א. פ.

מתימחשב

פונקציות

בתוך פונקציות וביניהן

חלק ב

מהדורת ניסוי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

מתימחשב

פונקציות

בתוך פונקציות וביניהן

מהדורת ניסוי

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

יוצא לאור במסגרת
המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט
מיסודם של
משרד החינוך והתרבות, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

תודתנו נתונה למורי ותלמידי כיתות ט' (תשנ"ד, תשנ"ה)
באולפנית בני-עקיבא ת"א, בבית-הספר האזורי בגבעת
ברנר ובבית-הספר לטבע, ת"א, על שיתוף הפעולה והנכונות
שגילו כאשר למדו מגירסות הניסוי.
דרכי הלימוד וההוראה שגובשו בכיתות אלה הן מרכיב יסודי
בפרקי פונקציות מתומחשב.

חובר על-ידי:
צפורה רזניק

עזרו:
בתיה עמית
אלכס פרידלנדר
מיכל טבח

ייעוץ:
רנה הרשקוביץ
טומי דרייפוס
ברוך שוורץ

ראש פרוייקט:
רנה הרשקוביץ

הדפיסה ועריכה במחשב:
יפית לוי

גרפיקה ממוחשבת (שרטוטים):
חגית עפרוני

עיצוב והפקה:
אגי (רחל) בוקשפן

הרצות: פיוניר לגלופות בע"מ

נדפס בישראל תשנ"ו - 1995
הדפסה חוזרת תשנ"ז - 1997

דפוס ניידט בע"מ

אל התלמידים,

בסדרת החוברות **מתימחשב - פונקציות** תעסקו במושג הפונקציה שהוא אחד המושגים היסודיים במתמטיקה ובמדעים.
החומר מהווה איפוא בסיס להמשך לימודי המתמטיקה והמדעים בחטיבה העליונה.

ברוב המקרים תגלו את התכונות השונות של פונקציות וכן דוגמאות רבות ומגוונות של פונקציות, תוך כדי **עבודת צוותים בתהליכי חקירה ופתרון של סיטואציות בעיה שהיקפן רחב.**

תגלו כי השימוש במחשב או במחשבון הגרפי, שהוא מרכיב חשוב ב**מתימחשב - פונקציות**, מגביר את יכולתכם וגם את עצמאותכם בתהליכי החקירה והפתרון של הסיטואציות השונות.

תוכלו לראות כי רוב החומר בכל יחידה נמצא כבר בפעילויות הראשונות בה. הפעילויות הנוספות בכל יחידה מהוות לכן מאגר לחזרה ולהעמקה נוספת.

רנה הרשקוביץ

ראש פרוייקט מתימחשב

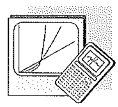
ביאור סמלים

תחילת יחידה לימוד מצויינת על-ידי מספר. לדוגמא 3.

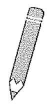
יחידת לימוד כוללת:

פעילות אחת או שתיים מרכזיות **המכילות את כל חומר הלימוד של היחידה**.

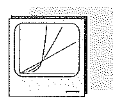
סמלים בתוך הפעילות:



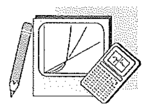
פעילות לעבודה עם מחשב או עם מחשבון גרפי.



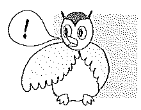
פעילות מומלצת לעבודה ללא מחשב או מחשבון גרפי.



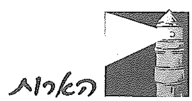
פעילות למחשב בלבד.



פעילות מתאימה לעבודה עם כלי טכנולוגי או בלעדיו.



ינשוף המסכם ומזכיר נשכחות.



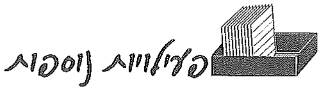
קשיים צפויים בפעילות? המגדלור מאיר כיוון.

פעילות או חלק מפעילות לרמה גבוהה.

אתגר נוסף הקשור לפעילות, לתלמידים שסיימו אותה.

סמלים בתוך היחידה:

דיון וגיבוש של הנושאים המתמטיים בפעילות.



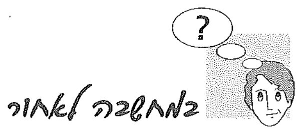
לבחירה בלבד.

משימות קצרות יחסית, חלקן קשורות לפעילויות הרחבות. המשימות מתאימות לעבודת בית ואינן מחייבות שימוש בכלי טכנולוגי.

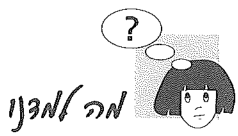
סיכום ביניים בחרוזים.

פיתוח מיומנויות מתמטיות.

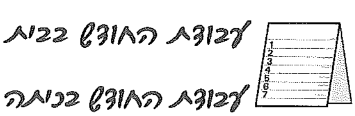
קריאת חומר מתמטי המלווה בשאלות מנחות ובשאלות הבודקות את הבנת הקריאה, ויישום החומר הנלמד בה.



הזדמנות לחשיבה מחדש על מושגים ותהליכים שעלו בפעילויות.



סיכום קצר של הנלמד ביחידה.



חיבור דף פעילות תוך שימוש בסל המושגים שנלמדו לאחרונה.

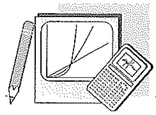
פעילות פתוחה.

פרק ב

בתוך פונקציות וביניהן

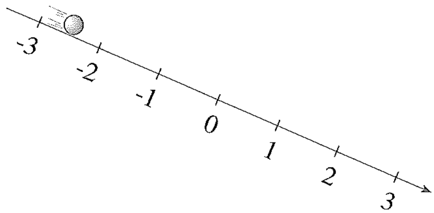
1. פונקציה בחלקים
2. נקודות אפס, חיוביות ושליליות
3. עליה וירידה - ושוב שפה אחידה
4. שתי פונקציות או יותר

1. פונקציה בחלקים



מרחק מן האפס (פעילות הכנה)

גולה מתגלגלת על ציר המספרים.



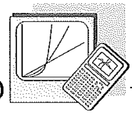
f היא פונקציה המתאימה לשיעור הנקודה שבה נמצאת הגולה, את מרחקה מן האפס.

1. השלימו את הטבלה

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)							

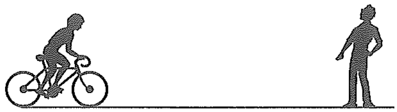
2. שרטטו את גרף הפונקציה במחברת.

3. רִשמו את הפונקציה בדרך אלגברית.
בִּדקו על-ידי שרטוט במחשב.

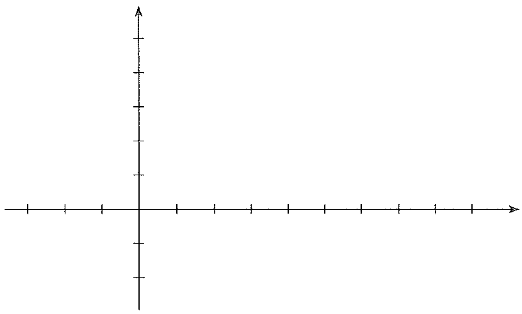


מירוץ אופניים

על כביש ישר באורך 7 ק״מ נערך מירוץ אופניים.
דורון עומד במרחק 3 ק״מ מנקודת היציאה, לכיוון הנסיעה,
וצופה במירוץ.
יגאל הוא המוביל במירוץ.



d היא פונקציה המתאימה למרחק שעובר יגאל, את מרחקו מדורון.
רִשמו על כל ציר מה הוא מייצג, רִשמו יחידות על הצירים,
ושרטטו את גרף הפונקציה במערכת הצירים.



1. כמה פעמים יהיה יגאל במרחק 2.5 ק״מ מדורון? במרחק 4 ק״מ?

2. דורון יכול לראות את יגאל במרחק של 500 מ׳. סמנו במערכת הצירים את תחום הנסיעה של יגאל, שבו יכול דורון לראותו.

3. שרטטו את גרף הפונקציה d במחשב.
אם התייאשתם או אם סיימתם, עִברו לעמוד הבא.

המרחק בין מספר כלשהו x לבין המספר b על ציר המספרים,
הוא: $x - b$ או $b - x$. (תלוי מי גדול יותר). לכן הוא $|x - b|$ (ושווה גם ל $|b - x|$).

לכן, אם x מייצג את מרחק הנסיעה של יגאל, כלומר, את מקומו על המסלול, אז $y = d(x) = |x - 3|$ מייצג את מרחקו מדורון.

האם נעזרתם בתבנית זו, כדי לשרטט את גרף הפונקציה?

4. גרף הפונקציה d בנוי משני ענפים.
מִצאו תבנית לכל ענף. היעזרו ב״סיפור״.

5. נלמד לשרטט במחשב את הגרף של d, בשלושה אופנים שונים.*

במחשב

אופן א':
שרטטו את גרף הפונקציה $d(x) = |x - 3|$

התבנית נכתבת: abs (x - 3)

אופן ב':
שרטטו את הפונקציה לפי ענפים.

המחשב מתייחס אל כל ענף כאל פונקציה.

$3 - x \mid 0 \le x \le 3$

$x - 3 \mid 3 < x \le 7$

שימו לב:
התו | המפריד בין התבנית והתחום, מופיע על המקלדת כך: ¦

אופן ג':
שרטטו את הפונקציה לפי קטעים.

עִברו לחלון נקודות $\boxed{\text{Tab}}$
העברת קטע/קרן/קו
$\boxed{\text{ALT}}$ $\boxed{\text{F7}}$
נקודת התחלה (0 , 3)
נקודת סיום (3 , 0)
אישור $\boxed{\text{F10}}$
שימו לב לתבנית המתקבלת בחלון המידע. שרטטו באותו אופן את הקטע השני.

* במחשבון הגרפי נשרטט רק על פי התבנית $|x - 3|$, (אופן א') הנכתבת במחשבון כך: $y = \boxed{\text{ABS}}\ (x - 3)$. שימו לב לסימן "–". זהו סימן פעולה ולא סימן כיוון.

בעקבות פונקציה בחלקים

התבנית שמתארת את המרחק של נקודה מן האפס, כפונקציה f של מקומה על הציר היא $f(x) = |x| = abs(x)$. המחשב/ון מכיר רק את הסימון abs(x) .
אפשר לכתוב תבנית זו בהצגה אלגברית בדרך אחרת:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

משמעות הכתיבה הזאת:

כאשר	$x \ge 0$	$f(x) = x$	ואמנם $\mid x \mid = x$.
אבל כאשר	$x < 0$	$f(x) = -x$	ואמנם $\mid x \mid = -x$.
לדוגמה:	$3 > 0$	לכן $f(3) = 3$	ואמנם $\mid 3 \mid = 3$.
אבל	$-2 < 0$	לכן $f(-2) = -(-2) = 2$	ואמנם $\mid -2 \mid = 2$.

בדרך זו לחלקים שונים של התחום, מתאימות תבניות שונות.

כאשר מציגים פונקציה כך שלחלקים שונים של התחום, מתאימות תבניות שונות, אומרים כי הפונקציה מוצגת בחלקים.

1. תארו את הפונקציה d, המתאימה למרחק שעובר יגאל את מרחקו מדורון, בחלקים.

2. חשבו (שימו לב לתחום).

$d(0.5) =$ $\quad$ $d(3) =$ $\quad$ $d(5.5) =$ $\quad$ $d(6.5) =$

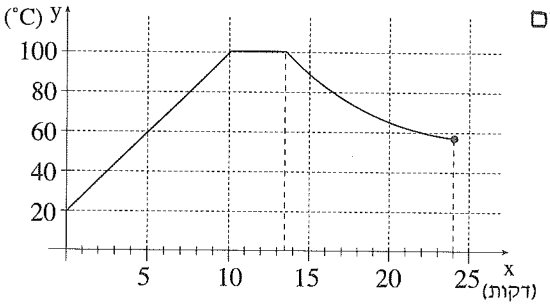
3. $d(x) = 1.8$. מִצאו את כל המקורות המתאימים.

פעילויות נוספות

I. פינג'אן על האש

הניחו פינג'אן על האש ואז...

לפניכם הגרף המתאים



1. ספרו "סיפור" בשלושה חלקים, באופן מפורט ככל האפשר.
התייחסו גם **לקצב** ההתחממות או ההתקררות.

2. התבנית לחלק השלישי של הסיפור היא $200 \cdot 0.95^x$.

א. כִּתבו את הפונקציה בהצגתה האלגברית.

$$g(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_ < x \le \_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_ < x \le \_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_ < x \le \_\_\_ \end{cases}$$

תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הארות* בעמוד 16.

ב. בִּדקו את ההצגה האלגברית על-ידי שרטוט במחשב.

ג. מתי, בערך, היתה טמפרטורת המים $80^\circ c$?

3. שנו את הגרף, כך שיספר סיפור של הכנת כוס קפה.
שימו לב! כדי להכין קפה יש להרתיח את המים, אחר כך מוזגים את המים הרותחים לכוס עם אבקת קפה וסוכר, ולבסוף מוסיפים חלב קר.

II. העבודה היא חיינו? ("סיפור אחד" במספר אופנים).

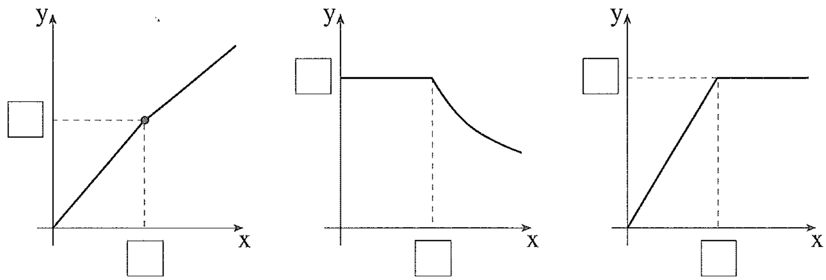
חברה להפניית עובדי ניקיון בקבלנות מפרסמת:

עובדים המוכנים לעבוד במשמרות ,
יקבלו אצלנו תוספת
בשיעור של 40% מן המשכורת.
בתנאי שהתוספת לא תעלה על 800 ש"ח.

x מייצג את המשכורת המקורית של העובד.
$f(x)$ את התוספת עבור משמרות (בש"ח).
$g(x)$ את המשכורת המוגדלת עקב התוספת.
$p(x)$ מייצג את התוספת באחוזים.

1. א. התאימו פונקציות אלו לגרפים שלמטה.

i ii iii



ב. הסבירו את שיקוליכם בהתאמת הגרף ל"סיפור".

ג. רִשמו את המספרים החסרים על הצירים.

2. כִּתבו כל פונקציה בהצגה אלגברית, ובְדקו על ידי שרטוט במחשב.

III. הטיול

קבוצת ילדים יצאה לטיול רגלי. בתחילה הלכו 3 שעות, אחר כך נחו, ולבסוף התנהלו לאיטם בחזרה לביתם, במהירות של 2 קמ"ש.

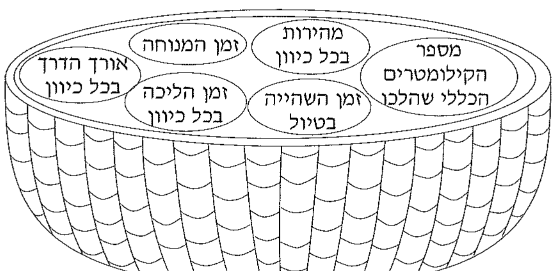
נניח כי בקטעי הדרך השונים הלכו הילדים במהירות קבועה (השונה מקטע לקטע).

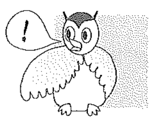
S היא פונקציה המתאימה **למספר השעות** שעברו - x
את **מספר הקילומטרים** שהלכו הילדים עד אז.

הצגה אלגברית של S:

$$S(x) = \begin{cases} 4x & 0 \le x \le 3 \\ 12 & 3 < x \le 4 \\ 12 + 2(x-4) & 4 < x \le 10 \end{cases}$$

1. ספרו את ה"סיפור" השלם, עם כל הפרטים הנוספים שתצליחו לגלות מן ההצגה האלגברית. תוכלו להיעזר בסל. כמו כן תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הלוא* בעמוד 16, כדי להבין את התבנית לדרך חזרה.





זכרו כי:
זמן x מהירות = דרך

2. חשבו $S(2.5)$ $S(3.5)$ $S(9)$, והסבירו מה מצאתם.

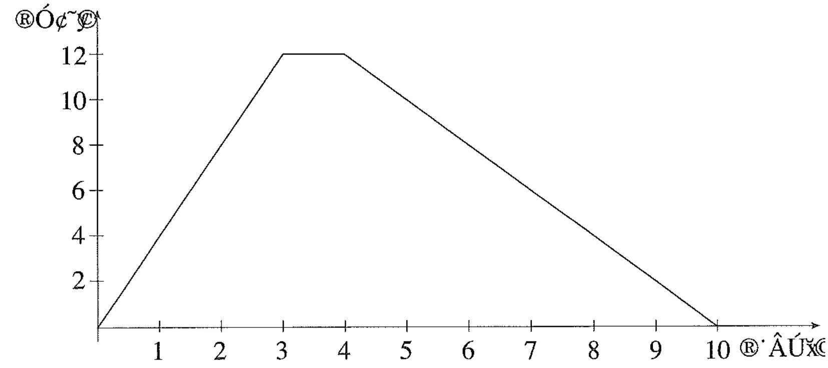
3. $S(x) = 20$ מהו x? מה הקשר ל"סיפור"?

4. שרטטו גרף לפונקציה S, ואמתו את תשובותיכם לשאלות 2 ו-3.
אילו מן הפרטים שרשמתם בשאלה 1 אפשר להסיק מן הגרף?
התוכלו למצוא מן הגרף פרטים נוספים?

אם סיימתם, נסו את כוחכם באתגר.

אתגר

6. השרטוט הבא אינו ההצגה הגרפית של S.
שנו את הגדרת S, כך שהשרטוט יתאים לה.



כִּתבו את ההצגה האלגברית של הפונקציה המתקבלת לאחר השינוי.

הארות

1. לפעילות: "פינג'אן על האש".

א. באיזו טמפרטורה היו המים בתחילת החימום?

ב. במשך 10 דקות עלתה טמפרטורת המים מ- $20^{\circ}C$ עד $100^{\circ}C$.
התוכלו למצוא מידע זה בגרף?

ג. בכמה מעלות צלסיוס עלתה טמפרטורת המים בכל דקה?
היעזרו בסעיף הקודם.

ד. אפשר לתאר במילים את טמפרטורת המים בזמן ההתחממות (החלק הראשון של הגרף). קראו משמאל לימין.

תוספת הטמפרטורה + **טמפרטורה התחלתית** = **הטמפרטורה בכל דקה**

מספר הדקות שעברו • **תוספת הטמפרטורה בדקה** = **תוספת הטמפרטורה**

התוכלו לתאר, בתבנית אלגברית, את טמפרטורת המים בזמן ההתחממות (החלק הראשון של הגרף)?

מעמוד 13

2. לפעילות: "הטיול".

אם הולכים במהירות של 2 ק"מ בכל שעה, אז ב-x שעות, מספיקים ללכת 2x ק"מ. האם 2x היא התבנית המתאימה למספר הק"מ שהלכו הילדים בחזרתם?

התשובה היא כן, אם x מייצג את הזמן **מאז שהתחילו לחזור**.

אבל בהצגה האלגברית שלנו, x מייצג את הזמן שעבר **מאז שיצאו לטיול**.

לכן, כדי לדעת כמה זמן הם נמצאים בהליכה בחזרה, יש להוריד מ-x את הזמן שעבר עד שהתחילו לחזור.

כמו כן, שימו לב כי כאשר הילדים מתחילים לחזור, הם כבר הלכו מספר קילומטרים.

מעמוד 14

כאשר התחום מחולק

בפונקציות רבות מן החיים,
התחום מחולק למספר חלקים.
לכל חלק מתאימה תבנית,
ובנקודות החלוקה הגרף ״עושה תפנית״.

בהצגה האלגברית של פונקציה כזאת,
נרשמות כל התבניות.
ליד כל תבנית התחום המתאים,
ותחום הפונקציה כולה, הוא איחוד התחומים.

אם נרצה להציב בפונקציה מקור,
מי מן התחומים מכיל אותו? נחקור!
בתבנית השייכת לתחום זה נבחר,
ובה נציב את המספר.

אך אם נחפש לתמונה מקור,
עם כל תבנית משוואה ניצור,
ואז נבדוק אם הפתרון
אמנם שייך לתחום הנכון.

אבל, אם סקיצה של גרף נשרטט,
לא נצטרך הרבה להתלבט.
מן השרטוט נוכל לברר,
באילו תחומים המקור מסתתר.

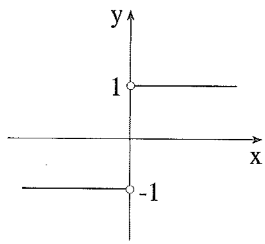
אוסף משימות

1. שרטטו את הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות:

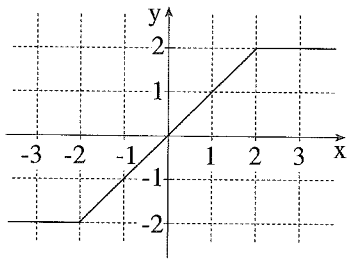
$$h(x) = \begin{cases} 3 & x < 2 \\ -3 & x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & x = 3 \\ x & x \neq 3 \end{cases}$$

2. רשמו הצגה אלגברית לפונקציות אשר הגרפים שלהם מובאים להלן.

א.

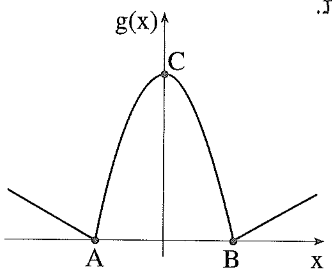


ב.



3. נתונה פונקציה g בהצגתה האלגברית והגרפית.

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & x < -2 \\ -x^2 + 4 & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & x > 2 \end{cases}$$



א. חשבו $g(4)$, $g(1)$, $g(-3)$, $g(2)$.

ב. מִצאו את שיעורי הנקודות A , B ו-C, שעל הגרף.

ג. מִצאו, לפי הגרף, כמה מקורות יש ל-3, וחשבו אותם.

ד. כמה מקורות יש ל-5? מִצאו אותם.

ה. השוו כל אחת מהתבניות ל- -5 ומִצאו את פתרון המשוואות המתקבלות. האם הפתרונות הם מקורות ל- -5? הסבירו.

4. הִניחו קומקום עם מים על גבי האש, למשך 8 דקות.
נניח כי המים מתחממים בקצב קבוע של $15^\circ C$ לדקה.
ידוע כי המים רותחים ב-$100^\circ C$, וכל זמן הרתיחה הטמפרטורה שלהם אינה עולה.
f היא פונקציה המתאימה למספר הדקות (x) שעברו מתחילת החימום, את טמפרטורת המים.

א. נניח כי הטמפרטורה של המים לפני החימום היתה $10^\circ C$.
שרטטו את הגרף של f.

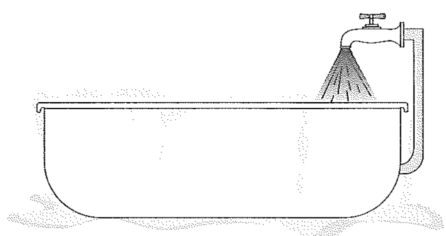
ב. רִשמו את f בהצגתה האלגברית.

5. אמבטיה יכולה להכיל 450 ליטר מים.
פָּתחו את הברז בהיות האמבטיה ריקה, למשך 20 דקות, והאמבטיה התמלאה בקצב של 30 ליטר לדקה.

א. רִשמו פונקציה f, המתאימה לזמן (בדקות) מאז פתיחת הברז, את כמות המים (בליטרים) שמכילה האמבטיה. אל תשכחו את התחום.

ב. שרטטו גרף של הפונקציה.

ג. מִצאו על-ידי חישוב ומתוך הגרף $f(10)$, $f(18)$.



6. רוכב אופניים יוצא מחיפה במהירות קבועה של 12 קמ״ש. לאחר שרכב במשך 5 שעות במהירות זו, הגביר את מהירותו ל-15 קמ״ש, ורכב במהירות זו 4 שעות נוספות.

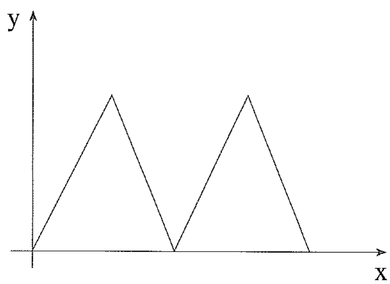
א. איזו דרך עבר רוכב האופניים כעבור 3 שעות? כעבור 7 שעות?

ב. תארו את הפונקציה g המתאימה לזמן שחלף (בשעות), מאז יצא הרוכב מחיפה, את אורך הדרך שעבר (בק״מ).

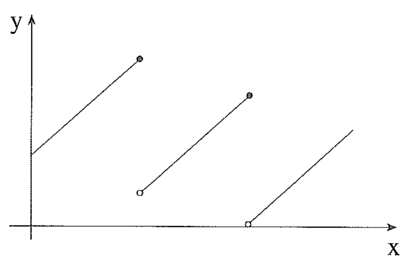
ג. חשבו $g(3)$, $g(7)$, והשוו עם סעיף א׳.

7. המציאו ״סיפור״ לכל אחד מהגרפים הבאים:

א.



ב.



התוכלו למצוא להם תבניות?

שומרו על כושר

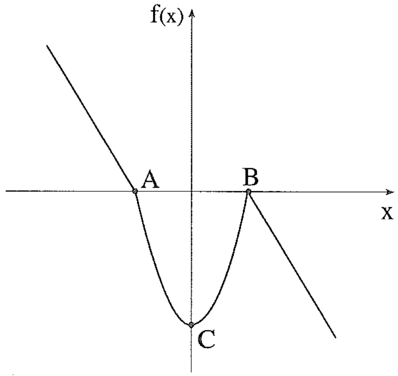
1. נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-6 & x<-3 \\ x^2-9 & -3\le x\le 3 \\ -2x+6 & x>3 \end{cases}$$

א. חשבו: $f(5)$ $\quad f(0)$ $\quad f(-1.5)$ $\quad f(-3)$

ב. מִצאו את כל ה-x-ים עבורם $f(x) = -5$.

ג. הגרף של f נראה כך:



רִשמו את שיעורי הנקודות המודגשות.

ד. כמה פתרונות יש למשוואות הבאות?

$f(x) = 1$ $\quad f(x) = -1$ $\quad f(x) = -10$ $\quad f(x) = 0$

2. מִצאו מקור/מקורות לתמונה 3, בכל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = |x|$

ב. $f(x) = |x-2|$

ג. $f(x) = |x+2|$

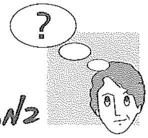
ד. $f(x) = |x+2| - 4$

ה. $f(x) = 1 - |x|$

ו. $f(x) = |x-3|$

ז. $f(x) = |x| + 3$

ח. $f(x) = 4 - |x|$



במחשבה לאחור

1. אילו מן ההצגות (מילולית, טבלה, תבנית, גרף) עדיפות בעיניכם כאשר נתונה פונקציה בחלקים? נסו להסביר מדוע.

2. שושי אמרה: "כאשר נתונות שתי תבניות מדובר בשתי פונקציות. לא יתכן שלפונקציה אחת יהיו שתי תבניות". דונו והסבירו.

3. א. דוד אמר: "מצאתי הצגה בחלקים שאיננה הצגה של פונקציה"

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 3 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

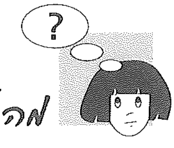
מה דעתכם? הסבירו.

ב. דינה אמרה: "גם אני מצאתי הצגה בחלקים, שאיננה הצגה של פונקציה"

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 3 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

מה דעתכם? הסבירו.

מה למדנו



למדנו להציג פונקציה בחלקים, כלומר, פונקציה שבה לחלקים שונים של התחום, מתאימות תבניות אלגבריות שונות.

דוגמה:

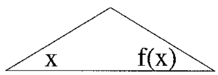
מתאימים לזווית בסיס במשולש שווה שוקיים את **הזווית הקטנה** מבין השתיים הנותרות. נקרא לפונקציה f.

x - זווית הבסיס.

כבר ראינו בפרק הקודם כי תחום הפונקציה הוא $0 < x < 90$.

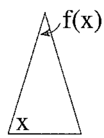
כאשר זווית הבסיס קטנה, זווית הראש גדולה מזווית הבסיס השניה.

לכן במקרה זה $f(x) = x$.



כאשר זווית הבסיס מתקרבת ל-90°, זווית הראש קטנה מזווית הבסיס השניה.

במקרה זה $f(x) = 180 - 2x$.



השאלה: איך נחלק את התחום?

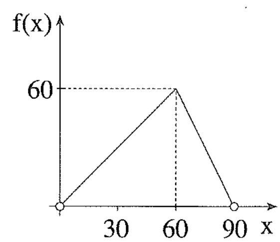
נקודת החלוקה היא במקום ששתי הזוויות הנותרות שוות.

זה המצב במשולש שווה צלעות, כאשר כל הזוויות הן בנות 60°.

הכתיבה האלגברית המתאימה:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 60 \\ 180 - 2x & 60 \le x < 90 \end{cases}$$

הגרף המתאים:



למדנו למצוא תמונה למקור, ומקור לתמונה, בפונקציה המוצגת בחלקים.

נמשיך להדגים בעזרת הפונקציה f.

דוגמה א':

$x = 70$ כלומר זווית הבסיס בת 70°. מהו $f(70)$?

תחילה בודקים לאיזה חלק מן התחום שייך 70.

$60 \le 70 < 90$ לכן מציבים בתבנית המתאימה לתחום זה:

$f(70) = 180 - 2 \cdot 70 = 40$.

דוגמה ב':

$f(x) = 30$, מהו x?

בדרך אלגברית, נשווה את שתי התבניות ל-30, ואחר נברר אם המקור שקיבלנו אכן נמצא בתחום המתאים.

$f(x) = x = 30$, $0 < 30 < 60$, לכן 30 מתאים כמקור לתמונה 30.

$$f(x) = 180 - 2x = 30$$
$$2x = 150$$

$x = 75$, $60 < 75 < 90$, לכן 75 מתאים כמקור לתמונה 30.

כלומר, לתמונה 30 יש שני מקורות $x = 30$ ו־ $x = 75$.

דוגמה ג':

$f(x) = 70$, מהו x?

$f(x) = x = 70$. האם נכון כי $0 < 70 < 60$? לא. לכן 70 אינו מתאים כמקור.

$$f(x) = 180 - 2x = 70$$

$$2x = 110$$

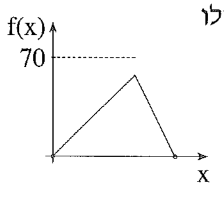
$x = 55$. האם נכון כי $60 \le 55 < 90$? לא. לכן 55 אינו מתאים כמקור.

כלומר, אין מקור לתמונה 70.

אם נבדוק את גרף הפונקציה, נגלה שאמנם התמונה הגדולה ביותר היא 60.

אם כן, איך קיבלנו את התשובה $x = 55$?

תשובה זו היתה נכונה כמקור לתבנית $f(x) = 180 - 2x$ אילו התחום שלה לא היה מוגבל בין 60 ל־ 90.



2. נקודות אפס, חיוביות ושליליות

רינה בחרה מספר

רינה בחרה מספר, כפלה אותו בעצמו, והחסירה 9 מן המכפלה.
את ההפרש היא כפלה, במספר גדול ב-1 מן המספר שבחרה.

1. מה קיבלה רינה אם בחרה 0? -2? $3\frac{1}{2}$?

2. רשמו שני מספרים שרינה יכולה לבחור, כדי לקבל כתוצאה:

   א. מספר חיובי.

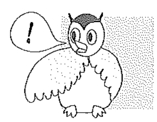
   ב. מספר שלילי.

   ג. אפס.

   ד. מספר זוגי.

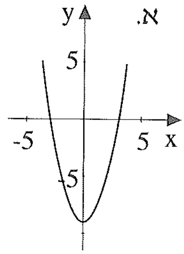
   ה. מספר גדול מ- 100.

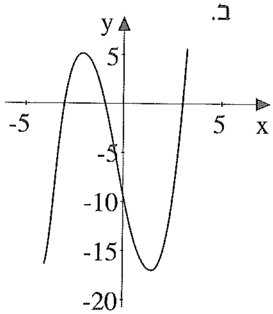
   ו. מספר קטן מ- -100.

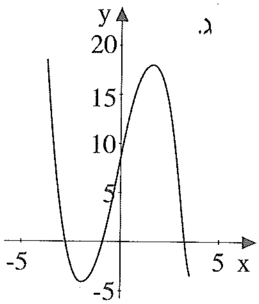


אם אפס הוא אחד הגורמים במכפלה,
אז המכפלה מתאפסת כולה.

3. M היא פונקציה המתאימה למספר שרינה בחרה את התוצאה הסופית שקיבלה.
איזה מבין הגרפים הבאים מתאים למספר שנבחר x את התוצאה M(x)?
נמקו.







לנקודות על הגרף של פונקציה, ששיעור ה-y שלהן אפס, קוראים נקודות אפס של הפונקציה.

4. א. סמנו על הגרף המתאים, משאלה 3, את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. רִשמו את שעורי נקודות האפס.

ג. איזה מבין המשפטים הבאים מדבר על נקודת אפס?

– רינה בחרה 3 וקיבלה כתוצאה 0.

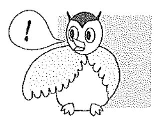
– רינה בחרה 0 וקיבלה כתוצאה 9–.

ד. רִשמו שני מספרים שרינה יכולה לבחור, כדי לקבל כתוצאה:

– 8– בקירוב.

– מספר בין 0 ל-1.

הסבירו כיצד מצאתם.

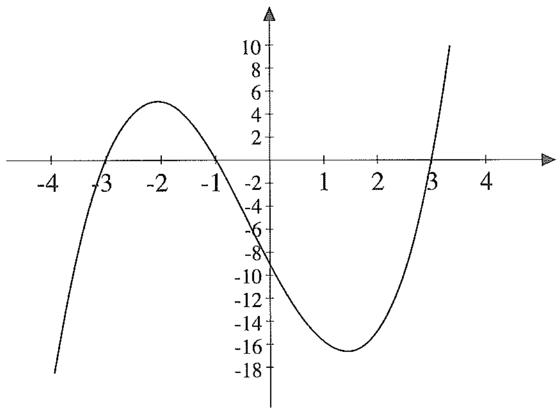


נקודת המפגש של הגרף
עם ציר ה-y,
אינה נקראת נקודת אפס.

פונקציה נקראת **חיובית בתחום מסוים**
אם כל **תמונותיה** בתחום זה **חיוביות.**

5. א. באיזה תחום הפונקציה M חיובית?

ב. סמנו על ציר ה-x, בגרף של M, את התחום בו הפונקציה שלילית.



6. לפניכם מספרים שרינה בחרה.

א. -1.5	ב. 3.1	ג. 0	ד. -0.5
ה. -6	ו. -2.7	ז. -1	ח. 0.7

סמנו + על יד מספרים, שבחירתם נותנת תוצאה חיובית.
סמנו – על יד מספרים, שבחירתם נותנת תוצאה שלילית.
אל תעשו חישובים, אלא היעזרו בשאלות הקודמות.

7. השלימו:

$M(x) > 0$ כאשר _______ , _______ .

בעקבות נקודות אפס,
ותחומי חיוביות ושליליות

1. הסבירו.

א. היכן נמצאות נקודות אפס במערכת הצירים?

ב. איך מוצאים נקודות אפס בעזרת תבנית?

2. הגדירו נקודות אפס באמצעות המושגים מקור ותמונה.

3. השלימו: הנקודה $(x\ ,\ f(x))$ היא נקודת אפס של הפונקציה f
כאשר ____________ .

4. הפונקציה g חיובית בכל תחומה.

א. מה תוכלו לומר על הטבלה שלה?

ב. מה תוכלו לומר על הגרף שלה?

ג. תנו דוגמה לתבנית של פונקציה שהיא חיובית בכל תחומה.

ד. מה תוכלו לומר על מקורותיה?

ה. מה תוכלו לומר על תמונותיה?

5. הגדירו פונקציה שלילית בתחום מסויים.
התוכלו לעשות זאת ללא השימוש במונחים מקור, תמונה?

בכתיב מתמטי

נקודות אפס: $\{(x\ ,\ f(x))\ \mid\ f(x)=0\}$ ויש מגדירים: $\{x\ \mid\ f(x)=0\}$

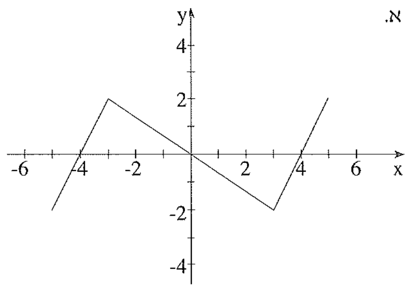
תחום חיוביות: $\{x\ \mid\ f(x)>0\}$

תחום שליליות: $\{x\ \mid\ f(x)<0\}$

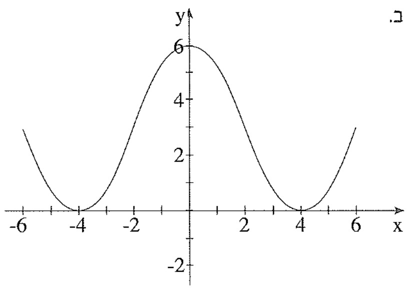
6. שרטטו גרף של פונקציה המקיימת:
נקודות האפס שלה $(2\ ,0)$, $(-4\ ,0)$.
הפונקציה חיובית בתחום $-4 < x < 2$.
הפונקציה שלילית בתחום $x > 2$, $x < -4$.

7. נתון גרף של פונקציה.
מהו תחום החיוביות שלה?

א.



ב.



8. באיזה תחום הפונקציה $g(x) = 2x - 3$ שלילית? נמקו בשתי דרכים.

אתגר

9. נתונה הפונקציה $y = x^3 - 3x^2 - 10x$.
ידוע כי נקודות האפס שלה הן: $(0\ ,0)$, $(5\ ,0)$, $(-2\ ,0)$,
וידוע כי הגרף שלה רציף.
נסו להציע דרך (ללא שרטוט הגרף) איך למצוא את התחומים בהם, הפונקציה חיובית, ואת התחומים בהם הפונקציה שלילית.
אם אתם מעוניינים, תוכלו לקרוא על כך בעמודים 44 , 45.

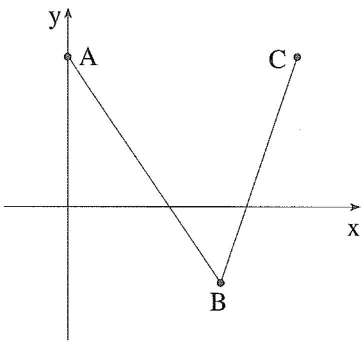
פעילויות נוספות

I. במעבדה

קיררו כוהל במעבדה, מטמפרטורה של $20^\circ C$ (טמפרטורת החדר) עד טמפרטורה של $-10^\circ C$. נניח כי כל דקה ירדה הטמפרטורה ב- $1.5^\circ C$.

אחר כך נתנו לכוהל להתחמם לטמפרטורת החדר. תהליך ההתחממות נמשך 10 דקות. נניח שגם ההתחממות נעשתה בקצב קבוע*. הפונקציה T מתאימה לזמן (בדקות) את הטמפרטורה של הכוהל (ב-$^\circ C$).

1. הגרף המתאר את הפונקציה T, נראה כך:



א. מה מייצגים הצירים x ו-y?

ב. מִצאו את שיעורי הנקודות C, B, A.
תוכלו להעזר במגדלור עם *הארות*
בעמוד 36.

ג. באיזה קצב התחמם הכוהל?

הערה: אם הנכם עובדים במחשבון גרפי עִברו לשאלה 5.

ד. שרטטו את הגרף במחשב. היעזרו בהנחיות הבאות:

במחשב

העבירו את הקטע AB.

העברת קטע/קרן/ישר ALT F7
בנקודת ההתחלה רְשמו את שיעורי A,
ובנקודת הסיום את שיעורי B.

העבירו באותו אופן את הקטע BC.

---

* שימו לב: התחממות "חופשית" תקרה בפועל באופן אחר.
התוכלו לשרטט סקיצה של גרף מתאים?

עם כל קטע ששורטט,
גם תבנית הופיעה מיד.
ליד כל תבנית התחום המתאים,
של אחד מן הקטעים.
בִּדקו את התבניות על ידי הצבות,
האם לסיפור הן מתאימות?

2. מִצאו את נקודות האפס של T.

3. באיזה תחום הפונקציה חיובית? שלילית?

4. מלאו את הטבלה.

המושג	בסימנים מתמטיים	בסיפור
	$T(x) < 0$ כאשר $\_\_ < x < \_\_$	
תחום הפונקציה		
		הטמפרטורה מעל לאפס בזמנים הבאים ...

5. בהזדמנות אחרת חיממו נוזל במעבדה ואחר כך קיררו אותו.
כל התהליך ארך 16 דקות.
הפונקציה, המתאימה לזמן החימום בדקות את טמפרטורת הנוזל, היא:
$f(x) = 0.2(x - 3)(20 - x)$.

א. כעבור כמה דקות היתה טמפרטורת הנוזל $0^\circ C$?

ב. במשך אילו דקות היתה טמפרטורת הנוזל חיובית? שלילית?

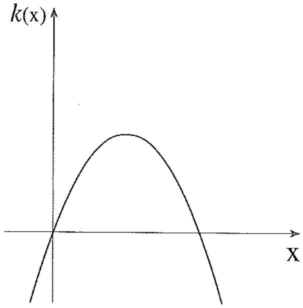
ג. מהי הטמפרטורה הגבוהה ביותר שאליה הגיע הנוזל?

ד. לאיזו טמפרטורה הגיע הנוזל בסוף התהליך?

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 37 שאלה 1.

II. סכום/מכפלה

סכום שני מספרים ממשיים הוא 6.
x מייצג את אחד המספרים.
כִּתבו תבנית למספר השני.
כִּתבו תבנית למכפלת המספרים.
לפניכם גרף הפונקציה k,
המתאימה לאחד המספרים - x,
את מכפלת המספרים.



1. התייחסו לתבנית ולגרף, וענו על השאלות הבאות:
   א. מהן נקודות האפס של ההתאמה?
   ב. באיזה תחום הפונקציה חיובית?
   ג. באיזה תחום הפונקציה שלילית?

2. בּדקו את תשובותיכם לשאלה 1 לאור ה"סיפור".

3. סמנו טענות נכונות.
   א. כשאחד המספרים חיובי, המכפלה חיובית.
   ב. כשאחד המספרים הולך וגדל, המכפלה הולכת וגדלה.
   ג. כאשר אחד המספרים שלילי, המכפלה שלילית.
   ד. אם $x > 3$ אז $k(x) > 0$.
   ה. לשני מקורות נגדיים יש תמונות שוות.
   ו. לשני מקורות הנמצאים במרחק שווה מ-3, משני צידיו, יש אותה תמונה.

III. הו פגישה שכזאת

על שני פרחים מרוחקים זה מזה מרחק של 2000 מ׳,
יושבות שתי דבורים.
הן מתחילות לעוף באותו זמן, זו לקראת זו בקו ישר,
נפגשות וממשיכות לדרכן (בקו ישר).
נניח שמהירויותיהן קבועות, כך שהאחת עפה
במהירות של 60 מ׳ בדקה, והשניה במהירות 65 מ׳ בדקה.

1. כעבור כמה זמן, מתחילת המעוף, נפגשו הדבורים?

2. א. כעבור כמה זמן, מתחילת המעוף,היה המרחק ביניהן 500 מ׳?

   ב. מתי היה המרחק ביניהן קטן מ-500 מ׳?

   ג. מתי היה המרחק ביניהן גדול מ-500 מ׳?

3. נתאים לזמן (בדקות) שעובר מתחילת המעוף, את המרחק (במ׳) בין הדבורים. נקרא לפונקציה d.

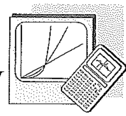
   א. הכינו טבלה לפונקציה d.
   דאגו שהטבלה תכלול גם את הזמן שאחרי הפגישה.

   ב. שרטטו גרף לפונקציה d
   בִּדקו תשובותיכם לשאלה 2 על פי הגרף.

4. א. מהי נקודת האפס של הפונקציה d?

   מה משמעותה בסיפור?

   ב. באיזה תחום הפונקציה d חיובית? שלילית? נמקו.



IV. גרף לבדיקה

בפעילות הבאה נחפש נקודות אפס של פונקציות.
נסו תחילה למצוא את התשובות בדרך אלגברית.
אחר בִּדקו את עצמכם על ידי שרטוט הגרף.
מְצאו לכל פונקציה (בעזרת הגרף) את התחום בו היא חיובית, ואת התחום בו היא שלילית.

תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם *הארות* בעמוד 36.

1. מְצאו את נקודות האפס, את תחום החיוביות ואת תחום השליליות של כל פונקציה.

א. $y = 2x - 7$

ב. $y = 7 - 2x$

ג. $y = \frac{x-6}{3}$

לשרטוט במחשב כִּתבו סוגריים סביב המונה.

ד. $y = \frac{6-x}{3}$

ה. $y = (x-4)(x+2)$

ו. $y = (4-x)(2+x)$

ז. $y = (x-1)(x-5)$

ח. $y = (1-x)(x-5)$

ט. $y = (1-x)(5-x)$

י. $y = x^2 - 36$

יא. $y = 36 - x^2$

יב. $y = x^2 - 5x$

רמז: הוציאו x לפני הסוגריים.

יג. $y = 5x - x^2$

יד. $y = (x-7)^2$

טו. $y = (7-x)^2$

אתגר

טז. $y = (x^2 - 10)x$

יז. $y = (10 - x^2)x$

2. נסו להסיק מסקנות כלליות מתרגיל 1.

אם סיימתם את הפעילות, נסו את כוחכם בעמוד 37 שאלה 2.

נקודת אפס בשלוש הצגות

התמונה היא אפס, מהו המקור?
אם נרצה לגלות, משוואה אז נפתור;
באגף האחד תמָצֵא **התבנית**
ואפס נרשום באגף השני.

או עם סמן על **הגרף** נטייל ונחפש
עד אשר עם ציר ה-x נפגש.
שם נמצא את הנקודה,
אשר אפס תמונתה.

או, נחפש את האפס **בטבלה**.
בטור התמונות אם התגלה,
אל טור המקורות המקביל נסתכל,
ושיעור x של נקודת האפס נקבל.

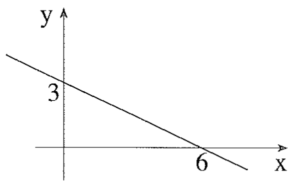
על גרף של פונקציה נוכל להביט
ולראות מתי הפונקציה חיובית.
אך אם נתונה רק התבנית,
האם על חיוביות נוכל להחליט?

הארות

1. לפעילות: "במעבדה".
כדי למצוא את שיעורי הנקודות B ו- C, תוכלו לשרטט גרף מתאים במחברת, או לחשב את השיעורים.
שימו לב! אם הטמפרטורה יורדת כל דקה ב- 1.5°C, ובסך הכל היא ירדה ב- 30°C, אז תהליך ההתקררות נמשך 20 דקות.

מעמוד 30

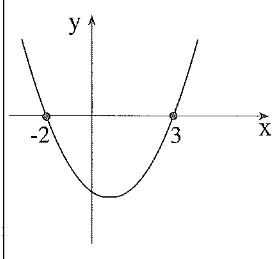
2. לפעילות: "גרף לבדיקה".
לפניכם שתי דוגמאות:
א. נתונה הפונקציה $y = 3 - 0.5x$. בנקודת האפס $y = 0$.
לכן $0 = 3 - 0.5x$
$0.5x = 3$
$x = 6$



נקודת האפס היא $(6 , 0)$.

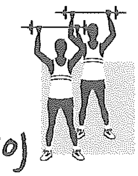
הפונקציה חיובית כאשר התמונות חיוביות, כלומר, כאשר הגרף נמצא מעל ציר ה-x. מן הגרף רואים כי הפונקציה חיובית בתחום $x < 6$ ושלילית בתחום $x > 6$.

ב. הפונקציה $y = (x - 3)(x + 2)$.
בנקודת האפס מתקיים: $0 = (x - 3)(x + 2)$.
מכפלה שווה אפס, אם אחד הגורמים הוא אפס.
לכן נקודות האפס הן: $(3 , 0)$ $(-2 , 0)$.
הגרף נראה כך:



לפי הגרף אפשר לראות כי
הפונקציה חיובית בתחום: $x > 3$, $x < -2$
הפונקציה שלילית בתחום: $-2 < x < 3$
גם על-ידי הילוך על הגרף, תוכלו לברר מתי (כלומר, באיזה תחום) התמונות חיוביות, ומתי הן שליליות.

מעמוד 34



נסו את כוחכם

1. לפעילות: "במעבדה".

א. מהן נקודות האפס של הפונקציה $f(x) = (17 - 2x)^2 \cdot x$?

באילו כלים (טבלה, גרף, תבנית) השתמשתם כדי לענות על שאלה זו?

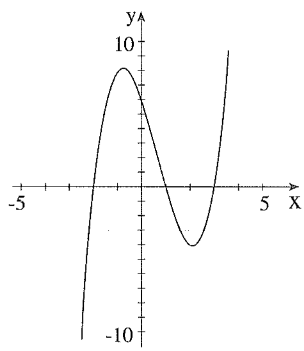
ב. כמה פעמים פוגש גרף הפונקציה את ציר ה-x? נמקו.

ג. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה f?

מעמוד 30

2. לפעילות: "גרף לבדיקה".

לפניכם הגרף של $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$



התוכלו לשרטט בעזרתו את הגרפים של הפונקציות הבאות?

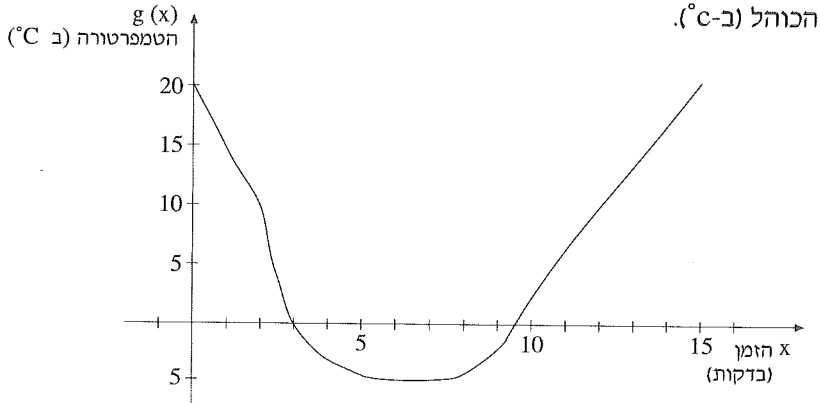
$$g(x) = (1 - x)(x - 3)(x + 2)$$

$$k(x) = (1 - x)(3 - x)(x + 2)$$

מִצאו את נקודות האפס, את תחום החיוביות ואת תחום השליליות, לכל פונקציה.

מעמוד 34

1. מקררים במעבדה כוהל, ואחר נותנים לו להתחמם חזרה לטמפרטורת החדר. הגרף הבא מראה את ההתאמה g בין הזמן (בדקות) לטמפרטורת הכוהל (ב-$^\circ c$).



א. מהן נקודות האפס של g? מה הקשר ל"סיפור"?

ב. $g(x) < 0$, מה ידוע לכם על x? ספרו במילים.

ג. מהי נקודת המפגש עם ציר ה-y? ספרו במילים.

2. א. מִצאו הצגה אלגברית של פונקציה שאין לה נקודות אפס.

ב. מִצאו הצגה אלגברית של פונקציה שיש לה שתי נקודות אפס בקטע $5 < x < 10$.

3. שרטטו גרף של פונקציה g המקיימת את התנאים הבאים:

נקודות האפס הן $(2 , 0)$ ו- $(-2 , 0)$,

$g(-3) = 5$

$g(4) < 0$

– האם תוכלו לשרטט גרף נוסף של פונקציה המקיימת תנאים אלו?

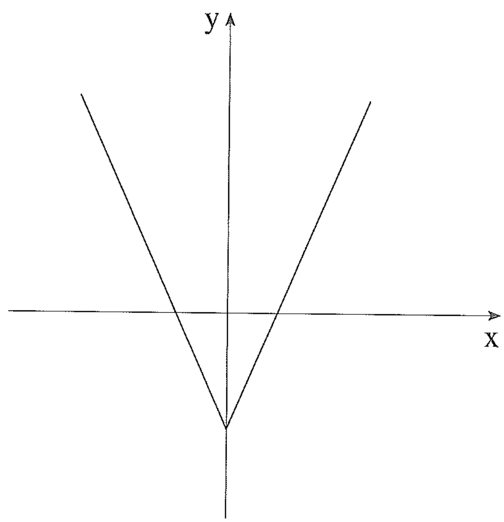
4. לכל מספר ממשי נתאים את הנגדי להופכי לו.
שרטטו גרף מתאים.

א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

ב. מהו התחום בו הפונקציה חיובית?

ג. מהו התחום בו הפונקציה שלילית?

5. לפניכם גרף של התאמה $f(x) = |3x| - 6$
שימו לב: במחשב (במחשבון) רושמים abs(3x) – 6.



א. סמנו על הגרף את נקודות האפס של f.

ב. הכינו טבלה להתאמה f, והקיפו בה את נקודות האפס.

ג. מִצאו בעזרת התבנית את נקודות האפס.

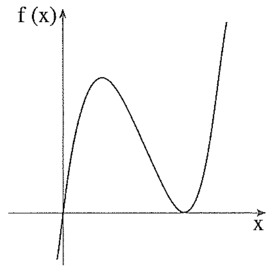
ד. רִשמו כל נקודת אפס בסימנים מתמטיים: $f(\_\_\_) = \_\_\_$.

ה. מהו התחום שבו הפונקציה חיובית?

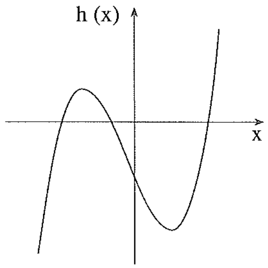
ו. מהו התחום שבו הפונקציה שלילית?

6. לפניכם הגרפים של הפונקציות l, t, j, p, k. g, h, f (ואולי נתקלתם בהן בעבר).

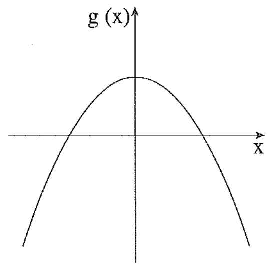
$f(x) = x(17 - 2x)^2$



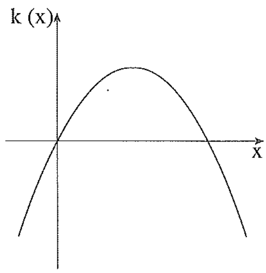
$h(x) = (x^2 - 9) \cdot (x + 1)$



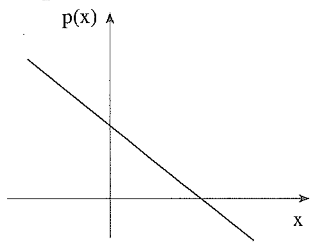
$g(x) = 12.25 - x^2$



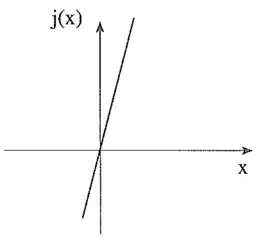
$k(x) = (30 - 2x)x$



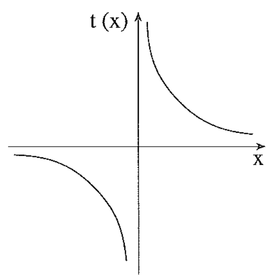
$p(x) = 1000 - 20x$



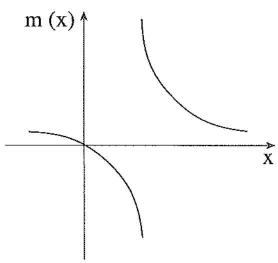
$j(x) = 4x$



$t(x) = \frac{1}{x}$



$m(x) = \frac{x}{x - 8}$



א. מהן נקודות האפס של כל פונקציה? סמנו אותן במערכות הצירים.

ב. מִצאו שני מקורות, בכל פונקציה, שהתמונה שלהם חיובית, ושני מקורות שהתמונה שלהם שלילית.
רִשמו בסימנים מתמטיים.
דוגמאות: $f(4) > 0$, $k(20) < 0$

ג. השלימו מקורות מתאימים (היעזרו בתבנית ובגרף)

$f(\quad) < f(6)$ $\qquad$ $h(3) > h(\quad)$

$g(\quad) = g(4)$ $\qquad$ $k(\quad) = k(4)$

$p(25) > p(\quad)$ $\qquad$ $t(-2) = -t(\quad)$

ד. הפונקציה k חיובית בתחום $0 < x < 15$,
ושלילית בתחום $x > 15$, $x < 0$.
רִשמו את תחום החִיוביות ואת תחום השליליות של שבע הפונקציות הנותרות.

7. לכל הפונקציות משאלה 6, סמנו √ במשבצת של פונקציה, שעבורה הטענה מתקיימת:

		f	h	g	k	p	j	t	m
א	לכל מקור שלילי יש תמונה חיובית.								
ב	לכל מקור שלילי יש תמונה שלילית.								
ג	אם $x > 0$ הפונקציה חיובית.								
ד	לכל מקור יש תמונה יחידה.								
ה	לכל תמונה יש מקור יחיד.								
ו	למקורות נגדיים יש תמונות שוות.								
ז	למקורות נגדיים יש תמונות נגדיות.								
ח	כאשר $x > 50$ הפונקציה שלילית.								
ט	לפונקציה יש שתי נקודות אפס.								
י	לפונקציה יש נקודת אפס אחת.								
יא	לפונקציה אין נקודות אפס.								
יב	כאשר x גדֵל, y גדֵל מאוד.								

8. רִשמו טענה נכונה עבור f g ו- k משאלה 6.

9. מהן נקודות האפס של ההתאמות הבאות?

א. $f(x) = (x-2)(x-5)$

ב. $f(x) = x(x+4)$

ג. $f(x) = 3x - x^2$

רמז: פרקו לגורמים.

ד. $f(x) = x^2 + x$

ה. $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

ו. $f(x) = (x-2)^2 - (x+2)^2$

ז. $f(x) = x^2 - 25$

ח. $f(x) = x^2 - 5$

ט. $f(x) = x^2 + 5$

י. $f(x) = (x+5)^2$

יא. $f(x) = (x+5)(5-x)$

יב. $f(x) = \frac{x-2}{3}$

יג. $f(x) = \frac{x-4}{-2} + \frac{3x+5}{4}$

יד. $f(x) = 2 - \frac{2x-4}{3}$

טו. $f(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{2x+5}{6}$

טז. $f(x) = \frac{x-1}{3} + \frac{1-3x}{9}$

יז. $f(x) = |x| - 7$

יח. $f(x) = |x-7|$

יט. $f(x) = |x-7| - 3$

כ. $f(x) = |x-3| - 7$

כא. $f(x) = |x| - x$

כב. $f(x) = |x| + x$

10. באילו תחומים כל אחת מהפונקציות מתרגיל 9 סעיפים ו׳-כ״ב חיובית? שלילית?

אתגר

התוכלו לענות על השאלה גם לגבי הסעיפים א׳-ה׳ ?

שימרו על כושר

1. מְצאו נקודות אפס של הפונקציות הבאות.

א. $f(x) = (3x-5)^2 + 30x$

ב. $f(x) = (3-x)^2 + (x+3)^2$

ג. $f(x) = (x-6)(x+6) + 100$

ד. $f(x) = (x-2)(x+7) - x^2$

ה. $f(x) = (x^2-16)(x^2+16)$

ו. $f(x) = x^3 - 3x^2$

ז. $f(x) = x^3 - 25x$

ח. $f(x) = (6-2x)^2 - 4x^2$

ט. $f(x) = (x+1)(x-2) - (x^2-1)$

י. $f(x) = x^2 + 7x$

יא. $f(x) = x + \frac{2-x}{5}$

יב. $f(x) = 1 - \frac{2x-3}{4}$

יג. $f(x) = \frac{1}{-2x} + \frac{1}{x}$

יד. $f(x) = \frac{x+2}{-6} + \frac{x}{3}$

טו. $f(x) = 4(x-1) + \frac{x}{2}$

טז. $f(x) = \frac{5(x-4)}{-3}$

יז. $f(x) = \frac{3x}{2} + \frac{4x}{5} - 1$

יח. $f(x) = 3 - 2(x+1.5)$

יט. $f(x) = \frac{3-x}{2} + \frac{4x-3}{8}$

כ. $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-2}$

2. מְצאו בדרך אלגברית, על ידי פתרון אי שוויון, את התחום בו כל אחת מהפונקציות הבאות חיובית.

תזכורת: כשכופלים אי-שוויון במספר שלילי יש להפוך את סימן האי-שוויון.

א. $f(x) = 2x - 7$

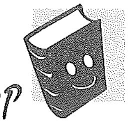
ב. $f(x) = 10 - 4x$

ג. $f(x) = \frac{5-x}{2}$

ד. $f(x) = (x+3)(x-5) - x^2$

ה. $f(x) = 2(x-1) + \frac{x}{2}$

ו. $f(x) = \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2}$



קריאה מ~~צ~~הנה

כבר נוכחנו לדעת כי מן הגרף קל למצוא
את נקודות האפס, וגם את תחומי החיוביות והשליליות.
לפעמים ידועה ההצגה בתבנית של פונקציה,
והגרף שלה אינו נתון.
האם נוכל, ללא מחשב, למצוא את נקודות האפס,
ואת התחומים בהם הפונקציה חיובית או שלילית?
לפניכם שתי דוגמאות.

דוגמה א': $f(x) = x^3 - 16x$

נניח כי ידוע שגרף של פונקציה כזו הוא רציף.
נמצא תחילה את נקודות האפס.
נסמן את נקודות האפס על ציר ה-x.

פרקו לגורמים.
מהן נקודות האפס?
סמנו את המספרים.

נקודות האפס מחלקות את הציר
לארבעה תחומים חלקיים נפרדים.
בכל אחד מהתחומים הפונקציה רק חיובית או רק שלילית.

התוכלו להסביר מדוע?

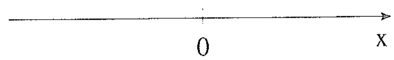
כלומר, מספיק להציב בתבנית מספר אחד
מן התחום החלקי, כדי להחליט אם הפונקציה
חיובית או שלילית בכל התחום החלקי.
למשל: עבור התחום $0 < x < 4$
נבחר נקודה מן התחום. $x = 1$.

הציבו בתבנית ובדקו -
האם הפונקציה חיובית
או שלילית בתחום
$0 < x < 4$?

באותו אופן נציב מספר בכל אחד מהתחומים
ונגלה כי הפונקציה חיובית עבור $x > 4$, $-4 < x < 0$
ושלילית עבור $0 < x < 4$, $x < -4$.

דוגמה ב': נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

ננסה למצוא את תחומי החיוביות והשליליות, בדרך הקודמת.
$f(x) = 0$ כאשר המונה הוא 0.
כלומר, $(0 , 0)$ היא נקודת האפס היחידה.



נציב $x = 1$ ונקבל $f(x) = -\frac{1}{3}$.

נציב $x = -1$ ונקבל $f(x) = \frac{1}{3}$.

האם נכון לומר כי

הפונקציה חיובית כאשר $x < 0$?

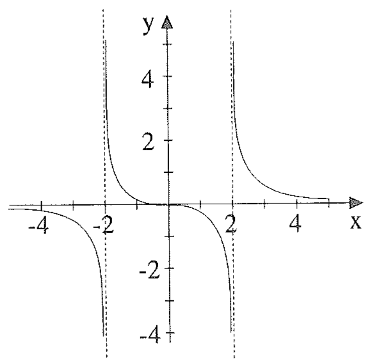
בְּדקו על ידי הצבת $x = -3$.

התשובה היא: לא! הסיבה: הגרף אינו רציף.

התוכלו לומַר מדוע?

תחום ההצבה של הפונקציה $x \neq \pm 2$

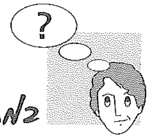
והגרף נראה כך:



נקודות החלוקה של ציר ה-x צריכות, אם כן,
לכלול מלבד נקודות האפס גם את
הנקודות שבהן הפונקציה אינה מוגדרת, או אינה רציפה.
במקרה שלנו יש להציב מספר אחד
מכל אחד מארבעת התחומים החלקיים,
הנקבעים על ידי הנקודות $x = 0$ $x = \pm 2$.

שאלה

מהם נקודות האפס, תחומי החיוביות והשליליות, של הפונקציה $y = x^4 - 9x^3$.



במחשבה לאחור

1. א. מהי ההצגה המועדפת בעיניכם, כדי למצוא נקודות אפס? נמקו.

ב. באיזו הצגה אתם מעדיפים למצוא תחום שבו הפונקציה חיובית? נמקו.

ג. מהם חסרונות הטבלה, בנושא נקודות אפס חיוביות ושליליות?

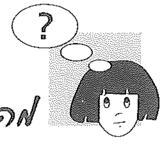
2. התיתכן פונקציה f שמקיימת את שלושת התכונות הבאות גם יחד:

f חיובית כאשר $x > 0$
f שלילית כאשר $x < 0$
אין ל-f נקודות אפס.

3. דן התבקש למצוא את תחום החיוביות של הפונקציה $y = x^2 - 9$.
הוא פתר כך:

$$x^2 - 9 > 0$$
$$x^2 > 9$$
$$x > \pm 3$$

מה דעתכם?



מה למדנו

למדנו על נקודות אפס של פונקציות.

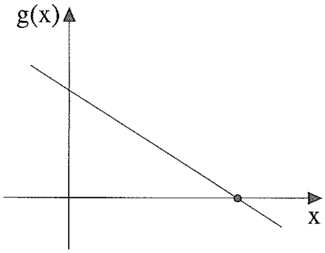
דוגמה מלווה.

נתאים לזווית בסיס במשולש שווה שוקיים, את זווית הראש שלו.

x זווית בסיס.

הצגה אלגברית של הפונקציה היא $y = 180 - 2x$.

נתייחס אל התבנית, ללא התייחסות לתוכן הבעיה, בתחום שהוא כל המספרים הממשיים. נקרא לפונקציה החדשה g.



השאלה: מהי נקודת האפס של הפונקציה?

נקודת האפס היא נקודת החיתוך עם ציר ה-x.

זוהי הנקודה המודגשת בשרטוט.

בנקודה זו $y = 0$ כלומר, $g(x) = 0$.

לכן נחפש x עבורו התמונה היא 0:

$$180 - 2x = 0$$

$$2x = 180$$

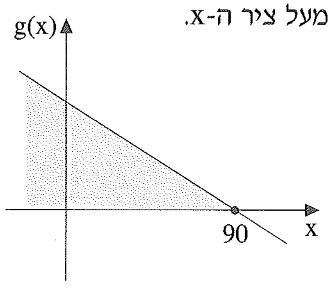
$$x = 90$$

לכן נקודת האפס היא $(90 , 0)$.

למדנו למצוא תחום חיוביות ותחום שליליות של פונקציה.

כאשר שואלים: **מתי** הפונקציה חיובית? מתכוונים לשאול **מהו התחום** עבורו התמונות חיוביות.

בגרף: אפשר לראות מהו התחום עבורו הגרף נמצא מעל ציר ה-x.



בדוגמה שלנו: $x < 90$.

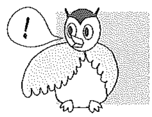
האם זה נכון גם עבור $x = -30$?

התבוננו בגרף וענו.

הציבו בתבנית לבדיקה.

בתבנית: שואלים מהו x עבורו $g(x) > 0$.
בדוגמה שלנו:

$$g(x) = 180 - 2x > 0$$
$$-2x > -180$$
$$x < 90$$



זכרו כי כפל במספר שלילי
הופך את סימן האי-שוויון.

בטבלה: בדרך כלל אי אפשר לענות על השאלה. טבלה מכילה מספר סופי של זוגות, ותחום חיוביות או תחום שליליות מכיל בהרבה מקרים, אינסוף מספרים.

החידון

בחידון פורימי, על כל תלמיד היה לענות בכתב על עשר שאלות.
את הנקודות חילקו כדלקמן:
על כל תשובה נכונה 3 נקודות.
על כל תשובה שאינה נכונה, או על אי מתן תשובה 2– נקודות.
כל תלמיד שצבר מספר נקודות חיובי קיבל פרס, לפי מספר הנקודות שצבר.

- כמה שאלות יש לפתור נכון, כדי לקבל פרס?
- כמה שאלות יש לפתור נכון, כדי לקבל את הפרס הגדול ביותר?

1. תלמידים שונים הציעו לשנות את כללי הניקוד.
ענו על השאלות בהתאם לכל הצעה.
א. גילה הציעה, לכפול את מספר הנקודות שהתקבלו במספר התשובות הנכונות.

ב. חדוה הציעה, לכפול את מספר הנקודות שהתקבלו במספר התשובות שאינן נכונות (כולל אלו שלא נענו).

ג. רינה הציעה, להוסיף 12 למספר הנקודות.

ד. שירה הציעה, לפצל את מתן הנקודות לפי מספר התשובות הנכונות:

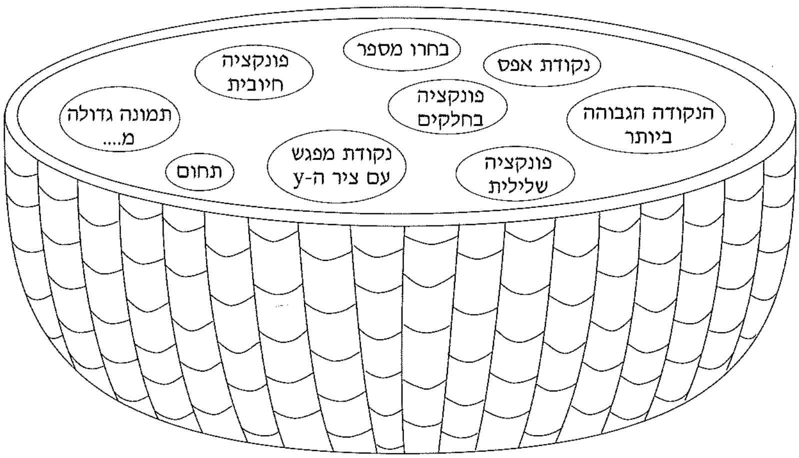
אם מספר התשובות הנכונות קטן מ-8, לפעול לפי הניקוד הרגיל, ואם מספר התשובות הנכונות 8 או יותר, לתת רק נקודה אחת על כל תשובה נכונה.

2. הציעו הצעה משלכם, שתשנה את התשובה לשאלה הראשונה שבמסגרת.
הציעו הצעה משלכם, שתשנה את התשובה לשאלה השנייה שבמסגרת.

עבודת החודש בבית

תלמידי הכיתה שיחקו במשחק.
המשחק כולל ערמה של כרטיסים.
על כל כרטיס רשומה פונקציה, בהצגה אלגברית (חלקן פונקציות בחלקים).
הכינו 10 כרטיסים מתאימים וחברו הוראות למשחק עם כרטיסים אלו.
ההוראות צריכות לכלול:
מספר המשתתפים.
איך מסדרים תור.
מה מטרת המשחק.
מי מנצח.
מתי יסתיים המשחק.

שלבו מושגים מן הסל.



3. עליה וירידה - ושוב שפה אחידה

המברק

המטרה: כל תלמיד משרטט גרף, לפי תאור מילולי שניתן על-ידי חברו.

השיטה: מחלקים את הכיתה לשתי קבוצות. הקבוצות מפנות זו לזו את הגב.
כל התלמידים מקבוצה אחת מקבלים גרף של פונקציה מסויימת.
כל התלמידים מן הקבוצה השניה מקבלים גרף של פונקציה אחרת.

התקשורת: כל תלמיד כותב על דף נפרד מברק ובו הוא מתאר **באופן מילולי** (כולל מספרים), בקצרה, את גרף הפונקציה שבידיו בלי לשרטט אותה.

הזמן המוקצב (לכתיבת המברק): 10 דקות.

המורה אוסף את הגרף מכל תלמיד שסיים לכתוב את המברק ומחליף בין תלמידים משתי הקבוצות את מברקיהם. כל אחד מהם משרטט במערכת צירים נוספת את גרף הפונקציה לפי המברק שקיבל.

המורה מחזיר את הגרפים, והתלמידים בודקים את הגרף ששרטטו.

המסקנה: שפה אחידה היתה מקלה על התקשורת בין מחבר המברק ומפענחו.

נבנה שפה אחידה בקשר לתכונות הפונקציה.

בודקים מה קורה לתמונות של פונקציה,
כאשר המקורות הולכים וגדלים.
(כלומר כאשר מתקדמים על ציר ה-x משמאל לימין)

אם גם התמונות הולכות וגדלות, אומרים **שהפונקציה עולה.**
אם התמונות הולכות וקטנות, אומרים **שהפונקציה יורדת.**
אם התמונות אינן משתנות, אומרים **שהפונקציה קבועה.**

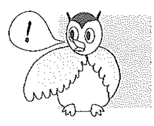
פונקציה יכולה לעלות בחלק מן התחום ולרדת בחלק אחר של התחום, או להשאר קבועה.

1. בפעילות "המברק" קיבלתם שרטוט גרף של פונקציה.

א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

ב. באיזה תחום הפונקציה חיובית? ובאיזה תחום היא שלילית?

ג. באיזה תחום הפונקציה עולה? באיזה תחום היא יורדת?
ובאיזה תחום היא קבועה?



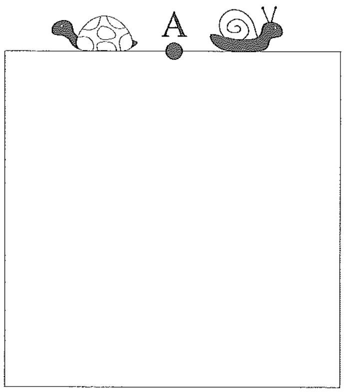
שימו לב: תחום הוא קבוצה
של מקורות, ולכן התשובה
צריכה להכיל את המשתנה x בלבד.

ד. מהן נקודות המפנה על גרף הפונקציה המבדילות בין מגמת הפונקציה (עולה, יורדת, קבועה)?

2. האם מספיק לכם המידע של הסעיפים הקודמים, כדי לשרטט גרף זהה לגרף שקיבלתם?

צב ושבלול זוחלים במסלול

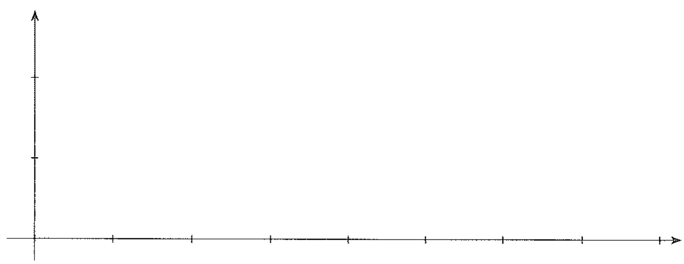
על מסלול ריבועי שאורך צלעו **2** **מ'**, זוחלים צב ושבלול.



שניהם יוצאים מן הנקודה A (באמצע צלע הריבוע)
לכיוונים מנוגדים, וזוחלים **באותו קצב**.

שניהם מגיעים חזרה לנקודה A.

נערוך התאמה בין **הדרך שעבר השבלול,**
למרחק האווירי בין השבלול והצב. נקרא להתאמה: m.



שרטטו במחברתכם, במערכת צירים כמו זו שלפניכם, לפי הסיפור
את הגרף של ההתאמה m.

1. האם ההתאמה m היא פונקציה? נמקו.

2. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

3. מהו התחום בו הפונקציה חיובית?

4. מהו התחום בו הפונקציה שלילית?

5. הסתכלו על הגרף וספרו, מה קורה למרחק בין הצב והשבלול. התייחסו לחלקים השונים של הגרף.

6. השלימו:
הפונקציה עולה בתחום: $0 < x < 1$, $\_\_\_ < x < \_\_\_$

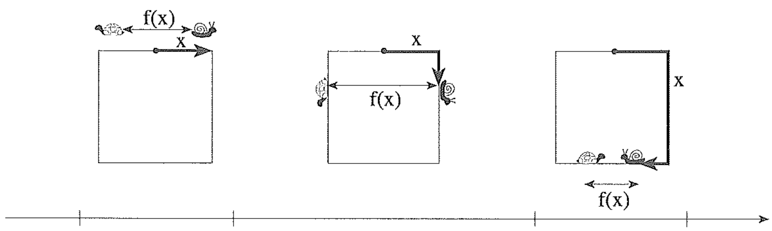
הפונקציה יורדת בתחום: ____

הפונקציה קבועה בתחום: ____

7. נסו למצוא לפונקציה תכונות נוספות.

אתגר

8. נסו למצוא תבנית מתאימה לכל חלק של הגרף, וכתבו הצגה של הפונקציה בחלקים. היעזרו בשרטוט.



בִּדקו את תבניותיכם על-ידי שרטוט הגרף במחשב.
תוכלו לקבל כיוון על-ידי מגדלור עם *הארות* בעמוד 62.

אם סיימתם את הפעילות, נסו את כוחכם בעמוד 63 שאלה 1.

בעקבות עליה וירידה

1. נתונה פונקציה כלשהי, התוכלו למצוא את תחומי העליה והירידה שלה

א. מן הטבלה? ב. מן הגרף? ג. מן התבנית?

2. שרטטו לכל סעיף גרף של פונקציה המקיימת את התכונות:

א. הפונקציה יורדת ושלילית בכל התחום.

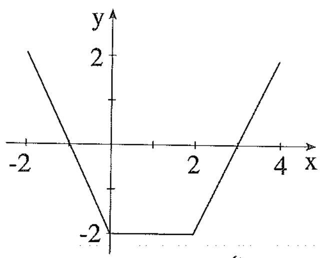
ב. הפונקציה יורדת וחיובית בכל התחום.

3. מה תוכלו לומר על נקודות אפס, תחומי חיוביות ושליליות תחומי עליה וירידה של הפונקציות הבאות:

א. $y = -2x + 5$

ב. $y = |x| - 6$

4. נתון גרף של פונקציה.



ונתונים התחומים הבאים:

$x > 0$, $x < 0$, $0 < x < 2$, $x > 3$

$x < -1$, $-1 < x < 3$, $x > 2$.

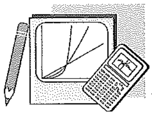
לכל אחד מן **התחומים** הנתונים,

מִצאו את המשבצת המתאימה לו בטבלה. (ראו דוגמה).

יותר ממגמה אחת	קבועה	יורדת	עולה	
				חיובית
				שלילית
		דוגמה: $x < 0$		חיובית וגם שלילית וגם מתאפסת

התוכלו למלא את המשבצות הנותרות? אם כן, מלאו. אם לא, הסבירו.

פעילויות נוספות



I. קרר . . .

בעת ניסוי, מקררים נוזל במעבדה עד אשר הטמפרטורה שלו מגיעה ל- $-6^\circ c$ ואז מחממים אותו מחדש עד ל-$0^\circ c$.

התבנית $f(x) = |2x - 24| - 6$ מתארת את הטמפרטורה (ב- $^\circ c$) של הנוזל, בהתאם לזמן שעבר (בדקות) מאז התחילו לקרר.

שימו לב! כדי לכתוב את הפונקציה במחשב או במחשבון, יש לכתוב $f(x) = ABS(2x - 24) - 6$.

1. ענו על השאלות א' - ה', וציינו "מושג מתמטי" מתאים לכל אחת מהן.

דוגמה:

א. באיזו טמפרטורה היה הנוזל לפני שהתחילו את הקירור? $18^\circ C$

המושג המתמטי: נקודת חיתוך עם ציר ה-y.

ב. אחרי כמה דקות היתה טמפרטורת הנוזל $0^\circ C$?

ג. באיזה קטע זמן היתה טמפרטורת הנוזל מתחת לאפס?

ד. כמה זמן "טיפלו" בנוזל במעבדה?

ה. באיזה קטע זמן קיררו את הנוזל?

באילו הצגות של הפונקציה השתמשתם בכל שאלה?

2. לפניכם מושגים מתמטיים. שאלו לגבי כל מושג שאלה מתאימה, הקשורה ל"סיפור" וענו עליה.

א. נקודת מינימום.

ב. הפונקציה עולה.

ג. הפונקציה חיובית.

ד. קבוצת התמונות.

אם סיימתם את הפעילות נסו את כוחכם בעמוד 63 שאלה 2.

II. חקירת פונקציות

לפניכם שני זוגות של פונקציות בהצגה אלגברית, וכן טבלה.

א. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x-3\right)^2 x$ $\qquad$ $g(x) = \left(\frac{1}{2}x-3\right) x^2$

ב. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x-3\right) x$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x-3\right) x}$

1. בחרו אחד מן הזוגות של הפונקציות (בכל זוג f ו- g). רשמו את הפונקציות שבחרתם בשתי המשבצות העליונות בטבלה, והתחילו למלא את הטבלה. נסו תחילה לעשות זאת בדרך אלגברית.

הפונקציה		
תחום		
נקודות אפס		
נקודות חיתוך עם ציר ה-y		
תחומי חיוביות		
תחומי שליליות		
תחומי עליה		
תחומי ירידה		

2. שרטטו את הגרפים של הפונקציות שבחרתם והשלימו את הטבלה לפי הגרפים.
נסו לגלות מן הטבלה, מה המשותף לכל הגרפים. התוכלו להסביר מדוע?

III. אוסף תכונות*

לפניכם רשימת תכונות של פונקציות.

א. הפונקציה עולה בכל תחומה.

ב. ישנם מספרים שאינם שייכים לתחום הפונקציה.

ג. גרף הפונקציה עובר דרך ראשית הצירים.

ד. הפונקציה חיובית בכל תחומה.

ה. הפונקציה מקיימת $f(2) = 4$.

ו. גרף הפונקציה חותך את ציר y בנקודה $(4\ ,\ 0)$.

ז. יש לפונקציה נקודות אפס.

1. לכל תכונה מְצאו תבנית ובְּדקו על-ידי שתשרטטו במחשב, גרף של פונקציה המקיימת את התכונה. העתיקו את התבנית והסקיצה למחברתכם.

2. התוכלו לשרטט גרף של פונקציה המקיימת את כל התכונות?
אם כן, שרטטו. אם לא, מְצאו את מספר התכונות (מן הרשימה) הגדול ביותר שפונקציה כלשהי יכולה לקיים. נסו לשרטט במחשב פונקציה כזו.

אתגר

נסו לשרטט במחשב פונקציה המקיימת מספר גדול של תכונות (מן הרשימה).
האם הצגת הפונקציה בחלקים מקלה עליכם את המשימה?

* ניתן להחליף את הפעילות הזו ואת הפעילות הבאה אחריה במשחק "חסימות". הוראות המשחק בעמוד 110.
את כרטיסי המשחק יש לגזור מן הבריסטול בסוף החוברת.

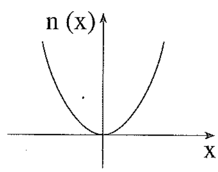
IV. אוסף פונקציות*

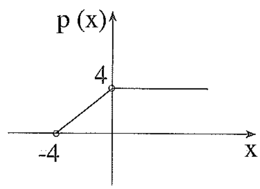
לפניכם אוסף של תשע פונקציות חלקן בהצגה אלגברית,
וחלקן בהצגה גרפית.

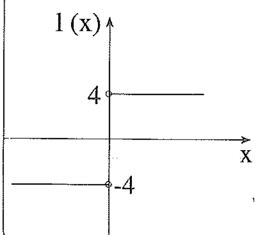
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad j(x) = x^2$$

$$m(x) = \frac{4x}{|x|} \qquad\qquad h(x) = \begin{cases} x^3 + 4 & x \le 0 \\ 4 & x > 0 \end{cases}$$

$$k(x) = x \qquad\qquad g(x) = 4$$







1. רשמו לגבי כל פונקציה, אילו מן התכונות אשר בפעילות III היא מקיימת.

2. התוכלו למצוא זוגות של פונקציות שוות?

* ניתן להחליף פעילות זו ואת הפעילות הקודמת לה במשחק "חסימות". הוראות המשחק בעמוד 110.
את כרטיסי המשחק יש לגזור מן הכרטיסים בסוף החוברת.

V. היום הארוך ביותר

לפניכם טבלה של זמני עליית השחר ושקיעת החמה,
לשנים תשנ״ג, תשנ״ד*.
שימו לב! הזמנים ערוכים בשעות ודקות ולא בכתיב עשרוני.

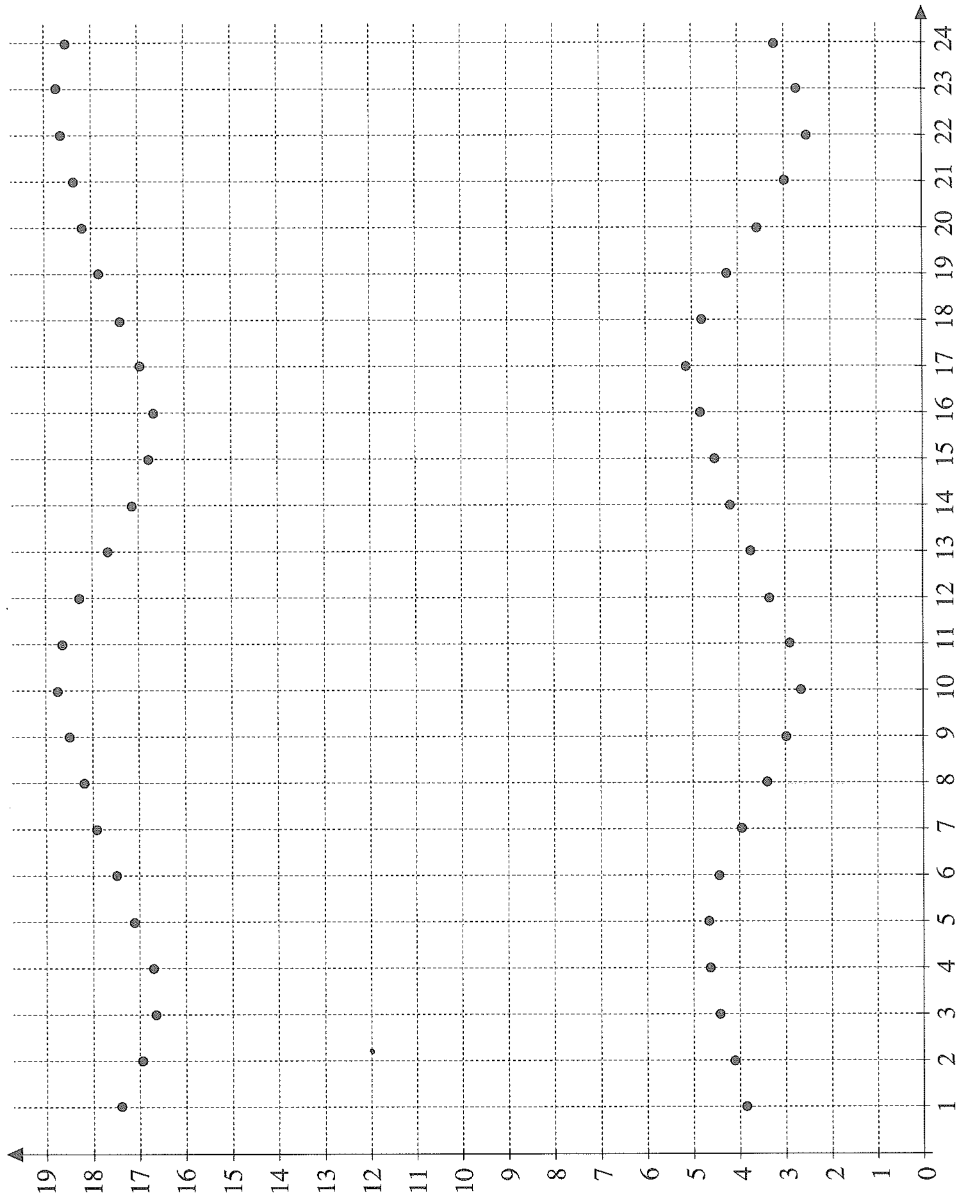
	עליית השחר		שקיעת החמה	
	תשנ״ג	תשנ״ד	תשנ״ג	תשנ״ד
א׳ תשרי	3:58	3:49	17:32	17:48
א׳ חשוון	4:19	4:11	16:57	17:10
א׳ כסלו	4:40	4:32	16:40	16:44
א׳ טבת	4:58	4:53	16:45	16:41
א׳ שבט	5:02	5:03	17:08	16:59
א׳ אדר	4:43	4:51	17:34	17:26
א׳ ניסן	4:07	4:20	17:54	17:47
א׳ אייר	3:24	3:38	18:14	18:07
א׳ סיוון	2:49	3:00	18:35	18:28
א׳ תמוז	2:37	2:37	18:50	18:46
א׳ אב	2:54	2:45	18:47	18:50
א׳ אלול	3:24	3:14	18:24	18:34

בעמוד הבא תמצאו גרף של ההתאמה k המתאימה לתחילת כל חודש בשנים תשנ״ג ותשנ״ד, את זמן עלות השחר.
שימו לב! על ציר ה-x מסומנות 24 שנתות (שֶׁנֶת לכל חודש).
באותה מערכת צירים משורטט גרף של ההתאמה p המתאימה לתחילת כל חודש, את זמן שקיעת החמה.

1. כִּתבו את כל המידע שתוכלו לגלות מן הגרפים.
תוכלו לקבל כיוון על ידי מגדלור עם הארות בעמוד 62.

* השעות נתונות ללא התחשבות בשעון קיץ.

2. תארו במערכת צירים נוספת את הפונקציה המתאימה לתחילת כל חודש את **אורך היום**. תוכלו להשתמש בנייר שקוף בסוף החוברת.
איזה מידע נוסף תוכלו לגלות מגרף זה?



אם סיימתם את הפעילות, נסו את כוחכם בעמוד 63 שאלה 3.

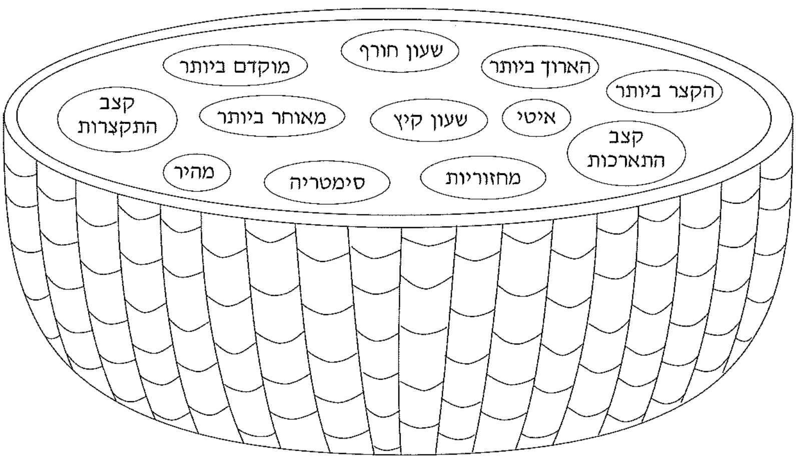
1. לפעילות: "צב ושבלול זוחלים במסלול".
כדי למצוא תבנית לחלק השלישי של הגרף, נזכור כי גרף זה מתייחס למקרה, שהשבלול והצב נמצאים על הצלע התחתונה של הריבוע לפני הפגישה.
x - הדרך שעבר השבלול.
m(x) - המרחק האווירי בין השבלול והצב.
קראו משמאל לימין.

סכום המרחקים שעברו השבלול והצב	–	היקף הריבוע	=	המרחק האווירי בין השבלול והצב		כאשר $3 < x < 4$

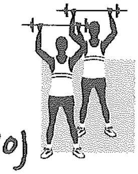
$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = m(x)$$

מעמוד 53

2. לפעילות: "היום הארוך ביותר"
תוכלו להיעזר בסל.



מעמוד 60



נסו את כוחכם

1. לפעילות: "צב ושבלול זוחלים במסלול".

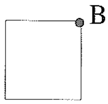
חִזרו על הפעילות:

א. כאשר הצב והשבלול ממשיכים לזחול במסלול לעולם.

מהי התכונה החדשה של הפונקציה?

ב. כאשר הצב והשבלול יוצאים מנקודה B.

רמז: משפט פיתגורס.



ג. עם התיקון הבא: כאשר השבלול מימין לצב, המרחק ביניהם נחשב חיובי, וכאשר השבלול משמאל לצב (אחרי המפגש הראשון), המרחק ביניהם נחשב שלילי.

מעמוד 53

2. לפעילות: "קרר . . ."

נסו לכתוב תבנית לכל חלק של הגרף בפעילות זו.

אפשר לבנות טבלה לכל חלק של הגרף (על ידי הילוך על הגרף) ולנסות לנחש את התבנית.

אפשר לשרטט במחשב כל קטע מן הגרף לחוד, ולקבל מן המחשב את התבנית המתאימה לו.

תוכלו גם לקרוא כיצד למצוא את התבניות בדרך אלגברית, ללא שימוש בגרף, בעמוד 74.

מעמוד 56

3. לפעילות: "היום הארוך ביותר".

גל יושב על הגלגל הענק, בלונה פארק.

א. שרטטו סקיצה של גרף ההתאמה, בין המרחק שהוא עובר, לבין מרחקו מן האדמה.

ב. השוו את הגרף ששרטטתם, עם הגרף בפעילות "היום הארוך ביותר".

מעמוד 60

הכיוון משמאל לימין

אם הפונקציה עולה, יורדת או קבועה,
בזאת להבחין איך תדע?
תן לאצבעות ללכת במקומך
משמאל לימין, על הגרף שלך.

אם האצבעות עלו, שם עולה הגרף,
והפונקציה עולה בעקבותיו.
ואם תוך כדי טיול הגובה לא השתנה,
אז אומרים שהפונקציה קבועה.

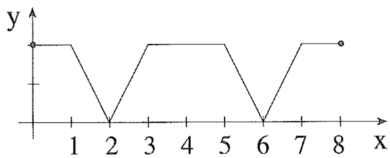
אך לא תמיד הפונקציה מתנהגת
באופן אחיד בכל תחומה.
לפעמים היא עולה וגם יורדת,
ובחלק מן התחום יתכן שהיא קבועה.

אז כאשר נשאלת השאלה:
באיזה תחום הפונקציה עולה?
על ציר ה-x המידע נמסר -
קטע, קרן או ישר.

מן הגרף בקלות את ההתנהגות מגלים,
אך לפעמים גם שיקולים,
אשר על התבנית מופעלים,
אל התחומים המתאימים מובילים.

אוסף משימות

1. שנו פרטים אחדים, בסיפור של הצב והשבלול, כדי לקבל את הגרף הבא:



רשמו את התחומים בהם הפונקציה עולה, יורדת או קבועה.

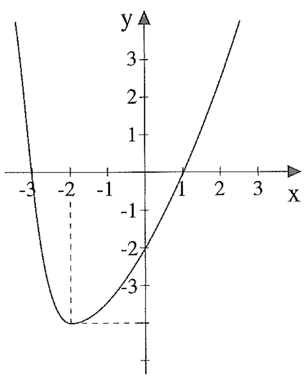
דוגמה: הפונקציה עולה כאשר $2 < x < 3$, $\_\_\_ < x < \_\_\_$

2. לכל אחד מהסעיפים הבאים, שרטטו גרף של פונקציה, שתחומה כל המספרים, והיא מקיימת את התכונות:
א. הפונקציה **עולה ושלילית** בכל התחום.
ב. הפונקציה **יורדת וחיובית** בכל התחום.
ג. הפונקציה **קבועה** בכל התחום.
ד. הפונקציה **עולה** בחלק מהתחום, ובחלק אחר **יורדת**.

3. **בתחום** $x > 0$ כל אחת מהפונקציות הבאות עולה, יורדת או קבועה.
בדקו על-ידי שיקולים אלגבריים, איך "מתנהגת" כל פונקציה בתחום זה.

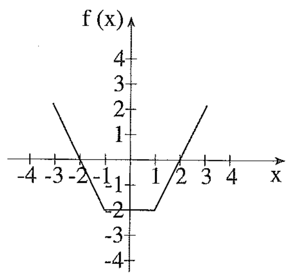
א. $f(x) = x^2$	ד. $f(x) = 4$	ז. $f(x) = -x^3$
ב. $f(x) = x^3$	ה. $f(x) = -x^2$	ח. $f(x) = x - 2$
ג. $f(x) = \frac{1}{x}$	ו. $f(x) = 3x$	ט. $f(x) = 10 - 2x$

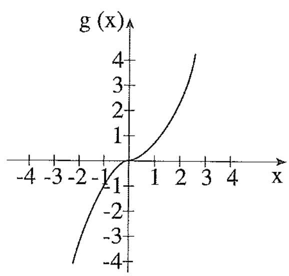
4. לפניכם גרף של פונקציה.
רשמו את התחומים בהם הפונקציה:
א. יורדת.
ב. יורדת וגם חיובית.
ג. יורדת וגם שלילית.
ד. שלילית.
ה. שלילית וגם עולה.

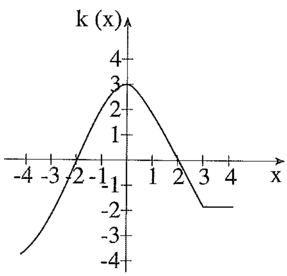


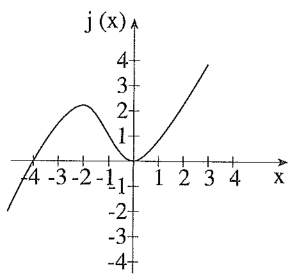
5. רשמו בטבלה הבאה את התחומים המתאימים לגבי כל אחת מן הפונקציות הבאות.

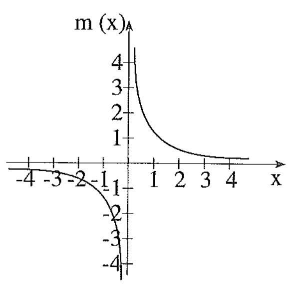
הפונקציה	נקודות אפס	חיובית	שלילית	עולה	יורדת	קבועה
דוגמה: $f(x)$	$2\ ,\ -2$	$x<-2$, $x>2$	$-2<x<2$	$x>1$	$x<-1$	$-1<x<1$
$g(x)$						
$k(x)$						
$j(x)$						
$m(x)=\frac{1}{x}$						
$h(x)$						

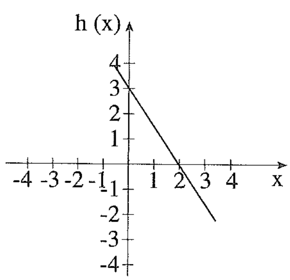












6. התאימו לכל תיאור מילולי, אחד מן הגרפים המופיעים למטה.

הפונקציה המתאימה:

א. לזמן שעבר את אורכו של נר בוער.

ב. לגילו של אדם את גובהו.

ג. לגילו של אדם את משקלו.

ד. למספר מטבעות של חצי שקל, את סכום הכסף הכלול בהן.

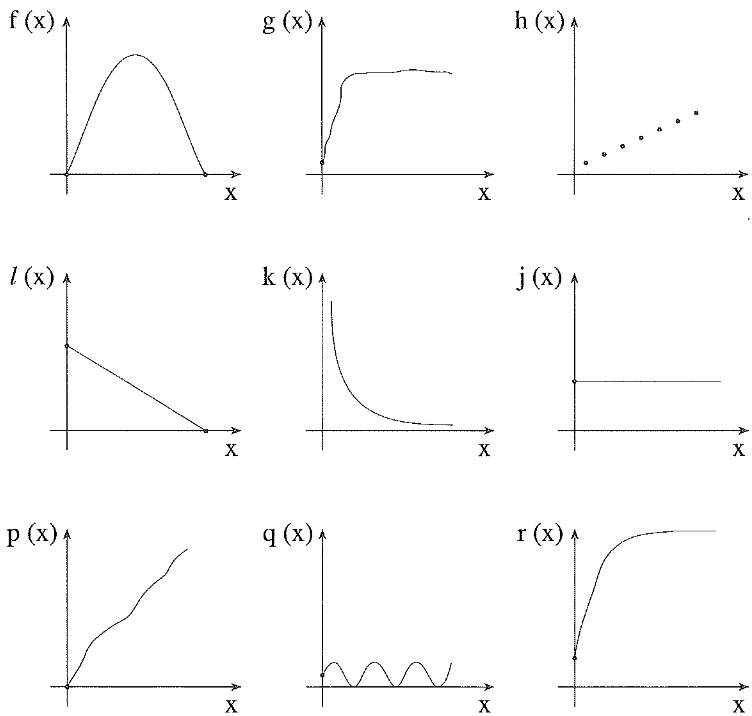
ה. לזמן שחלף, את המרחק שעברה מכונית.

ו. לזמן שחלף, את גובהו של כדור שנזרק למעלה ונופל חזרה.

ז. למספר חיובי, את ההופכי לו.

ח. לאורך היתר של משולש ישר זווית, את הזווית הגדולה שלו.

ט. לדרך שעבר גלגל של אופניים את הגובה של נקודה (הנמצאת עליו) מעל הכביש.

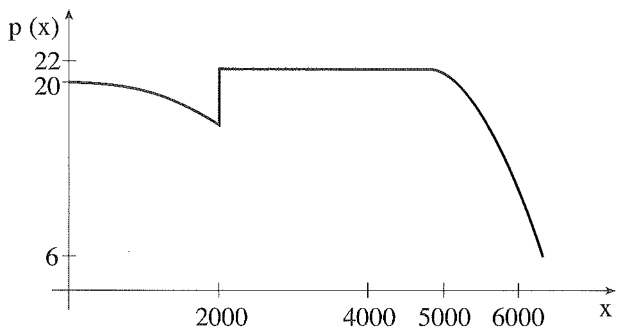


7. לפניכם גרף של התאמה. התאמה זו מתאימה למספר הסיבובים שעשה גלגל מכונית מתחילת הנסיעה, את לחץ האוויר (באטמוספירות) בגלגל.

א. ספרו במילים את ה"סיפור" שהגרף מתאר.

ב. רִשמו את התחומים בהם ההתאמה היא פונקציה.

ג. רִשמו תחומים בהם הפונקציה עולה, יורדת, קבועה.



8. שרטטו, בכל סעיף, דוגמה לגרף של פונקציה, המקיימת את התנאים הבאים:

א. $f(2) = 1$, f עולה כאשר $x < 0$, f חיובית כאשר $x > -2$.

ב. $g(2) = -3$, ל-g אין נקודות אפס, g יורדת כאשר $-2 < x < 2$.

ג. h פונקציה קבועה, $h(0) = 3$.

ד. הפונקציה k מוגדרת בתחום $-4 < x < 4$, יש ל-k שתי נקודות אפס,
ופרט להן היא חיובית בכל התחום,
k עולה כאשר $3 < x < 4$, $-3 < x < 3$.

9. שרטטו סקיצה של גרף לכל אחת מההתאמות הבאות:

א. התאמה בין גיל התינוק למשקלו.

ב. התאמה בין מספר סיבובי הגלגלים, לדרך שנסעה מכונית.

ג. התאמה בין כמות הירקות שהגיעה לשוק, לבין מחיר הירקות.

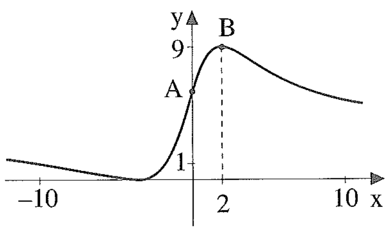
ד. התאמה בין גובהי התלמידים בכיתה ט׳, לבין מספר התלמידים שהם בעלי אותו גובה.

ה. התאמה בין מספר כלשהו (שונה מ-0) לבין מכפלתו בהופכי לו.

ו. התאמה בין מספר כלשהו (שונה מ-0) לבין סכומו עם ההופכי לו.

10. לפניכם גרף הפונקציה

$$f(x) = \frac{3(x+4)^2}{x^2+8}$$

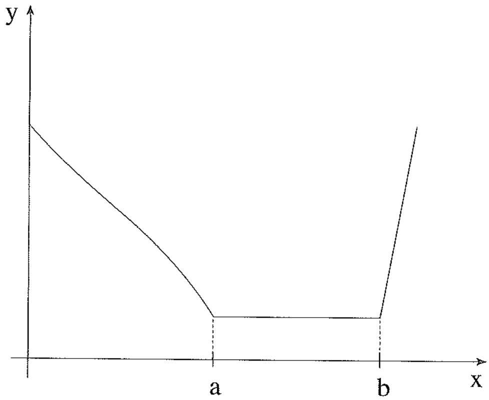


א. מִצאו את שיעורי הנקודות A ו B.

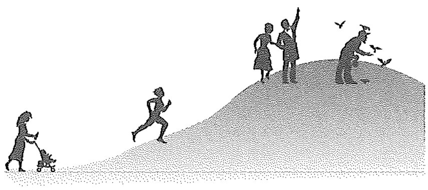
ב. מִצאו את התחום בו הפונקציה עולה.

ג. מהו התחום בו הפונקציה חיובית?

11. לפניכם גרף המתאר את כמות הדלק הנמצא במיכל מכונית, כפונקציה של הזמן מתחילת מסעה. תארו את האירועים שעברה המכונית בפרקי הזמן השונים.

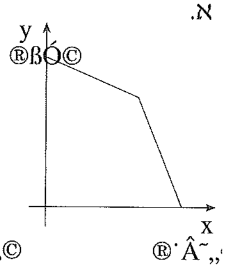


12. לפניכם שרטוט של גבעה. קבוצת מטיילים טפסה על הגבעה.

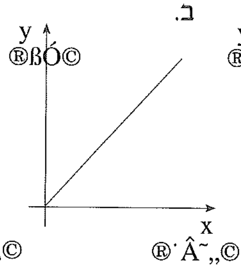


מבין הגרפים הבאים בחרו את הגרף המתאים ביותר, לדעתכם, לתאר את המרחק שהלכו המטיילים בהתאם לזמן, מתחילת העליה ועד לפסגה. נמקו את בחירתכם. נמקו מדוע הגרפים האחרים אינם מתאימים.

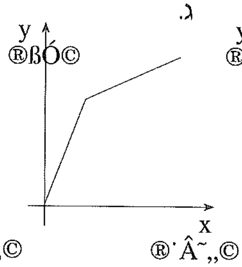
א.



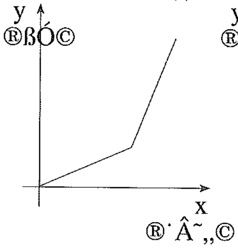
ב.



ג.



ד.



שימרו על כושר

פשטו והשתמשו בשיקולים אלגבריים, כדי להחליט אם הפונקציה עולה, יורדת או קבועה, בכל חלק של התחום בו היא מוגדרת.
הסבירו את החלטתכם.

דוגמה:

א. $f(x) = (x-3)^2 - (x+3)^2$

$f(x) = x^2 - 6x + 9 - (x^2 + 6x + 9)$

$f(x) = x^2 - 6x + 9 - x^2 - 6x - 9$

$f(x) = -12x$

כאשר המקורות גדֵלים התמונות הולכות וקטנות, כי כפל מספרים ההולכים וגדלים במספר שלילי, הופך את הסדר ביניהם. לכן הפונקציה יורדת.

ב. $f(x) = (x+4)(x-4)x + 16x$

ג. $f(x) = x^2 - (x+5)(x-5)$

ד. $f(x) = (x-6)^2 - (x-6)(x+6)$

ה. $f(x) = \frac{x-9}{9-x}$

ו. $f(x) = \frac{x^2-9}{3-x}$

ז. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(1-x)^2}$

ח. $f(x) = (1-x)^2 - (x-1)^2$

ט. $f(x) = \frac{5x+2}{x} - 5$

י. $f(x) = \frac{2x+1}{2x} - \frac{x+2}{x}$

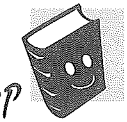
יא. $f(x) = (x+4)^2 - (x+3)^2$

יב. $f(x) = (x-2)^2 - (x-2)^2$

יג. $f(x) = x^2 - (x-1)^2$

יד. $f(x) = (x-2)(x+3) - x^2$

טו. $f(x) = x^2 - (x-2)(x+3)$



קריאה מ~~ע~~הנה I

אפשר להבין את המושג "פונקציה עולה"
אם מסתכלים על הגרף שלה.
נצעד על הגרף משמאל לימין.
אם עלינו, גם הפונקציה נחשבת עולה.

נשאלת השאלה: האם אפשר להחליט
לפי הצבות בתבנית, באיזה תחום הפונקציה עולה?

נברר זאת על-ידי דוגמה:
נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.
נבחר: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$
התקדמנו ימינה מ-x_1 לכיוון x_2.

האם גם התמונות גדלו?

נחשב את התמונות:
$f(3) =$ _____ $f(5) =$ _____
מתקיים: $f(5) > f(3)$

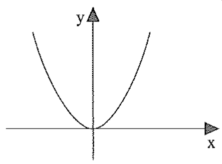
האם בזאת אפשר להיות **בטוחים** כי בתחום $3 \le x \le 5$ הפונקציה עולה?

ניקח דוגמה אחרת:
נבחר: $x_1 = -3$ $x_2 = 5$
התקדמנו ימינה מ- x_1 לכיוון x_2
$f(-3) =$ _____ $f(5) =$ _____
מתקיים: $f(5) > f(-3)$

האם אפשר להיות בטוחים כי בתחום $3 \le x \le 5$ הפונקציה אינה יורדת?

האם בזאת הוכחנו כי בתחום $-3 \le x \le 5$ הפונקציה עולה?

הגרף של הפונקציה $f(x) = x^2$
נראה כך:



לכן, בודאי לא בכל התחום
$-3 \le x \le 5$ הפונקציה עולה.

כלומר, על-ידי הצבת מקרים בודדים בתבנית,
לא נוכל להחליט אם הפונקציה עולה או יורדת.
ניקח לכן, שני ערכים כלליים מן התחום
x_1 ו-x_2, $x_2 > x_1$, נברר מה
קורה לערכי הפונקציה בנקודות אלה.
לדוגמה: בפונקציה $f(x) = x^2$
כאשר x חיובי,
ככל שערכי-x (המקורות), הולכים וגְדֵלים,
גם הריבועים שלהם (התמונות), הולכים וגְדֵלים.
לכן הפונקציה עולה בתחום $x > 0$.

ומה קורה כאשר x שלילי?
ככל ש-x הולך וגדֵל הוא מתקרב
לאפס לכן . . .

לסיכום:

פונקציה עולה בתחום מסוים* אם **לכל** $x_2 > x_1$ השייכים לתחום זה, קיים גם $f(x_2) > f(x_1)$.

שאלות

1. השוו את ההגדרה שבסיכום, להגדרה בעמוד 52 ותרגמו.

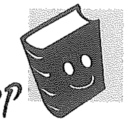
לפי ההגדרה הקודמת	לפי ההגדרה החדשה
כאשר המקורות הולכים וגדלים	....
.	קיים גם $f(x_2) > f(x_1)$

2. מדוע דרושה המילה **לכל** בהגדרה החדשה?

3. התוכלו להגדיר, בעזרת סימנים מתמטיים, פונקציה יורדת בתחום מסויים?
פונקציה קבועה בתחום מסויים?

4. נתונה הפונקציה $g(x) = 3x$.
הראו שהפונקציה עולה לפי כל אחת מההגדרות.

* מדובר רק בתחום שהוא קטע או קרן או ישר.



קריאה מונחה II

נלמד להציג בחלקים את הפונקציה $g(x) = |2x - 24| - 6$

מן הפעילות "במעבדה" בעמוד 56.

ראינו שנקודת המפנה היא הנקודה שבה התמונה

היא הקטנה ביותר.

זה קורה כאשר הערך המוחלט מתאפס.

התוכלו להסביר מדוע?

כלומר כאשר $2x - 24 = 0$.

מהו x בנקודה זו? מהו y?

נחלק את ציר המספרים על-ידי שיעור x

של הנקודה הזו, לשני חלקים.

$$\xrightarrow[12]{\qquad\qquad\qquad|\qquad\qquad\qquad}$$

מפני שזו נקודת מפנה כדאי לנו לבדוק כל חלק בנפרד.

אם $x > 12$ אז $2x - 24 > 0$.

סמנו את התחום $x > 12$

לכן $|2x - 4| = 2x - 4$

כלומר: $f(x) = 2x - 24 - 6$

לכן כאשר $x > 12$ $f(x) = 2x - 30$.

מדוע סילקנו את סימני הערך המוחלט מן התבנית?

אם $x < 12$, תוצאות ההצבה של x ב- $2x - 24$

שליליות. לכן $|2x - 4| = -(2x - 4)$

כלומר: $f(x) = -(2x - 24) - 6$

לכן כאשר $x < 12$ $f(x) = -2x + 18$.

התוכלו לעקוב אחר הקריאה בעזרת $x = 10$?

ולכן ההצגה האלגברית לפי ענפים של f היא:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 18 & x < 12 \\ 2x - 30 & x > 12 \end{cases}$$

זה נכון עבור הפונקציה ללא קשר לסיפור.

התוכלו לתקן את התחומים כדי שיתאימו לסיפור?

בעזרת הצגה של הפונקציה בחלקים אפשר

למצוא את תחומי העליה והירידה שלה.

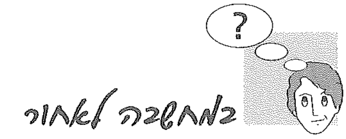
נסו לעשות זאת.

שאלה:

אם הגעתם עד הלום, נסו לתאר את הפונקציה $y = 3 - |x + 7|$ בחלקים.

מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה?

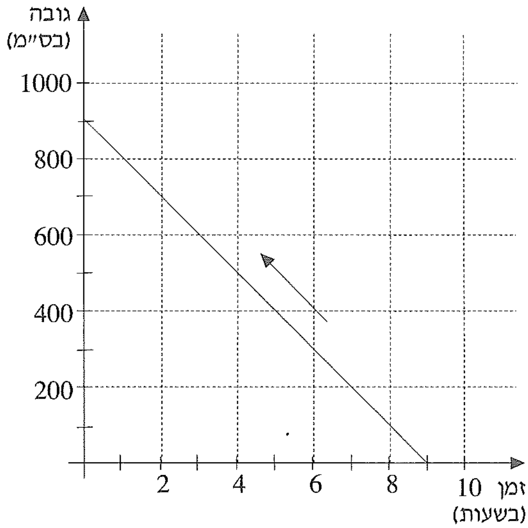
בִּדקו בעזרת המחשב או המחשבון.



במחשבה לאחור

1. לפניכם גרף המתאר את גובה פני המים (בס"מ) במיכל, בהתאם לזמן שעובר (בשעות).

תלמידי הכיתה התבקשו לתאר את התהליך.



יהודה אמר:

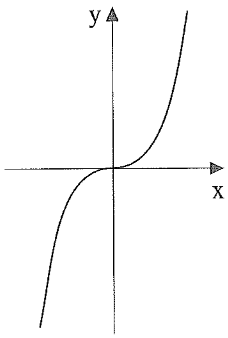
בתחילת המדידה המיכל ריק וזמן המיכל (הזמן "האגור" למיכל) הוא 9 שעות. מיכל המים כל הזמן מתמלא, ולעומת זאת הזמן של מיכל המים נגמר לאט לאט.

קצב ההתמלאות של המיכל הוא 100 סמ' לכל שעה שמסתיימת.

בסוף ההתמלאות גובה פני המים במיכל הוא 900 סמ' והזמן ה"אגור" למיכל (הוא אפס) מסתיים.

התוכלו להסביר את טעותו של יהודה?

2. א. לפניכם גרף של פונקציה.
יוסי אמר:
ככל שמתרחקים מאפס ימינה,
התמונות הולכות וגדלות, לכן
הפונקציה עולה בתחום $x > 0$.
ככל שמתרחקים מאפס שמאלה,
התמונות הולכות וקטֵנות,
לכן הפונקציה יורדת בתחום $x < 0$.
מהי טעותו של יוסי?
כיצד תסבירו לו?



ב. נתונה פונקציה $f(x) = x^4$.
דנה רצתה לברר אם הפונקציה עולה ,
לכן היא חישבה:

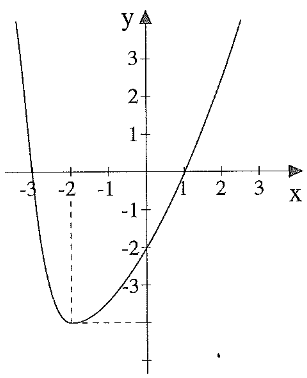
$$f(-1) = 1$$
$$f(2) = 16$$

ואז אמרה:
כאשר המקור גדֵל מ -1 ל-2 גם התמונה גדלה מ 1 ל 16.
לכן הפונקציה $f(x) = x^4$ עולה.

מה דעתכם?

3. דני אמר:
הפונקציה g המתוארת בגרף,
עולה בתחום $x > 1$, $x < -3$.

מה מקור הטעות של דני?



הטפסן העקשן

א. אם עוסקים בעליה וירידה,
הנה אחוד לכם חידה.
לרגלי החומה עמד צב,
ובדק את המצב.

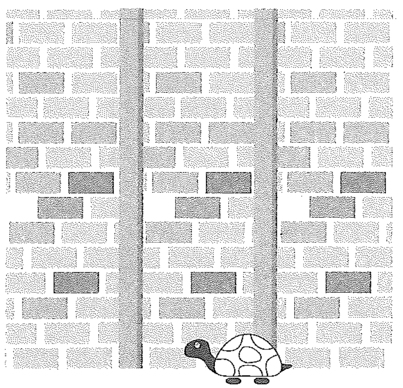
ב. החומה חלקה, גובהה מרתיע,
כיצד אל צידה השני יגיע?
הצב החרוץ לא התיאש,
ומיד התחיל לטפס.

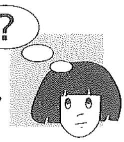
ג. הוא **עלה מטר בדקה**,
אך החומה היא חלקה,
לכן החליק **חצי מטר חזרה**
כהרף עין זה קרה.

ד. ושוב, **מטר בדקה** עלה אל על,
ושוב **חצי מטר חזרה** נפל.
וכך התהליך נשנה,
עד שהגיע אל ראש החומה.

ה. ועתה נשאלת השאלה:
כמה זמן הצב עלה
אל ראש החומה התלולה,
אם גובהה **5** מ' היה?

ו. כמו כן, אתם מתבקשים
לשרטט פה גרף מתאים.





מה למדנו

למדנו לגלות מן הגרף באילו תחומים פונקציה עולה, יורדת או קבועה.

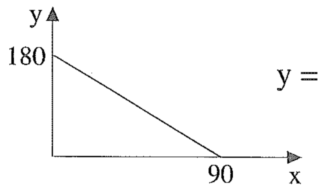
דוגמה מלווה:

נתאים לזווית בסיס במשולש שווה שוקיים את זווית הראש שלו.

x זווית הבסיס.

הצגתה האלגברית של הפונקציה היא $y = 180 - 2x$

הצגה גרפית של הפונקציה:



מן הגרף אפשר לגלות כי כאשר ערכי ה-x הולכים וגדֵלים, ערכי ה-y הולכים וקטנים, כלומר, הפונקציה יורדת.
ואמנם כאשר זווית הבסיס במשולש שווה שוקיים גדֵלה, זווית הראש קטֵנה, כי סכום הזוויות נשאר קבוע.

למדנו לערוך שיקולים על התבנית, כדי להחליט על עליה וירידה.

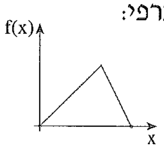
בתבנית שלנו $y = 180 - 2x$ ככל שערכי x גדֵלים ערכי ה-y קטֵנים, כי מפחיתים מספרים הולכים וגדֵלים ממספר קבוע, וההפרש הולך וקטֵן.

דוגמה מלווה נוספת:

נתאים לזווית בסיס במשולש שווה שוקיים את **הזווית הקטנה** מבין השתיים הנותרות. ראינו כי אפשר לתאר פונקציה זו בחלקים:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 60 \\ 180 - 2x & 60 \le x \le 90 \end{cases}$$

והתאור הגרפי:



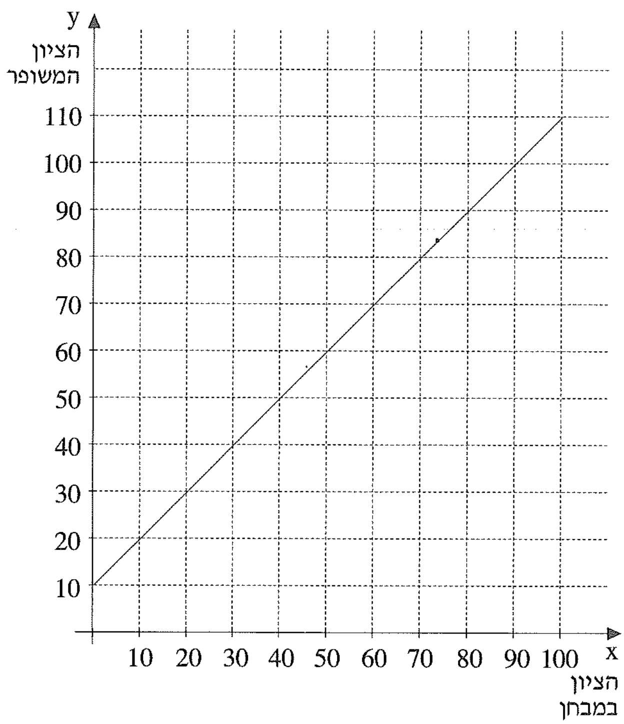
מן ההצגה האלגברית והגרפית אפשר לגלות כי הפונקציה עולה בתחום $0 < x < 60$ ויורדת בתחום $60 < x < 90$. ואומנם כאשר $0 < x < 60$ הזווית הקטנה מבין השתיים הנותרות היא זווית הבסיס השניה, ושתי זוויות הבסיס גדֵלות ביחד.
וכאשר $60 < x < 90$ הזווית הקטנה מבין השתיים הנותרות היא זווית הראש וככל שזווית הבסיס גדֵלה, זווית הראש קטֵנה.

4. שתי פונקציות או יותר

בעיה מן החיים (א')

במבחן קשה קיבלו התלמידים ציונים נמוכים.
המורה החליט לשפר את הציונים, הוא הציע ארבע דרכים לשיפור הציון.

דרך אחת לשיפור הציון מוצגת בגרף שלפניכם.
הסבירו במילים, מהו עקרון שיפור הציון המוצג.
תוכלו להיעזר בטבלה.



	במחשב	במחשבון גרפי
1. מְצאו תבנית לדרך זו.	$g(x) =$ ______	$\boxed{y=}$ $y_1 =$ _____
2. שרטטו במחשב את הגרף המשורטט	לשרטוט $\boxed{F2}$ האם דאגתם להכין מערכת צירים מתאימה?	$\boxed{GRAPH}$

3. מהו הציון המשופר הנמוך ביותר? הגבוה ביותר?

	במחשב	במחשבון גרפי
4. שרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $y = x$	$f(x) = x$	$y_2 = x$

5. מה מייצג הגרף $y = x$?

	במחשב	במחשבון גרפי
6. קפצו מגרף לגרף במקומות שונים	הילוך על גרף $\boxed{F7}$ הקפיצה בעזרת החיצים. החץ $\boxed{\downarrow}$ מקפיץ את הסמן אנכית למעלה או למטה, לגרף **שהתבנית** שלו רְשומה נמוך יותר.	$\boxed{TRACE}$

מה גודל הקפיצה? הסבירו.

מה משמעות הקפיצה מבחינת מתן הציון? הסבירו!

7. התלמידים טענו כי כדי שהציונים יהיו הוגנים, יש להעלות כל ציון ב-25 נקודות.
כיצד, לדעתכם, ייראה הגרף במקרה זה?
שרטטו כדי לבדוק.

	במחשב	במחשבון גרפי
8. מחקו את הגרף ששרטטתם בשאלה 7 (אין צורך למחוק את התבנית)	לכו למסגרת המתאימה שרטוט/העלמת גרף $\boxed{\text{F2}}$	$\boxed{y =}$ לכו עם הסמן אל ה $\boxed{=}$ של $y_3 \boxed{=} x + 25$ ולחצו $\boxed{\text{ENTER}}$ המסגרת הכהה תתבהר והגרף לא ישורטט.
9. רשמו פונקציה המתאימה לַציון, את הפרש שתי הפונקציות הנותרות. שרטטו אותה.	לכו למסגרת חדשה ורִשמו: $y = g(x) - f(x)$ לשרטוט גרף $\boxed{\text{F2}}$	* $y_4 = \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{VARS}}$ $\boxed{1} - \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{VARS}}\ \boxed{2}$ $\boxed{\text{GRAPH}}$

מה קיבלתם?

מה משמעות הפרש הפונקציות מבחינת מתן הציון?

* יש ללחוץ על $\boxed{\text{VARS}}\ \boxed{\text{2nd}}$ כדי שהמחשבון יתייחס ל-y-ים ולא ל-x-ים.

בעיה מן החיים (ב')

דרך שניה שהמורה הציע לשיפור הציון היתה, להוסיף לכל ציון אחוז מסויים של הציון.

הוא נתן כדוגמה את הטבלה הבאה:

הציון המשופר $h(x)$	הציון במבחן x
24	20
48	40
72	60
96	80
120	100

התוכלו לומר במילים מהי הדרך לשיפור כל ציון המוצגת בטבלה?

- שרטטו במערכת צירים חדשה (מחקו כל פונקציה מפעילות קודמת) את גרף **הציון המשופר** כפונקציה של **הציון במבחן**.
  (אם הינכם עובדים במחשב תנו לה שם $h(x) = ...$)
- שרטטו, באותה מערכת צירים, את גרף הפונקציה $f(x) = x$

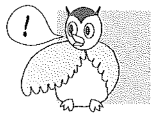
1. מהו הציון המשופר הנמוך ביותר? הגבוה ביותר?

2. בחרו בהילוך על גרף, וקפצו מגרף לגרף במקומות שונים על הגרף.
   מי שיפר את ציונו במידה הרבָּה ביותר?

3. השלימו: ככל שהציון יותר גבוה, הקפיצה מגרף לגרף יותר ____________.
   הסבירו.

4. התלמידים טענו שיש להוסיף לציון **50%** של הציון, כדי שהציונים יהיו הוגנים.
כיצד, לדעתכם, ייראה הגרף במקרה זה? שרטטו כדי לבדוק.

5. מחקו את הגרף השלישי ששרטטתם.
רשמו ושרטטו פונקציה המתאימה לציון המקורי את **השיפור** בציון.
(ראו מילון למטה).



שימו לב!
השיפור בציון הוא בעצם
ההפרש בין הציון החדש
לציון המקורי

הסבירו מה קורה לשיפור בציון ככל שהציון יותר גבוה.

6. לפי הדרך הראשונה, הפונקציה המתאימה לציון המקורי את השיפור
בציון היא פונקציה _______________. הסבירו.
עולה/ יורדת/ קבועה

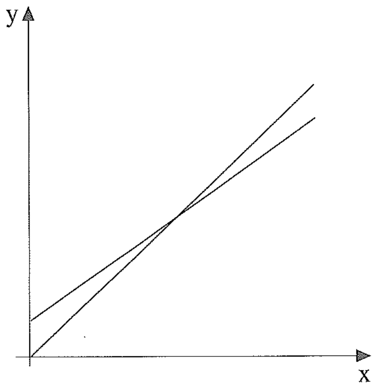
לפי הדרך השנייה, הפונקציה המתאימה לציון המקורי את השיפור
בציון היא פונקציה _______________. הסבירו.
עולה/ יורדת/ קבועה

אם סיימתם את העבודה נסו את כוחכם בעמוד 96 שאלה 1.

מילון:
הציון המשופר - הציון החדש שניתן על- ידי המורה.
השיפור בציון - מספר הנקודות שהמורה הוסיף לכל ציון, כדי לקבל את הציון המשופר.

בעקבות בעיה מן החיים

לפניכם שני הגרפים המתארים את שתי הדרכים הראשונות שהוצעו לשיפור הציון.



להזכירכם: דרך א׳ $g(x) = x + 10$

דרך ב׳ $h(x) = 1.2x$

1. כִּתבו על כל גרף את התבנית המתאימה לו.

   מה מייצג המשתנה x?

   מה מייצג המשתנה y?

נוהגים לקרוא למשתנה על הציר האופקי **המשתנה הבלתי תלוי** ,
ולמשתנה על הציר האנכי (ערכי הפונקציה) **המשתנה התלוי.**
נסו להסביר מדוע משתמשים בשמות אלה?

2. א. רמי קיבל במבחן 72.

   באיזו דרך מעדיף רמי שהמורה יבחר?

   ב. דני אמר: ״לא משנה לי!

   לא משנה באיזו דרך יבחר המורה לשפר את הציון״.

   איזה ציון קיבל דני במבחן?

   ג. גבי אמר: ״אני דוקא מעוניין שהמורה יבחר בדרך א׳״.

   מה תוכלו לומר על הציון המקורי של גבי?

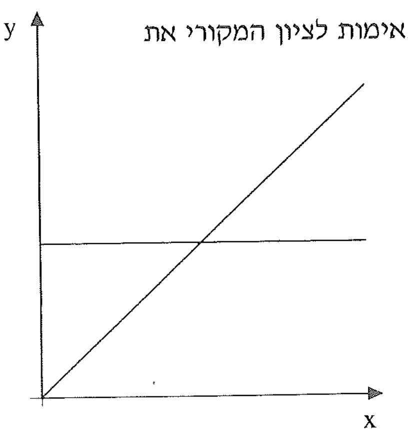
3. א. לפניכם שלוש תבניות פסוק:

$x + 10 = 1.2x$ $\qquad$ $x + 10 > 1.2x$ $\qquad$ $x + 10 < 1.2x$

מה הקשר בין קבוצת האמת, של כל אחת מהן, לבין ה"סיפור"? לבין הגרף?

ב. יוסי אמר: "מספיק לפתור את המשוואה $x + 10 = 1.2x$ מסעיף א' ולהעזר בגרף, כדי לפתור את שתי התבניות הנותרות. הסבירו כיצד.

4. לפניכם הגרפים של הפונקציות, המתאימות לציון המקורי את השיפור בציון.



א. כִּתבו על כל גרף את התבנית המתאימה לו.

ב. מה מייצג המשתנה הבלתי תלוי?

ג. מה מייצג המשתנה התלוי בשני הגרפים?

ד. ספרו את הסיפור של נקודות המפגש עם ציר ה-y.

ה. מה תוכלו לומר על נקודת המפגש של הגרפים? על התחום שלפניה? על התחום שאחריה?
כִּתבו תבניות אלגבריות מתאימות ופתרו אותן.

ו. התוכלו לענות על שאלה 2 בעזרת גרפים אלו, או בעזרת התבניות המתאימות להם? הסבירו!

בעיה מן החיים (ג')

דרך שלישית שהמורה הציע לשיפור הציון היתה:

להוסיף לציון את מחצית ההפרש בין 100 לציון.

1. איזה ציון מקבל את השיפור הגדול ביותר בדרך זו?

2. ליאור אמר: "זה לא פייר" כולם הרויחו משיפור הציון ורק אני לא הרווחתי.
מהו ציונו של ליאור?

3. נסו לשער את גרף הפונקציה k, המתאימה לציון במבחן, את הציון המשופר בדרך זו. שרטטו סקיצה.
רשמו תבנית לפונקציה k. פשטו את התבנית.
אילו מסקנות אפשר להסיק על הציון המשופר, מהסתכלות בתבנית הפשוטה?

4. שרטטו במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה k, ואת הגרף של $y = x$.
השלימו: ככל שהציון המקורי גבוה יותר, שיפור הציון ____________ .

5. שרטטו במערכת צירים את גרף הפונקציה t, המתאימה לציון במבחן, את **השיפור** בציון, לפי דרך ג'.
השלימו והסבירו:
הפונקציה t היא פונקציה ____________ (עולה / יורדת / קבועה).

6. האם, לדעתכם, דרך ג' היא דרך הוגנת לשיפור הציונים של כל תלמידי הכיתה?
הסבירו!

אם סיימתם, נסו את כוחכם בעמוד 96 שאלה 2.

בעיה מן החיים (ד')

תלמידי הכיתה טענו כי דרך ג' אינה הוגנת ואינה הגיונית,
כי תלמיד שקיבל 0 ציונו ישתפר ל-50.
המורה, שלא רצה כי הציון המשופר יחרוג
מהטווח המקובל: (0 – 100) כמו בדרכים א' ו-ב',
הציע את השיפור בדרך הרביעית:

x - הציון במבחן.

p(x) - הציון המשופר.

$$p(x) = 10\cdot\sqrt{x}$$

1. שרטט את גרף הפונקציה p.

	במחשב	**במחשבון גרפי**
תזכורת	10 [ALT][R] x או 10 SQRT(x)	10 [2nd √‾] [x I T]

2. איזה ציון מקבל את השיפור הגדול ביותר בדרך זו?

3. מִצאו שני ציונים, אשר לפי הדרך הרביעית הוסיפו להם אותו מספר נקודות. התוכלו למצוא עוד שני ציונים כאלה?

4. רִשמו תבנית **לשיפור הציון** כפונקציה של **הציון במבחן**.

5. שרטטו את הגרף, והסבירו בעזרתו כיצד משתפר הציון בהתאם לציון המקורי.

6. בִּדקו בעזרת הגרף האחרון תשובות לשאלות 2 ו-3.

אם סיימתם נסו כוחכם בעמוד 96 שאלה 3.

השוואה בין הדרכים

שרטטו במחשב את ארבעת הגרפים של הפונקציות המתאימות לציון המקורי את הציון המשופר בכל אחת מן הדרכים.

$g(x) = x + 10$
$h(x) = 1.2x$
$k(x) = 50 + 0.5x$
$p(x) = 10\sqrt{x}$

1. מִצאו על ציר ה-x.

א. את תחום הציונים שקיבלו תלמידים, המעדיפים לשפר את ציונם בדרך ב׳.

ב. את תחום הציונים שקיבלו תלמידים, המעדיפים לשפר את ציונם בדרך א׳.

ג. את תחום הציונים שקיבלו תלמידים, שעבורם השיפור בדרך ד׳ עדיף על השיפור בדרך א׳.

ד. את תחום הציונים שקיבלו תלמידים, שהשיפור בדרך א׳ קיפח אותם ביותר. (כלומר כל שיפור אחר עדיף להם.)

- נסו למצוא תשובות מספריות, מדויקות ככל האפשר, לתחומים שסימנתם.

2. רִשמו את קבוצות האמת של תבניות הפסוק הבאות:
שימו לב! חלק מהן כבר פתרתם.

א. $g(x) = h(x)$

ב. $k(x) > g(x)$

ג. $h(x) > 100$

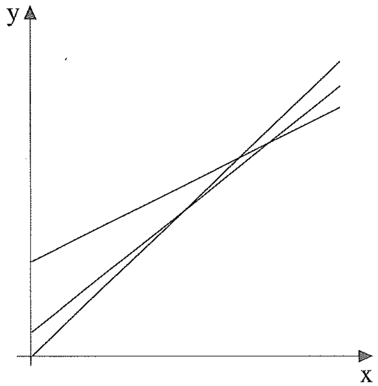
ד. $k(x) < h(x)$

3. בחרו תחום, ושאלו שאלה אשר תחום זה מהווה לה תשובה.

פעילויות נוספות

I. ועוד על בעיה מן החיים

לפניך הגרפים של שלוש הדרכים הראשונות שהוצעו לשיפור הציון.



דרך א' - $y = x + 10$

דרך ב' - $y = 1.2x$

דרך ג' - $y = \frac{1}{2}x + 50$

1. יוסי קיבל במבחן 76. מהו ציונו המשופר, לפי כל אחת מן הדרכים?
היעזרו בתשובתכם, ונסו למצוא בקירוב את מקומו של הציון 76 על ציר ה-x.

2. מתי הציון המשופר הוא 78?
מִצאו תשובה בכל אחת מן הדרכים לשיפור הציון.
התוכלו למצוא את מקומו של 78 על ציר ה-y?

3. אילו תלמידים יעדיפו לשפר את ציונם לפי הדרך השלישית?

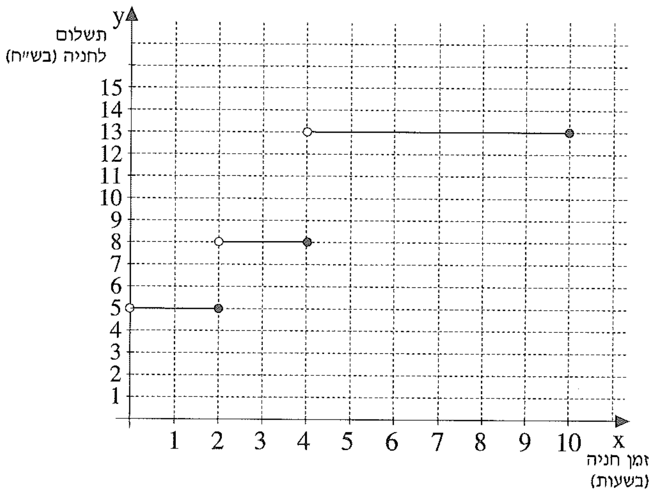
4. מיכאל מעדיף את הדרך השניה על הדרכים האחרות.
מה תוכלו לומר על ציונו של מיכאל במבחן?

5. גל אומר: "ציוני ישתפר הכי מעט בעזרת הדרך הראשונה" .
באיזה תחום נמצא ציונו של גל?

6. שאלו שתי שאלות נוספות וענו עליהן.

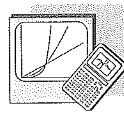
II. בעית החניה של מר חרוצן

מר חרוצן יוצא מביתו לעבודה ברכבו הפרטי.
סמוך למקום עבודתו ישנם שלושה חניונים.
בחניון א׳ התעריף הוא:
עבור שעת חניה ראשונה או חלק ממנה, 3 ש״ח.
על כל שעה נוספת, 2 ש״ח. על חלק משעה משלמים
מחיר יחסי. למשל, עבור 30 דקות נוספות משלמים שקל נוסף.
בחניון ב׳ התעריף אינו תלוי באורך זמן החניה, והוא 12 ש״ח.
בחניון ג׳ התעריף הוא כמתואר בגרף המצורף.



1. כמה שעות יוכל מר חרוצן להחנות את מכוניתו, אם בכיסו 12 ש״ח בלבד?
10 ש״ח בלבד?

2. עִזרו למר חרוצן להחליט באיזה חניון יבחר.



III. שני רצפים

מתנ״ס ב״גבעת הרקפת״ קיבל אישור להוספת אולם ריבועי לבנין.

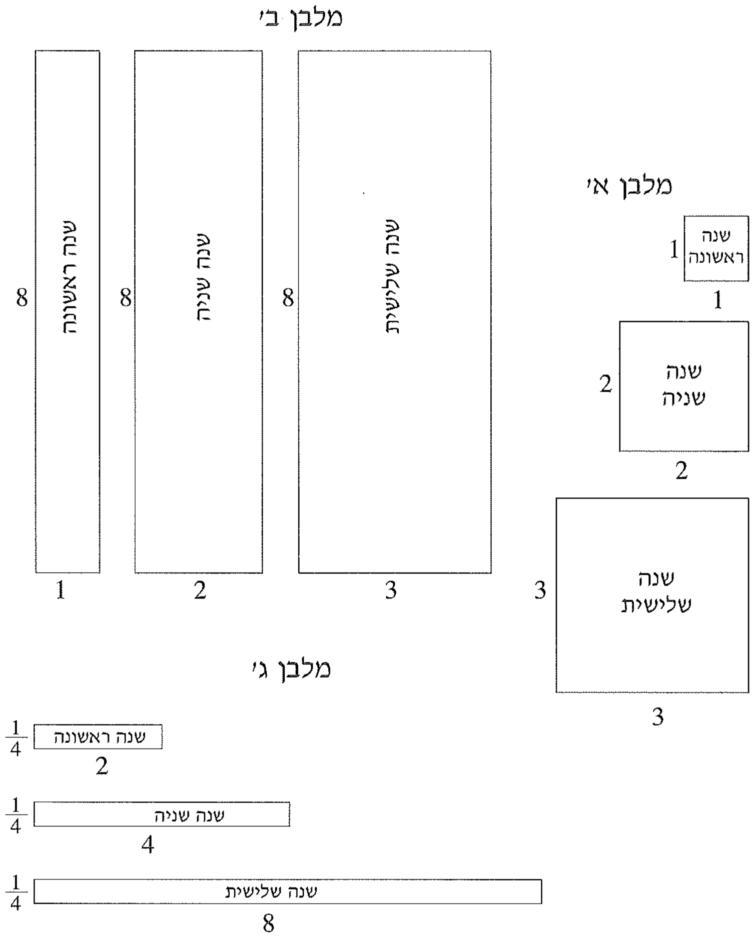
מנהל העבודה ביקש הצעות מחיר, עבור עבודת הריצוף של כל האולם.

הרצף ירקוני ביקש לקבל 75 ש״ח לכל מטר **בהיקף** האולם.
חברת ״המרצף״ ביקשה לקבל 40 ש״ח לכל מ״ר של **שטח** האולם.

איזו הצעה כדאי למנהל העבודה לקבל?

IV. מלבנים הולכים וגְדֵלים

שלושת הסדרות המשורטטות למטה מייצגות תהליך דמיוני של גדילה של שלושה מלבנים.
למלבנים מידות שונות, והם גְדֵלים בדרכים שונות.



מלבן א׳ גדֵל כל שנה ביחידה אחת באורך ואחת ברוחב.

מלבן ב׳ גדֵל כל שנה ביחידה אחת ברוחב,
ואורכו קבוע - 8 יחידות.

מלבן ג׳ גדֵל כל שנה פי שניים באורך ,

ורוחבו קבוע - $\frac{1}{4}$ יחידה.

שימו לב! הגידול נעשה באופן מתמיד **ולא** בבת אחת בסוף השנה.

עִבדו בקבוצות ונסו תחילה ***להעלות השערות*** ללא אמצעים מתמטיים, לגבי השאלות הבאות:

1. **שטחים**

א. השוו את שטחי שלושת המלבנים, במהלך השנים.
מהו מצבם ההתחלתי? מי משיג את מי, ומתי?

ב. באיזו שנה יעבור שטחו של כל מלבן 1000 יחידות שטח?

2. **היקפים**

א. השוו את היקפי שלושת המלבנים במהלך השנים.
מהו מצבם ההתחלתי? מי משיג את מי ומתי?

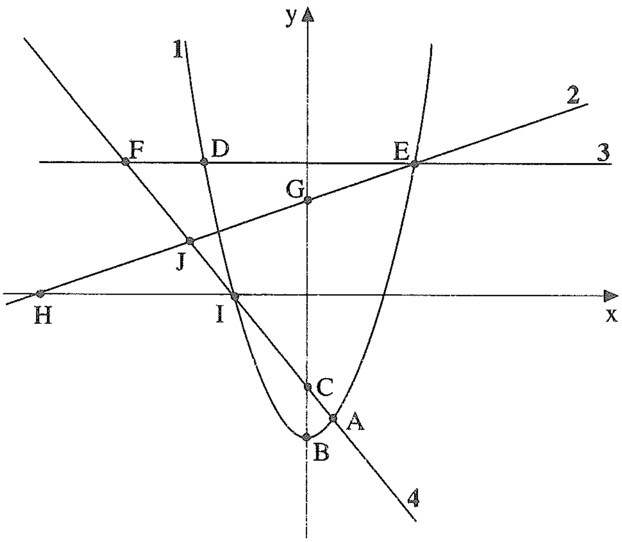
ב. באיזו שנה יעבור היקפו של כל מלבן 100 יחידות אורך?

עתה בְּדקו את השערותיכם בכלים מתמטיים (תוכלו להיעזר במחשב) השתדלו לדייק ככל שתוכלו.

אם סיימתם נסו את כוחכם בעמוד 96 שאלה 4.

v. סתם פונקציות

לפניכם ארבע פונקציות בהצגתם האלברית והגרפית.



$g(x) = x^2 - 9$

$f(x) = 7$

$k(x) = -2x - 6$

$h(x) = 5 + \frac{1}{2}x$

1. התאימו לכל אחת מהתבניות את הגרף "שלה". כִּתבו את שיקוליכם.

2. שיעור x של הנקודה A הוא $x = 1$.
מְצאו את שיעור y שלה.
מְצאו בדרך נוספת (לבדיקה).
מְצאו את שיעורי שאר הנקודות המסומנות ב- B עד J.

3. מְצאו את פתרונות המשוואה $x^2 - 9 = -2x - 6$. היעזרו בגרפים ובשאלה 2.

4. השלימו את הטבלה הבאה:

	נקודות אפס	חיובית	שלילית	עולה	יורדת	קבועה
g						
f						
k						
h						

5. השלימו:

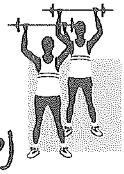
א. $g(x)>f(x)$ כאשר ______________________

ב. $f(x)<k(x)$ כאשר ______________________

ג. $h(x)>k(x)$ כאשר ______________________

6. סדרו את הפונקציות לפי סדר עולה בתחום $x>4$.
בִּדקו על-ידי הצבת מקור אחד מן התחום בכל הפונקציות.

7. חִזרו על שאלה 6 בתחום $-1<x<1$.



נסו את כוחכם

1. לפעילויות "בעיה מן החיים" א' וב'.

נתונה הפונקציה $f(x) = x$.

א. נסו לשער, מה קורה לגרף הפונקציה כאשר מוסיפים מספר כלשהו לתבנית x. היעזרו בדוגמאות השונות (הוספת 10 והוספת 25) שנתקלתם בהן בפעילות. בִּדקו במחשב.

ב. נסו לשער, מה קורה לגרף הפונקציה כאשר כופלים במספר כלשהו את התבנית x. היעזרו בדוגמאות השונות שנתקלתם בהן בפעילות. בִּדקו במחשב.

מעמודים 79, 82

2. לפעילות: "בעיה מן החיים" ג' וד'.

איך לדעתכם יראה הגרף אם יוסיפו לציון את $\frac{1}{4}$ ההפרש בין 100 לציון? את $\frac{1}{5}$ ההפרש בין 100 לציון? בִּדקו במחשב.

מעמוד 86

3. לפעילות: "בעיה מן החיים" ד'

נסו להראות בדרך אלגברית, כי רק לציונים 0 ו-100 אין שיפור לפי דרך ד'.

מעמוד 87

4. לפעילות: "מלבנים הולכים וגְדֵלים".

בִּדקו מה קורה בסביבת ציר ה-y, ל"פונקציות השטחים". כמה פעמים נחתך כל גרף על-ידי הגרפים האחרים? התוכלו להסביר זאת בעזרת האלגברה?

שימו לב! $2^0 = 1$.

מעמוד 92

שתי פונקציות . . .

א. בבעיות מציאותיות
יש לעיתים מִגוון אפשרויות.
מה עדיף? ואיך כדאי?
ומי גדול ממי? ומתי?

ב. דרך המובילה
להחלטה נבונה -
לברר תחילה,
מתי הבחירה אינה משנה?

ג. כאשר כל האפשרויות
כפונקציות מוצגות,
נוכל לעיתים לברר זאת
בכל אחת מההצגות.

ד. כשיש שיטתיות בטבלות
נוכל פעמים רבות לגלות,
מיהם המקורות
אשר תמונותיהם שוות?

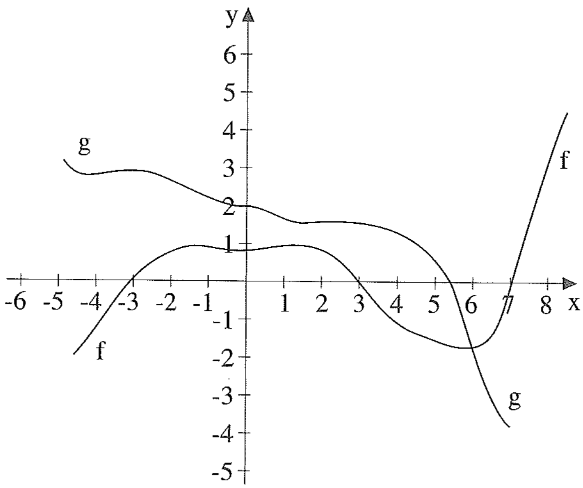
ה. ואם גרפים לפנינו,
התשובה נראית לעינינו.
נקודת החיתוך היא הנקודה
בה לאותו מקור תמונה יחידה.

ו. ובהצגות אלגבריות
נשווה את התבניות,
ונמצא את הפתרונות
אשר נותנים אותן תמונות.

ז. וכשנמצא את הנקודות
אשר תחומים הן מפרידות,
בכל תחום נוכל לברר
מה עדיף? ומה כדאי יותר?

אוסף משימות

1. נתונים גרפים של שתי פונקציות f ו-g.



קבעו נכון או לא נכון?

א. $f(3) > g(3)$

ב. $f(-3) < g(-3)$

ג. $g(0) = 5\frac{1}{2}$

ד. $f(7) = 0$

ה. $f(3) \leq 0$

ו. f יורדת בתחום $3 < x < 7$.

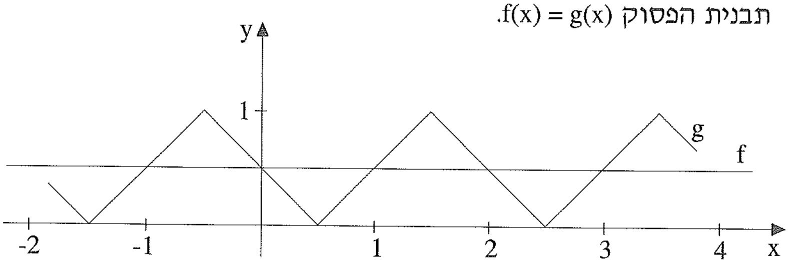
ז. אם $x = 6$ אז $f(x) = g(x)$.

ח. אם $x > 6$ אז $f(x) > g(x)$

ט. $f(3) = g(5.5)$

י. $f(3) > g(7)$

2. לפניכם הגרפים של שתי פונקציות f ו-g מְצאו את קבוצת האמת של תבנית הפסוק $f(x) = g(x)$.

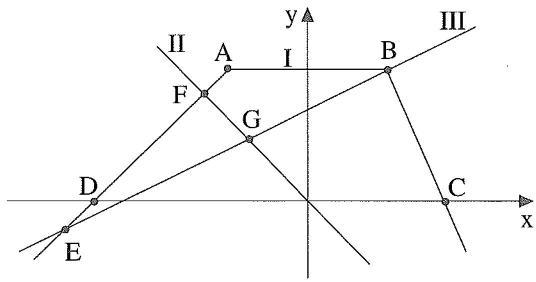


3. לפניכם שלוש פונקציות בהצגה אלגברית וגרפית.

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & x < -2 \\ 3 & -2 \le x \le 2 \\ 7 - 2x & x > 2 \end{cases}$$

$$g(x) = -x$$

$$k(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



א. מְצאו את שיעורי הנקודות: A, B, C, D, E, F, G.
ב. באיזה תחום מתקיים $f(x) > k(x)$?
ג. באיזה תחום מתקיים $f(x) > g(x)$?

4. לכל זוג של פונקציות מבין הזוגות הבאים, מְצאו את התחום הגדול ביותר בו שני הגרפים מתלכדים, באותה מערכת צירים.

א. $f(x) = |x|$ $\quad$ $g(x) = x$

ב. $f(x) = |x|$ $\quad$ $g(x) = -x$

ג. $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x}$ $\quad$ $g(x) = x + 4$

ד. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ $\quad$ $g(x) = x - 1$

ה. $f(x) = \frac{x - 5}{5 - x} \cdot x$ $\quad$ $g(x) = -x$

ו. $f(x) = x$ $\quad$ $g(x) = \frac{1}{x}$

5. לכל פונקציה מטור II, מִצאו את כל הפונקציות השוות לה מטור I.

טור I	טור II
א. $f(x) = (x-2)^2$	
ב. $f(x) = x(x-4)$	$g(x) = x^2 - 4x$
ג. $f(x) = (x+2)(x-2)$	$h(x) = x^2 - 4$
ד. $f(x) = (x-2)^2 + 4x$	$k(x) = x^2 + 4$
ה. $f(x) = \frac{(x-2)^2 + (x+2)^2}{2}$	$j(x) = x^2 - 4x + 4$
ו. $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}$	

6. מִצאו פונקציה שווה לכל אחת מהפונקציות הבאות:
(היעזרו בנוסחאות הכפל שלמטה)

א. $f(x) = x^2 - 9$

ב. $f(x) = x^2 - 1$

ג. $f(x) = 25 - x^2$

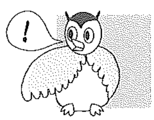
ד. $f(x) = x^2 - x^3$

ה. $f(x) = x^2 + 4x + 4$

ו. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

ז. $f(x) = x^2 + 6x + 9$

ח. $f(x) = x^4 - x^2$



סכום		מכפלה		חזקה
$a^2 + 2ab + b^2$	$=$	$(a+b)(a+b)$	$=$	$(a+b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$=$	$(a-b)(a-b)$	$=$	$(a-b)^2$
$a^2 - b^2$	$=$	$(a+b)(a-b)$		

7. מְצאו לכל זוג פונקציות את המקורות, אשר יש להם אותה תמונה לפי שתי הפונקציות.

הדרכה: היעזרו בפתרון משוואה.

דוגמה:

א. $f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(x) = (x-2)^2$

$$(x-2)^2 = x^2$$
$$x^2 - 4x + 4 = x^2$$
$$-4x + 4 = 0$$
$$-4x = -4$$
$$x = 1$$

למקור 1 יש אותה תמונה לפי שתי הפונקציות.

ב. $f(x) = x^2 + 8$ $\qquad$ $g(x) = 4x + 4$

ג. $f(x) = x^3 - 1$ $\qquad$ $g(x) = (x^2 + x + 1)(x - 1)$

ד. $f(x) = x^3 + 2x$ $\qquad$ $g(x) = 2x - 8$

ה. $f(x) = x + 2$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + x + 18$

ו. $f(x) = \frac{x}{2}$ $\qquad$ $g(x) = 2 - \frac{x-4}{3}$

אתגר

ז. $f(x) = 12$ $\qquad$ $g(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}$

שימרו על כושר

מְצאו, על-ידי פישוט, פונקציה שווה לכל אחת מן הפונקציות הבאות.
(בְּדקו על-ידי הצבה של ערך אחד של x.)

א. $f(x) = 3 - [5 - (2x + 1)]$

ב. $f(x) = 3[5 - (2x + 1)]$

ג. $f(x) = (x - 3)^2 + (x + 3)^2$

ד. $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 3}$

ה. $f(x) = 1 - \frac{x - 4}{2}$

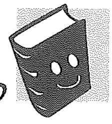
ו. $f(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$

ז. $f(x) = x^2 - (x + 5)(x - 5)$

ח. $f(x) = \frac{x + 4}{4} + \frac{x^3 - 8}{8}$

ט. $f(x) = x - \frac{1 + x}{x^2 + 1}$

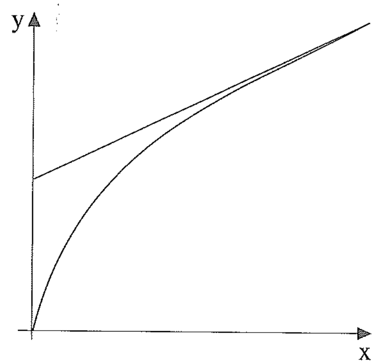
י. $f(x) = x - \frac{5}{4}x$



קריאה מ~~ע~~הנה

כאשר משרטטים במערכת צירים אחת במחשב,
את הגרפים של הדרכים ג' וד' לשיפור הציון,
מתקבל הרושם כאילו הגרפים מתלכדים
בתחום מסויים.

איך נבדוק השערה זו
באופן אלגברי?



נרצה לברר באופן אלגברי:
מהו התחום עבורו התמונות שוות?

נתרגם שאלה זו לתבנית פסוק $\frac{1}{2}x + 50 = 10\sqrt{x}$

כדי לפתור, נעלה כל אגף בריבוע.
בדרך זו נִפָּטֵר מן השורש באגף ימין.

הערה:

זהירות! כאשר מעלים בריבוע, לא תמיד
מקבלים תבנית פסוק שקולה לקודמת.
יתכן שיתווספו פתרונות, ויהיה עלינו לבדוק זאת בסוף.

דוגמה:

למשוואה $x = 5$ יש פתרון יחיד והוא 5.
למשוואה $x^2 = 25$ יש שני פתרונות והם 5, 5–.
כלומר, על-ידי ההעלאה בריבוע נוסף הפתרון 5–.
והוא איננו פתרון של המשוואה המקורית.

נחזור לענייננו:

$$(\frac{1}{2}x + 50)^2 = 100x$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 50x + 2500 = 100x \quad / \quad -100x$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 50x + 2500 = 0$$

נפרק לגורמים לפי הנוסחה

$$(\frac{1}{2}x - 50)^2 = 0$$

בְּדקו על-ידי פתיחת הסוגריים.

$$\frac{1}{2}x - 50 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = 50$$

$$x = 100$$

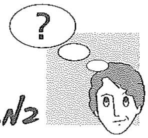
בְּדקו על-ידי הצבה בתבנית המקורית,
האם זה אכן פתרון?

מצאנו שהגרפים מתלכדים בנקודה אחת בלבד שבה $x = 100$, כלומר, הרושם שקיבלנו שהגרפים מתלכדים בתחום מסויים אינו נכון.

שאלות

1. מדוע, לדעתכם, נראים הגרפים מתלכדים בתחום מסויים, למרות שיש להם רק נקודה משותפת אחת? אשרו את דעתכם בדוגמאות.

2. שרטטו סקיצה של הגרפים בתחום $0 < x \le 300$.
בְּדקו את הסקיצה על-ידי הצבת $x = 300$.



במחשבה לאחור

בחרו שתיים מן השאלות הבאות וכתבו עליהן.

1. תנו דוגמה לשתי פונקציות f וְ-g המקיימות:
   - $f(3) = g(3)$
   - עבור $x > 3$ $\quad f(x) > g(x)$
   - עבור $x < 3$ $\quad f(x) < g(x)$

   כִּתבו את כל השלבים במהלך חיפוש הדוגמה.

2. איך מוצאים עבור אילו x-ים $f(x) > g(x)$ כאשר הפונקציות ניתנות:

   א. בהצגה אלגברית.

   ב. בהצגה גרפית.

   ג. בהצגה אלגברית ובעזרת סקיצה של הגרף.

3. איזה ייצוג תעדיפו כדי לענות על השאלה:
   עבור אילו ערכי x מקבלים אותה תמונה בשתי פונקציות f וְ-g? נמקו.

4. נסו לחבר שאלה, המשלבת החלטה של העדפה.

5. איזו מן הפעילויות ביחידה, מצאה חן בעיניכם ביותר? נמקו.

עבודת החודש בכיתה

עברית קשה שפה

אינה היא עולה חדשה, והיא מבקשת לתרגם לה את העברית להצגות מתמטיות שאותן היא מבינה.

- שרטטו לכל משפט בעברית גרף של פונקציה, המקיים את טענת המשפט.
- מצאו לכל משפט בעברית תבנית של פונקציה, המקיימת את טענת המשפט.

שימו לב: התבנית אינה חייבת להיות מתאימה לגרף ששרטטתם.

א. f היא פונקציה יורדת.

ב. הפונקציה g חיובית רק בתחום $x < 2$.

ג. לפונקציה k יש בדיוק שתי נקודות אפס.

ד. התמונות של p גדולות מן התמונות של g רק בתחום $x < 4$.

ה. הפונקציה h עולה בתחילה "בקצב איטי", ואחר כך "בקצב מהיר".

ו. למקור אפס יש אותה תמונה בשתי הפונקציות j ו m.

ז. ערכי הפונקציה t גדולים מ 3 עבור כל ערך של x.

ח. הגרפים של הפונקציות R ו- L נחתכים בשתי נקודות.

ט. את גרף הפונקציה r הזיזו ב-2 יחידות למטה, והתקבל גרף הפונקציה n.

י. ההפרש בין הפונקציות S ו T הוא קבוע, בכל התחום.

עבודת החודש בבית

היטל שלום הגליל

בבנק הדואר תלויה כרזה:

> אנחנו גובים את העמלה הנמוכה ביותר מבין כל הבנקים,
> עבור פדיון היטל שלום הגליל.
> העמלה היא:
> 1% מן הסכום שיפדה, אבל לא יותר מ 20 ש"ח.

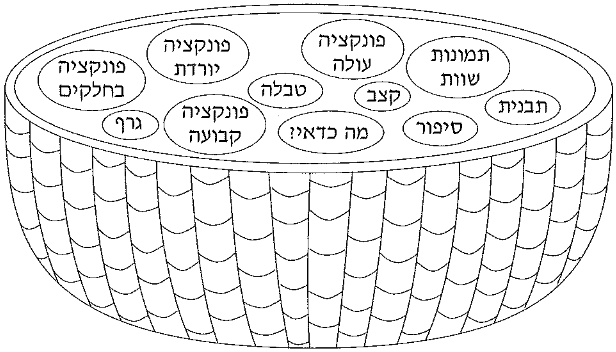
בבנק פלוני גובים:

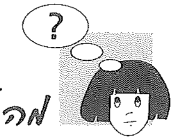
1% מן הסכום שיפדה, אבל לא פחות מ-5 ש"ח.

כתבו דף עבודה בנושא.

כאשר x מייצג את ערך הפדיון של האגרת.

השתמשו במילים מן הסל.





מה למדנו

למדנו להשוות פונקציות כדי לברר מהם ערכי x הנותנים תמונות שוות.

דוגמה מלווה:

פונקציה f מתאימה לאחת מזוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים, את זווית הראש שלו.

פונקציה g מתאימה לאחת מזוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים, את סכום זוויות הבסיס.

השאלה: מתי זווית הראש במשולש שווה שוקיים שווה לסכום זוויות הבסיס.

אפשר לענות על שאלה זו על ידי שיקולים הנדסיים.

זווית אחת במשולש, שווה לסכום השתיים האחרות, כאשר היא חצי מסכום הזוויות במשולש, כלומר בת 90°.

כאשר המשולש הוא גם שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות כל אחת ל 45°.

נדגים כיצד פותרים את השאלה בדרכים אחרות, כי לא בכל מקרה אפשר לקבל תשובה מיידית על-ידי שיקולים.

אם x מייצג את זווית הבסיס,

אז: $f(x) = 180 - 2x$ ו- $g(x) = 2x$

והשאלה הנשאלת היא מתי $f(x) = g(x)$?

בדרך אלגברית:

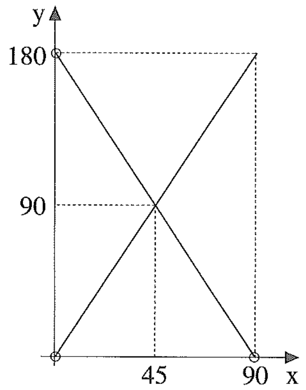
$$180 - 2x = 2x$$

$$4x = 180$$

$$x = 45$$

ואמנם $f(45) = g(45) = 90$

בדרך גרפית:
הנקודה המשותפת נותנת
את ערכי x ו- y
עבורם $f(x) = g(x)$.



למדנו לברר מהו התחום בו ערכי y של פונקציה אחת, גדולים מערכי y של פונקציה אחרת.

לדוגמה:
מהו התחום בו זווית הראש גדולה מסכום שתי זוויות הבסיס?
באלגברה:

$$180 - 2x > 2x$$
$$-4x > -180$$
$$x < 45$$

זכרו כי כדי לכפול במספר שלילי, יש להפוך את סימן האי-שוויון.

תחום הפונקציה הוא $0 < x < 90$,
ופתרון השאלה הוא $0 < x < 45$.
תשובה: זווית הראש גדולה מסכום זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים אם זווית הבסיס קטנה מ- 45°.

בגרף:
רואים כי בתחום $0 < x < 45$, הגרף של f נמצא מעל הגרף של g.

חסימות (משחק לשניים)

פיתוח: צביה מרקוביץ ואלכס פרידלנדר

המשחק מכיל:

9 כרטיסי תכונות של פונקציה (הכרטיסים הגדולים)
6 כרטיסי חסימה (מסומנים)
26 כרטיסי פונקציות (תאור גרפי או אלגברי)

הוראות המשחק:

גירסה ראשונה:

הכנה:

מחלקים 3 כרטיסי תכונות, לכל משתתף, אותם הוא מניח גלויים לפניו על השולחן. את שלושת כרטיסי התכונות הנותרים מניחים בצד.
מערבבים ביחד את כרטיסי הפונקציות והחסימות, ומחלקים 4 לכל משתתף.
היתר מניחים בערימה הפוכה על השולחן (קופה).

מהלך:

כל משתתף בתורו מצרף לכרטיסיו כרטיס מהקופה ומבצע את **אחת** הפעולות הבאות:

א. מניח כרטיס פונקציה מתאים ליד אחד מכרטיסי התכונה שלו, **או**
ב. מניח כרטיס חסימה על יד כרטיסי חברו, **או**
ג. מוריד אחד מכרטיסיו לתחתית ערימת הקופה.
(בתום שלב זה, למשתתף 4 כרטיסים).

חסימה:

משתתף שנחסם על ידי חברו, אינו יכול להמשיך במשחק באף אחד מכרטיסי התכונה שלו, אלא לאחר הנחת כרטיס פונקציה המתאים לחסימה, אך מותר לו בינתיים לחסום את חברו. (כלומר אינו יכול לבצע פעולה א׳ ב״מהלך״, אך מותר לו לבצע את אחת מן הפעולות ב׳ או ג׳).

קופה ריקה:

אם במהלך המשחק נגמרים הכרטיסים שבקופה, יוצרים קופה חדשה מכרטיסי

הפונקציה שהורדו בינתיים. (ניתן בשלב זה להוציא את כרטיסי החסימות מן המשחק).

נצחון:
מנצח במשחק המשתתף אשר משלים ראשון שתי שלשות של כרטיסי פונקציות המתאימות לשניים מבין כרטיסי התכונה שלפניו.

גירסה שניה:
אותו מהלך כמו בגירסה הראשונה: כל משתתף מניח לפניו 3 כרטיסי תכונות אך במקום לחלק 4 כרטיסי פונקציות וחסימות לכל משתתף, מניחים 4 כרטיסים כאלה גלויים על השולחן בין שני המשתתפים. 4 הכרטיסים ישמשו עתה את **שני** המשתתפים וכל אחד לפי תורו מצרף אליהם כרטיס נוסף מהקופה ומבצע את המהלך כמו בגירסה הקודמת.

פונקציה המתאימה
לאפס מספר
חיובי.

התחום אינו
מכיל את האפס.

פונקציה עולה
בכל התחום.

כל ערכי
הפונקציה הם
חיוביים
או אפס.

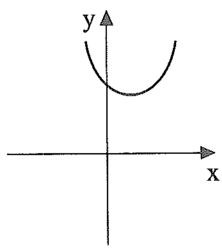
פונקציה המקבלת
את הערך אפס
עבור מספר
מסויים בתחום.

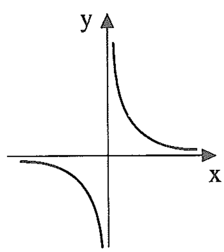
פונקציה קבועה
לפחות בחלק
מן התחום.

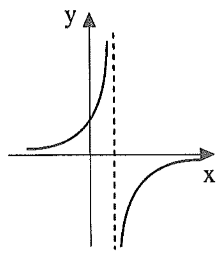
כל המספרים
פרט למספר מסויים
שייכים לתחום
הפונקציה.

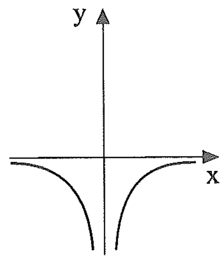
ראשית הצירים
נמצאת על גרף
הפונקציה.

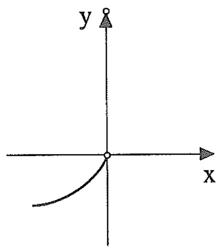
כל ערכי
הפונקציה שליליים.

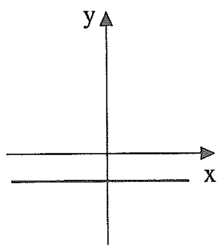


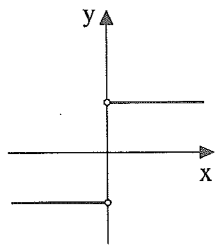


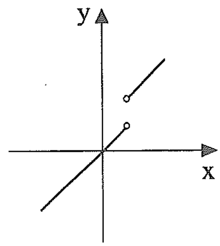


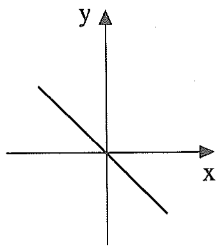


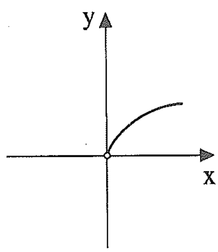


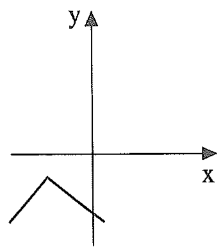


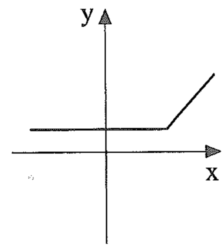


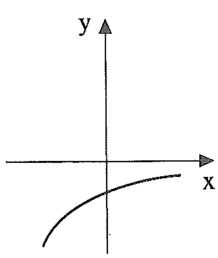


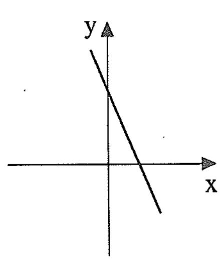


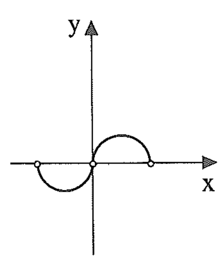






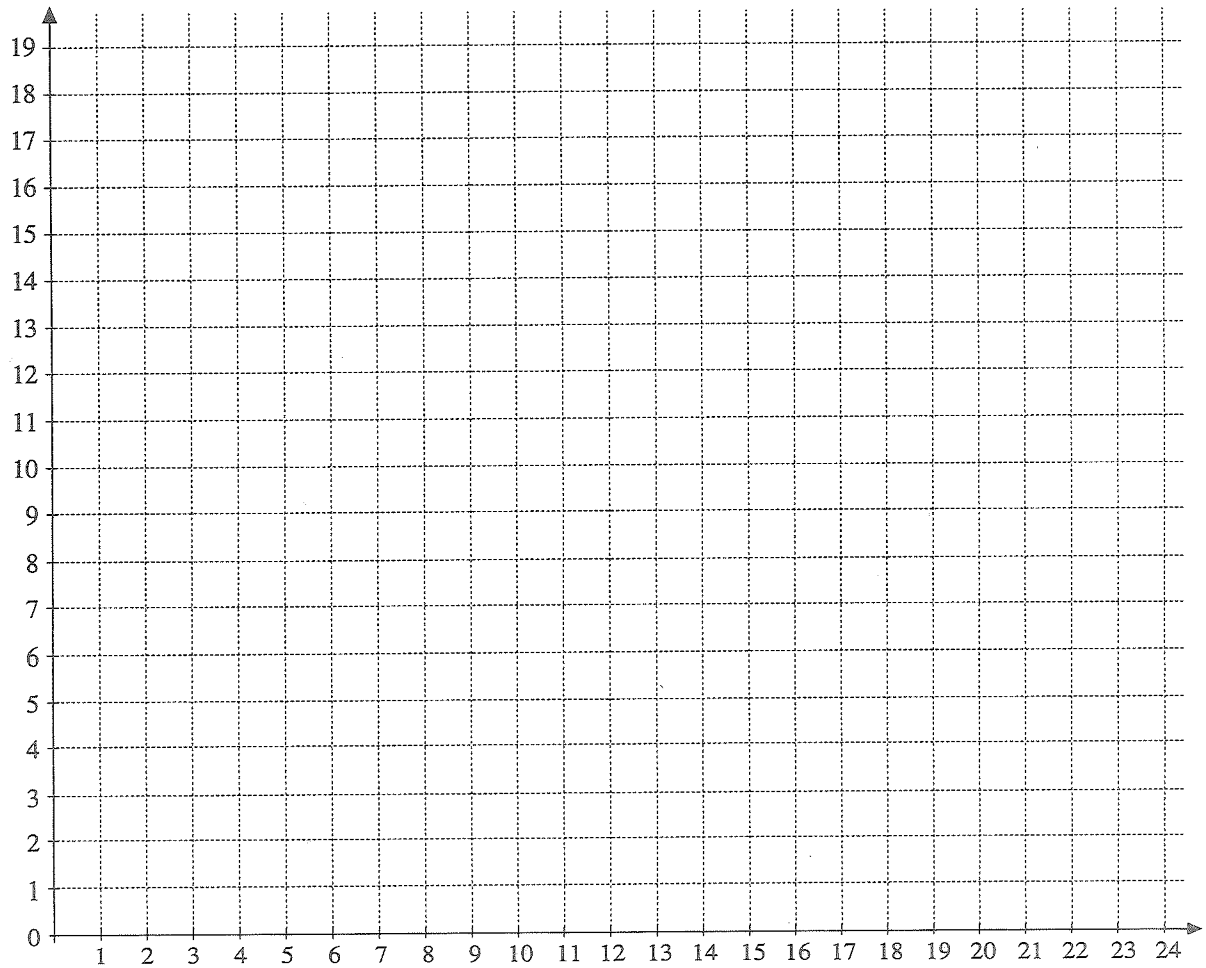






$t(x) = 2x$

פונקציה שאינה מקבלת ערך אפס מחסום	ראשית הצירים אינה על גרף הפונקציה מחסום	פונקציה המתאימה לכל המספרים החיוביים בתחום תמונות שליליות. מחסום	פונקציה שבחלק התחום עולה ובחלק יורדת מחסום
פונקציה יורדת בכל התחום או קבועה בכל התחום מחסום	תחום הפונקציה אינו כל המספרים הממשיים מחסום	$g(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}$	$h(x) = \lvert x \rvert + 1$
$p(x) = x^2$ בתחום המספרים השליליים	$m(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = -3$	$r(x) = -x^2$
$w(x) = -3x$	$l(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ -3 & x > 0 \end{cases}$	$q(x) = -x^2 - 3$	$k(x) = 7$


0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19