העשרה מתמטית

מעגל פויירבאך

תקציר

המתמטיקה גדושה בהפתעות הבאות לידי ביטוי במשפטים יפים ובהוכחות אלגנטיות. בכמה תוצאות מפתיעות כאלה מתחום הגיאומטריה, נדון במאמר.

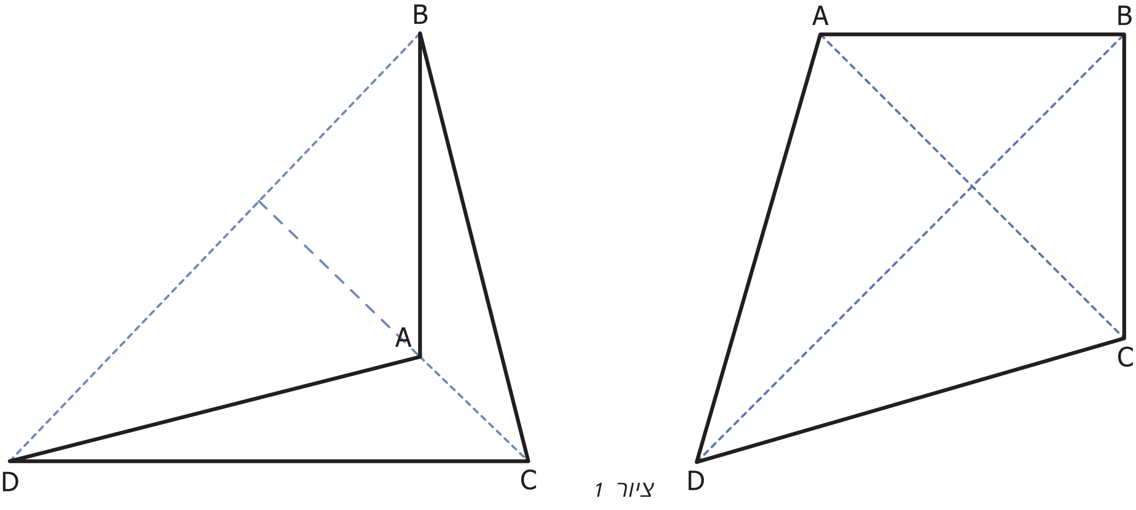
כל שתי נקודות נמצאות על ישר אחד ויחיד - זו אינה הפתעה. אך, שלוש נקודות אינן בהכרח על ישר אחד ואם במהלך חקירה גיאומטרית שלוש נקודות "נופלות" על ישר אחד - זו הפתעה ולעיתים ראוי להתייחס לעובדה כמשפט הטעון הוכחה.

כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד, נמצאות על מעגל אחד. אך אם ארבע נקודות נמצאות על מעגל אחד - זו הפתעה הראויה להיות מנוסחת כמשפט. לדוגמה המשפט, מרובע ניתן לחסימה על-ידי מעגל, אם ורק אם סכום הזוויות הנגדיות בו הוא 180°.

ככל שמספר הנקודות הנמצאות על ישר אחד גדול מ- 3, כך המשפט מפתיע יותר. כמו כן ככל שמספר הנקודות הנמצאות על מעגל אחד גדול יותר מ- 4, כך המשפט מפתיע יותר. לאור הערות אלו, הטענה ש**לכל** משולש קשורות **תשע** נקודות הנמצאות על מעגל, וגם ארבע נקודות הנמצאות על ישר אחד, מפתיעה ביותר. ויותר מכך, למרות גודל ההפתעה שבמשפטים, ההוכחה נעשית באלגנטיות ודי בקלות.

מעגל 8 הנקודות

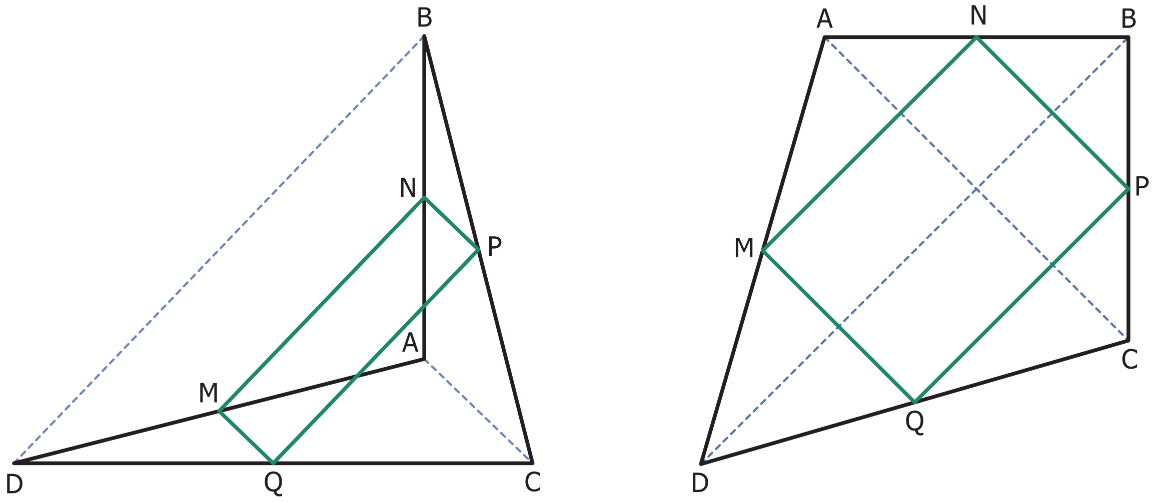
ABCD הוא מרובע כלשהו שאלכסוניו מאונכים זה לזה. (ציור 1 - מצד ימין מרובע קמור ומצד שמאל מרובע קעור).



ציור 1

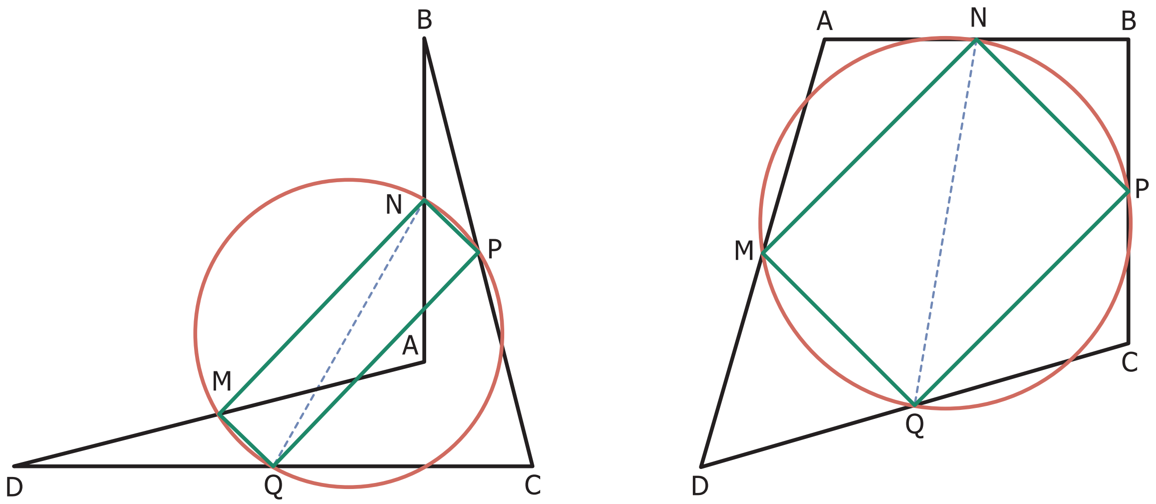
(c) כל הזכויות שמורות למכון ויצמן למדע ולמשרד החינוך, התרבות והספורט

בשיעורי גיאומטריה מוכיחים כי אם מחברים את אמצעי צלעות המרובע בזה אחר זה, מקבלים מלבן MNPQ (ציור 2).



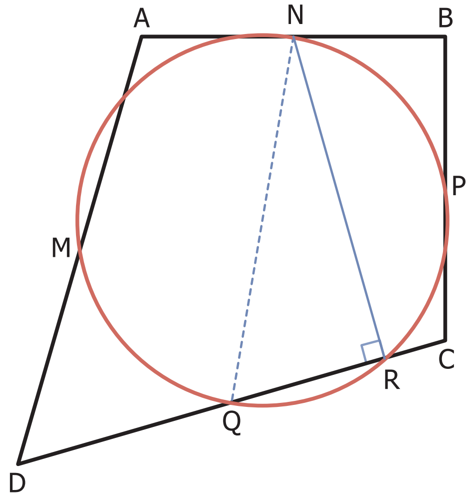
ציור 2

קודקודי המלבן נמצאים על מעגל אחד, כאשר אלכסוני המלבן (למשל NQ) הם קטרים במעגל זה (ציור 3).



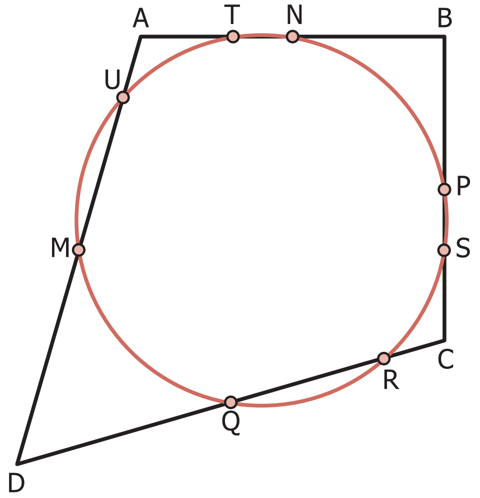
ציור 3

נעביר אנך מאמצע צלע של מרובע ABCD (הימני בציור 3) לצלע הנגדית, נניח מ- N אמצע AB, ל- CD. יוצא שהזווית הישרה NRQ נשענת על הקוטר NQ של המעגל (ציור 4)



ציור 4

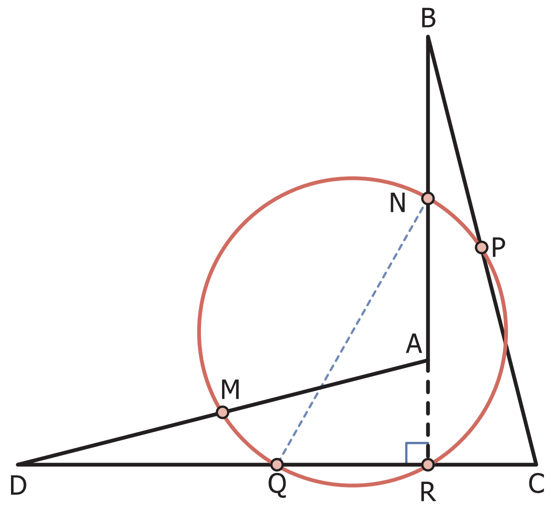
באופן דומה נעביר אנכים מאמצעי הצלעות האחרות של ABCD. מתקבלות 4 נקודות נוספות R, S, T, U על המעגל שלנו כלומר, מעגל של 8 נקודות (ציור 5).



ציור 5

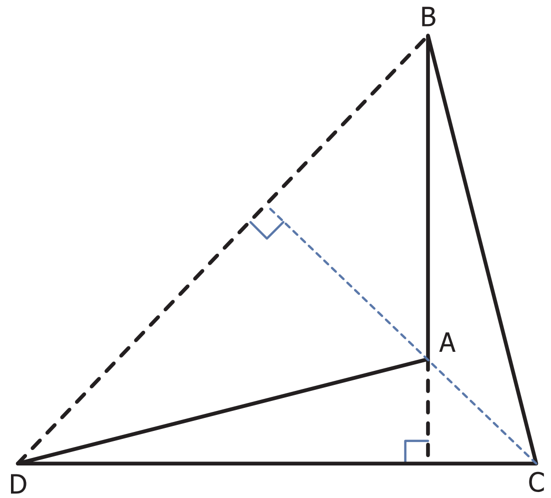
אך לא תמיד מתקבלות 8 נקודות.

אם במרובע הקעור, BA מאונך ל- DC, האנך מ- N (אמצע AB) לצלע הנגדית DC, והאנך מ- Q (אמצע DC) לצלע הנגדית BA - שניהם יוצרים את אותה נקודה R על המעגל (ציור 6).



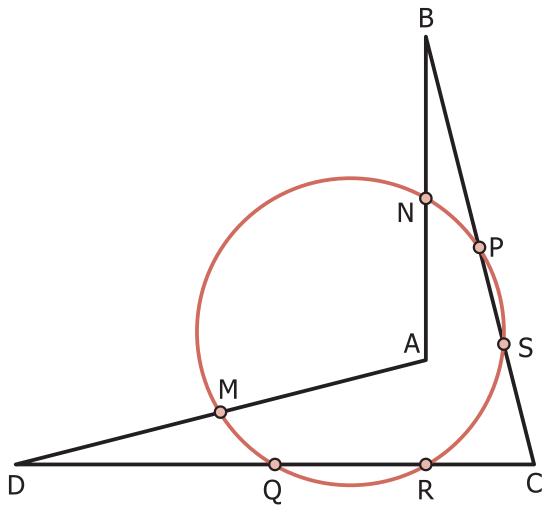
ציור 6

יתרה מזאת, הרי אלכסוני המרובע ABCD מאונכים זה לזה, מכאן שיש לנו עתה שני זוגות של ישרים מאונכים ($CA \perp BD$, $BA \perp DC$) כך שהנקודה A היא מפגש הגבהים של משלוש BCD. מכאן, DA גם כן מאונך ל- BC כי הוא גובה שלישי במשולש (ציור 7).



ציור 7

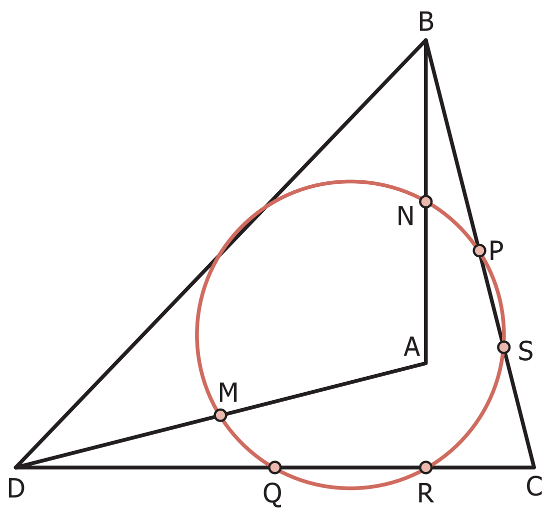
לכן, שתי הנקודות האחרות (עקב האנך מ- M ל- BC ועקב האנך מ- P ל- DA) גם כן מתלכדות ב- S (ציור 8). במקרה זה מתקבל מעגל של 6 נקודות במקום של 8 נקודות.



ציור 8

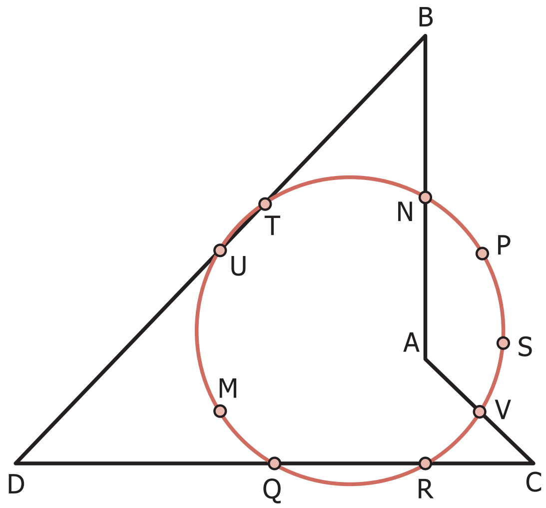
מעגל 9 הנקודות

את 6 הנקודות שמצאנו לעיל, ביחס למשולש BCD ולמפגש הגבהים A ניתן לקבץ לשלושה זוגות (ציור 9):
M, N הן אמצעי הקטעים מהקודקודים למפגש הגבהים,
P, Q הן אמצעי הצלעות,
R, S הן עקבי הגבהים.



ציור 9

כעת נעביר את AC ונמחק את BC, ואת AD. המרובע הקעור BDCA שהתקבל, הוא בעל אותה תכונה של המרובע הקעור המקורי (עם אלכסונים AD ו- BC מאונכים זה לזה) וגם עבורו מתקבל מעגל 6 נקודות נוספות (ציור 10).



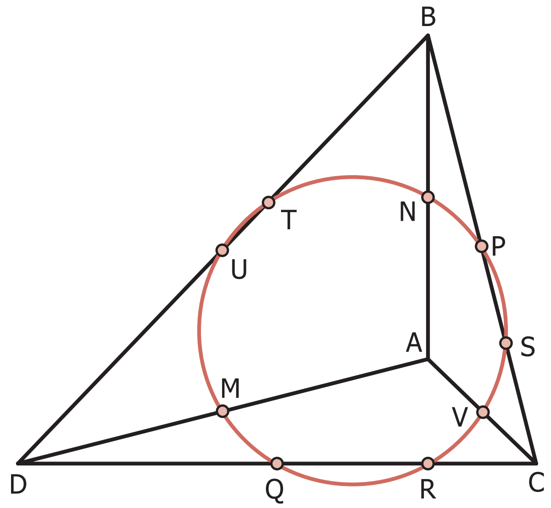
ציור 10

אך זה אותו מעגל כמו עבור המרובע הקעור הקודם ABCD! כי הרי הנקודות N ו- Q הן אמצעי שתי צלעות גם במרובע החדש וגם בקודם, והנקודה R היא עקב הגובה מ N (או Q) לצלע הנגדית בשני המרובעים. יוצא ששלוש הנקודות R, Q, N נמצאות על שני המעגלים ולכן המעגלים מתלכדים.

קיבלנו שתי קבוצות של 6 נקודות על מעגל, כאשר 3 נקודות משותפות לשתי הקבוצות. מכאן, סך כל הנקודות המיוחדות על המעגל הוא תשע.

הוכחנו משפט מופלא ביותר:

בכל משולש BCD (ציור 11):
הנקודות U, P, Q - אמצעי הצלעות,
M, N, V - אמצעי הקטעים מהקודקודים למפגשי הגבהים,
R, S, T - עקבי הגבהים,
כולן נמצאות על מעגל אחד.



ציור 11

ניתן להסתכל על מה שהוכחנו בדרך נוספת: לכל משולש קיים מעגל העובר דרך שלושת אמצעי הצלעות. קיים גם מעגל העובר דרך שלושת עקבי הגבהים, וקיים מעגל נוסף העובר דרך שלושת אמצעי הקטעים מהקודקודים למפגש הגבהים.

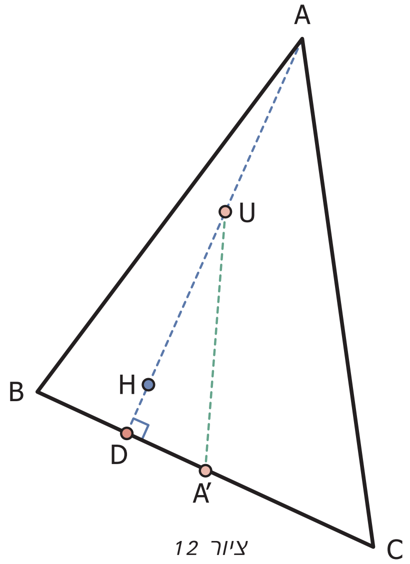
הוכחנו, אם כך, ששלושה מעגלים אלו מתלכדים.

הפתעה נוספת היא העובדה שהתחלנו לטפל במרובעים בעלי אלכסונים מאונכים והגענו לתכונה של משולשים כלשהם.

מרכז מעגל תשע הנקודות וקו אוילר

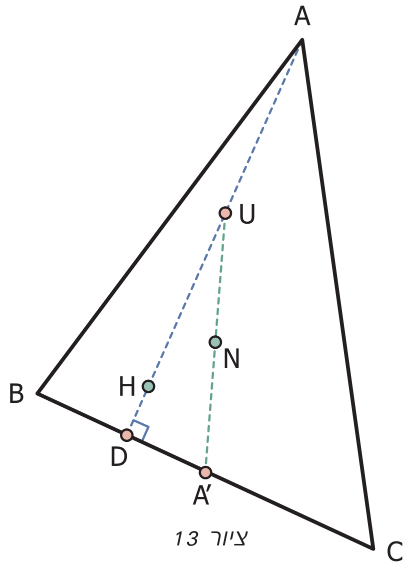
מרכז מעגל תשע הנקודות היא עוד אחת מהנקודות המיוחדות הרבות הקשורות למשולש. נסתכל בנקודות מיוחדות נוספות - מפגש הגבהים, מרכז המעגל החוסם ומפגש התיכונים (מרכז הכובד). כמובן קיימות הרבה יותר נקודות מעניינות ומיוחדות, אך ארבע נקודות אלה נבחרו, מכיוון שלמרבה ההפתעה, כולן נמצאות על ישר אחד - קו אוילר.

במשולש ABC (ציור 12) AD הוא גובה, H הוא מפגש הגבהים, A’ הוא אמצע BC, U הוא אמצע AH. שלוש הנקודות U ,D ו A’. נמצאות על מעגל תשע הנקודות ומכאן ש- A’U הוא קוטר המעגל (אנו משתמשים כאן במשפט ההפוך למשפט האומר כי זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה).



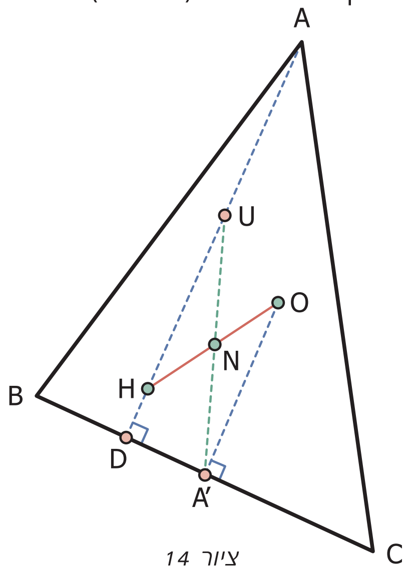
ציור 12

לכן נקודת האמצע N של A’U , היא מרכז מעגל תשע הנקודות (ציור 13).



ציור 13

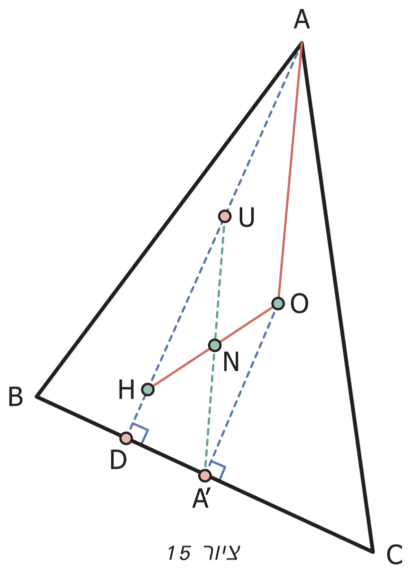
אם נעלה את האנך ל- BC מ- A’, מרכז המעגל החוסם את ΔABC נמצא עליו.
נאריך את HN עד פגישתו ב O עם האנך ששרטטנו. (ציור 14).



ציור 14

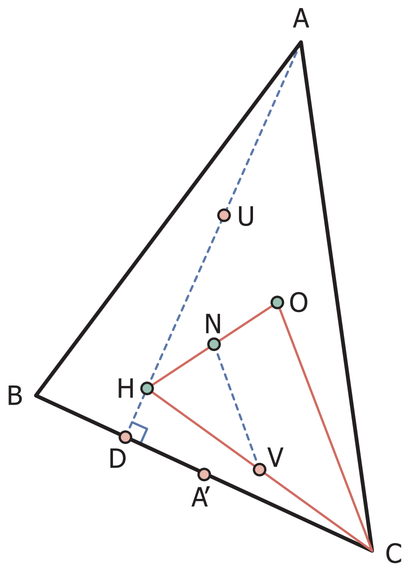
"תקוותנו" היא שהנקודה O תתגלה כמרכז המעגל החוסם.
AD מאונך ל- BC, וגם OA’ מאונך ל- BC, לכן OA’ || AD. בנוסף לכך הקטעים UN ו- NA’ שווים, לכן המשולשים UNH ו- A’NO חופפים (ז.צ.ז.).
מכאן ש- ON = NH; מה שאומר, **שלו רק** היתה נקודה O מרכז המעגל החוסם, ניתן היה לומר שמרכז מעגל תשע הנקודות נמצא בדיוק באמצע המרחק שבין מפגש הגבהים ובין מרכז המעגל החוסם.

כמו כן, UA = HU = A’O מכאן נובע ש- UA’OA מקבילית, ולכן UA’ = AO.
מה שאומר, **שלו רק** היתה הנקודה O מרכז המעגל החוסם, ניתן היה לומר, שרדיוס מעגל תשע הנקודות (NU) שווה באורכו למחצית רדיוס המעגל החוסם (AO) (ציור 15)



ציור 15

כדי להוכיח ש- O מרכז המעגל החוסם, מספיק להראות ש- AO = OC. (כי זה יאמר ש- O נמצאת על האנך האמצעי ל- AC, והרי היא נמצאת גם על האנך האמצעי ל- BC).
אורכו של AO הוא פעמיים רדיוס מעגל תשע הנקודות. נבדוק מהו אורכו של OC. נסמן ב- V את אמצע HC (ציור 16). V, על-פי הגדרתה, נמצאת על מעגל תשע הנקודות, לכן NV הוא גם קטע אמצעים במשולש HOC.
לכן $CO = 2 \cdot NV$. כלומר, אורכו של CO הוא פעמיים רדיוס מעגל תשע הנקודות.
מכאן נובע AO = CO, כלומר הוכחנו כי O מרכז המעגל החוסם.



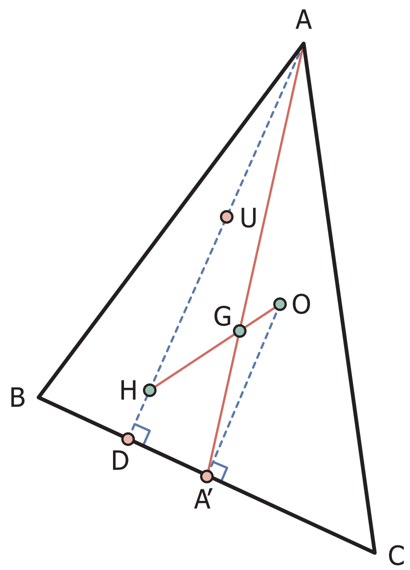
ציור 16

עד כה הוכחנו:

מרכז המעגל החוסם, מרכז מעגל תשע הנקודות ומפגש הגבהים, נמצאים על ישר אחד, כאשר מרכז תשע הנקודות נמצא במחצית הדרך בין שתי הנקודות אחרות, ורדיוס מעגל תשע הנקודות שווה למחצית רדיוס המעגל החוסם.

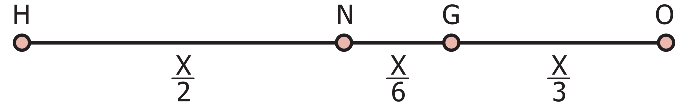
הישר של שלוש הנקודות נקרא **קו אוילר**, לא מפני שאוילר מצא ששלוש נקודות אלו נמצאות על ישר אחד - אין לנו שום הוכחה שהוא ידע על מעגל תשע הנקודות או על מרכזו, אלא מכיוון שהוא מצא ששתי הנקודות האחרות עם נקודה נוספת - מפגש התיכונים, נמצאות על ישר אחד. ניתן להוכיח זאת בקלות על ידי שימוש בתכונה שנקודות מפגש התיכונים מחלקת אותם ביחס של 1:2.

נניח שקו אוילר HO חותך את התיכון AA’ ב- G (ציור 17) ונוכיח כי G הוא נקודת מפגש התיכונים, כדי לעשות זאת נראה ש- GA’ הוא שליש מ- AA’.
המשולשים GOA’ ו- GHA דומים (ז.ז.), והוכחנו כבר כי A’O שווה למחצית AH, מכאן שיחס הדמיון בין המשולשים הוא 1:2.
לכן, A’G שווה למחצית GA, מה שמוכיח שהנקודה G היא מפגש תיכונים.



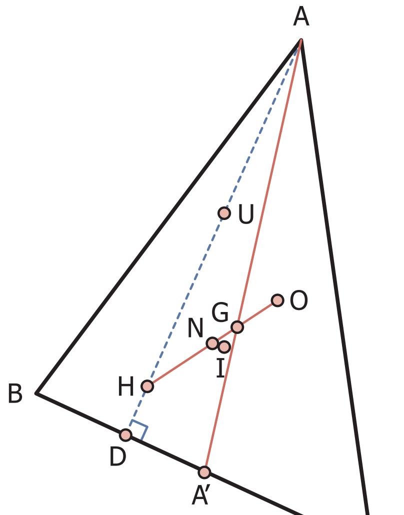
ציור 17

נשים לב שאנו גם יודעים את מיקומה של G על קו אוילר, מכיוון שגם $HG = 2 \cdot GO$ (על-פי יחס הדמיון).
אם כן, קיבלנו עבור כל משולש ארבע נקודות על קו אוילר, שהמיקום שלהן הוא כמתואר בציור 18.



ציור 18

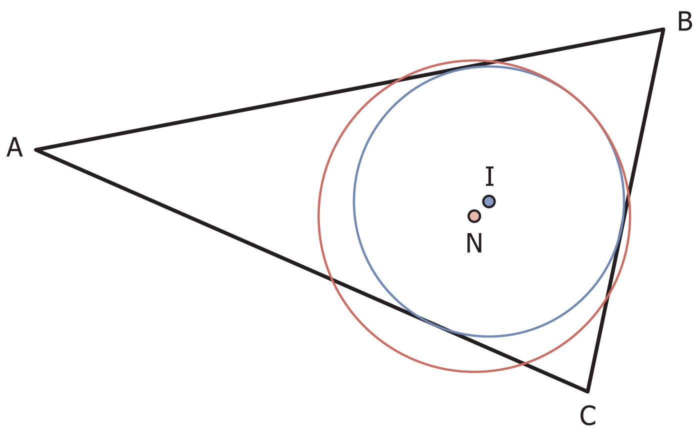
בציור 19 רואים את קו אוילר עם ארבע הנקודות O, G, N, H שהוכחנו שהן נמצאות עליו. קיימת גם נקודה חמישית I, מרכז המעגל החסום במשולש ABC, אשר כפי שמראה בבירור הציור, אינה נמצאת על קו אוילר.



ציור 19

המשפט של פויירבאך (1822)

"מעגל תשע הנקודות" הוא שמו של המעגל שבו עסקנו, אך ביבשת אירופה ובמיוחד בגרמניה הוא קרוי מעגל פויירבאך (Feurbach, 1800-1834). פויירבאך לא הזכיר את מעגל תשע הנקודות באופן שראינו לעיל. הוא דיבר על מעגל של 6 נקודות בלבד, דרך העקבים של הגבהים ודרך אמצעי הצלעות. יחד עם זאת, פויירבאך ניסח משפט שתואר כ"אחד המשפטים היפים ביותר בגיאומטריה המודרנית אודות המשולש". (Coolidge, 1929; Smith, 1959; Boyer, 1968; Pedoe, 1995; Wallace & West, 1998) פויירבאך הבחין כי מעגל תשע הנקודות והמעגל החסום משיקים זה לזה. עובדה זו מופלאה ביותר (ציור 20), הגילוי של משפט זה נראה כהצדקה מספקת לקרוא למעגל תשע הנקודות על שמו של פויירבאך.



ציור 20

גם אם אין ביכולתנו להציע דרך אלגנטית להוכחת התוצאה של פוירבאך אנו יכולים לדון במעגל 9 הנקודות בכיתה בעידן המחשב.

ראשית, אנו יכולים לשאול את עצמנו מה יש להראות כדי להוכיח ששני מעגלים משיקים, במקרה זה, משיקים זה לזה מבפנים? אם המעגלים משיקים, אזי בנקודת ההשקה יש למעגלים נקודה משותפת והאנך למשיק מנקודת ההשקה יעבור דרך שני המרכזים. לכן, המרחק בין המרכזים הוא ההפרש שבין הרדיוסים. ולהיפך, אם המרחק בין המרכזים שווה להפרש בין הרדיוסים, אזי המעגלים משיקים.

תהליך זה מציע דרך להוכחה דדוקטיבית. אך בעידן המחשב יש חיזוקים כבדי משקל לדרך חדשה בהוכחה, הוכחה על-ידי שיכנוע בעזרת מספר רב של דוגמאות, ועלינו לכלול דיונים כאלה ברפרטואר הדידקטי שלנו. לא רק, כמו בדוגמה זו, כשהוכחה דדוקטיבית לא מתאימה ליכולת התלמידים, אלא גם כאמצעי לבחינת נכונות השערות שאמיתותן עדיין בספק.

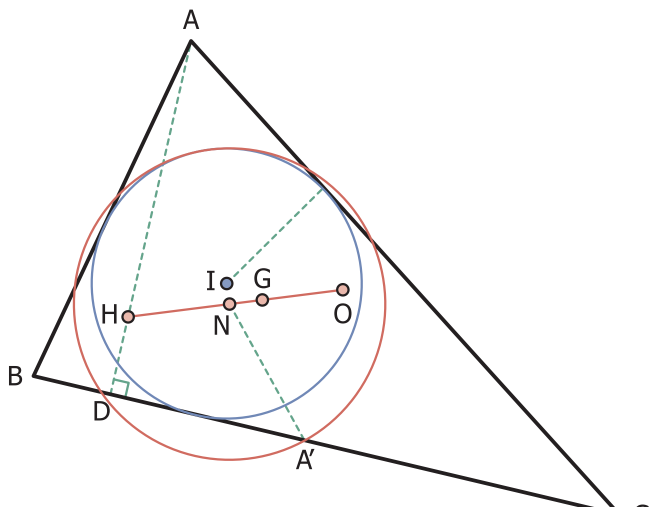
ניתן למדוד בעזרת המחשב (ציור 21):

(i) את רדיוס מעגל תשע הנקודות - NA’ (3.03)

(ii) את רדיוס המעגל החסום - המרחק שבין I ל- AC (2.67)

(iii) את המרחק בין המרכזים - IN (0.36)

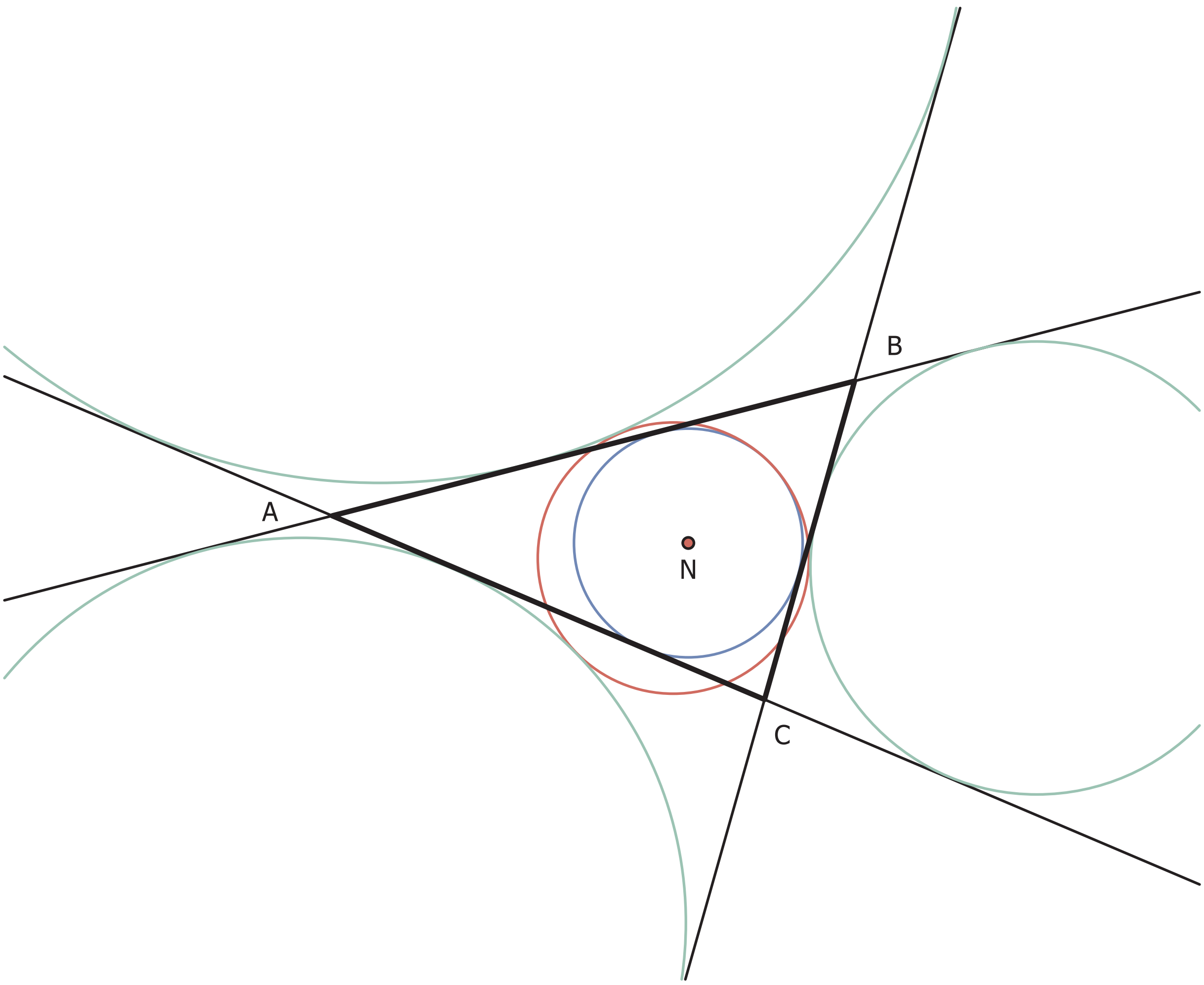
מתוצאות המדידות ניתן לראות כי: (i) – (ii) = (iii)



ציור 21

המדידות מחזקות את ההשערה שלנו לפחות במקרה יחיד זה. אך ניתן להשתמש ביכולת האנימציה של המחשב כדי להיווכח ששויון זה נשאר נכון עבור מספר רב כרצוננו של מקרים. גם כאשר ההוכחה מסובכת, ניתן להציע לבדוק זאת כהשערה במחשב. בדיקה מוצלחת של מקרים רבים תומכת בתקפותה של ההשערה ומצדיקה חיפוש של הוכחה.

למעשה, פויירבאך גילה והוכיח הרבה יותר. פויירבאך גילה כי מעגל תשע הנקודות משיק גם לשלושת המעגלים החיצוניים המשיקים לצלע אחת של המשולש ולהמשכי שתי הצלעות האחרות, וזהו **משפט פויירבאך**, שתואר כאחד היפים ביותר בגיאומטריה המודרנית אודות המשולש. את תוצאות עבודתו זו הוא פרסם בשנת 1822. הוא נפטר בגיל 34 לאחר שלקה בבריאותו. (ראו תולדות חיים: Gillispie, 1981-1990)



ציור 22

רשימת מקורות

Boyer, C. B, (1968). *A History of Mathematics* (pp. 572-574), New York: John Wiley.

Coolidge, J. L. (1929). The Heroic Age of Geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society* 35, 19-37.

Gillispie, C. C. (editor in chief, 1981-1990). *Dictionary of Scientific Biography*, New York: Charles Scribner's Sons.

Pedoe, D. (1995). *Circles, A mathematical View*, Mathematical Association of America.

Smith D. E. (ed. (1959). *Source Book in Mathematics* (pp. 339-345), New York: McGraw-Hill.

Wallace, C.F. and West, S.F. (2004). *Roads to Geometry*. New Jersey: Pearson Education, Inc.