר זווית.

ד) אם קיים $b (\cos A + \cos B) \sin C = (a + b) \sin B$ הרי המשולש הוא ישר זווית.

ה) אם קיים $c (\cos A - \cos B) = b - a$ הרי המשולש הוא ישר זווית או שווה שוקיים.

ו) אם קיים $\cos (A - B) \cos (B - C) \cos (C - A) = 1$ הרי המשולש הוא שווה צלעות.

ז) אם קיים $\tan A \tan B = 1$ הרי המשולש הוא ישר זווית.

ח) אם קיים $\tan A \tan B > 1$ הרי המשולש הוא חד זווית.

ט) אם קיים $\tan A \tan B < 1$ הרי המשולש הוא קהה זווית.

י) אם קיים $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ הרי המשולש הוא ישר זווית.
רמז: היעזר בתרגיל ה-162 חלק ח'.

יא) אם קיים $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$ הרי המשולש הוא חד זווית.

יב) אם קיים $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$ הרי המשולש הוא קהה זווית.

יג) אם קיים $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$ הרי המשולש הוא קהה זווית.

ה-165. A, B, C זוויות משולש. הוכח את אי השוויונים הבאים על ידי כך שתראה, כי האגפים השמאליים שלהם מזעריים (מינימליים) או מירביים (מכסימליים) כאשר הזוויות שוות זו לזו. בדוק תחילה את המקרים כאשר אחת הזוויות קבועה ושתי האחרות בלבד משתנות.

א) $\tan^2 \frac{1}{2} A + \tan^2 \frac{1}{2} B + \tan^2 \frac{1}{2} C \geq 1$

ב) $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \leq 0.125$

ג) $\cos A + \cos B + \cos C > 1$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1.5 \quad (ד)$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 1.5 \sqrt{3} \quad (ה)$$

$$\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C \leq 0.375 \sqrt{3} \quad (ו)$$

$$\tan \frac{1}{2} A \tan \frac{1}{2} B \tan \frac{1}{2} C \leq \sqrt{3}/9 \quad (ז)$$

$$\operatorname{cosec} \frac{1}{2} A + \operatorname{cosec} \frac{1}{2} B + \operatorname{cosec} \frac{1}{2} C \geq 6 \quad (ח)$$

ה.166. הראה כי עבור כל זווית A קיימים:

$$\sec^4 A + \operatorname{cosec}^4 A \geq 8 \quad (א)$$

$$\sin^6 A + \cos^6 A \geq 0.25 \quad (ב)$$

$$\sin^8 A + \cos^8 A \geq 0.125 \quad (ג)$$

$$\sin^{2n} A + \cos^{2n} A \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (ד)$$

הדרכה: נסמן $z = \frac{1}{2}(\cos^2 A - \sin^2 A)$ ואז $\cos^2 A = \frac{1}{2} + z$ ו- $\sin^2 A = \frac{1}{2} - z$
אחר הצבה זו.

$$2(\sin^6 A + \cos^6 A - 1) = 3(\sin^4 A + \cos^4 A) \quad (ה)$$

$$4 \sin A \sin(60^\circ - A) \cos(30^\circ - A) = \sin 3A \quad (ו)$$

$$\sin^2 A + \sin 2A \sin 4A = \sin^2 3A \quad (ז)$$

$$\sin^3 A \cos 3A + \cos^3 A \sin 3A = 0.75 \sin 4A \quad (ח)$$

$$\sin^3 A \sin 3A + \cos^3 A \cos 3A = \cos^3 2A \quad (ט)$$

ה.167. אם A ו-B זוויות חדות, הרי

$$\sin(A + B) \geq \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B) \quad (א)$$

$$\cos \frac{1}{2}(A + B) \geq \frac{1}{2}(\cos A + \cos B) \quad (ב)$$

$$\tan \frac{1}{2}(A + B) \leq \frac{1}{2}(\tan A + \tan B) \quad (ג)$$

$$^* \tan A + \cot A > \sin A + \cos A \quad (ד)$$

$$\sin A + \sin B = x; \cos A + \cos B = y \quad \text{אם נסמן } y \quad (ה)$$

אזי

$$\cos(A+B) = (y^2 - x^2) / (y^2 + x^2)$$

וגם

$$\sin(A+B) = 2xy / (x^2 + y^2)$$

ה.168. הוכח, בלי להיעזר במחשב כיס או בלוחות, כי:

$$\sqrt{3} \tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 70^\circ = 1 \quad (א)$$

$$4 \sin 50^\circ - \sec 20^\circ = 2 \quad (ב)$$

$$\cot 30^\circ \cot 40^\circ - \sec 20^\circ = 1 \quad (ג)$$

$$4 \cos 40^\circ - \sqrt{3} \cot 40^\circ = 1 \quad (ד)$$

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 0.5 \quad (ה)$$

רמז: חשב תחילה $\cos 36^\circ$ בעזרת הזהות

$$2 \cdot 36^\circ + 3 \cdot 36^\circ = 180^\circ$$

$$1 + 2 \cos \frac{360^\circ}{7} = 2 \cos \frac{540^\circ}{7} + 2 \cos \frac{180^\circ}{7} \quad (ו)$$

$$\sin 4 \cdot \frac{180^\circ}{7} = \sin 3 \cdot \frac{180^\circ}{7} \quad \text{רמז: היעזר בזהות}$$

ה.169. אם A, B, C זוויות של משולש חדי-זווית, הוכח, כי

$$\tan A \tan B \tan C > 1 \quad (א)$$

רמז: היעזר בתרגיל ה.164 חלק ח'.

$$\tan A + \tan B + \tan C > 1 \quad (ב)$$

$$\tan^2 A + \tan^2 B > 2 \quad (ג)$$

רמז: חשב את $(\tan A - \tan B)^2$

$$0 < \cos^2 A + \cos^2 B < 1 \quad (ד)$$

רמז: היעזר במשולש ישר זווית בעל זווית חדה A .

$$1 < \sin^2 A + \sin^2 B < 2 \quad (ה)$$

$$1 < \sin A + \sin B < 2 \quad (ו)$$

$$\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C < 0.25 \quad (ז)$$

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C < 2 \quad (ח)$$

$$1 < \sin A + \sin B + \sin C < 3 \quad (ט)$$

$$0.25 < \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C < 0.75 \quad (י)$$

ה.170. אם זוויות משולש הן A, B ו- C ואם הזוויות מקיימות את התנאי $0 < A \leq B \leq C < 90^\circ$, הרי נכונים אי השוויונים הבאים (רמז לפתרון: הוכח תחילה כי $A + 2B \leq 180^\circ$; $A + 2C \geq 180^\circ$; $0 < A \leq 60^\circ$; $2B + C \geq 180^\circ$; $2A + C \leq 180^\circ$; $60^\circ \leq C < 90^\circ$).

$$\cos \frac{1}{2}C \leq \sin B \leq \cos \frac{1}{2}A \quad (\text{א})$$

$$\sin \frac{1}{2}A \leq \cos B \leq \sin \frac{1}{2}C \quad (\text{ב})$$

$$\cot \frac{1}{2}C \leq \tan B \leq \cot \frac{1}{2}A \quad (\text{ג})$$

$$1 < \sin A + \sin B \leq \sqrt{3} \quad (\text{ד})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6} < \sin B + \sin C < 2 \quad (\text{ה})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} < \cos A + \cos B < \sqrt{2} \quad (\text{ו})$$

$$0 < \cos B + \cos C \leq 1 \quad (\text{ז})$$

$$\tan A \tan B \leq 3 \quad (\text{ח})$$

$$3 \tan B \tan C \geq 1 \quad (\text{ט})$$

$$\sin A \sin B \leq 0.75 \quad (\text{י})$$

$$\cos A \cos B \leq 0.25 \quad (\text{יא})$$

$$\tan A + \tan B > 2 \quad (\text{יב})$$

ה.171. משולש שווה צלעות אחד חסום בתוך משולש שווה צלעות שני באופן שכל קודקוד של המשולש הקטן מונח על צלע של המשולש הגדול ומחלק צלע זו ביחס 2:1. הוכח כי כל צלע של המשולש הקטן מאונכת לאחת הצלעות של המשולש הגדול.

ה.172. במשולש חד זווית ABC הגבהים נחתכים בנקודה O. הוכח שאם $\cos C = 0.6$ הרי $2(OA + OB) = CA + CB$. רמז: בטא את כל הקטעים הנ"ל בעזרת הצלע AB והזווית A ו- B .

ה.173. במשולש ישר זווית אורך חוצה הזווית של אחת הזוויות החדות קצר פי $\sqrt{3}$ מן היתר של משולש זה. הוכח כי הזווית החצויה היא בת 60° .

ה.174. אחת הזוויות של משולש היא בת 120° והצלעות הכולאות זווית זו הן a ו- b , והגובה לצלע השלישית הוא h . הוכח שאם

$$a^{-1} + b^{-1} = h^{-1}$$

הרי המשולש הוא שווה שוקיים.

ה.175. על שלוש הצלעות של משולש ABC בנו שלושה משולשים שווי שוקיים מחוץ למשולש ABC — המשולשים ABF, CAE, BCD — באופן שצלעות המשולש ABC שימשו בסיסים של המשולשים שווי הצלעות, וכל זוויות הבסיס של המשולשים שווי השוקיים שוות זו לזו.

הוכח שאם המשולש DEF הוא שווה שוקיים הרי המשולש ABC היה שווה שוקיים או שכל זוויות הבסיס של המשולשים BCD, ABF, CAE היו שוות ל- 30° והמשולש DEF הוא שווה צלעות. רמז: הבע את צלעות המשולש DEF באמצעות מחוג המעגל המקיף את המשולש ABC ובעזרת הזוויות A, B, C ובעזרת זווית הבסיס של המשולשים שווי השוקיים.

ה.176. ABCD היא מקבילית בה הזווית A היא בת 60° . E היא נקודה על CD באופן שקיים $ED = (2 + \sqrt{3})CE$ והזווית AEB היא ישרה. הוכח כי $AE = EB$.

ה.177. הוכח שאם D היא הזווית החדה בין שני התיכונים לניצבים של משולש ישר זווית, הרי $\tan D \leq 0.75$.

ה.178. במשולש שווה שוקיים הגובה לשוק חוצה את הגובה לבסיס המשולש. הוכח כי טנגנס זווית הבסיס במשולש זה הוא $\sqrt{5}$.

ה.179. במשולש שווה שוקיים מחלק גובה על שוק אחת את שטח המשולש לשני חלקים שהיחס ביניהם 1:2. הוכח כי טנגנס זווית הבסיס במשולש זה הוא $\sqrt{2}$ או $\sqrt{5}$.

ה.180. מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות:

$$(1 - \cot x) \tan^3 x = 1 - \tan x \quad (\text{א})$$

$$2\sqrt{2}(1 + \sin x) \sin(x + 45^\circ) = 1 + \cos 2x \quad (\text{ב})$$

$$1 + \sec x = \cot \frac{1}{2}x \quad (\text{ג})$$

$$(2 - \cot x)(1 + \cos x) = \sin x \quad (\text{ד})$$

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x \quad (\text{ה})$$

$$2 \sin 3x (\sin x + \sin 2x) = \cos x + \cos 2x \quad (\text{ו})$$

ה.181. מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות:

$$\tan(x + 15^\circ) = 3 \tan(x - 15^\circ) \quad (\text{א})$$

$$4 \cos x - 1 = \sqrt{3} \cot x \quad (\text{ב})$$

$$3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3 \quad (\text{ג})$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0.5 \quad (\text{ד})$$

$$\sin^4 x + \sin^4(x + 45^\circ) = 0.25 \quad (\text{ה})$$

$$\cot(x + 25^\circ) + \cot x + \cot 15^\circ = \cot 15^\circ \cot x \cot(x + 25^\circ) \quad (\text{ו})$$

$$4 \cos^3 x \cos 3x + 4 \sin^3 x \sin 3x \approx \sqrt{2} \quad (\text{ז})$$

$$\sin x - \tan x = \cot x - \cos x \quad (\text{ח})$$

ה.182. שרטט תרשימים מקורבים של הגרפים של הפונקציות:

$$y = |\cos 2x| \quad (\text{ב}) \quad y = |\sin x| \quad (\text{א})$$

$$y = \cot |0.75x| \quad (\text{ד}) \quad y = \left| \tan \frac{1}{2}x \right| \quad (\text{ג})$$

$$y = |\cos x| - \cos x \quad (\text{ו}) \quad y = |\sin x| + \sin x \quad (\text{ה})$$

$$y = (\cot x)/|\cot x| \quad (\text{ח}) \quad y = \tan x - |\tan x| \quad (\text{ז})$$

$$y = (\cos x)/(2 - |\sin x|) \quad (y = (\sin x)/(1 + |\cos x|)) \quad (\text{ט})$$

$$y = (\sin x)/|\cos x| \quad (\text{יב}) \quad y = |\sin x| \cos x \quad (\text{יא})$$

$$y = |\tan x| + |\cot x| \quad (\text{יד}) \quad y = |\sin x| + |\cos x| \quad (\text{יג})$$

ה.183. מצא את כל הפתרונות של המשוואות:

$$\left| 2 \cos \frac{1}{2}x \right| = 1 \quad (\text{ב}) \quad |\sqrt{2} \sin 5x| = 1 \quad (\text{א})$$

$$\left| \cot \frac{1}{3}x \right| = 1 \quad (\text{ד}) \quad |\tan 3x| = \sqrt{3} \quad (\text{ג})$$

$$|\cos x| = \sin x \quad (\text{ו}) \quad |\sin x| = \cos x \quad (\text{ה})$$

$$\tan x = |\cot x| \quad (\text{ח}) \quad |\sin x| = |\cos x| \quad (\text{ז})$$

ה. 184. מצא את כל הפתרונות של המשוואות:

$$|\cos x| + |\sin x| = \sqrt{2} \quad (\text{ב}) \quad |\sin x| + \cos x = 1 \quad (\text{א})$$

$$4|\sin x|\cos x = \sqrt{3} \quad (\text{ד}) \quad |\tan x| = \cot 2x \quad (\text{ג})$$

$$\sqrt{3}|\tan x + \cot x| = 4 \quad (\text{ו}) \quad 4 \sin x |\cos x| = \sqrt{2} \quad (\text{ה})$$

$$\sqrt{3}\sin x = +\sqrt{2+\cos^2 x} \quad (\text{ח}) \quad \cos x = +\sqrt{1.25-\sin x} \quad (\text{ז})$$

ה. 185. מצא את תחומי הפתרון של אי-השוויונים הבאים:

$$|\cos 2x| > \frac{1}{2} \quad (\text{ב}) \quad |\sin x| < \frac{1}{2} \quad (\text{א})$$

$$|\sin 3x| > \frac{1}{2} \quad (\text{ד}) \quad 1 < |\tan x| < \sqrt{3} \quad (\text{ג})$$

$$|\cot 5x| > 1 \quad (\text{ו}) \quad |2 \cos 4x| < \sqrt{3} \quad (\text{ה})$$

ה. 186. מצא את תחומי הפתרון של אי השוויונים הבאים:

$$|\sin 3x| < |\cos 3x| \quad (\text{ב}) \quad \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1 \quad (\text{א})$$

$$4|\sin x|\cos x > 1 \quad (\text{ד}) \quad |\sin 2x| > \sqrt{3}|\cos 2x| \quad (\text{ג})$$

$$|\sin x + \cos x| < 1 \quad (\text{ו}) \quad |\sin x| + |\cos x| > 1 \quad (\text{ה})$$

ה. 187. מצא את כל הפתרונות של המשוואות:

$$2 \sin x = +\sqrt{2-2 \sin x} \quad (\text{א})$$

$$2 \cos x = +\sqrt{2+3 \tan^2 x} \quad (\text{ב})$$

$$\tan x + \sqrt{\tan x - 1} = 1 \quad (\text{ג})$$

$$2 \cos x + \sqrt{6-9 \tan^2 x} = 0 \quad (\text{ד})$$

ה. 188. פתור בדרך גרפית את המשוואות הבאות (x נמדד ברדיאנים!) ושפר

את דיוק התוצאה בעזרת חישובים במחשב כיס:

$$x + \sin x = 1 \quad (\text{ב}) \quad \sin x = \frac{1}{3}x \quad (\text{א})$$

$$x = 4(1 + \cos x) \quad (\text{ד}) \quad \cos x = |x| \quad (\text{ג})$$

$$4 + \sin x = x^2 \quad (\text{ו}) \quad \tan x = 1 - x^2 \quad (\text{ה})$$

$$(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi)$$

ה.189. מצא את הערך המכסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציות

$$y = 2 - 3 \sin 2x \quad (\text{א})$$

$$y = 4 \cos 5x - 3 \quad (\text{ב})$$

$$y = \sin x + \cos x \quad (\text{ג})$$

$$y = 2 \sin \frac{1}{2}x - 2 \cos \frac{1}{2}x - 1 \quad (\text{ד})$$

$$y = 4 \sin x + 3 \cos x + 5 \quad (\text{ה})$$

רמז: פונקציה זו זהה לפונקציה

$$y = \sqrt{4^2 + 3^2} (0.8 \sin x + 0.6 \cos x) + 5$$

$$y = 12 \cos x - 5 \sin x - 10 \quad (\text{ו})$$

$$y = a \sin x + b \cos x + c \quad (\text{ז})$$

$$(0 < x < \frac{1}{2}\pi) \quad y = \tan x + \cot x \quad (\text{ח})$$

$$(\frac{1}{2}\pi < x < \pi) \quad y = 2 \tan x + 2 \cot x + 3 \quad (\text{ט})$$

$$(a < b) \quad y = a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \quad (\text{י})$$

$$(a > 0; b > 0) \quad y = a \cos^2 x - b \sin^2 x \quad (\text{יא})$$

$$(0 < x < \pi) \quad y = 2 \tan^2 \frac{1}{2}x + 2 \cot^2 \frac{1}{2}x \quad (\text{יב})$$

ה.190. הוכח שאם המספר $a (a \neq 0)$ מחזור של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת עבור $-\infty < x < \infty$ (כלומר אם $f(x+a) = f(x)$ עבור כל x , לאו דוקא המחזור הקטן ביותר) הרי גם $-a$ ו- ka (k מספר שלם שונה מאפס) הם מחזורים של הפונקציה $f(x)$.

ה.191. הוכח שאם המספר $a (a \neq 0)$ הוא מחזור משותף של שתי פונקציות $F(y)$ ו- $y = f(x)$ ו- $z = g(x)$, המוגדרות עבור $-\infty < x < \infty$, ואם $G(z)$ פונקציות המוגדרות עבור כל הערכים של $f(x)$ ו- $g(x)$ בהתאמה, הרי a הוא גם מחזור (לאו דוקא הקטן ביותר) של $F(f(x))$ ושל $F(f(x)) \cdot G(g(x))$; $F(f(x)) \pm G(g(x))$; $G(g(x))$, $F(f(x))/G(g(x))$ (בכל מקום בו $G(g(x)) \neq 0$).

ה.192. הוכח שאם $f(x)$ היא פונקציה בעלת מחזור $a (a \neq 0)$ ו- $g(x)$ פונקציה בעלת מחזור $b (b \neq 0)$ ואם $a : b = m : n$ (m, n מספרים טבעיים) הרי na הוא מחזור (na לא דוקא המחזור הקטן ביותר) של הפונקציות $f(x)/g(x)$, $[f(x)]^n$, $f(x)g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$ (כאשר $g(x) \neq 0$).

ה.193. היעזר במשפטים לעיל על מנת למצוא את המחזור החיובי הקטן ביותר של הפונקציות הבאות:

$$y = \tan 2x + \cot x - 2 \quad (\text{ב}) \quad y = \sin 5x - \sin 2x \quad (\text{א})$$

$$y = 2 \sin 2x \sin 3x \quad (\text{ד}) \quad y = \cos x + \sqrt{2 \cos 3x + 4} \quad (\text{ג})$$

$$y = 5 \sin 2x \cos^2 6x \quad (\text{ו}) \quad y = \cos x \sin 5x + 3 \quad (\text{ה})$$

$$y = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{6}) + \cos^5 6x \quad (\text{ח}) \quad y = \sin^3 \frac{1}{2}x - \sin^5 \frac{1}{3}x \quad (\text{ז})$$

$$y = 3 \tan^2 x - \sqrt[3]{2 \sin \frac{1}{3}x} \quad (\text{י}) \quad y = 6 \cos^3 2x + \cos(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\pi) \quad (\text{ט})$$

$$y = 2 \cot 3x + 2 \cot 2.4x \quad (\text{יב}) \quad y = \sin 5x - \sin 3x + \sin 2x \quad (\text{יא})$$

$$y = 3 \cos^4 x - \cos \frac{2}{3}x - 5 \quad (\text{יג})$$

ה.194. הוכח כי הפונקציה $y = \sin x + \sin(\pi x)$ אינה מחזורית.

רמז: אילו היה קיים מספר a השונה מאפס ועבורו

$\sin(x+a) + \sin[\pi(x+a)] = \sin x + \sin \pi x$ עבור כל x , היה מתקבל כי עבור כל x

$$\sin \frac{1}{2}a \cos(x + \frac{1}{2}a) + \sin \frac{1}{2}\pi a \cos \pi(x + \frac{1}{2}a) = 0$$

$$\sin \frac{1}{2}a = 0 = \sin \frac{1}{2}\pi a$$

אם

עבור כל x נכון

$$\frac{\cos[\pi(x + \frac{1}{2}a)]}{\cos(x + \frac{1}{2}a)} = - \frac{\sin(\frac{1}{2}a)}{\sin(\frac{1}{2}\pi a)}$$

כלומר אגף שמאל בשוויון זה חייב להיות מספר קבוע, אך קל

להראות כי אגף שמאל מקבל ערכים שונים עבור x -ים שונים, למשל

$$x = -\frac{1}{2}a \quad \text{ועבור} \quad x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \quad \text{השלם את הפרטים החסרים}$$

בהוכחה זו!

תשובות

- 3.א. $0.5\sqrt{3}$ (א) $0.5\sqrt{2}$ (ב) 0.5 (א)
- 8.א. $c \sin \alpha, c \sin (90^\circ - \alpha)$
- 9.א. $\frac{a}{\sin \alpha}; \frac{a \sin (90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$
- 10.א. 21.43 מ' ; 23.67 מ' (א) 11.48 ; $73^\circ 3'$; $16^\circ 57'$ (א) 32.21 מ' ; 39.91 מ' (ב)
- 11.א. $35^\circ 52'$; $72^\circ 4'$; $72^\circ 4'$ (א) 6.784 ; $87^\circ 56'$; $2^\circ 4'$ (ב)
- 12.א. $2b \sin \frac{\alpha}{2}; b^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin (90^\circ - \frac{\alpha}{2})$
- 13.א. 38.48 סמ"ר ; 5.21 סמ"ר (א) 2.107 מ"ר ; 1.645 מ' (ב)
- 14.א. 31.6 סמ"ר (א) 131 סמ"ר (ב)
- 15.א. 10.44 מ' (א) 8.455 מ' (ב)
- 16.א. 7.086 מ' (א) 40.46 סמ"ר (ב)
- 17.א. $18^\circ 18'$ (א) $72^\circ 42'$ (ב)
- 18.א. 42.5 סמ"ר ; 10.12 סמ"ר
- 19.א. 28.37 סמ"ר ; 22.74 סמ"ר ; 27.51 סמ"ר ; 290 סמ"ר
- 20.א. 7.247 סמ"ר ; 10.05 סמ"ר ; 12.27 סמ"ר ; 36.4 סמ"ר
- 21.א. 70.53 סמ"ר ; 342.4 סמ"ר (א) 8.511 סמ"ר ; 13.3 סמ"ר (ב)
- 22.א. 226.8 מ' ; 3997 מ"ר (א) 225.4 מ"ר ; 53.78 מ' (ב)
- 23.א. 374 סמ"ר (א) 9651 סמ"ר (ב) 370.3 סמ"ר (ג)
- 24.א. 1306 סמ"ר
- 25.א. 4.474 סמ"ר (א) 17.11 סמ"ר (ב)
- 26.א. $47^\circ 8'$ (א) $98^\circ 2'$ (ב)
- 27.א. $ab \sin \gamma$ (א) 90 סמ"ר (ב) 0.5119 מ"ר
- 28.א. 24.13 סמ"ר ; 6.465 סמ"ר (א) 1.973 מ' ; 5.421 מ' (ב)
- 29.א. 28.58 סמ"ר ; 16.5 סמ"ר ; 471.5 סמ"ר
- 30.א. 6.963 מ' ; 2.017 מ' ; 14.04 מ"ר
- 31.א. $43^\circ 48'$; $136^\circ 12'$; 50.49 סמ"ר
- 32.א. 8.75 סמ"ר ; 420 סמ"ר ; 224 סמ"ר
- 33.א. 100 סמ"ר ; 15.87 סמ"ר ; 23.31 סמ"ר ; 365.6 סמ"ר
- 34.א. $2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}; \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$
- 35.א. $\frac{nP}{\pi} \sin \frac{180^\circ}{n}; \frac{nP^2}{8\pi^2} \sin \frac{360^\circ}{n}$

$$\sin^3 \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) ; \sin \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) \quad .36.א$$

$$\frac{nS}{2\pi} \sin \frac{360^\circ}{n} \quad .37.א$$

$$מ"ס 10.76 \quad .40.א \quad 'מ 2.66 ; 'מ 4.39 \quad .39.א$$

$$0.5 \quad (ד) \quad 0.644 \quad (ג) \quad 0.688 \quad (ב) \quad \frac{1}{2} \quad (א) ; \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} \quad .41.א$$

$$\sqrt{3} \quad (ג) \quad 1 \quad (ב) \quad \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad .43.א \quad מ"ס 54.51 \quad .42.א$$

$$מ"ס 55.38 ; מ"ס 78.98 \quad (א) \quad .51.א \quad 2\frac{11}{12} ; 2\frac{12}{37} \quad .50.א$$

$$4^\circ 31' \quad (ג) \quad 33^\circ 25' \quad (א) \quad .53.א \quad 'מ 1.012 \quad (ב) \quad מ"ס 50.58 \quad .52.א$$

$$מ"ר 41.78 \quad (ב) \quad מ"ר 20.09 \quad (א) \quad h^2 \tan \frac{\alpha}{2} \quad .54.א$$

$$מ"ר 42.53 ; 'מ 24.24 \quad (ב) \quad מ"ר 523.5 ; 'מ 87.2 \quad (א) \quad .55.א$$

$$מ"ר 105.7 ; מ"ס 37.76 \quad (ד) \quad מ"ר 56.25 ; מ"ס 27.3 \quad (ג) \quad .56.א$$

$$'מ 39.58 \quad .58.א \quad 'מ 121.2 \quad .57.א \quad 28^\circ 4' \quad .56.א$$

$$56^\circ 36' \quad .60.א \quad 'מ 8.475 ; 19^\circ 17' \quad .59.א$$

$$'מ 1901 \quad .62.א \quad 'מ 1.443 \quad \frac{m \tan \alpha}{\tan \beta} \quad .61.א$$

$$'מ 1660 ; 12^\circ 32' \quad .63.א$$

$$69^\circ 14' ; 54^\circ 31' \quad .65.א \quad מ"ס 89.2 \quad .64.א$$

$$'מ 8.25 ; 'מ 38.54 \quad .67.א \quad 19^\circ 48' \quad מורחית מצפון \quad .66.א$$

$$מ"ק 8.41 \quad .70.א \quad 'מ 96.3 \quad .69.א \quad 532 \quad מטרים בשניה \quad .68.א$$

$$22^\circ 50' ; 28^\circ 4' ; 22^\circ 50' \quad .72.א \quad 'מ 12.84 \quad .71.א$$

$$מ"ס 11.52 \quad .73.א$$

$$\frac{h \tan \frac{\beta}{2}}{\tan \beta} \quad (ג) \quad b \sin \frac{\alpha}{2} \tan \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \quad (ב) ; \frac{a}{2} \tan \frac{\beta}{2} \quad (א) \quad .74.א$$

$$\frac{\sqrt{2S \tan \alpha}}{\sin \alpha} ; \sqrt{2S \tan \alpha} ; \sqrt{\frac{2S}{\tan \alpha}} \quad .75.א$$

$$מ"ס 2.941 ; 71^\circ 47' \quad .77.א \quad 60^\circ 57' ; 29^\circ 3' \quad .76.א$$

$$75^\circ 31' \quad (ב) \quad 4.508a^2 ; 75^\circ 31' \quad (א) \quad .80.א$$

$$0.5 \quad (ג) \quad 0.5 \sqrt{2} \quad (ב) \quad 0.5 \sqrt{3} \quad (א) \quad .84.א$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} \quad (ג) \quad 1 \quad (ב) \quad \sqrt{3} \quad (א) \quad .85.א$$

$$\frac{1}{2} b^2 \tan \alpha \quad (ג) \quad \frac{1}{2} a^2 \cot \alpha \quad (ב) \quad \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (א) \quad .86.א$$

$$\frac{1}{2} |^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha \quad (ד) \quad 2m^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (ה) \quad \frac{h^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (ו) \quad .87.א$$

$$\frac{1}{2} a^2 \cot \frac{\alpha}{2} \quad (\lambda) \quad b^2 \sin \beta \cos \beta \quad (\lambda) \quad \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha \quad (\lambda) \quad .87. \lambda$$

$$h^2 \cot \beta \quad (\lambda) \quad h^2 \tan \frac{\alpha}{2} \quad (\lambda) \quad \frac{1}{2} a^2 \tan \beta \quad (\lambda)$$

$$k^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (\lambda) \quad a^2 \tan \varphi \quad (\lambda) \quad .88. \lambda$$

$$k^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (\lambda) \quad \frac{1}{2} k^2 \sin \epsilon \quad (\lambda)$$

$$\frac{1}{2} kl \sin \varphi \quad (\lambda) \quad ak \sin \varphi \quad (\lambda) \quad ab \sin \alpha \quad (\lambda) \quad .89. \lambda$$

$$\frac{1}{2} k^2 \cot \frac{\alpha}{2} \quad (\lambda) \quad \frac{4r^2}{\sin \alpha} \quad (\lambda) \quad a^2 \sin \alpha \quad (\lambda) \quad .90. \lambda$$

$$\frac{1}{2} l^2 \tan \frac{\alpha}{2} \quad (\lambda)$$

$$h(a + h \cot \alpha) \quad (\lambda) \quad \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \tan \alpha \quad (\lambda) \quad .91. \lambda$$

$$\frac{1}{2} k^2 \sin (180^\circ - 2\varphi) \quad (\lambda) \quad k^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (\lambda)$$

$$\frac{1}{2} (a^2 - b^2) \cot \frac{\alpha}{2} \quad (\lambda)$$

$$I = \frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = m'' 10.23 \quad .92. \lambda$$

$$S = \frac{k^2}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = m'' 17.88$$

$$S = \frac{h^2 (1 + \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = m'' 193 \quad .94. \lambda$$

$$S = \frac{a^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha) = m'' 451.6 \quad .95. \lambda$$

$$b^2 \sin^2 \alpha \tan \alpha \quad (\lambda) \quad k^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (\lambda) \quad .96. \lambda$$

$$a^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha \quad (\lambda)$$

$$S = k^2 \cot \alpha = m'' 140.1 \quad .97. \lambda$$

$$m'' 111.1 \quad (\lambda) \quad m'' 9.688 \quad (\lambda) \quad m'' 55.55 \quad (\lambda) \quad .98. \lambda$$

$$53^\circ 8' \quad .100. \lambda \quad 74^\circ 20' \quad .99. \lambda$$

$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	.109. \lambda
0.6	$1 \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	(\lambda)
$\frac{9}{41}$	$4 \frac{4}{9}$	$\frac{9}{40}$	(\lambda)
$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{24}$	$3 \frac{3}{7}$	(\lambda)
$\frac{15}{17}$	$\frac{8}{15}$	$1 \frac{7}{8}$	(\lambda)

$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cot \alpha$
0.6	0.8	$1\frac{1}{3}$
$\frac{11}{61}$	$\frac{60}{61}$	$5\frac{5}{11}$
$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{41}$	$4\frac{1}{9}$
$\frac{15}{17}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{15}$

.110.ж

(ж)

(ж)

(ж)

(ж)

$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\frac{12}{13}$	$2\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{13}{85}$	$\frac{13}{84}$	$6\frac{6}{13}$
$\frac{1}{4}\sqrt{15}$	$\sqrt{15}$	$\frac{\sqrt{15}}{15}$
$\frac{1}{4}\sqrt{7}$	$\frac{1}{3}\sqrt{15}$	$\frac{3}{7}\sqrt{7}$

.111.ж

(ж)

(ж)

(ж)

(ж)

$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$\frac{112}{113}$	$\frac{15}{113}$	$7\frac{7}{15}$
$\frac{1}{10}\sqrt{10}$	$\frac{3}{10}\sqrt{10}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{1}{5}\sqrt{5}$	2
$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}+1$

.112.ж

(ж)

(ж)

(ж)

(ж)

$\cot \alpha$ (ж) $\tan \alpha \cdot \tan \beta$ (ж) $2 \sec \varphi$ (ж) .118.ж
 $\sin \beta + \cos \beta$ (ж)

$\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}$ (ж) $\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}$ (ж) $\sqrt{1-n^2}$ (ж) .119.ж

$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ (ж) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ (ж) .120.ж

$\frac{1}{2}$ (ж) 4 (ж) $\frac{1}{2}$ (ж) 1 (ж) .124.ж

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} ; \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} .125.א$$

$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sin 22^\circ 30' = \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2}} ; \cos 22^\circ 30' = \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}} .126.א$$

$$\tan 22^\circ 30' = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{10\pi}{27} \text{ א } \frac{\pi}{12} \text{ ב } \frac{\pi}{24} \text{ ג } \frac{5\pi}{12} \text{ ד } \frac{\pi}{8} \text{ ה } \frac{\pi}{9} \text{ ו } .136.א$$

$$53^\circ 28' \text{ א } 126^\circ \text{ ב } 189^\circ \text{ ג } 36^\circ \text{ ד } 135^\circ \text{ ה } .137.א$$

$$220^\circ \text{ ו }$$

$$\frac{1}{2} \text{ א } \frac{1}{2} \text{ ב } 1 \text{ ג } \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ ד } \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ ה } \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ ו } .138.א$$

$$0^\circ \leq \alpha \leq 31^\circ \text{ א } 0^\circ \leq \alpha \leq 14^\circ \text{ ב } 0^\circ \leq \alpha \leq 9^\circ \text{ ג } .144.א$$

$$0^\circ \leq \alpha \leq 21^\circ \text{ א } 0^\circ \leq \alpha \leq 10^\circ \text{ ב } 0^\circ \leq \alpha \leq 6^\circ \text{ ג } .145.א$$

$$502 \text{ א } 2.62 \text{ ב } 32' .147.א$$

$$ק"מ לשעה 10.35 .151.א 4.3' , מ' 17.45 .150.א$$

$$x = \frac{\pi}{6} \sim 0.52 .156.א \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ א } \frac{1}{2} \text{ ב } 3 \text{ ג } \frac{1}{2} \text{ ד } .155.א$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} \sim 0.785 , x_1 = \frac{\pi}{6} \sim 0.52 .157.א$$

$$x \sim 1.1' .158.א$$

תשובות לפרק ב'

	sin	cos	tan	cot	
(א)	100°	sin 80°	-cos 80°	-tan 80°	-cot 80°
(ב)	200°	-sin 20°	-cos 20°	tan 20°	cot 20°
(ג)	250°	-sin 70°	-cos 70°	tan 70°	cot 70°
(ד)	350°	-sin 10°	cos 10°	-tan 10°	-cot 10°
(ה)	400°	sin 40°	cos 40°	tan 40°	cot 40°
(ו)	500°	sin 40°	-cos 40°	-tan 40°	-cot 40°
(ז)	1000°	-sin 80°	cos 80°	-tan 80°	-cot 80°
(ח)	-100°	-sin 80°	-cos 80°	tan 80°	cot 80°
(ט)	-200°	sin 20°	-cos 20°	-tan 20°	-cot 20°

12

	sin	cos	tan	cot		
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	(א	2ב
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	(ב	
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	(ג	
0°	0	1	0	∞	(ד	
90°	1	0	∞	0	(ה	
180°	0	-1	0	∞	(ו	
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	(ז	
270°	-1	0	∞	0	(ח	
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	(ט	
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	(י	
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	(יא	
405°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	(יב	

$$\begin{array}{ccccccc}
 \sqrt{3} & (7 & 1 & (2 & -\frac{1}{3} & (3 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & (4 & 3.3 \\
 \frac{\sqrt{3}}{3} & (5 & \frac{\sqrt{3}}{3} & (1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & (1 & 1 & (7 \\
 -\tan \alpha & (7 & \cot \alpha & (2 & -\cos \alpha & (3 & \cos \alpha & (4 & 7.2 \\
 -\cot \alpha & (7 & -\tan \alpha & (1 & -\sin \alpha & (1 & -\sin \alpha & (7
 \end{array}$$

sin α	cos α	tan α	cot α		
-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	(א	10.3
0.5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	(ב	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	(ג	
-0.5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	(ד	

11. ב. א) $-\frac{3}{7}$ (ב) $\frac{8}{128}$
12. ב. א) $150^\circ + 360^\circ k$; $30^\circ + 360^\circ k$ (ב) $210^\circ + 360^\circ k$; $330^\circ + 360^\circ k$ (ג) $180^\circ k$ (ד) $90^\circ + 360^\circ k$ (ה) $270^\circ + 360^\circ k$ ו) אין זווית כזאת
13. ב. א) $\pm 60^\circ + 360^\circ k$ (ב) $\pm 120^\circ + 360^\circ k$ (ג) $90^\circ + 360^\circ k$ (ד) $360^\circ k$ (ה) $180^\circ + 360^\circ k$ ו) אין זווית כזאת
14. ב. א) $45^\circ + 180^\circ k$ (ב) $135^\circ + 180^\circ k$ (ג) $180^\circ k$ (ד) $60^\circ + 180^\circ k$ (ה) $120^\circ + 180^\circ k$ (ו) $90^\circ + 180^\circ k$
15. ב. א) $45^\circ + 180^\circ k$ (ב) $135^\circ + 180^\circ k$ (ג) $90^\circ + 180^\circ k$ (ד) $30^\circ + 180^\circ k$ (ה) $150^\circ + 180^\circ k$ (ו) $180^\circ k$
19. ב. א) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (ב) $-\infty < x < +\infty$ (ג) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ (ד) $-\infty < x < +\infty$ (ה) $-\infty < x < +\infty$ (ו) $-\infty < x < +\infty$ (ז) $-\infty < x < +\infty$ (ח) $k\pi$ (ט) $-\infty < x < +\infty$ (י) $-\infty < x < +\infty$
20. ב. א) π (ב) 4π (ג) $\frac{\pi}{3}$ (ד) 2π (ה) 4π (ו) 3π
21. ב. הזוויות הן: א ; ג ; ד ; ה
26. ב. א) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ (ב) $2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (ג) $x \neq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ (ד) $-\infty < x < +\infty$ (ה) $2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (ו) $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ (ז) $x = 2k\pi$ (ח) אין פתרון (ט) $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ (י) $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{3}$
27. ב. א) $k\pi - \frac{\pi}{12} < x < k\pi + \frac{7\pi}{12}$ (ב) $\frac{2\pi}{9} (3k-2) < x < \frac{2k\pi}{3}$ (ג) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{16} < x < k\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (ד) $\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{30} < x < \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{30}$
28. ב. א) $\cos \alpha$ (ב) $-\sqrt{2} \sin \alpha$ (ג) $\sqrt{3}$ (ד) $-\sin 2\alpha$ (ה) $\sin \alpha$ (ו) $\sqrt{3}$
29. ב. $\frac{56}{65}$; $-\frac{16}{65}$; $-\frac{33}{65}$; $\frac{63}{65}$; $\frac{44}{125}$; $\frac{84}{205}$; $\frac{32}{205}$

$$\begin{aligned}
& \frac{3+\sqrt{13}}{8} .36. \quad \frac{7}{34} \sqrt{2} ; \frac{23}{34} \sqrt{2} .35. \quad \frac{3+4\sqrt{3}}{10} .34. \\
& \sim \frac{297}{425} ; -\frac{87}{425} .38. \quad \sqrt{6}-\frac{1}{2} .37. \\
& \frac{63}{65} .42. \quad \frac{1}{12} (\pm 2\sqrt{30}-1) .39. \\
& \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} (\text{ב}) \quad \frac{1}{3} \sqrt{6} (\text{א}) .44. \\
& \frac{7}{24} .49. \quad \frac{39}{43} ; \frac{11}{57} .47. \quad 1\frac{1}{2} ; 8 .46. \quad \frac{25}{19} ; \frac{5}{31} .45. \\
& \frac{7}{24} .53. \quad \frac{7}{17} .52. \quad -3\sqrt{3} .51. \quad -\frac{4}{7} .50. \\
& \tan 2\alpha (\text{ד}) \quad \tan (45^\circ + \alpha) (\text{ג}) \quad \cot \alpha (\text{ב}) \quad \tan \alpha (\text{א}) .55. \\
& -\frac{336}{625} ; \frac{527}{625} (\text{ב}) \quad \frac{336}{625} ; \frac{527}{625} (\text{א}) .56. \\
& -\frac{2}{3} \sqrt{2} ; -\frac{1}{3} .59. \quad \frac{4}{9} \sqrt{5} ; -\frac{1}{9} .58. \quad \frac{24}{7} .57. \\
& \frac{9}{41} .61. \quad \sqrt{5} ; \sqrt{\frac{5}{6}} .60. \\
& 2 (\text{ו}) \quad \frac{1}{2} (\text{ה}) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} (\text{ד}) \quad -\sqrt{3} (\text{ג}) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} (\text{ב}) \quad 1 (\text{א}) .62. \\
& \frac{3\sqrt{5}+8}{15} ; \frac{20-2\sqrt{5}}{45} .65. \quad \frac{1}{2} .63. \\
& \sin 10^\circ (\text{ד}) \quad \sin 70^\circ (\text{ג}) \quad \sin 27^\circ (\text{ב}) \quad \cos 20^\circ (\text{א}) .66. \\
& \frac{1}{7} \sqrt{7} .71. \quad 5 .70. \quad \frac{2}{5} ; \frac{\sqrt{21}}{5} .69. \quad \frac{1}{2} .68. \\
& -\frac{\sqrt{5}}{5} .73. \quad 3-2\sqrt{2} (\text{ב}) \quad \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}} (\text{א}) .72. \\
& \frac{1}{2} .76. \quad \frac{2}{\sqrt{13}} .75. \quad \sqrt{2} .74. \\
& \tan 24^\circ (\text{ד}) \quad \tan 51^\circ (\text{ג}) \quad \tan \frac{3\alpha}{2} (\text{ב}) \quad \cos 2\alpha (\text{א}) .77. \\
& \cot (\alpha + \beta) (\text{ג}) \quad -\cot 20^\circ \cot 5^\circ (\text{ב}) \quad \frac{\tan 20^\circ}{\tan 5^\circ} (\text{א}) .81. \\
& -\tan (\alpha + 45^\circ) (\text{ד}) \quad 2\cos 31^\circ (\text{ו}) \quad \frac{\cos 9^\circ}{\cos 64^\circ} (\text{ה}) \quad \tan \alpha (\text{א}) \\
& \frac{1}{2} (\text{ב}) \quad \frac{1}{2} (\text{א}) .87. \quad \pm \frac{\cos (A \mp B)}{\cos A \sin B} ; \frac{\sin (B \pm A)}{\sin A \sin B} .84. \\
& \frac{m + \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{2}} .92. \quad -\frac{1}{2} .91. \quad \frac{a^2-1}{2a} .88. \\
& \pm \sqrt{1+m^2} - m .107. \quad -0.96 .95. \\
& 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} ; 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} .115. \quad \frac{1}{2} \text{ או } \frac{1}{2} .108. \\
& 120^\circ k + 25^\circ ; 120^\circ k + 75^\circ .187. \\
& x = 40^\circ - 360^\circ k .189. \quad 72^\circ k + 10^\circ ; 72^\circ k - 18^\circ .188.
\end{aligned}$$

- $45^\circ k$.191.ב $360^\circ k - 15^\circ$; $360^\circ k + 205^\circ$.190.ב
 $120^\circ k \pm 50^\circ$.193.ב $360^\circ k + 60^\circ$; $360^\circ k + 120^\circ$.192.ב
 $180^\circ k \pm 30^\circ$.195.ב $90^\circ k + 67\frac{1}{2}^\circ$.194.ב
 $360^\circ k + 240^\circ$; $360^\circ k$.197.ב $150^\circ + 180^\circ k$.196.ב
 $240^\circ k + 20^\circ$.199.ב $132^\circ + 180^\circ k$.198.ב
 $15^\circ k + 5^\circ$.201.ב $90^\circ k + 40^\circ$.200.ב
; $\alpha + \beta = 360^\circ k + 180^\circ$; $\alpha = \beta + 360^\circ k$.202.ב
 $72^\circ k + 36^\circ$; $360^\circ k$
 $\alpha - \beta = 360^\circ k + 180^\circ$; $\alpha + \beta = 360^\circ k$.203.ב
 $240^\circ k + 120^\circ$; $144^\circ k$
 $180^\circ k - 60^\circ$; $90^\circ k + 30^\circ$; $\alpha \pm \beta = 360^\circ k + 90^\circ$.204.ב
 $60^\circ k$; $180^\circ k + 15^\circ$; $\alpha \pm \beta = 360^\circ k$.205.ב
 $90^\circ k + 11\frac{1}{2}^\circ$; $\alpha - \beta = 180^\circ k$.206.ב
 $67\frac{1}{2}^\circ k + 33\frac{1}{2}^\circ$; $\alpha + \beta = 180^\circ k$.207.ב
 $120^\circ k - 20^\circ$; $\alpha + \beta = 90^\circ + 180^\circ k$.208.ב
 $180^\circ k$; $360^\circ k \pm 30^\circ$.210.ב $90^\circ + 180^\circ k$.209.ב
 $360^\circ k$.213.ב $360^\circ k \pm 60^\circ$.212.ב $360^\circ k \pm 128^\circ$.211.ב
 $45^\circ + 90^\circ k$.215.ב $45^\circ + 180^\circ k$; $78^\circ 41' + 180^\circ k$.214.ב
 $22\frac{1}{2}^\circ + 90^\circ k$; $45^\circ + 90^\circ k$.217.ב $30^\circ k + 15^\circ$.216.ב
 $360^\circ k$; $360^\circ k + 90^\circ$.218.ב
 $180^\circ k + 90^\circ$; $90^\circ k + 22\frac{1}{2}^\circ$.219.ב
 $45^\circ + 60^\circ k$; $3^\circ + 36^\circ k$; $15^\circ + 36^\circ k$.220.ב
 $72^\circ k \pm 12^\circ$.222.ב $180^\circ k$; $90^\circ k + 45^\circ$.221.ב
 $120^\circ k + 15^\circ$.224.ב $360^\circ k \pm 29^\circ$; $360^\circ k \pm 125^\circ$.223.ב
 $90^\circ k + 37\frac{1}{2}^\circ$; $90^\circ k + 7\frac{1}{2}^\circ$.225.ב
; $180^\circ k + 63^\circ 26'$. $\cos^2 x$ ב־ שני האגפים .226.ב הדרכה: חלק
 $60^\circ k + 45^\circ$.228.ב $180^\circ k \pm 45^\circ$.227.ב $180^\circ k + 45^\circ$
 $60^\circ + 90^\circ k$; $20^\circ + 60^\circ k$.230.ב $180^\circ k$; $180^\circ k - 60^\circ$.229.ב
 $180^\circ k + 45^\circ$ $360^\circ k + 15^\circ$; $360^\circ k - 105^\circ$.231.ב
 $180^\circ k$; $90^\circ k + 67^\circ 30'$.232.ב
 $120^\circ k$; $360^\circ k + 270^\circ$; $180^\circ k + 45^\circ$.233.ב
 $90^\circ + 180^\circ k$; $90^\circ k \pm 15^\circ$.235.ב $60^\circ k$.234.ב
 $60^\circ k$.237.ב $15^\circ + 120^\circ k$; $45^\circ + 120^\circ k$.236.ב
 $40^\circ k$; $45^\circ k$.239.ב $360^\circ k$; $360^\circ k + 120^\circ$.238.ב
 $360^\circ k$; $180^\circ k - 45^\circ$; $360^\circ k - 90^\circ$.240.ב

$360^\circ k \pm 60^\circ$.242.ב
 $180^\circ k + 90^\circ$; $360^\circ k \pm 60^\circ$.243.ב
 $22\frac{1}{2}^\circ k$.הדרכה: להפוך מכפלות לסכומים. .244.ב
 $36^\circ k$; $180^\circ k + 90^\circ$.245.ב
 $180^\circ k$.248.ב $180^\circ k + 90^\circ$; $\frac{1}{11} (180^\circ k + 90^\circ)$.247.ב
 $45^\circ k$; $22\frac{1}{2}^\circ k + 11\frac{1}{2}^\circ$.249.ב
 $22\frac{1}{2}^\circ k$.251.ב $90^\circ k + (-1)^4 22\frac{1}{2}^\circ - 34^\circ$.250.ב
 $180^\circ k + 45^\circ$; $180^\circ k$.253.ב $90^\circ k + 30^\circ$.252.ב
 $15^\circ + 30^\circ k$; $60^\circ k$.255.ב $180^\circ k - 45^\circ \pm 60^\circ$.254.ב
 $180^\circ k \pm 60^\circ$.257.ב $180^\circ k$; $180^\circ k + 45^\circ$.256.ב
 $360^\circ k$; $720^\circ k + 540^\circ$.259.ב $90^\circ k + 45^\circ$.258.ב
 $180^\circ k \pm 45^\circ$.260.ב
 $180^\circ k + 45^\circ$; $360^\circ k + 90^\circ$; $360^\circ k$.261.ב
 $90^\circ + 360^\circ k$.263.ב $180^\circ k$; $360^\circ k + 90^\circ$.262.ב
.264.ב אין פתרון .265.ב הדרכה: $\tan 37^\circ = \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ}$; מקבילים.
 $8^\circ + 180^\circ k$, $45^\circ + 180^\circ k$. $\sin(2x + 37^\circ) = \cos 37^\circ$
 $180^\circ k + 27^\circ$.267.ב $22\frac{1}{2}^\circ + 90^\circ k$, $22\frac{1}{2}^\circ + 90^\circ k + \frac{\pi}{2}$.266.ב
 $45^\circ k + 22\frac{1}{2}^\circ$; $120^\circ k \pm 20^\circ$.269.ב $90^\circ k + \frac{\pi}{2}$.268.ב
 $180^\circ k + 90^\circ$; $90^\circ k + 45^\circ$.270.ב
 $k + 45^\circ$; $360^\circ k$; $360^\circ k + 90^\circ$.271.ב
 $90^\circ k - 22\frac{1}{2}^\circ$.273.ב $360^\circ k \pm 120^\circ$; $180^\circ k - 45^\circ$.272.ב
 $90^\circ k + 45^\circ$; $180^\circ k \pm 30^\circ$.275.ב $180^\circ k$; $180^\circ k + 45^\circ$.274.ב
 $180^\circ k$; $60^\circ k + 30^\circ$.276.ב
 $180^\circ k + 135^\circ$; $180^\circ k \pm 53^\circ 8'$.277.ב
 $60^\circ k$.279.ב $180^\circ k$; $45^\circ k + 22\frac{1}{2}^\circ$.278.ב
 $360^\circ k + 90^\circ$.281.ב $180^\circ k + 90^\circ$.280.ב
 $180^\circ k + 35^\circ$; $180^\circ k + 45^\circ$.282.ב
 $60^\circ k$.284.ב $360^\circ k$; $720^\circ k \pm 120^\circ$.283.ב
 $120^\circ k + 60^\circ$; $180^\circ k + 90^\circ$.285.ב
 $60^\circ k$; $360^\circ k - 90^\circ$; $72^\circ k - 18^\circ$.286.ב
 $180^\circ \pm 30^\circ$; $180^\circ k \pm 60^\circ$.288.ב $180^\circ k \pm 45^\circ$.287.ב
; הדרכה: $60^\circ k + 30^\circ$, $90^\circ k + 45^\circ$.289.ב
 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$; $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$
 $360^\circ k + 45^\circ$; $360^\circ k + 165^\circ$; $360^\circ k - 75^\circ$.290.ב

- ב.291. $180^\circ k + 45^\circ$; $180^\circ k - 22\frac{1}{2}^\circ$; $180^\circ k + 67\frac{1}{2}^\circ$
 ב.292. $x_1 = 45^\circ + 180^\circ k$; $y_1 = -180^\circ k$
 ; $x_2 = 180^\circ k$; $y_2 = 45^\circ - 180^\circ k$
 ב.293. $x_1 = 180^\circ k + 60^\circ$; $y_1 = 90^\circ - 180^\circ k$
 $x_2 = 180^\circ k + 90^\circ$; $y_2 = 60^\circ - 180^\circ k$
 ב.294. $x = 30^\circ + 180^\circ k$; $y = 30^\circ - 180^\circ k$
 ב.295. $x = 180^\circ k \pm 60^\circ$; $y = 360^\circ k \pm 30^\circ$
 ב.296. $75^\circ 31'$; $28^\circ 58'$ ב.297. $58^\circ 17'$ ב.298. 30° ; 60°
 ב.299. 30° ; 60° ב.300. $38^\circ 10'$; $51^\circ 50'$ ב.301. 30°
 ב.302. $29^\circ 58'$ או $86^\circ 8'$ ב.303. $40^\circ 22'$ ב.304. $20^\circ 24'$
 ב.305. $47^\circ 23'$ ב.306. $33^\circ 10'$ ב.307. $26^\circ 34'$
 ב.308. $40^\circ 54'$; $19^\circ 6'$ ב.309. 30°
 ב.310. א) $0^\circ < x < 60^\circ$ או $180^\circ < x < 300^\circ$
 ב) $0^\circ < x < 90^\circ$ או $270^\circ < x < 360^\circ$
 ג) $0^\circ < x < 90^\circ$
 ד) $0^\circ < x < 45^\circ$ או $180^\circ < x < 225^\circ$
 או $90^\circ < x < 135^\circ$ או $270^\circ < x < 315^\circ$
 ב.311. א) $40^\circ < x < 160^\circ$ או $240^\circ < x < 280^\circ$
 ב) $30^\circ < x < 45^\circ$ או $210^\circ < x < 225^\circ$
 או $135^\circ < x < 150^\circ$ או $315^\circ < x < 330^\circ$
 ג) $15^\circ \leq x \leq 255^\circ$ (ד) $0^\circ < x < 360^\circ$
 ב.312. $330^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, או $150^\circ \leq \alpha \leq 210^\circ$, או $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$
 ב.314. $\frac{\alpha}{7} < \frac{1}{2}$, כל' $\alpha < 53^\circ 8'$
 ב.315. $120^\circ < \alpha < 180^\circ$ ב.316. $\alpha < 60^\circ$
 ב.319. א) $30^\circ < \alpha < 60^\circ$; $30^\circ < \beta < 60^\circ$; $\alpha \neq 45^\circ$ (ב)

תשובות לפרק ג'

- ג.1. א) $2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$; 76.6 ס"מ ; 86.6 ס"מ ; 93.97 ס"מ
 ב) 2727 סמ"ר ג.2. 2 ס"מ ג.3. 118 ס"מ ; 142 ס"מ
 ג.4. 27.62 ס"מ ג.5. 59.53 ס"מ ; 45.87 ס"מ ; 515.6 סמ"ר
 ג.6. 9374 סמ"ר ג.7. $\frac{h_a \sin A}{2 \sin B \sin C}$; $\frac{h_a \sin A}{\sin B \sin C}$; 15370
 ג.8. 173 ס"מ ; 125 ס"מ ג.9. 21.12 סמ"ר
 ג.10. $5 + \sqrt{6}$ או $5 - \sqrt{6}$ ג.11. 1.3 ס"מ

$$m^{\circ} 20.3 ; m^{\circ} 55.9 ; m^{\circ} 66.16 ; a = \sqrt{\frac{2S \sin A}{\sin B \sin C}} \quad .12.g$$

$$S = r^2 \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} \right) \quad .14.g$$

$$S = r^2 \cot \frac{\alpha}{2} \cdot \cot \frac{\beta}{2} \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \quad \text{או} \quad .15.g$$

$$\frac{a \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \quad .16.g \quad \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \quad .17.g$$

$$\frac{h \sin (\beta - \alpha)}{\sin \beta \cos \alpha} \quad .18.g \quad \frac{1 \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta} \quad .19.g$$

$$67^{\circ} 23' ; 47^{\circ} 37' ; m^{\circ} 4.909 \quad (\text{א} \quad .23.g \quad \frac{m \sin (\gamma - \beta) \sin \alpha}{\sin (\gamma - \alpha)} \quad .24.g$$

$$m^{\circ} 49.4 \quad .25.g \quad 25^{\circ} 42' ; 22^{\circ} 18' ; m^{\circ} 6.855 \quad (\text{ב} \quad .26.g$$

$$135^{\circ} 20' \quad (\text{ב} \quad 80^{\circ} 24' \quad (\text{א} \quad .27.g \quad 46^{\circ} 39' ; 90^{\circ} 41' \quad .28.g$$

$$m^{\circ} 109.7 \quad .29.g \quad 129^{\circ} 24' \quad (\text{ב} \quad 79^{\circ} 40' \quad (\text{א} \quad .30.g$$

$$m^{\circ} 26.8 ; 67^{\circ} 24' \quad .31.g \quad m^{\circ} 943.2 \quad .32.g$$

$$m^{\circ} 23.02 \quad (\text{ב} \quad .33.g \quad m^{\circ} 12.16 \quad (\text{ב} \quad .34.g$$

$$m^{\circ} 103.3 \quad .35.g \quad m^{\circ} 19.7 \quad .36.g \quad 53^{\circ} 8' ; 30^{\circ} 31' \quad .37.g$$

$$26^{\circ} 20' ; 7^{\circ} 8.1 \quad .38.g \quad 3^{\circ} 37' ; 14^{\circ} \quad (\text{ק"מ} \quad .39.g$$

$$m^{\circ} 50 ; m^{\circ} 30 \quad .40.g \quad m^{\circ} 46.67 \quad .41.g \quad m^{\circ} 11.18 \quad .42.g$$

$$m^{\circ} 2685 \quad .43.g \quad m^{\circ} 5 \quad .44.g \quad m^{\circ} 4 \quad (\text{ב} \quad .45.g \quad m^{\circ} 8.125 \quad (\text{א} \quad .46.g$$

$$128^{\circ} 18' ; 31^{\circ} 18' ; 20^{\circ} 24' \quad .47.g \quad m^{\circ} 87 \quad .48.g$$

$$102^{\circ} 4' ; 40^{\circ} 42' \quad .49.g \quad m^{\circ} 3 ; m^{\circ} 7 \quad .50.g$$

$$R = \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}} \quad .51.g \quad m^{\circ} 8.5 ; m^{\circ} 7 \quad .52.g$$

$$m^{\circ} 74.03 \quad .53.g \quad m^{\circ} 23.87 \quad .54.g \quad m^{\circ} 67 \quad .55.g$$

$$m^{\circ} 65.15 \quad .56.g \quad \sqrt{24.1} \quad .57.g \quad m^{\circ} 124.2 \quad .58.g$$

$$m^{\circ} 32.31 \quad \text{או} \quad m^{\circ} 28 \quad .59.g \quad m^{\circ} 1.513 \quad \text{או} \quad 9.913 \quad .60.g$$

$$\frac{2}{\sin \alpha} \sqrt{m^2 + n^2 \pm 2mn \cos \alpha} ; \frac{4mn}{\sin \alpha} \quad .61.g$$

$$\frac{a^2 \sin \alpha}{5 - 4 \cos \alpha} \quad .62.g \quad m^{\circ} 0.4643 \quad .63.g$$

$$m \sin (\alpha + \beta) \quad .64.g \quad m^{\circ} 5.55 \quad .65.g$$

$$29^{\circ} 56' \quad .66.g \quad m^{\circ} 2.002 ; \pm 0.2 ; \pm 0.7143 \quad .67.g$$

$$m^{\circ} 39.44 ; m^{\circ} 1.7 \quad .68.g \quad m^{\circ} 30 \quad (\text{ב} \quad .69.g \quad 40.9^{\circ} ; 19.1^{\circ} \quad .70.g$$

$$\begin{aligned}
& 90^\circ ; 60^\circ ; 30^\circ .101.1 \qquad m''b \ 50.13 \ .97.1 \\
& 30^\circ .105.1 \qquad m''b \ 9.574 ; 33^\circ 34' \ .102.1 \\
& m^2 \cos^3 \alpha \sin \alpha .126.1 \qquad m''b \ 66.5 ; m''b \ 28.5 .117.1 \\
& \frac{m^2 \sin \alpha}{2 \cos^2 (45^\circ - \frac{\alpha}{2})} ; \frac{2\sqrt{2}m}{\cos (\frac{\alpha}{2} - 45^\circ)} .128.1 \\
& 60^\circ .146.1 \qquad \frac{4m^2 \sin \varphi \sin^3 (45^\circ - \frac{\varphi}{2})}{\cos^3 \varphi} .145.1 \\
& ab \sqrt{a^2 + b^2} \tan \alpha .148.1 \qquad 0.75 ; 0.75 ; -0.125 .147.1 \\
& a^2 (1 + \sqrt{1 + 2 \tan^2 \alpha}) ; \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \tan \alpha .149.1 \\
& 48^\circ 10' .152.1 \qquad 70^\circ 32' .151.1 \qquad \frac{5}{3} h^3 \tan^2 \alpha \sin 36^\circ .150.1 \\
& 78^\circ 21' ; 67^\circ 35' .156.1 \qquad 76^\circ 6' .154.1 \qquad 54^\circ 44' .153.1 \\
& 15R^2 \tan 12^\circ \sec \alpha ; 5R^3 \tan \alpha \tan 12^\circ .158.1 \qquad 72^\circ 32' .157.1 \\
& \frac{S \tan \alpha}{15} \sqrt{\frac{10S}{\sin 72^\circ}} .160.1 \qquad \frac{3S}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \sin 40^\circ \cot \alpha .159.1 \\
& \frac{5}{6} R^3 \sin 72^\circ \cos 36^\circ \cot \alpha .162.1 \qquad 2 \sqrt[3]{3V \tan \alpha} .161.1 \\
& \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi \sin 2\alpha \cos \alpha}} .167.1 \qquad 50^\circ 46' .164.1 \qquad 51^\circ 2' .163.1 \\
& \frac{M \cos \alpha}{3} \sqrt{\frac{M \sin \alpha}{\pi}} ; \sqrt{\frac{M}{\pi \sin \alpha}} \cdot \cos \alpha .168.1 \\
& p''m \ 782 .173.1 \qquad 68^\circ 50' .172.1 \\
& 2 : 9 ; \frac{3 \sin 2\alpha \cos \alpha}{(2 \sin \alpha + \cos \alpha)^3} .174.1 \\
& 0^\circ < \alpha \leq 45^\circ ; \frac{a^3 \sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha} .175.1 \\
& \frac{2}{3} \pi h^3 \cot^2 \alpha .181.1 \qquad \sqrt[3]{\frac{24 V \sin^2 36^\circ}{5 \cos 36^\circ \tan \alpha}} .176.1 \\
& \frac{2\pi h^3}{3 \sin 2\alpha \sin \alpha} .183.1 \\
& \frac{2\pi S}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) ; \frac{\pi}{3} S \sqrt{S \tan \frac{\alpha}{2}} .184.1 \\
& \frac{1}{2} a^3 \cos^3 \alpha \tan \beta .190.1 \qquad \frac{\pi a^3 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{3 \sin^2 (\beta + \gamma)} .185.1
\end{aligned}$$

$$\frac{a \sin \alpha}{2 \cos \beta} .198.1 \quad \frac{a}{1 + \sqrt{2} \cot \alpha} .194.1$$

$$p''m 134.4 ; S \sin \alpha \sqrt{S \sqrt{3} \cos \alpha} .201.1 ;$$

$$\frac{M \sqrt{2 \cos \alpha}}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} .202.1$$

$$45^\circ < \alpha < 90^\circ ; \frac{a^3 \sqrt{-\cos 2\alpha}}{4 \cos \alpha} .203.1$$

$$p''m 36 .209.1 \quad \frac{a^3 \sqrt{2 \cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} .206.1$$

$$\frac{1}{2} a^2 \tan \alpha .218.1 \quad a^2 \sin^3 \alpha .213.1$$

$$33^\circ 34' .220.1 \quad \frac{1}{3} a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 \cos \alpha + 1} .219.1$$

$$\frac{a^2}{4 \cos \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ)} .221.1$$

$$\frac{\tan \alpha}{4 \tan^3 \frac{\alpha}{2}} .233.1 \quad \frac{3h^2 \sin}{\sin(30^\circ + \alpha) \sin(30^\circ - \alpha)} .230.1$$

$$\frac{a^3 \sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} .245.1 \quad 82^\circ 47' .235.1$$

$$\alpha + \beta < 90^\circ ; \frac{h^3 \sin \beta}{\sin^2 \alpha} \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} .246.1$$

$$30^\circ < \alpha < 90^\circ ; \frac{a^3}{12 \cos \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ)} .249.1$$

$$\frac{h^3 \sqrt{3} \sin(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ) \sin(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} .251.1$$

$$\frac{\pi}{3} (a^3 - b^3) \tan \alpha ; \frac{2\pi}{\cos \alpha} (a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}) .252.1$$

תשובות לפרק ד'

$$\operatorname{cosec} \alpha \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} .1.7$$

$$m''m 121.2 ; m''m 124.3 ; m''m 57.18 .2.7$$

$$90^\circ \text{ או } 30^\circ .8.7 \quad 4 \sqrt{3} m^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} .4.7$$

$$79^\circ 25' ; 23^\circ 16' ; 77^\circ 19' .11.7$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{2 \sin(45^\circ + \frac{\alpha}{4}) \sin(45^\circ + \frac{3\alpha}{4})} = 114.3 \text{ מ"מ} \quad .12.7 \\
& 105^\circ ; 15^\circ \quad .14.7 \quad 15.7. \quad 21^\circ \text{ ט"מ} ; 19^\circ \text{ ט"מ} ; 16^\circ \text{ ט"מ} \\
& 74^\circ 53' \text{ או } 105^\circ 7' \quad .16.7 \quad \alpha = 360^\circ k, \beta = 360^\circ k \quad (\text{א} \quad .19.7) \\
& \alpha + \beta = 360^\circ k \quad (\text{ב} \quad \beta = 180^\circ k ; \beta = 180^\circ k \quad \text{א} \quad .23.7) \\
& \alpha + \beta = 180^\circ k \quad (\text{א} \quad .44.7 \quad 30^\circ \quad \tan 2x \quad (\text{ב} \quad -\tan x \quad (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2})) \\
& 1.9 \text{ רדיאנים} \quad (\text{ב} \quad 0.57 \text{ או } 1.75 \text{ או } 2.73 \text{ רדיאנים} \quad .45.7) \\
& 346^\circ 43' \text{ או } 119^\circ 35' \quad (\text{ב} \quad .51.7 \quad 55 ; 70 ; 199) \\
& 45^\circ + 180^\circ k \quad (\text{א} \quad .52.7 \quad 45^\circ (2k+1) - 5^\circ \quad (\text{ב} \quad 69^\circ (\text{ג} \quad 20^\circ + 180^\circ k \quad (\text{ה} \quad 2k\pi \pm \frac{1}{2}\pi \quad (\text{ד} \quad .53.7) \\
& x = R \sin(\varphi + \alpha) ; y = R \cos(\varphi - \alpha) \quad (\text{א} \quad .56.7 \quad 45^\circ) \\
& 330^\circ < \alpha < 360^\circ ; 0^\circ \leq \alpha < 210^\circ \quad (\text{ב} \quad .57.7 \quad 60^\circ) \\
& -45^\circ + 180^\circ k \leq \alpha \leq 45^\circ + 180^\circ k \quad (\text{א} \quad .58.7) \\
& -5 \leq \alpha \leq 5 \quad (\text{ב} \quad .61.7 \quad 1 \quad (\text{א} \quad 20 \quad (\text{ב} \quad \sqrt{3} \quad (\text{ג} \quad .64.7) \\
& \frac{2S \cos^2 \varphi}{\cos 2\varphi} \quad .67.7 \quad 30^\circ \quad .69.7 \quad 35^\circ 16' \quad (\text{ג} \quad .72.7) \\
& \frac{\alpha^2}{2} \quad (\text{ג} \quad \alpha \quad (\text{ב} \quad \alpha \quad (\text{א} \quad .72.7)
\end{aligned}$$

74.7. סכום ההיטלים של מספר וקטורים על ישר כל שהוא, שווה להיטל של הוקטור השקול כנגדם על אותו ישר.

תשובות לפרק ה'

$$\begin{aligned}
& \pi/2 \quad .17.ה \quad \pi/2 \quad .18.ה \quad \pi/2 \quad .19.ה \quad \pi/2 \quad .20.ה \quad 6\pi \\
& 63^\circ 26' \quad .29.ה \quad 70^\circ 32' \quad .28.ה \\
& 120^\circ n \quad (\text{א} \quad .31.ה) \quad \pm 75^\circ 31' + 360^\circ n ; 180^\circ + 360^\circ n \quad (\text{ב} \\
& \pm 120^\circ + 360^\circ n \quad (\text{ג} \quad 90^\circ + 360^\circ n ; 30^\circ + 360^\circ n \quad (\text{ד} \quad 60^\circ + 120^\circ n \quad (\text{ה} \quad 150^\circ + 360^\circ n \quad (\text{ו} \quad 45^\circ n ; 30^\circ n \quad (\text{ז} \quad 22^\circ 30' + 45^\circ n \quad (\text{ח} \quad 60^\circ n \quad (\text{ט} \quad 45^\circ + 180^\circ n ; 180^\circ n \quad (\text{י} \quad 180^\circ + 360^\circ n ; 90^\circ + 360^\circ n \quad (\text{יא} \quad 45^\circ + 180^\circ n ; 180^\circ n \quad (\text{יב} \quad 7^\circ 30' + 15^\circ n \quad (\text{יג} \quad \pm 30^\circ + 180^\circ n \quad (\text{יד} \quad 315^\circ ; 240^\circ ; 225^\circ ; 135^\circ ; 120^\circ ; 45^\circ \quad (\text{טו} \quad 45^\circ + 90^\circ n \quad (\text{טז} \quad 315^\circ ; 240^\circ ; 225^\circ ; 135^\circ ; 120^\circ ; 45^\circ \quad (\text{יז} \quad 90^\circ + 120^\circ n ; 180^\circ n \quad (\text{יח} \quad 105^\circ + 120^\circ n
\end{aligned}$$

- ; $159^{\circ}6' + 180^{\circ}n$; $15^{\circ} + 180^{\circ}n$; $75^{\circ} + 180^{\circ}n$ (ט)
 $30^{\circ} + 60^{\circ}n$ (ז) $110^{\circ}54' + 180^{\circ}n$
 $45^{\circ} + 90^{\circ}n$; $60^{\circ}n$ (כב) $22^{\circ}30' + 90^{\circ}n$ (כא)
 $108^{\circ}26' + 180^{\circ}n$; $180^{\circ}n$ (כג)
 $270^{\circ} + 360^{\circ}n$; $45^{\circ} + 180^{\circ}n$; $120^{\circ}n$ (כד)
 $180^{\circ} + 360^{\circ}n$; $150^{\circ} + 360^{\circ}n$; $30^{\circ} + 360^{\circ}n$ (כה)
 $20^{\circ}42' + 180^{\circ}n$; $90^{\circ} + 180^{\circ}n$ (כו) $45^{\circ} + 90^{\circ}n$ (כז)
 $60^{\circ} + 180^{\circ}n$; $15^{\circ} + 90^{\circ}n$ (כט) $\pm 15^{\circ} + 45^{\circ}n$ (כח)
 $\pm 60^{\circ} + 180^{\circ}n$ (לא) $135^{\circ} + 180^{\circ}n$; $180^{\circ}n$ (ל)
 $45^{\circ} + 360^{\circ}n$ (לג) $180^{\circ} + 360^{\circ}n$; $60^{\circ} + 120^{\circ}n$ (לב)
 $50^{\circ} + 120^{\circ}n$; $10^{\circ} + 120^{\circ}n$; $45^{\circ} + 90^{\circ}n$ (לד)
 $270^{\circ} + 360^{\circ}n$; $45^{\circ} + 90^{\circ}n$ (לו) $45^{\circ} + 90^{\circ}n$; $180^{\circ}n$ (לה)
 $45^{\circ} + 90^{\circ}n$; $22.5^{\circ} + 45^{\circ}n$ (לח) $\pm 10^{\circ} + 60^{\circ}n$; $60^{\circ}n$ (לז)
 $22.5^{\circ} + 45^{\circ}n$ (מ) $90^{\circ} + 360^{\circ}n$; $360^{\circ}n$ (לט)
- 32.ה. א) $150^{\circ} + 180^{\circ}n < x < 180^{\circ} + 180^{\circ}n$
 $30^{\circ} + 180^{\circ}n < x < 90^{\circ} + 180^{\circ}n$
 ב) $45^{\circ} + 180^{\circ}n < x < 135^{\circ} + 180^{\circ}n$
 ג) $90^{\circ} + 180^{\circ}n < x < 180^{\circ}(n+1)$
 ד) $0^{\circ} \leq x \leq 90^{\circ}$ או $210^{\circ} \leq x \leq 330^{\circ}$
 ה) $0^{\circ} \leq x \leq 30^{\circ}$ או $180^{\circ} \leq x \leq 330^{\circ}$
 ו) $15^{\circ} < x < 180^{\circ}$
 ז) $-90^{\circ} + 360^{\circ}n \leq x \leq 90^{\circ} + 360^{\circ}n$
 ח) $15^{\circ} < x < 30^{\circ}$ או $82.5^{\circ} < x < 90^{\circ}$
 ט) $0^{\circ} \leq x < 30^{\circ}$
 י) $67.5^{\circ} + 180^{\circ}n \leq x \leq 157.5^{\circ} + 180^{\circ}n$
 יא) $105^{\circ} + 360^{\circ}n < x < 195^{\circ} + 360^{\circ}n$
 יב) $150^{\circ} < x < 225^{\circ}$ או $315^{\circ} < x < 360^{\circ}$
 $0^{\circ} < x < 30^{\circ}$ או $45^{\circ} < x < 135^{\circ}$
 יג) $120^{\circ} < x < 180^{\circ}$
 יד) $0^{\circ} < x < 45^{\circ}$ או $180^{\circ} < x < 225^{\circ}$
- 34.ה. א) $a \cos(3\alpha/2) / (2 \sin \alpha \cos(\alpha/2))$
 37.ה. $45^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$
 38.ה. $a \sin \alpha \sin(\alpha/2 - \beta) / (\sin(3\alpha/2) \sin \beta)$
 39.ה. 50.12 ס"מ.
 46.ה. $R \cot(45^{\circ} - \alpha/2)$; $R \tan(45^{\circ} - \alpha/2)$
 47.ה. $0.25a\sqrt{2}/\sin(\alpha + 45^{\circ})$; $0.5a\sqrt{2}\sin\alpha/\sin(\alpha + 45^{\circ})$
 48.ה. א) $a \sin \alpha / (2 \sin \alpha - 1)$ ב) $30^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$

25° 51' ; ס"מ 54 (ב)	$a^2 \sin 2\alpha$ (א) .55.ה
	$-0.25b^2 \sin 4\beta \sin (\beta/2) / \sin (3\beta/2)$.56.ה
	$a \sin 2\alpha \cos (\alpha + \beta) / \sin \beta$.57.ה
	$2 R^2 \sin 2\alpha \cos^2 \alpha$ (א) .58.ה
	$2 R \sin 2\alpha \cos \alpha / \sin (45^\circ + 1.5\alpha)$ (ב) .59.ה
	$h^2 \tan 0.25 (\alpha + \beta)$.60.ה
	60° (ב) $2 \sin (\beta - 30^\circ) / \cos \beta$ (א) .61.ה
2 .70.ה	$2 R \sin (60^\circ - \alpha) ; 2 R \sin \alpha$ (א) .62.ה
	$2 R \sin (\alpha + \beta) \sin \alpha / \sin \beta ; 2 R \sin (\alpha + \beta)$ (א) .75.ה
$R^2 \sin \beta \sin 2\gamma \cos \gamma / \sin (\beta + \gamma)$.76.ה	$\alpha = \beta$ (ב) .77.ה
	$R^2 \sin 45^\circ \sin (45^\circ + \alpha) \cos 2\alpha / \cos \alpha$.78.ה
	$-m \cos (\alpha + \beta) / \cos \beta ; m \cos \alpha / \cos \beta ; m / \cos \beta$.79.ה
	$-2d \sin 2\alpha \cos (\alpha/2) / \cos (3\alpha/2)$.80.ה
	40° (ב) $70^\circ 34' ; 60^\circ$ (א) .81.ה
$45^\circ < \alpha < 90^\circ$ (ב)	$-\cos 2\alpha$ (א) .82.ה
	$2 \sin \alpha \cos \beta / \sin (\alpha + \beta)$.83.ה
$76^\circ 17'$.87.ה	$21^\circ 5'$.84.ה
$70^\circ 32'$.91.ה	$0.75 R^2 \sin 2\alpha / \cos \beta$.90.ה
$96^\circ 32'$ (ב) $70^\circ 19'$ (א) .98.ה	$126^\circ 52'$.92.ה
	$47 a^3 / 48$ (ב) 60° (א) .99.ה
	$0.125 a^3 \sqrt{1 - 4 \sin^2 (\alpha/2)} \operatorname{cosec} (\alpha/2)$ (א) .100.ה
	$\alpha < 60^\circ$ (ב)
$\text{סמ"ק } 58.6$ (ב)	$0.5 d^3 \sin \alpha \sin (\alpha/2) \tan \beta$ (א) .101.ה
	$h^2 \tan \alpha / (4 \cos \alpha)$.105.ה
	$0.25 c^2 \sin 2\gamma \sec^2 \beta ; c \sin \gamma \sec \beta$ (א) .106.ה
	965.8 (ב) .סמ"ר
	$a^3 \sin \alpha \sqrt{0.5 (\alpha + \beta) \sin 0.5 (\alpha - \beta)}$ (א) .107.ה
	$2 \sin (\beta/2)$
$43^\circ 54'$.108.ה	$\alpha > \beta$ (ב)
$49^\circ 35'$.110.ה	$49^\circ 35'$ (ב) $82^\circ 28'$ (א) .109.ה
	$(\pi/3) a^3 \tan \alpha \cos (\beta/2) / (2 \sin (\beta/2))^3$.111.ה
$30^\circ < \alpha < 90^\circ$ (ב) .117.ה	$h^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha / \sqrt{3}$.116.ה
	$a^3 \tan \beta \sqrt{\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha} / (8 \tan \alpha)$ (א) .118.ה
$69^\circ 22'$.119.ה	$0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$ (ב)

- ה.120. (א) $(a/2) \sqrt{\cos \alpha} / \sin (\alpha/2)$
 (ב) $(a/2)^2 \sqrt{\cos \alpha} / (\sin (\alpha/2) \sin \beta)$
 ה.121. (ב) $67^{\circ} 33'$
 ה.122. (א) $b^3 \sqrt{\sin (3\alpha/2) \sin (\alpha/2)} / 6$
 (ב) $h^2 \sqrt{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)} / (\cos \alpha \cos^2 \beta)$
 ה.129. 20 סמ"ר ; $45^{\circ} 12'$
 ה.130. $d^3 \sin \alpha \sqrt{\sin^2 (\alpha/2) - \sin^2 \beta} / (2 \sin \beta)$
 ה.132. (א) $a^2 (\sqrt{\cos 2\alpha} / \cos \alpha)^3$ (ב) $\alpha < 35^{\circ} 16'$
 ה.133. $(\pi/12) a^3 \sqrt{\cos \alpha} / \sin (\alpha/2)$
 ה.134. $(b/\sin \alpha)^2 \sqrt{-\cos 2\alpha}$
 ה.135. $b^3 \sin (\alpha/2) \sin \alpha \sqrt{\cos^2 (\alpha/2) - \sin^2 \varphi} / \sin \varphi$
 ה.136. $m / \sqrt{1 + \cot^2 \alpha + \cot^2 \beta}$
 ה.137. (א) $2 a^2 \sqrt{2 \cos \alpha} / \sin (\alpha/2)$ (ב) $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$
 ה.141. (א) $a/3$ (ב) 30° (ג) $49^{\circ} 6'$
 ה.142. (א) $4 h^2 \sin (\alpha/2) \sqrt{2 \sec \alpha}$ (ב) $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$
 ה.144. (ב) $m^3 \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos \beta / 6$
 ה.145. $c^2 \cos \alpha / (2 \sin \beta)$
 ה.146. $(a - b)^2 (a + b) \tan^2 \alpha \tan \beta / 8$
 ה.148. $b^3 \sin (\alpha/2) \tan \beta / 6$
 ה.149. (א) β (ב) $53^{\circ} 8'$ או $36^{\circ} 52'$
 ה.153. $(\pi/3) R^3 \sin^3 \alpha \cot (\alpha/2)$
 ה.154. (א) $(\pi/3) a^3 \sin \alpha \sin (\alpha/2)$
 (ב) $(\pi/3) a^3 \sin \alpha \cos (\alpha/2)$ (ג) $\alpha = 90^{\circ}$ (רבע)
 ה.156. (א) 45° (ב) $R^2 \sin 2\beta / \cos \gamma$
 ה.157. 45°
 ה.180. (א) $(4n + 1) 45^{\circ}$
 (ב) $126.87^{\circ} + 360^{\circ} n ; (4n + 3) 90^{\circ} 32'$
 (ג) $(4n + 1) 45^{\circ} ; (2n + 1) 180^{\circ}$
 (ד) $(2n + 1) 180^{\circ} ; (12n + 5) 30^{\circ} ; (12n + 1) 30^{\circ}$
 (ה) $(8n + 3) 90^{\circ} ; (8n + 1) 45^{\circ}$
 (ו) $(2n + 1) 180^{\circ} ; (2n + 1) 20^{\circ}$
 ה.181. (א) $(4n + 1) 45^{\circ}$ (ב) $(6n + 1) 60^{\circ} ; (3n + 1) 40^{\circ}$
 (ג) $11.31^{\circ} + n180^{\circ} ; (4n + 1) 45^{\circ}$
 (ד) $(4n + 1) 45^{\circ}$ (ה) $(4n - 1) 45^{\circ} ; n180^{\circ}$
 (ו) $25^{\circ} + n90^{\circ}$ (ז) $(8n - 1) 22.5^{\circ} ; (8n + 1) 22.5^{\circ}$
 (ח) אין פתרונות.
 ה.183. (א) $(2n + 1) 9^{\circ}$ (ב) $(3n - 1) 120^{\circ} ; (3n + 1) 120^{\circ}$
 (ג) $(3n - 1) 20^{\circ} ; (3n + 1) 20^{\circ}$

- (ד) $(4n - 1) 135^\circ ; (4n + 1) 135^\circ$
 (ה) $(8n - 1) 45^\circ ; (8n + 1) 45^\circ$
 (ו) $(8n + 3) 45^\circ ; (8n + 1) 15^\circ$
 (ז) $(4n + 1) 45^\circ$ (ח) $(3n + 1) 45^\circ$
 (ה.184.א) $n 360^\circ ; (2n + 1) 90^\circ$
 (ב) $(6n + 1) 30^\circ$ (ג) $(2n + 1) 45^\circ$
 (ד) $(3n - 1) 60^\circ ; (3n + 1) 60^\circ ; (6n - 1) 30^\circ ; (6n + 1) 30^\circ$
 (ה) $; (16n + 5) 22.5^\circ ; (16n + 3) 22.5^\circ ; (16n + 1) 22.5^\circ$
 $(16n + 7) 22.5^\circ$
 (ו) $(6n - 1) 60^\circ ; (6n + 1) 60^\circ ; (6n - 1) 30^\circ ; (6n + 1) 30^\circ$
 (ז) $(3n + 1) 120^\circ ; (6n + 1) 60^\circ$ (ח) $(12n + 1) 30^\circ$
 (ה.185.א) $(6n - 1) 30^\circ < x < (6n + 1) 30^\circ$
 (ב) $(3n - 1) 30^\circ < x < (3n + 1) 30^\circ$
 (ג) אר $45^\circ + n 180^\circ < x < 60^\circ + n 180^\circ$
 $-60^\circ + n 180^\circ < x < -45^\circ + n 180^\circ$
 (ד) $10^\circ + n 60^\circ < x < 50^\circ + n 60^\circ$
 (ה) $7.5^\circ + n 45^\circ < x < 37.5^\circ + n 45^\circ$
 (ו) $-9^\circ + n 36^\circ < x < 9^\circ + n 36^\circ$
 (ה.186.א) $n 360^\circ < x < 90^\circ + n 360^\circ$
 (ב) $(12n - 1) 15^\circ < x < (12n + 1) 15^\circ$
 (ג) אר $30^\circ + n 90^\circ < x < 45^\circ + n 90^\circ$
 $45^\circ + n 90^\circ < x < 60^\circ + n 90^\circ$
 (ד) אר $(24n + 1) 15^\circ < x < (24n + 5) 15^\circ$
 $(24n - 5) 15^\circ < x < (24n - 1) 15^\circ$
 (ה) $-90^\circ + n 180^\circ < x < n 180^\circ$ (ו) $x \neq n 90^\circ$
 (ה.187.א) $(12n + 5) 30^\circ ; (12n + 1) 30^\circ$
 (ב) $(24n + 5) 15^\circ ; (24n + 1) 15^\circ$
 (ג) $(12n - 5) 30^\circ ; (12n + 5) 30^\circ$ (ד) $(4n + 1) 45^\circ$
 (ה.188.א) $-0.739 ; 0.739$ (ג) 0.511 (ב) $-2.279 ; 2.279$
 (ד) $-1.735 ; 2.194$ (ו) 0.583 (ה) 2.073
 (ה.189.א) $-\sqrt{2} ; \sqrt{2}$ (ג) $-7 ; 1$ (ב) -1.5
 (ד) $-23 ; 3$ (ו) $1 ; 10$ (ה) $;-2\sqrt{2} - 1 ; -2\sqrt{2} - 1$
 (ז) $c - \sqrt{a^2 + b^2} ; \sqrt{a^2 + b^2} + c$
 (ח) 2 ; אין מבסימום
 (ט) -1 ; אין מינימום
 (י) $a + c ; b + c$
 (יב) 4 ; אין מבסימום
 (יא) $-b ; a$

π (ה)	2π (ד)	2π (ג)	π (ב)	2π (ה.193.א)
6π (י)	4π (ט)	$2\pi/3$ (ח)	12π (ז)	π (ו)
		6π (ג')	$5\pi/3$ (יב)	2π (א')

תוכן הענינים

הקדמה	3
מבוא	4

פרק א': פונקציות טריגונומטריות של זוויות חדות. משולש ישר זווית.

1. סינוס של זווית חדה	5
2. הגדרת הפונקציה טנגנס עבור זוויות חדות	15
3. פונקציות טריגונומטריות אחרות של זוויות חדות	22
4. הקשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות	29
5. א. רדיאנים. פונקציות של זוויות קטנות	36
פרק ב': ההגדרה הכללית של הפונקציות הטריגונומטריות.	
הקשרים בין הפונקציות.	

1. המעגל הטריגונומטרי והגדרת הפונקציות הטריגונומטריות	ב.1
בעזרתו	45
2. פונקציות של סכום או של הפרש שתי זוויות	56
3. פונקציות של זווית כפולה ושל חצי זווית	63
4. נוסחות לחישוב סכום או הפרש פונקציות טריגונומטריות	70
5. המשוואות הטריגונומטריות	82
6. אי שוויונים טריגונומטריים	94

פרק ג': התרת המשולש הכללי. שימושים בהנדסת המישור והמרחב.

1. משפט הסינוסים	98
2. משפט הקוסינוסים	104
3. משפט הטנגנסים ונוסחות חצאי הזוויות במשולש	110
4. שימושים בהנדסה	121

פרק ד': בעיות שונות	149
פרק ה': שאלות חזרה	161
תשובות לבעיות החישוב	1

ספרי לימוד לבתי ספר תיכוניים
שיצאו בהוצאת „חידוש“

חיים אבירי

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

✱

חיים אבירי ודניאל שמיר

טריגונומטריה

(מגמות ריאליות)

✱

שאלון טריגונומטרי

(מגמות ספרותיות)

✱

ד. שמיר

הנדסה אנליטית

✱

אלגברה לכיתה י"א

(מגמות ריאליות)

✱

מבחני חזרה במתמטיקה

✱

מבחני חזרה בפיסיקה