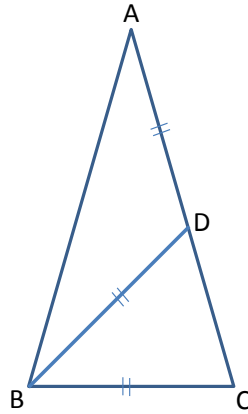


גיאומטריה

שאלה 1

המשולשים BCD ו- ABD הם שווים שוקיים ומרכיבים ביחד את המשולש ABC שאף הוא שווה שוקיים.



מצאו את גודל הזווית A.

פתרונות והערות

המשולשים ABC ו- BCD דומים, כי הם שווים שוקיים שיש להם זווית בסיס משותפת C. הזווית BDC היא מצד אחד זווית בסיס במשולש BCD, מצד שני היא זווית חיצונית לזווית הראש במשולש שווה השוקים ABD שזווית הבסיס שלה DAB היא זווית הראש של משולש ABC. מעובדות אלה נקבל את המשוואות:

$$\angle DCB = \frac{180^\circ - \angle A}{2} \quad (\text{סכום זוויות במשולש שווה השוקיים ABC})$$

$$\angle CDB = 2\angle A \quad (\text{זווית חיצונית שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה – משולש ABD})$$

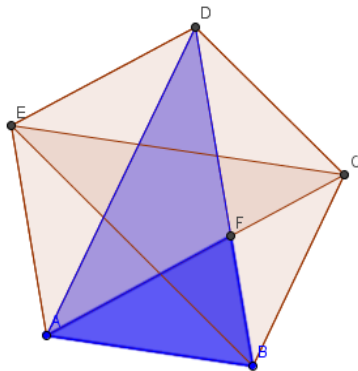
כיוון ש- $\angle DCB = \angle CDB$ (המשולש BDC הוא שווה שוקיים), נוצרת המשוואה:

$$\frac{180^\circ - \angle A}{2} = 2\angle A$$

$$\angle CDB = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ \quad \text{אשר פתרונה הוא:}$$

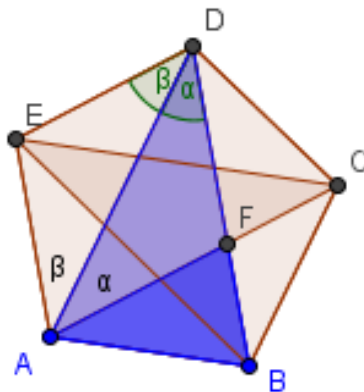
שאלה 2

ABCDE הוא מחומש משוכלל.



- א. מצאו את גודלי הזוויות של משולשים ABD, AFD ו-BFA. הסיקו מהחישוב שמשולשים ABD ו-BFA דומים.
- ב. נתון שאורך צלע המחומש המשוכלל הוא 1 ס"מ. מצאו את אורך הקטע AD. היעזרו בדמיון שהוכחתם בסעיף הקודם. (היחס בין אורך הצלע AD ואורך הצלע AB נקרא יחס הזהב, ומשולש ABD נקרא "משולש זהב").

פתרונות והערות



- א. זווית ADB היא זווית הראש של המשולש ADB ולכן היא שווה לזווית הראש של המשולש CAD (המשולשים חופפים). נסמן זווית זו ב- α . משולש ADB הוא שווה שוקיים (שוב משיקולי סימטריה), ולכן זווית הבסיס שלו BAD שווה ל- $\frac{180^\circ - \alpha}{2}$. נסמן ב- β את הזווית EDA אשר שווה (משיקולי סימטריה) לזווית EAD ולזווית BDC. זוויות של מחומש המשוכלל שוות 108° , ולכן מתקיימות שתי המשוואות:

$$\alpha + 2\beta = 108^\circ$$

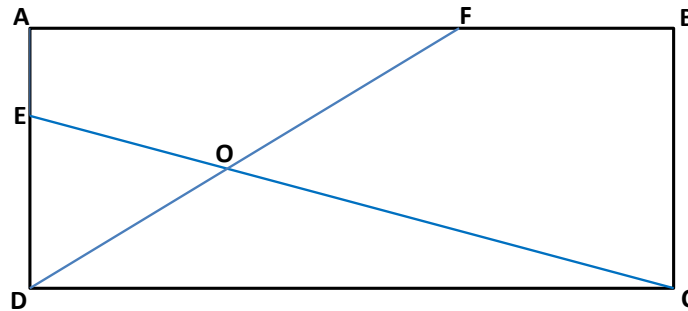
$$\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \beta = 108^\circ$$

פתרון מערכת זו נותן $\alpha = \beta = 36^\circ$. מכאן שזוויות המשולש DAB הן 36° , 72° , 72° ו- 36° , 72° זוויות משולש ADF הן 36° , 72° ו- 108° . זוויות משולש ABF הן 36° , 72° ו- 108° . זוויות משולש ADF הן 36° , 72° ו- 108° . זוויות משולש BDC הן 36° , 72° ו- 108° . זוויות משולש EAD הן 36° , 72° ו- 108° . זוויות משולש EDA הן 36° , 72° ו- 108° . זוויות משולש EDA הן 36° , 72° ו- 108° . זוויות משולש EDA הן 36° , 72° ו- 108° .

- ב. נסמן את אורך הקטע AD ב- x . יחס הבסיס לשוק במשולש שווה השוקיים ABD הוא $\frac{1}{x}$. יחס הבסיס לשוק במשולש שווה השוקיים BFA הוא $\frac{x-1}{1}$. השוואת שני יחסים אלה נותן משוואה ריבועית ששורשה החיובי $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

שאלה 3

במלבן שבאיור



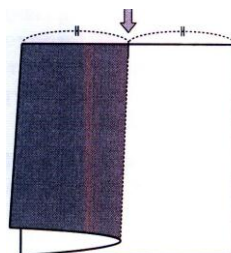
ידוע כי: אורך AE הוא 2 ס"מ, אורך ED הוא 4 ס"מ ואורך AB הוא 15 ס"מ. מצאו את אורך AF אם ידוע גם כי למרובע AEOF ולמשולש DOC אותו שטח.

פתרונות והערות

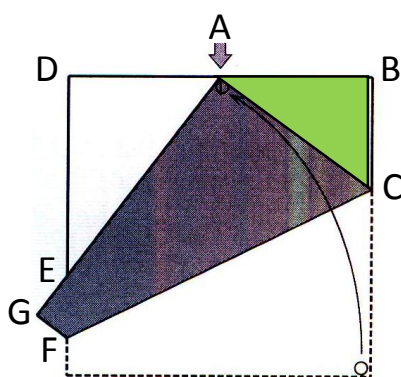
כיוון שהשטח של המרובע AEOF והשטח של המשולש DOC שווים, השוויון יישמר אם נוסיף לכל אחד משטחים אלה את אותו המשולש DEO. על ידי הוספת DEO, נהיה המשולש DAF, והמשולש DOC נהיה המשולש DEC. ולכן, $\frac{6 \cdot AF}{2} = \frac{4 \cdot 15}{2}$, ומכאן $AF=10$.

שאלה 4¹

- קחו דף ריבועי שאורך צלעותיו 8 ס"מ.
- קפלו צלע אל צלע כדי לסמן את אמצע הצלע העליונה (ראו שרטוט).



- הביאו את הקדקוד הימני התחתון אל הנקודה האמצעית שסימנתם בצעד הקודם (ראה שרטוט).



- הראו כי צלעותיו של המשולש ABC הן באורך 3, 4 ו- 5.
- הראו כי המשולשים ABC, ADE ו- EFG הם דומים.

פתרונות והערות

א. $AB=8$ (מחצית הצלע), $AC=x$, ולכן $BC=8-x$. לפי משפט פיתגורס

$$x^2 = (8-x)^2 + 4^2$$

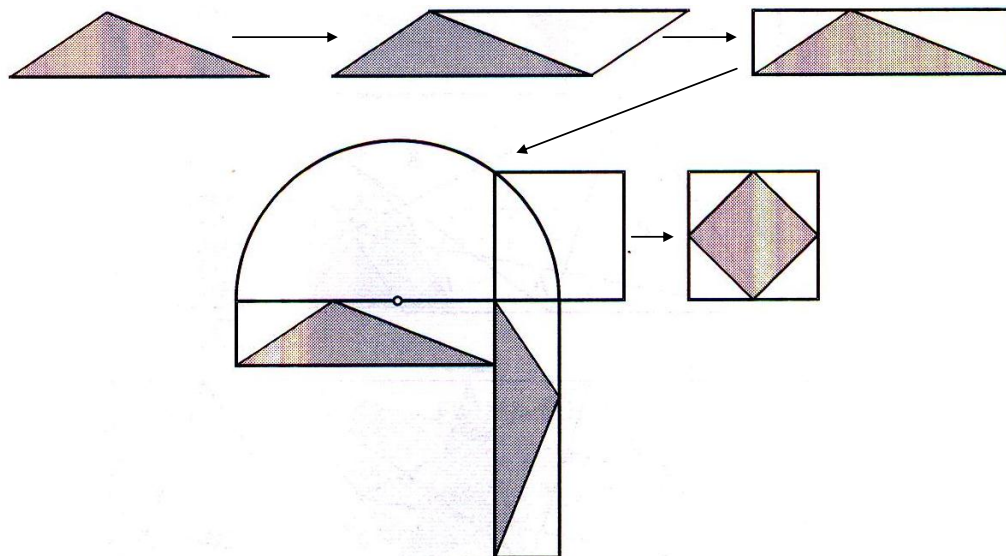
הפתרון היחיד למשוואה זו הוא $x=5$, ולכן אורך הניצב הקטן הוא 3.

- הזווית $\angle DEA = 90^\circ - A$, גם הזווית $\angle BAC = 90^\circ - A$, לכן כל הזוויות של המשולשים ABC ו- ADE שוות. הזוויות DEA ו- FEG הן קדקודיות ולכן הן שוות, ולכן המשולשים ADE ו- EFG הם דומים.

¹ בהשראת תרגיל מהספר:

שאלה 5²

השרטוט הבא מתאר כיצד להפוך משולש לריבוע בעל אותו שטח בארבעה שלבים.



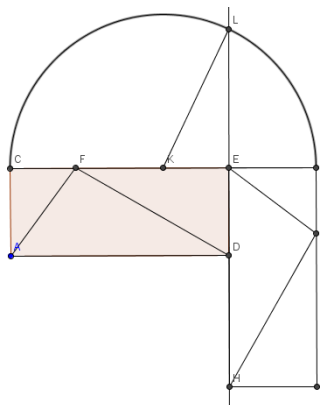
הסבירו את ההצדקה למעבר משלב לשלב וכיצד נשמר השטח משלב לשלב.

פתרונות והערות

במעבר הראשון משכפלים את המשולש באופן סימטרי ביחס לאחת הצלעות ומקבלים מקבילית. עובדה זו נובעת משוויון הזוויות המתחלפות.

במעבר השני "מיישרים" את זוויות המקבילית ועוברים למלבן בעל שטח שווה (אותו בסיס ואותו גובה). יש לציין שאם במשולש המקורי אחת מזוויות הבסיס הייתה ישרה, המלבן היה מתקבל כבר בשלב הראשון.

השלב הבא הוא מעט מורכב. משכפלים את המלבן, מסובבים אותו בזווית ישרה ומצמידים למלבן המקורי.



² בהשראת תרגיל מהספר:

אם נסמן את צלעות המלבן $AC=a$, $AD=b$, הרי שקוטר חצי המעגל הוא $a+b$, והרדיוס $KL = \frac{a+b}{2}$. אורך הקטע EK :

$$EK = GK - GE = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

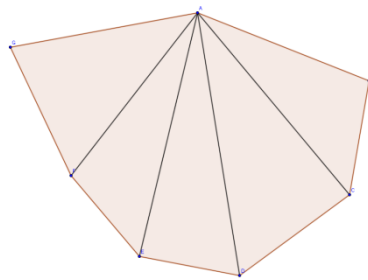
ממשפט פיתגורס, במשולש EKL נקבל: $EL^2 = KL^2 - EK^2 = \frac{(a+b)^2 - (b-a)^2}{4} = ab$. כלומר השטח של הריבוע שאורך צלעו EL שווה לשטח מלבן שאורכי צלעותיו a ו- b . בשלב האחרון מסומן מעוין (למעשה ריבוע) ששטחו חצי שטח הריבוע הנ"ל, ולכן גם חצי שטח המלבן, כלומר שטחו שווה בדיוק לשטח המשולש המקורי.

שאלה 6

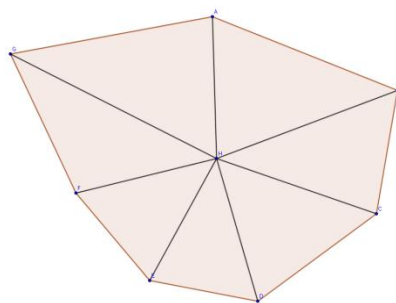
- א. חשבו בשתי דרכים שונות את סכום הזוויות הפנימיות של משובע קמור (מצולע בעל שבע צלעות).
- ב. כמה אלכסונים יש למשובע? האם תשובתכם נכונה לכל משובע, כולל משובעים קעורים?
- ג. מה סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור בעל n צלעות וכמה אלכסונים יש לו?
- ד. כמה צלעות יש למצולע אשר בו 35 אלכסונים? ומה סכום הזוויות הפנימיות שלו?

פתרונות והערות

- א. דרך אחת למצוא את סכום הזוויות הפנימיות של משובע היא לחלק אותו לחמישה משולשים, בכל משולש הסכום הוא 180° , ומכיוון שסכום זוויות של כל המשולשים שווה בדיוק לסכום הזוויות של המשווע, הסכום הכולל הוא 900° .



- דרך אחרת היא לבחור נקודה בתוך המשווע (למשל הנקודה H באיור) ולחבר אותה על ידי קטעים לכל אחד מקדקודי המשווע. הפעם נוצרים שבע משולשים, אשר סכום זוויותיהם 1260° . מסכום זה יש לחסר את כל הזוויות שקדקודן H, שסכומם 360° .



- ב. מכל קדקוד של המשווע יוצאים ארבעה אלכסונים - אלכסון לכל קדקוד אחר חוץ משני הקדקודים השכנים (כי אז הקטעים הם צלעות ולא אלכסונים) ומהקדקוד עצמו. על פי מניין יהיו $28 = 7 \times 4$ אלכסונים, אבל, כל אלכסון נמנה פעמיים - פעם אחת מכל קצה, ולכן מספר האלכסונים הוא 14.

ג. על ידי הכללת כל אחת מהדרכים המפורטות בסעיף א לעיל, סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור בעל n צלעות הוא $180^\circ(n - 2)$, ומספר אלכסוניו הוא $\frac{n(n-3)}{2}$.

ד. למשוואה הריבועית $\frac{n(n-3)}{2} = 35$ יש שני פתרונות, הפתרון המתאים לבעיה הוא 10. למצולע בעל 10 צלעות 1440° .

שאלה 7 (חקר)

נתון מרובע כלשהו ABCD. הנקודות P, Q, R, ו-S הם אמצעי הצלעות AB, BC, CD, ו-DA בהתאמה.

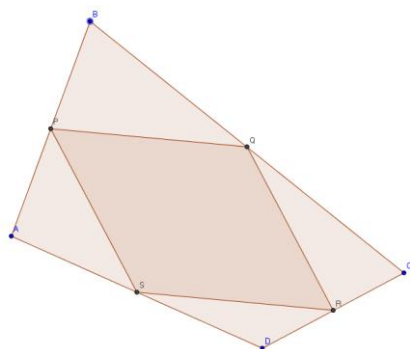
א. הוכיחו כי המרובע PQRS הוא מקבילית.

ב. לגבי כל אחת מהטענות הבאות, ציינו אם היא נכונה או לא. אם הטענה נכונה – הוכיחו אותה. אם היא לא נכונה – שרטטו סקיצה של דוגמה נגדית.

1. אם ABCD טרפז אז PQRS מעוין.
2. אם ABCD מקבילית אז PQRS הוא מקבילית.
3. אם ABCD טרפז שווה שוקיים אז PQRS הוא מעוין.
4. אם ABCD מלבן אז PQRS הוא מלבן.
5. אם ABCD מלבן אז PQRS הוא מעוין.
6. אם ABCD דלתון אז PQRS הוא מעוין.
7. אם ABCD דלתון אז PQRS הוא מלבן.
8. אם ABCD מעוין אז PQRS הוא מלבן.
9. אם ABCD ריבוע אז PQRS הוא מעוין.
10. אם ABCD ריבוע אז PQRS הוא ריבוע.
11. אם PQRS מקבילית אז ABCD הוא מקבילית.
12. אם PQRS מעוין אז ABCD הוא מלבן.
13. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא ריבוע.
14. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא מעוין.
15. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא מקבילית.

פתרונות והערות

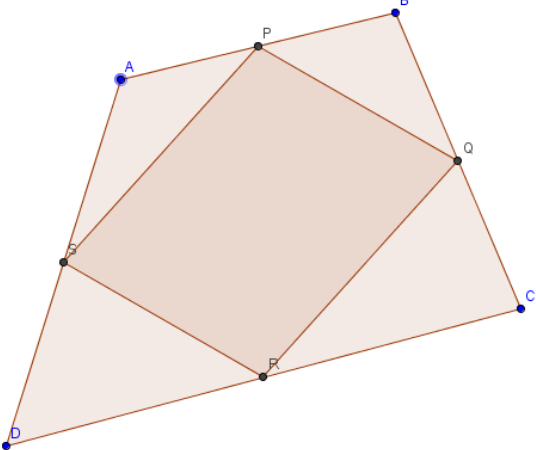
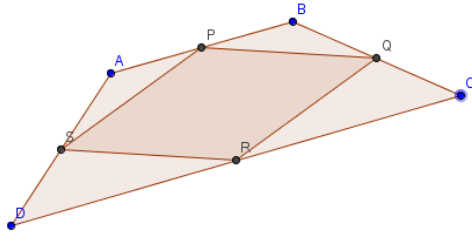
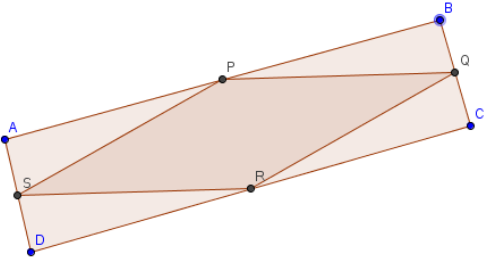
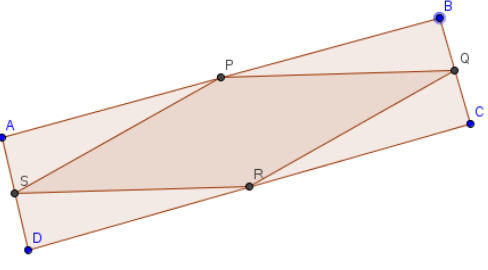
בשאלה זאת על התלמידים לחקור את מרחב האפשרויות כל מנת להכריע אם טענות הן נכונות או לא השאלות מציבות מספר אתגרים: התבססות על משפטים שנלמדו על מנת להוכיח את הטענות הנכונות, הפעלת ביקורתיות ויצירתיות על מנת למצוא דוגמאות נגדיות לטענות הלא נכונות, וזיהוי טענות הסותרות טענות קודמות או לחילופין נובעות מהן.

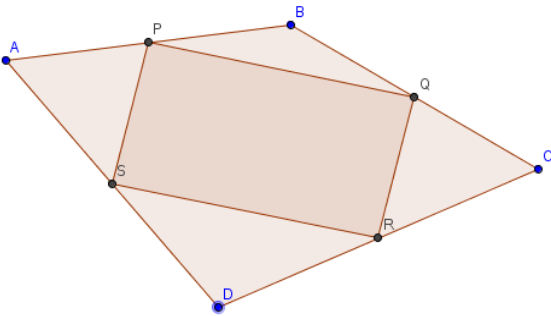
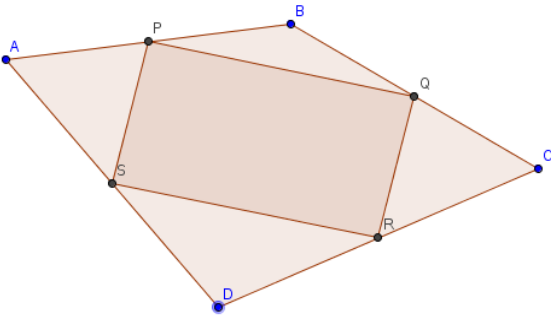
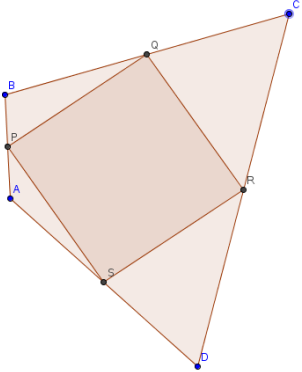


א. אם נעביר את האלכסון BD, נראה ש-SP קטע אמצעים במשולש ABD וש-QR קטע אמצעים במשולש BCD. SP ו-QR מקבילים שניהם ל-BD, ולכן מקבילים זה לזה.

באופן דומה נראה כי PQ ו-RS מקבילים זה לזה, ומכאן שבמרובע PQRS יש שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

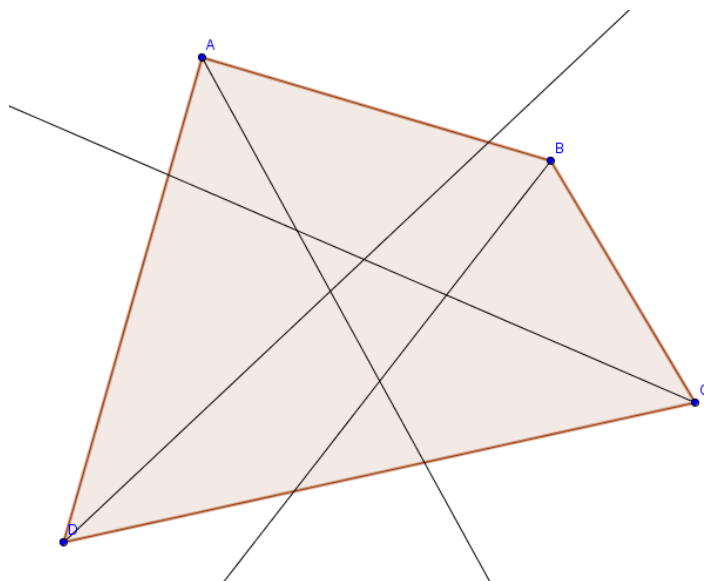
ב.

לא נכון. 	1. אם ABCD טרפז אז PQRS מעוין.
נכון. בסעיף א הוכחנו ש- PQRS מקבילית בכל מקרה!	2. אם ABCD מקבילית אז PQRS הוא מקבילית.
נכון. קל להראות ש PRCB ו- PRDA טרפזים ישרי זווית חופפים. כמו כן, QS קטע אמצעים בטרפז. נסיק שאלכסוניו של PQRS מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה, ולכן PQRS מעוין. 	3. אם ABCD טרפז שווה שוקיים אז PQRS הוא מעוין.
לא נכון. 	4. אם ABCD מלבן אז PQRS הוא מלבן.
נכון. קל להראות שאלכסוני PQRS מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה. 	5. אם ABCD מלבן אז PQRS מעוין.

לא נכון. 	6. אם ABCD דלתון אז PQRS מעוין.
נכון. אלכסוני ABCD מאונכים זה לזה, וצלעות PQRS מקבילות לאלכסוני ABCD. 	7. אם ABCD דלתון אז PQRS מלבן.
נכון. מעוין הוא דלתון, כך שהתוצאה נובעת מהסעיף הקודם.	8. אם ABCD מעוין אז PQRS מלבן.
נכון. ראה סעיף הבא.	9. אם ABCD ריבוע אז PQRS מעוין.
נכון. אלכסוני PQRS שווים וחוצים זה את זה.	10. אם ABCD ריבוע אז PQRS הוא ריבוע.
לא נכון. הוכחנו בסעיף א ש-PQRS תמיד מקבילית, גם כאשר ABCD מרובע כללי.	11. אם PQRS מקבילית אז ABCD הוא מקבילית.
לא נכון. נובע מסעיף 15. גם אם PQRS ריבוע, לא נובע אפילו ש-ABCD מקבילית!	12. אם PQRS מעוין אז ABCD הוא מלבן.
לא נכון. נובע מסעיף 15. גם אם PQRS ריבוע, לא נובע אפילו ש-ABCD מקבילית!	13. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא ריבוע.
לא נכון. נובע מסעיף 15. גם אם PQRS ריבוע, לא נובע אפילו ש-ABCD מקבילית!	14. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא מעוין.
לא נכון. 	15. אם PQRS ריבוע אז ABCD הוא מקבילית.

שאלה 8

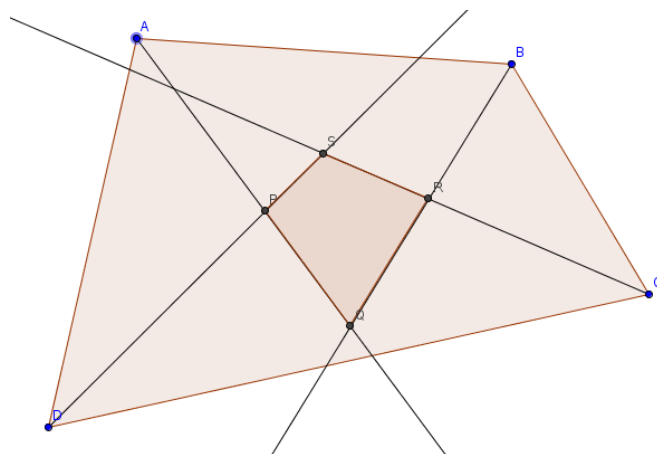
במרובע כלשהו ABCD מעבירים ארבעת חוצי הזוויות, כמתואר בסרטוט.



א. הוכיחו כי אם המרובע ABCD הוא ריבוע, ארבעת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה.

ב. האם קיימים מרובעים (שאינם ריבוע) שבהם ארבעת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה? נסחו טענה והוכיחו אותה.

קיימים מרובעים ABCD כאלה שחוצי הזוויות שלהם יוצרים מרובע PQRS, כמתואר בסרטוט. בהמשך השאלה נמקד את הדיון במרובעים כאלה.



ג. הוכיחו כי אם ABCD מקבילית, הרי ש-PQRS מלבן.

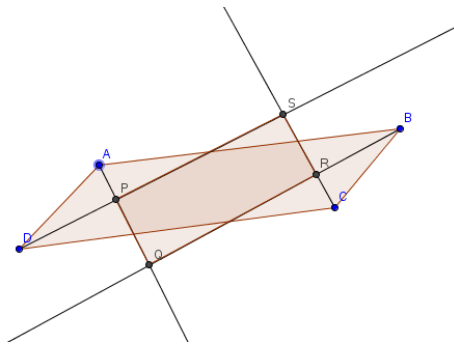
ד. המשפט ההפוך לזה שבסעיף הקודם טוען: אם ידוע ש-PQRS מלבן, הוכיחו את הטענה או הפריכו אותה בעזרת סרטוט המציג דוגמה נגדית.

ה. נתון כי ABCD מלבן. שרטטו סקיצה ושערו איזה סוג מרובע יהיה PQRS. נסחו השערה ונסו להוכיח אותה.

פתרונות והערות

א, ב. במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות, ולכן ארבעת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת – מפגש האלכסונים. כיוון שריבוע הוא מעוין, הרי שגם בריבוע חוצי הזוויות נפגשים

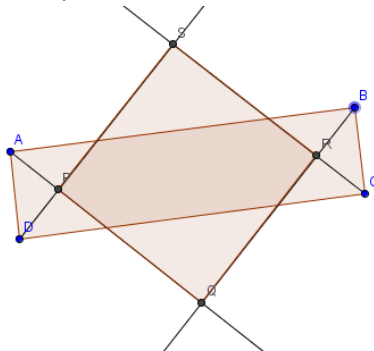
בנקודה. גם בדלתון כלשהו חוצי הזוויות נפגשים בנקודה. האלכסון הראשי חוצה שתי זוויות נגדיות, ומשיקולי סימטריה שני חוצי הזוויות הנותרים חותכים את האלכסון הראשי באותה נקודה.



ג. נבחר זווית כלשהי במרובע PQRS (למשל S) ונראה שהיא ישרה. במקבילית, סכום זוויות סמוכות (זוויות BCD ו-ADC) הוא 180° . סכום מחצית הזוויות (SCD ו-SDC) הוא 90° , ולכן משולש SCD הוא ישר זווית, כלומר זווית S היא ישרה. שיקולים סימטריים מראים שגם זוויות P, Q ו-R הן ישרות.

ד. המשפט ההפוך נכון: אם S זווית ישרה, זוויות SCD ו-SDC משלימות לזווית ישרה, זוויות BCD ו-ADC משלימות ל- 180° . זוויות אלה הן חד צדדיות בין AD ו-BC, ולכן צלעות אלה מקבילות. שיקולים סימטריים מראים שגם AB ו-CD מקבילות.

ה. אם ABCD הוא מלבן, PQRS הוא ריבוע. הוכחה: משולש SCD הוא ישר זווית (על פי



סעיף ד) ושווה שוקיים (זוויות הבסיס הן מחצית זווית ישרה). מכאן ש SC ו-SD שוות באורכן. משולשים BCR ו-ADP הם משולשים ישרי זווית שווי שוקיים חופפים, ולכן RC ו-PD שווים באורכם. החסרה של גדלים שווים ($RC=PD$) מגדלים שווים ($SC=SD$) מראה שהצלעות SR ו-SP שוות. מקבילית שבה זוג צלעות סמוכות שוות היא ריבוע.

שאלה 9 (בנייה)

א. בנו מרובע בעל שתי צלעות בנות 3 ס"מ ושתי צלעות בנות 5 ס"מ. את הבניה תוכלו לבצע בעזרת סרגל ומחוגה או באמצעות תוכנה (למשל, גיאוגברה). איזה סוג מרובע קבלתם? נמקו.

ב. בנו מרובע אחר בעל אותם אורכי צלעות. איזה סוג מרובע קבלתם עכשיו? נמקו.

ג. האם מרובע בעל שתי צלעות בנות 3 ס"מ ושתי צלעות בנות 5 ס"מ חייב להיות מלבן?

ד. השלימו את הטבלה הבאה. מרובע בעל שתי צלעות בנות 3 ס"מ ושתי צלעות בנות 5 ס"מ:

	חייב להיות	יכול להיות	לא ייתכן	הסבר
ריבוע				
מעוין				
מלבן				
טרפז				
מקבילית				
דלתון				

ה. מה השטח הגדול ביותר שיכול להיות למרובע שאורך שתיים מצלעותיו 3 ס"מ ואורך שתיים מצלעותיו האחרות 5 ס"מ? הוכיחו את תשובתכם.

ו. מהם אורכי האלכסונים במרובע בעל השטח שחישבתם בסעיף הקודם? הבחינו בין שני מקרים.

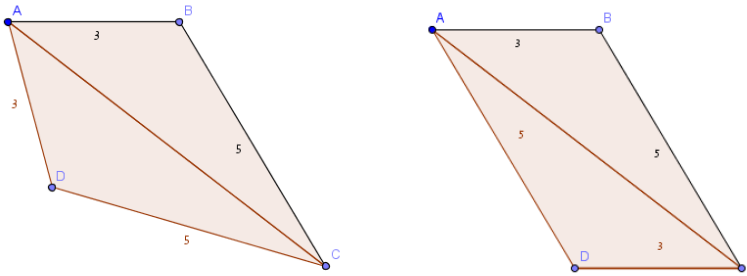
פתרונות והערות

א-ג. מרובע בעל בנות 3 ס"מ ושתי צלעות בנות 5 ס"מ יכול להיות מלבן אך אינו חייב להיות מלבן. המרובע יכול להיות מקבילית או דלתון.

ד.

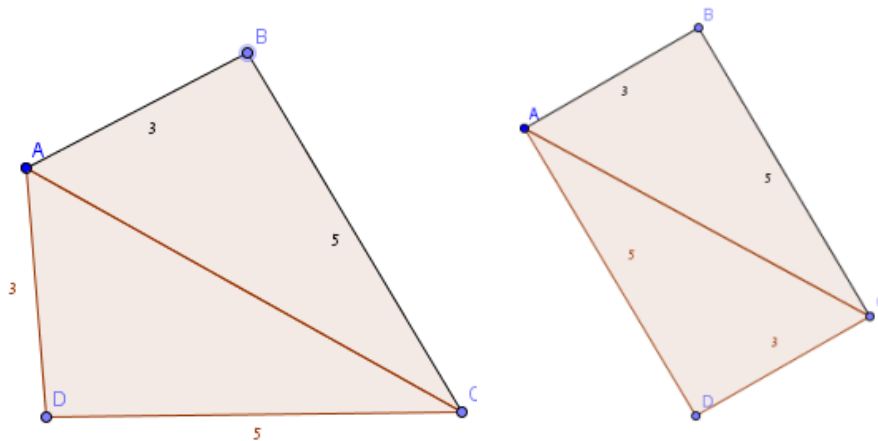
	חייב להיות	יכול להיות	לא ייתכן	הסבר
ריבוע			✓	בריבוע כל הצלעות שוות
מעוין			✓	במעוין כל הצלעות שוות
מלבן		✓		בנייה
טרפז			✓	בטרפז אין שני זוגות של צלעות שוות
מקבילית		✓		בנייה
דלתון		✓		בנייה

ה. הן דלתון והן מקבילית בעלי אורכי צלעות כאלה מורכבים משני משולשים חופפים שאורכי שתיים מצלעותיהם 3 ס"מ ו- 5 ס"מ.



נימוק: במקבילית, $CD=AB$ ו- $DA=BC$ בתור צלעות נגדיות במקבילית, צלע AC משותפת. על פי משפט החפיפה צלע-צלע-צלע, המשולשים חופפים. משיקולים דומים, המשולשים הנוצרים על ידי האלכסון AC חופפים. לכן שטח הדלתון או המקבילית יהיו מקסימאליים כאשר שטח המשולשים יהיה מקסימאלי, וזה קורה כאשר הגובה לצלע הינו מרבי, כלומר כאשר הזווית בין הצלעות הנתונות ישרה (בסיס 5 ס"מ וגובה 3 ס"מ או להיפך). בשני המקרים השטח המקסימאלי הוא פעמיים שטח המשולש ישר הזווית, כלומר 15 סמ"ר (במקרה זה המקבילית הינה מלבן).

1. נבחין בין שני המקרים:



במקרה של המלבן האלכסונים שווים, ולפי משפט פיתגורס אורכם $\sqrt{34}$ ס"מ. במקרה של הדלתון אורך אחד האלכסונים $\sqrt{34}$ ס"מ. על מנת לחשב את אורך האלכסון השני נשים לב כי שטח של דלתון הוא חצי מכפלת אלכסוניו. ידוע שהשטח הוא 15 סמ"ר, ומכאן שאורך האלכסון השני $\frac{30}{\sqrt{34}} = 5.145$ ס"מ.

סעיפי השאלה הזאת מחזקים את הקשר בין משפטים ובניות בכך שנכונות ויחידות הבנייה מוכחות באמצעות משפטים.

לא די לשים לב לכך שיתכן מקבילית ויתכן דלתון. יש להדגיש גם את ההכרחיות: המרובע חייב להיות מקבילית או דלתון. יתרה מזאת, אפשר לקבוע בדיוק באיזה תנאי יתקבל דלתון (הצלעות השוות סמוכות זו לזו) ובאיזה תנאי מקבילית (הצלעות השוות נגדיות זו לזו). כדאי

לציין אילו דלתונים ומקביליות "מיוחדים" עשויים להתקבל. הדלתון עשוי להיות קמור או קעור, והמקבילית עשויה להיות מלבן.

נציין כאן שאי אפשר לבנות טרפז בעל התכונות הדרושות. לכאורה הדלתון יכול להיות טרפז, אלא שאם יש לו זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות, הרי שמשיקולי סימטריה גם זוג הצלעות השני מקבילות ומתקבלת מקבילית ולא טרפז.

שאלה 10 (בנייה)

א. נסו לבנות את כל המרובעים הבאים כך שאורכי האלכסונים שלהם יהיו 4 ס"מ ו- 7 ס"מ בהתאמה. הראו אילו מהם ניתן לבנות והוכיחו אילו מהם אי-אפשר.

- טרפז שווה שוקיים
- טרפז ישר זווית
- מקבילית
- דלתון קמור
- דלתון קעור
- מעוין
- מלבן
- ריבוע

ב. בנו מרובע (בו אורך אלכסוניו 4 ס"מ ו- 7 ס"מ) כך ששטחו יהיה הקטן ביותר.

ג. מבין כל המרובעים שבניתם בסעיף א, לאיזה מהם יש השטח הגדול ביותר? מה שטחו? נמקו.

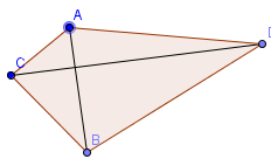
פתרונות והערות

א. איתן לבנות את כל המרובעים המוזכרים להוציא טרפז שווה שוקיים וממלבן (שכולל גם ריבוע). במרובעים אלה האלכסונים צריכים להיות שווים. לדוגמא:

טרפז ישר זווית	מקבילית	דלתון קמור	דלתון קעור	מעוין

ב. שטח של מרובע בעל אורכי אלכסונים הנתונים יכול להיות קטן כרצוננו, אם האלכסונים הולכים ומתקרבים לישר אחד.

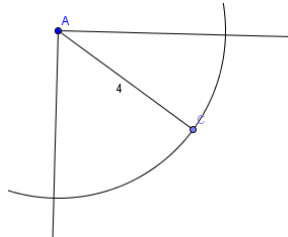
ג. שטח מרובע בעל אורכי אלכסונים נתון הוא מקסימאלי כאשר האלכסונים ניצבים זה לזה. זה קורה בדלתון (ולכן גם במעוין), אבל לא רק, לדוגמה:



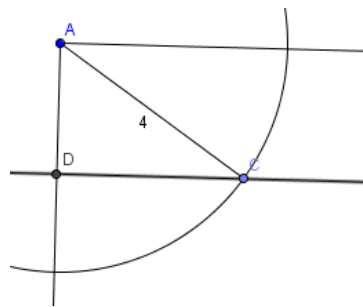
יש לשים לב כי השטח שווה למחצית מכפלת האלכסונים גם כאשר המרובע קעור.

אפשרות אחת "לבניית" מרובע בעל תכונות מסוימות היא לשרטט סקיצה שממחישה שמרובע כזה קיים. אפשרות אחרת היא בנייה מדויקת בעזרת סרגל ומחוגה. אפשרות שלישית היא בנייה בעזרת תוכנת גיאומטריה דינאמית. נדגים כאן בנייה של טרפז ישר זווית בעל אלכסונים בעלי אורך של 4 ו-7 יחידות בהתאמה, בעזרת גיאוגרפה.

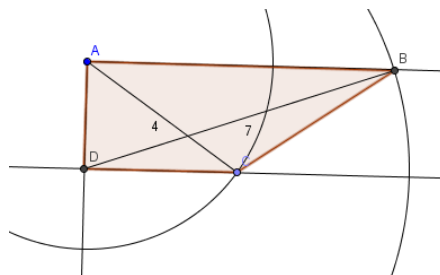
נתחיל בקדקוד של הזווית הישרה (A), ממנו נוציא קרן כלשהי, וקרן שנייה המאונכת לראשונה. ננסה תחילה לבנות את הטרפז כך שהאלכסון דרך הזווית הישרה הוא האלכסון שאורכו 4 יחידות אורך. נעביר קשת מתאימה כמסומן, ונבחר את קודקוד C כך שאורך האלכסון AC יהיה 4 יחידות אורך.



כעת נעביר דרך C ישר המקביל לקרן, על מנת למצוא את הקדקוד D.



את הקדקוד B נבנה עזרת "מחוגה" כך שאורך האלכסון BD יהיה 7 יחידות אורך, ונחבר את קודקודי המרובע.

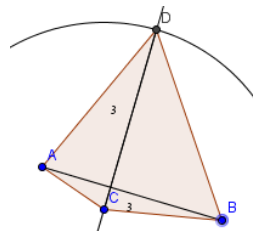


שאלה 11 (בנייה)

- א. בנו מרובע שאלכסוניו שווים באורכם ומאונכים זה לזה. אילו תכונות נוספות יש למרובע שבניתם?
- ב. האם ניתן לבנות על פי נתונים אלה דלתון? אם כן, הדגימו בעזרת בנייה. אם לא, הוכיחו.
- ג. האם ניתן לבנות על פי נתונים אלה מרובע שאיננו דלתון? אם כן, הדגימו בעזרת בנייה. אם לא, הוכיחו.
- ד. האם ניתן לבנות על פי נתונים אלה ריבוע? אם כן, הדגימו בעזרת בנייה. אם לא, הוכיחו.
- ה. האם ניתן לבנות על פי נתונים אלה מקבילית שאיננה מלבן? אם כן, הדגימו בעזרת בנייה. אם לא, הוכיחו.

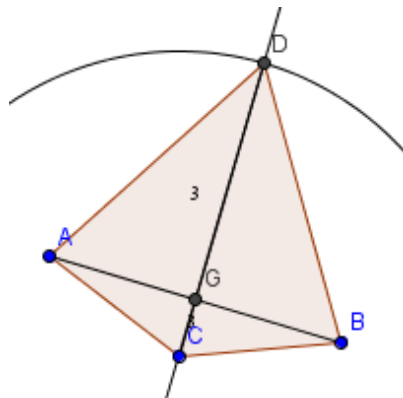
פתרונות והערות

- א. ניתן לבנות מרובע בו אלכסוניו שווים ומאונכים זה לזה כך שלמרובע לא תהיינה כל תכונות מיוחדות אחרות. לדוגמא:

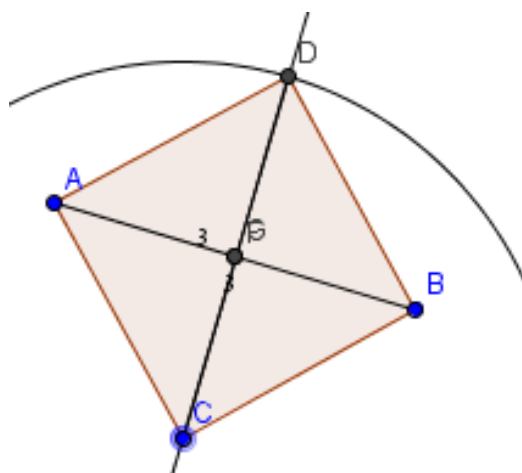


ניתן להדגים את הבנייה על ידי העמדת שני מקלות באורכים הנתונים כך שהם יהיו מאונכים זה לזה ולחבר את הקצוות שלהם. על ידי כך ניתן להיווכח כי קיימים אינסוף מרובעים כאלה שאינם מיוחדים.

- ב. אם אלכסון אחד חוצה את האלכסון השני, נקבל דלתון:

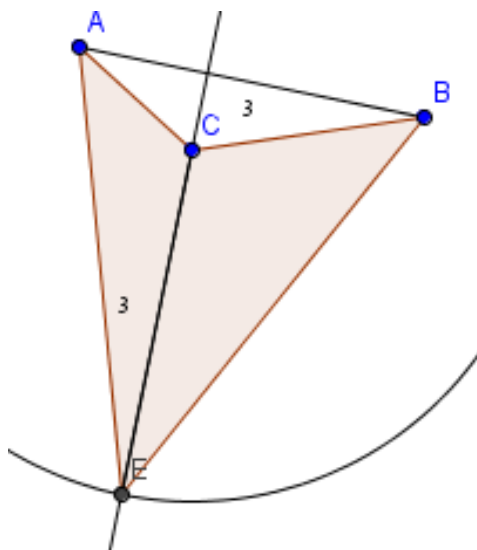


ג. אם שני האלכסונים חוצים זה את זה מתקבל ריבוע:



ד. לא ניתן לקבל מקבילית כללית. במקבילית, אורך האלכסונים אינו בהכרח שווה. המקבילית היחידה שנית לקבל הוא ריבוע.

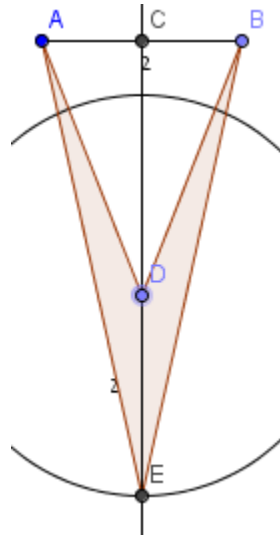
אפשר לציין שהתנאי "אלכסונים מאונכים ושווים" לא מחייב שהם נחתכים. ואכן קיים גם מצב של מרובע קעור שבו אלכסון אחד חיצוני למרובע.



שאלה 12 (בנייה)

בנו דלתון אשר אורכי שני אלכסוניו 2 ס"מ וכל צלעותיו ארוכות מאלכסוניו.

פתרונות והערות

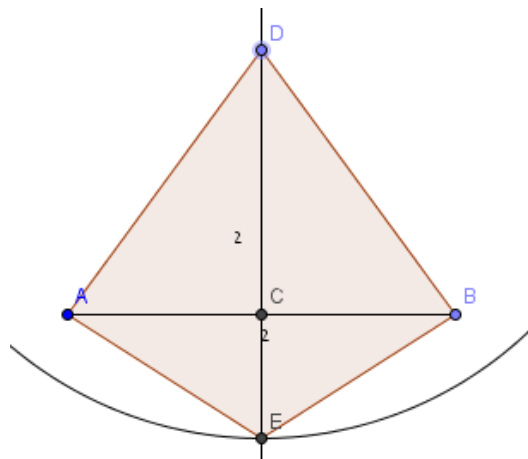


תהליך הבנייה:

- אלכסון AB שאורכו 2 ס"מ
- אנך אמצעי לאלכסון
- סימון נקודה כלשהי (D) על האנך
- הקצאה של קטע DE באורך 2 ס"מ בעזרת מחוגה.

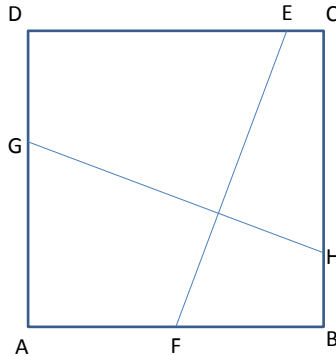
על מנת שאורכי כל הצלעות יהיו יותר משני ס"מ, יש להרחיק את הנקודה D מהאלכסון AB.

דלתון כזה חייב להיות קעור, כלומר האלכסונים לא נחתכים. אפשר להראות בעזרת משפט פיתגורס שאם הדלתון הוא קמור, תהייה צלע שאורכה $\sqrt{2}$ לכל היותר. בסרטוט $CB = 1$, $CE \leq 1$. אם CE אינו קטן מ-1 אז CD יהיה קטן מ-1 שהרי סכומם 2. ולכן היתר במשולש CBE (או CBD) הוא לכל היותר $\sqrt{2}$.



שאלה 13

נתון הריבוע ABCD, וידוע כי EF מאונך ל-GH.

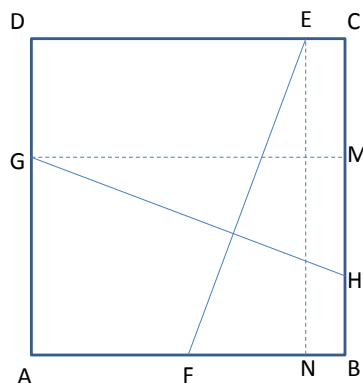


א. הוכיחו כי $GH=EF$

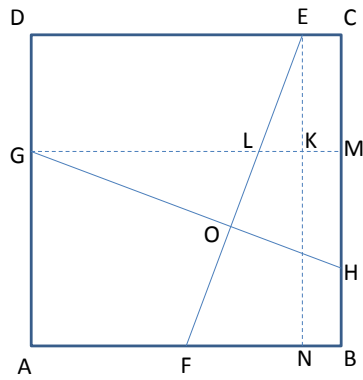
ב. האם תכונה זו תתקיים גם אם נחליף את הריבוע במעוין כללי?

פתרונות והערות

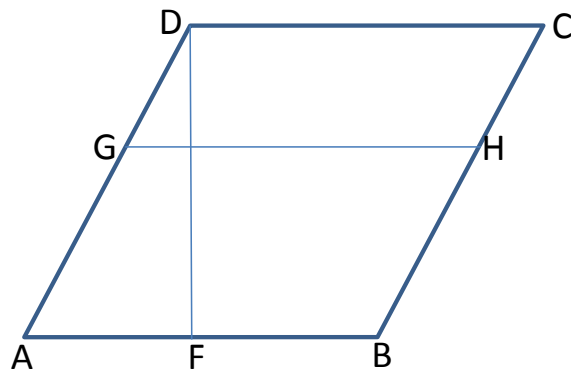
א. אחת הדרכים להראות כי שני קטעים הם שווי אורך היא הוכחת שוויון צלעות מתאימות במשולשים חופפים. לשם כך ניתן ליצור משולשים ש"נראים" חופפים ולבדוק האם הם אכן כאלה. ניצור את המשולשים ישרי זווית ENF ו-GMH:



שני המשולשים הם ישרי זווית, והניצב הגדול בהם שווה (הוא רוך הצלע של הריבוע). אם נצליח להוכיח כי הזווית E שווה לזווית G, המשולשים ENF ו-GMH יהיו חופפים (לפי המשפט זווית-צלע-זווית), ואז $GH=EF$. נראה כי הזווית E ו-G שוות בעזרת המשולשים EKL ו-GOL. לשניהם זווית ישרה, והזווית מסומנת ב-L שווה בשני המשולשים (הן קודקודיות), לכן הזווית השלישית חייבת להיות שווה בשניהם.



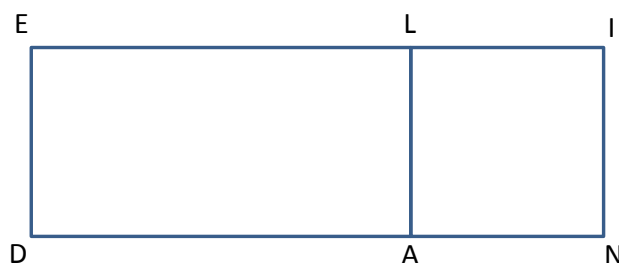
ב. התכונה לא בהכרח תתקיים במעוין. להלן דוגמא נגדית: במעוין $ABCD$, DF מאונך ל- GH , אך נראה כי $GH > DF$.



ניתן לראות כי $ABHG$ מקבילית, ולכן $GH = AB$. אבל מכיוון ש- $ABCD$ מעוין, מתקיים גם כי $GH = AB = DA$. אבל $DA > DF$, לכן $GH > DF$.

שאלה 14

נתון כי ELAD מלבן (שאינו ריבוע) ו-LINA ריבוע.



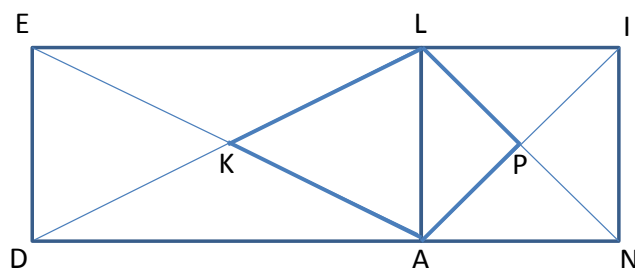
העבירו את אלכסוני המלבן ואת אלכסוני הריבוע וסמנו את נקודות המפגש ב-K וב-P בהתאמה.

א. איזה מרובע הוא LKAP? נמקו.

ב. איזה מרובע הוא DKPN? נמקו.

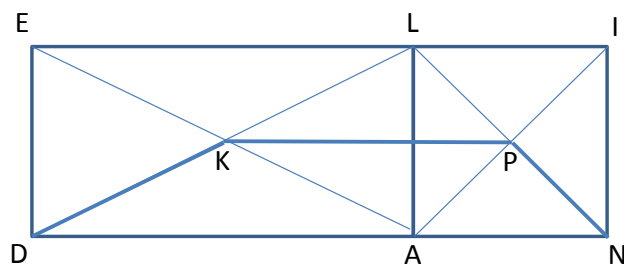
פתרונות והערות

א.



KA=LK (כי במלבן האלכסונים השווים חוצים זה את זה) ו-PA=LP (כנ"ל), לכן LKPA דלתון.

ב.



LA מאונך ל-KP (כי האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה)
LA מאונך ל-DA ולכן ל-DN (צלעות של מלבן)

לכן, KP מקביל ל- DN (כי שני ישרים מאונכים לישר שלישי הם מקבילים זה לזה), ולכן KPDN טרפז.

שאלה 15

הוכיחו: אם בטרפז הזוויות ליד אחד הבסיסים שוות זו לזו, אז הטרפז שווה שוקיים.

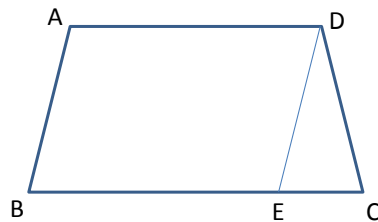
פתרונות והערות

יש כמה דרכים להוכיח כי בטרפז נתון ABCD אם הזוויות B ו- C שוות, אז $AB=DC$.



הוכחה ראשונה:

נעביר קטע מקביל ל- AB דרך D, נוצרת המקבילית ADBE:



DEC הוא משולש שווה שוקיים (כי זוויות הבסיס בו שוות – על סמך נתון), לכן $DC=DE$ אך גם $DE=AB$ לכן $DC=AB$.

הוכחה שניה:

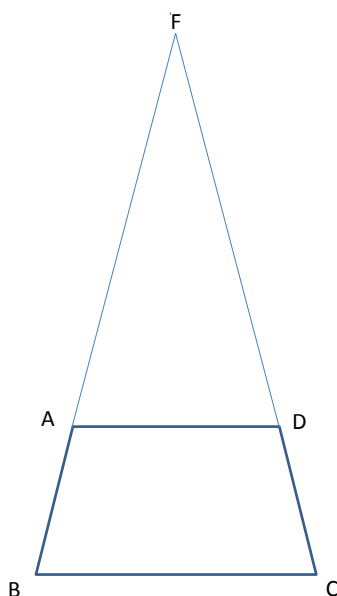
נעביר אנכים מ- A ומ- D, נוצר המרובע ADEF שהוא מלבן:



$DF=AE$, הזוויות E ו- F שוות (ישרות), והזוויות B ו- C שוות (נתון), לכן המשולשים ABE ו- DFC חופפים. מכאן ש- $AB=DC$.

הוכחה שלישית:

נאריך את שתי השוקיים של הטרפז כך:



נוצרים שני משולשים: FBC ו- FAD. FBC הוא שווה שוקיים כי זוויות הבסיס שלו שוות. ניתן להראות כי גם FAD הוא שווה שוקיים: זוויות הבסיס שלו שוות בהתאמה לזוויות הבסיס של FBC לכן הן שוות גם ביניהן. על ידי "חיסור" השוקיים השוות של המשולש הקטן מהשוקיים השוות של המשולש הגדול, מתקבל כי שוקי הטרפז שוות.

בהוכחה זו ניתן לראות כי הזוויות שליד הבסיס הקטן של הטרפז גם שוות זו לזו (כי הן משלימות ל 180° של זוויות שוות).

שאלה 16

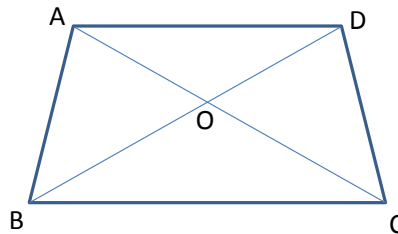
להלן שלושה משפטים, הוכיחו את נכונותם או הפריכו אותם (בעזרת דוגמא נגדית).

- אם מרובע הוא טרפז שווה שוקיים, אז אלכסוניו שווים זה לזה.
- אם במרובע האלכסונים שווים, אז המרובע הוא טרפז שווה שוקיים.
- אם בטרפז האלכסונים שווים זה לזה, אז הטרפז הוא שווה שוקיים.

פתרונות והערות

הסעיפים בשאלה זו מדגימים משפט ושני משפטים הפוכים לו: בראשון נושא המשפט הוא מרובע ובשני נושא המשפט הוא טרפז. כדי לדון על כך עם התלמידים.

א. בטרפז שווה השוקיים הבא



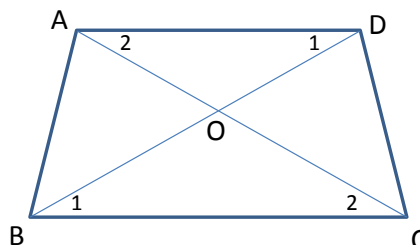
ניתן לראות כי המשולשים ABC ו-BCD חופפים כי $AB=CD$, זוויות הבסיס שוות (כי הטרפז שווה שוקיים), והצלע BC משותפת. לכן $BD=AC$.

ב. הטענה לא נכונה. קיימים מרובעים רבים וביניהם מרובעים בלי זוג צלעות מקבילות בהם האלכסונים שווים.

ג. המשפט הוא נכון ולהלן שתי דרכים להוכחתו.

דרך ראשונה:

אם מתמקדים במשולשים DBC ו-ABC בטרפז הבא:

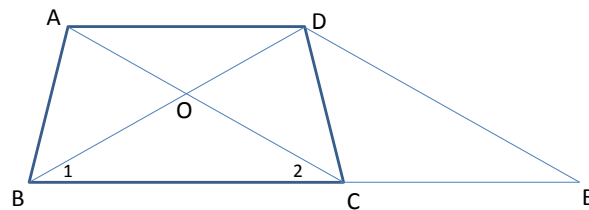


ניתן לראות כי BC היא צלע משותפת וגם $AC=DB$ (נתון). אם נמצא כי הזוויות 1 ו-2 שוות, נראה כי המשולשים חופפים ולכן $AB=CD$.

אם הזווית 1 גדולה מהזווית 2, $OC > OB$ וגם $OA > OD$, לכן $OC + OA > OB + OD$, אך אלה ביטויים לשני האלכסונים שאנו יודעים כי הם שווים. סתירה דומה מתקבלת אם נניח כי הזווית 2 גדולה מזווית 1. לכן, זווית 1 וזווית 2 שוות, ומכאן שהמשולשים חופפים.

דרך שניה:

כמו בדרך הקודמת אנו שואפים להראות כי המשולשים ABC ו- DBC הם חופפים. ידוע כי BC היא צלע משותפת וגם $AC = DB$ (נתון). נראה כי הזוויות 1 ו-2 שוות בדרך אחרת. נבנה קטע DE מקביל ל- AC כך:



ניתן לראות כי $ACDE$ מקבילית, ולכן $DE = BD$. מכאן שהמשולש BDE הוא שווה שוקיים, והזווית 1 שווה לזווית E . אך זווית E שווה לזווית 2, ומכאן שזוויות 1 ו-2 שוות.

שאלה 17

לכל אחד מהמשפטים (הנכונים) נסחו משפט הפוך. אם המשפט ההפוך נכון, הוכיחו, אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

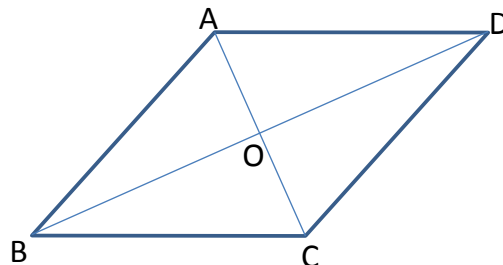
- א. נתון מרובע. אם המרובע הוא מעוין, אז אלכסוניו מאונכים זה לזה.
- ב. נתונה מקבילית. אם המקבילית היא מעוין, אז אלכסוניה מאונכים זה לזה.
- ג. נתון מרובע. אם המרובע הוא מלבן, אז אלכסוניו שווים זה לזה.

פתרונות והערות

כדי לקבל תחושה לגבי נכונות של משפט אם משפט הוא נכון או לא, אפשר לנסות לשרטט את הנתונים (על נייר, בעזרת קווים משורטטים על שקפים או בעזרת תוכנת מחשב). בעקבות ההתנסות תתקבל השערה אותה יש לנסות להוכיח (או להפריך).

א. אם במרובע האלכסונים מאונכים זה לזה, אז המרובע הוא מעוין.
המשפט איננו נכון – קיימים מרובעים שונים שאינם מעוינים בהם האלכסונים מאונכים.

ב. אם במקבילית האלכסונים מאונכים זה לזה, אז המקבילית היא מעוין.
המשפט נכון.
הוכחה:

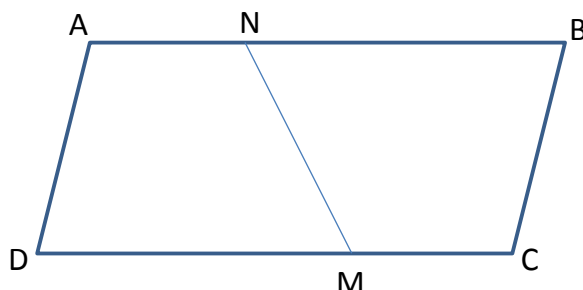


$AO=OC$ (במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה) ו- BO מאונך ל- AC (נתון), לכן המשולש ABC הוא שווה שוקיים (משולש בו התיכון הוא הגובה הוא שווה שוקיים). לכן $BC=AB$. באופן דומה מראים כי $DC=AD$. ידוע כי במקבילית צלעות לא סמוכות שוות, לכן $AB=CD$ ומכאן ש- $AB=BC=CD=AD$, כלומר המקבילית היא מעוין (כל צלעותיה שוות).

ג. אם במרובע האלכסונים שווים זה לזה, המרובע הוא מלבן.
המשפט איננו נכון. ניתן להניח שני עפרונות בעלי אותו אורך כך שישמשו אלכסוני מרובע וליצור מרובע שאיננו מלבן.

שאלה 18

נתונה מקבילית ABCD. אם $MC=AN$, הראו בשתי דרכים שונות כי הקטע MN חוצה את המקבילית לשני חלקים שווי שטח.

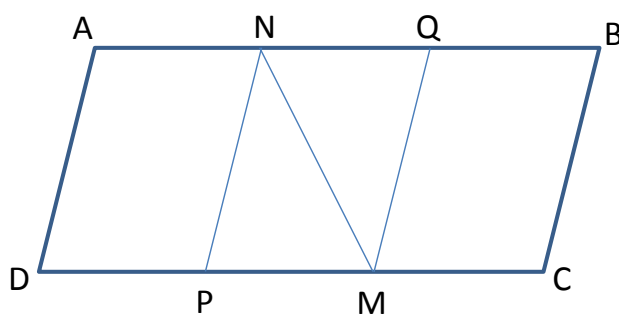


פתרונות והערות

דרך ראשונה: ניתן לחשב את שטחי שני הטרפזים ANMD ו- CMNB בעזרת הנוסחה (ממוצע הבסיסים כפול גובה). הבסיסים הקטנים שווי אורך וגם הבסיסים הגדולים (כל בסיס גדול הוא ה"חיסור" בין הצלע של המקבילית והבסיס הקטן של הטרפזים). הגובה של שני הטרפזים שווה לגובה המקבילית, ולכן שטחי הטרפזים שווים.

דרך שניה: ניתן להראות כי כל הצלעות של טרפז אחד שוות בהתאמה לצלעות של הטרפז השני. כמו כן, ניתן להראות כי כל הזוויות של הטרפז הראשון שוות לזוויות של הטרפז השני בהתאמה. לכן הטרפזים חופפים, ולכן הם בעלי אותו שטח.

דרך שלישית: ניתן להוריד שני קטעים מקבילים ל- AD דרך N ודרך M. על ידי כך נוצרים שתי מקביליות (ADPN ו- QMCB) ושני משולשים (PNM ו- QMN):



ניתן לראות כי המקביליות ADPN ו- QMCB הן שוות שטח (אותו בסיס ואותו גובה) והמשולשים PNM ו- QNM הם שווי שטח (אותו בסיס ואותו גובה). לכן מתקיים כי: $QMCB + QNM = ADPN + PNM$, כלומר שטחי הטרפזים שווים.

שאלה 19

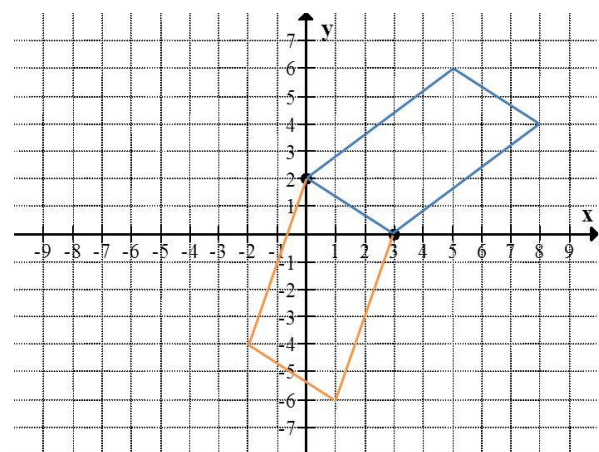
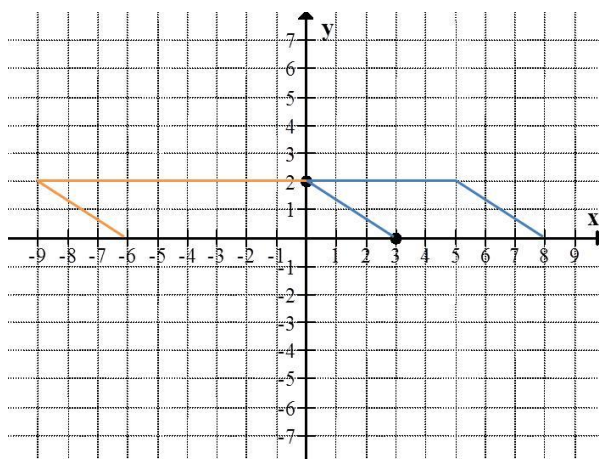
א. $(0,2)$ ו- $(3,0)$ הם שיעורים של שני קדקודים סמוכים של מקבילית. מצאו שיעורים של עוד שתי נקודות שיכולות להיות שני הקדקודים האחרים. כמה מקביליות שונות אפשר למצוא?

ב. מצאו מקבילית אחת מבין אלה שבניתם אשר שטחה 6 יחידות שטח.

הערות ופתרונות

שאלה זו מיועדת ליישם את התכונות של מקביליות על ידי בנייתם במערכת צירים תוך שילוב הידע על גרפים של פונקציות קוויות.

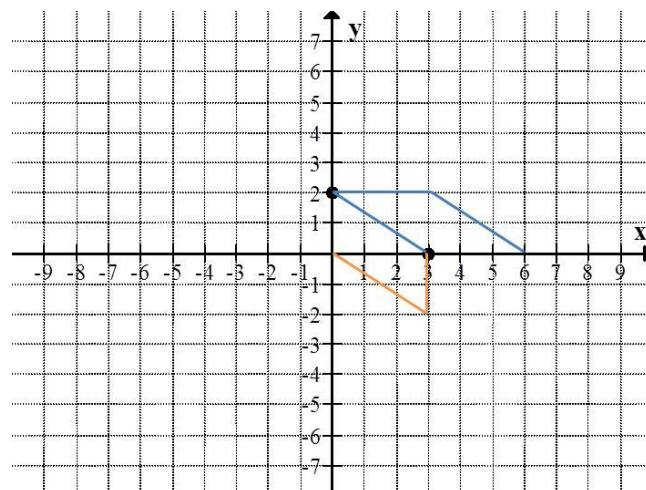
א. להלן אפשרויות שונות ליצירת מקבילית כמבוקש:



רצוי לאסוף תשובות שונות של תלמידים, לבדוק האם אכן הדוגמאות שלהן הן מקביליות ולדון הן על דרך הבנייה (למשל הזזת הקטע המחבר את שתי הנקודות הנתונות במקביל אליו לכל כיוון ולכל מרחק, או לחילופין יצירת קטע בעל אותו אורך ואותו שיפוע באזור

כלשהו של מערכת הצירים ולחבר את הקדקודים). מדרכי הבנייה, התלמידים יחושו כי יש אינסוף תשובות אפשריות.

ב. כל מקבילית שבסיסה 3 וגובה 2 ממלאת את התנאי, והן כל מקבילית אשר בסיסה 2 וגובהה 3. למשל:



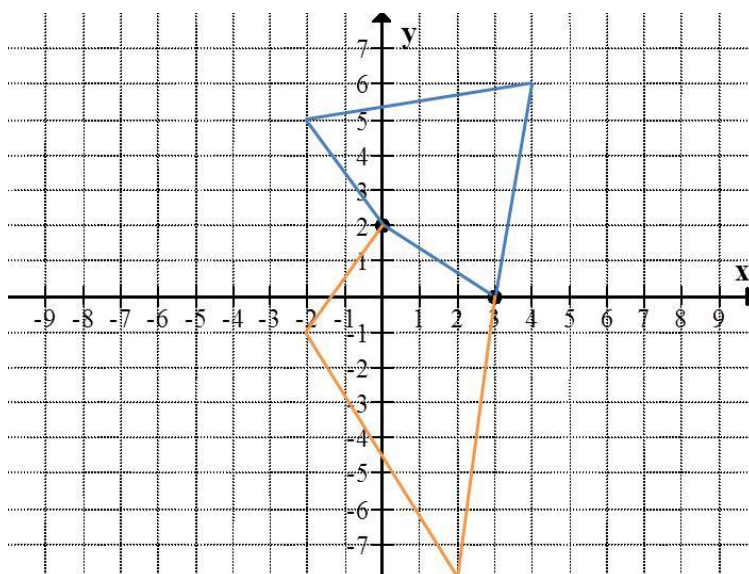
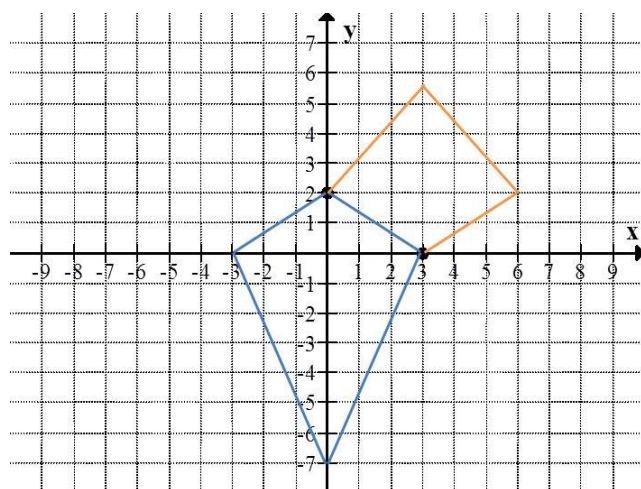
שאלה 20

א. $(0,2)$ ו- $(3,0)$ הם שיעורים של שני קדקודים סמוכים של דלתון. מצאו שיעורים של עוד שתי נקודות שיכולות להיות שני הקדקודים האחרים. כמה דלתונים שונים אפשר למצוא? נמקו.

ב. מצאו דלתון אחד מבין אלה שבניתם אשר שטחו 27 יחידות שטח.

פתרונות והערות

א. להלן אפשרויות שונות ליצירת דלתון כמבוקש:

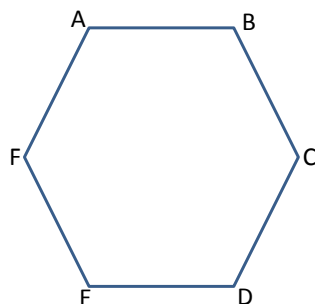


רצוי לדון עם תלמידים על האפשרויות השונות והדרך לבנות אותן. למשל, הקטע הנתון כצלע של הדלתון הוא באורך של יתר של משולש ישר זווית אשר ניצביו הם באורך 2 ו-3 יחידות. ניתן לבנות קטע כאורך כזה בצמוד לאחד מקודקודי הקטע ולהשלים את הבנייה (למשל על ידי סרטוט האלכסון באורך כלשהו).

ב. ניתן לחשב שטח של דלתון על ידי מחצית מכפלת האורך של אלכסוניו. במקרה זה, נחפש דלתון אשר מכפלת אורך אלכסוניו הוא 54, למשל הדלתון שאיור לעיל אשר קדקודיו הם $(0,2)$, $(3,0)$, $(-3,0)$ ו- $(0,-7)$.

שאלה 21

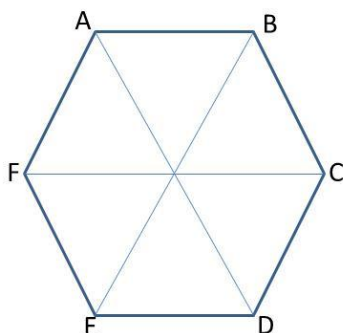
נתון המשושה המשוכלל ABCDEF (כל צלעותיו שוות זו לזו וכל זוויותיו שוות זו לזו).



- א. חשבו את גודל כל זווית במשושה.
- ב. בנו שלשה משולשים כך שקדקודיהם יהיו גם קדקודים של המשושה ואחד מהם יהיה שווה שוקיים, השני ישר זווית והשלישי שונה צלעות. נמקו מדוע לא ניתן לבנות משולש שווה צלעות כזה.
- ג. בנו מלבן כך שכל ארבעת קדקודיו הם גם קדקודים של המשושה. הוכיחו כי אכן בניתם מלבן.
- ד. בנו דלתון כך שכל ארבעת קדקודיו הם גם קדקודים של המשושה. הוכיחו כי אכן בניתם דלתון.

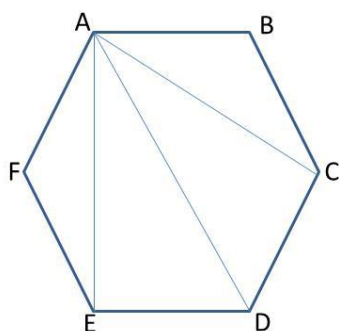
פתרונות והערות

- א. ניתן לחשב את גודל הזוויות של מצולע משוכלל בעזרת סכום הזוויות של משולש. אם נחלק את המשושה לששה משולשים:



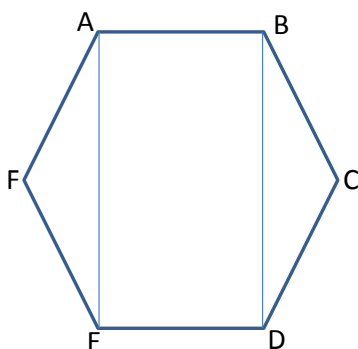
סכום הזוויות הפנימיות של כל משולש הוא 180° . כדי לחשב את סכום הזוויות הפנימיות של המשושה, מכפילים $180^\circ \times 6 = 1080^\circ$ ומורידים מסכום זה את סכום הזוויות סביב נקודת המפגש במרכז המשושה (360°). כלומר, סכום הזוויות הפנימיות של משושה הוא $1080^\circ - 360^\circ = 720^\circ$. כיוון שכל הזוויות שוות, כל זווית במשושה היא $720^\circ \div 6 = 120^\circ$.

ב.



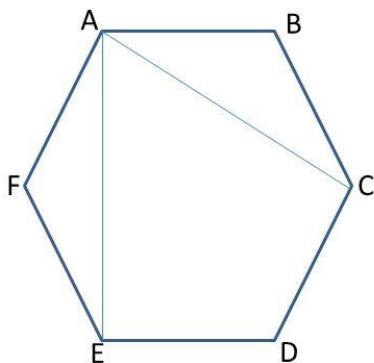
המשולש AFE הוא שווה שוקיים (שתיים מצלעותיו הן שוות כי הן צלעות המשושה המשוכלל). המשולש ADF הוא ישר זווית (ידוע כי AFE שווה שוקיים וזווית ה"ראש" שלו היא 120° , לכן כל זווית בבסיס היא 30° , לכן הזווית E של המשולש AFE היא 90° ($120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$). המשולש ADC הוא שונה צלעות (אחת מצלעותיו הן צלע של המשושה, ושתי האחרות הן אלכסונים באורך שונה של המשושה).

ג.



$ED=AB$ (צלעות של משושה משוכלל), המשולשים AFE ו-BCD חופפים (צ.ז.צ), כל הזוויות של ABDE ישרות (ראו סעיף קודם). לכן ABDE מלבן.

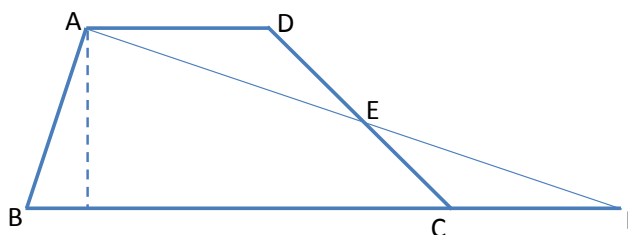
ד.



AEDC הוא דלתון: $DC=ED$ (נתון) ו- $AC=AE$ (צלעות מתאימות של משולשים חופפים AFE ו-ABC).

שאלה 22

בטרפז ABCD הנקודה E היא אמצע השוק DC, h הוא הגובה, $AD=a$ ו- $BC=b$. האריכו את הקטע AE עד לנקודה F (חיתוכו עם המשך הבסיס BC).



א. הוכיחו כי המשולשים ADE ו- FCE חופפים.

ב. הראו כיצד ניתן לחשב את שטח המשולש ABF.

ג. השוו את שטח המשולש ABF עם שטחו של הטרפז ABCD.

פתרונות והערות

א. מתקיים כי: $DE=EC$ (נתון כי E הוא אמצע הקטע DC), הזווית D במשולש ADE שווה לזווית C במשולש ECF (זוויות מתחלפות בין קווים מקבילים וקו חוצה), והזוויות E בשני המשולשים שוות כי הן קודקודיות. לכן לפי ז.צ.ז, המשולשים חופפים.

ב. כיוון שהמשולשים ADE ו- FCE חופפים, $CF=a$. לכן שטח המשולש ABF הוא $\frac{(a+b)h}{2}$.

ג. מהסתכלות על נוסחת שטח המשולש מהסעיף הקודם, רואים כי זאת גם הנוסחה לחישוב שטח הטרפז. ניתן לראות ששטח הטרפז ושטח המשולש זהים אם שמים לב כי שתי הצורות מורכבות מחלק משותף ומאחד משני המשולשים ADE ו- FCE שהם חופפים.

שאלה 23

מצאו את שיעורי הקדקודים של המרובעים הבאים אשר מונחים על מערכת צירים.

א. ריבוע שאלכסוניו הם על צירי המספרים ושטחו 32 יחידות.

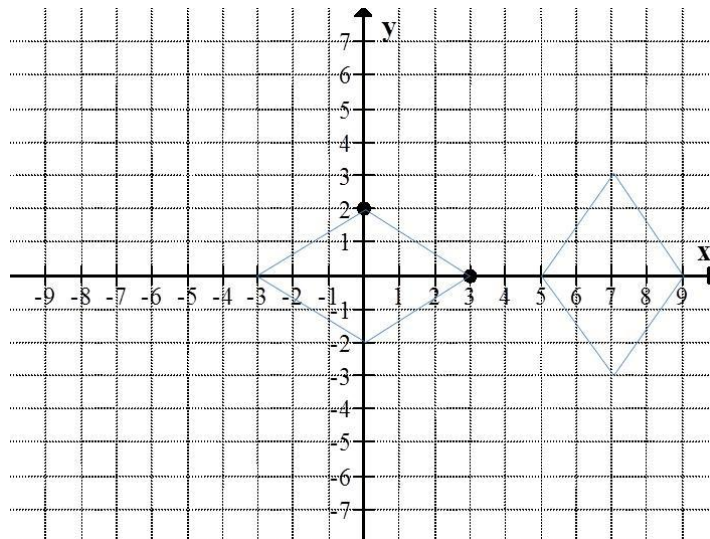
ב. מעוין אשר אלכסון אחד שלו נמצא על ציר ה- x , סכום אורכי אלכסוניו 14 יחידות אורך, ושטחו 12 יחידות שטח.

ג. טרפז אשר אחד מקדקודיו הוא בראשית הצירים, ושטחו 36 יחידות שטח.

תוצאות והערות

א. את שטח הריבוע ניתן לחשב על ידי מחצית מכפלת אורך האלכסונים. לכן יש למצוא ריבוע בו מכפלת אורכי האלכסונים היא 64, וכיוון שהאלכסונים שווים, כל אלכסון יהיה באורך 8 יחידות. כיוון שהאלכסונים נחתכים בראשית הצירים, יש רק ריבוע אחד כזה וקדקודיו הם בנקודות $(0,4)$, $(4,0)$, $(-4,0)$, $(0,-4)$. ניתן לבדוק שאכן שטח של ריבוע כזה הוא 32 על ידי חישוב של אורך צלע כפול אורך צלע. כיוון שכל צלע היא $\sqrt{32}$, השטח הוא אכן 32.

ב. את שטח המעוין ניתן לחשב על ידי מחצית מכפלת אורך האלכסונים. לכן יש למצוא מעוין בו מכפלת אורכי האלכסונים היא 24. יש אינסוף מספרים שמכפלתם היא 24, נבנה, למשל, שני מעוינים בהם האלכסון אחד הוא באורך 4, והאלכסון השני הוא באורך 6 ואחד מהם הוא על ציר ה- x .



ג. שטח טרפז מתקבל ממחצית מכפלת סכום הבסיסים בגובה. יש אינסוף טרפזים ששטחם 36 ואחד מקדקודיו הוא בראשית הצירים, למשל, טרפז שקדקודיו הם בנקודות הבאות: $(0,0)$, $(2,6)$, $(6,6)$, $(8,0)$. בטרפז כזה הגובה הוא 6, אורך הבסיס האחד הוא 4,

$$\text{ואורך הבסיס השני הוא 8, לכן שטחו } = \frac{(8+4) \times 6}{2} = 36$$

שאלה 24

להלן קבוצות של ארבע נקודות המהוות קדקודים של מרובעים. בכל מקרה ניתנים שיעורי הנקודות. קבעו בכל מקרה את סוג המרובע ונמקו.

א. $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(1,-1)$

ב. $(0,0)$, $(1,7)$, $(2,0)$, $(1,-7)$

ג. $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(-1,1)$

ד. $(0,1)$, $(1,0)$, $(4,3)$, $(3,4)$

תשובות והערות

א. ריבוע – כל צלעותיו שוות זו לזו (באורך $\sqrt{2}$), וכל זוויותיו ישרות (הצלעות הסמוכות הן על ישרים ששיפועיהם 1 או -1). יש לשים שבגלל יחסי ההכלה בין המרובעים, תשובות כגון מקבילית (כי צלעות נגדיות הן מקבילות), מלבן (כי כל הזוויות ישרות), מעוין (כי כל הצלעות שוות), דלתון (כי האלכסונים מאונכים ואחד חוצה את השני) הן תשובות חלקיות אך לא שגויות.

ב. מעוין – צלעות נגדיות מקבילות (נמצאות על ישרים בעלי אותו שיפוע) והן באורך שווה ($\sqrt{50}$). יש לשים שבגלל יחסי ההכלה בין המרובעים, תשובות כגון מקבילית או דלתון הן חלקיות אך לא שגויות.

ג. טרפז שווה שוקיים – זוג צלעות נגדיות מקבילות וזוג הצלעות האחר הוא באורך שווה ($\sqrt{2}$).

ד. מלבן – שתי זוגות של צלעות מקבילות בעלות אורך שווה ($\sqrt{2}$ ו- $\sqrt{18}$) וכל הזוויות ישרות. יש לשים שבגלל יחסי ההכלה בין המרובעים, התשובה מקבילית היא חלקית אך אינה שגויה.

שאלה 25

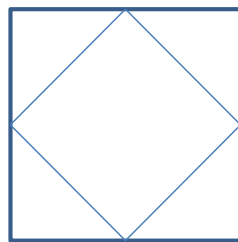
בכל אחד מהמרובעים הבאים חסמו מרובע שקדקודיו הם אמצעי הצלעות של המרובע הנתון. בכל מקרה קבעו את סוג המרובע החסום, וחשבו את שטחו ואת היקפו.

א. ריבוע ששטחו 16 יחידות.

ב. מלבן שאורך צלעותיו 12 ו-3 יחידות.

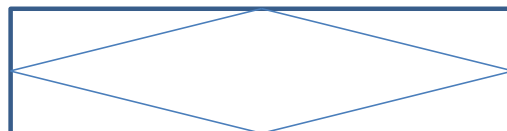
פתרונות והערות

א.



הצורה החסומה היא ריבוע: כל הצלעות שוות (כל אחת היא יתר של ארבעה משולשים ישרי זווית חופפים), וכל הזוויות הן ישרות. שטח הריבוע החסום הוא חצי משטח הריבוע הנתון. ההיקף הוא $8\sqrt{2}$.

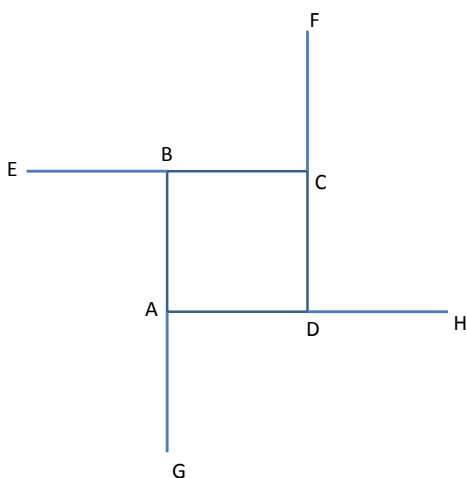
ב.



הצורה החסומה היא מעוין: כל הצלעות שוות (כי כל ארבעת המשולשים בפינות הם חופפים) ושני האלכסונים מאונכים וחוצים זה את זה. גם במקרה זה שטח המעוין החסום הוא חצי של המלבן החסום. ההיקף הוא $4\sqrt{38.25}$.

שאלה 26

נתון ריבוע ABCD. מאריכים את צלעותיו פי שניים כמו בסרטוט:



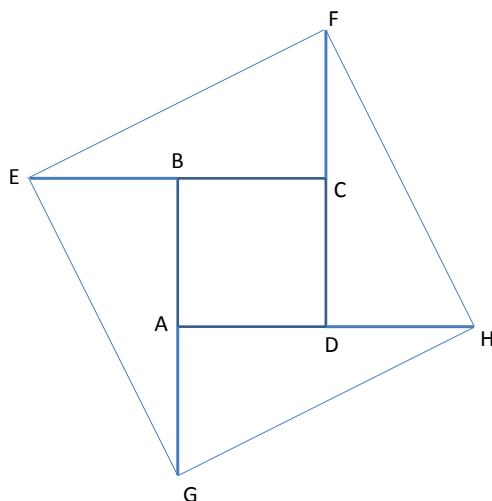
אם מחברים את נקודות EFGH מתקבל מרובע.

א. מאיזה סוג המרובע EFGH? נמקו.

ב. פי כמה גדול השטח של EFGH מהשטח של ABCD?

פתרונות והערות

א. מתקבל ריבוע

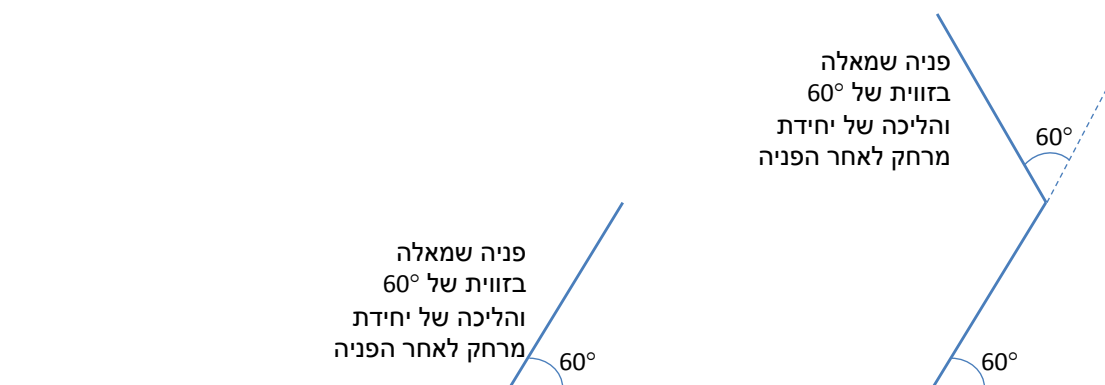


נימוק: הצלעות EF, FH, GH, ו-EG שוות (הן היתר של ארבעה משולשים ישרי זווית חופפים). בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית AGH, EFG, ECF, ו-FDH, הזוויות הצמודות ליתר מסתכמות ל- 90° . לכן ניתן לראות כי ארבע הזוויות של המרובע EFGH הן ישרות.

ב. אם נסן את צלע הריבוע ABCD ב- a , הניצבים של כל אחד מהמשולשים ישרי הזווית הם a ו- $2a$. לכן, שטח כל משולש הוא כמו השטח של הריבוע ABCD. מכאן, ששטח הריבוע EFGH מורכב מחמישה חלקים שווים שטח, כלומר השטח של EFGH הוא פי חמישה מהשטח של ABCD. ניתן לחשב זאת גם אחרת: לפי משפט פיתגורס, היתר של כל משולש ישר זווית הוא $a\sqrt{5}$, ולכן שטחו הוא $5a^2$.

שאלה 27

נשרטט על החול מצולעים משוכללים באופן הבא: מתחילים מנקודה A ו"הולכים" יחידת מרחק אחת (בקו ישר) ומסמנים על החול. פונים שמאלה בזווית מסוימת, שוב הולכים את אותו המרחק ואחר כך שוב פונים שמאלה באותה זווית. ממשיכים עד שהצורה "נסגרת". הדוגמא מראה (משמאל לימין) את השלבים ליצירת משושה:



א. כאשר יוצרים משושה, כמה פניות יש לבצע כדי להימצא במקום ובכיוון ההתחלתיים?

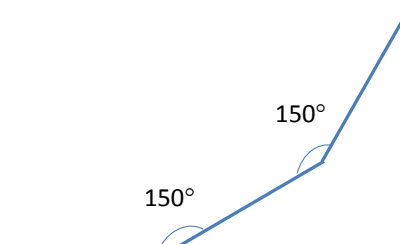
ב. איזו זווית יש לפנות כדי ליצור מחומש משוכלל?

ג. איזו זווית יש לפנות כדי ליצור מתומן משוכלל (מצולע בעל שמונה צלעות)?

ד. איזו זווית יש לפנות כדי ליצור מצולע משוכלל בעל 15 צלעות?

ה. איזו זווית יש לפנות כדי ליצור מצולע משוכלל בעל n צלעות?

ו. איזה מצולע משוכלל ייווצר אם נמשיך את התהליך שבשרטוט:



פתרונות והערות

הקשר השאלה מוביל ליצירת מצולעים בצורה מעשית, ולכן יתכן ותלמידים ינקטו באסטרטגיה של ניסוי וטעיה אשר עשויה להניב מספר תובנות. בשלב מסוים רצוי להוביל את התלמידים לעבודה שיטתית, ולשאול בכל מקרה כיצד ניתן למצוא את הזווית המתאימה בכל מקרה.

א. כדי להימצא במקום ובכיוון ההתחלתיים לאחר יצירת משושה יש לפנות שש פעמים. זאת ניתן לראות מההתנסות עצמה או מהעובדה שההימצאות במקום ובכיוון ההתחלתי מחייב סיבוב של 360° . אם בסך הכול יש לפנות 360° , וכל פנייה היא בת 60° אז יש לבצע ששה סיבובים.

ב. $360^\circ \div 5 = 72^\circ$

ג. $360^\circ \div 8 = 45^\circ$

ד. $360^\circ \div 15 = 24^\circ$

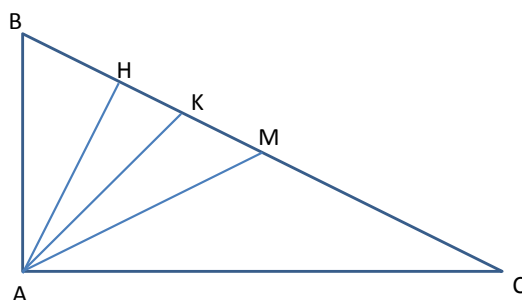
ה. $360^\circ \div n$

ו. במקרה זה, לא ניתנת זווית הפנייה, אלא המשלימה שלה ל- 180° . זווית הפנייה היא 30° ולכן יש לפנות 12 פעמים, כלומר נוצר מצולע בן 12 צלעות. ישנה דרך אחרת לגשת לפתרון והיא בעזרת הנוסחה של סכום הזוויות הפנימיות של מצולע:

$$\frac{180^\circ \times (n-2)}{n} = 150^\circ \text{ , לכן } n=12$$

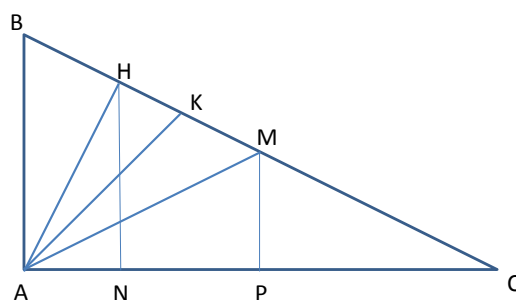
שאלה 28

במשולש ישר הזווית ABC, AH הוא גובה, AK הוא חוצה זווית ו-AM הוא תיכון.



א. הראו כי הזווית MAK ו- KAH שוות.

ב. HN גובה של המשולש AHC. MP גובה של המשולש AMC. הראו כי ABHN ו- NHMP טרפזים.



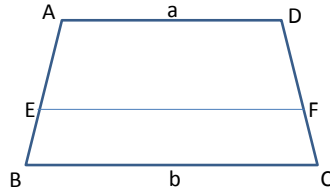
פתרונות והערות

א. כיוון ש-AM תיכון, המשולש AMC הוא שוו שוקיים (מסקנה זו מתבססת על המשפט שאומר כי במשולש ישר זווית התיכון הוא באורך מחצית היתר). לכן זווית MAC שווה לזווית MCA. כיוון ש-KA חוצה זווית, הזווית MAK היא שווה ל- $MAC - 45^\circ$. מכאן שהזווית MAC חייבת להיות קטנה מ- 45° , אם היא שווה לה המשולש ישר זווית הוא שווה שוקיים (ואז כל שלושת הקווים, תיכון, גובה וחוצה זווית, מתלכדים). הזווית ABC היא $90^\circ - BCA$ ומכאן ש- $BCA = BAH$. לכן, $KAH = 90^\circ - 2BCA - MAK$, ומכאן ש- KAH שווה ל- MAK.

ב. HN ו- MP מאונכים ל-AC, לכן הם מקבילים זה לזה, ולכן NHMP טרפז. באופן דומה רואים כי ABHN טרפז.

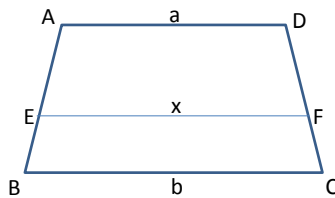
שאלה 29

נתון טרפז שווה שוקיים ABCD, BC הוא באורך a יחידות ו-AD באורך b יחידות. מה אורך הקטע EF המקביל לשני בסיסי הטרפז, כך שהקטע יחלק אותו לשני טרפזים שווים שטח.



פתרונות והערות

גובה הטרפז הנתון הוא h והגבהים של הטרפזים EADF ו-EFBC הם h_1 ו- h_2 בהתאמה.



$$\frac{h_1(a+x)}{2} = \frac{h_2(b+x)}{2} = \frac{1}{2} \frac{h(a+b)}{2}$$

לכן,

$$\frac{h_1}{h} = \frac{(a+b)}{2(a+x)} \quad \frac{h_2}{h} = \frac{(a+b)}{2(b+x)}$$

אך

$$\frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h} = \frac{h_1 + h_2}{h} = 1$$

לכן,

$$\frac{(a+b)}{2(a+x)} + \frac{(a+b)}{2(b+x)} = 1 \Rightarrow \frac{(a+b)(b+x) + (a+b)(a+x)}{2(a+x)(b+x)} = 1 \Rightarrow$$

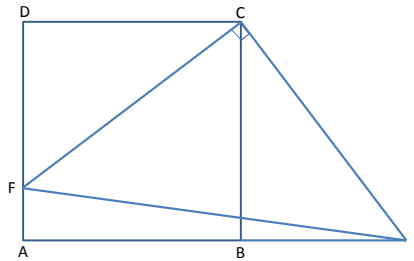
$$\Rightarrow (a+b)^2 + 2x(a+b) = 2(a+x)(b+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 + 2ax + 2bx = 2ab + 2ax + 2bx + 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

שאלה 30

שטח הריבוע ABCD הוא 256 יחידות שטח. הנקודה E המצאת על המשך הצלע AB. שטח המשולש ישר הזווית CEF הוא 200 יחידות שטח.



א. הוכיחו כי $CE=CF$.

ב. חשבו את אורך הקטע BE.

ג. חשבו את שטח הטרפז ADCE.

ד. חשבו את היקף המשולש FCE.

פתרונות והערות

א. תחילה נראה כי המשולשים FDC ו-BCE חופפים. הצלע DC שווה לצלע CB (שתיהן צלעות של הריבוע הנתון), לשני המשולשים זווית ישרה (צמודה לצלע השווה), והזוויות DCF ו-BCE (אף הן צמודות לצלע השווה מצה השני) שוות כי שתיהן משלימות את $\angle FCB = 90^\circ$. לכן, על פי משפט החפיפה ז.צ.ז. המשולשים FDC ו-BCE חופפים. אם המשולשים חופפים, אז הקטעים CE ו-CF שווים באורכם.

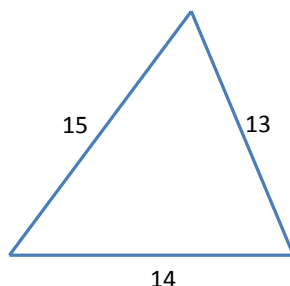
ב. לפי הסעיף הקודם, המשולש FCE הוא לא רק ישר זווית אלא גם שווה שוקיים. לכן ניתן לחשב את שטחו כך: $\frac{1}{2}(CE)^2$. שטח זה הוא 200 יחידות שטח, לכן $(CE)^2 = 400$. לפי משפט פיתגורס, במשולש CBE, מתקבל כי $(CE)^2 = (CB)^2 + (BE)^2$. כלומר, $400 = 256 + (BE)^2$, ומכאן שאורך BE הוא 12 יחידות אורך.

$$\text{ג. } \frac{16+12}{2} \times 16 = 224$$

$$\text{ד. } FE = \sqrt{20^2 + 20^2}, CF = 20, CE = 20$$

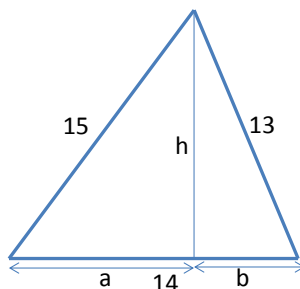
שאלה 31

חשבו את שטח המשולש הבא:



תוצאות והערות

ידים לא למדו כיצד לחשב שטח של משולש כלשהו כאשר נתונים רק אורכי צלעותיו, כמו בשאלה זו. אך יש בידיהם כלים לחשב אותו. אם נחלק את המשולש לשני משולשים ישרי זווית, נוכל בעזרת משפט פיתגורס למצוא את גובה המשולש, למשל כך:



בעזרת משפט פיתגורס, מתקבל כי $13^2 = h^2 + b^2$ וגם $15^2 = h^2 + a^2$. על ידי חיסור המשוואה הראשונה מהשנייה, מתקבל כי $15^2 - 13^2 = a^2 - b^2$, כלומר, $(a - b)(a + b) = 56$. אך ידוע כי $a + b = 14$, לכן $a - b = 4$. משתי המשוואות, ניתן למצוא כי $a = 9$ ו- $b = 5$. בעזרת ערכים אלה ניתן לגלות את הערך של h על ידי יישום משפט פיתגורס על אחד משני המשולשים ישרי הזווית, ולמצוא כי $h = 12$. אם כך שטח המשולש הוא $\frac{14 \times 12}{2} = 84$.

יש לציין כי גם אם מורידים גובה לצלע אחרת תהליך הפתרון היה דומה, אך עם מספרים עשרוניים.

בכיתות מתקדמות ניתן להתבסס על תרגיל זה ולפתח את נוסחת הירון (Heron) לחישוב שטח משולש בהינתן שלושה צלעותיו. נוסחה זו היא $A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, בה A מצוין את השטח, s מצוין את חצי ההיקף, ו- a, b, c הן צלעות המשולש.

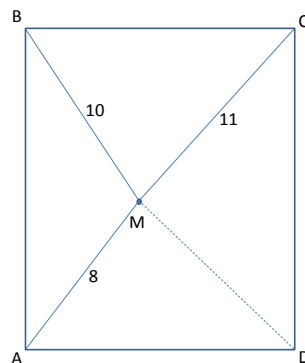
שאלה 32

העכבר מיקי מסתובב חופשי במחסן שצורתו מלבן. בכל אחת מארבע הפינות של המחסן (קדקודים של המלבן) יש לו מקום מסתור.

א. מאיזו נקודה במחסן הוא נמצא במרחק שווה מכל אחד ממקומות המסתור שלו?

ב. היכן במחסן הוא נמצא אם הוא קרוב באותה מידה לשניים ממקומות המסתור?

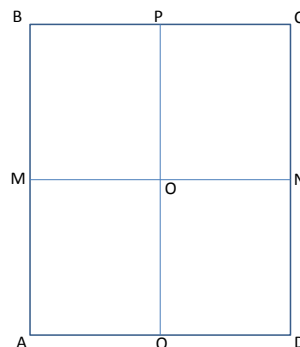
ג. ברגע נתון, מיקי נמצא בנקודה M כמסומן בשרטוט (השרטוט איננו לפי קנה מידה) בו רואים את המרחקים במטרים והוא מחליט לרוץ לנקודת מסתור העדיפה שלו D. כמה רחוק הוא ממנה?



פתרונות והערות

א. כאשר העכבר נמצא בנקודת החיתוך של שני האלכסונים הוא נמצא במרחק שווה מכל אחת מהפינות (אלכסוני המלבן שווים וחוצים זה את זה).

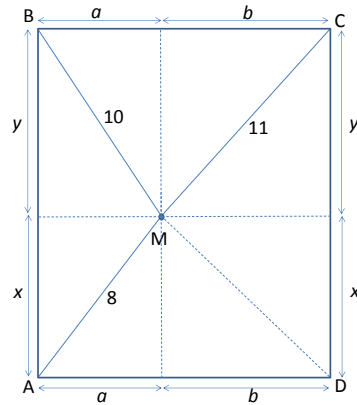
ב. כיוון שלא צוין לאילו שני מקומות מסתור העכבר קרוב באותה מידה, נפריד בין שלוש אפשרויות.



אם מקומות המסתור מיוצגים על ידי שני הקדקודים A ו-B, העכבר נמצא על הקטע MN (M ו-N אמצעי הצלעות AB ו-CD בהתאמה). זאת ניתן לראות כיוון שכל נקודה על הקטע MN יוצרת יחד עם הקדקודים A ו-B משולש שווה שוקיים. ניתן לנסח זאת במושגים של מקום גיאומטרי: האנך האמצעי לקטע הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן לשני קצותיו שווה.

אותו קטע MN מתאים גם לשני המסתורים C ו-D.
 באופן דומה הקטע PQ מתאים לשני המסתורים B ו-C ולשני המסתורים A ו-D.
 אם שני המסתורים מתאימים לקדקודים נגדיים במלבן, העכבר נמצא על האנך האמצעי
 לאחד מאלכסוני המלבן.

ג. כדי למצוא את האורך של הקטע MD, אפשר להיעזר בשרטוט הבא:



$$a^2 + y^2 = 10^2$$

$$b^2 + x^2 = u^2$$

$$a^2 + y^2 + b^2 + x^2 = 10^2 + u^2$$

$$b^2 + y^2 = 11^2 \quad \text{וגם} \quad a^2 + x^2 = 8^2 \quad \text{אבל}$$

לכן, ניתן גם לכתוב כי,

$$a^2 + y^2 + b^2 + x^2 = 11^2 + 8^2$$

ומכאן ש:

$$11^2 + 8^2 = 10^2 + u^2$$

כלומר,

$$u^2 = 11^2 + 8^2 - 10^2 = 85$$

רצוי להסב את תשומת לב התלמידים כי אורך הקטע MD נמצא מבלי שחישבנו את אורך הקטעים a , b , x , y . יתרה מזו – אורכים אלה בכלל לא נקבעים חד-ערכית בבעיה! את זאת אפשר להמחיש בעזרת הבנייה הבאה: נקצה תחילה את AB. הנקודה M נקבעת חד-ערכית (משפט חפיפה צ.צ.צ. במשולש ABM), C נקבעת חד-ערכית (משפט חפיפה "שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים" במשולש BCM). כלומר, יש אינסוף מלבנים אפשריים הנקבעים על ידי בחירה שרירותית של AB (עד גבול עליון של $18=10+8$), אך בכולם לקטע MD יש אותו האורך.

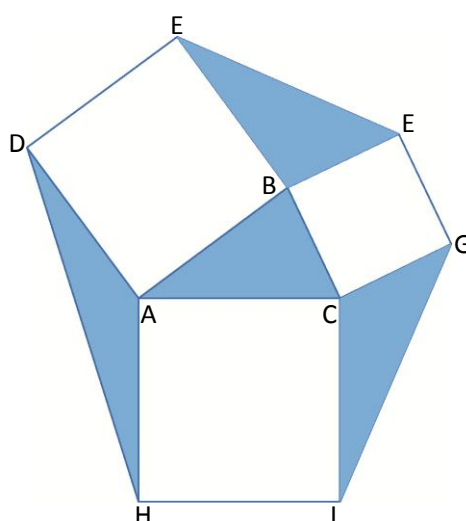
שאלה 33

במשולש כלשהו ABC בונים ריבועים על כל שלוש צלעותיו. שטח כל אחד משלושת המשולשים הנוצרים "בין" הריבועים שווה לשטח של המשולש הנתון. הוכיחו טענה זו.

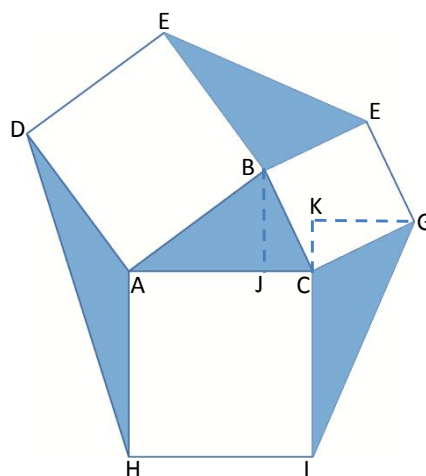
פתרונות והערות

השאלה הזאת מוכרת במקורות מסוימים בספרות כ"משפט קרוס". ניתן לתת את השאלה לתלמידים שעובדים בתוכנות של גיאומטריה דינמית כשאלה פתוחה, למשל "חקרו מה הקשר בין השטח של המשולש הנתון למשולשים שנוצרו", ולאחר שמגיעים להשערה לעבוד על ההוכחה.

המשפט אומר כי המשולשים ADH , ICG , ו- BEF הם שווים בשטחם למשולש הנתון ABC .



בשרטוט הבא רואים כי אפשר לחשב את שטח המשולש ABC על ידי מחצית מכפלת האורך של AC ב- BJ , ואת שטח המשולש CGI על ידי מחצית מכפלת האורך של CI ב- KG (גובה המשולש).



בנוסף $CI=AC$ (צלעות של הריבוע $ACIH$). הזוויות BCJ ו- GCK שוות (כי שתייהן משלימות ל- 90° של הזווית BCK). $BC=CG$ (צלעות של הריבוע $BCGE$). הזוויות JBC ו-

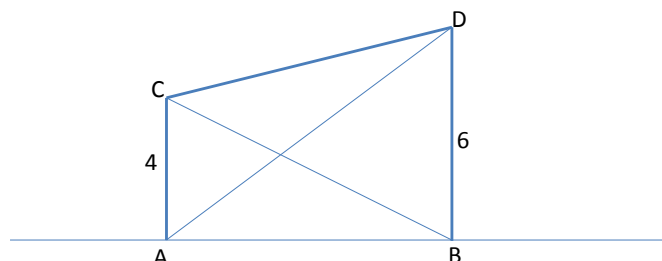
KGC שוות (זווית שלישית במשולשים בהן שתי זוגות הזוויות האחרות שוות בהתאמה).
לכן, המשולשים CBJ ו-KGC חופפים. לכן $BJ=GK$. מכאן שלמשולשים ABC ו-CGI יש
אותו בסיס ואותו גובה, ולכן יש להם אותו שטח. בדרך דומה ניתן להוכיח את שיויון
השטחים עם המשולשים האחרים.

פרטים נוספים על משפט זה ניתן למצוא, למשל, ב-

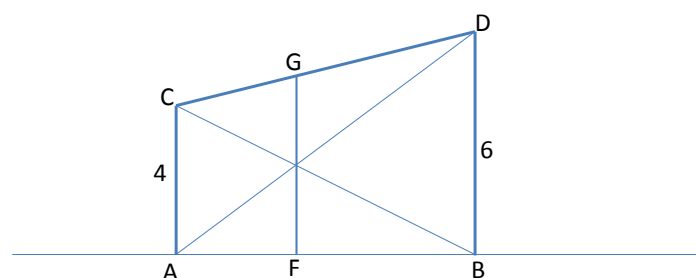
<http://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT190/Non-Member/ATM-MT190-16-16.pdf>

שאלה 34³

באתר בנייה העמידו שני עמודים AC ו-BD בגובה 4 מטרים ו-6 מטרים (בהתאמה), וחיברו את הקצה העליון שלהם (ראה קטע CD בשרטוט). כמו כן חיברו בכבלים קצה עליון של מוט אחד עם הקצה התחתון של המוט השני (קטעים AD ו-CB בשרטוט).



על מנת לחזק את כל המבנה, הוחלט להצמיד מוט תומך דרך נקודת המפגש של הכבלים, באופן הבא (קטע GF):



א. אמדו את גובה המוט התומך GF עבור מרחקים שונים בין המוטות הראשיים (כלומר, עבור אורכים שונים של AB).

ב. חשבו את אורך GF.

ג. הכלילו את התוצאה עבור טרפז כלשהו אשר בסיסיו הם באורכים a ו-b.

פתרונות והערות

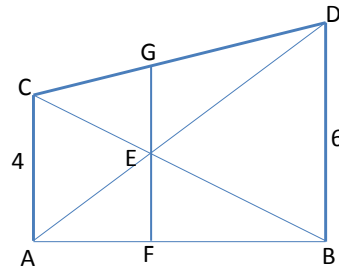
שאלה זו מתייחסת לחישוב האורך של הקטע המקביל לבסיסים בטרפז כלשהו ואשר עובר דרך נקודת המפגש של אלכסוניו. השאלה מאפשרת ליישם ולשלב ידע על דמיון משולשים ו/או על משוואות של קווים ישרים ומזמנת היכרות עם מושג חדש: ממוצע הרמוני בין שני מספרים. השאלה מתאימה לכיתה מקדמת כשאלת סיכום ושילוב נושאים.

א. רצוי שתלמידים ישרטטו דוגמאות שונות על נייר וינסו למדוד, כדי לקבל תחושה לגבי האורך של הקטע. תלמידים רבים ישערו כי האורך הוא 5 (הממוצע). בכיתות בהן יש

³ במבוססת על פעילות 12 מתוך החוברת "על השתנות גיאומטרית וגרפים" מאת א. הרכבי ונ. הדס, הוצאת המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות, 1999, עמ' 64-68.

נגישות לתוכנות בגיאומטריה דינמית רצוי לנסות מצבים בהם המרחק AB משתנה. תלמידים יוכלו להתרשם מניסיונות חוזרים כי האורך של המוט התומך נראה קבוע, כלומר אינו תלוי במרחק שני המוטות הנתונים. על בסיס השערה זו ניתן לגשת לחישוב אורכו אשר תהווה הוכחה כי אכן האורך אינו משתנה.

ב.



בעזרת דמיון משולשים:

נמצא את האורך של GF בעזרת האורכים של שני הקטעים המרכיבים אותו GE ו-EF. המשולשים ABC ו-EFB הם דומים (יש להם זווית אחת משותפת, וזווית שנייה שהיא ישרה). לכן ניתן לרשום את הפרופורציה הבאה:

$$\frac{FE}{4} = \frac{FB}{AB}$$

בעזרת אותם שיקולים ניתן להראות כי המשולשים ABD ו-AEF דומים, ולכן:

$$\frac{FE}{6} = \frac{FA}{AB}$$

אם חבר את שני הביטויים נקבל:

$$\frac{FE}{4} + \frac{FE}{6} = \frac{FB}{AB} + \frac{FA}{AB}$$

אך $FB+FA=AB$ ולכן:

$$\frac{FE}{4} + \frac{FE}{6} = 1$$

ומכאן ש $FE=2.4$

באותה דרך מחשבים שהקטע $EG=2.4$ ולכן אורך הקטע (המוט התומך) הוא 4.8

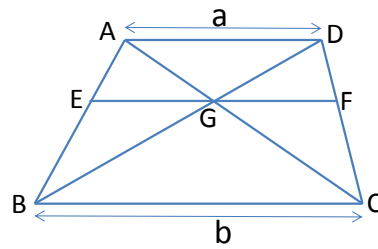
בעזרת משוואות של קווים ישרים:

נמקם מערכת צירים כך שראשיתה, כלומר הנקודה (0,0), תהיה הנקודה A. הקטע AD יהיה על הישר שמשוואתו הוא מהצורה $y = ax$, בה a הוא השיפוע, כלומר $\frac{6}{AB}$. הקטע CB יימצא על ישר שמשוואתו הוא $y = ax + b$, בה השיפוע הוא $\frac{-4}{AB}$, והחיתוך עם ציר ה-y הוא 4. כעת ניתן למצוא את שיעורי הנקודה E שהיא נקודת החיתוך של שני הישרים:

$$y = \frac{6}{AB}x \quad y = \frac{-4}{AB}x + 4$$

פתרון מערכת המשוואות הוא: $x = \frac{4AB}{10}$. גובה FE הוא שיעור ה-y של הנקודה E אותו מחשבים על ידי הצבה של ערך ה-x באחת המשוואות. ומקבלים 2.4

ג.



בעזרת דמיון זוגות המשולשים ABD , EBG ו- ABC , AEG מתקבל כי:

$$\frac{EG}{a} = \frac{EB}{AB}$$

$$\frac{EG}{b} = \frac{EA}{AB}$$

ולכן:

$$\frac{EG}{a} + \frac{EG}{b} = \frac{EB}{AB} + \frac{EA}{AB} = 1$$

כלומר,

$$EG = \frac{ab}{a+b}$$

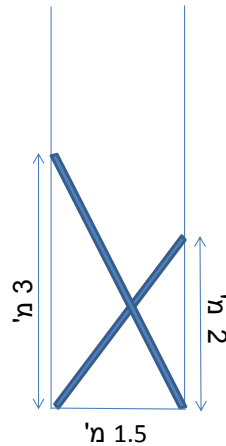
בדרך דומה מתקבל FG , לכן

$$EF = \frac{2ab}{a+b}$$

וזאת ההגדרה של הממוצע ההרמוני בין שני מספרים.

שאלה 35

בסמטה מסוימת ברוחב 1.5 מטרים, מונחים שני סולמות על הקירות, האחד נוגע בקיר בגובה שני מטרים מהקרקע והשני נוגע בקיר שממול בגובה 3 מטרים, באופן הבא:



באיזה גובה מעל פני הקרקע הסולמות נוגעים זה בזה?

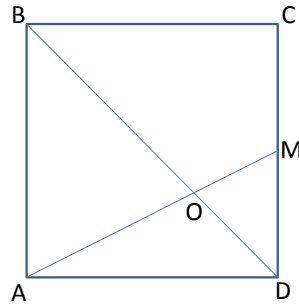
פתרונות והערות

מהסתכלות זהירה במצב הנתון עולה כי שאלה זו היא מאוד דומה לשאלה הקודמת (שאלה 34 לעיל). ולכן, הגובה אינו תלוי ברוחב הסמטה וניתן לחשב בשיטה זהה לזו שבתרגיל הקודם. הגובה הוא 1.2 מטרים. תרגיל זה מיעוד לזיהוי מצבים דומים וליישום שיטת החישוב למצב החדש.

נשים לב עוד כי גובה זה (1.2 מטרים) הוא בדיוק מחצית הממוצע ההרמוני של 2 ו-3 (2.4). מתבקשת השאלה האם הקטע המקביל לבסיסי טרפז והעובר דרך מפגש האלכסונים תמיד נחצה על ידי מפגש האלכסונים לשני קטעים **שווים**? התשובה חיובית, ובכיתות מתאימות אפשר להתייחס לזה. ההוכחה פשוטה, ומתבססת על כך שיחס הפרופורציה בין צלעות מתאימות במשולשים דומים שווה ליחס בין הגבהים.

שאלה 36

בריבוע ABCD, M היא נקודת האמצע של הצלע CD ו- BD אלכסון הריבוע.



נוצרו ארבע צורות: שלושה משולשים (AOB, AOD, MOD) ומרובע אחד (BOMC).

אם שטח הריבוע הוא 1, מה שטחי ארבע הצורות הנ"ל?

פתרונות והערות

המשולשים MOD ו- ABO הם דומים (הזוויות סביב הנקודה O הן קודקודיות, $\angle ABD = \angle MDO = 45^\circ$). כיוון שבסיס המשולש MOD (MD) הוא באורך חצי מבסיס המשולש ABO (AB), היחס בין שטחיהם הוא 1 ל- 4.

נסמן את ערך השטחים של הצורות באופן הבא:

a - השטח של MOD,

b - השטח של AOD,

c - השטח של ABO,

d - השטח של BOMC

נקבע כי שטח הריבוע הוא יחידה, לכן

$$a + b = \frac{1}{4}$$

$$c + b = \frac{1}{2}$$

אבל

$$c = 4a$$

לכן

$$a = \frac{1}{12}$$

מכאן ש,

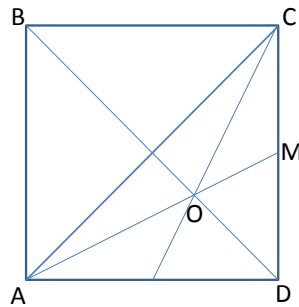
$$b = \frac{1}{6}$$

$$c = \frac{1}{3}$$

$$d = 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12}$$

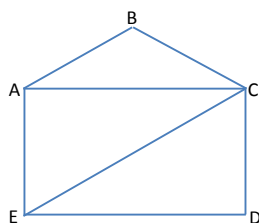
ניתן לפתור בעיה זו בעזרת משוואות של פונקציות קוויות, כך: נמקם מערכת צירים קרטזית כך שראשית הצירים היא הנקודה A. לפיכך, הקטע AM הוא על הישר $y = \frac{1}{2}x$, והקטע BD הוא על הישר $y = -x + 1$. לפי זה שיעורי הנקודה O הם $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. כלומר, בסיס המשולש MOD הוא $\frac{1}{2}$ וגובהו הוא $\frac{1}{3}$ לכן שטחו $\frac{1}{12}$. בדרך דומה ניתן לחשב את שטחם של המשולשים האחרים.

שיעורי הנקודה O מרמזים על מפגש התיכונים של איזשהו משולש, ואכן אם נתבונן במשולש ACD



הנקודה O היא מפגש התיכונים (AM תיכון, ותיכון נוסף מתלכד עם אלכסון הריבוע BD). כידוע, מפגש התיכונים במשולש חותך כל תיכון ביחס של 1:2 (שליש ושני שלישים). מידע זה הוא יכול להיות אף הוא נקודת מוצא לחישוב השטחים.

שאלה 37



ABCE טרפז שווה שוקיים. ACDE מלבן. $AB=10$ ו- $EC=20$.

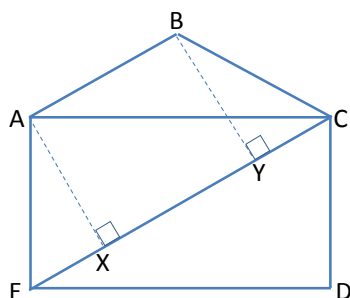
א. חשבו את אורכו של AE.

ב. חשבו את היקף המחומש ABCDE.

ג. חשבו את שטח המחומש ABCDE.

פתרונות והערות

א.



בבניית עזר רואים כי $EX=YC=5$. המשולשים ACE ו- XAE הם דומים (שניהם ישרי זווית ויש להם זווית משותפת). לכן,

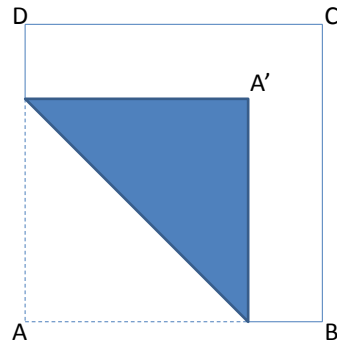
$$\frac{AE}{5} = \frac{20}{AE} \Rightarrow AE = 10$$

ב. ההיקף הוא $AB+BC+CD+DE+AE=40 + 10\sqrt{3}$. הסבר: $AB=10$ (נתון), $BC=10$ (כי הטרפז הוא שווה שוקיים ומצאנו בסעיף הקודם כי $AE=10$), $CD=10$ (צלע של מלבן מקבילה ל- AE), $ED=10\sqrt{3}$ (לפי משפט פיתגורס), $AE=10$ (לפי הסעיף הקודם).

ג. השטח של המחומש הוא סכום השטחים של המלבן ושל המשולש ABC. שטח המלבן הוא $ED \times AE = 100\sqrt{3}$. שטח המשולש הוא בסיס כפול גובה לחלק לשתיים. הבסיס נתון $(10\sqrt{3})$ ואת הגובה יש לחשב בעזרת משפט פיתגורס (ועל סמך העובדה שהמשולש הוא שווה שוקיים). לפי משפט פיתגורס, ריבוע הגובה הוא $25 - (5\sqrt{3})^2 = 10^2$, לכן הגובה הוא 5. לכן שטח המשולש הוא $25\sqrt{3}$. לבסוף, שטח המחומש הוא: $125\sqrt{3}$.

שאלה 38

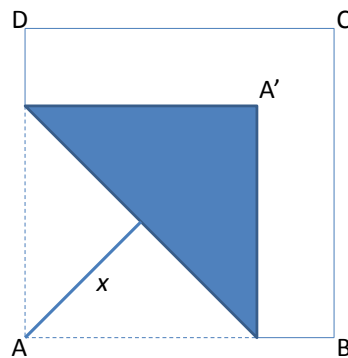
נייר בצורת ריבוע אשר שטחו 9 יחידות שטח הוא לבן מצד אחד וצבעוני בצד השני. קיפלו את הפינה A כך שהיא מונחת על האלכסון AC, כפי שנראה בשרטוט:



ידוע כי השטח הנראה לעין (המחומש המורכב מה-L הלבנה ומהמשולש הצבעוני) הוא חצי לבן וחצי צבעוני. מה המרחק של A מקו הקיפול?

פתרונות והערות

הריבוע המקורי מורכב משלוש צורות: ה-L, המשולש הצבעוני, והמשולש החסר עקב הקיפול. ידוע כי שלוש הצורות הן בעלות אותו שטח, לכן כל אחת היא 3 יחידות שטח. לכן הצלעות השוות של המשולש הצבעוני הן באורך $\sqrt{6}$ ואורך קו הקיפול הוא $\sqrt{12}$. נסמן ב- x את המרחק מ-A לקו הקיפול, כלומר אורך הקטע המאונך המסומן:

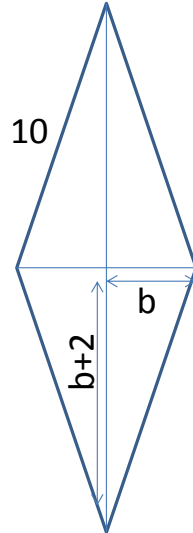


x הוא הגובה של משולש שבסיסו $\sqrt{12}$ ושטחו 3, לכן $x = \sqrt{3}$.

שאלה 39

מצאו את שטחו של מעוין אשר אורך צלעו הוא 10 וההפרש בין אורכי האלכסונים הוא 4.

פתרונות והערות



$$(b + 2)^2 + b^2 = 10^2$$

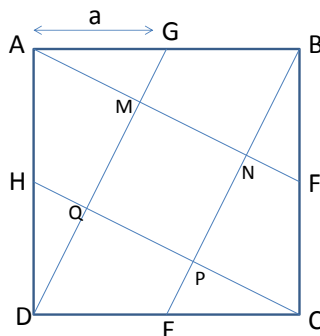
$$2b^2 + 4b - 96 = 0$$

$$b = 6 \quad b = -8$$

לכן האלכסונים הם באורך 12 ו-16.

שאלה 40

ברבוע ABCD הנקודות E, F, G, H הן אמצעי הצלעות.



א. הראו כי MNPQ ריבוע.

ב. סמנו $AG=a$ ובטאו את שטח הריבוע MNPQ באמצעות a .

ג. בטאו את היקף הריבוע באמצעות a .

פתרונות והערות

א. ארבעת המשולשים שנוצרו (AMG, BNF, EPC, HQD) הם חופפים (על פע משפט החפיפה ז.צ.ז). מזה נובע, למשל כי $EP=GM$ ו- $BN=DQ$, ומכיון ש $BE=DG$, אז $NP=MQ$. באופן דומה ניתן להראות כי שער צלעות MNPQ שוות זו לזו. כמו כן, ארבע הזוויות של הצורה המרכזית הן ישרות כי הן נוצרות מקווים מאונכים (דרך אפשרית להראות כי הקווים מאונכים היא לדמיין מערכת צירים עם ראשית הצירים בנקודה D ולבדוק ששיפועיהם הם מנוגדים בכיוון והופכיים בערכם המספרי). כיוון שכל הצלעות שוות וכל הזוויות ישרות MNPQ הוא ריבוע.

ב. המשולשים EBC ו- EPC דומים. לכן: $\frac{BC}{PC} = \frac{BE}{EC}$, כלומר $\frac{2a}{a} = \frac{a\sqrt{5}}{a}$, ולכן $PC = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$, כעת מחשבים EP בעזרת משפט פיתגורס במשולש EPC, ומקבלים $EP = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. כיוון ש- $BC=BN$ ניתן לחשב את צלע הריבוע MNPQ על ידי החיסור $PN=BE-BN-PE$, ומתקבל כי אורך הצלע הוא $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. לכן, שטח הריבוע הוא $\frac{4a^2}{5}$, כלומר חמישית משטח הריבוע המקורי.

ג. כאשר שטח ריבוע הוא פי n משטח ריבוע אחר, היקפו הוא פי $\sqrt{n}$. במקרה שלנו היקף הריבוע ABCD יהיה גדול פי $\sqrt{5}$ מהיקף הריבוע MNPQ. כיוון שהיקף ABCD הוא $8a$, היקף הריבוע MNPQ הוא $\frac{8a}{\sqrt{5}}$.