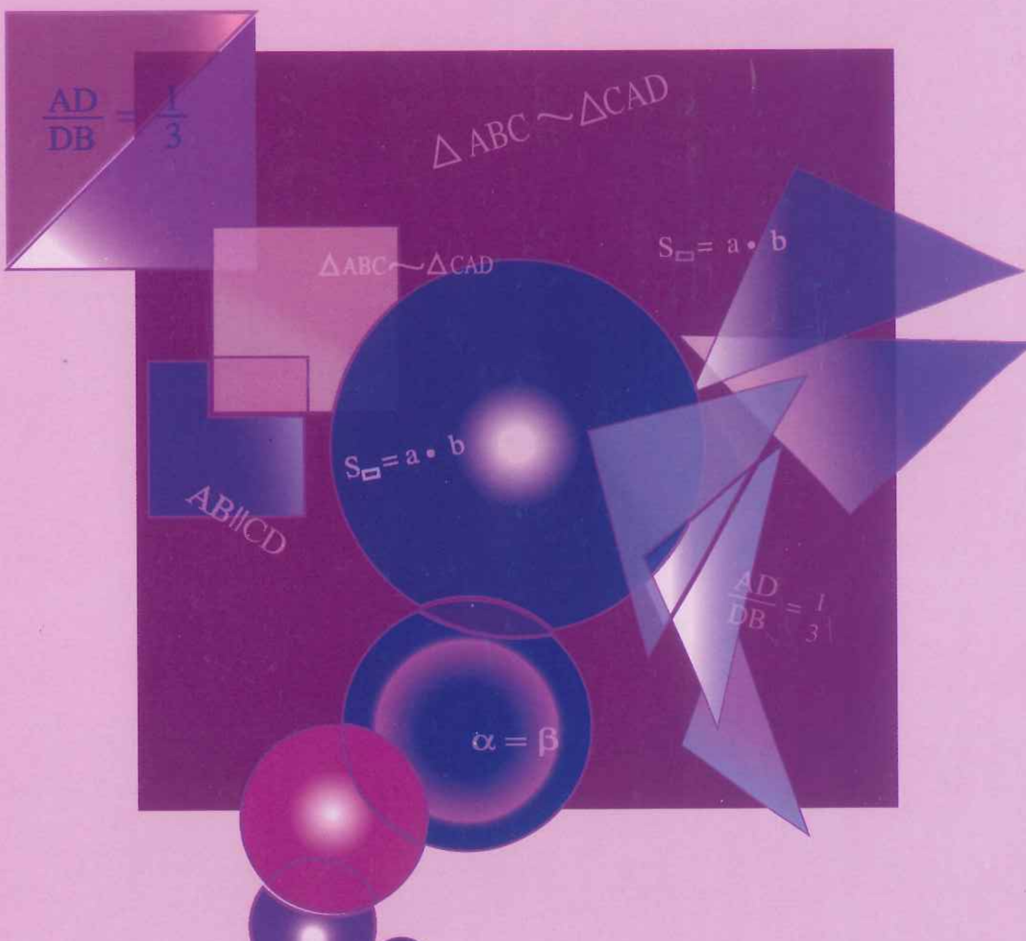
גיאומטריה לחטיבה העליונה

4-5 יחידות

שאלון ה



מטה מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי
על־שם עמוס דה־שליט

משרד החינוך
האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים

המחלקה להוראת המדעים

גיאומטריה לחטיבה העליונה

4-5 יחידות שאלון ה

שרה קירו

נורית הדס

באישור
משרד החינוך התרבות והספורט
אישור מס' ג/4104
אושר בתאריך 7/06/04

מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

יוצא לאור במסגרת
מטה מל"מ — המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט

משרד החינוך, התרבות והספורט, האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים

כתבו:
שרה קירו
נורית הדס

ייעוץ:
צפורה רזניק

הגהה והערות:
רחל בוהדנה

ראש הפרוייקט:
פרופ' אברהם הרכבי

הדפסה:
ציפי עובדיה

עיצוב ועימוד במחשב:
ציפי עובדיה

גרפיקה ועיצוב כריכה
ציפי עובדיה

עזרו:
רותי נודלמן
אבי טל

הפקה:
טליה מלול

הודפס בישראל, תשס"ה, 2005

ספר זה מבוסס על רעיונות מקוריים ויפים מתוך ספר גיאומטריה שנכתב על-ידי עמנואל קרמר ז"ל, חבר יקר בקבוצת המתמטיקה של המחלקה להוראת המדעים במכון וויצמן למדע. עמנואל נפטר בגיל 45 ב-ד' כסלו תשמ"ט, 13 לנובמבר 1988 והוא בשיא תנופת יצירתו.
יהיה הספר נר לזכרו.

לתלמידים ולמורים

ספר זה עוסק בנושאים בגיאומטריה והוא מתאים לתלמידים הלומדים בחטיבה העליונה ברמות ארבע וחמש יחידות.
מאחר ותוכנית הלימודים בחטיבת הביניים כוללת 90-120 שעות לימוד בגיאומטריה, תלמידי 4 ו-5 יחידות בחטיבה העליונה ודאי למדו מושגים יסודיים ואת המשפטים הקשורים במשולשים ובמרובעים. ספר זה משלב חזרה על הנושאים שנלמדו, ולימוד שיטתי של הפרקים מעגל ודמיון.

הספר מכיל ארבעה פרקים:

פרק א: מרובעים ומקומות גיאומריים - חזרה, מדגיש בעיקר את הנושאים: מרובעים, מקומות גיאומטריים ומשפט חפיפה רביעי.

פרק ב: שטחים, משפט תלס ודמיון.

פרק ג: המעגל.

פרק ד: הכול יחד – מכיל משפטים ותרגילים בנושא דמיון במעגל, וכן שאלות מכל נושאי הגיאומטריה לתרגול וחזרה.

בכל פרק מספר סעיפים. בכל סעיף מובאים תחילה מושגים ומשפטים, הנלמדים בשילוב עם פיתרון תרגילים ומאפשרים לתלמידים להיות שותפים לבניית הנושא. חלק זה מיועד להיעשות ברובו תוך כדי דיון בכיתה. בסוף כל סעיף מופיע אוסף תרגילים שנועד לביסוס החומר ומתאים ברובו לעבודה עצמית בכיתה או כשיעורי בית. לעיתים מופיעים תרגילים כסיכום של מספר סעיפים, לתרגול נוסף בהתאם לצורך. אפשר גם לבחור מפרק ד שאלות סיכום מתאימות לנושא הנלמד.

הספר ***גיאומטריה לחטיבה העליונה*** מביא כל נושא באופן, שאתם התלמידים, יכולים לקחת חלק ולהיות שותפים בהתפתחות של כל נושא. תוך לימוד הגיאומטריה תלמדו מבנה דדוקטיבי מהו, ותכירו את תהליכי ההוכחה וההפרכה, ככלים לקביעת נכונות או אי-נכונות של טענות במתמטיקה.

הספר משלב פעילויות מחשב שהן כלי לחקירה, לבדיקת נכונות של טענות וליצירת תחושת דינאמיות וכלליות. פעילויות כאלה תומכות בתהליכים של השערה והסקת מסקנות. הפעילויות נכתבו עם הוראות מתאימות לשתי לומדות: "הנדסה בתנועה" ו"המשער הגיאומטרי".

הוראות מפורטות לביצוע הפעילויות תמצאו בסוף הספר:

נספח I: "הנדסה בתנועה"

נספח II: "המשער הגיאומטרי".

על מנת לבצע פעילויות חקר נוספות, או פעילויות מקבילות לפעילויות המחשב, תמצאו בספר תרגילים המציעים שימוש בשרטוטים שניתן להעתיקם על דף שקוף ולהיעזר בהם לחקירה.

הערות:

1. בתרגילים בהם יש צורך לשרטט על גבי שרטוט קיים, יש תחילה להעתיק את השרטוט למחברת.
2. בשאלות בהן לא מופיעות יחידות, יש להתייחס לכל המספרים המבטאים גדלים של קטעים, באותה יחידה.
3. הספר משלב קטעי קריאה המשמשים כהעשרה לחומר הנלמד.
4. השרטוטים אינם תמיד על פי הנתונים הרשומים.
5. פרקים ב ו-ג ניתן ללמוד אותם בזה אחר זה ואפשר להקדים את פרק ג ל-ב, כיוון שפרקים אלה אינם תלויים זה בזה.

באור סמלים:


תרגיל אתגר


מורה מסביר

תוכן עניינים

פרק א: מרובעים ומקומות גיאומטריים - חזרה

בפרק זה נחזור ונדגיש חלק מהנושאים שנלמדו בחטיבת הביניים. נתרכז בשני נושאים: מרובעים ומקומות גיאומטריים. בסעיף "המרובעים" נעסוק גם במשפט חפיפה רביעי, בו נשתמש בפתרון חלק מהתרגילים.

המרובעים

תכונות המרובעים

1. קפלו דף נייר.

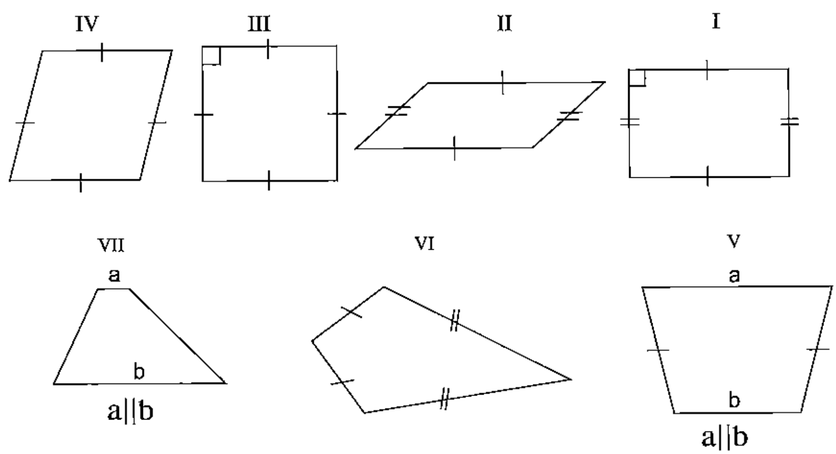
א) גזרו, אם אפשר, בדף המקופל חלונות, כך שיתקבלו המרובעים הבאים:
ריבוע, מלבן שאינו ריבוע, מעוין שאינו ריבוע, דלתון שאינו מעוין, מקבילית שאינה מלבן, טרפז (איזה טרפז קיבלתם?).

ב) מה משותף לכל המרובעים שהצלחתם ליצור?

ג) הסבירו מדוע אי-אפשר לקבל מרובעים אותם לא הצלחתם ליצור.

ד) גזרו חלון כך שיתקבל ריבוע בדרך אחרת. התוכלו לקבל מרובעים אחרים על-ידי גזירה שונה מזו שגזרתם קודם? אם כן, אילו? הסבירו.

2. משורטטים מרובעים.



א) רשמו בתוך כל צורה את **כל השמות** המאפיינים אותה. למשל: בשרטוט IV יש לרשום: "מקבילית, מעוין, דלתון".

ב) בחרו שני מרובעים ורשמו את כל התכונות המאפיינות אותם.

3. א) סמנו + בכל משבצת המתאימה לתכונה המתקיימת במרובע. בנוסף רשמו אם התכונה מתקיימת בזוג אחד (של צלעות נגדיות או זוויות נגדיות) או יותר.

אם יש באפשרותכם להשתמש בתוכנה של גיאומטריה דינמית ("הנדסה בתנועה", "המשער הגיאומטרי"), בחרו מרובע מתאים, שרטטו את אלכסוניו ומדדו את אורכי הצלעות, האלכסונים ואת גודלי הזוויות, והשלימו את הטבלה.

להכרת התוכנה "הנדסה בתנועה" אפשר לבצע פעילות מבוא בעמודים 177-180.

להכרת התוכנה "המשער הגיאומטרי" קראו הערות בעמוד 199.

במידה ואין בידיכם את אחת מהלומדות, כדאי להיעזר בשרטוטים ידניים.

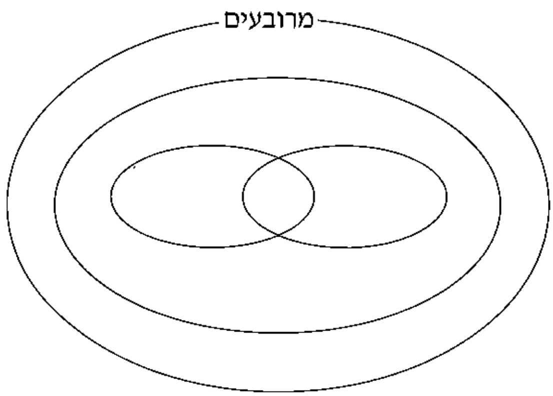
שם המרובע / התכונה	במקבילית	במלבן	במעוין	בריבוע	בדלתון	בטרפז
צלעות נגדיות שוות						
זוויות נגדיות שוות						
האלכסונים חוצים זה את זה						
האלכסונים שווים זה לזה						
האלכסונים מאונכים זה לזה						
האלכסונים חוצים את הזוויות						

ב) בחרו אחת התכונות והוכיחו אותה.

ג) מה סכום הזוויות בכל מרובע שבטבלה? הוכיחו.

4. לפניכם דיאגרמה של קבוצות המרובעים: מקביליות, מלבנים, מעוינים וריבועים.

א) רשמו בדיאגרמה, במקומות המתאימים, את שמות המרובעים.



ב) הוסיפו בדיאגרמה את קבוצת הטרפזים.

5. א) תכונה מסוימת מתקיימת במקבילית.

(i) האם אפשר להסיק שתכונה זו מתקיימת במעוין?
איך זה מתבטא בדיאגרמה שבתרגיל 4?

(ii) האם אפשר להסיק שתכונה זו מתקיימת במלבן?
איך זה מתבטא בדיאגרמה שבתרגיל 4?

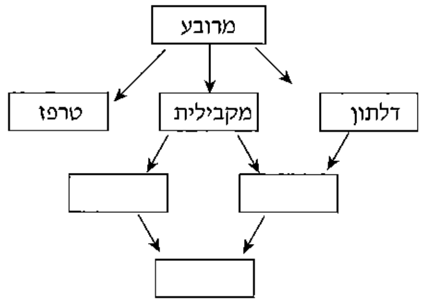
ב) תכונה מסוימת מתקיימת במלבן.

(i) האם אפשר להסיק שתכונה זו מתקיימת במעוין?
איך זה מתבטא בדיאגרמה שבתרגיל 4?

(ii) האם אפשר להסיק שתכונה זו מתקיימת במקבילית?
איך זה מתבטא בדיאגרמה שבתרגיל 4?

6. שרטטו דיאגרמה המתארת את קבוצות המרובעים הבאות: מקביליות, דלתונים, מעוינים.

7. א) השלימו את הדיאגרמה המתארת יחסים הדדיים של קבוצות מרובעים.

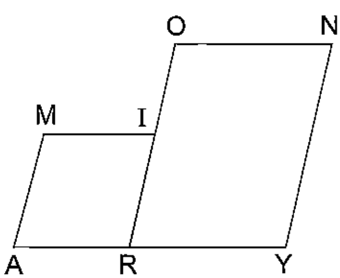


מצולע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות, נקרא מצולע משוכלל.

ב) איזה מהמרובעים הוא מרובע משוכלל?
איזה מהמשולשים הוא משולש משוכלל?

תרגילים

8. נתון מעוין AMIR ומקבילית RONY. ידוע כי אורך הצלע NY של המקבילית הוא פי שניים מאורך צלע המעוין.

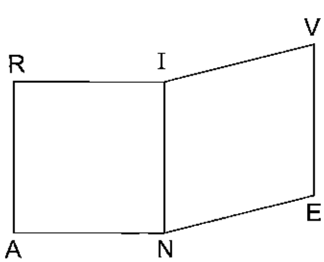


א) רשמו כמה שיותר קטעים שווים. נמקו. התייחסו גם לקטעים שאינם משורטטים, למשל OM.

ב) רשמו כמה שיותר זוויות שוות. נמקו.

ג) חברו את הקודקודים של המרובעים, ורשמו כמה שיותר משולשים שווי שוקיים. נמקו.

9. משורטטים ריבוע RINA ומעוין NEVI.



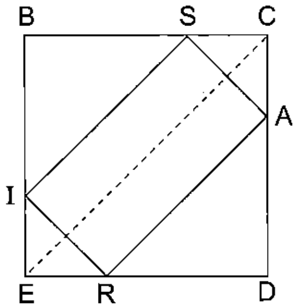
א) רשמו כמה שיותר קטעים שווים. התייחסו גם לקטעים שאינם משורטטים.

ב) רשמו כמה שיותר זוגות של קטעים מאונכים זה לזה.

10. בריבוע BCDE חסום מלבן SIRA, כך שאחת מצלעות המלבן מקבילה לאלכסון הריבוע.

כמה משולשים נוצרו בשרטוט?

מאיזה סוג המשולשים? נמקו.



11. YAEL הוא מעוין בתוך משולש ABC.

CYEL הוא דלתון בתוך המשולש ABC כך

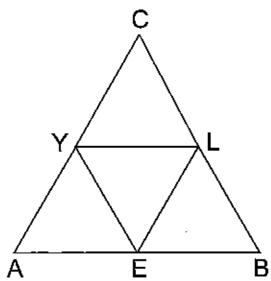
ש-CE אלכסון ראשי.

א) מצאו קטעים שווים והסבירו מדוע הם שווים.

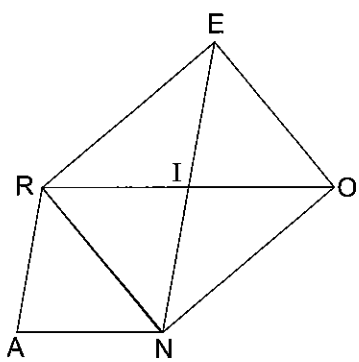
ב) מה ניתן לומר על המשולשים שנוצרו? הסבירו.

ג) חשבו את כל הזוויות בשרטוט.

האם מצאתם את כל הקטעים השווים? אם לא, השלימו.



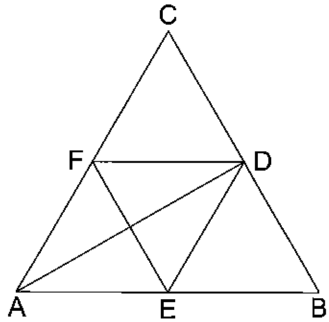
12. RINA מעוין, REON מלבן ונתון $\sphericalangle A = \alpha$.



א) בטאו את שאר הזוויות שבשרטוט בעזרת α, ונמקו.

ב) בנוסף נתון: RI = RN. חשבו את הזווית הקהה בין אלכסוני המלבן.

13. במשולש ABC חסומים מעוין AFDE ומקבילית FDBE, ונתון: $\sphericalangle FAD = \alpha$.

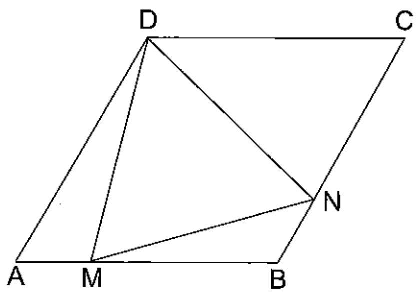


א) בטאו את כל הזוויות בעזרת α.

ב) רשמו את כל הקטעים השווים.

ג) רשמו את כל המשפטים בהם השתמשתם בתשובותיכם לסעיפים א' ו-ב'.

14. הזווית החדה במעוין ABCD שווה ל- $60°$, וכן $AM = BN$.



א) הוכיחו כי הזווית MDN שווה ל- $60°$.

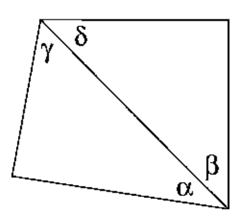
רמז: שרטטו אלכסון BD.

ב) הוכיחו כי משולש MDN שווה צלעות.

תנאים מספיקים לקבלת מרובעים

בסעיף הקודם עסקנו בתכונות המרובעים. בסעיף זה נבדוק את התנאים המספיקים לקבלת איזשהו מרובע.

1. קבעו, לפי הנתונים בכל מקרה, מיהו או מיהם המרובעים המתאימים, ומחקו את המרובעים שאינם מתאימים. הסבירו את קביעתכם.



א) $\alpha = 45°$, $\beta = 55°$, $\gamma = 55°$, $\delta = 45°$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ב) $\alpha = 40°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 50°$, $\delta = 50°$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ג) $\alpha = 50°, \beta = 30°, \gamma = 50°, \delta = 30°$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ד) $\alpha = 40°, \beta = 50°, \gamma = 50°, \delta = 40°$

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

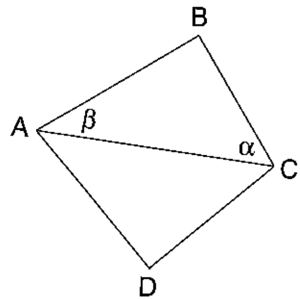
ה) $\alpha = 40°, \beta = 50°, \gamma = 40°, \delta = 50°$

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ו) $\alpha = 40°, \beta = 55°, \gamma = 55°, \delta = 45°$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

2. קבעו, לפי הנתונים בכל מקרה, מיהו או מיהם המרובעים שיכולים להתאים ומחקו את המרובעים שאינם מתאימים. הסבירו את קביעתכם.



א) $DC = BC, AD = AB$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ב) $AB \| DC, AD = BC$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ג) $AB = BC = CD$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ד) $\alpha = \beta, \measuredangle BCD = \measuredangle BAD$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ה) $\alpha = \beta, AB = DC, AB \| DC$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

ו) $AB \perp BC, BC = AD, AB = DC$.

דלתון, מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע, טרפז, מרובע אחר.

3. השלימו בכל משפט את שם המרובע המתאים.

א) אם במקבילית זוג צלעות סמוכות שוות, אז המקבילית חייבת להיות ____.

ב) אם במקבילית זווית אחת ישרה, אז המקבילית חייבת להיות _____.

ג) אם במרובע יש זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות, אז המרובע חייב להיות _____.

ד) אם במלבן יש זוג צלעות סמוכות שוות, אז המלבן חייב להיות _____.

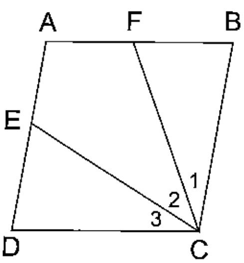
ה) אם במרובע כל זוג זוויות נגדיות שוות, אז המרובע חייב להיות _____.

4. בחרו שניים מבין המשפטים שבשאלה 3 והוכיחו אותם.

תרגילים

5. RAMI מלבן. RO חוצה $\measuredangle ARM$ (O על AM). ME חוצה $\measuredangle RMI$ (E על RI).
קבעו את סוג מרובע OMER, והוכיחו (כדאי לשרטט).

6. ABCD מעוין, $\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2 = \measuredangle C_3 = \alpha$.



א) הוכיחו כי מרובע AECF דלתון.

ב) בדקו, מה קורה אם מוסיפים את הנתון $CF = AB$.

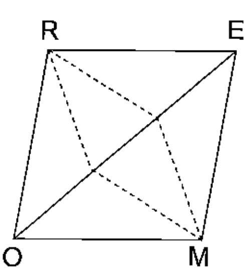
(i) איזה סוג הוא המשולש FCB?

(ii) בטאו את כל הזוויות בעזרת α;
חשבו את α במקרה זה.

ג) בדקו, מה קורה אם מוסיפים, במקום הנתון של סעיף ב', את הנתון $AB \perp CF$.

שרטטו ובטאו את כל הזוויות בעזרת α. חשבו את α במקרה זה.

7. OMER מעוין.



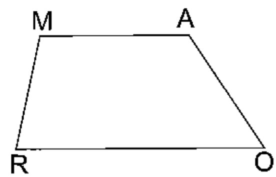
א) חילקו את הזוויות M ו-R לשלוש זוויות שוות.
רשמו את הנתון בכתיב מתמטי.
הוכיחו שקווי החלוקה נפגשים על האלכסון.

ב) קווי החלוקה יוצרים מרובע. מאיזה סוג הוא? הוכיחו.

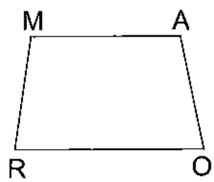
8. בכל סעיף משורטט טרפז MAOR ‏(MA||RO). בחלק מהסעיפים רשומים נתונים נוספים.

העבירו דרך A מקביל לשוק MR ורשמו איזה משולש ואיזה מרובע יתקבלו, נמקו.

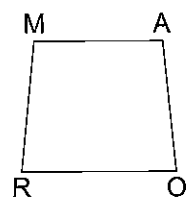
א)



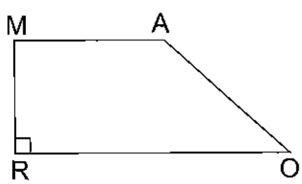
ב) MAOR טרפז שווה שוקיים.



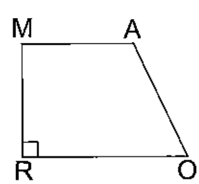
ג) MA = MR = AO



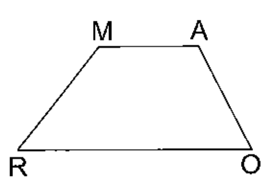
ד) MAOR טרפז ישר זווית.



ה) MAOR טרפז ישר זווית,
שבו MA = RM.



ו) נתון: RO = MR + MA.



משפט חפיפה רביעי

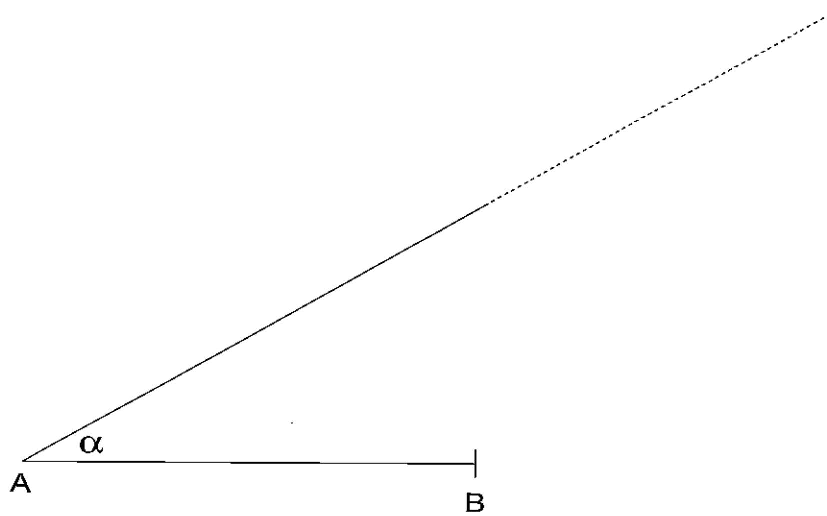
בכל התרגילים עד כאן ניתן היה להיעזר בשלושה משפטי חפיפה:

- צ.ז.צ.: שני משולשים השווים בשתי צלעות והזווית ביניהם, חופפים.
- צ.ז.ז. (או ז.צ.ז.): שני משולשים השווים בצלע ושתי זוויות בהתאמה, חופפים.
- צ.צ.צ.: שני משולשים השווים בשלוש צלעות, חופפים.

נבדוק כעת האם ניתן להסיק חפיפה כאשר נתון ששני משולשים שווים בשתי צלעות וזווית שאינה בין שתי הצלעות.

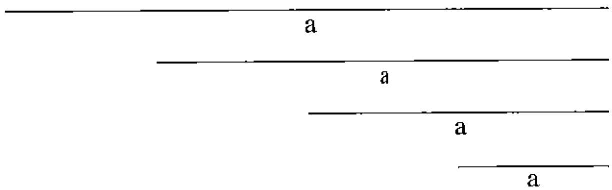
1. אם באפשרותכם להשתמש בתוכנה של גיאומטריה דינמית ("הנדסה בתנועה", "המשער הגיאומטרי") תוכלו להחליף את הפעילות הבאה בפעילות שהוראותיה כתובות בנספח I, פעילות 1, "הנדסה בתנועה" עמודים 181-183, או בנספח II, פעילות 1, "המשער הגיאומטרי", עמודים 200-201.

   בשרטוט נתונה צלע AB וזווית α. את הקרן מ-A ניתן להאריך כרצוננו.



נבנה משולשים בעזרת קטע נתון נוסף a שיהווה את הצלע מול הזווית α.

לפניכם ארבעה קטעים שונים שישמשו **כצלע** a:



$AB < a$

$AB = a$

$AB > a$

$AB > a$

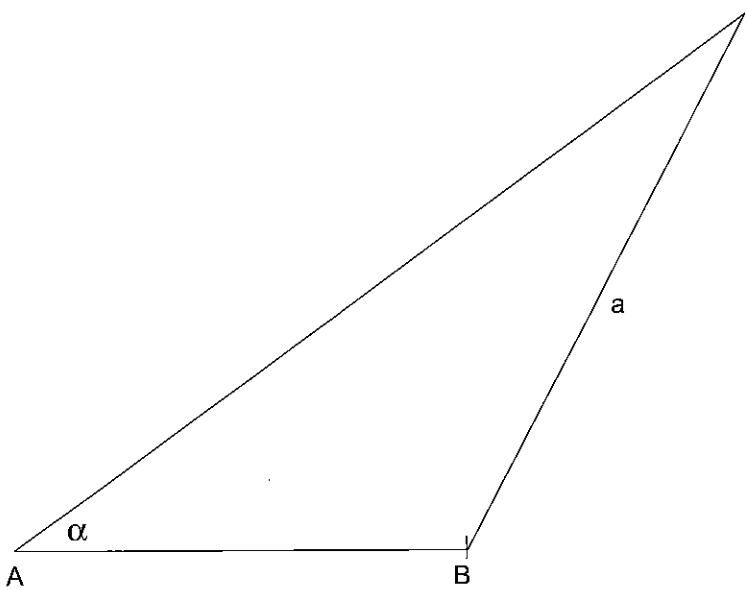
בכל סעיף, העתיקו על דף שקוף את קטע a, ונסו להשלים את השרטוט למשולש כל פעם בעזרת קטע אחר a כך שיימצא מול α. יש להזיז את הקטע השקוף, **בלי לשנות את גודלו**, עד שיחתוך את הקרן מ-A.

א) כמה משולשים ניתן ליצור בעזרת α , AB ו-a כאשר $AB < a$?

ב) כמה משולשים ניתן ליצור בעזרת α , AB ו-a כאשר $AB = a$?

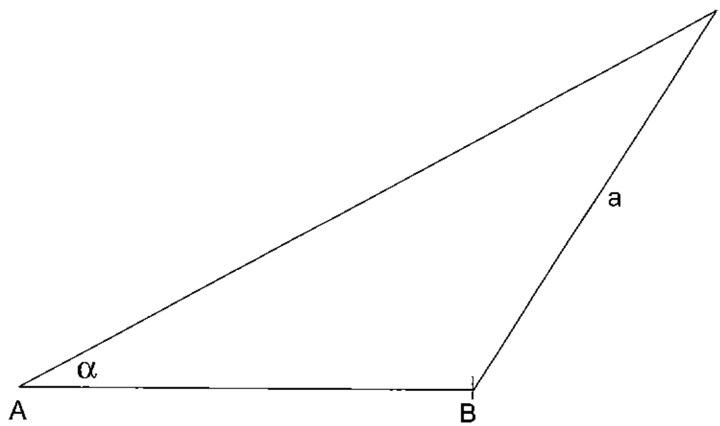
ג) כמה משולשים ניתן ליצור בעזרת α , AB ו-a כאשר $AB > a$?

2. א) לפניכם משולש אחד שבנינו בעזרת הקטע a כאשר $AB < a$.



האם כל המשולשים שנבנה בעזרת נתונים אלה יהיו חופפים למשולש זה?
אם לא, שרטטו משולש שאינו חופף עם אותם נתונים.

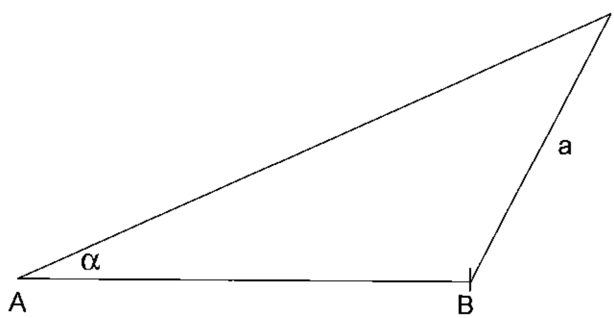
ב) לפניכם משולש אחד שבנינו בעזרת הקטע a כאשר $AB = a$.



האם כל המשולשים שנבנה בעזרת הנתונים האלה יהיו חופפים למשולש זה?

אם לא, שרטטו משולש שאינו חופף עם אותם נתונים.

ג) לפניכם משולש אחד שבנינו בעזרת הקטע a כאשר $AB > a$.



האם כל המשולשים שנבנה בעזרת הנתונים האלה יהיו חופפים למשולש זה?

אם לא, שרטטו משולש שאינו חופף עם אותם נתונים.

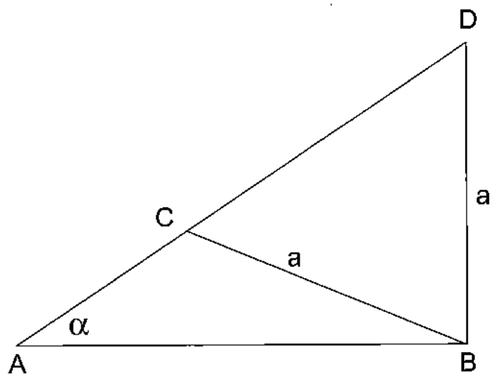
ד) השלימו את המשפט בעזרת מה שקיבלתם בסעיף א':

אם שני משולשים שווים בצלע וזווית לידה ובצלע נוספת ______________
______________ אז המשולשים ______________________________

ניתן לנסח אחרת את המשפט האחרון.

משפט: אם שני משולשים שווים בשתי צלעות ובזווית מול הגדולה שביניהן, אז המשולשים חופפים. משפט זה נקרא **משפט חפיפה רביעי**.

3. נחקור את הקשר בין שני המשולשים שאינם חופפים המתקבלים כאשר $a < AB$.



א) רשמו את שמותיהם של שני המשולשים ואת השוויונים המבטאים את החלקים השווים בשני המשולשים.

Δ________, Δ________

________ = ________

________ = ________

________ = ________

האם המשולשים חופפים? נמקו.

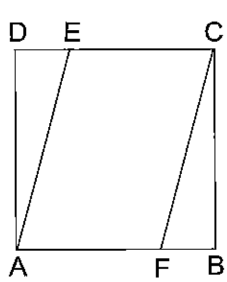
ב) הוכיחו שהזוויות מול AB בשני המשולשים משלימות ל-180^0.

4. מצאו מקרה בו הקטע מול α קטן מ-AB ובכל זאת מתקבל משולש יחיד.

תרגילים

5. הסבירו מדוע שני משולשים ישרי זווית השווים ביתר וניצב אחד, חופפים.

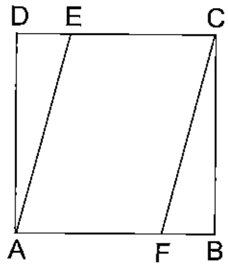
6. ABCD הוא ריבוע, AE = FC.



א) הוכיחו כי המרובע AECF הוא מקבילית.

ב) האם התכונה תישמר אם נתון כי ABCD מקבילית?

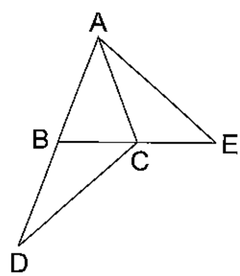
7. ‏ABCD הוא ריבוע, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BCF$.



א) הוכיחו כי המרובע AECF הוא מקבילית.

ב) האם התכונה תישמר אם נתון כי ABCD מקבילית?

8. ‏ABCD הוא משולש שווה שוקיים (AC = AB).



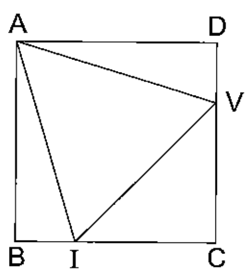
AB=DB ‏, D על המשך AB.

CD=AE ‏, E על המשך BC.

א) הוכיחו כי AC תיכון במשולש BAE.

ב) M על המשך CB, כך ש-AM=AE. שרטטו.
איזה מרובע AMDC? הוכיחו.

9. ‏ABCD הוא ריבוע ו-AVI הוא משולש שווה שוקיים (AV = AI).



א) הוכיחו כי VIC משולש שווה שוקיים.

ב) סמנו את זווית VAD ב-α ובטאו את יתר הזוויות בשרטוט בעזרת α.

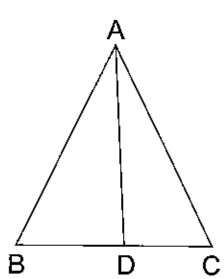
ג) חשבו את α במקרה ש-AVI משולש שווה צלעות.

10. בריבוע ABCD מקצים על האלכסון AC קטע AE השווה לצלע הריבוע. מנקודה E מעלים אנך ל-AC החותך את הצלע BC בנקודה F.

א) הוכיחו כי EC = EF = BF.

ב) חשבו את $\sphericalangle BFA$.

11. ‏ABC משולש שווה שוקיים.



האם המשולשים ABD , ADC חופפים?

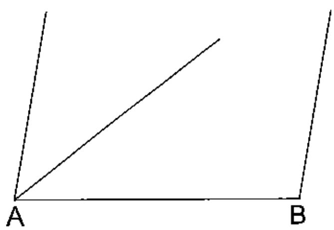
הוכיחו.

חוצי זוויות ואלכסונים במרובעים

הערה תרגילים 1, 2, 3, 4 הן למעשה פעילויות העוסקות באחת התכונות בהרחבה. לא ניתן לבצע אותן בשיעור אחד. מומלץ לשלב את הפעילויות בתרגילים שרשומים אחרי ארבעת הפעילויות.

1. **חוצי זוויות במקבילית.**

אם יש באפשרותכם להשתמש בתוכנה של גיאומטריה דינמית ("הנדסה בתנועה", "המשער הגיאומטרי"), תוכלו להחליף תרגיל זה בפעילות שהוראותיה כתובות בנספח I, פעילות 2, "הנדסה בתנועה" עמודים 184-185, או בנספח II, פעילות 2, "המשער הגיאומטרי" עמודים 202-203 .



א) משורטט חלק ממקבילית (צלע AB והקרניים עליהן מונחות שתי צלעות נוספות), וחוצה זווית A.

העתיקו על דף שקוף קטע השווה ל-AB. קטע זה יסמן את הצלע הרביעית במקבילית. הזיזו את הקטע השקוף במקביל לקטע AB.

(i) מה תוכלו לומר על המשולש שנוצר?

(ii) כמה משולשים מסוג זה נוצרו?

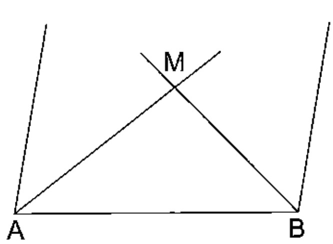
בדקו אפשרויות שונות והוכיחו.

ב) העתיקו על דף שקוף את השרטוט מסעיף א'.

הניחו את הדף השקוף על השרטוט שבסעיף א', כך שתקבלו מקבילית עם חוצי זוויות נגדיות.

מה תוכלו לומר על החוצים של שתי זוויות נגדיות במקבילית? הוכיחו.

ג) מה תוכלו לומר על החוצים של שתי זוויות סמוכות במקבילית? הוכיחו.



ד) מה תוכלו לומר על אורכי צלעות סמוכות במקבילית, אם הצלע הנגדית ל-AB עוברת:

(i) דרך M?

(ii) בתוך המשולש AMB?

(iii) מחוץ למשולש AMB?

תוכלו להיעזר בקטע השקוף מסעיף א', להזיזו ולבדוק כל אחד מהמקרים הנ"ל.

ה) העתיקו על דף שקוף את השרטוט מסעיף ג'. הניחו את הדף השקוף על השרטוט בסעיף ג', כך שתקבלו מקבילית עם ארבעת חוצי הזוויות. הזיזו במקביל ל-AB ובדקו אפשרויות שונות.

(i) בין ארבעת החוצים מתקבל מרובע. מאיזה סוג הוא? הוכיחו.

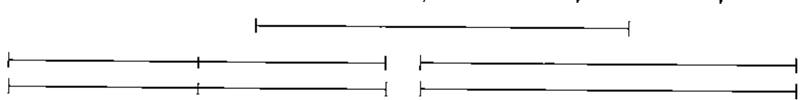
(ii) האם תמיד מתקבל מרובע?

ו) האם המרובע הפנימי יכול להיות מעוין? אם כן, איזה תנאי צריך להתקיים?

ז) האם המרובע הפנימי יכול להיות ריבוע? אם כן, איזה תנאי צריך להתקיים?

2. **אלכסונים במרובע.**

משורטטים ארבעה קטעים שווים ואחד שונה. בשניים מהקטעים השווים מסומנת נקודה שהיא נקודת אמצע הקטע.



העתיקו על דף שקוף את חמשת הקטעים. הקטעים מסמנים אלכסונים במרובע.

קבעו איזה מרובע מתקבל על סמך הנתונים והוכיחו. (ריבוע, מלבן, מעוין, מקבילית, טרפז, דלתון, אחר).

א) מרובע שאלכסוניו מאונכים, שווים וחוצים זה את זה.

ב) מרובע שאלכסוניו מאונכים, שווים ואחד מהם חוצה את השני.

ג) מרובע שאלכסוניו מאונכים, ואחד מהם חוצה את השני.

ד) מרובע שאלכסוניו מאונכים ושווים זה לזה.

ה) מרובע שאלכסוניו שווים זה לזה.

ו) מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה.

3. תרגיל זה עוסק במרובעים המתקבלים מהעברת מקבילים לאלכסונים של מרובע דרך קודקודיו. את התרגיל ניתן לפתור באמצעות תוכנה של גיאומטריה דינמית ("הנדסה בתנועה", "המשער הגיאומטרי".) ההוראות כתובות בנספח I, פעילות 3, "הנדסה בתנועה" עמודים 186-187, או בנספח II , פעילות 3, "המשער הגיאומטרי" עמודים 204-205.

א) דרך הקודקודים של מרובע העבירו מקבילים לאלכסונים.

מאיזה סוג המרובע שנוצר? הוכיחו.

ב) במרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה, העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים. איזה סוג מרובע התקבל? הוכיחו.

ג) במרובע שאלכסוניו שווים זה לזה, העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים. איזה סוג מרובע התקבל? הוכיחו.

ד) במרובע שאלכסוניו מאונכים ושווים זה לזה, העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים. איזה סוג מרובע התקבל? הוכיחו.

4. בתרגיל זה נבדוק:

(i) האם תמיד מרובע שבו אלכסון מחלק אותו לשני משולשים חופפים הוא מקבילית? אם לא, אז איזה סוג הוא?

(ii) האם תמיד מרובע שבו אלכסון מחלק אותו לשני משולשים חופפים וישרי זווית, הוא מלבן? אם לא, אז מאיזה סוג הוא?

כדי לענות על שאלות אלה ודומות להן, גזרו בכל סעיף משולשים חופפים והצמידו אותם בצלע השווה של שני המשולשים.

א) גזרו שני משולשים חופפים שוני צלעות חדי זווית או קהי זווית.

כמה מרובעים שונים ניתן ליצור על-ידי הצמדה של אחת הצלעות השוות? מאיזה סוג המרובע שנוצר? הסבירו.

ב) כמה ואיזה סוגי מרובעים שונים יתקבלו אם המשולשים החופפים יהיו שווי שוקיים? גזרו, בדקו והסבירו.

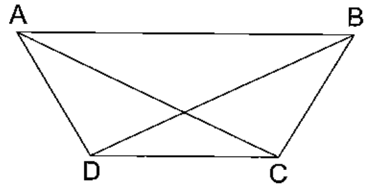
ג) כמה ואיזה סוגי מרובעים שונים יתקבלו אם המשולשים שווי צלעות? גזרו, בדקו והסבירו.

ד) גזרו שני משולשים חופפים ישרי זווית.

כמה ואיזה סוגי מרובעים שונים ניתן ליצור? הסבירו.

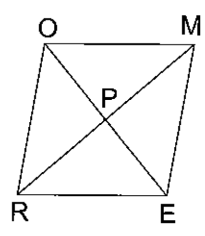
תרגילים

5. בטרפז שווה שוקיים האלכסון חוצה את הזווית הקהה. שרטטו.
בסיסו הקטן של הטרפז שווה ל-3 ס"מ והיקפו ל-42 ס"מ.
חשבו את אורך הבסיס הגדול.

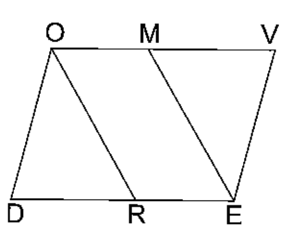


6. בטרפז שווה שוקיים האלכסון חוצה את הזווית החדה, $\sphericalangle BDC = \alpha$.
א) הביעו בעזרת α את כל הזוויות בשרטוט.
ב) חשבו את α אם ידוע שהזווית הקהה בין האלכסונים היא פי 2 מהזווית החדה שבין האלכסונים.
ג) בנוסף נתון כי 10 ס"מ = AD.
חשבו את היקף הטרפז.

7. קבעו, בכל סעיף, אם המרובע OMER הוא מקבילית. אם כן הוכיחו, אם לא שנו את השרטוט כך שתתקבל דוגמה נגדית.

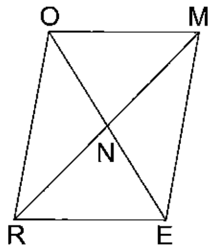


א) RM ,OE אלכסונים.
PM תיכון לצלע OE במשולש OME.
OP תיכון לצלע RM במשולש ROM.



ב) OVED מקבילית. EM ו-OR חוצי זוויות E ו-O בהתאמה.

ג) MN גובה ותיכון לצלע OE במשולש OME.

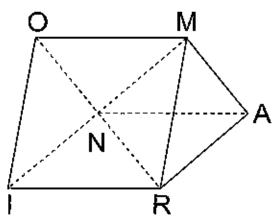


8. נתון OMAN ,RINA מקביליות.

א) הוכיחו כי RAMN מקבילית.

ב) הוכיחו כי OMRI מקבילית.

ג) אם בנוסף נתון $\sphericalangle MAR = 90°$, איזה סוג הוא המרובע OMRI?



9. נתון ELAD מלבן, LINA ריבוע.

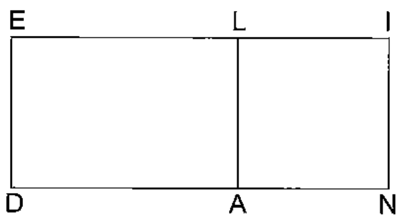
שרטטו את אלכסוני המלבן ואת אלכסוני הריבוע.

סמנו את נקודת מפגש אלכסוני המלבן ב-K.

סמנו את נקודת מפגש אלכסוני הריבוע ב-P.

א) מאיזה סוג המרובע LKAP? הוכיחו.

ב) מאיזה סוג המרובע DKPN? הוכיחו.



10. משורטט מרובע ABCD, $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle M_1$.

בדקו, בכל סעיף, האם BMCD מקבילית.

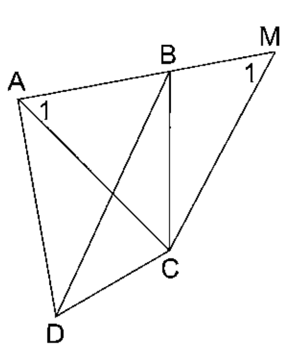
שרטטו לכל סעיף שרטוט מתאים.

א) נתון ABCD מלבן.

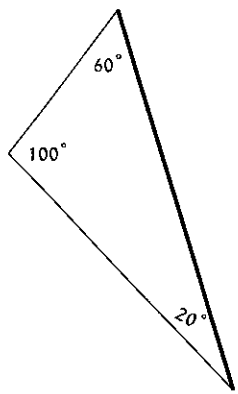
ב) נתון ABCD מקבילית.

ג) נתון ABCD טרפז.

ד) נתון ABCD טרפז שווה שוקיים.



11. א) שרטטו משולש שאחת מצלעותיו שווה לצלע המודגשת וזוויותיו שוות לזוויות המשולש המשורטט (לאו דווקא בסדר זה).
שרטטו את כל האפשרויות (יש שלוש).



ב) לגבי כל אפשרות קבעו והסבירו:
האם המשולשים חופפים?
איזה סוג מרובע התקבל?

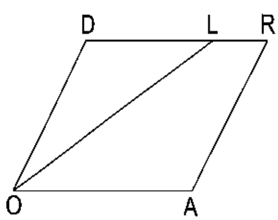
ג) הסבירו כיצד ייתכן שקיימים משולשים השווים בשלוש זוויות וצלע ואינם חופפים.

12. א) צרו מרובעים משני משולשים ישרי זווית שלהם צלע משותפת וצלע נוספת שווה.

ב) לגבי כל אפשרות קבעו והסבירו:
האם המשולשים חופפים?
איזה סוג מרובע התקבל?

ג) הסבירו כיצד ייתכן שקיימים משולשים השווים בשתי צלעות וזווית ואינם חופפים.

13. OL חוצה את $\measuredangle O$ במקבילית DOAR.

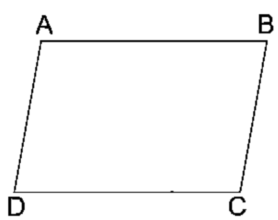


$DE \perp OA$ (E על OA), שרטטו.

DE חותך את OL בנקודה K.

הוכיחו כי המשולשים KDL ו- KEO **לא יכולים** להיות חופפים.

14. ABCD היא מקבילית שזווית החדה שלה בת 50^0. על כל אחת משתי צלעות סמוכות של המקבילית בנו משולש ישר זווית (משולש ABK ומשולש BCM) באופן הבא: $\measuredangle AKB = 90°$ ו-K בהמשך DA, $\measuredangle BMC = 90°$ ו-M בהמשך DC.



א) שרטטו את שני המשולשים.

ב) האם משולש KMB משולש שווה שוקיים?
אם כן, הוכיחו וחשבו את זוויותיו. אם לא, ציינו מה צריך להתקיים על מנת שמשולש KMB יהיה שווה שוקיים? חשבו את זוויותיו.

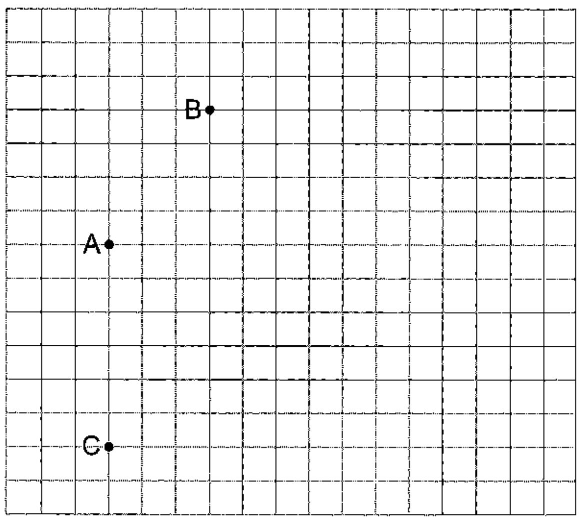
מקומות גיאומטריים

1. א) סמנו במחברתכם נקודה A.

שרטטו את אוסף **כל הנקודות** הנמצאות במרחק 4 ס"מ מהנקודה A.

מה קיבלתם?

ב) נניח שמודדים מרחקים רק על גבי קווי הרשת של משבצות. נגדיר אורך צלע של משבצת כיחידה אחת. למשל המרחק בין A ל-B הוא 7 יחידות והמרחק בין A ל-C הוא 6 יחידות.

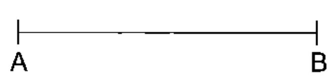


קיים תחום שלם בגיאומטריה המבוסס על הגדרה זו של מרחק הנקרא "גיאומטריה של מוניות".

ג) שרטטו בדף משובץ את אוסף כל הנקודות הנמצאות במרחק של 6 יחידות ב"גיאומטריה של מוניות", מנקודה נתונה. מה קיבלתם?

בתרגילים הבאים חוזרים למרחק אווירי.

2. משורטט קטע AB.



א) סמנו נקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A ו-B.

ב) שרטטו ותארו את כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A ו-B.

שימו לב! הישר ששרטטתם נקרא **אנך אמצעי**.

ג) האם מצאתם את **כל הנקודות** הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A ו-B?
אם כן, הוכיחו.

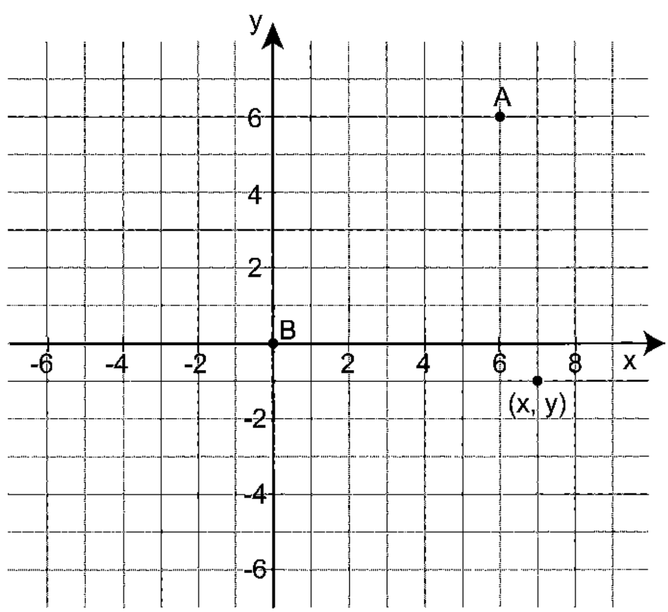
ד) האם יש נקודות על האנך האמצעי שאינן נמצאות במרחק שווה מהנקודות A ו-B?
אם כן הדגימו, אחרת הוכיחו.

בשני הסעיפים ג' ו-ד' הוכחתם שני המשפטים שמראים כי האנך האמצעי הוא אוסף כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה משתי נקודות נתונות.

אוסף כל הנקודות המקיימות תכונה נתונה נקרא מקום גיאומטרי.

3. נתונות שתי נקודות $A(6,6)$; $B(0,0)$.

א) סמנו 8 נקודות הנמצאות במרחק שווה מ-A ומ-B, ושרטטו את אוסף הנקודות המקיימות את התכונה.



ב) נייצג על-ידי (x, y) שיעורים של נקודה הנמצאת במרחק שווה מ-A ומ-B.
בטאו את המרחקים מ-A ומ-B ורשמו משוואה.
בדקו אם המשוואה מתאימה לאוסף הנקודות ששרטטתם.

4. נתונות שתי נקודות (-5, 1) ; (3, -3).

נייצג על-ידי (x , y) שיעורים של נקודה הנמצאת במרחק שווה משתי הנקודות הנתונות.

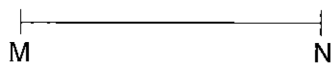
א) רשמו משוואה מתאימה.

ב) מהו שיפוע הישר המתקבל?

ג) מהו שיפוע הקטע המחבר את שתי הנקודות הנתונות?

ד) מה הקשר בין השיפועים שמצאתם?

5. א) שרטטו אנך אמצעי לקטע MN.

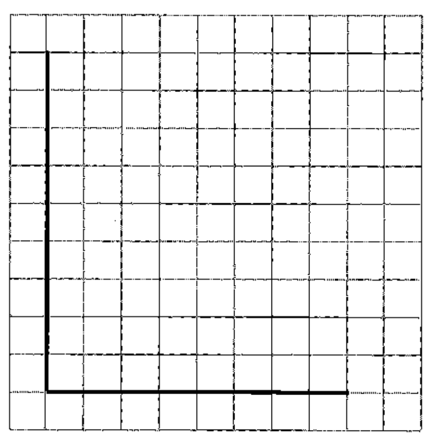


ב) U היא נקודה על האנך האמצעי מעל קטע MN. סמנו.

A היא נקודה על האנך האמצעי מתחת לקטע MN.

איזה מרובע MUNA יכול להתקבל: מלבן/מעוין/דלתון/ריבוע? הוכיחו.

6. א) בשרטוט זווית ישרה.



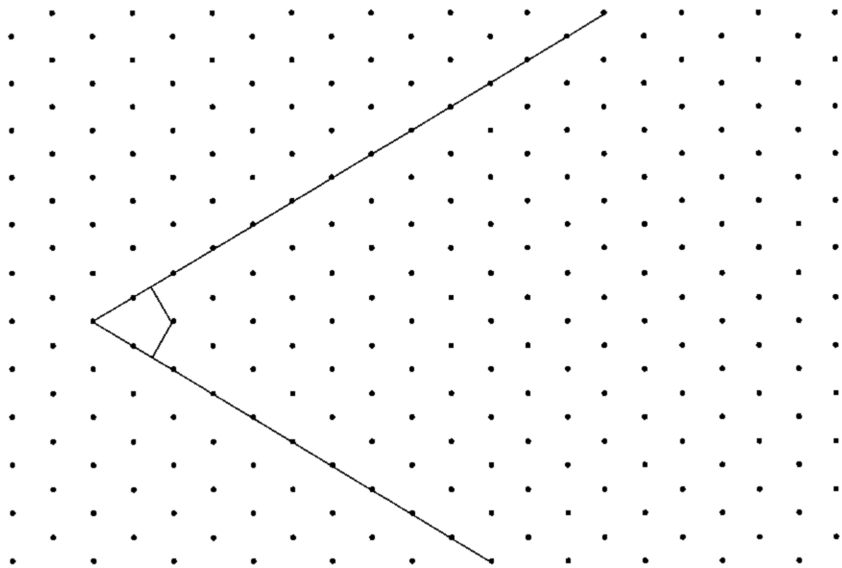
(i) סמנו נקודה שמרחקיה משוקי הזווית המשורטטת, שווים.

(ii) שרטטו שלוש נקודות נוספות המקיימות את התכונה המתוארת בסעיף (i).

(iii) מה תוכלו לומר על אוסף כל הנקודות המקיימות תכונה זו? שרטטו.

שימו לב! שרטטתם ישר שהוא חוצה את הזווית.

ב) סמנו נקודות הנמצאות במרחק שווה משוקי הזווית המשורטטת.



(i) מה תוכלו לומר על אוסף כל הנקודות המקיימות תכונה זו?

(ii) האם מצאתם את כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה משוקי הזווית? אם כן, הוכיחו.

(iii) האם יש נקודות על חוצה הזווית שאינן נמצאות במרחק שווה משוקי הזווית? אם כן, הדגימו, אחרת הוכיחו.

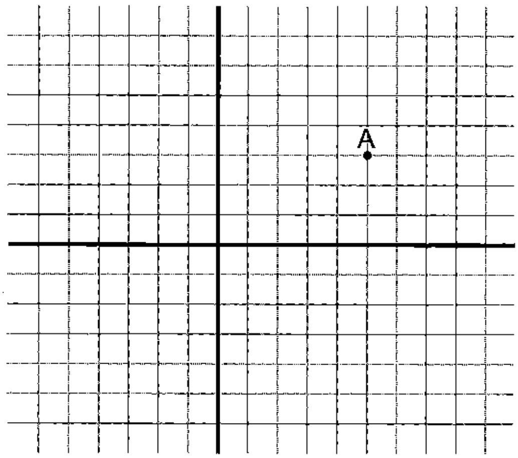
חוצה זווית הוא **מקום גיאומטרי** של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה משוקי הזווית.

7. אבנר התבקש לשרטט את "המקום הגיאומטרי" של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מישר נתון a. אבנר שרטט ישר b מקביל לישר a.

א) הסבירו מדוע כל נקודה על ישר b מקיימת את התכונה.

ב) האם הישר b הוא המקום הגיאומטרי הנדרש?

8. בשרטוט סכום המרחקים של הנקודה A משני הישרים המאונכים שווה ל-8 יחידות אורך (3 יחידות מהישר האופקי ו-5 יחידות מהישר האנכי).



א) סמנו עשר נקודות נוספות המקיימות את התכונה ש"סכום מרחקיהן משני הישרים המאונכים שווה ל-8 משבצות".

ב) שרטטו את קבוצת כל הנקודות המקיימות תכונה זו.

ג) איזו צורה התקבלה?

בשאלה 1 שרטטתם מעגל. ה**מעגל** הוא **מקום גיאומטרי** של הנקודות שמרחקן מנקודה נתונה קבוע. בפרק ג' נעסוק במעגלים.

מבחר תשובות לפרק א': מרובעים ומקומות גיאומטריים - חזרה

המרובעים (עמודים 7-26)

תכונות המרובעים (עמודים 7-12)

11. ג) כל אחת מהזוויות שווה ל- $60°$.

12. ב) $120°$.

תנאים מספיקים לקבלת מרובעים (עמודים 12-15)

1. א) מקבילית ב) דלתון ג) דלתון ד) מלבן, מקבילית
ה) דלתון ו) טרפז
2. א) דלתון ב) טרפז ג) מרובע אחר ד) דלתון
ה) מעוין, דלתון ומקבילית ו) מלבן, מקבילית
3. א) מעוין ב) מלבן ג) מקבילית ד) ריבוע ה) מקבילית

6. ב) ii $36°$ ג) $45°$

7. ב) מעוין

משפט חפיפה רביעי (עמודים 16-20)

9. ג) $\alpha = 15°$
10. ב) $67.5°$
11. המשולשים לא חופפים

חוצי זוויות ואלכסונים במרובעים (עמודים 21-26)

5. 13 ס"מ
6. ב) $\alpha = 30°$ ג) 50 ס"מ

14. ב) $130°$; $25°$; $25°$

מקומות גיאומטריים (עמודים 27-31)

3. ב) $y = -x + 6$
4. א) $y = 2x + 1$

פרק ב – שטחים, משפט תלס ודמיון

הערות:

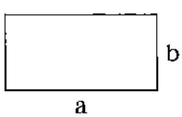
- פרק ג' על המעגל אינו מסתמך על פרק זה, לכן ניתן להקדימו.
- בנוסף לתרגול שאחרי כל אחד משלושת הסעיפים הבאים, יש תרגול משותף לשלושת הסעיפים.

שטח משולש

בפרק זה נבנה את הנושא בצורה דדוקטיבית, נגדיר את המושגים והמשפטים היסודיים (אכסיומות) ונבנה מושגים ומשפטים חדשים שחלקם נוכיח וחלקם נפריך.
בפרק זה נעסוק בשטחים של צורות שונות. נפגשתם בוודאי בלימודיכם במושג השטח ובנוסחת שטח של מלבן.

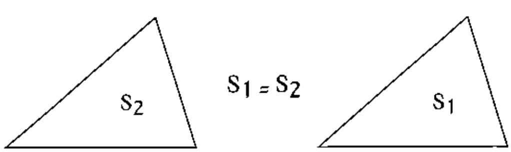
נקבל כנכונות את הטענות הבאות:

(i) שטח של מלבן שווה למכפלת אורכי שתי צלעות סמוכות, כלומר $S = a \cdot b$.



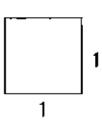
למעוניינים קטע קריאה בסוף הסעיף (עמוד 36) העוסק בהוכחת הנוסחה לשטח מלבן.

(ii) למשולשים חופפים יש שטחים שווים.



- יחידת המידה לשטח היא שרירותית כמו כל יחידת מידה.

  מוסכם כי ריבוע שאורך צלעו יחידה, הוא יחידת שטח.

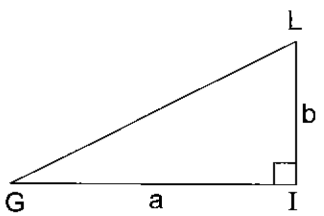


אם אורך הצלעות נמדד בסנטימטרים, אז השטח נמדד בסנטימטרים ריבועים, או בקיצור סמ"ר.

- לסימון השטח נשתמש באות S. למשל השטח של משולש GIL שבהמשך, יסומן S_{GIL}.

- הדגש בספר על התכונות הגיאומטריות בהן יחידות המידה אינן משמעותיות. נרשום יחידות מידה מפורשות רק בבעיות מעשיות (למשל: בשטח מגרש). בכל שאר הבעיות את מידות האורך נרשום יח' (יחידות), את מידות השטח נרשום יח"ר (יחידות ריבועיות).

.1 נתון: $b \perp a$.

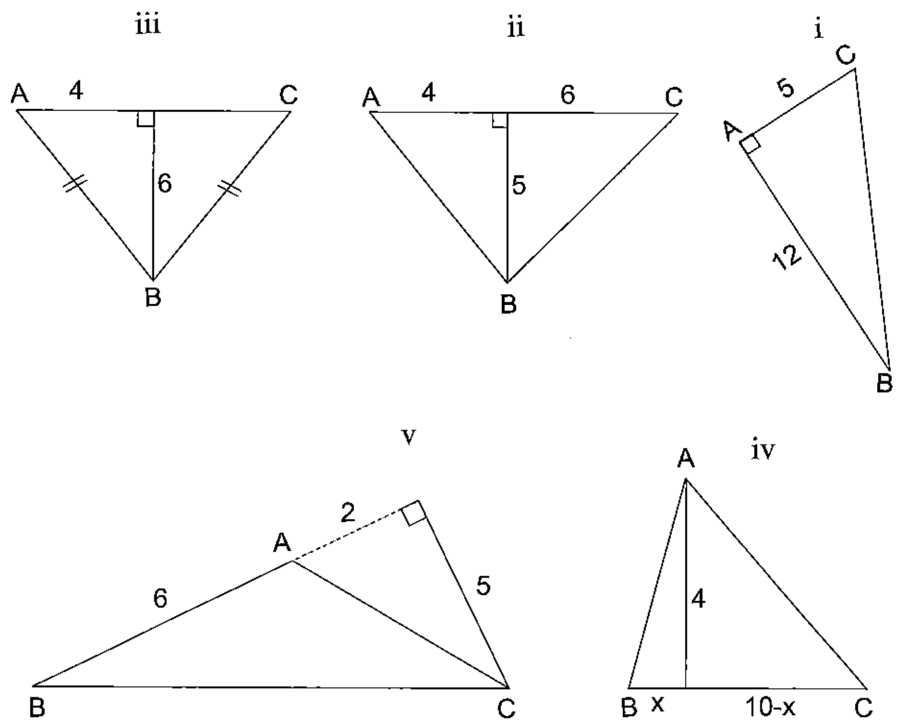


הביעו בעזרת a ו-b את שטחו של ΔGIL.

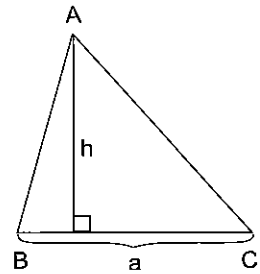
הוכיחו את טענתכם. רשמו בהוכחה היכן נעזרתם בכל אחת משתי הטענות שקיבלנו כנכונות לעיל.

נעזר בתרגיל 1 על מנת למצוא נוסחה לחישוב שטח משולש כלשהו.

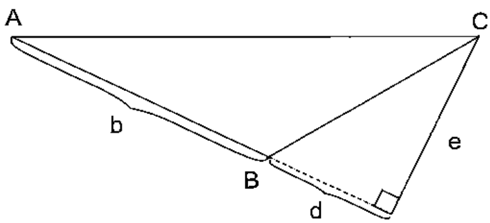
.2 א) חשבו את S_{ABC} (בסעיפים vi , vii רשמו ביטוי מתאים ופשטו).



vi



vii

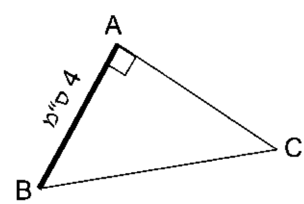


שטח משולש שווה למחצית מכפלת אורך אחת הצלעות באורך הגובה אל צלע זו

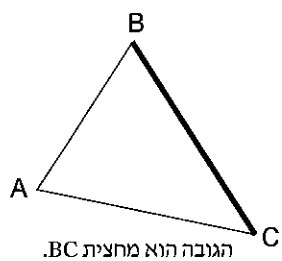
$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$.

3. א) בכל משולש שרטטו את הגובה לצלע המודגשת.

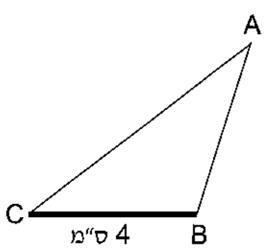
i



ii

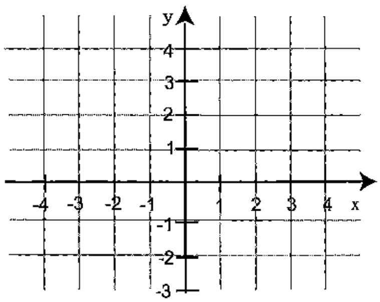


iii



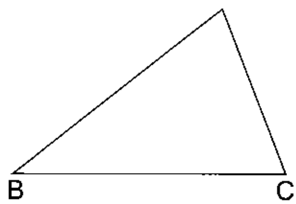
ב) נתון כי הגובה לצלע המודגשת בכל משולש שווה ל-6 ס"מ. חשבו את שטח המשולש.

ג) סמנו במערכת הצירים את הנקודות $A(3, 0)$; $B(-2, 0)$; $C(1,4)$.
חברו כדי לקבל משולש ABC, וחשבו את שטחו.



4. הייתכן משולש שבו אורך אחת הצלעות 5 ס"מ והגובה אליה 6 ס"מ, ואורך צלע אחרת 4 ס"מ והגובה אליה 8 ס"מ? נמקו.

5. לפניכם משולש שצלעו $BC = a$ יח' ושטחו S.



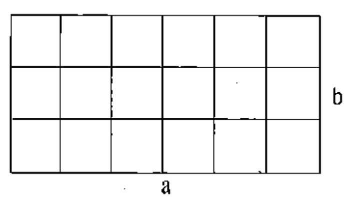
א) שרטטו, אם אפשר, משולשים מסוגים שונים (ישר זווית, שווה שוקיים, שווה צלעות, קהה זווית) שאחת מצלעותיהם BC ושטחם S.

ב) נסו לתאר ולשרטט את המקום הגיאומטרי של כל קדקודי המשולשים שאחת מצלעותיהם BC ושטחם S.

ג) בטאו את הגובה של המשולשים בעזרת השטח S ואורך הקטע BC.

קריאה מהנה

נתון מלבן שצלעותיו הן a ו-b.



נניח שקיים קטע קטן, שאורכו k המוכל בדיוק m פעמים בצלע a ו-n פעמים בצלע b (כאשר m ו-n מספרים שלמים), כלומר $a = k \cdot m$ ו-$b = k \cdot n$.

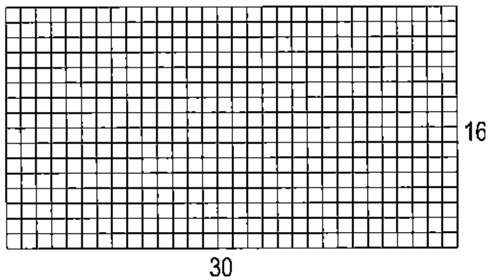
הקטע k נקרא "מידה משותפת" של הקטעים a ו-b. במקרה כזה, ניתן לחלק את שטח המלבן לריבועים קטנים שצלעם k. יחידת המידה של שטח ריבוע קטן הוא k^2.

ברור הוא, שמספר הריבועים ה"מכסים" את שטח המלבן הוא $m \cdot n$, לכן שטח המלבן הוא $m \cdot n$, k^2 יחידות שטח, כלומר: $S = m \cdot n \cdot k^2 = a \cdot b$.

נסביר את הכתוב לעיל בעזרת מספר דוגמאות:

- אורכי הצלעות הם מספרים שלמים: $b = 16 ; a = 30$, נבחר כמידה משותפת 1 יחידה, ונקבל 480 ריבועים קטנים שצלעם 1 יחידה.

  לכן שטח המלבן הוא 480 יחידות ריבוע (יחידת השטח היא 1^2).



אפשר במקרה זה לבחור כמידה משותפת 2 יחידות. 2 מוכל 15 פעמים בקטע a ו-8 פעמים בקטע b. במקרה זה נקבל 120 ריבועים קטנים, שצלעם 2 יחידות.

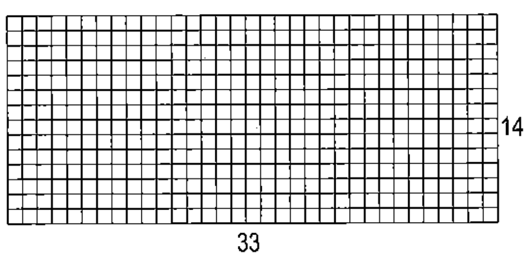
לכן שטח המלבן הוא 120 יחידות ריבוע, יחידת השטח היא 2^2. נשנה ליחידת שטח 1^2, ונקבל: $S = 15 \cdot 8 \cdot 4 = 480$.

- נדגים את מציאת שטח למקרה ש- $b = \frac{7}{6} ; a = \frac{11}{4}$.

נמצא קטע (מידה משותפת) המוכל מספר שלם של פעמים בכל אחד מהקטעים. אין במקרה זה קטע שאורכו מספר שלם המהווה מידה משותפת לשני הקטעים.

לכן נחלק את הקטעים ליחידות קטנות יותר. לשם כך נמצא מכנה משותף לשני הקטעים. $b = \frac{7}{6} = \frac{14}{12} \;;\; a = \frac{11}{4} = \frac{33}{12}$.

נבחר כמידה משותפת קטע באורך $\frac{1}{12}$ יחידות. קטע זה מוכל 33 פעמים בקטע a, ו-14 פעמים בקטע b.



מספר הריבועים המכסים את שטח המלבן הזה הוא: $33 \cdot 14$, כלומר 462 ריבועים.

שטח המלבן הוא 462 יחידות ריבועיות (יחידת השטח במקרה זה היא: $(\frac{1}{12})^2$).

נשנה את יחידת השטח ל-1^2 ונקבל: $S = 462 \cdot (\frac{1}{12})^2 = \frac{77}{24}$, כאשר יחידת השטח היא 1^2.

בדקו ששטח המלבן הנתון שווה למכפלת הצלעות.

לא תמיד ניתן למצוא לקטעים "מידה משותפת".
אפשר להוכיח למשל, שלצלע ריבוע ואלכסונו אין מידה משותפת.

תרגילים

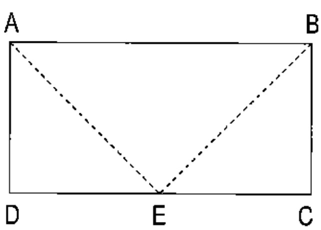
6. א) במשולש ישר זווית הגובה ליתר שווה ל-4 ס"מ והתיכון ליתר שווה ל-6 ס"מ. שרטטו את המשולש וחשבו את שטחו.

ב) במשולש ישר זווית הגובה ליתר a ס"מ והתיכון ליתר פי 1.5 מהגובה. שרטטו את המשולש ובטאו את שטח המשולש באמצעות a.

ג) במשולש ישר זווית ושווה שוקיים הניצב שווה ל-20 ס"מ.

(i) חשבו את שטח המשולש.

(ii) היעזרו בסעיף (i) וחשבו את הגובה ליתר.



7. במלבן ABCD, E על DC כך שמשולש ADE שווה שוקיים, וזווית AEB ישרה.

א) a ס"מ = BC, בטאו את שטח המלבן באמצעות a.

ב) הראו כי סכום שטחי המשולשים ADE ו-BCE שווה לשטח משולש AEB.

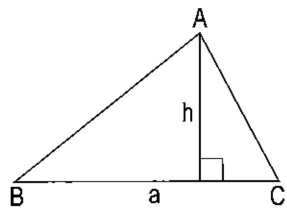
ג) האם תשובתכם לסעיף ב' תשתנה אם נקודה E היא נקודה כלשהי על DC? הוכיחו.

8. הוכיחו שתיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח.

9. א) הוכיחו שהאלכסונים במעוין מחלקים אותו לארבעת משולשים שווי שטח.
ב) ציינו מרובעים נוספים בהם האלכסונים מחלקים לארבעה משולשים שווי שטח. הוכיחו.

10. א) במשולש נתון ששני גבהים שווים באורכם. מה אפשר להסיק על המשולש? הוכיחו.
ב) במשולש נתון ששלושת הגבהים שווים באורכם. מה אפשר להסיק על המשולש? הוכיחו.

11. נתון: במשולש שלפניכם $BC = a$, והגובה ל-BC הוא h.



כמו כן נתון: משולש PQR שבו $PQ = 2a$, והגובה לצלע PQ הוא 3h.

א) שרטטו את משולש PQR ואת הגובה לצלע PQ.
ב) בטאו את שטח משולש PQR באמצעות a ו-h.

פי כמה גדול שטחו משטח משולש ABC?

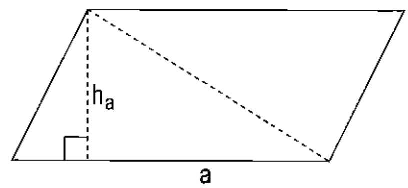
שטחי מרובעים

גובה במרובע שיש לו זוג צלעות מקבילות, הוא המרחק (אורך האנך) בין זוג הצלעות המקבילות.

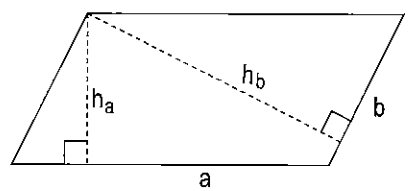
1. א) שרטטו טרפז ושלושה גבהים. מה תוכלו לומר על הגבהים האלה?

   ב) שרטטו מקבילית ושני גבהים שונים.

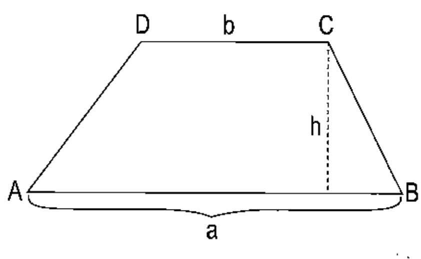
2. א) היעזרו בשרטוט והוכיחו כי שטח מקבילית שווה למכפלה של אחת הצלעות בגובה אליה, כלומר שווה ל- $a \cdot h_a$.



   ב) מה תוכלו לומר על המכפלות: $b \cdot h_b$ ו- $a \cdot h_a$

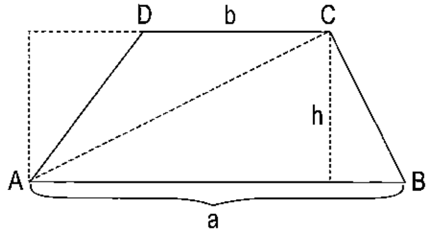


3. הוכיחו כי שטח טרפז שווה ל- $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$, כלומר למחצית מכפלה של סכום הבסיסים בגובה הטרפז.

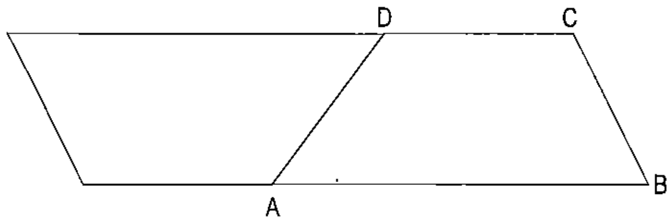


ניתן להוכיח את הנוסחה בדרכים שונות. לפניכם ארבעה שרטוטים הרומזים על ארבע דרכים שונות.

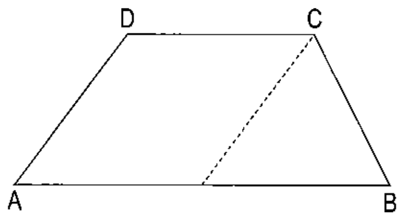
א)



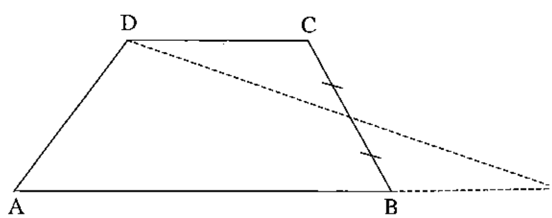
ב)



ג)



ד)



4. בתרגיל זה תבדקו שטחים של מרובעים בעלי אותם אלכסונים וזוויות שונות בין האלכסונים.

אם יש באפשרותכם להשתמש בתוכנה של גיאומטריה דינמית, "הנדסה בתנועה", תוכלו להחליף תרגיל זה בפעילות 4 שהוראותיה כתובות בנספח I, עמודים 188-190.

אם אינכם משתמשים בתוכנה, היעזרו בשני קטעים שווים שקופים ובצעו את ההוראות לתרגיל זה. הקטעים ישמשו לכם כאלכסונים.

א) צרו מרובעים שונים בעלי אותם אלכסונים המאונכים זה לזה: הניחו את הקטעים כך שיחתכו זה את זה ויהיו מאונכים זה לזה, והזיזו אחד מהם כך שהקטעים ישארו מאונכים.

מה תוכלו לומר על שטחי המרובעים שהקטעים הם אלכסוניהם? הוכיחו.

ב) צרו מרובעים שונים בעלי אותם אלכסונים וזווית α קבועה ביניהם. היעזרו בשני הקטעים כנ"ל.

מה תוכלו לומר על השטחים של המרובעים השונים בעלי אותם אלכסונים עם זווית α מסוימת ביניהם? הוכיחו.

הדרכה למעוניינים: קראו הסבר בסוף הסעיף עמוד 43.

ג) מה קורה לשטח מרובע, הבנוי על-פי שני אלכסונים שאורכם קבוע, כשהזווית החדה בין האלכסונים גדלה? מתי מתקבל השטח המכסימלי? הוכיחו.

הדרכה למעוניינים: קראו הסבר בסוף הסעיף עמוד 44.

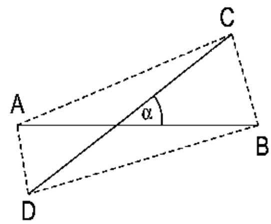
5. באילו מהמרובעים הבאים ניתן לחשב את השטח לפי אורכי האלכסונים a ו-b בלבד? בטאו את השטח.

ריבוע, מלבן, מקבילית, מעוין, דלתון, טרפז, מרובע שאלכסוניו שווים זה לזה, מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה.

בתרגילים 4 ו-5 ראינו כי:
שטח מרובע שאלכסוניו מאונכים, שווה למחצית מכפלת אלכסוניו.

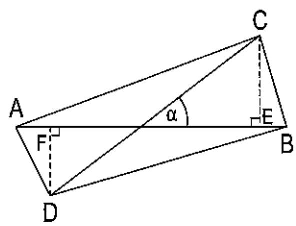
קריאה מהנה

הסבר לתרגיל 4, סעיף ב'

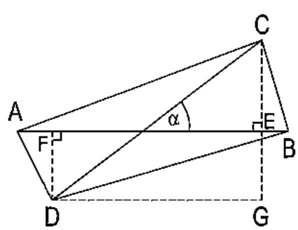


CD , AB אלכסונים שווים.
מה יקרה לשטח המרובע אם נשנה את מיקום האלכסונים תוך שמירה על הזווית ביניהם? למשל, אם נניע את האלכסון AB כלפי מטה תוך שמירה על כיוונו, (כך שהזווית בין האלכסונים תשמר), האם שטח המרובע יגדל? יקטן? יישמר?

מסתבר ששטח המרובע נשאר קבוע.
נחשב שטח של מרובע אחד כזה:
נוריד אנכים מ-C ו-D ל-AB.



$$S_{ACBD} = S_{ABC} + S_{ABD}$$
$$\Downarrow$$
$$= \frac{AB \cdot CE}{2} + \frac{AB \cdot DF}{2}$$
$$= \frac{AB \cdot (CE + DF)}{2}$$



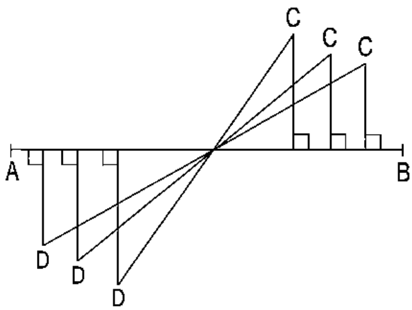
AB קבוע. נראה כי כל זמן שהזווית α נשמרת, גם הגודל $CE + DF$ נשאר קבוע. כדי להמחיש מה מייצג גודל זה, נבנה את שני הגבהים על ישר אחד, למשל על הישר CE. לשם כך נבנה אנך ל-AB מהנקודה E באורך DF מתקבל הקטע CG ששווה ל-$DF + CE$. המרובע $DFEG$ הוא מקבילית (למעשה מלבן), כי DF מקביל ושווה ל-EG.

מכאן ש- $FE \parallel DG$
$$\Downarrow$$
$\sphericalangle CDG = \alpha$ (זוויות מתאימות בין מקבילים)

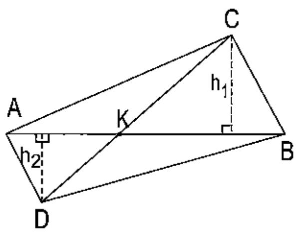
נתבונן במשולש CDG: משולש זה הוא ישר-זווית שהיתר בו (CD) וזווית חדה (α) קבועים. משולש כזה הוא משולש יחיד (על-פי משפט חפיפה צ.ז.ז.), ומכאן שגם גודלו של CG קבוע, ולכן גם שטח המרובע $ACBD$ קבוע.

הסבר לתרגיל 4, סעיף ג'

היעזרו בקטעים השקופים וצרו מרובעים שהזווית בין האלכסונים משתנה.
ראינו כי שטח המרובע שווה למחצית מכפלת האלכסון AB בסכום האנכים אליו מ-C ומ-D.



מההתנסות בקטעים השקופים עולה ההשערה כי ככל שהזווית החדה שבין האלכסונים הולכת וגדלה, אורך כל אחד מהאנכים גדל ולכן גם השטח גדל, וכשהזווית בין האלכסונים ישרה, מתקבל השטח המקסימלי.



הוכחה:

$$S_{ACBD} = \frac{1}{2}AB \cdot (h_1 + h_2)$$

$$h_2 \le DK \ ; \ h_1 \le CK$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot (h_1 + h_2) \le \frac{1}{2}AB \cdot (CK + DK) = \frac{1}{2}AB \cdot CD$$

$$\Downarrow$$

$$S_{ACBD} \le \frac{1}{2}AB \cdot CD$$

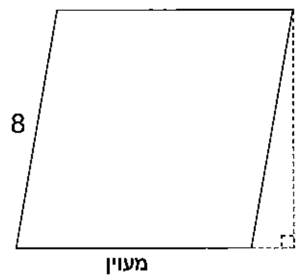
התבנית $\frac{1}{2}AB \cdot CD$ מייצגת את שטח המרובע כאשר אלכסוניו מאונכים.

משמעות האי-שיוויון האחרון היא, שהערך המקסימלי של שטח המרובע, מתקבל כאשר אלכסוניו מאונכים זה לזה.

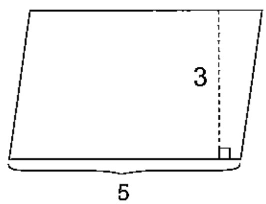
תרגילים

6. חשבו את שטחי המקביליות לפי הנתונים הרשומים.

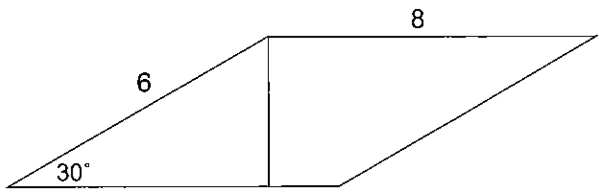
א)



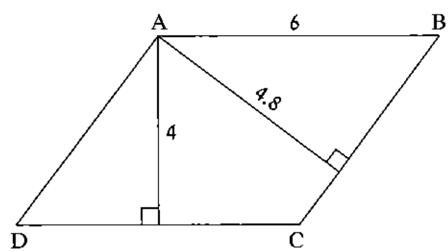
ב)



ג)



7. מצאו את אורך הצלע BC במקבילית ABCD על-פי הנתונים בשרטוט.



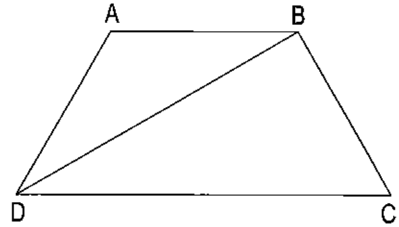
8. ABCD טרפז שווה שוקיים.

$AB \parallel DC$, $CD = 13$ יח'

$AB = 5$ יח', $\angle D = 45^\circ$

חשבו את שטח הטרפז.

9. בטרפז שווה שוקיים ABCD ($CD \| AB$), השוק שווה לבסיס הקטן, האלכסון DB מאונך לשוק וזווית הבסיס שווה ל-120°.



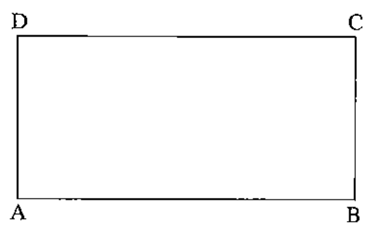
הוכיחו כי שטח הטרפז גדול פי 3 משטח משולש ADB.

במשולש ADB שרטטו גובה ל-AB.

10. א) DANY מלבן ששטחו S. K נקודה כלשהי על DY.
הביעו את S_{KAN} באמצעות S.

ב) מה תוכלו לומר על S_{KAN} אם DANY מקבילית?

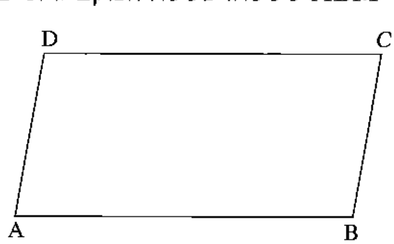
11. א) שרטטו מקבילית ABC'D' השווה בשטחה לשטח המלבן ABCD.



(i) כמה מקביליות כאלה קיימות?

(ii) מה המקום הגיאומטרי של כל הקטעים C'D' של המקביליות האלה?

ב) שרטטו משולש ABM' ששטחו כשטח המקבילית ABCD.



(i) כמה משולשים כאלה קיימים?

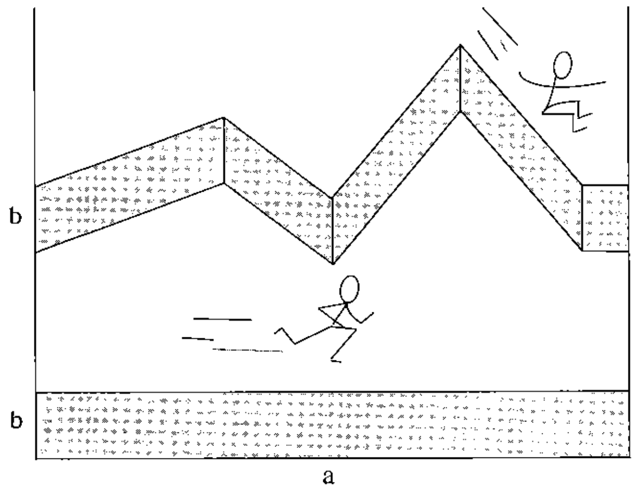
(ii) מה המקום הגיאומטרי של הקודקודים M' של המשולשים האלה?

12. א) כיצד ישתנה שטח מעוין אם אחד מאלכסוניו יגדל פי 4?

ב) כיצד ישתנה שטח מעוין אם כל אחד מאלכסוניו יגדל פי 2?

13. בין שני הקווים המקבילים שבשרטוט שורטטו שתי צורות, מלבן שצלעותיו a ו-b, וצורה נוספת הבנויה ממקביליות שאורך אחת מצלעותיהן הוא b.

א) אילו משתי הצורות נראית לכם עם שטח גדול יותר, המלבן או הצורה הבנויה מהמקביליות?

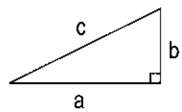


ב) הראו כי שטח הצורה המורכבת ממקביליות שווה לשטח המלבן. הסבירו.

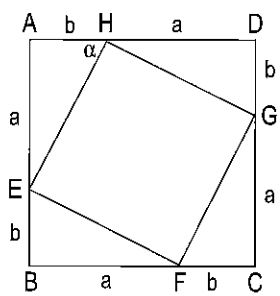
משפט פיתגורס

תזכורת:

משפט: שטח הריבוע הבנוי על היתר במשולש ישר זווית שווה לסכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים.



1. בעזרת ההדרכה שלהלן היעזרו בשוויון שטחים והוכיחו את משפט פיתגורס.



א) משורטט ריבוע ABCD. הוכיחו שארבעת המשולשים חופפים וכן שמרובע HGFE הוא ריבוע שאורך צלעו c.

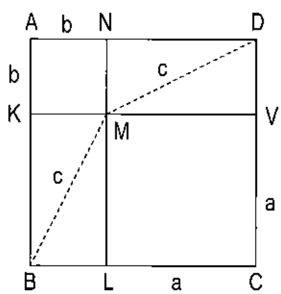
רמז: בטאו את הזוויות בעזרת α.

ב) היעזרו בשרטוט והשלימו:

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle}\_\_\_ + S_{\square}\_\_\_$$

$$= 4 \cdot S_{AHE} + \_\_\_$$

השלימו בעזרת c.



ג) לפניכם שרטוט נוסף. השלימו:

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle}\_\_\_ + S_{\square}\_\_\_ + S_{\square}\_\_\_$$

$$= 4 \cdot S_{MND} + \_\_\_ + \_\_\_$$

השלימו בעזרת a, b.

ד) הוכיחו $\triangle AHE \cong \triangle NMD$.

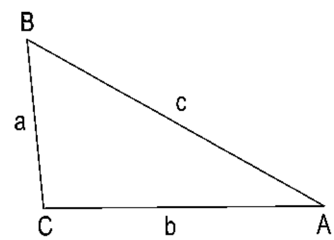
השלימו לפי סעיפים ב' ו-ג': $c^2 = \_\_\_ + \_\_\_$

2. ABC משולש שווה צלעות.

א) אורך צלע המשולש שווה ל-10 ס"מ. שרטטו וחשבו את גובה המשולש ואת שטחו.

ב) אורך צלע המשולש הוא a ס"מ. בטאו את גובה המשולש ואת שטחו באמצעות a.

3. בשרטוט ΔABC כלשהו שצלעותיו a, b, c.



השלימו את הוכחת המשפט:

> *משפט*: אם במשולש ABC מתקיים $a^2 + b^2 = c^2$, אז $\sphericalangle C = 90^\circ$.

א) שרטטו משולש DEF ישר זווית שניצביו $DE = a$ ו-$EF = b$.

ב) בטאו את אורך היתר במשולש DEF בעזרת a ו-b.

ג) הוכיחו $\Delta BCA \cong \Delta DEF$ ו-$\sphericalangle C = 90^\circ$.

4. אילו מבין המשולשים שמידות צלעותיהם נתונות להלן הם ישרי זווית.

נמקו את תשובותיכם (כל המידות ביחידות אורך אחידות).

א) 13 , 12 , 5

ב) 8 , 15 , 18

ג) 6 , 4 , 5

ד) 5 , 4 , 3

ה) 26 , 24 , 10

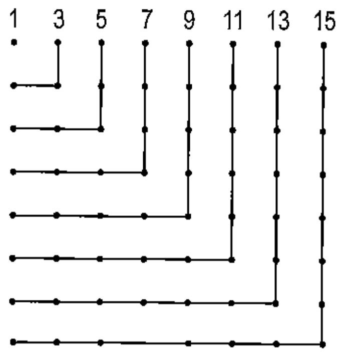
בהמשך מוזמנים לקרוא על דרך למציאת שלושה מספרים המקיימים את משפט פיתגורס.

קריאה מהנה

שלשה של מספרים טבעיים שסכום הריבועים של שניים מהם שווה לריבוע המספר השלישי נקראת **שלשה פיתגורית**. קיימת שיטה למציאת שלשות פיתגוריות בעזרת סכומים של מספרים אי-זוגיים. קראו על השיטה והשיבו על השאלות.

השיטה מתבססת על הטענה הבאה: סכום n מספרים אי-זוגיים החל מ-1 הוא n^2.

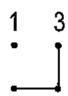
נסדר את המספרים באופן הבא: מספר הנקודות המחוברים בקו, זהה למספר הרשום מעל. בִּדקו.



נסביר את הטענה בעזרת מספר דוגמאות:

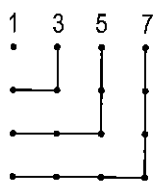
(i) שני מספרים אי-זוגיים 1 ו-3:

$$1 + 3 = 2^2$$



(ii) 4 מספרים אי-זוגיים:

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$



(iii) באופן כללי עבור n מספרים אי-זוגיים נקבל:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

נתבסס על טענה זו כדי למצוא שלשות פיתגוריות. נצא ממספר אי-זוגי, נניח 5, ונעלה אותו בריבוע. התוצאה אי-זוגית.

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+23}_{12^2} + 25 = 13^2$$

$$12^2 \quad + 5^2 = 13^2$$

$\Downarrow$ (לפי הטענה הנ"ל לגבי סכום המספרים האי-זוגיים עד 23)

$\Downarrow$ (לפי הטענה הנ"ל לגבי סכום המספרים האי-זוגיים עד 25)

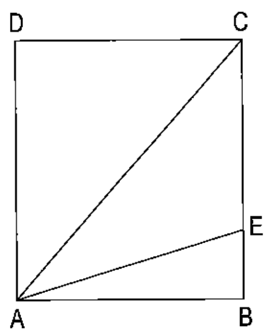
התקבלה השלשה הפיתגורית: 13 , 5 , 12.

א) מִצאו שלשה נוספת בעזרת ההכללה.

ב) האם, בעזרת ההכללה, ניתן למצוא כל שלשה?
הסבירו בעזרת הדוגמאות בשאלה 4.

ג) נסו למצוא שלשה ללא עזרת ההכללה.

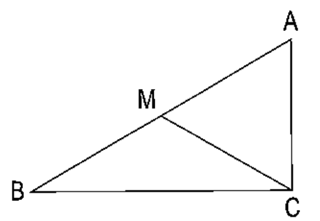
תרגילים



5. נתון: ABCD מלבן.
$AC = 10$ יח', $AE = 7$ יח', $BE = 2$ יח'.
חשבו S_{ABCD}.

6. במשולש ישר זווית, אחת הזוויות שווה ל-$60°$ והיתר ל-10 ס"מ.
שרטטו את המשולש וחשבו את שטחו.

7. נתון: ΔABC ישר זווית ($\sphericalangle C = 90°$), $\sphericalangle B = 30°$, CM תיכון, $CM = 4$ יח'.
א) חשבו את אורך הניצבים AC ו-BC.
ב) חשבו את שטח ΔABC.

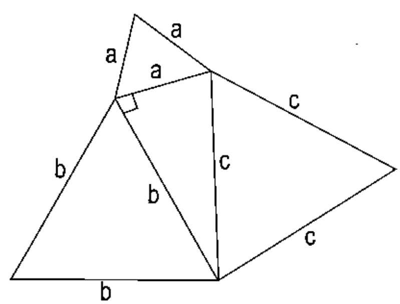


8. א) אורכי האלכסונים במעוין הם 10 יח' ו-25 יח'. חשבו את שטחו והיקפו.
ב) אורך אחד האלכסונים במעוין 16 יח' וצלעו 10 יח'. חשבו את שטחו.

9. בטרפז שווה שוקיים זווית הבסיס שווה ל-$60°$, השוק שווה לבסיס הקטן שאורכו a.
א) שרטטו, רשמו את הנתונים ובטאו את הבסיס הגדול בעזרת a.
ב) בטאו את שטח הטרפז באמצעות a.

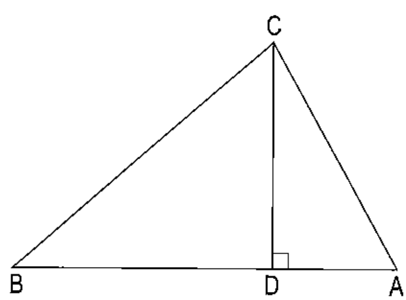
10. א) במשושה משוכלל אורך הצלע 10 יח'. חשבו את שטח המשושה.
חברו את מרכז המשושה לקודקודים.
ב) רשמו תבנית לשטחו של משושה משוכלל שאורך צלעו a.

11. על כל אחת מצלעותיו של משולש ישר זווית בנו משולש שווה צלעות.



הוכיחו כי סכום שטחי המשולשים הבנויים על הניצבים שווה לשטח המשולש הבנוי על היתר.

12. במשולש ABC נתונה הצלע הגדולה AB, הגובה אליה CD (D על AB) והיטל AC עליה, AD (ראו שרטוט). בדקו בכל סעיף אם משולש ABC ישר זווית.



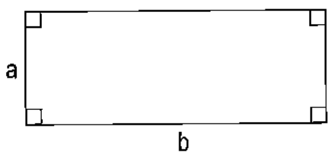
א) $AD = 12$, $CD = 13$, $AB = 26$.
ב) $AD = 9$, $CD = 12$, $AB = 25$.

סיכום

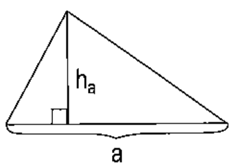
סיכום מושגים ומשפטים לשלושת הסעיפים: שטח משולש, שטחי מרובעים, ומשפט פיתגורס.

בסעיפים האחרונים הכרתם את המושגים: שטח מלבן, שטח משולש, שטח מקבילית, שטח טרפז. כמו כן למדתם להכיר את המשפטים:

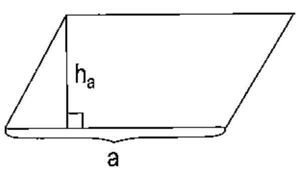
- שטח מלבן שווה למכפלת אורכי שתי צלעות סמוכות, $S = a \cdot b$.



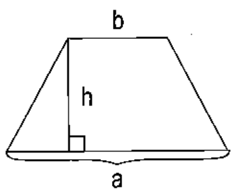
- שטח משולש שווה לחצי מכפלת אורך צלע באורך הגובה אליה $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$.



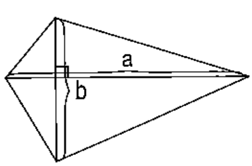
- שטח מקבילית שווה למכפלת אורך צלע באורך הגובה אליה $S = a \cdot h_a$.



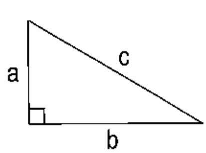
- שטח טרפז שווה לחצי מכפלת סכום אורכי הבסיסים באורך גובה הטרפז $S = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.



- שטח מרובע שאלכסוניו מאונכים, שווה למחצית מכפלת אלכסוניו.



- **משפט פיתגורס:** במשולש ישר זווית, סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר $c^2 = a^2 + b^2$, והמשפט ההפוך לו.

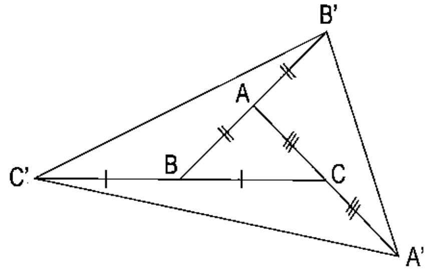


תרגילים נוספים לשלושת הסעיפים:

שטח משולש, שטחי מרובעים, משפט פיתגורס

1. האריכו את הצלעות של ΔABC באופן הבא:

$CB = BC'$, $AC = CA'$, $BA = AB'$.

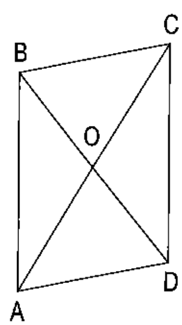


פי כמה גדול $S_{A'B'C'}$ מ-S_{ABC}? הוכיחו.

2. נתון מרובע ABCD שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות $AB||CD$,

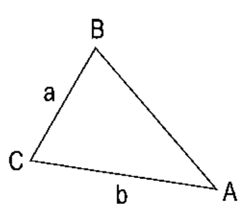
$S_{AOB} = S_{BOC}$.

מאיזה סוג הוא המרובע ABCD? הוכיחו.



3. א) הוכיחו: $S_{ABC} \leq \frac{1}{2} a \cdot b$.

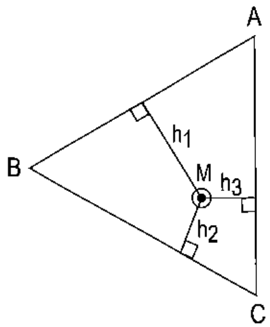
ב) מתי מתקיים השיוויון?



4. ΔABC שווה צלעות. M נקודה כלשהי בתוך המשולש.

הוכיחו כי סכום המרחקים של M מצלעות המשולש קבוע, (ללא תלות במקומה של הנקודה M).

רמז: חברו את הנקודה M לקודקודי המשולש.

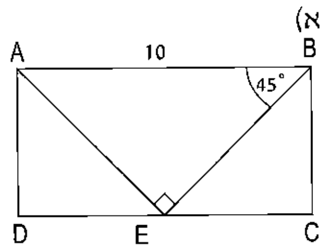


5. h_a ו-h_b הם גבהים לצלעות a ו-b של ΔABC בהתאמה.

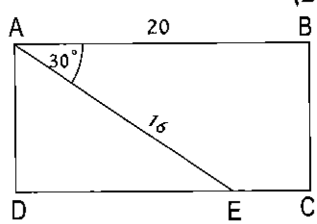
הוכיחו: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$

6. חשבו את שטחי המלבנים, על-פי הנתונים בשרטוט.

א)



ב)



7. במלבן ABCD נתון כי DH = DG = BE = BF.

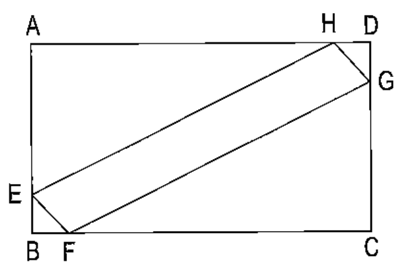
א) הוכיחו כי EFGH מקבילית.

ב) מִצאו את שטח המקבילית אם:

CD = 6 יח'

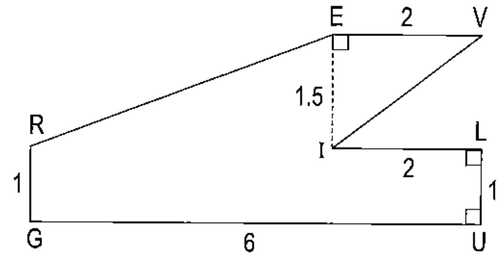
AD = 10 יח'

BF = 2 יח'

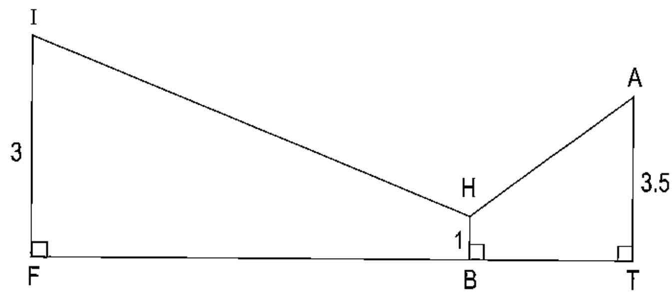


8. חשבו, אם אפשר, את שטחי הצורות הבאות.

א)



ב) $FT = 10$



9. ABCD טרפז ישר זוויות ($AB \parallel DC$, $\angle B = \angle C = 90°$),

$AE \perp DC$ (E על DC או על המשכו).

$BC = 4$ יח' $DE = 3$ יח' $S_{ABCD} = 34$ יח"ר

א) חשבו את אורכי בסיסיו של הטרפז.

רמז: סמנו את הבסיס הקטן ב-x ובטאו את שטח הטרפז בעזרת x.

ב) חשבו את היקף הטרפז.

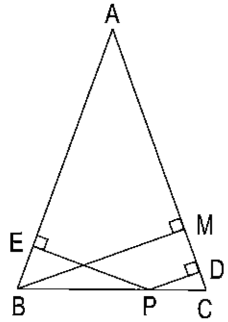
10. ΔABC שווה שוקיים ($AB = AC$),

מנקודה כלשהי P על בסיס המשולש העבירו גבהים לשוקיים $PE \perp AB$, $PD \perp AC$.

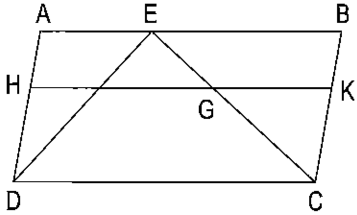
BM גובה לשוק AC.

הוכיחו: $BM = DP + EP$.

רמז: אפשר לחבר את AP או להעביר $PQ \perp BM$.



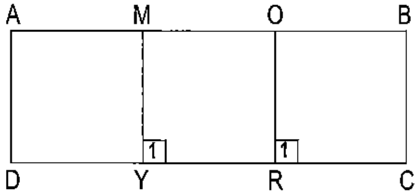
11. נתון: ABCD מקבילית, E נקודה כלשהי על הצלע AB, HK||AB.



א) הוכיחו: $S_{ABKH} = 2 \cdot S_{EDG}$

ב) שרטטו משולש נוסף ששטחו שווה לשטח ΔEDG.

12. ABCD מלבן.



$AB = 3AD$

$AM = MO = OB$

$\sphericalangle Y_1 = \sphericalangle R_1 = 90°$

פי כמה גדול האלכסון AC מהאלכסון AY?

13. א) אורך צלעו של ריבוע הוא 8 יח', חשבו את אורך אלכסונו של הריבוע.

ב) האם תוכלו למצוא ריבוע כזה, שאורך צלעו ואורך אלכסונו יהיו שניהם מספרים שלמים? נמקו.

14. א) חשבו את שטחו של משולש ישר זווית שאחת מזוויותיו 30° אם אורך היתר 12 יח'.

ב) מצאו את אורך הגובה ליתר.

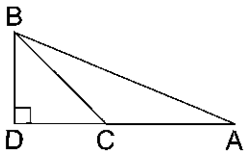
15. קבוצת מטיילים הלכה 11 ק"מ צפונה, אחר כך פנתה מזרחה והתקדמה 15 ק"מ, ושוב פנתה צפונה והתקדמה 6 ק"מ נוספים. מהו המרחק שהיה עליהם לעבור בדרכם חזרה לנקודת המוצא, אם הם חזרו בקו ישר?

16. ΔPQR הוא משולש שווה צלעות, נסמן את אורך הצלע ב-a. על המשך הצלע QR היקצו קטע RS כך ש-$RS = QR$.

א) בטאו את אורכו של PS באמצעות a.

ב) הביעו את שטח משולש PQS באמצעות a.

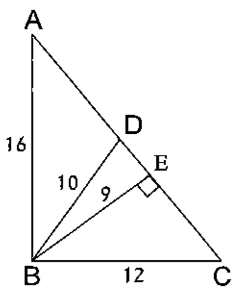
17. נתון: ΔABD ישר זווית ($\angle D = 90°$), $BC = AC$, $\angle ACB = 135°$.



א) הוכיחו: $AC = \sqrt{2}\,CD$

ב) סמנו $BD = a$ והביעו את שטח המשולש ABC באמצעות a.

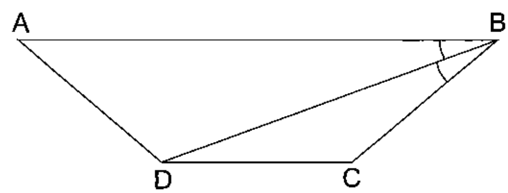
18. ΔABC ישר זווית, $\angle ABC = 90°$.



BD תיכון ליתר, BE גובה ליתר.

רק באחד הנתונים המספריים נפלה שגיאה. תקנו את השגיאה.

19. בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AB||DC$), האלכסון BD חוצה את הזווית החדה ABC.



כמו כן נתון: $AB = 25$ יח'

$BC = 10$ יח'

א) חשבו את שטח הטרפז.

ב) חשבו את שטח כל אחד מהמשולשים.

20. ABC משולש ישר זווית ($\angle B = 90°$). AD חוצה זווית BAC (D על BC),

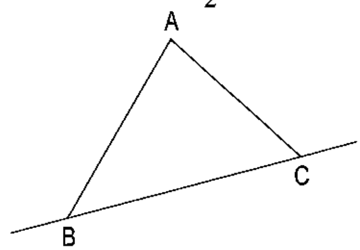
$AD = 10$ יח', $\angle BAD = 30°$.

שרטטו וחשבו את אורכי הקטעים האחרים.

יחסי שטחים

בנוסף לתרגול שאחרי כל אחד מארבעת הסעיפים הבאים יש תרגיל משותף לארבעת הסעיפים.

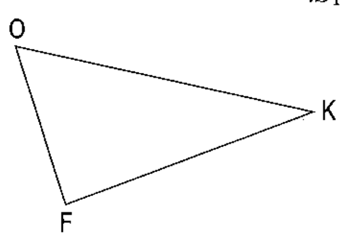
1. א) סמנו נקודה D על הישר BC כך ששטח משולש ADC יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}$ שטח משולש ABC, כלומר $S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$.



כמה נקודות כאלה יש?

ב) שרטטו ΔABC וסמנו נקודה E על הישר BC כך ש- $S_{AEC}=1\frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$.
סמנו את כל הנקודות המתאימות.

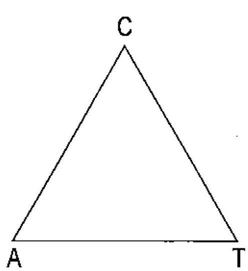
2. מצאו נקודה T כך ששטח משולש TOF יהיה גדול פי 2 משטח משולש KOF, כלומר $S_{TOF} = 2 \cdot S_{KOF}$.



א) כמה נקודות כאלה קיימות?

ב) מה המקום הגיאומטרי של כל הנקודות האלה?

3. נתון משולש CAT.

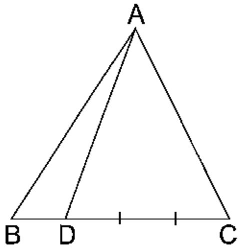


א) מצאו נקודה R שתקיים $\frac{S_{RAT}}{S_{CAT}} = \frac{1}{2}$.

ב) כמה נקודות כאלה קיימות?

ג) מה המקום הגיאומטרי של כל הנקודות האלה?

4. במשולש ABC, ‏AD מחלק את הצלע BC ביחס נתון. בכל סעיף שרטטו את המשולש, סמנו את נקודה D וחשבו את יחס השטחים: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$.



א. $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{3}$

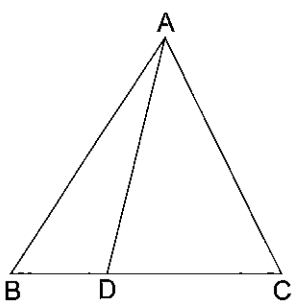
ב) $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$

ג) $\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3}$

ד) $\frac{BD}{DC}=1$. מה ניתן לומר על AD ועל שטחי המשולשים במקרה זה?

ה) D נקודה על BC.

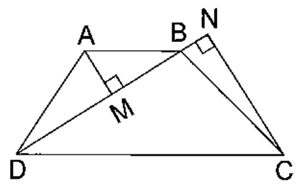
נסחו משפט המקשר בין יחס הקטעים ש-AD מקצה על הצלע BC ליחס שטחי המשולשים ש-AD יוצר. הוכיחו את המשפט.



הוכחתם:

> *משפט*: קטע המחבר אחד הקדקודים במשולש עם נקודה על הצלע ממול, מחלק את המשולש לשני משולשים שיחס שטחיהם כיחס אורכי שני הקטעים שהקטע הנתון מחלק את הצלע.

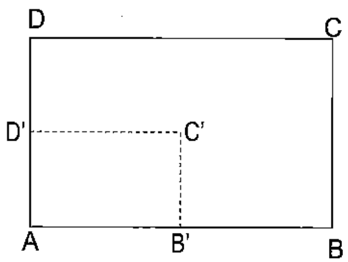
תרגילים



5. א) הוכיחו שאלכסון של טרפז מחלק את הטרפז לשני משולשים, שהיחס בין השטחים שלהם הוא כיחס בין אורכי בסיסי הטרפז. שרטטו.

ב) AM ו-CN אנכים לאלכסון DB בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$).

הוכיחו: $\frac{AB}{DC} = \frac{AM}{NC}$.

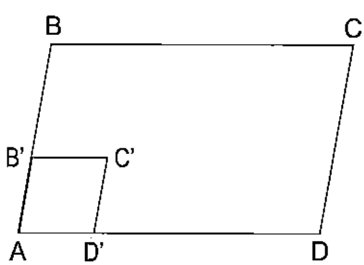


6. א) נתון: ABCD , AB'C'D' מלבנים.

AB = 8 יח' , AB' = 4 יח'

BC = 6 יח' , B'C' = 3 יח'

חשבו: $\frac{S_{ABCD}}{S_{AB'C'D'}}$



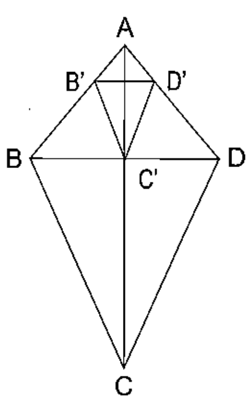
ב) נתון: ABCD, AB'C'D' מקביליות.

AB = 12 יח' , AB' = 4 יח'

AD = 16 יח' , AD' = 4 יח'

מצאו את היחס בין שטח המקבילית ABCD, לשטח המקבילית AB'C'D'.

רמז: שרטטו מקביליות חופפות ל-AB'C'D'.



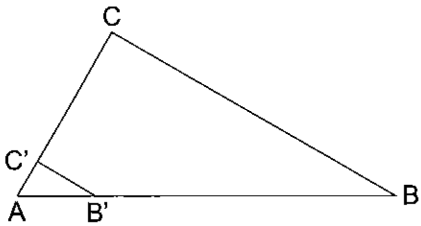
ג) נתון: ABCD, AB'C'D' דלתונים.

AC = 12.5 יח' , AC' = 5 יח'

BD = 7.5 יח' , B'D' = 3 יח'

פי כמה גדול S_{ABCD} מ-$S_{AB'C'D'}$?

ד) נתון: $AB' = a$; $AB = 5a$
$AC' = b$; $AC = 5b$



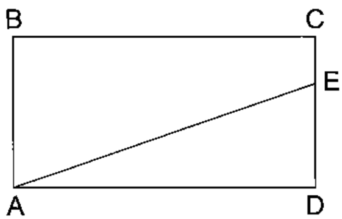
7. נתון: ABCD מלבן,

5 יח' = ED, 3 יח' = CE.

חשבו:

א) $\frac{S_{AED}}{S_{ABE}}$

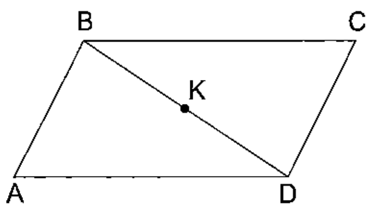
ב) $\frac{S_{AED}}{S_{ABCE}}$



8. ABCD מקבילית, K מפגש האלכסונים.

א) שרטטו קטע EF העובר דרך K כך ש-E על BC ו-F על AD.

ב) הוכיחו כי EF מחלק את שטח המקבילית לשני חלקים שווי שטח.

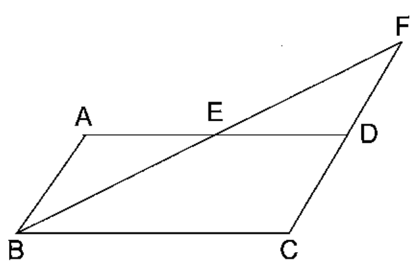


9. נתון: ABCD מקבילית, $AE = ED$.

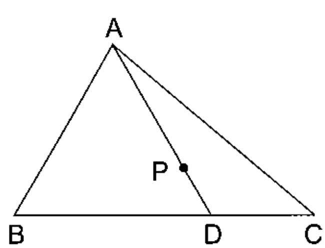
חשבו:

א) $\frac{S_{FED}}{S_{EDCB}}$

ב) $\frac{S_{FED}}{S_{FBC}}$



10. על-פי המסומן בשרטוט הוכיחו: $\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{BD}{DC}$.

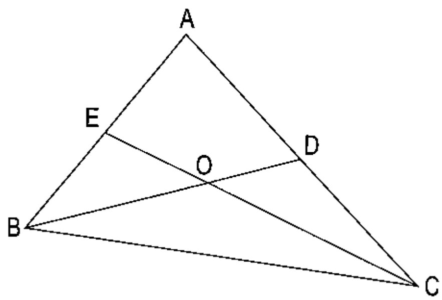


בשני התרגילים הבאים תוכיחו שני משפטים בעזרת יחס שטחים.
משפטים אלה תוכיחו בדרך אחרת בסעיף הבא.

11. נתון משולש ABC. ‏BD ו-CE הם שני תיכונים הנפגשים בנקודה O.

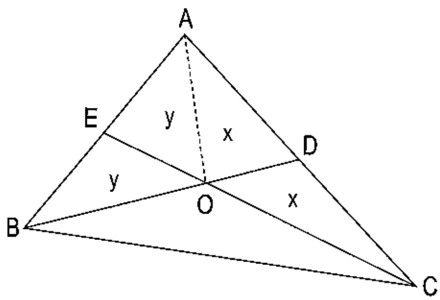
נוכיח כי: $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OE} = \frac{2}{1}$

קראו והשלימו את הוכחת הטענה.



א) $S_{CAE} = S_{BAD}$. נמקו.

ב) $S_{OAD} = S_{OCD} = x$. נמקו.



ג) $S_{OAE} = S_{OBE} = y$. נמקו.

ד) בטאו את S_{CAE} ואת S_{BAD} על-ידי x ו-y.

ה) הוכיחו כי $x = y$.

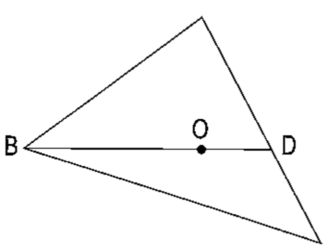
ו) הוכיחו: $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OE} = \frac{2}{1}$

הוכחתם:

משפט: נקודת הפגישה של שני התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 2:1.

12. O נקודה על התיכון BD, המקיימת $\frac{BO}{OD} = \frac{2}{1}$.

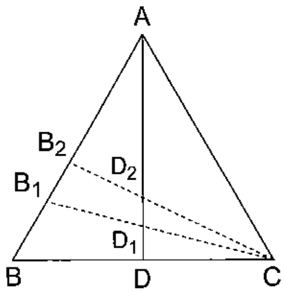
הסבירו מדוע כל תיכון אחר במשולש עובר דרך O.



הוכחתם:

משפט: שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

חוצה זווית במשולש



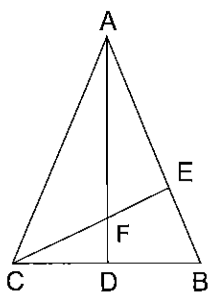
1. AD חוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים.

א) הוכיחו כי: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

ב) הנקודה B נעה על השוק בכיוון ל-A (ראו שרטוט).

שערו מה קורה ליחסים: $\frac{AB_1}{AC}$, $\frac{B_1D_1}{D_1C}$?

ומה קורה לקשר בין יחסים אלה?



2. אם יש באפשרותכם להשתמש בתוכנה של גיאומטריה דינמית ("הנדסה בתנועה", "המשער הגיאומטרי"),

בדקו את השערתכם.

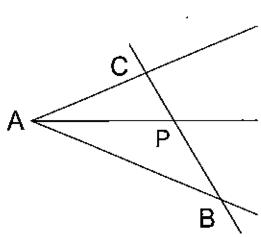
שרטטו משולש שווה שוקיים ABC וחוצה זווית הראש AD.

שרטטו קטע כלשהו מ-C החותך את AB ב-E.

סמנו ב-F את נקודת המפגש של AD ו-CE.

הזיזו את E ומדדו את היחסים $\frac{AC}{AE}$, $\frac{CF}{FE}$.

בתרגילים הבאים תחקרו יחסים אלה.



3. 2 ס"מ = PC , 3 ס"מ = PB.

א) הוכיחו כי: $\frac{S_{ACP}}{S_{ABP}} = \frac{2}{3}$.

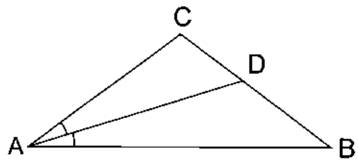
חוצה זווית הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה משוקי הזווית.

ב) AP חוצה זווית CAB. היעזרו בתכונה של חוצה זווית והוכיחו:

$$\frac{S_{ACP}}{S_{ABP}} = \frac{AC}{AB}$$

ג) השלימו: ____ = $\frac{AC}{AB}$.

4. במשולש ABC נתון כי AD חוצה זווית.



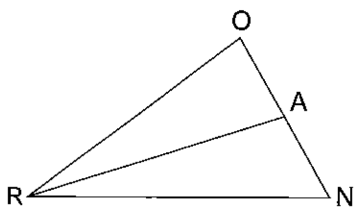
בטאו את היחס $\frac{S_{CAD}}{S_{BAD}}$ בשני אופנים והוכיחו כי $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}$.

הוכחתם:

משפט: חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע ממול ביחס הצלעות הכולאות את הזווית.

5. אורכי הצלעות המשולש RON הן:

8 יח' = RO ; 5 יח' = ON ; 12 יח' = RN.



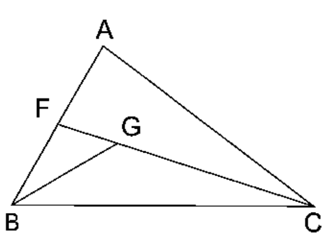
RA חוצה זווית ORN.

א) חשבו את אורכי הקטעים שחוצה הזווית מקצה על הצלע ON (כלומר את OA, AN).

ב) באיזה יחס מחלק חוצה הזווית NOR את חוצה הזווית RA? שרטטו את חוצה הזווית.

6. נסחו והוכיחו את המשפט ההפוך למשפט שקיבלתם בתרגיל 4.

7. נתון: ΔABC, CF חוצה את $\measuredangle ACB$, BG חוצה את $\measuredangle ABC$.



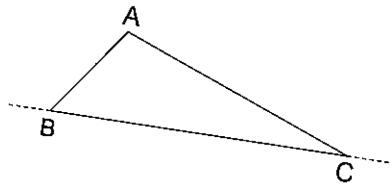
הוכיחו:

א) $\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{GC}$.

ב) מה תוכלו להסיק לגבי AG?

ג) היעזרו בסעיפים הקודמים ונסחו משפט בקשר למפגש של שלושת חוצי הזוויות.

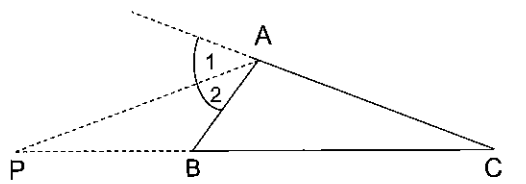
8. נתון: $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$.



א) תארו מה יש לעשות כדי למצוא על הקטע BC נקודה P, המקיימת $\frac{PB}{PC} = \frac{1}{2}$.

ב) ישנה נקודה נוספת המקיימת את התנאי הרשום בסעיף א'. נסו למצוא אותה. אם הצלחתם הסבירו.
בסעיף הבא תוכלו לבדוק זאת.

ג) AP חוצה את הזווית החיצונית של ΔABC. $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$.



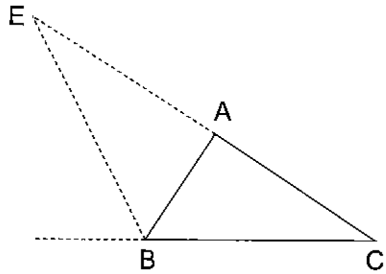
הוכיחו: $\frac{PB}{PC} = \frac{1}{2}$.

הדרכה: בטאו את היחס $\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}$ בשני אופנים. פעם אחת הראו שהיחס בין השטחים שווה ליחס בין PB ו-PC. פעם שנייה שרטטו אנכים מ-P לשוקי הזווית החיצונית והראו שיחס השטחים שווה ליחס שבין הצלעות AB ו-AC.
ניתן להכליל מקרה זה כאשר היחס איננו חצי.

משפט: חוצה זווית חיצונית במשולש מחלק את הצלע מול הזווית הפנימית המתאימה חלוקה חיצונית ביחס הצלעות הכולאות את הזווית הפנימית, כלומר: $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

9. אורכי צלעות המשולש ABC הן: CB = 6 יח' ; AC = 5 יח' ; AB = 4 יח'.

BE חוצה את הזווית החיצונית של ∢ABC, E על המשך AC.



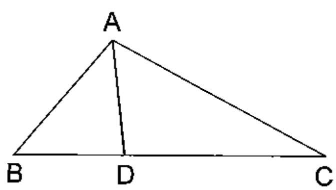
א) חשבו את היחס $\frac{AE}{EC}$.

ב) חשבו את AE.

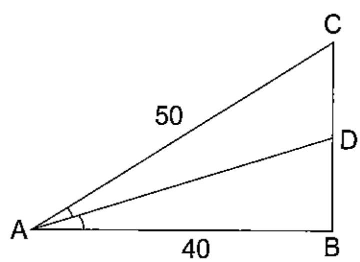
ג) רשמו את היחס בין הקטעים שמקצה חוצה הזווית הפנימית (∢ABC) על הצלע AC.

תרגילים

10. א) נתון: AB = 5 יח',
BC = 10 יח' ; AC = 8 יח'.
AD חוצה את ∢BAC.
חשבו את BD ואת DC.



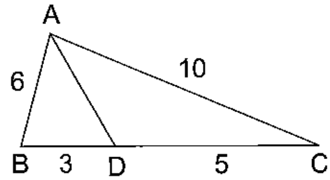
ב) ΔABC ישר זווית, AD חוצה ∢CAB.



(i) חשבו את גודלם של הקטעים CD, DB.

(ii) מה היחס בין שטח המשולש ABD לשטח המשולש ACD?

11. לפי הנתונים בשרטוט שלפניכם, האם AD חוצה את ∢BAC? נמקו.

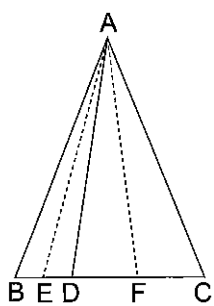


12. ΔABC ישר זווית, $\measuredangle B = 90°$.

א) AD חוצה ∢BAC (D על BC).
מי גדול יותר, BD או DC? נמקו.

ב) BE חוצה את ∢B (E על AC), $\measuredangle C = 50°$.
מי גדול יותר, AE או EC? נמקו.

13. נתון: AB = AC, D נקודה כלשהי על BC.

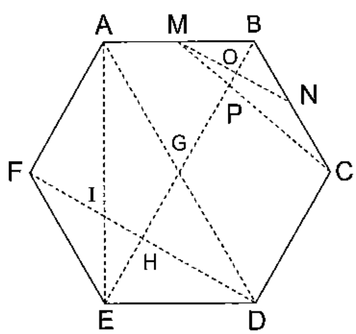


AE חוצה ∢BAD, AF חוצה ∢DAC.

א) הוכיחו: $\frac{BE}{ED} = \frac{FC}{DF}$.

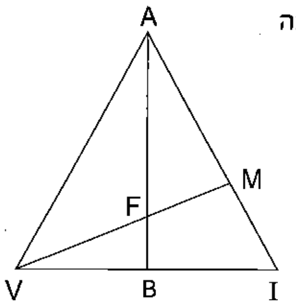
ב) נתון: $\frac{BE}{ED} = \frac{1}{7}$. מה היחס: $\frac{DF}{FC}$?

14. נתון: ABCDEF משושה משוכלל.



AM = MB, BN = NC. חשבו את היחסים:

א) $\frac{MO}{ON}$ ב) $\frac{MP}{PC}$ ג) $\frac{EH}{HG}$ ד) $\frac{EI}{IA}$



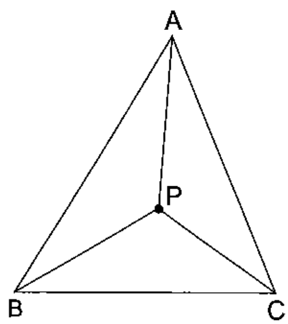
15. AVI משולש שווה שוקיים (AV = AI), AB גובה לבסיס.

12 יח' = AV , 3 יח' = VB , 4 יח' = MI.

א) האם VM חוצה זווית ∢AVI? נמקו.

ב) חשבו את אורכי הקטעים AF, FB.

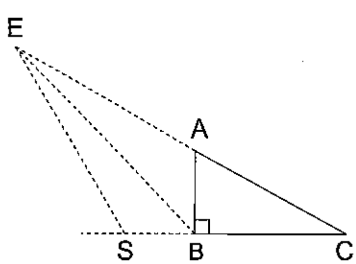
16. חוצה זווית חדה במשולש ישר זווית מחלק את המשולש לשני משולשים. האם ייתכן ששטחי שני המשולשים שווים? אם כן, הוכיחו. אם לא, לאיזה משולש שטח גדול יותר.



17. א) P נקודה כלשהי בתוך המשולש ABC. חוצי הזוויות APB, APC, CPB חותכים בהתאמה את הצלעות AB, AC, BC בנקודות F, E, D.

שרטטו את חוצי הזוויות והוכיחו כי: $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1$.

ב) האם המכפלה תשתנה אם P מחוץ למשולש?



18. ABC משולש ישר זווית שבו

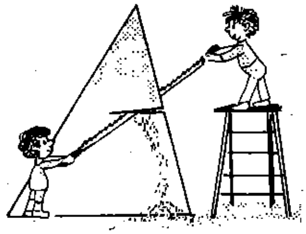
8 יח' = CB , 6 יח' = AB.

EB חוצה את הזווית החיצונית ל-∢ABC.

E על המשך AC, S על המשך BC,

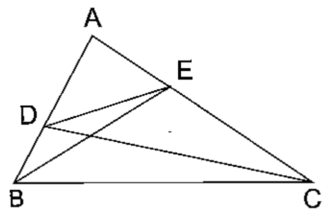
AB = SB, ES = AE.

חשבו את היקף המרובע EABS.



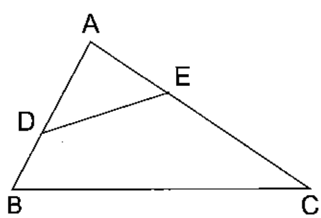
משפט תלס

1. א) באיזה תנאי יתקיים $S_{EDB} = S_{EDC}$? רשמו את מה שקיבלתם כמשפט והוכיחו.



ב) הוכיחו את המשפט ההפוך: אם $S_{EDC} = S_{EDB}$ אז $DE||BC$.

2. א) העבירו את הקטע BE והוכיחו $\frac{AD}{DB} = \frac{S_{EDA}}{S_{EDB}}$. נמקו.



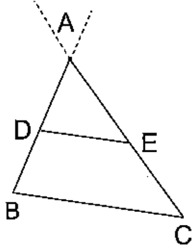
ב) העבירו את הקטע CD והוכיחו: $\frac{AE}{EC} = \frac{S_{EDA}}{S_{EDC}}$. נמקו.

ג) הוכיחו שאם $DE||BC$ אז $\frac{S_{EDA}}{S_{EDC}} = \frac{S_{EDA}}{S_{EDB}}$ ולהיפך, נמקו.

ד) הסבירו מדוע אם $DE||BC$, אז $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ ולהיפך (העיזרו בסעיף ג').

שוויון בין יחסים נקרא גם **פרופורציה**.
אומרים למשל ש-EC, AE, DB, AD (משאלה 2 – סעיף ד') הם קטעים פרופורציוניים.

3. בתרגילים 1 ו-2 הוכחתם את המשפטים הבאים:



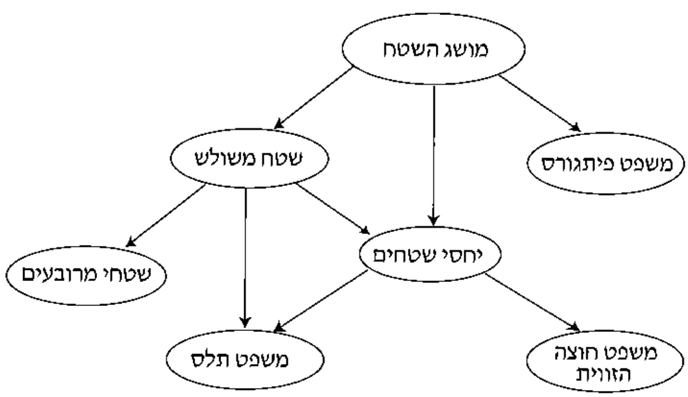
משפט תלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים על שוקי הזווית ארבעה קטעים פרופרציונים.

א) רשמו נתון וצ"ל לפי השרטוט.

משפט הפוך לתלס: שני ישרים המקצים ארבעה קטעים פרופורציוניים על שוקי הזווית, מקבילים.

ב) רשמו נתון וצ"ל לפי השרטוט.

מה למדנו?



בשאלה 4 יש הרחבה של משפט תלס.

4. הזיזו את הישר DE שבשרטוט (מתרגיל 3) במקביל ל-BC אל מחוץ למשולש ($DE||BC$).

הוכיחו: AD, AC, AE, AB קטעים פרופורציוניים, כלומר $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$.

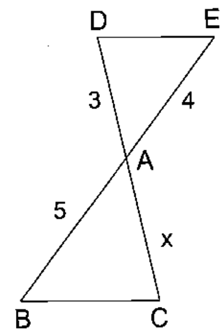
סמנו על AB נקודה F, כך ש- AE = AF.

סמנו על AC נקודה G, כך ש- AD = AG, וחברו את FG.

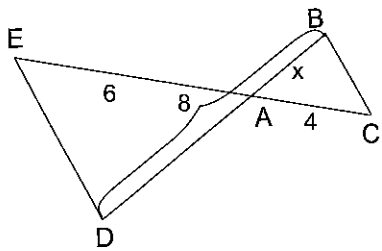
5. בכל שרטוט מתקיים $DE||BC$.

מצאו את x (שימו לב שיש נתונים נוספים), והשיבו על השאלה ליד הסעיף.

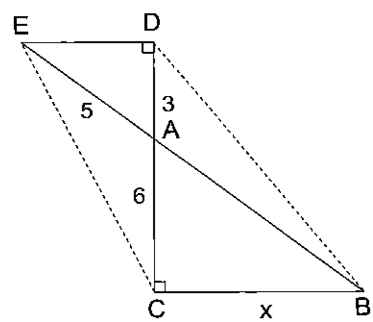
א) חשבו $\frac{AC}{AD}$.



ב)

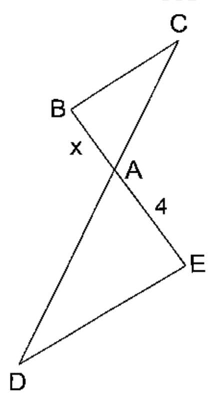


ג) האם $DB \parallel EC$?



ד) נתון: $\frac{BA}{AE} = \frac{2}{3}$.

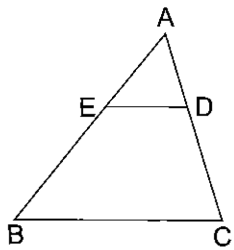
חשבו: $\frac{DA}{AC}$.



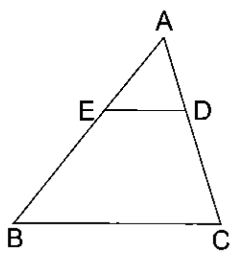
6. א) M נקודת הפגישה של אלכסוני טרפז.
רשמו שוויון יחסים בין ארבעת הקטעים שנוצרו על האלכסונים והוכיחו.
ב) מה תוכלו לומר על הקטעים, אם הטרפז שווה שוקיים?

תרגילים

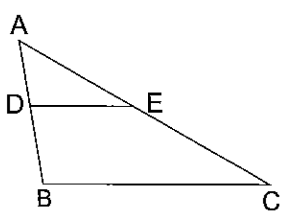
7. בכל סעיף $ED||BC$.



א) 6 יח' = AE , 10 יח' = EB , 5 יח' = AD.
חשבו את AC.

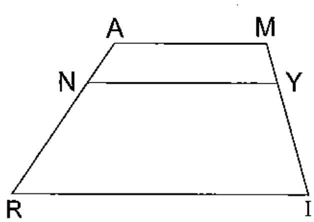


ב) 3 יח' = AD , 9 יח' = DC , 15 יח' = AB.
חשבו את AE, EB.



ג) 6 יח' = AD , 8 יח' = AE
BD קטן ב-3 יח' מ-EC.
חשבו את DB ואת EC.

8. $AMIR$ טרפז, $NY||RI$.

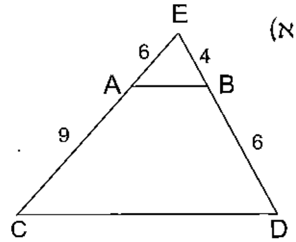


הוכיחו: $\frac{AN}{NR} = \frac{MY}{YI}$.

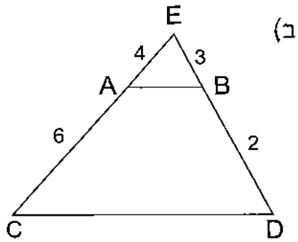
רמז: העבירו את אחד מאלכסוני הטרפז.

9. בהסתמך על הנתונים שבשרטוט, קבעו באילו מהשרטוטים הקטעים AB ו-CD מקבילים זה לזה, ונמקו.

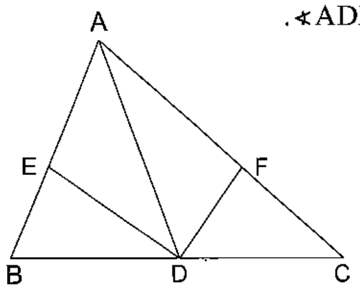
א)



ב)



10. נתון: ΔABC, DF חוצה $\sphericalangle ADC$, DE חוצה $\sphericalangle ADB$.

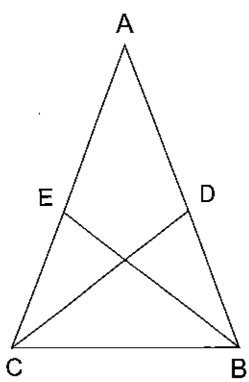


הוכיחו:

א) אם EF||BC אז AD תיכון.

ב) אם AD תיכון אז EF||BC.

11. נתון: ΔABC, CD חוצה $\sphericalangle ACB$, BE חוצה $\sphericalangle ABC$.



הוכיחו:

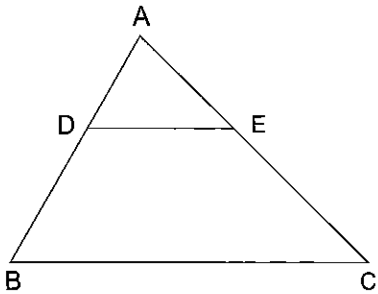
א) אם ΔABC הוא שווה שוקיים אז DE||BC.

ב) אם DE||BC אז ΔABC שווה שוקיים.

תלס ומסקנותיו (גם קטע אמצעים וגם תיכונים)

1. נתון: $DE||BC$.

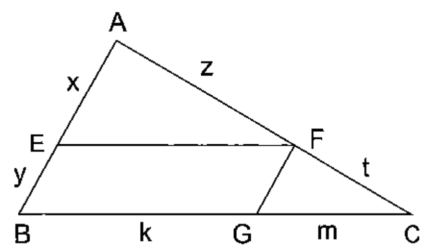
8 יח' = AD ; 12 יח' = DB ; 30 יח' = AC.



א) חשבו את EC.

ב) בדקו, על-פי התוצאות המספריות, אם מתקיים: $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{BD}$.

2. נתון: $EF||BC$, $FG||AB$.



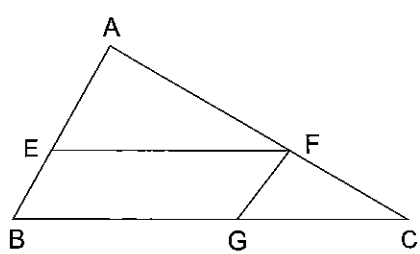
א) השלימו: ____ = ____ = $\frac{y}{x}$.

ב) על סמך סעיף א' הוכיחו כי: $\frac{m+k}{k} = \frac{t+z}{z} = \frac{y+x}{x}$.

ג) רשמו מחדש את השוויון שרשמתם בסעיף ב': ____ = ____ = $\frac{AB}{AE}$.

ד) הסבירו מדוע BG = EF.

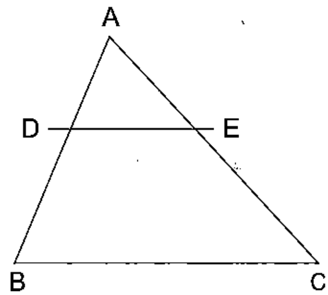
ה) השלימו: $\frac{}{EF} = \frac{AC}{} = \frac{AB}{AE}$.



בתרגיל 2 הוכחתם את המשפט הבא:

משפט: ישר מקביל לאחת מצלעות המשולש "חותך" ממנו משולש כך, שהיחס בין הצלעות המתאימות בשני המשולשים שווה.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$



3. המספרים w, z, y, x הם ארבעה מספרים פרופורציוניים, כלומר: $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}$.

הסבירו והוכיחו את הפרופורציות הבאות:

א) $\frac{y}{x}=\frac{w}{z}$ ב) $\frac{x+y}{y}=\frac{z+w}{w}$

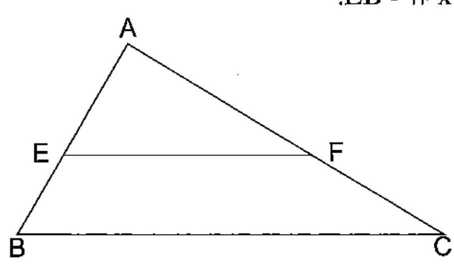
ג) $\frac{x}{y+x}=\frac{z}{w+z}$ ד) $\frac{x-y}{y}=\frac{z-w}{w}$

4. בכל סעיף חשבו את ערכו של x והשיבו על השאלה הנוספת.

א) נתון: EF||BC,

AF = 8 יח׳, AB = 10 יח׳,

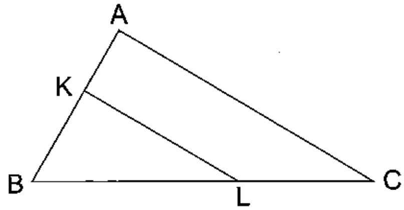
FC = 4 יח׳, EB = x יח׳.



אם: BC = 15 יח׳, מה יהיה אורכו של EF?

ב) נתון: $KL || AC$,

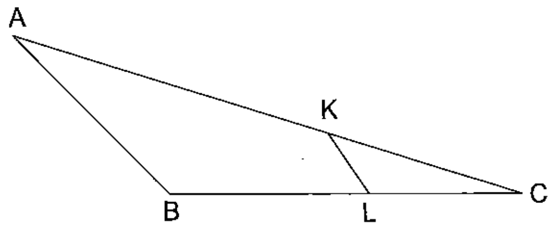
$AK = 4$ יח' , $BL = 16$ יח' , $BK = x$ יח' , $LC = x$ יח'.



פי כמה גדול AC מ-KL?

ג) נתון: $KL || AB$,

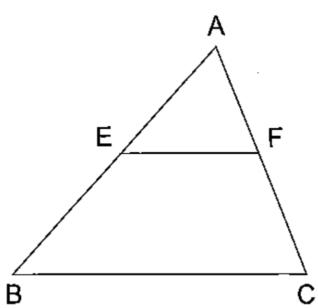
$AK = 6$ יח' , $LC = 3$ יח' , $KC = 4$ יח' , $BC = x$ יח'.



פי כמה גדול AB מ-KL?

הגדרה: קטע, המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש, נקרא **קטע אמצעים**.

5. EF קטע אמצעים במשולש.



הוכיחו:

א) $EF || BC$. (ניתן להיעזר במשפט ההפוך לתלס.)

ב) EF שווה למחצית BC. (ניתן להיעזר במשפט שבתרגיל 2.)

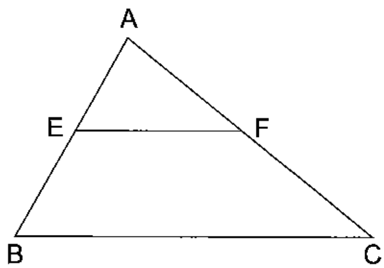
הוכחתם בתרגיל 5 משפט שייתכן ולמדתם אותו בעבר.

משפט: קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

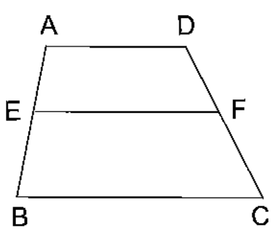
6. נסחו והוכיחו את המשפט ההפוך למשפט על קטע אמצעים במשולש.

7. הוכיחו את המשפט:

משפט: ישר החוצה צלע אחת ומקביל לצלע שניה, חוצה גם את הצלע השלישית.



8. EF קטע אמצעים במשולש ABC.
   א) מצאו $\frac{EF}{BC}$.
   ב) שרטטו גבהים מ-A ל-EF ול-CB.
   מה יחס הגבהים?
   ג) הוכיחו: $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$.



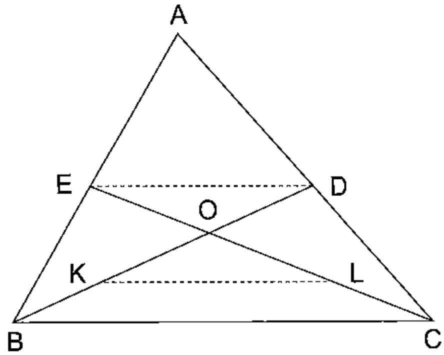
9. EF קטע אמצעים בטרפז ABCD.
   א) העבירו קטע AF והמשיכו אותו עד לנקודת חיתוכו עם המשך BC.
   ב) בטאו את אורך קטע האמצעים בטרפז בעזרת הבסיסים.
   ג) השלימו את המשפט שהוכחתם בשני הסעיפים.
   קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה ל-____________________.
   ד) נסחו משפט הפוך.
   ה) הוכיחו את המשפט ההפוך.

10. הוכיחו: אם קטע חוצה שוק אחד בטרפז ומקביל לבסיסים, אז הוא קטע אמצעים בטרפז.
   העבירו אחד מאלכסוני הטרפז.

על תכונת התיכונים במשולש

בסעיף קודם הופיעה הוכחה של תכונת התיכונים בעזרת יחסי שטחים, כאן תוכיחו את התכונה בעזרת קטע אמצעים.

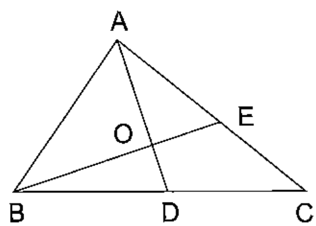
11. BD ו-CE תיכונים הנפגשים בנקודה O. KL קטע אמצעים ב-ΔOBC.



א) הוכיחו כי EKLD מקבילית.

ב) הוכיחו כי נקודת הפגישה O מחלקת כל תיכון ביחס של 2:1.

12. O נקודת הפגישה של התיכונים AD ו-BE. הסבירו מדוע התיכון ל-AB עובר דרך O?



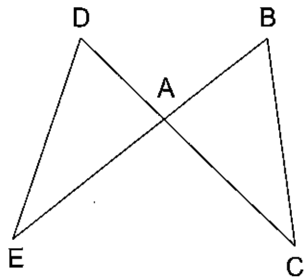
בתרגיל 12 הוכחתם את המשפט:

משפט: שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

13. הוכיחו:

משפט: אם שני תיכונים במשולש שווים, אז המשולש שווה שוקיים.

תרגילים



14. בשרטוט נתון: $\Delta ABC \cong \Delta ADE$,

$AE = 4$ יח', $AB = 3$ יח', $BE \perp CD$.

אם נחבר בזה אחר זה את אמצעי הצלעות

BC ,AC ,AE ,DE ,AD ,AB יתקבל משושה.

חשבו את היקף המשושה, את שטח המרובע BCED, ואת שטח המשושה.

15. הוכיחו כי שלושת קטעי האמצעים במשולש יוצרים 4 משולשים חופפים.

16. אם באפשרותכם להשתמש בתוכנה של גיאומטריה דינמית ("הנדסה בתנועה", "המשער הגיאומטרי") תוכלו להחליף את התרגיל הבא בפעילות שהוראותיה כתובות בנספח I, פעילות 5, "הנדסה בתנועה" עמוד 191, או בנספח II, פעילות 4, "המשער הגיאומטרי", עמוד 206.

א) מה תוכלו לומר על המרובע המתקבל מחיבור "בזה אחר זה" את אמצעי הצלעות של מרובע? שרטטו, בדקו והוכיחו.

ב) מה תוכלו לומר על המרובע המתקבל מחיבור אמצעי הצלעות כנ"ל, אם אלכסוני המרובע הנתון מאונכים זה לזה?

ג) מה תוכלו לומר על המרובע המתקבל מחיבור אמצעי הצלעות כנ"ל, אם ידוע שאלכסוני המרובע הנתון שווים זה לזה?

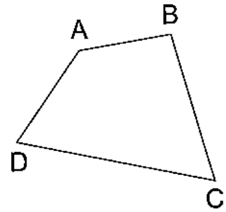
ד) אילו תנאים צריכים לקיים האלכסונים במרובע, כדי שאם נחבר את אמצעי צלעותיו כנ"ל, יתקבל ריבוע? נמקו.

17. קבעו איזה סוג של מרובע יתקבל אם נחבר בזה אחר זה את אמצעי הצלעות של:

א) דלתון   ב) מלבן   ג) מעוין   ד) ריבוע   ה) מקבילית

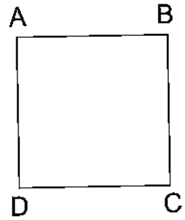
18. במרובע ABCD חסמו מרובע OFER, שקדקודיו הם אמצעי צלעות ABCD. קבעו איזה מרובע התקבל, ואם ניתן, חשבו את אורכי צלעות המרובע OFER על סמך הנתונים. אם לא, נמקו מדוע לא ניתן לחשב.

א) $AC = BD = 6$ יח'



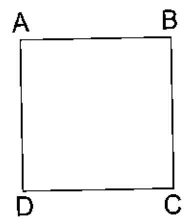
ב) ABCD ריבוע

$BD = 10$ יח'



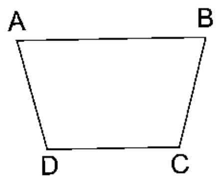
ג) ABCD ריבוע

$AB = 6$ יח'



ד) ABCD טרפז שווה שוקיים

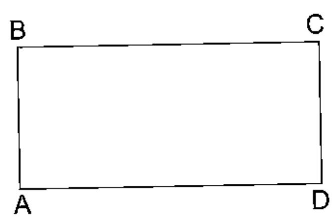
$AC = 6$ יח'



ה) ABCD מלבן

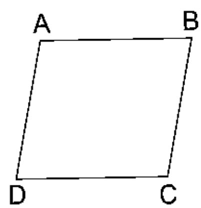
$AB = 6$ יח'

$BC = 8$ יח



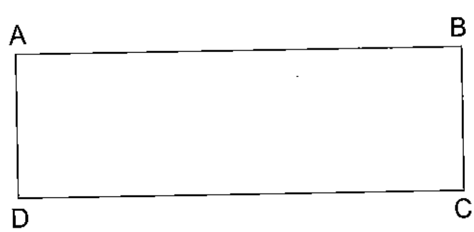
ו) ABCD מעוין

$BC = 6$ יח'



ז) ABCD מלבן

$AC = 12$ יח'



סיכום

סיכום לארבעת הסעיפים:

יחסי שטחים, חוצה זווית במשולש, משפט תלס, תלס ומסקנותיו.

בארבעת הסעיפים האחרונים למדתם את המשפטים:

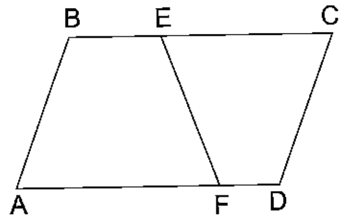
- קטע המחבר אחד הקדקודים במשולש עם נקודה על הצלע ממול, מחלק את המשולש לשני משולשים שיחס שטחיהם כיחס אורכי שני הקטעים שהקטע הנתון מחלק את הצלע.
- חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית, ביחס השווה ליחס בין אורכי הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה, והמשפט ההפוך לו.
- חוצה זווית חיצונית במשולש מחלק את הצלע הפנימית המתאימה חלוקה חיצונית ביחס הצלעות הכוללות את הזווית.
- אם קטע מקודקוד של משולש מחלק את הצלע שמולו, ביחס השווה ליחס בין אורכי הצלעות הנפגשות בקודקוד זה, אז הקטע חוצה זווית במשולש.
- משפט תלס: שני ישרים מקבילים מקצים על שוקיים של זווית קטעים פרופורציוניים, ולהיפך, אם שני קטעים מקצים על שוקיים של זווית קטעים פרופורציוניים, אז הם מקבילים.
- ישר מקביל לאחת מצלעות משולש "חותך" ממנו משולש כך, שהיחס בין הצלעות המתאימות בשני המשולשים שווה.
- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה, והמשפט ההפוך לו.
- ישר החוצה צלע אחת ומקביל לצלע שנייה, חוצה גם את הצלע השלישית.
- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם, והמשפט ההפוך לו.
- נקודת פגישת התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 2:1.
- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

תרגילים נוספים לארבעת הסעיפים:

יחסי שטחים, חוצה זווית במשולש, משפט תלס, תלס ומסקנותיו

1. א) נתון: ABCD מקבילית

$BE =$ 4 יח' ; $EC =$ 6 יח' ; $FD =$ 2 יח'.



חשבו: $\frac{S_{ABEF}}{S_{ECDF}}$

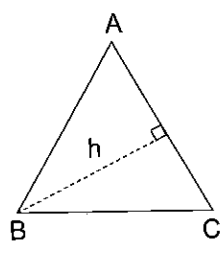
ב) האם תשובתכם תשתנה אם נגדיל את FD ביחידה אחת ואת BE נגדיל גם כן ביחידה אחת? (הנתון $AD =$ 10 יח', נשמר).

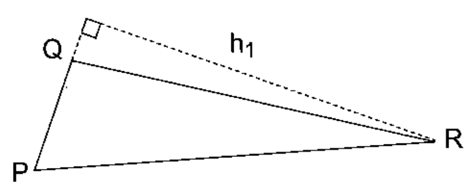
ג) ABCD מקבילית (היעזרו בשרטוט בסעיף א').

$BC \geq 6$, $BE =$ 4 יח' , $FD =$ 2 יח'.

הוכיחו: $1 < \frac{S_{ABEF}}{S_{ECDF}} \leq 2$.

2. S_{PQR} גדול ב-40% מ-S_{ABC}. PQ קטן ב-20% מ-AC.



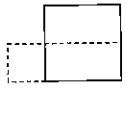


פי כמה גדול h_1 מ-h?

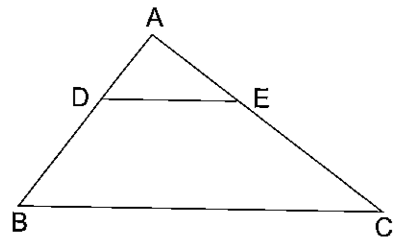
3. נתונים מלבן וריבוע בעלי אותו היקף.

הוכיחו כי שטח הריבוע גדול משטח המלבן.

רמז: היעזרו בשרטוט.



4. נתון: $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$.



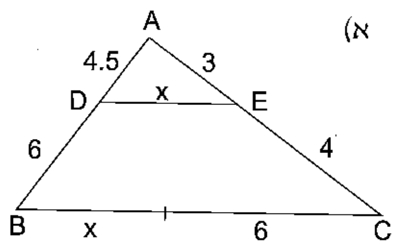
א) מצאו $\frac{AD}{AB}=$ ____ , $\frac{DE}{BC}=$ ____ .

ב) שרטטו גבהים מ-A ל-DE ול-BC. מה יחס הגבהים?

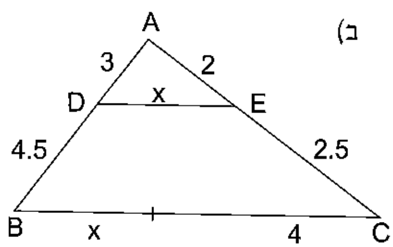
מצאו: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.

5. אם אפשר, חשבו את x.

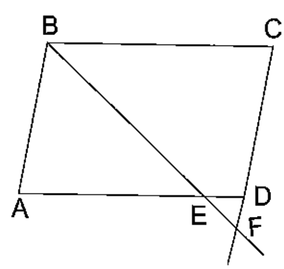
א)



ב)



6. אם באפשרותכם להשתמש בתוכנה של גיאומטריה דינמית, "הנדסה בתנועה", תוכלו להחליף תרגיל זה בפעילות שהוראותיה כתובות בנספח I, פעילות 6, עמוד 192.

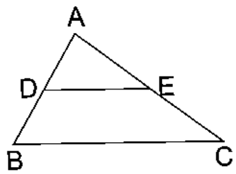


E נקודה על AD במקבילית ABCD.

הוכיחו כי $AE \cdot CF$ הוא גודל קבוע, השווה למכפלת אורכי הצלעות.

7. נתון: DE קטע אמצעים ב-ΔABC.

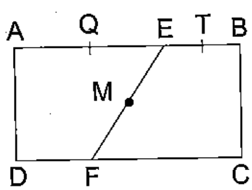
24 = S_{ABC} יח"ר, 8 = BC יח'.



א) חשבו את S_{ADE}.

ב) האם ניתן לוותר על אחד מן הנתונים?
אם כן, על איזה נתון?
אם לא, הסבירו.

8. ABCD מלבן. EF עובר דרך M נקודת מפגש האלכסונים במלבן. Q אמצע AE, T אמצע EB.



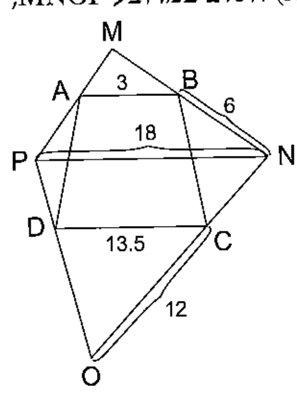
א) חברו את M עם T ועם Q וציינו באילו משולשים הם מהווים קטעי אמצעים.

ב) חשבו פי כמה גדול שטח המלבן משטח ΔQMT.

9. א) חיברו אמצעי צלעות של מרובע בזה אחר זה והתקבל מלבן.
האם ניתן להסיק שהמרובע הנתון הוא מעוין? דלתון? נמקו.

ב) חיברו אמצעי צלעות של מרובע בזה אחר זה והתקבל מעוין.
האם ניתן להסיק שהמרובע הנתון הוא מלבן? נמקו.

10. טרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ חסום במרובע MNOP, כך שמתקיימים: $PN \parallel AB$.



אם אפשר, חשבו על סמך הנתונים את אורכי הקטעים MB, AP ו-NC.

11. א) יוסי קבע, כי במשולש שווה-צלעות נקודת המפגש של חוצי הזוויות היא גם נקודת המפגש של התיכונים. האם הוא צדק? נמקו.

ב) רמי טען, כי גם במשולש שווה-שוקיים נקודת המפגש של חוצי הזוויות היא גם נקודת המפגש של התיכונים. האם הוא צדק? נמקו.

ג) איך נשנה משולש שווה הצלעות, כך שיהפוך למשולש שווה-שוקיים ונקודת המפגש של התיכונים לא תשנה את מיקומה? הסבירו.

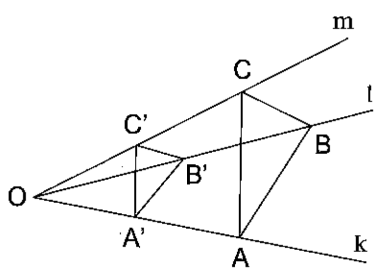
12. ABCD מקבילית. E ו-F אמצעי הצלעות AB ו-AD בהתאמה.

הראו, כי CE ו-CF מחלקים את האלכסון BD לשלושה קטעים שווים.

13. משפט דזרג (Desargues).

הערה "ישרים מקבילים" במרחב, הם שני ישרים הנמצאים במישור אחד ומקבילים בו.

נתונים שלושה ישרים l ,k ו-m, העוברים דרך נקודה אחת O (ראו שרטוט).

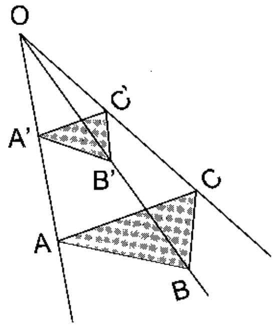


כמו כן נתון: $AB||A'B'$, $BC||B'C'$.

א) הוכיחו כי: $AC||A'C'$

בתרגיל זה הוכחתם מקרה פרטי של משפט כללי יותר, הנקרא **משפט דזרג** (Desargues).

משפט: אם נתונים שני משולשים (במישור או במרחב), והמשכי הישרים המחברים קודקודים מתאימים נפגשים בנקודה, אז המשכי הצלעות המתאימות בשני המשולשים נפגשים על אותו ישר, בתנאי שהם אכן נפגשים.



ב) המשפט ההפוך למשפט דזרג נכון אף הוא.
נסחו את המשפט ההפוך. נסו לבדוק באופן ניסיוני (על-ידי שרטוט) את נכונות המשפט במישור.

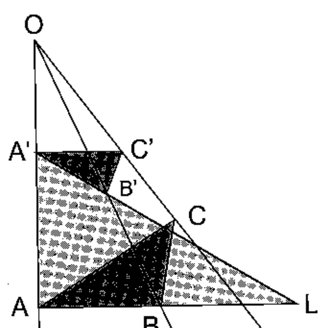
ג) האם ייתכנו שני ישרים במרחב שאינם מקבילים ואינם נפגשים? הסבירו.

ד) הגדירו מישורים מקבילים.

הערה אם שני מישורים אינם מתלכדים ואינם מקבילים, הם נפגשים בישר אחד.

14. א) הביאו דוגמא ממשית מהסביבה המיידית שלכם להמחשת שתי הטענות הכלולות בהערה זו.

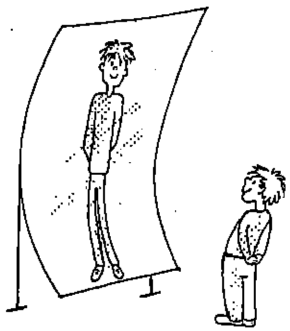
ב) הוכיחו את משפט דזרג במרחב.



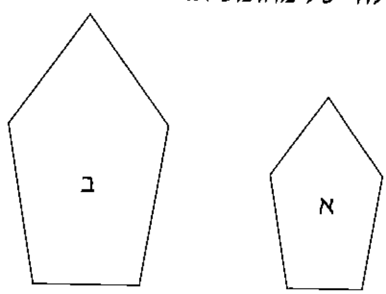
רמז: L נמצאת במישור המשולש ABC, וגם במישור משולש A'B'C'.
נמקו.

דמיון

דמיון משולשים



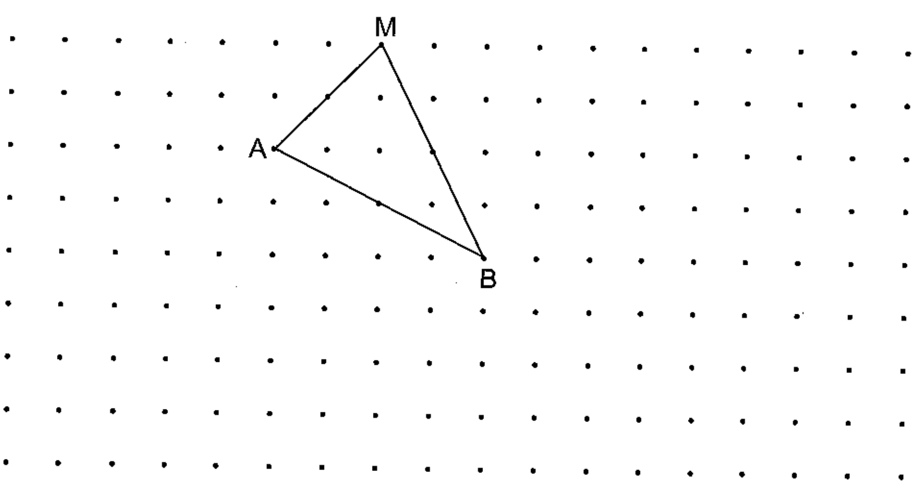
1. מחומש ב הוא "הגדלה" של מחומש א.



א) שרטטו מחומש שלישי שהוא "הגדלה" של מחומש ב.

ב) שרטטו מחומש נוסף שהוא "הקטנה" של מחומש א.

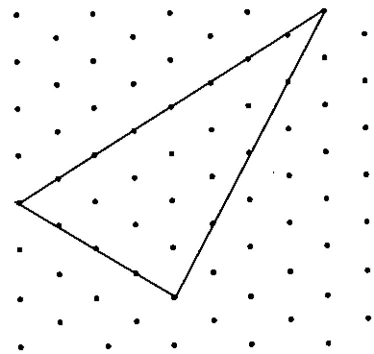
2. א) שרטטו משולש MCD שצלעותיו הן הגדלה פי 2 מצלעות המשולש MAB.



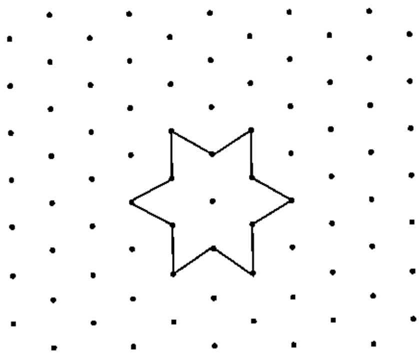
ב) מה ניתן לומר על זוויות שני המשולשים ΔMAB ו-ΔMCD?

3. הגדילו או הקטינו כרצונכם את הצורות הבאות לפי הרשום ליד הצורה.

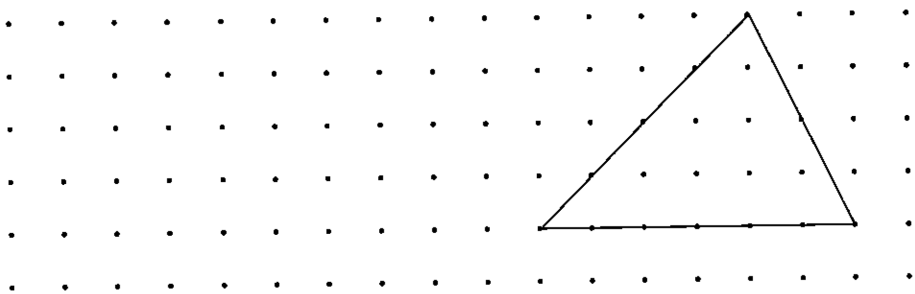
א) להקטין



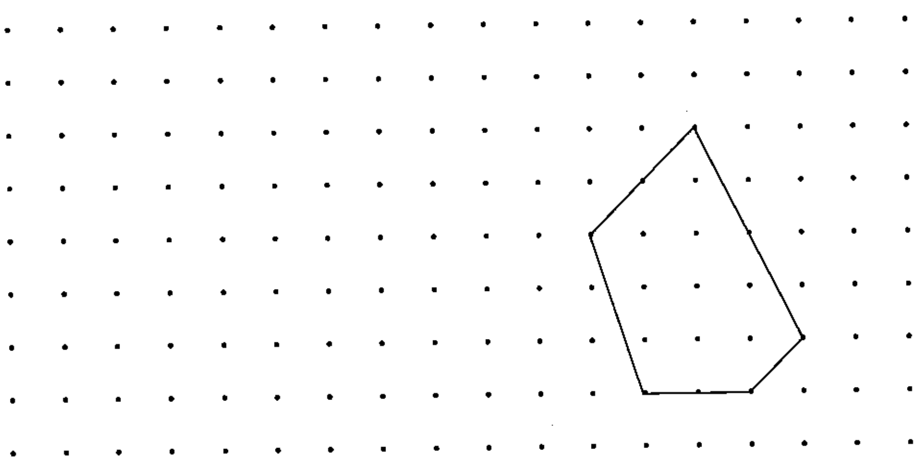
ב) להגדיל



ג) להקטין



ד) להגדיל

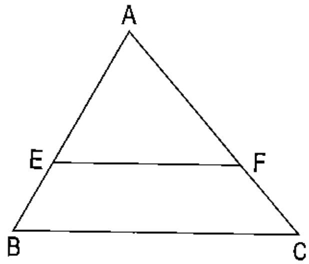


כאשר "מגדילים"/"מקטינים" את המצולעים, שומרים על יחס קבוע בין צלעות מתאימות של שני המצולעים. כמו כן שומרים על שוויון הזוויות. שני מצולעים כאלה נקראים **דומים**.

נעסוק תחילה במשולשים דומים.

במסקנות ממשפט תלס הוכחנו שאם מעבירים קטע EF מקביל ל-BC אז מתקיימות **הפרופורציות** הבאות:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}.$$



כמו כן זוויות משולש ABC שוות בהתאמה לזוויות המשולש AEF.

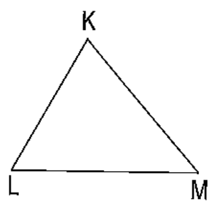
נשרטט משולש KLM החופף למשולש AEF כלומר:

$KL = AE$

$KM = AF$

$LM = EF$

מכאן ניתן להסיק כי: $\frac{KL}{AB}=\frac{KM}{AC}=\frac{LM}{BC}$.



גם זוויות ΔABC שוות בהתאמה לזוויות ΔKLM, נמקו ורשמו את שוויון הזוויות.

למעשה, בין ΔKLM ו-ΔABC קיימת התאמה שבה הצלעות המתאימות פרופורציוניות והזוויות המתאימות שוות. משולשים כאלה נקראים **משולשים דומים**.

מסמנים: $\Delta ABC \sim \Delta KLM$.

הערות

- כמו ברישום חפיפת משולשים, כך גם ברישום הדמיון, נקפיד על רישום הקודקודים בהתאמה.
- השרטוטים אינם תמיד על-פי הנתונים הרשומים. לעתים בגלל גודל הצלעות הנתונות ולעתים כדי שהדמיון יקבע על סמך הנתונים ולא על סמך מראית עין.

4. א) נתון $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

$AB = 3$ יח' , $DE = 4.5$ יח' , $AC = 10$ יח' , $EF = 6$ יח'

(i) השלימו: $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{} = \frac{}{DE}$.

(ii) בחרו פרופורציה מתאימה וחשבו את DF.

(iii) בחרו פרופורציה מתאימה וחשבו את BC.

ב) נתון: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

השלימו: $\frac{AC}{DF} = \frac{}{EF} = \frac{AB}{}$

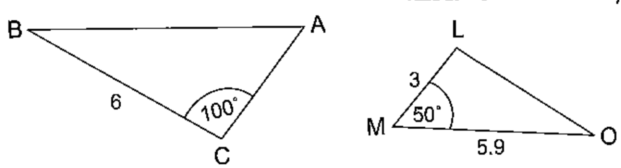
$DE =$ ____	$AB = 3$ ס"מ
$DF = 12$ ס"מ	$AC = 4$ ס"מ
$EF = 15$ ס"מ	$BC =$ ____

5. נתון: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. $DE = f$, $AB = c$, $EF = d$, $BC = a$

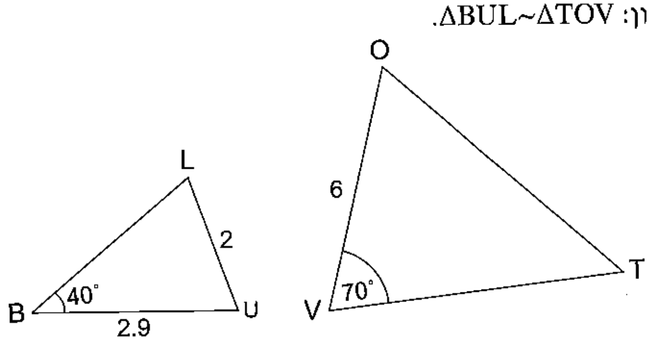
רשמו שתי פרופורציות אפשריות בין a ; c ; d ; f.

6. השלימו, אם אפשר, את הגדלים החסרים של הצלעות והזוויות על-פי הנתונים שבשרטוט. אם אי-אפשר, נמקו.

א) נתון: $\Delta ABC \sim \Delta MOL$.



ב) נתון: $\Delta BUL \sim \Delta TOV$.

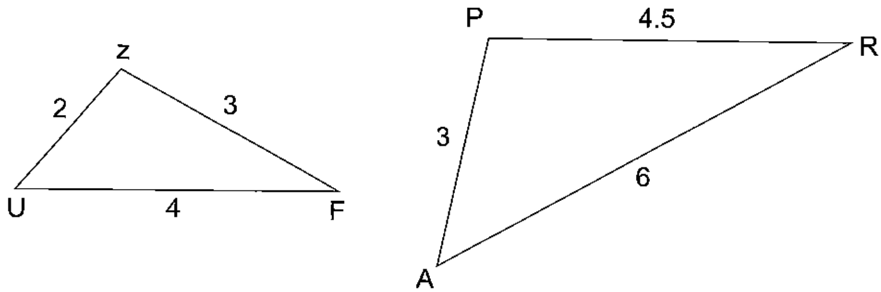


הגדרה: היחס הקבוע בין הצלעות המתאימות של משולשים דומים, נקרא **יחס הדמיון.**

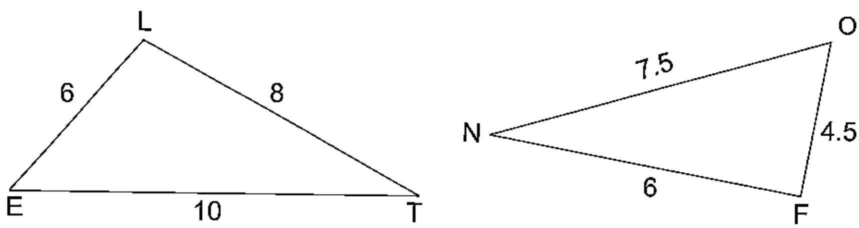
7. בכל סעיף נתונים שני משולשים דומים.

קבעו את ההתאמה ורשמו את יחס הדמיון.

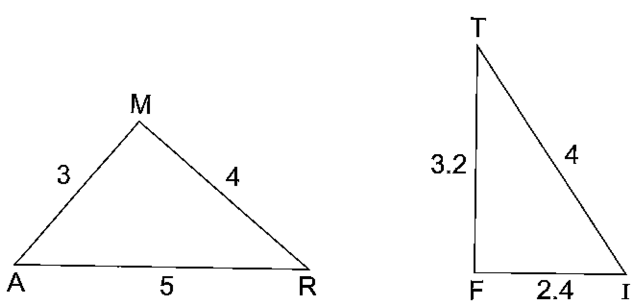
א)



ב)

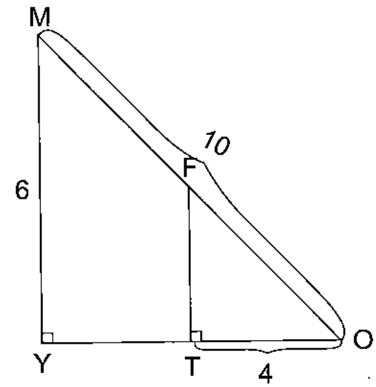


ג)



8. א) הראו ששני המשולשים ΔFTO, ΔMYO דומים.

ב) רשמו את יחס הדמיון.



9. נתון: $\Delta RAM \sim \Delta KOL$.

א) הוסיפו נתון כך שיתקבל $\Delta RAM \cong \Delta KOL$.

ב) חפיפת משולשים היא מקרה פרטי של דמיון משולשים.
מהו יחס הדמיון במשולשים חופפים?

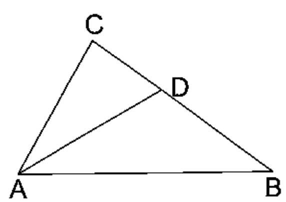
שימו לב! כעת ניתן להסביר את הסימן $\cong$ שמשמעותו המשולשים דומים ושווים בשטח.

תרגילים

10. א) AD חוצה זווית. $\Delta ABC \sim \Delta CAD$. חשבו את זוויות משולש ABC.

רמז: סמנו את $\measuredangle DAB$ x.

ב) נתון: CD = 3.7 יח׳, AC = 6 יח׳.
חשבו את אורכי הצלעות הנוספות בשרטוט.



11. קבעו לגבי כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה. אם כן, נמקו (על-פי הגדרת דמיון משולשים). אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א) כל שני משולשים שווי צלעות – דומים.

ב) כל שני משולשים שווי שוקיים – דומים.

ג) כל שני משולשים ישרי זווית – דומים.

ד) כל שני משולשים חופפים – דומים.

ה) כל שני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים – דומים.

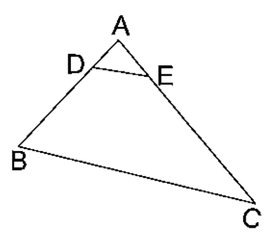
12. כל משולש דומה לעצמו בהתאמה $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.

א) נתון גם $\Delta ABC \sim \Delta ACB$. מה ניתן להסיק?

ב) נתון גם כי ΔABC דומה לעצמו בכל התאמת קודקודים. מה ניתן להסיק?

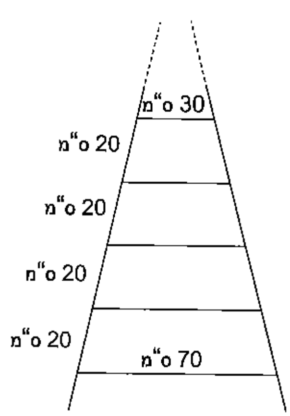
13. נתון: $DE \parallel BC$, $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$.

מצאו את יחס הדמיון בין ΔABC ל-ΔADE.



14. מתכננים סולם הבנוי מחמישה שלבים מקבילים במרחקים שווים ביניהם.

מה אורך כל אחד מהשלבים?



משפטי דמיון

בדומה לחפיפת משולשים, ניתן להסיק דמיון משולשים בעזרת פחות משששת התנאים המופיעים בהגדרה. ובכך נעסוק בסעיף זה.

1. הסבירו:

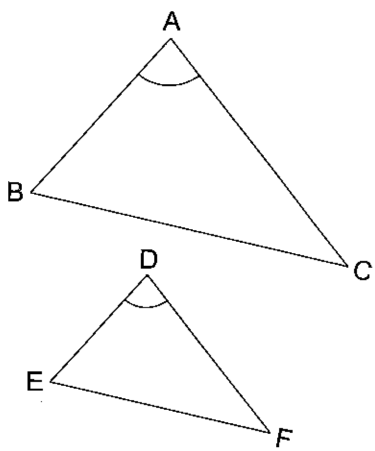
אם $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, וגם $\Delta ABC \cong \Delta KLM$

אז $\Delta DEF \sim \Delta KLM$.

משפט דמיון ראשון:

> אם זוג צלעות במשולש אחד פרופורציוניות לזוג צלעות במשולש שני והזוויות בין הצלעות האלה שוות, אז המשולשים דומים (סימון: צ.ז.צ.).

2. השלימו את הוכחת משפט דמיון ראשון.



נתון: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$

צ"ל: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

הוכחה:

שרטטו על AB קטע AK השווה ל-DE.

שרטטו על AC קטע AL השווה ל-DF.

א) $\Delta AKL \cong \Delta DEF$, נמקו.

ב) $\Delta AKL \sim \Delta ABC$, נמקו.

ג) $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, נמקו.

3. איזה תנאי יש להוסיף לנתוני המשפט הקודם, כדי שנקבל $\Delta ABC \cong \Delta DEF$?

משפט דמיון שני:

> אם שתי זוויות במשולש אחד שוות בהתאמה לשתי זוויות במשולש שני, אז המשולשים דומים (סימון: ז.ז.).

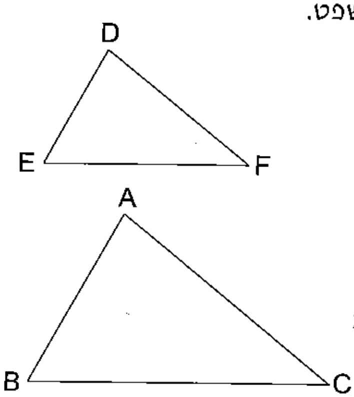
4. הוכיחו, באופן דומה, את משפט דמיון שני.

5. איזה תנאי יש להוסיף לנתוני המשפט הקודם, כדי שנקבל משולשים חופפים.

משפט דמיון שלישי:

אם בשני משולשים היחס בין כל שתי צלעות מתאימות קבוע, אז המשולשים דומים (סימון: צ.צ.צ.).

6. השלימו את הוכחת משפט דמיון שלישי.



א) רשמו את הנתונים ומה שצריך להוכיח במשפט.

ב) שרטטו על AB קטע AK כך ש-$DE = AK$.
שרטטו על AC קטע AL כך ש-$DF = AL$.
הוכיחו כי $\Delta AKL \sim \Delta ABC$.

ג) השלימו:
מהדמיון שהוכחתם: $\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{\_\_}$.
החליפו את AK ב-DE ורשמו את הפרופורציה מחדש $\_\_ = \_\_$
אבל על-פי הנתון: $\frac{EF}{BC} = \frac{\_\_}{AB}$,
לכן: $KL = \_\_\_\_$

ד) $\Delta AKL \cong \Delta DEF$, נמקו.

ה) $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, נמקו.

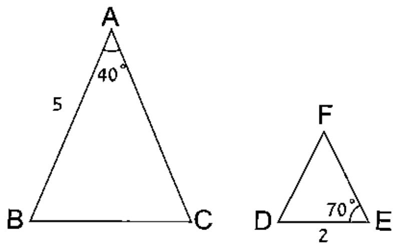
7. איזה תנאי יש להוסיף לנתוני המשפט הקודם, כך שנקבל $\Delta ABC \cong \Delta DEF$?

קיבלנו שלושה משפטי דמיון:

8. בדקו בכל סעיף אם המשולשים דומים. אם כן, רשמו את ההתאמה, ציינו את משפט הדמיון, ואם אפשר, רשמו את יחס הדמיון.

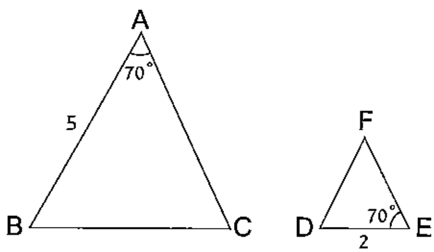
א) נתון: $AB = AC$

$DE = DF$

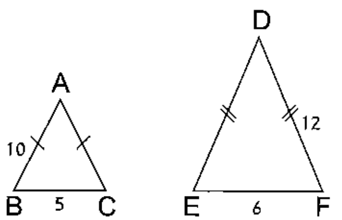


ב) נתון: $AB = AC$

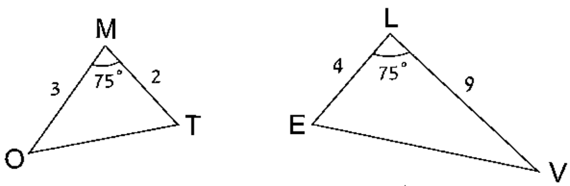
$DE = DF$



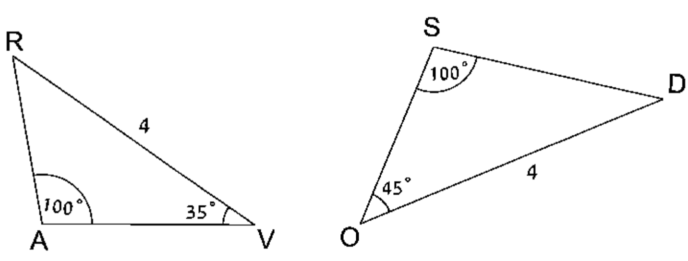
ג)



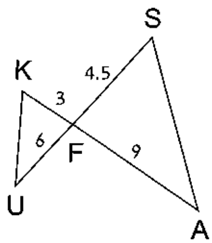
ד)



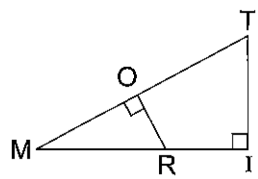
ה)



ו)

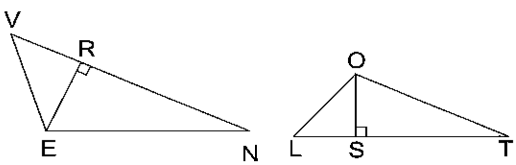


ז)



9. $\triangle NEV \sim \triangle TOL$, ER ו-OS גבהים.

הוכיחו כי: $\frac{ER}{OS}=\frac{EN}{OT}$



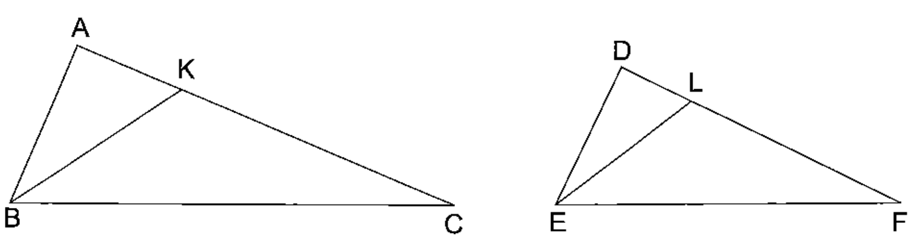
הוכחתם:

משפט: במשולשים דומים הגבהים המתאימים מתייחסים זה לזה כיחס הדמיון.

10. נסחו משפט דומה ביחס לתיכונים במשולש, והוכיחו אותו.

11. נסחו משפט דומה ביחס לחוצי הזוויות במשולש, והוכיחו אותו.

12. נתון: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



נסחו תנאי מספיק לכך ש-BK יתייחס ל-EL כיחס הדמיון.

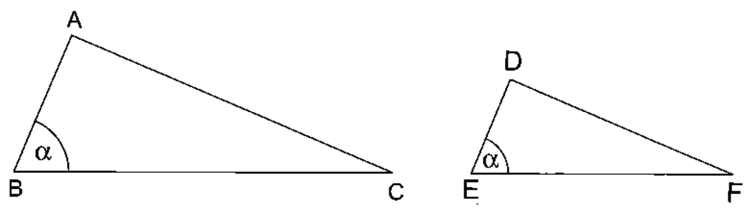
(BK לאו דוקא חוצה זווית, תיכון או גובה.)

שאלות רשות

13. נתון: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

$\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC = \alpha$

$DE < DF$, $AB < AC$



א) שרטטו על AB קטע $AK = DE$.
שרטטו על AC קטע $AL = DF$.

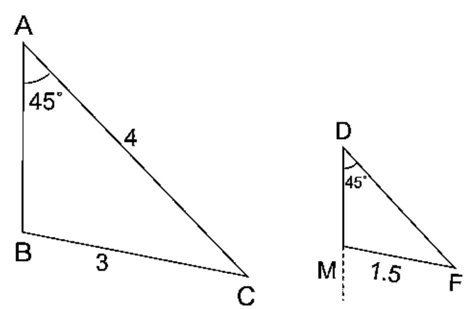
ב) הוכיחו: $\Delta AKL \sim \Delta ABC$.

ג) באיזה תנאי יתקיים $\Delta AKL \cong \Delta DEF$? נמקו.

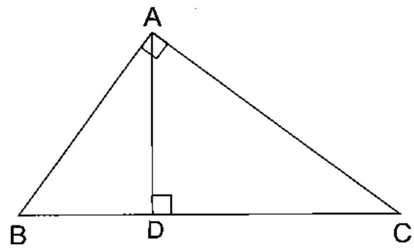
ד) נסחו משפט דמיון רביעי (סימון: צ.צ.ז.).

14. איזה תנאי יש להוסיף לנתוני המשפט הקודם כדי לקבל $\Delta ABC \cong \Delta DEF$?

15. מצאו נקודה E על DM, או על המשכו, כך ש-$EF = 1.5$ וגם ΔDEF לא יהיה דומה ל-ΔABC.



16. משולש ABC ישר זווית ($\sphericalangle BAC = 90°$), AD גובה ליתר.



א) מצאו שלושה זוגות של משולשים דומים. הוכיחו.

ב) רשמו את הפרופורציות המתאימות לגבי שלושת זוגות המשולשים הדומים שקבלתם.

ג) הוכיחו כי: $AD^2 = BD \cdot DC$.

ד) הוכיחו כי: $AB^2 = BD \cdot BC$.

BD נקרא **היטל** של ניצב AB על היתר.

קיבלתם: שטח הריבוע הבנוי על הניצב AB שווה לשטח המלבן שצלעותיו הם היתר והיטל ניצב זה על היתר.

ה) הוכיחו: $AC^2 = DC \cdot BC$.

בסעיפים ג' ו-ד' הוכחתם את **משפט אוקלידס:**

משפט אוקלידס: שטח הריבוע הבנוי על ניצב במשולש ישר זווית שווה לשטח המלבן שצלעותיו הם היתר והיטל של ניצב זה על היתר.

ו) היעזרו בסעיפים ג' ו-ד' והוכיחו את משפט פיתגורס.

ז) נתון: $BD = 2$, $BC = 10$

חשבו את הניצבים.

סיכום

בסעיף זה הכרתם את המושגים פרופורציה, דמיון משולשים ויחס דמיון והוכחתם את המשפטים:

- *משפט דמיון ראשון:*

אם זוג צלעות במשולש אחד פרופורציוניות לזוג צלעות במשולש שני והזוויות בין הצלעות האלה שוות, אז המשולשים דומים (סימון: צ.ז.צ.).

- *משפט דמיון שני:*

אם שתי זוויות במשולש אחד שוות בהתאמה לשתי זוויות במשולש שני, אז המשולשים דומים (סימון: ז.ז.).

- *משפט דמיון שלישי:*

אם בשני משולשים היחס בין כל שתי צלעות מתאימות קבוע, אז המשולשים דומים (סימון: צ.צ.צ.).

- *משפט דמיון רביעי (רשות):*

אם זוג צלעות במשולש אחד פרופורציוניות לזוג צלעות במשולש שני והזווית מול הצלע הגדולה משתי הצלעות שווה בשני המשולשים, אז המשולשים דומים (סימון צ.צ.ז.).

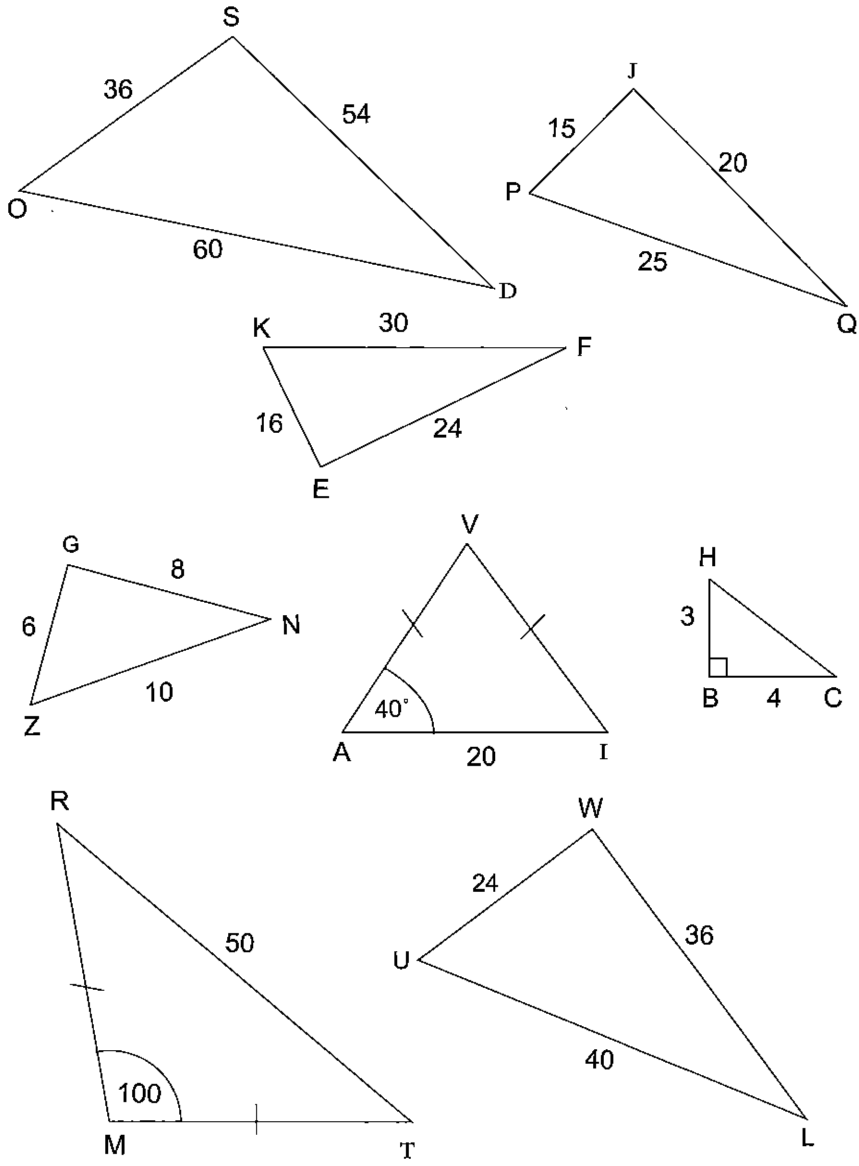
- במשולשים דומים הגבהים המתאימים, חוצי הזוויות המתאימים והתיכונים המתאימים מתייחסים זה לזה כיחס הדמיון.

- *משפט אוקלידס:*

שטח הריבוע הבנוי על ניצב במשולש ישר זווית שווה לשטח המלבן שצלעותיו הם היתר והיטל של ניצב זה על היתר.

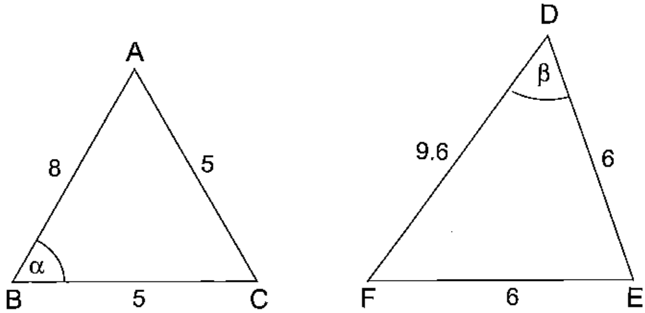
תרגילים

17. מצאו זוגות של משולשים דומים על-פי הנתונים הרשומים בשרטוטים. מצאו את יחס הדמיון (אם יש צורך חשבו צלעות).

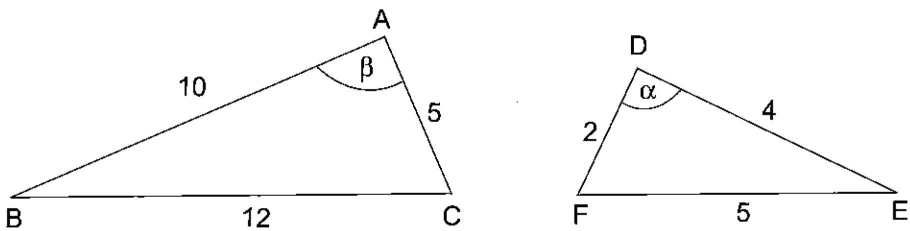


18. קבעו בכל מקרה אם $\alpha = \beta$ ונמקו.

א)



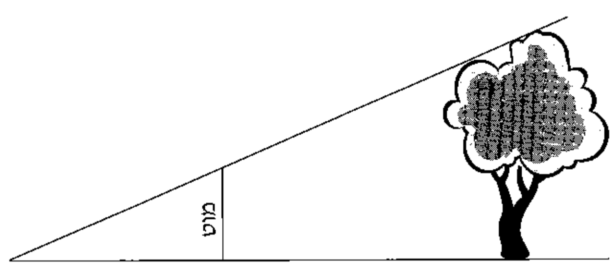
ב)



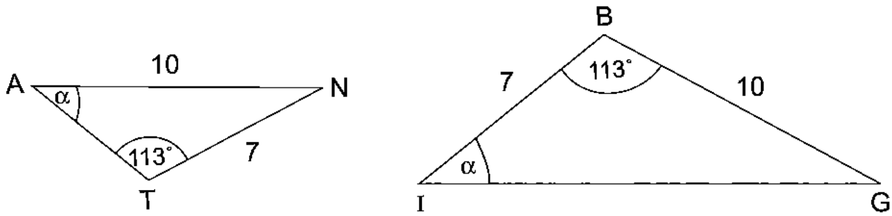
19. לכל צלע ב-ΔABC יש צלע שווה ב-ΔDEF, לכל צלע ב-ΔDEF יש צלע שווה ב-ΔABC ובכל זאת המשולשים אינם דומים. רשמו דוגמה.

20. כדי למדוד גובהו של עץ, נעזרו במוט שאורכו 80 ס"מ. מדדו ומצאו כי אורך הצל של המוט, כשהוא תקוע באדמה במאונך, 120 ס"מ, ואורך הצל של העץ, באותה שעה, 6.6 מ'.

מה גובה העץ?



21. א) כמה נתונים שווים יש בשני המשולשים ΔBIG, ΔTAN?

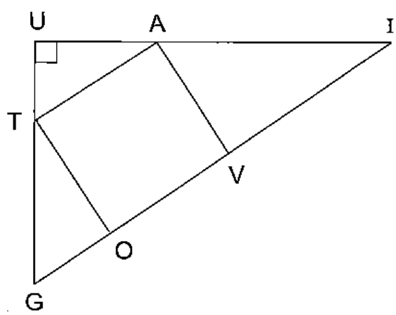


(i) האם הם חופפים? נמקו.

(ii) האם הם דומים? נמקו.

ב) מצאו את אורכי הצלעות החסרות.

22. במשולש ישר זווית UGI חסום ריבוע TOVA.

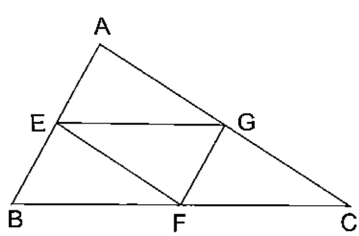


א) מצאו את כל המשולשים הדומים שבשרטוט.

ב) נתון גם: 6 יח' = TA,
8 יח' = VI.

מצאו את אורכי צלעות כל המשולשים המשורטטים.

23. חיברו את אמצעי הצלעות במשולש ABC (ראו שרטוט).



הוכיחו: $\Delta FGE \sim \Delta ABC$

24. BD ו-CE הם גבהים ב-ΔABC, הנפגשים בנקודה M.

א) שרטטו והוכיחו כי מתקיימת הפרופורציה $\frac{MB}{MC} = \frac{EM}{DM}$.

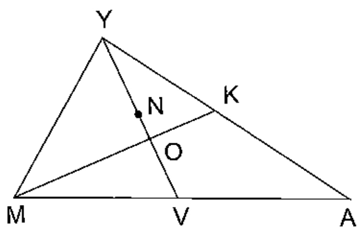
ב) השלימו: ____ = $\frac{BD}{EC}$.

רשמו משפט מתאים.

את המשפט הזה הוכחתם בסעיף הקודם. כעת הוכחתם אותו שנית בעזרת דמיון משולשים.

25. הוכיחו כי תיכון לצלע במשולש, חוצה את כל הקטעים המקבילים לצלע זו.

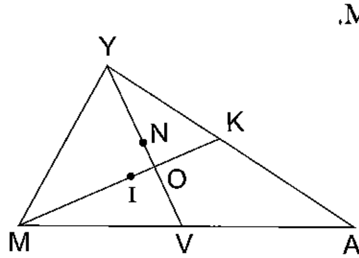
26. MK ו-YV תיכונים ב-ΔMAY. N אמצע התיכון YV.



א) מצאו את היחס $\frac{ON}{OY}$.

רמז: סמנו את OV ב-x ובטאו את שאר הקטעים של התיכון בעזרת x.

ב) I אמצע התיכון MK.



הוכיחו: $\Delta MOY \sim \Delta ION$. מה יחס הדמיון?

ג) R אמצע התיכון מ-A ל-MY.

שרטטו והוכיחו: $\Delta NIR \sim \Delta YMA$. מה יחס הדמיון?

27. נתון: ΔABC ישר זווית ($\sphericalangle A = 90°$).

AE גובה ליתר, BD חוצה $\sphericalangle B$.

M נקודת המפגש של AE ו-BD.

א) הוכיחו כי משולש MAD שווה שוקיים.

רמז: סמנו את $\sphericalangle DBC$ ב-x ובטאו את יתר הזוויות בעזרת x.

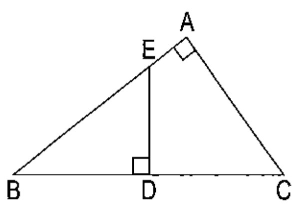
ב) עבור איזה ערך של זווית $\sphericalangle C$ יתקיים $\Delta MBE \sim \Delta ACE$?

28. ΔABC ישר זווית, ($\sphericalangle A = 90°$).

ED אנך אמצעי ליתר.

$BE = 16$ יח', $AE = 2$ יח'.

חשבו את BC.



29. CE ו-BD הם גבהים ב-ΔABC.

הוכיחו כי:

א) $\Delta ABD \sim \Delta ACE$.

ב) $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (היעזרו בסעיף א').

ג) נתון גם: $BC = 10$ יח', $\sphericalangle A = 60°$.
חשבו את DE.

ד) הוכיחו, כי אם ΔABC שווה שוקיים ($AC = AB$), אז ED מקביל ל-BC ולהיפך.

30. במלבן שאלכסונו 20 יח', האנך לאלכסון מאחד הקודקודים מחלק אותו ביחס של 1:4.

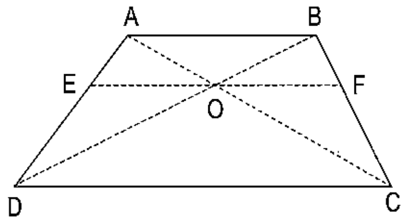
א) מצאו את אורך האנך.

ב) מצאו את שטח המלבן.

31. משני קודקודים של מלבן עוברים אנכים לאלכסון המלבן, כך שנקודות החיתוך של האנכים מחלקות את האלכסון לשלושה קטעים, שהיחס ביניהם 1:8:1.

מצאו את היחס בין צלעות המלבן.

32. בטרפז ABCD העבירו, דרך מפגש האלכסונים O, מקביל לבסיסים (EF).



א) בשרטוט חמישה זוגות של משולשים דומים. רשמו אותם.

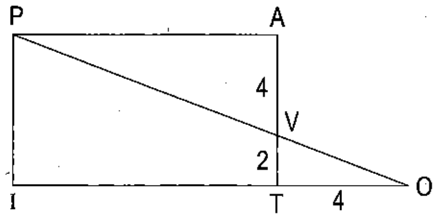
ב) בחרו שני זוגות והוכיחו את הדמיון.

ג) AB = 2 יח' ; DC = 8 יח'.

רשמו לגבי כל זוג את יחס הדמיון.

שטחי משולשים דומים

1. א) PITA מלבן.



מצאו שני זוגות של משולשים דומים.
רשמו את יחס הדמיון של כל זוג.

ב) מצאו את שטחי המשולשים.

ג) חשבו לגבי כל זוג את יחס השטחים.

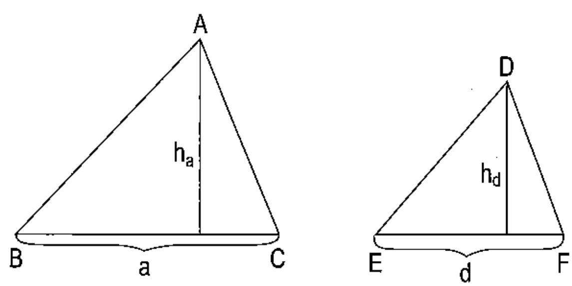
ד) מצאו קשר בין יחס הדמיון ויחס השטחים של משולשים דומים.

נבדוק קשר זה בשני משולשים כלשהם.

2. בסעיף הקודם הוכחתם כי גבהים מתאימים במשולשים דומים מתייחסים זה לזה כיחס הדמיון.

היעזרו בטענה זו והשלימו את הוכחת המשפט:

משפט: השטחים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כריבוע יחס הדמיון.



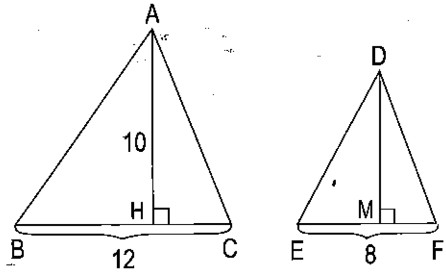
נסמן את יחס הדמיון ב-k, $k = \frac{a}{d}$.

השלימו: $S_{ABC} =$ ______ $S_{DEF} =$ ______

השלימו: $\frac{h_a}{h_d} =$ ___, נמקו.

השלימו: $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{\frac{a \cdot h_a}{2}}{} = \frac{}{d} \cdot \frac{h_a}{} = k \cdot$ ___ $=$ ___

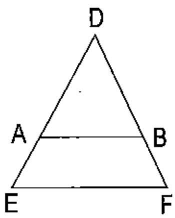
3. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



א) חשבו את שטח משולש DEF.

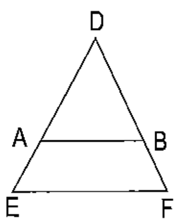
ב) חשבו את אורך גובה DM.

4. $AB||EF$, $\frac{DB}{BF}=\frac{3}{2}$, S_{DAB} = 20 יח"ר



חשבו את שטח משולש DEF ואת שטח מרובע ABFE.

5. $AB||EF$, שטח המשולש DEF 90 יח"ר, שטח הטרפז ABFE 50 יח"ר.

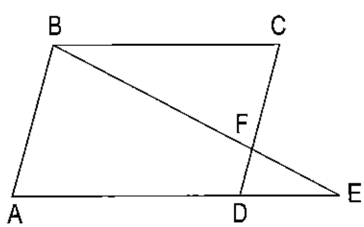


א) מצאו את יחס הדמיון.

ב) AE = 12 יח', חשבו את AD.

6. במשולש ישר זווית היתר 10 ס"מ ואחד הניצבים 8 ס"מ. היתר של משולש דומה לו, שווה ל-20 ס"מ. חשבו את שטח המשולש השני.

7. ABCD מקבילית.



BC = 10 ס"מ , DE = 4 ס"מ

שטח משולש DEF שווה ל-12 סמ"ר.

א) הוכיחו שמשולשים ABE, DEF דומים, ורשמו את יחס הדמיון.

ב) מצאו את שטח המקבילית.

מצולעים דומים

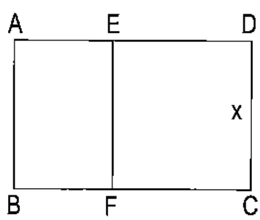
בסעיף הראשון בפרק זה הגדרנו מצולעים דומים:

מצולעים נקראים דומים, אם כל הזוויות של מצולע אחד שוות בהתאמה לזוויות במצולע השני וקיים אותו היחס בין כל זוג צלעות מתאימות.

בסעיפים הקודמים התמקדנו במשולשים דומים. בסעיף זה נעסוק במצולעים שונים דומים.

1. א) האם שני מרובעים שזוויותיהם שוות בהתאמה, דומים?
   אם כן הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

   ב) האם שני מרובעים שצלעותיהם פרופורציוניות, דומים?
   אם כן הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.



2. נתון מלבן ABCD שאורכי צלעותיו הם
   10 יח' ו-x יח'.

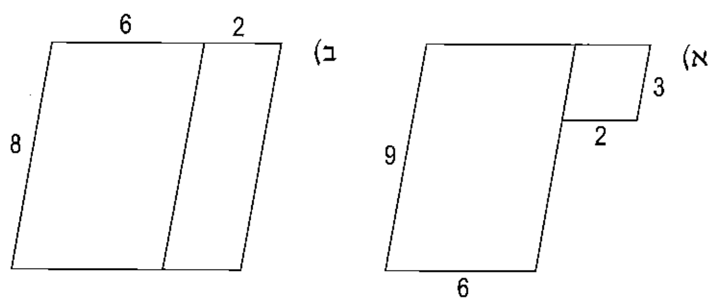
   כמו כן נתון EFCD ריבוע ומתקיים ABCD∽AEFB.

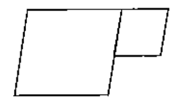
   א) מצאו את x.

   ב) מצאו את יחס הדמיון בין המלבנים:
   ABCD ו-AEFB.

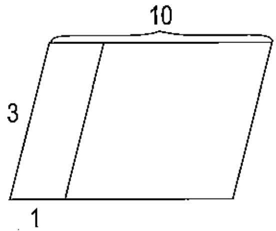
   ג) מצאו את יחס הדמיון, אם 12 יח' = AD.

3. בכל סעיף חיברו שתי מקביליות. באילו מהסעיפים המקביליות דומות? נמקו.



ג) 

מעוינים

ד) 

4. קבעו אם הטענות הבאות נכונות. אם כן, נמקו. אם לא, הראו דוגמה נגדית.

א) כל שתי מקביליות דומות.

ב) כל שני מלבנים דומים.

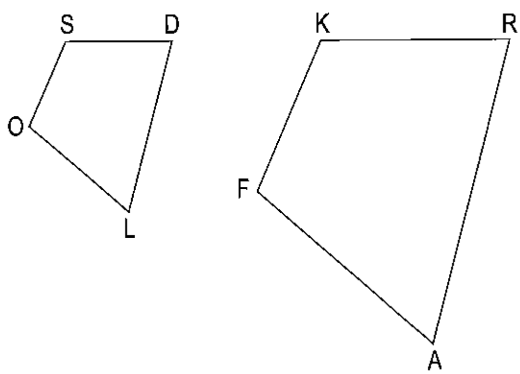
ג) כל שני מעוינים דומים.

ד) כל שני ריבועים דומים.

ה) כל שני משולשים שווי צלעות דומים.

ו) כל שני מצולעים משוכללים בעלי m צלעות דומים.

5. נתונים מרובעים דומים KFAR~SOLD. יחס הדמיון n.



א) שרטטו אלכסונים מתאימים בכל אחד מהמרובעים FR, OD.

הוכיחו: $S_{KFR} = n^2 \cdot S_{SOD}$

$S_{FAR} = n^2 \cdot S_{OLD}$

ב) מצאו את היחס $\frac{S_{KFAR}}{S_{SOLD}}$.

6. מהו יחס השטחים של מחומשים דומים? הוכיחו.

בסעיפים האחרונים למדתם את המושג מצולעים דומים והוכחתם את המשפט:
שטחי מצולעים דומים מתיחסים זה לזה כריבוע יחס הדמיון.

תרגילים

7. א) הוכיחו כי גבהים מתאימים במקביליות דומות, מתייחסים זה לזה כיחס הצלעות.

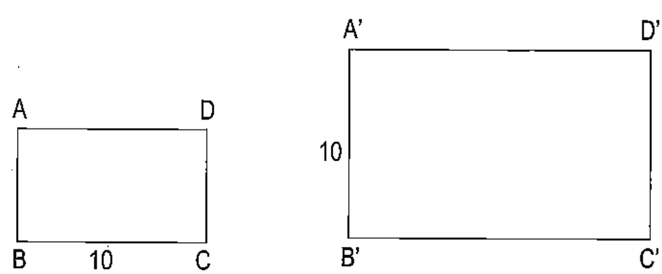
ב) הוכיחו כי אלכסונים מתאימים במקביליות דומות, מתייחסים זה לזה כיחס הצלעות.

8. הוכיחו כי מצולעים משוכללים, בעלי אותו מספר צלעות, דומים זה לזה.

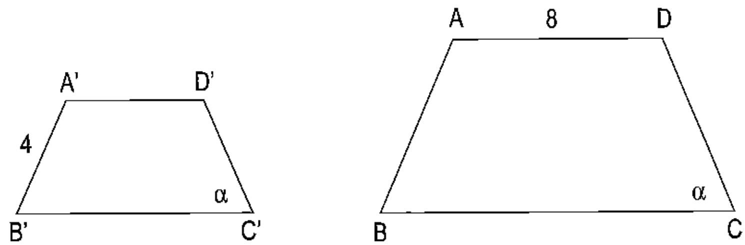
9. הוכיחו כי היקפים של מצולעים דומים, מתייחסים זה לזה כיחס הצלעות.

10. הוסיפו נתונים בשרטוטים הבאים, כך שהמצולעים יהיו דומים ולא חופפים.

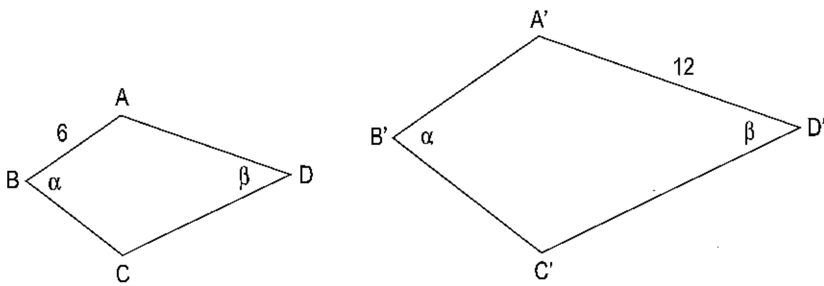
א) מלבנים:



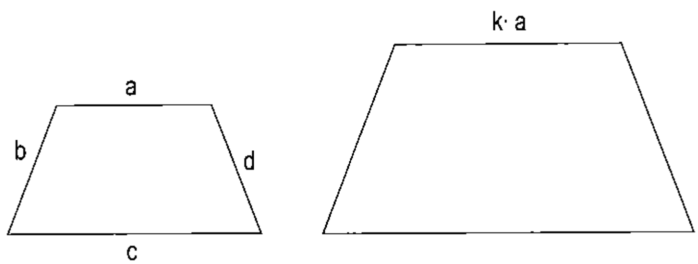
ב) טרפזים שווי שוקיים:



ג) דלתונים:



11. נתונים שני טרפזים בעלי צלעות פרופורציוניות בהתאמה. היחס בין כל זוג של צלעות מתאימות הוא k. הוכיחו שהטרפזים דומים.



רמז: העבירו מקביל לשוק בכל אחד מהטרפזים.

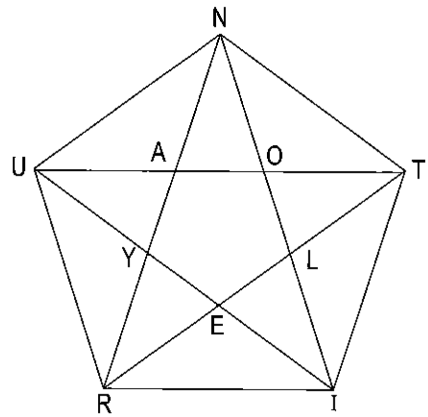
12. הטענות הבאות אינן נכונות. מצאו דוגמאות נגדיות.

א) כל שני טרפזים שווי שוקיים בעלי זוויות שוות, דומים.

ב) כל שני משולשים שווי שוקיים בעלי זווית שווה, דומים.

ג) כל שני דלתונים בעלי צלעות פרופורציוניות בהתאמה, דומים.

13. במחומש משוכלל NURIT העבירו אלכסונים.



א) חשבו זוויות ומצאו בשרטוט משולשים דומים שאינם חופפים.

ב) הוכיחו כי NURIT ו-AYELO דומים.

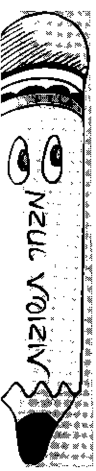
ג) הוסיפו לשרטוט מחומש משוכלל גדול יותר, שאלכסוניו יוצרים את NURIT.

14. למגרש צורת דלתון.

שרטטו תרשים בהקטנה של 3:8000.

אורכי האלכסונים בתרשים 6 ס"מ ו-9 ס"מ.

מה שטח המגרש (במציאות)?



מבחר תשובות לפרק ב': שטחים, משפט תלס ודמיון

שטח משולש (עמודים 39-33)

2. א) (i) 30 יח"ר (ii) 25 יח"ר (iii) 24 יח"ר
(iv) 20 יח"ר (v) 15 יח"ר
ב) (vi) $\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$ (vii) $\frac{1}{2}\cdot b\cdot e$

3. ב) (i) 12 סמ"ר (ii) 36 סמ"ר (iii) 12 סמ"ר
ג) 10 יח"ר

5. ג) $\frac{2\cdot S}{a}$

6. א) 24 סמ"ר ב) $1.5a^2$סמ"ר ג) (i) 200 סמ"ר (ii) $10\sqrt{2}$ ס"מ

7. א) $2a^2$ סמ"ר ג) לא תשתנה

9. ב) מקבילית, למשל.

10. א) משולש שווה שוקיים. ב) משולש שווה צלעות.

11. ב) $3\cdot h\cdot a$ ג) פי 6

שטחי מרובעים (עמודים 47-40)

6. א) 48 יח"ר ב) 15 יח"ר ג) 24 יח"ר
7. 5
8. 36 יח"ר

10. א) $\frac{1}{2}S$

12. א) השטח יגדל פי 4 ב) השטח יגדל פי 4

משפט פיתגורס (עמודים 52-48)

2. א) גובה: $5\sqrt{3}$ ס"מ ; שטח: $25\sqrt{3}$ סמ"ר
ב) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ב. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

4. א) א, ד, ה

5. 49.75 סמ"ר

6. 21.65 סמ"ר

7. א) $AC =$ 4 ס"מ ; $BC =$ 6.93 ס"מ ב) 13.86 סמ"ר

8. א) השטח: 125 יח"ר, ההיקף: 53.85 יח' ב) 96 יח"ר

9. א) $2a$ יח' ב) $\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{4}$ יח"ר

10. $150\sqrt{3}$ יח"ר ב) $\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2}$

12. א) לא ב. כן

תרגילים נוספים לשלושת הסעיפים (עמודים 54-58)

1. פי 7

2. מקבילית

3. ב) השוויון מתקיים כאשר $\sphericalangle C = 90^\circ$.

6. א) 50 יח"ר ב) 160 יח"ר

7. ב) 24 יח"ר

8. א) 10.5 יח"ר ב) אי-אפשר לחשב את שטח הצורה.

9. א) 7 יח' , 10 יח' ב) 26 יח'

12. פי $\sqrt{5}$

13. א) $8\sqrt{2}$ יח' ב) לא

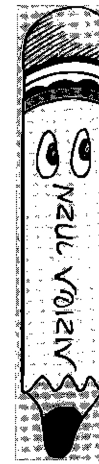
14. א) 31.18 יח"ר ב) 5.2 יח'

15. 22.67 קמ"ר

16. א) $\sqrt{3}\,a$ ב) $\frac{\sqrt{3}\,a^2}{2}$

17. ב) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ יח"ר

18. השגיאה בגובה ליתר $BE = 9.6$



19. א) 115.75 יח"ר ב) $S_{ABD} =$ 82.68 יח"ר $S_{DCB} =$ 33.07 יח"ר

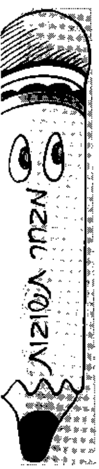
20. $BD =$ 5 יח' $AB =$ $5\sqrt{3}$ יח' $AC =$ $10\sqrt{3}$ יח' $DC =$ 10 יח'

יחסי שטחים (עמודים 63-59)

6. א) 4 ב) 12 ג) 6.25 ד) 25

7. א) $\frac{5}{8}$ ב) $\frac{5}{11}$

9. ב) $\frac{1}{3}$ ב) $\frac{1}{4}$



חוצה זווית במשולש (עמודים 69-64)

5. א) $AN =$ 3 יח' $AO =$ 2 יח' ב) 4:1

9. א) $\frac{2}{3}$ ב) 10 יח' ג) $\frac{2}{3}$

10. א) $BD =$ 3.85 יח' $DC =$ 6.15 יח'

ב) (i) $CD =$ 16.67 יח' , $DB =$ 13.33 יח' (ii) 4:5

11. כן

12. א) $DC > BD$ ב) $AE > EC$

13. ב) 7:1

14. א) 1 ב) $\frac{1}{2}$ ג) 1 ד) $\frac{1}{2}$

15. א) כן. ב) $AF =$ 9.3 יח' , $FB =$ 2.32 יח'

18. 72 יח'

משפט תלס (עמודים 74-70)

5. א) $x = 3.75$, $\frac{5}{4}$ ב) $x = 3.2$

ג) $x = 8$, לא ד) $x = 2.67$, $\frac{DA}{AC} = \frac{3}{2}$

7. א) $AC = 13.33$ ב) $AE =$ 3.75 יח' $EB =$ 11.25 יח'

ג) $DB =$ 9 יח' , $EC =$ 12 יח'

9. א) $AB \parallel CD$ ב) $AB \nparallel CD$

תלס ומסקנותיו (עמודים 75-81)

1. א) $EC =$ 18 יח'

4. א) $x =$ $3\frac{1}{3}$ יח', $EF =$ 10 יח' ב) $x =$ 8 יח', פי 1.5 ג) $x =$ 7.5 יח', פי 2.5

14. א) $7 + 3.5\sqrt{2}$ יח' ב. 24.5 יח"ר ג) 9.125 יח"ר

18. א) מעוין - אורך כל צלע שווה ל-3 יח' ב) ריבוע - אורך כל צלע 5 יח'

ג) ריבוע - אורך כל צלע $3\sqrt{2}$ יח' ד) מעוין - אורך כל צלע 3 יח'

ה) מעוין - אורך כל צלע 5 יח' ו) מלבן - לא ניתן לחשב

ז) מעוין - אורך כל צלע 6 יח'

תרגילים נוספים לארבעת הסעיפים (עמודים 83-87)

1. א) 1.5 ב) לא

2. 1.75

4. א) $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ ב) $\frac{1}{3}$ ג) $\frac{1}{9}$

5. א) $x = 4.5$ ב)אי-אפשר לחשב את x

7. א) $S_{ADE} =$ 6 יח"ר ב) על אורך BC

8. א) $\triangle AEF, \triangle EFB$ ב) פי 8

10. א) $MB =$ 1.2 יח', $CN =$ 4 יח'

דמיון (עמודים 88-114)

דמיון משולשים (עמודים 88-94)

4. א) (i) $DF =$ 15 יח' (ii) $BC =$ 4 יח'

ב) $DE =$ 9 ס"מ, $BC =$ 5 ס"מ

6. א) $\sphericalangle B = \sphericalangle O = 30^\circ$ $\sphericalangle A = 50^\circ$ $\sphericalangle L = 100^\circ$ לא ניתן לחשב את הצלעות.

ב) $OT = VT = 8.7$, $\sphericalangle L = \sphericalangle U = \sphericalangle O = 70^\circ$, $\sphericalangle T = 40^\circ$, $BL = 2.9$

7. א) $\triangle APR \sim \triangle UZF$, יחס הדמיון הוא 3:2.

ב) $\triangle ONF \sim \triangle ETL$, יחס הדמיון הוא 3:4.

ג) $\triangle TFI \sim \triangle RMA$, יחס הדמיון הוא 4:5.

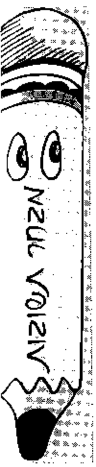
8. $\frac{1}{2}$

10. א) $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C = 72^\circ$, $\sphericalangle B = 36^\circ$.

ב) $BC = AB =$ 9.73 יח', $AD = DB =$ 6 יח'

13. יחס הדמיון: 4:1.

14. 40 ס"מ, 50 ס"מ, 60 ס"מ



משפטי דמיון (עמודים 95-107)

8. א) $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ אפשר גם: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, יחס הדמיון הוא: 5:2.

ב) לא דומים

ג) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ יחס הדמיון: 5:6

ד) לא דומים

ה) $\triangle RAV \sim \triangle OSD$ יחס הדמיון: 1 (המשולשים חופפים)

ו) $\triangle SAF \sim \triangle KUF$ יחס הדמיון: 3:2

ז) $\triangle MOR \sim \triangle MIT$, אין נתונים לקבוע את יחס הדמיון.

12. $\frac{AK}{DL}$ שווה ליחס הדמיון.

16. ז) $AB = 2\sqrt{5}$ $AC = 4\sqrt{5}$

17. למשל $\triangle AVI \sim \triangle RMT$, יחס הדמיון: 2:5, $\triangle BCH \sim \triangle GNZ$, יחס הדמיון: 1:2, $\triangle UWL \sim \triangle OSD$, יחס הדמיון: 2:3

18. א) כן ב) לא

20. 4.4 מ'

21. א) 5 נתונים (i) לא חופפים (ii) דומים

ב) $AT = 4.9$, $IG = 14.29$

22. א) ΔUTA , ΔAIV ; ΔTGO , ΔGUI

ב) $AV = VO = OT =$ 6 יח' ; $AI =$ 10 יח' ; $AU =$ 4.8 יח'

$UT =$ 3.6 יח' ; $TG =$ 7.5 יח' ; $GO =$ 4.5 יח'

26. א) 0.25 ב. 0.25 ג. 0.25

27. ב) $\measuredangle C = 30°$

28. $BC =$ 24 יח'

29. ג) $DE =$ 5 יח'

30. א) 8 יח' ב. 160 יח"ר

31. יחס של 3:1

32. א) למשל:

$\Delta AOB \sim \Delta COD$, יחס דמיון: 1:4

$\Delta FCO \sim \Delta BCA$, יחס דמיון: 4:5

שטחי משולשים דומים (עמודים 108-109)

1. יש שלושה זוגות:

א) $\Delta AVP \sim \Delta TVO$ יחס דמיון 2:1 ; $\Delta IPO \sim \Delta TVO$ יחס הדמיון: 1:3 ;

$\Delta AVP \sim \Delta IPO$ יחס הדמיון: 3:2

ב) $S_{VTO} = 4$, $S_{PAV} = 16$ $S_{PIO} = 36$

ג) לפי הסדר הרשום בסעיף א': 4:1 , 4:36 (1:9) , 36:16 (9:4)

3. א) $26\frac{2}{3}$ יח"ר ב. $DM =$ $6\frac{2}{3}$ יח'

4. שטח המשולש DEF: $55\frac{5}{9}$ יח"ר, שטח המרובע ABFE $35\frac{5}{9}$ יח"ר

5. א) יחס הדמיון 2:3

ב. $AD =$ 24 יח'

6. 96 סמ"ר

7. א) 7:2

ב) 210 סמ"ר

מצולעים דומים (עמודים 110-114)

2. א) $5\sqrt{5}-5$ יח' (6.18 יח')

ב) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ג) 0.833

3. א) דומות ב) לא דומות ג) דומות ד) לא דומות

10. א) למשל: 20 יח' = A'D', 5 יח' = DC

ב) למשל: 6.4 יח' = AB = DC , 11.2 יח' = BC , 5 יח' = A'D' , 7 יח' = B'C'

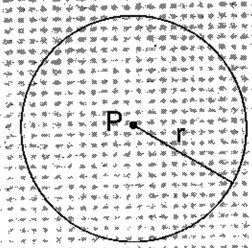
ג) למשל: 8 יח' = AD, 9 יח' = A'B'.

14. 192,000,000 סמ"ר = 19,200 מ"ר.

פרק ג : המעגל

מעגל וישר

הגדרה: קבוצת כל הנקודות במישור, אשר מרחקן מנקודה נתונה קבוע, נקראת **מעגל**.
הנקודה הנתונה נקראת מרכז המעגל (בשרטוט מסומנת ב-P).
המרחק הקבוע נקרא **מחוג**, או **רדיוס** (בשרטוט מסומן ב-r).
אוסף כל הנקודות בתוך המעגל, יחד עם נקודות המעגל עצמו, נקרא **עיגול**.



1. כמה נקודות משותפות יכולות להיות למעגל ולישר?

   שרטטו את כל האפשרויות הקיימות.

עוד מושגים:
- קטע המחבר שתי נקודות על המעגל, נקרא **מיתר**. מיתר העובר דרך מרכז המעגל נקרא **קוטר**.
- ישר שלו נקודה משותפת אחת עם המעגל, נקרא **משיק למעגל**. הנקודה המשותפת בין המשיק והמעגל נקראת **נקודת השקה**.
  ניתן גם לומר שהמעגל משיק לישר.

2. שרטטו במעגל קוטר ומיתר שאינו קוטר.

3. א) שרטטו מעגל O (כלומר O מרכז המעגל) ומיתר AB, והעבירו רדיוס המאונך לו. סמנו את נקודת המפגש של AB עם הרדיוס ב-M.

   ב) היכן נמצאת נקודה M על המיתר?

שימו לב! OM הוא מרחק המיתר AB ממרכז המעגל (O).

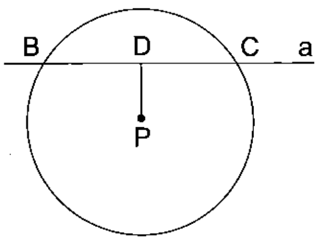
ג) רשמו את התכונה שרשמתם בסעיף ב' בעזרת משפט של "אם ואז" והוכיחו אותה.

ד) רשמו והוכיחו את המשפט ההפוך למשפט שרשמתם בסעיף ג'.

ה) הוכיחו:

משפט: אנך אמצעי למיתר במעגל עובר דרך מרכז המעגל.

4. ישר a חותך את מעגל P בנקודות B, C,



ונתון כי $BC \perp PD$.

בכל סעיף רשומים נתונים נוספים.

א) רדיוס המעגל 10 ס"מ ו-12ס"מ = BC.

חשבו את מרחק המיתר BC ממרכז המעגל (את PD).

היעזרו במשפט פיתגורס. שכחתם? המשפט מנוסח בעמוד 48.

ב) רדיוס המעגל 10 ס"מ ו-8 ס"מ = BC.

חשבו את מרחק המיתר BC ממרכז המעגל.

ג) נסמן את רדיוס המעגל ב-r ואת BC ב-x.

בטאו את PD באמצעות r, ו-x.

ד) הציבו בתבנית שקיבלתם את הנתונים הרשומים בסעיף א', ובדקו את תשובתכם לסעיף זה.

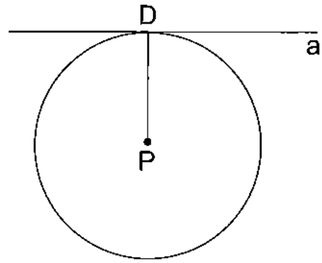
ה) השלימו: ככל שאורך המיתר קצר יותר, מרחקו ממרכז המעגל __________.

הסבירו משפט זה על-ידי הדגמה בעזרת שרטוט ועל-ידי התבנית שקיבלתם בסעיף ג'.

ו) איזה ישר (a) מתקבל אם "אורך" המיתר הוא אפס? למה שווה המרחק ממרכז המעגל במקרה זה? הסבירו.

בסעיף ו' הסברתם את המשפט:

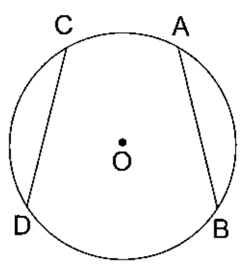
משפט: ישר המאונך לרדיוס בקצהו (שעל המעגל), הוא משיק למעגל.



ז) נסחו והוכיחו את המשפט ההפוך למשפט בסעיף ו'.

ח) מה תוכלו לומר על מרחקו של ישר ממרכז המעגל, כאשר הישר אינו חותך את המעגל?

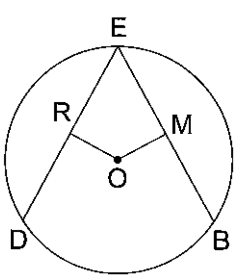
5. א) CD ,AB הם שני מיתרים שווים.



שרטטו את המרחקים של המיתרים ממרכז המעגל והוכיחו כי מיתרים שווים נמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל.

ב) נסחו והוכיחו את המשפט ההפוך למשפט המנוסח בסעיף א'. (תוכלו לנסח את המשפט הנתון בעזרת "אם ואז", ובעזרתו את המשפט ההפוך.)

6. ED ,EB מיתרים שווים במעגל. OR ,OM מרחקי המיתרים מהמרכז (ראו שרטוט).



א) איזה סוג הוא המרובע OMER? הוכיחו.

ב) איזה תנאי צריך להתקיים על מנת ש-OMER יהיה ריבוע? שרטטו והוכיחו.

בסעיף זה הגדרתם את המושגים מעגל, מיתר, קוטר, משיק.

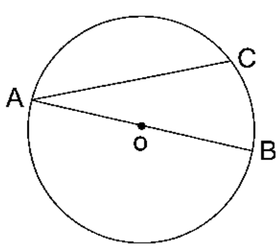
כמו כן למדתם את המשפטים:

- רדיוס המאונך למיתר במעגל חוצה אותו.
- רדיוס החוצה מיתר במעגל, מאונך לו.
- אנך אמצעי למיתר במעגל עובר דרך המרכז.
- מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחק שווה מהמרכז, ולהיפך.
- ככל שמיתר גדול יותר כך הוא קרוב יותר למרכז, ולהיפך.
- משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, ולהיפך.

תרגילים

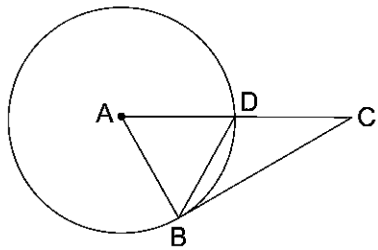
7. מנקודה על מעגל שרדיוסו 13 יח', שרטטו שני מיתרים מאונכים זה לזה.
אורך אחד המיתרים 10 יח'.
מצאו את אורך המיתר השני.

8. AB קוטר במעגל שמרכזו O.
16 יח' = AB.
AC מיתר שמרחקו מהמרכז 4 יח'.
א) חשבו את הזווית בין המיתר והקוטר.
ב) חשבו את אורך המיתר AC.



9. א) AC ו-BD קטרים מאונכים במעגל שמרכזו O.
מאיזה סוג המרובע ABCD? נמקו.
ב) איזה סוג מרובע מתקבל אם AC קוטר ו-BD מיתר (שאינו קוטר), המאונכים זה לזה במעגל O.

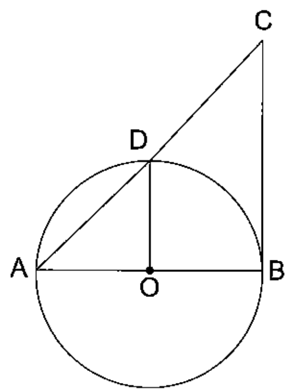
10. A מרכז מעגל. $\measuredangle C = \measuredangle DBC = 30°$.



הוכיחו כי BC משיק למעגל בנקודה B.

11. O מרכז המעגל.

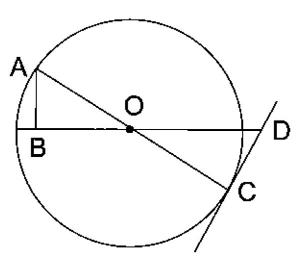
BC משיק למעגל בנקודה B, $OD \perp AB$.



הוכיחו: ΔABC שווה שוקיים.

12. O מרכז המעגל.

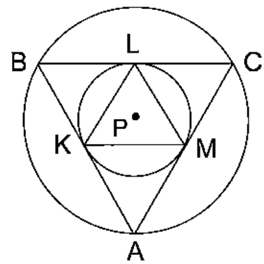
CD משיק למעגל בנקודה C , $AB \perp BD$.



האם המשולשים OAB, OCD חופפים? אם כן הוכיחו. אם לא, הסבירו.

13. נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף p.

AC ,BC ,AB משיקים למעגל הפנימי בנקודות K, L, M בהתאמה.



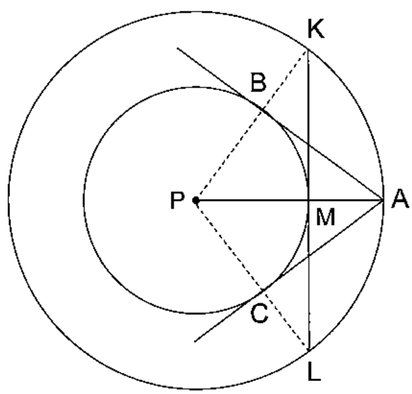
א) הוכיחו ΔABC שווה צלעות.

ב) הוכיחו ΔKLM שווה צלעות.

14. P מרכז של שני מעגלים.

KL משיק למעגל הקטן בנקודה M.

C ,B נקודות החיתוך של המעגל הקטן עם KP ו-LP.



א) הוכיחו: $\Delta ABP \cong \Delta KMP$.

ב) AB ו-AC משיקים למעגל הקטן. נמקו.

ג) נתון מעגל שמרכזו P ונקודה A מחוץ למעגל.

שרטטו משיקים למעגל שמרכזו P העוברים דרך A.

הסבירו כיצד ניתן למצוא את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מ-A אל המעגל.

15. BC משיק למעגל שמרכזו A בנקודה B.

הנקודה B נעה על פני המעגל, ובכל נקודה ונקודה מעבירים משיק באורך BC.

מהי הצורה המתקבלת מאוסף כל הנקודות P? הוכיחו.

מומלץ להיעזר במחשב, לשרטט במחשב מעגל ומשיק, להזיז את המשיק ולעקוב אחר הנקודות המצטיירות.

הוראות למחשב:

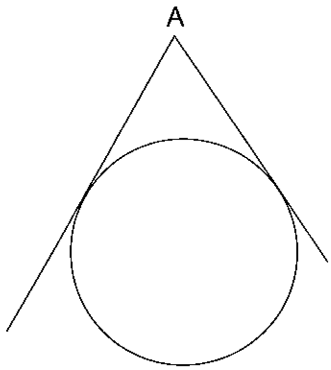
סמנו נקודה A, שרטטו מעגל A ברדיוס 4 יח'. סמנו נקודה על המעגל. שרטטו את הרדיוס לנקודה זו. שרטטו גם אנך באורך 3 יח' בנקודה זו.

סמנו את קצה האנך ובחרו בתפריט "עקוב אחרי".

הזיזו את נקודת ההשקה.

מעגל חסום וחוסם

מעגל חסום



1. בשרטוט שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A מחוץ למעגל.

א) שרטטו את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה משוקי זווית A. מה קיבלתם?

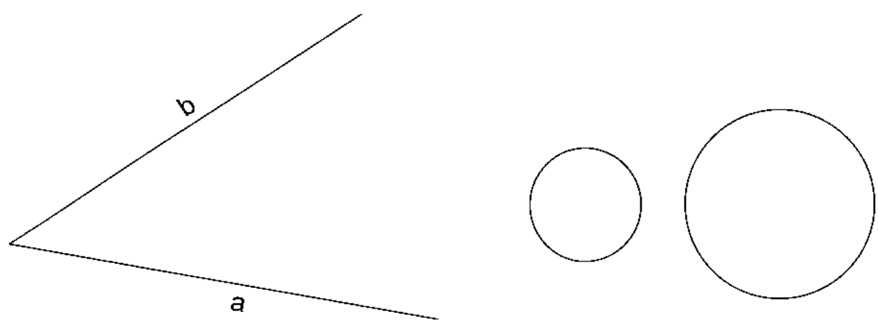
ב) הסבירו מדוע מרכז המעגל נמצא על הישר ששרטטתם.

הגדרה: אורך משיק הוא המרחק בין נקודה מחוץ למעגל לנקודת ההשקה.

ג) הוכיחו כי אורכי המשיקים שווים.

2. נתונים שני ישרים נחתכים a, b.

העתיקו על דף שקוף את שני המעגלים המשורטטים.

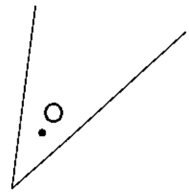


א) הניחו אותם כך שישיקו לשוקי הזווית.

ב) כמה מעגלים משיקים לשוקי זווית קיימים?

היכן נמצאים מרכזי כל המעגלים האלה? הוכיחו.

ג) מעגל שמרכזו O משיק לשוקי הזווית.



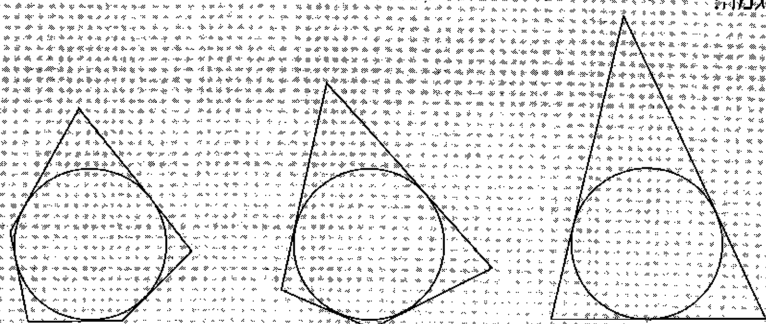
שרטטו את המעגל. תארו איך שרטטתם.

ד) השלימו:

אם מעגל משיק לשוקי זווית, אז מרכזו נמצא ___ ואורך הרדיוס הוא ____.

הגדרה: מעגל המשיק לכל הצלעות של מצולע נקרא **מעגל חסום במצולע**, או ניתן לומר **המצולע חוסם את המעגל**.

לדוגמה:



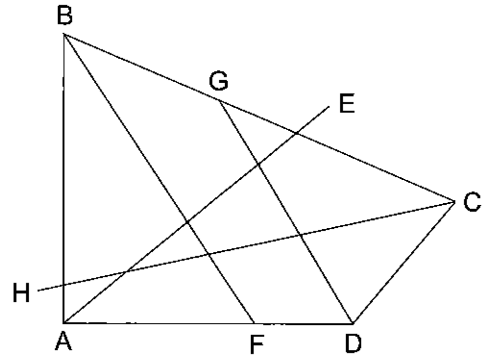
בסעיף זה נחקור באילו מצולעים ניתן לשרטט מעגל חסום ובאילו לא ניתן.

נתחיל את החקירה במרובעים.

3. בתרגיל זה נחקור באילו מרובעים ניתן לחסום מעגל. היעזרו בתוכנה של גיאומטריה דינמית ("הנדסה בתנועה", "המשער הגיאומטרי"). ההוראות כתובות בנספח I, פעילויות 7 ו-8, "הנדסה בתנועה" עמודים 193-195, או בנספח II, פעילויות 5 ו-6 ,המשער הגיאומטרי", עמודים 207-208.

מפעילות המחשב הראשונה מבין השתיים מגיעים למסקנות מעניינות, הרשומות בשתי השאלות הבאות.

4. א) במרובע ABCD משורטטים ארבעה חוצי זוויות הנחתכים בחמש נקודות, כאשר שניים מהם מקבילים.



הוכיחו שבמרובע ABCD יש שתי זוויות נגדיות שוות.

רמז: בסוף הספר, עמוד 136.

ב) מהו המספר המקסימלי של נקודות חיתוך של ארבעת חוצי הזוויות? שרטטו.

5. א) איזה תנאי צריכים לקיים חוצי הזוויות על מנת שיחתכו בדיוק בארבע נקודות?

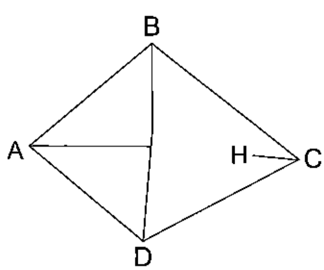
שרטטו את המרובע ואת ארבעת החוצים.

ב) איזה סוג הוא המרובע הנתון? הוכיחו.

רמז: כדאי להיעזר בטענה שהוכחתם בשאלה 4.

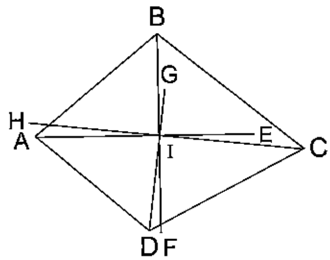
ג) הוכיחו כי המרובע הכלוא בין ארבעת חוצי הזוויות הוא מלבן.

6. הוכיחו כי אם שלושה מחוצי זוויות במרובע נחתכים בנקודה אחת, גם חוצה הזווית הרביעי עובר דרך נקודה זו.



7. א) הסבירו את המשפט.

> *משפט*: אם ארבעת חוצי הזוויות במרובע נפגשים בנקודה אחת, ניתן לחסום במרובע זה מעגל.



ב) תארו כיצד לשרטט את המעגל, ושרטטו אותו.

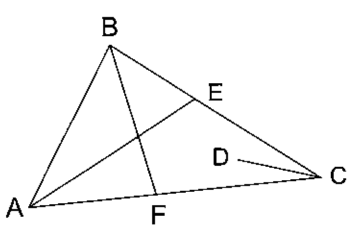
8. האם אפשר להעביר מעגל חסום בכל מקבילית? הסבירו.

9. בדקו באילו מרובעים יש לפחות זוג אחד של חוצי זוויות מתלכדים.

10. בשאלה הקודמת קיבלתם כי בדלתון למשל, יש זוג אחד של חוצים מתלכדים. שרטטו את ארבעת החוצים והסבירו מדוע הם נפגשים בנקודה אחת.

ומה קורה במשולש?

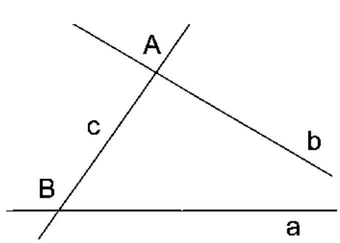
11. כמה נקודות חיתוך יכולות להיות לשלושת חוצי הזוויות במשולש? הוכיחו.



12. א) מצאו מרכז P של מעגל המשיק לישרים a, b, c. a לא מקביל ל-b.

ב) סמנו את נקודת החיתוך של הישרים a ו- b ב-C.

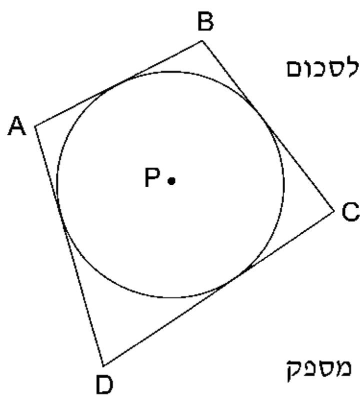
הוכיחו כי PC חוצה את זווית C.



ג) השלימו את המשפט ונמקו:

משפט: בכל משולש אפשר לשרטט מעגל חסום. מרכז המעגל הוא: ______.

נעזר בתרגיל 12 נבדוק תכונה נוספת שתקל עלינו לזהות באיזה מרובע ניתן לשרטט מעגל חסום.



13. א) מעגל שמרכזו p חסום במרובע ABCD.
הוכיחו כי סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות האחרות.

ב) נסחו משפט הפוך לזה הרשום בסעיף א'.
משפט זה נכון, נסו להוכיח אותו.

אפשר לקרוא את ההוכחה בעמודים 136-137.

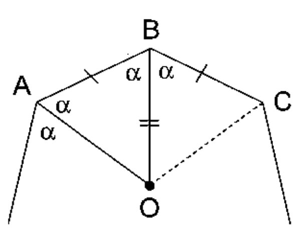
המשפט שניסחתם והוכחתם בסעיף ב' מספק קריטריון נוסף לבדיקה אם ניתן לחסום מרובע מעגל.

ראינו כי בכל משולש ניתן לשרטט מעגל חסום, אך לא כן בכל מרובע. מה לגבי מצולע כלשהו?

מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

14. הוכיחו: בכל מצולע משוכלל אפשר לשרטט מעגל חסום.

רמז: תוכלו להיעזר בשרטוט שלפניכם.



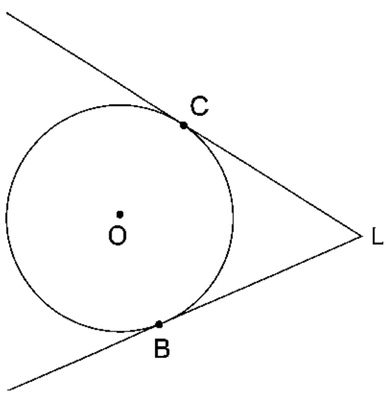
סיכום

בסעיף זה הכרתם את המושג מעגל חסום במצולע.

כמו כן הוכחתם את המשפטים:

- אם חוצי הזוויות במרובע, נפגשים בנקודה אחת, אז ניתן לשרטט מעגל חסום במרובע, ומרכזו הוא מפגש חוצי הזוויות.
- חוצי הזוויות במשולש, נפגשים בנקודה אחת ואילו במרובע, לא תמיד.
- סכום שתי צלעות נגדיות במרובע חוסם מעגל, שווה לסכום שתי הצלעות האחרות, ולהיפך.
- בכל מצולע משוכלל ניתן לשרטט מעגל חסום.

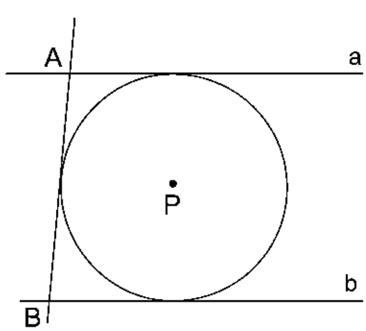
תרגילים



15. LC ו- LB משיקים למעגל שמרכזו O.

$OL = 8$ יח'. $\sphericalangle L = 60°$,

חשבו את רדיוס המעגל ואת גודל $\sphericalangle COB$.



16. נתון: $a \parallel b$.

מעגל שמרכזו P משיק לישרים שבשרטוט.

הוכיחו: $\sphericalangle APB = 90°$.

17. ציינו לגבי כל אחד מהמרובעים הבאים אם ניתן לחסום בהם מעגל. נמקו.
   א) מעוין.
   ב) מקבילית (שאינה מעוין).
   ג) ריבוע.
   ד) מלבן (שאינו ריבוע).

18. קבעו לגבי כל אחד מהטרפזים, אם ניתן לחסום בו מעגל. אם יש צורך חשבו קטעים מתאימים.
   א) טרפז שווה שוקיים שבו השוק שווה ל-10 ס"מ, הבסיס הקטן ל-4 ס"מ, הגובה ל-6 ס"מ (שרטטו).
   ב) טרפז שווה שוקיים שבו השוק שווה ל-10 ס"מ, הבסיס הקטן ל-4 ס"מ, הגובה ל-8 ס"מ.
   ג) טרפז שווה שוקיים שבו השוק שווה ל-8 ס"מ, הבסיס הגדול ל-12 ס"מ וזווית הבסיס ל-$60°$.
   ד) טרפז ישר זווית שאחת מזוויות הבסיס שווה ל-$45°$, הגובה שווה ל-5 ס"מ והבסיס הקטן שווה לגובה (שרטטו).

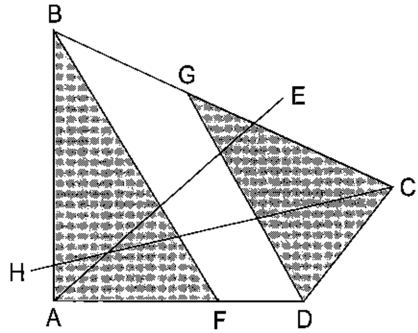
19. א) מה תוכלו לומר על מקבילית, אם ידוע שאפשר לחסום בה מעגל?
   ב) מה תוכלו לומר על מלבן אם ידוע שאפשר לחסום בו מעגל?

20. הראו כי בכל משולש קיים: $S = \frac{1}{2}r \cdot P$.
   כאשר: r — רדיוס המעגל החסום במשולש.
   S — שטח המשולש.
   P — היקף המשולש.

21. א) מצאו את רדיוס המעגל החסום בריבוע, שאורך צלעו a.
   ב) מצאו את רדיוס המעגל החסום במשושה משוכלל, שאורך צלעו a.
   ג) מצאו את רדיוס המעגל החסום במשולש שווה צלעות, שאורך צלעו a.

רמז לשאלה 4, סעיף ב', עמוד 131:

הראו שזוויות שני המשולשים הצבועים שוות.

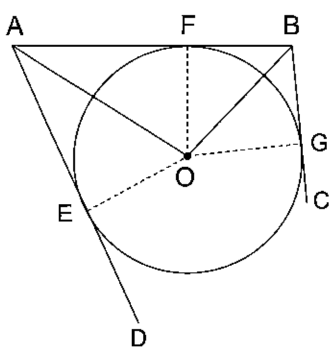


קריאה מהנה

פתרון לשאלה 13, סעיף ב', עמוד 133.

המשפט ההפוך:

> *משפט*: במרובע, אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות האחרות, אז אפשר לחסום מעגל בתוך המרובע.



נתון: $AB + DC = AD + BC$

צ"ל: במרובע $ABCD$ אפשר לחסום מעגל.

הוכחה: נעביר מעגל המשיק לשלוש מצלעות המרובע AD, BC ו-AB.

בנייה זו אפשרית תמיד, כי אפשר להעביר מעגל חסום במשולש.

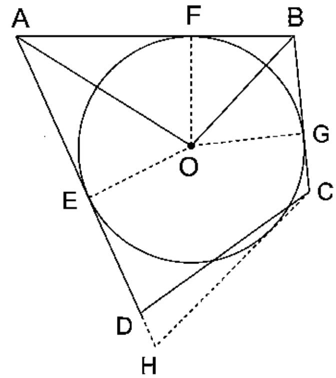
לגבי הצלע הרביעית CD תיתכנה שלוש אפשרויות:

(i) הצלע DC חותכת את המעגל.

(ii) הצלע DC עוברת מחוץ למעגל.

(iii) הצלע DC משיקה למעגל.

נבדוק את האפשרות הראשונה: נניח שהצלע DC עוברת בתוך המעגל.



נעביר מנקודה C משיק למעגל החותך את המשך AD בנקודה מסוימת H.

AB + HC = AH + BC (במרובע חוסם מעגל, סכום הצלעות הנגדיות שווה).

אך: $AB + CD = AD + BC$ (נתון).

$$\Downarrow$$

$$CH - CD = DH$$

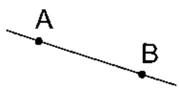
$$CH = DH + CD$$

קיבלנו ב-ΔCDH שתי צלעות שסכומן שווה לצלע השלישית, דבר שלא ייתכן.
לכן הנחה זו אינה נכונה.

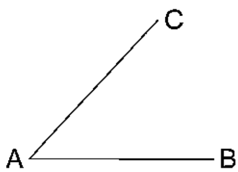
משיקולים דומים, גם האפשרות שהצלע DC עוברת מחוץ למעגל, אינה נכונה. לכן נשארת רק האפשרות השלישית, כלומר, הצלע DC משיקה למעגל, ומתקבל מעגל החסום במרובע ABCD.

מעגל חוסם

אם באפשרותכם להשתמש בתוכנה של גיאומטריה דינמית ("הנדסה בתנועה", "המשער הגיאומטרי") תוכלו להחליף את תרגילים 5-1 בפעילות שהוראותיה כתובות בנספח I, פעילות 9, "הנדסה בתנועה" עמוד 198-196, או בנספח II, פעילות 7, "המשער הגיאומטרי", עמוד 209-210.



1. א) שרטטו מעגל העובר דרך שתי הנקודות A ו-B.
   ב) כמה מעגלים כאלה אפשר לשרטט?
   ג) מהו המקום הגיאומטרי של כל מרכזי המעגלים האלה? הסבירו.



2. א) שרטטו את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A, ו-B. מה קיבלתם?
   ב) שרטטו את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A, ו-C. מה קיבלתם?
   ג) האם שני הישרים ששרטטתם תמיד יפגשו? הסבירו.
   ד) סמנו את הנקודה המשותפת (אם יש) ב-M, והסבירו מדוע ניתן להעביר מעגל יחיד דרך שלוש הנקודות A, B, C.

בתרגיל הקודם הוכחנו כי דרך שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

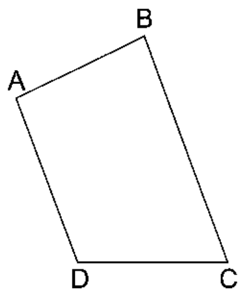
הגדרה: מעגל העובר דרך קדקודי משולש נקרא **מעגל חוסם** משולש, או ניתן לומר כי **המשולש חסום במעגל.**

3. היעזרו בתרגיל 2 והוכיחו:

משפט: שלושת האנכים האמצעים במשולש נפגשים בנקודה אחת ונקודת המפגש שלהם היא מרכז המעגל החוסם משולש.

4. מצאו את מרכז המעגל בכל אחד מהמשולשים הבאים. שרטטו, תארו את הבניה וציינו היכן המרכז נופל: בתוך, מחוץ או על אחת מצלעות המשולש.
   א) המשולש חד זווית.
   ב) המשולש ישר זווית.
   ג) המשולש קהה זווית.

ומה לגבי מרובע? נבדוק האם ניתן לחסום כל מרובע במעגל.



5. א) מצאו מרכז של מעגל שעובר דרך A, B ו-C על-ידי שרטוט אנכים אמצעיים לצלעות מתאימות של המרובע ABCD.

ב) העבירו אנך אמצעי ל- CD.

(i) מצאו נקודות מפגש לשלושת האנכים האמצעיים שהעברתם?

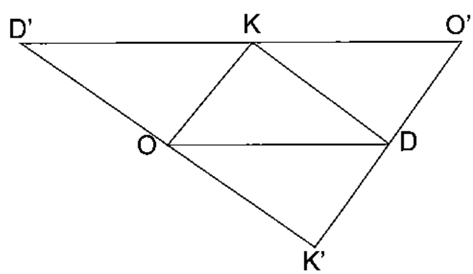
(ii) איזה תנאי צריכים לקיים האנכים האמצעיים לצלעות, כדי שהמעגל יחסום את המרובע?

6. א) הוכיחו: אם שלושה אנכים אמצעים לצלעות של מרובע, נפגשים בנקודה אחת, גם הרביעי עובר דרך נקודה זו.

ב) נסחו משפט הפוך והוכיחו אותו.

בסעיף הבא תכירו תנאי נוסף, לפיו ניתן לקבוע, אם אפשר לשרטט מעגל חוסם למרובע.

7. ב-ΔKOD שרטטו מקבילים לצלעות דרך הקודקודים והתקבל משולש K'O'D'.



א) הוכיחו שהגבהים של משולש KOD, הם אנכים אמצעיים לצלעות המשולש K'O'D'.

ב) הגבהים נפגשים בנקודה אחת. נמקו.

הוכחתם:

משפט: שלושת הגבהים של משולש נפגשים בנקודה אחת.

8. הוכיחו כי כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל.

רמז: הראו שכל האנכים האמצעיים במצולע נפגשים בנקודה אחת.

אפשר להיעזר בשרטוט שניתן בשאלה מקבילה לגבי מעגל חסום במצולע משוכלל (תרגיל 14, בעמוד 133).

סיכום

בסעיף זה הכרתם את המושגים מעגל חוסם מצולע.

כמו כן הוכחתם את המשפטים הבאים:

- אם ארבעת האנכים האמצעיים במרובע נפגשים בנקודה אחת, אז ניתן להעביר מעגל חוסם, ומרכזו הוא מפגש האנכים האמצעיים, ולהיפך, אם מעגל חוסם מרובע אז ארבעת האנכים האמצעים נפגשים בנקודה אחת.
- האנכים האמצעיים במשולש נפגשים בנקודה אחת ואילו במרובע לא תמיד.
- שלושת הגבהים של משולש נפגשים בנקודה אחת.
- כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל.

תרגילים

9. א) הוכיחו: אם משולש ABC ישר זווית ($\angle A=90^\circ$), אז מרכז המעגל החוסם נמצא על היתר.

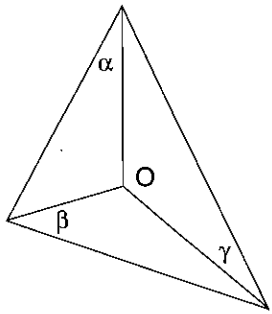
רמז: שרטטו תיכון ליתר, המשיכו אותו כאורכו, השלימו אותו למרובע.

נחזור למשפט זה בסעיף הבא ונוכיח אותו בדרך שונה.

ב) נסחו את המשפט ההפוך לזה הרשום בסעיף א'.

האם המשפט ההפוך נכון? אם כן הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

10. O נקודה בתוך המשולש והיא מרכז המעגל החוסם אותו.



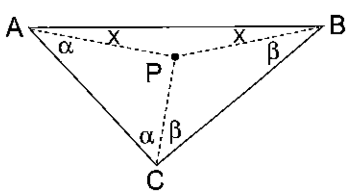
א) מהו סכום הזוויות α, β ו-γ? נמקו.

ב) מה הוא סכום הזוויות האלה אם O מרכז המעגל החסום במשולש? נמקו.

ג) האם ניתן להסיק, על סמך התשובות בסעיפים א' ו-ב', שמרכז המעגל החסום במשולש ומרכז המעגל החוסם את המשולש מתלכדים?

ד) באיזה משולש מרכז המעגל החוסם ומרכז המעגל החסום מתלכדים? הסבירו.

11. נתון: $\alpha + \beta > 90°$ ו-P מרכז המעגל החוסם את ΔABC.



א) הביעו את גודלה של זווית x באמצעות α ו-β.

(i) האם השרטוט מתאים?

(ii) היכן יימצא מרכז מעגל החוסם משולש קהה זווית? נסחו משפט ונמקו.

ב) נסחו משפט הפוך לזה שנסחתם בסעיף א'. האם הוא נכון? נמקו.

12. קבעו לגבי הטענות הבאות אם הן נכונות.

אם הטענה נכונה, נמקו. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א) מרכז המעגל החסום במשולש נמצא תמיד בפנים המשולש.

ב) מרכז המעגל החוסם משולש נמצא תמיד בפנים המשולש.

ג) במשולש שווה שוקיים מרכז המעגל החוסם והחסום – מתלכדים.

ד) במשולש שווה צלעות מרכז המעגל החוסם והחסום – מתלכדים.

ה) אם מרכז המעגל החוסם משולש, מתלכד עם מרכז המעגל החסום במשולש, אז המשולש שווה צלעות.

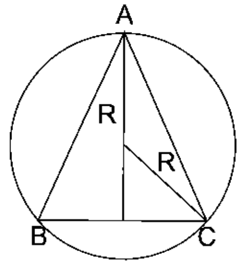
13. הוכיחו כי במשולש שווה שוקיים שלושת הנקודות: קודקוד זווית הראש, מרכז מעגל החוסם את המשולש ומרכז מעגל החסום במשולש, נמצאות על ישר אחד. מיהו ישר זה? שרטטו.

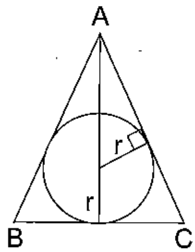
14. במשולש ABC נתון: AB = AC, ‏13 יח' = AC, ‏10 יח' = BC.

א) חשבו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

ב) חשבו את רדיוס המעגל החסום במשולש.

היעזרו בשרטוטים ובנו לכל סעיף משוואה עם הרדיוס המתאים.





15. א) האם ניתן לחסום כל מלבן במעגל? אם כן, הוכיחו.

אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

ב) האם ניתן לחסום כל מקבילית במעגל?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

ג) האם ניתן לחסום כל דלתון במעגל?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

ד) האם ניתן לחסום כל מעוין במעגל?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

16. א) הוכיחו: אם מעגל חוסם טרפז אז הטרפז הוא שווה שוקיים.

ב) נסחו את המשפט ההפוך. האם הוא נכון? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

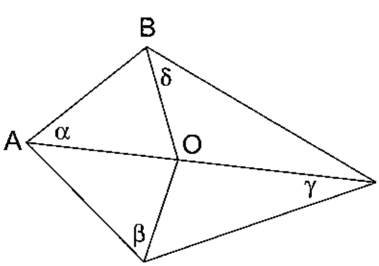
17. א) O מרכז המעגל החוסם את המרובע ABCD.

מהו סכום הזוויות α, β, γ, δ?

ב) O מרכז המעגל החסום במרובע ABCD.

מהו סכום הזוויות α, β, γ, δ?

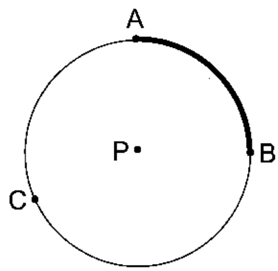
ג) איזה מרובע מתקבל אם O הוא גם מרכז המעגל החוסם את המרובע וגם מרכז המעגל והחסום במרובע?



זוויות במעגל

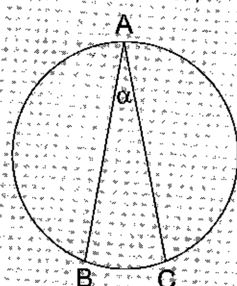
הגדרה: שתי נקודות על המעגל וקבוצת כל הנקודות שביניהן, הנמצאות על המעגל, נקראת **קשת**.

סימון: בקשת $\overset{\frown}{AB}$ מסמנים את הקשת הקטנה יותר בין A ל-B המודגשת בשרטוט.
הקשת הגדולה יותר תסומן על-ידי צרוף נקודה נוספת למשל $\overset{\frown}{ACB}$.

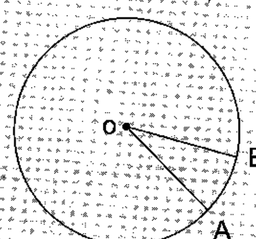


הגדרות:

- זווית שקודקודה על המעגל ושוקיה מיתרים, נקראת **זווית היקפית** במעגל.
נאמר כי זווית α נשענת על הקשת $\overset{\frown}{BC}$.

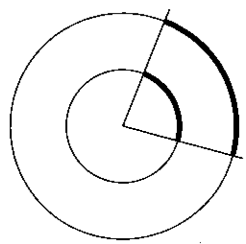


- זווית שקודקודה במרכז המעגל נקראת **זווית מרכזית** במעגל.
נאמר כי $\sphericalangle AOB$ נשענת על הקשת $\overset{\frown}{AB}$.



ניתן "למדוד" את קשת $\widehat{AB}$ במעלות (בנוסף למדידת אורך הקשת), ולומר כי גודלה במעלות כגודל הזווית המרכזית AOB הנשענת עליה.

מידת הקשתות המודגשות במעלות, בשני המעגלים המשורטטים, שווה וזאת למרות שאורך הקשתות שונה.

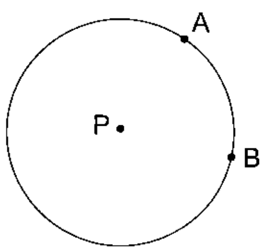


1. א) במעגל שמרכזו **P**, שרטטו זווית היקפית הנשענת על הקשת $\widehat{AB}$.

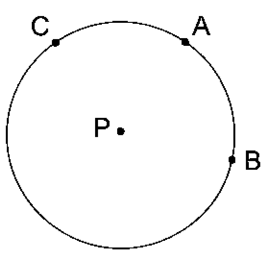
   כמה זוויות כאלה אפשר לשרטט?

   ב) במעגל שמרכזו P, שרטטו זווית מרכזית הנשענת על הקשת $\widehat{AB}$.

   כמה זוויות כאלה אפשר לשרטט?



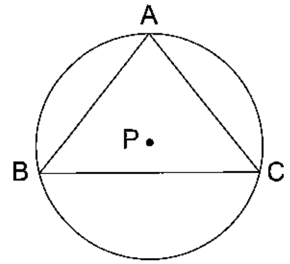
   ג) שרטטו זווית היקפית הנשענת על הקשת $\widehat{ACB}$.



2. הוכיחו:

משפט: אם שני מיתרים במעגל שווים זה לזה אז הזוויות המרכזיות המתאימות (שגודלן קטן מ- $180°$), שוות זו לזו.

3. במעגל P, AB = AC.



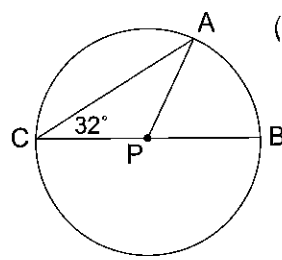
א) הוכיחו: AP חוצה את $\angle BAC$.

ב) נתון גם: $\angle A = 80^\circ$. חשבו את $\angle BPC$.

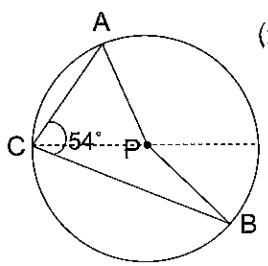
ג) $\angle A = \alpha$. בטאו את כל אחת מזוויות המשולש BPC בעזרת α.

4. בכל אחד מהשרטוטים נתונה זווית היקפית הנשענת על קשת AB. P מרכז המעגל. סמנו וחשבו את הזווית המרכזית הנשענת על קשת AB.

א)



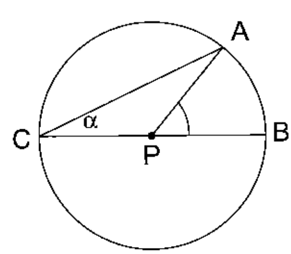
ב)



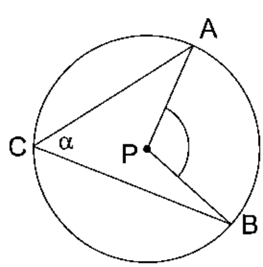
5. בכל אחד מהשרטוטים, בטאו את הזווית המרכזית APB בעזרת הזווית ההיקפית שגודלה α (P מרכז המעגל).

רמז: שרטטו קוטר מ-C (אם אינו משורטט).

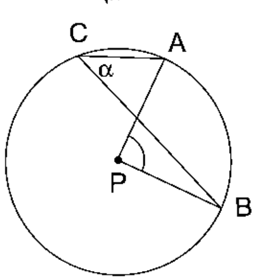
א)



ב)



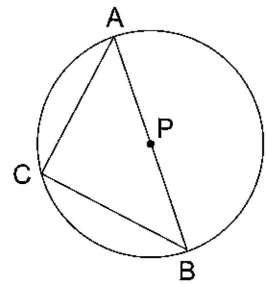
ג)



הוכחתם בשלבים את המשפט:

> *משפט:* זווית היקפית במעגל שווה לחצי הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

6. א) מה תוכלו לומר על זווית היקפית הנשענת על קוטר (על חצי מעגל)? נמקו.



ב) נסחו במילים את המסקנה שהוכחתם.

ג) נסחו משפט הפוך והוכיחו אותו.

הערה

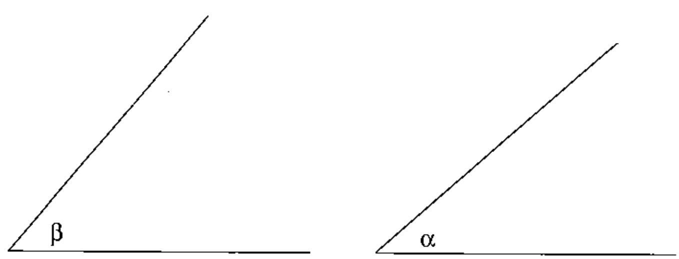
בסעיף קודם תרגיל 9 עמוד 140, הוכחתם את המשפטים מתרגיל 6 בדרך אחרת.

7. $\measuredangle ACB > 90°$ זווית היקפית במעגל, שרטטו.

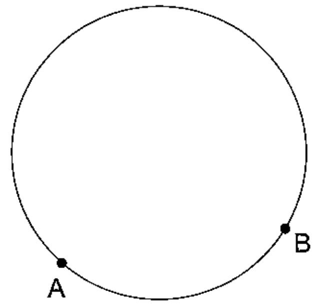
מה תוכלו לומר על הקשת עליה נשענת $\measuredangle ACB$?

שרטטו וסמנו את הזווית המרכזית המתאימה ל-$\measuredangle ACB$.

8. העתיקו על דף שקוף את שתי הזוויות α ו-β והיעזרו בהן להשיב על השאילות.



א) נסו להניח את α כך שקודקוד הזווית יהיה על המעגל ושוקי הזוויות יעברו דרך A ו-B. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?



ב) חזרו על הפעילות בסעיף א' עבור זווית β.

ג) הסבירו את הממצאים שקיבלתם בסעיפים קודמים. נסחו מסקנה מתאימה והסבירו.

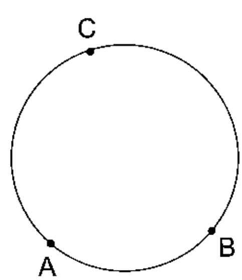
ד) נסחו מסקנה מתאימה לגבי כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה קשת. הסבירו.

ה) כאשר מניחים את זווית β כך ששוקיה עוברים דרך A ו-B, קודקוד הזווית נופל על המעגל. בדקו.

הוכיחו כי זווית הנשענת על קשת $\widehat{AB}$ וקדקודה בתוך המעגל גדולה מזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת.

ו) נסחו והוכיחו טענה לגבי זווית שקדקודה מחוץ למעגל והיא נשענת על קשת $\widehat{AB}$.

9. א) שרטטו זווית היקפית הנשענת על קשת AB וזווית היקפית הנשענת על קשת $\widehat{ACB}$ נסחו והוכיחו מסקנה לגבי סכום זוויות אילו.

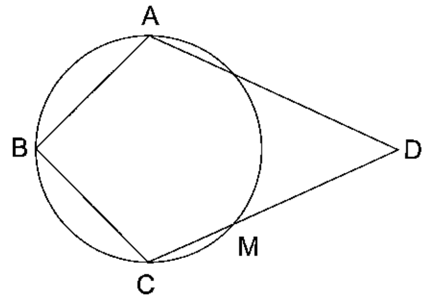


היעזרו במסקנה שקיבלתם והשלימו: אם מרובע חסום במעגל אז סכום הזוויות ___________.

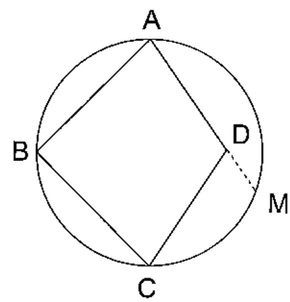
10. נתון מרובע ABCD. דרך הנקודות C ,B ,A מעבירים מעגל.

א) הוכיחו כי אם D חיצונית למעגל, אז $\measuredangle B + \measuredangle D < 180°$

רמז: חברו את A עם M.



ב) הוכיחו כי אם D פנימית למעגל, אז $\measuredangle B + \measuredangle D > 180°$.



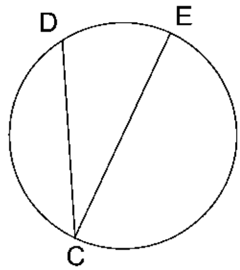
11. נסחו את המשפט ההפוך למשפט שהוכחתם בשאלה 9.

היעזרו בשאלה 10 והוכיחו את המשפט.

מצאנו כאן קריטריון נוסף כדי לקבוע מתי ניתן לחסום מרובע במעגל.
בסעיף הקודם קבענו שמרובע בר חסימה (כלומר ניתן לחסום אותו במעגל), אם ארבעת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת. כאן ראינו כי מרובע בר חסימה אם סכום הזוויות הנגדיות בו הוא 180°.

12. בתרגיל זה נבדוק את הקשר בין זווית בין משיק ומיתר לזווית היקפית במעגל. תרגיל זה ניתן לבצע בעזרת לומדה ("הנדסה בתנועה" או "משער גיאומטרי") או בעזרת שקף.

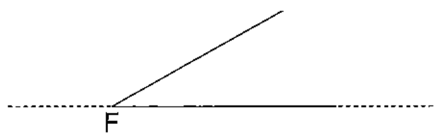
הוראות ללומדה:



- שרטטו זווית כמו בשרטוט.
- דאגו שהזווית תהיה חדה (סמנו תחילה את נקודה C ושרטטו את שוקי הזווית).
- שרטטו זווית היקפית נוספת DFE כך ש-F על קשת EC.
- סמנו F על המעגל ושרטטו את שוקי הזווית.
- שנו את קטע EF לישר.

הוראות לשקף:

- העתיקו את הזווית על שקף.



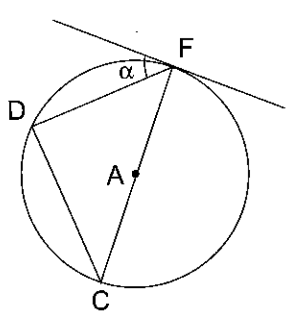
- הניחו את השקף כך ש-F על קשת EC.

מה תוכלו לומר על שתי הזוויות ההיקפיות? הזיזו את זווית DFE בנקודה F עד אשר F תתלכד עם E.

א) מה תוכלו לומר על כל הזוויות ההיקפיות שהתקבלו לפני ש-F מגיעה ל-E?

ב) כאשר F על E, איזה ישר התקבל? שערו מה גודל הזווית החדה בין הישר ל-DF.

כדי להקל בהוכחת השערתכם שנו את זווית DCF מקודקוד C כך ש-CF יהווה קוטר (ראו שרטוט).



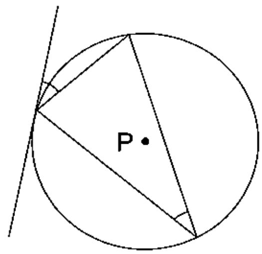
נסמן את הזווית בין המשיק דרך F והמיתר DF ב-α.

(i) הביעו את הזווית ההיקפית C בעזרת α.

(ii) מה גודלה של זווית היקפית אחרת הנשענת על DF?

בתרגיל 12 הוכחתם את המשפט.

משפט: זווית בין משיק למיתר במעגל, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על הקשת הכלואה בין המשיק למיתר.



בסעיף זה הכרתם את המושגים **זווית היקפית וזווית מרכזית**.

כמו כן הוכחתם את המשפטים:

- זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
- זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות.
- זווית היקפית הנשענת על חצי מעגל, היא זווית ישרה, ולהיפך, זווית היקפית ישרה, נשענת על חצי מעגל.
- זוויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים, שוות זו לזו, ולהיפך.
- מרובע חסום במעגל, אם ורק אם סכום הזוויות הנגדיות שלו $180°$.
- זווית בין משיק למיתר במעגל, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על הקשת הכלואה בין המשיק למיתר.

תוכלו כעת להיעזר במשפטים בפרק זה ולהוכיח משפטים הקשורים במעגל החוסם משולש ומרובע שנתקלתם בהם בפרק הקודם.

13. רשמו והוכיחו היכן מרכז המעגל בכל אחד מהמשולשים הבאים.

א) המשולש חד זווית.

ב) המשולש ישר זווית.

ג) המשולש קהה זווית.

14. לגבי כל מרובע שרטטו, אם אפשר, מעגל שיחסום אותו. הסבירו.

א) מקבילית שאינה מלבן.

ב) מלבן שאינו ריבוע.

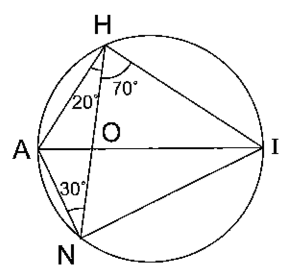
ג) טרפז – הבחינו בין טרפזים שונים.

ד) מרובע שאינו מקבילית, טרפז או דלתון.

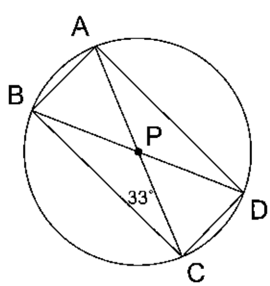
תרגילים

15. חשבו את יתר הזוויות שבשרטוט לפי הנתונים

א)



ב) P מרכז המעגל.



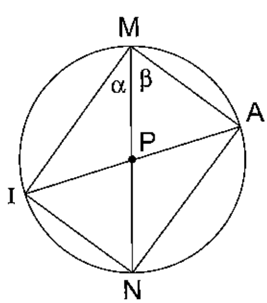
16. א) P מרכז מעגל. MN ו-IA קטרים.

נתון: $\sphericalangle IMN = \alpha$, $\sphericalangle AMN = \beta$.

(i) מאיזה סוג המרובע MANI?

(ii) בטאו את שאר הזוויות בעזרת α ו-β.

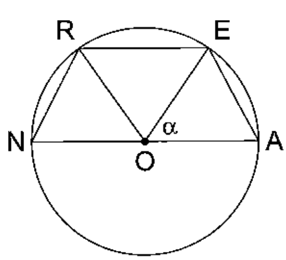
(iii) האם ניתן לבטא את β באמצעות α? אם כן, בטאו.



ב. NAER טרפז החסום במעגל O ‏(NA||RE).

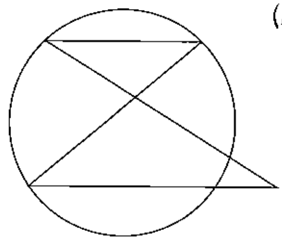
NA קוטר, $\sphericalangle EOA = \alpha$.

בטאו את שאר הזוויות בעזרת α.

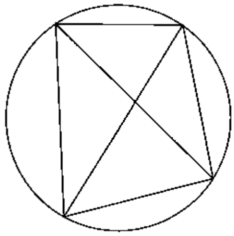


17. סמנו, אם ניתן, באותה אות (בעזרת α, β וכו') זוויות שוות.

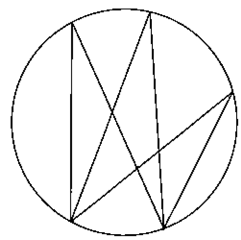
א)



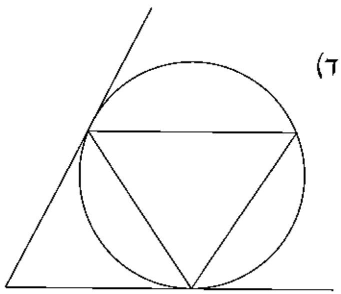
ב)



ג)

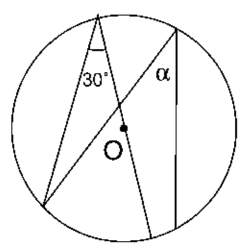


ד)

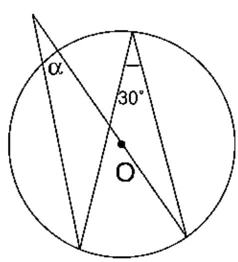


18. O מרכז המעגל. מה תוכלו לומר על הזווית המסומנת ב-α? נמקו.

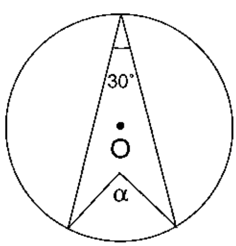
א)



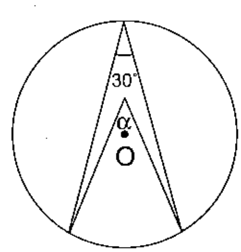
ב)



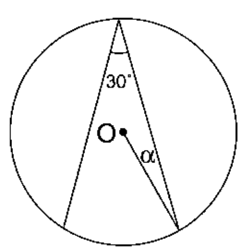
ג)



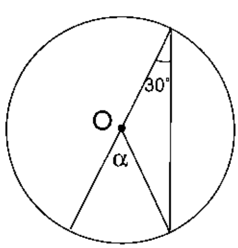
ד)



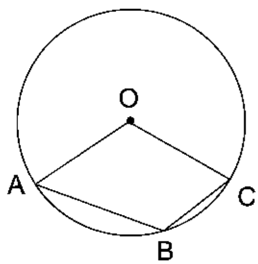
ה)



ו)



19. O מרכז המעגל.



הוכיחו: $\sphericalangle B = \sphericalangle A + \sphericalangle C$.

רמז: סמנו ב-x את $\sphericalangle B$, והוכיחו את $\sphericalangle O$ בעזרת x.

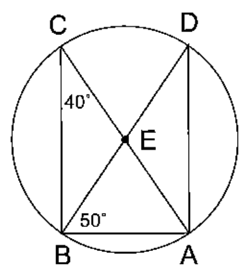
20. משולש שווה שוקיים חוסם מעגל שרדיוסו 10 ס"מ. הקשת בין נקודות ההשקה של שוקי המשולש עם המעגל, שווה ל-120°. חשבו את אורך שוק המשולש.

21. ABCD ריבוע החסום במעגל. $\sphericalangle E$ היקפית הנשענת על הקשת DC. $\sphericalangle F$ היקפית הנשענת על הקשת AC. שרטטו וחשבו את גודלן של הזוויות E ו-F.

22. מרובע ABCD חסום במעגל. האלכסון AC קוטר.

האם ניתן להסיק ש-ABCD מלבן? נמקו.

23. על סמך הנתונים בשרטוט,



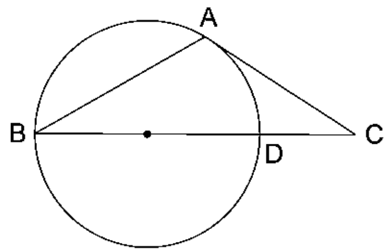
א) מה תוכלו לומר על הנקודה E?

ב) מה תוכלו לומר על המרובע ABCD?

24. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B באופן שקשתו של האחד הנמצאת בתוך המעגל השני היא בת 40°, וקשתו של השני הנמצאת בתוך המעגל הראשון היא בת 25°. שרטטו.

דרך B עובר ישר CBD החותך את המעגלים (לא בקשתות הפנימיות) בנקודות D ,C. חשבו את זווית CAD.

25. AC משיק למעגל בנקודה A.

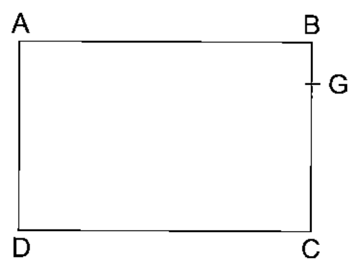


AB = AC, BD קוטר.

מצאו את זוויות ΔABC.

26. ABCD מלבן.

G נקודה כלשהי על BC.



GE חוצה את $\measuredangle BGD$ (E על המשך AD), שרטטו.

GF חוצה את $\measuredangle DGC$ (F על DC), שרטטו.

א) הוכיחו כי ניתן לחסום במעגל את המרובע EDFG.

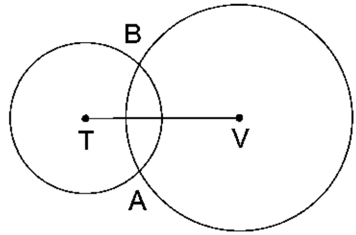
ב) הוכיחו: $\measuredangle GFC = \measuredangle EGD$

27. הזוויות החדות בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$) הן $60°$.

בטרפז זה חסום מעגל.

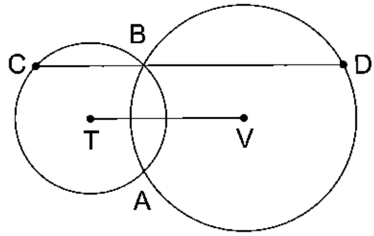
חשבו את זוויות המרובע המתקבל, מחיבור נקודות ההשקה של המעגל והטרפז.

28. T ו-V מרכזי מעגלים.



א) הוכיחו כי TV אנך אמצעי ל-AB.

ב) נתון: CD||TV.

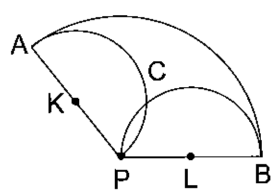


הוכיחו:

(i) T, V נמצאות על צלעות המשולש ACD.

(ii) $CD = 2 \cdot TV$

29. PA ו-PB הם שני רדיוסים של מעגל שמרכזו P.



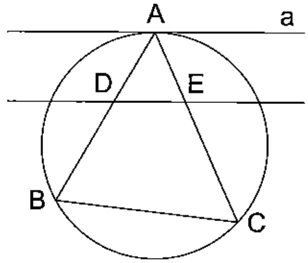
PA ו-PB הם שני קטרים של המעגלים שמרכזם K ו-L בהתאמה.

הוכיחו כי A, C, B על ישר אחד.

30. הישר a משיק למעגל בנקודה A.

נתון כי DE||a.

הוכיחו כי מרובע BDEC ניתן לחסימה במעגל.



הגדרה: שני מעגלים נקראים מעגלים משיקים, אם יש להם משיק משותף באותה הנקודה.

31. א) הישר המחבר מרכזי מעגלים משיקים מאונך למשיק המשותף. הוכיחו.

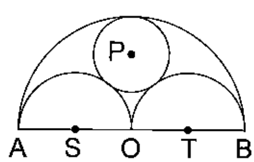
ב) המרחק בין מרכזי מעגלים משיקים הוא סכום הרדיוסים או הפרשם. שרטטו את שני המקרים.

32. AB קוטר של מעגל שמרכזו O.

AO = 12 יח'.

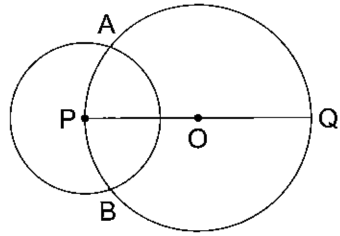
מעגל שמרכזו P משיק לשלושת חצאי המעגלים שבשרטוט.

מצאו את אורך הרדיוס של המעגל שמרכזו P.

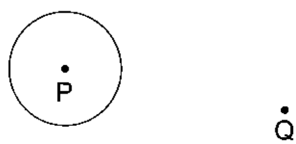


33. א) מרכז המעגל P, נמצא על קצה קוטר של מעגל שמרכזו O.

הוכיחו, כי: QA, QB משיקים למעגל P.



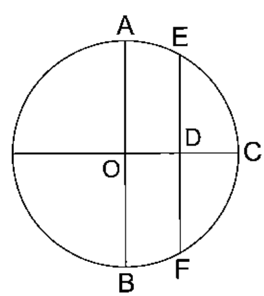
ב) שרטטו משיקים למעגל P מנקודה Q.



34. במעגל שמרכזו O העבירו קוטר AB ורדיוס OC המאונך ל-AB.

דרך האמצע D של הרדיוס OC העבירו מיתר EF המקביל ל-AB.

הוכיחו כי: $\sphericalangle CBE = 2 \sphericalangle ABE$



רמז: התייחסו למשולש EOC.

מבחר תשובות לפרק ג': המעגל

מעגל וישר (עמודים 128-122)

4. א) 8 ס"מ = PD

ב) 9.16 ס"מ = PD

ג) $PD = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$

ד) משיק, המרחק שווה ל-r.

7. 24 יח'

8. א) 30° ב) 13.86 יח'

9. א) ריבוע ב) דלתון

מעגל חסום וחוסם (עמודים 142-129)

מעגל חסום (עמודים 137-129)

15. הרדיוס: 4 יח', $\sphericalangle COB = 120^\circ$

17. א) כן ב) לא ג) כן ד) לא

18. א) לא ב) כן ג) כן ד) לא

21. א) $\frac{1}{2}a$ ב) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ג) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$

מעגל חוסם (עמודים 142-138)

10. א) 90° ב) 90° ג) לא ד) משולש שווה צלעות

14. א) 7.04 יח' ב) $3\frac{1}{3}$ יח'

זוויות במעגל (עמודים 157-143)

3. ב) $\sphericalangle BPC = 160^\circ$ ג) $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PCB = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle BPC = 2\alpha$

4. א) 64° ב) 108°

5. א) 2α ב) 2α ג) 2α

15. א) חלק מהזוויות: $\sphericalangle HIA = 30^\circ$, $\sphericalangle ONI = 60^\circ$, $\sphericalangle NOI = 100^\circ$

ב) למשל: $\sphericalangle ADP = \sphericalangle PBC = 33^\circ$, $\sphericalangle APB = 66^\circ$

16. א) (ii) כן, $\beta = 90^\circ - \alpha$

ב) $\sphericalangle OER = \sphericalangle RON = \sphericalangle ORE = \alpha$,

$$\sphericalangle OEA = \sphericalangle OAE = \sphericalangle ORN = \sphericalangle RNO = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\sphericalangle ROE = 180^\circ - 2\alpha$$

20. $20\sqrt{3}$ ס"מ.

21. $\sphericalangle F = 90^\circ$, $\sphericalangle E = 45^\circ$

22. לא

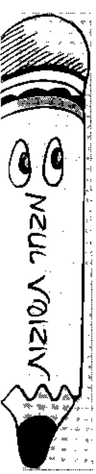
23. א) E על הקוטר BD ב) במרובע יש שתי זוויות נגדיות ישרות

24. 147.5°

25. $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$

27. א) $90^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 60^\circ$

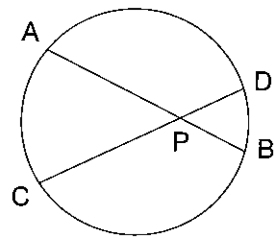
32. הרדיוס: 4 יח'



פרק ד: הכול יחד

דמיון במעגל

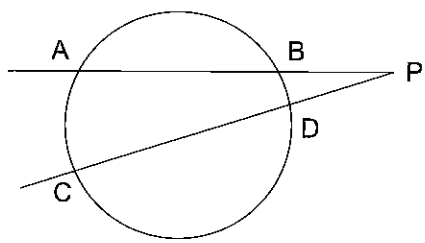
1. הוכיחו: אם שני מיתרים AB ו-CD נחתכים **בתוך המעגל** בנקודה P, אז: $AP \cdot PB = CP \cdot PD$



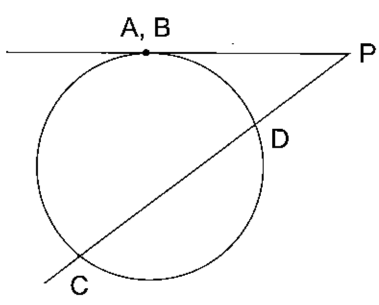
רמז: חברו את DB ו-AC והיעזרו בדמיון משולשים.

2. הוכיחו, כי הטענה שבתרגיל הקודם, נכונה בכל ארבעת המקרים הבאים:

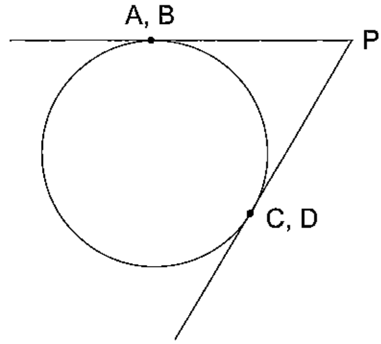
א) כאשר הישרים AB ו-CD חותכים את המעגל, ונקודת פגישתם P נמצאת **מחוץ למעגל.** האם ההוכחה שרשמתם בתרגיל 1 מתאימה גם כאן?



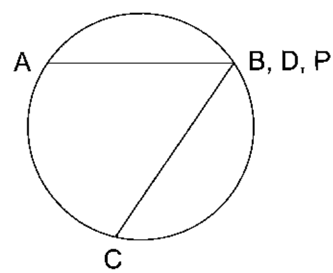
ב) כאשר אחד מהישרים, נניח AB, משיק למעגל, (A ו-B מתלכדות), והישר השני חותך את המעגל, ונקודת פגישתם P נמצאת מחוץ למעגל. האם ההוכחה שרשמתם בתרגיל 1 מתאימה גם כאן?



ג) כאשר שני הישרים משיקים למעגל (A מתלכדת עם B ו-C עם D), ונקודת פגישתם P נמצאת מחוץ למעגל.



ד) כאשר שני הישרים חותכים את המעגל, ונקודת פגישתם P נמצאת על המעגל. (B ו-D מתלכדות עם P שעל המעגל).



בתרגיל 2 הוכחתם:

משפט: אם נקודה נמצאת מחוץ למעגל, אז מכפלת כל חותך מהנקודה החיצונית לנקודה הרחוקה יותר על המעגל, בחלקו החיצוני של החותך, הוא גודל קבוע השווה לריבוע המשיק מהנקודה.

הערה

אורך החותך הכוונה למרחק מהנקודה החיצונית לנקודה הרחוקה יותר על המעגל.

סיכום

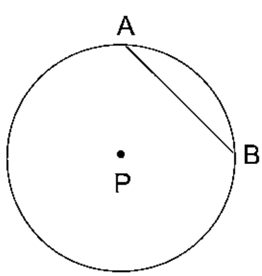
הוכחתם את המשפטים:

- אם שני מיתרים נחתכים בתוך המעגל בנקודה P, אז מכפלה של קטעי מיתר אחד הנוצרים על-ידי P, שווה למכפלה של קטעי המיתר השני הנוצרים על-ידי P.
- אם נקודה P נמצאת מחוץ למעגל, אז מכפלת אורך חותך מ-P בחלקו החיצוני של החותך, הוא גודל קבוע השווה לריבוע המשיק מהנקודה P.
- אם שני חותכים יוצאים מאותה נקודה, אז מכפלה של אורך חותך אחד בחלקו החיצוני, שווה למכפלת אורך חותך שני בחלקו החיצוני.

תרגילים

3. AB מיתר במעגל P שאורכו 8 ס"מ. AB מחלק קוטר המאונך לו לשני חלקים (שרטטו את הקוטר).

החלק הארוך יותר שווה ל-10 ס"מ.



א) חשבו את רדיוס המעגל.

ב) PD מרחק של המיתר AB ממרכז המעגל. חשבו את PD.

ג) שרטטו קוטר AC במעגל, וחשבו את אורך המיתר BC.

4. AB מיתר במעגל P. PD מרחק המיתר מהמרכז. AC קוטר במעגל.

שרטטו או היעזרו בשרטוט של שאלה 3.

א) הוכיחו כי: $BC = 2 \cdot PD$.

ב) בדקו שתשובותיכם לסעיפים ב' ו-ג' של שאלה 3 מקיימות את המשוואה הרשומה בסעיף א'.

5. מנקודה A מחוץ למעגל P מעבירים חותך שאורכו a ס"מ (שרטטו). אורכו החיצוני שווה למחצית אורך החותך. מאותה נקודה A מעבירים חותך נוסף העובר דרך P, שאורכו 2a (שרטטו).

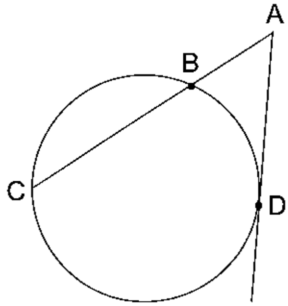
א) בטאו בעזרת a את רדיוס המעגל.

ב) בטאו בעזרת a את אורך המשיק היוצא מנקודה A.

6. מנקודה A מחוץ למעגל P מעבירים חותך AC שאורכו a ס"מ. אורכו החיצוני של החותך שווה למחצית אורך החותך.

מאותה נקודה A מעבירים משיק AD למעגל, D נקודת ההשקה.

הוכיחו כי CD הוא קוטר במעגל.



7. במעגל חסום משולש שווה שוקיים ששוקו 13 ס"מ ובסיסו 10 ס"מ. חשבו את רדיוס המעגל (שרטטו).

רמז: שרטטו את הגובה לבסיס והאריכו אותו עד שיפגוש שוב את המעגל.

8. שני מעגלים נחתכים בנקודות A , B. מנקודה K על המשך המיתר המשותף AB, מעבירים לשני המעגלים חותכים שווים KC , KD (C, D נקודות החיתוך על המעגלים הרחוקות יותר). שרטטו.

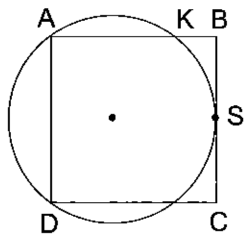
א) הוכיחו כי שני החלקים החיצוניים של שני החותכים שווים.

ב) האם תשובתכם לסעיף א' תשתנה אם המעגלים משיקים זה לזה בנקודה A ו-K על המשיק המשותף ב-A?

9. א) ABC הוא משולש שווה צלעות כך שהצלע BC משיקה למעגל נתון בנקודה S ו-S היא אמצע BC. הקודקוד A על המעגל ו-AB חותכת את המעגל בנקודה K. שרטטו.

הוכיחו: BK הוא רבע מאורך צלע המשולש.

ב) ABCD ריבוע כך שהצלע BC משיקה למעגל נתון בנקודה S, ושני הקדקודים האחרים על המעגל. הצלע AB חותכת את המעגל בנקודה K.



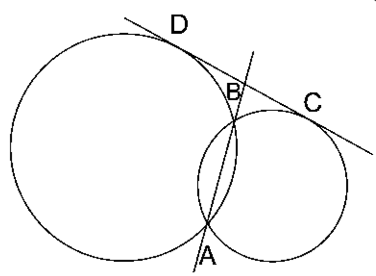
(i) הוכיחו: S אמצע BC.

(ii) הוכיחו: BK הוא רבע מאורך צלע הריבוע.

ג) ABCDE מחומש משוכלל כך שהצלע BC משיקה למעגל נתון, ושלושת הקדקודים האחרים על המעגל. הצלע AB חותכת את המעגל בנקודה K. שרטטו והוכיחו: BK הוא רבע מאורך צלע המחומש.

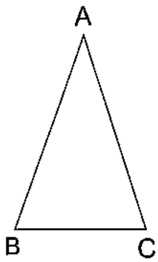
ד) נסחו טענה דומה למשושה משוכלל והוכיחו.

10. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. DC משיק משותף לשני המעגלים (D ו-C הם נקודות ההשקה)



הוכיחו כי הישר AB חוצה את CD.

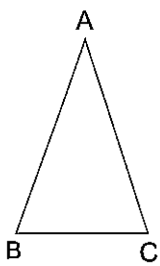
תרגילים מכל הנושאים



1. ABC משולש שווה שוקיים (AB=AC). CE ו-BD תיכונים לשוקיים (D על AC , E על AB).

א) שרטטו את התיכונים והוכיחו: BD=CE .

ב) הוכיחו: BCDE טרפז שווה שוקיים.



2. ABC משולש שווה שוקיים (AB=AC).

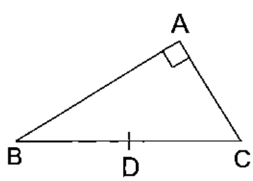
א) חוצי הזוויות החיצוניות של זוויות הבסיס נפגשים בנקודה D. שרטטו.

איזה סוג הוא המרובע ABDC? הוכיחו.

ב) E מפגש של חוצה הזווית החיצונית של זווית A עם חוצה הזווית החיצונית של זווית B. שרטטו.

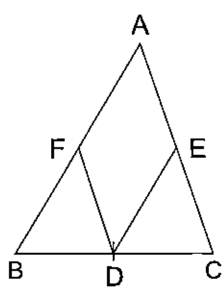
איזה סוג המשולש ABE? הוכיחו.

ג) האם המשולשים BDC ו-ABE דומים? האם הם חופפים? הוכיחו.



3. א) מנקודת אמצע היתר (D) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$), העבירו אנכים לניצבי המשולש.

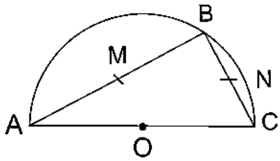
מה היחס בין שטח המרובע הכלוא בין הצלעות והאנכים, לשטח משולש ABC?



ב) מנקודת אמצע הצלע BC מעבירים מקבילים לשתי הצלעות האחרות.

מה היחס בין שטח המרובע AFDE לשטח המשולש ABC?

4. משולש ABC חסום בחצי מעגל שמרכזו O.



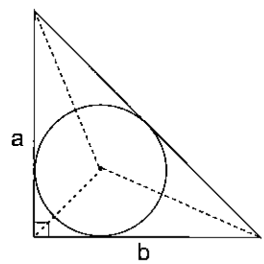
M אמצע AB, N אמצע BC.

א) מהו סוג המרובע OMBN?

ב) מה היחס בין שטח המרובע OMBN לשטח משולש ABC?

ג) האם המשולשים OMB ו-ONC דומים? האם הם חופפים? הוכיחו.

5. במשולש ישר זווית שניצביו a ו-b חסום מעגל.



הביעו את רדיוס המעגל r בעזרת a ו-b.

6. הוכיחו כי בכל משולש מתקיים: $S = \frac{r(a+b+c)}{2}$ כאשר a, b, c צלעות המשולש, S שטחו ו-r רדיוס המעגל החסום במשולש.

7. הוכיחו: היחס בין היקף משולש לאחת מצלעותיו שווה ליחס בין הגובה לצלע זאת ורדיוס המעגל החסום במשולש זה.

8. במשולש ABC ישר זווית ושווה שוקיים ($\sphericalangle C = 90^\circ$) חסום מעגל. D ו-E נקודות ההשקה על הניצבים, F נקודת ההשקה על היתר. שרטטו.

מחיבור נקודות ההשקה מתקבלים ארבעה משולשים (לא כולל את המשולש הנתון).

א) (i) הוכיחו ששלושה מהם דומים.

(ii) כמה מהם חופפים? הוכיחו.

ב) חשבו את זוויות המשולש EDF.

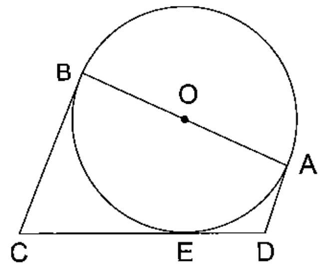
ג) נתון גם כי רדיוס המעגל החסום הוא r. הביעו את ניצבי משולש ABC באמצעות r.

רמז: הביעו את שטח משולש ABC בשני אופנים.

ד) מצאו את היחס בין שטח המשולש CED לשטח המשולש ABC.

9. במעגל O שרדיוסו 4 ס"מ העבירו קוטר AB.

BC, AD, CD משיקים למעגל בהתאמה בנקודות B, A, E.



א) הוכיחו שמרובע ABCD הוא טרפז.

ב) נתון CD = a, הביעו באמצעות a את היקף הטרפז ואת שטח הטרפז.

ג) הוכיחו ש-OE מחלק את הטרפז לשני דלתונים.

ד) הוכיחו שהזווית בין האלכסונים הראשיים של הדלתונים ישרה.

ה) 10 ס"מ = CD, חשבו היקף כל דלתון ($CE > ED$).

10. במעגל מעבירים שני משיקים. מעבירים גם את הרדיוסים המחברים את מרכז המעגל לנקודות ההשקה.

איזו זווית נוצרת בין רדיוסים אלה אם:

א) המשיקים מאונכים זה לזה. שרטטו.

ב) המשיקים מקבילים זה לזה. שרטטו.

11. שני משיקים למעגל O מנקודה מחוץ למעגל A, מאונכים זה לזה.

א) איזה מרובע מתקבל בין המשיקים והרדיוסים למשיקים אלה? הוכיחו.

ב) אם 8 ס"מ = OA, מה היקף המרובע? מה שטח המרובע?

12. בריבוע ABCD, הנקודות E , F , G , H הן בהתאמה אמצעי הצלעות:

AB , BC , CD , DA .

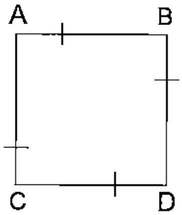
א) מהו סוג המרובע EFGH? הוכיחו.

ב) מצאו את היחס בין שטחי המרובעים ABCD ו-EFGH.

ג) חיברו את אמצעי צלעות המרובע EFGH. איזה מרובע התקבל? הוכיחו.

ד) מצאו את היחס בין שטח המרובע שהתקבל בסעיף ג' לשטח הריבוע ABCD.

13. בריבוע ABCD, חילקו כל צלע באותו יחס, כך שהקטעים הבלתי שווים של צלעות סמוכות יהיו סמוכים זה לזה (ראו שרטוט).



איזה מרובע מתקבל מחיבור ארבע נקודות החלוקה? הוכיחו.

14. מנקודה A מחוץ למעגל O משרטטים שני משיקים. הישר העובר דרך הנקודות A ו-O חותך את המעגל בשתי נקודות B, ו-C. דרך נקודה B מעבירים משיק נוסף למעגל.

א) איזה משולש נוצר בין שלושת המשיקים? הוכיחו.

ב) שרטטו משיק דרך C. איזה מרובע כלוא בין ארבעת המשיקים? הוכיחו.

15. א) M נקודה כלשהי על אחת הצלעות של משולש שווה צלעות. הוכיחו שסכום המרחקים של M משתי הצלעות האחרות הוא גודל קבוע.

ב) נסחו והסבירו טענה מתאימה למשולש שווה שוקיים.

ג) האם סכום המרחקים של נקודה הנמצאת בתוך משולש שווה צלעות, משלושת הצלעות הוא גודל קבוע? אם כן הוכיחו, אחרת הראו דוגמה נגדית.

16. נתון משולש ABC שצלעותיו הם: 4 יח' = BC, 6 יח' = AC, 8 יח' = AB.

AD חוצה את זווית A ו- BM חוצה את זווית B. O נקודת מפגש של חוצי הזוויות.

חשבו את היחס שבו מחלקת O את BM.

17. במשולש שווה שוקים הבסיס הוא 12 ס"מ, השוק 10 ס"מ.

א) חשבו את גובה המשולש.

ב) חשבו את רדיוס המעגל החסום במשולש.

18. נתון משולש שווה שוקיים שבסיסו a ושוקו b.

הוכיחו: מרכז המעגל החסום מחלק את חוצה זווית הבסיס ביחס של $\frac{a+b}{b}$.

19. טרפז שווה שוקיים ABCD ($AB||DC$, AB הבסיס הקטן) חוסם מעגל O (שרטטו). M נקודת השקה של AD כך ש- 4 יח' = AM, 6 יח' = MD.

א) חשבו את היקף הטרפז.

ב) הוכיחו: $\sphericalangle AOD = 90^\circ$.

20. נתון מעוין שאינו ריבוע.

א) האם ניתן לחסום בו מעגל? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו.

ב) האם ניתן לחסום את המעוין במעגל? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו.

ג) חשבו את רדיוס המעגל למקרים שתשובתכם חיובית, לגבי מעוין שצלעו 8 ס"מ ואחת מזוויותיו 60^0.

21. בטרפז ABCD ($CD \parallel AB$, $AB < CD$) העבירו, דרך מפגש האלכסונים O, קו מקביל לבסיסים EF (E על AD, F על BC). CD גדול פי 3 מ-AB. שרטטו.

א) באיזה יחס מחלקת O כל אחד מהאלכסונים? נמקו.

ב) מצאו לפחות שלושה זוגות של משולשים דומים.

ג) הראו כי: $\frac{OF}{CD} = \frac{1}{4}$.

ד) הוכיחו $EO = OF$.

22. בטרפז שווה שוקים ABCD ($AB||CD$) האלכסונים נחתכים בנקודה O. שרטטו.

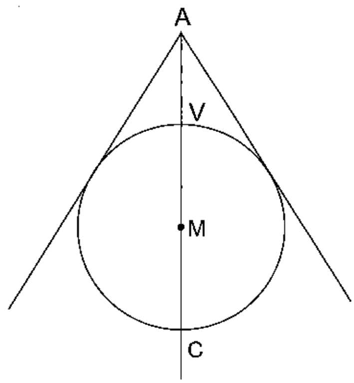
א) כמה זוגות של משולשים חופפים יש? רשמו אותם והוכיחו חפיפה של זוג אחד.

ב) כמה זוגות של משולשים דומים יש? רשמו אותם והוכיחו דמיון של זוג אחד.

23. בטרפז ABCD ($CD \parallel AB$, $AB < CD$) העבירו דרך מפגש האלכסונים O, קו מקביל לבסיסים EF (E על AD, F על BC), נתון: $AB = a$, $CD = b$.

הוכיחו כי $EO = FO = \frac{a \cdot b}{a + b}$.

24. דרך נקודה A שמחוץ למעגל M העבירו שני משיקים למעגל.
הישר AM חותך את המעגל בשתי נקודות V , C.



דרך שתי נקודות אלו העבירו שני משיקים למעגל. השלימו השרטוט. שרטטו גם את הרדיוסים לכל נקודות ההשקה.

א) אילו משולשים חופפים? רשמו אותם.

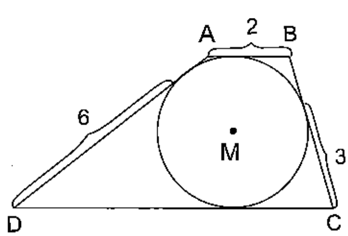
ב) אילו משולשים דומים? רשמו אותם. הוכיחו לגבי זוג אחד.

ג) רשמו את כל הטרפזים שבשרטוט. מאיזה סוג כל אחד?

ד) למה שווה הגובה בכל אחד מהטרפזים.

ה) האם יש בשרטוט מרובע שאינו טרפז? אם כן, רשמו והוכיחו.

25. בטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ חסום מעגל M.



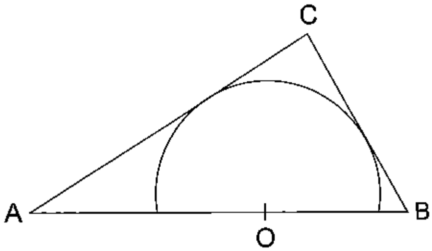
א) חשבו את הבסיס CD ואת היקף הטרפז.

ב) שרטטו משולשים BMC , AMD ובדקו את סוגם.

ג) חשבו את רדיוס המעגל.

ד) חשבו את שטח הטרפז.

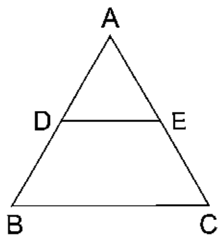
26. משורטט משולש ישר זווית ACB. $\sphericalangle A = 30^\circ$; $\sphericalangle C = 90^\circ$.



במשולש חסום חצי מעגל שרדיוסו r.

הביעו את היקף המשולש באמצעות r.

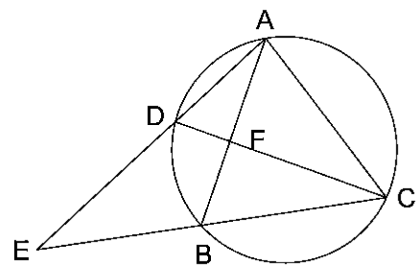
27. נתון DE||BC, $\frac{S_{DECB}}{S_{ADE}} = 3$.



א) מצאו את היחס $\frac{AD}{DB}$.

ב) מצאו את היחס בין חוצי הזווית A של שני המשולשים: ADE , ABC.

28. ABC משולש שווה שוקים החסום במעגל (AB=AC).



D אמצע הקשת AB.

E נקודת המפגש של הישרים AD ו-CB, F נקודת מפגש של AB ו-DC.

א) הוכיחו שהמשולשים: ADC , AEC דומים.

ב) מצאו זוג נוסף של משולשים דומים. הוכיחו.

ג) היעזרו בסעיפים קודמים (או בכל דרך אחרת), והוכיחו:

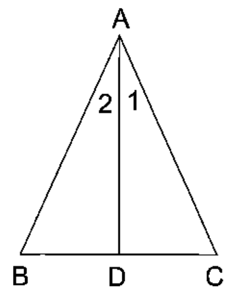
(i) $FB \cdot AF = CF \cdot FD$

(ii) $AB^2 = AE \cdot AD$

29. במעגל חסום משולש שווה שוקיים, בו זווית הראש היא 120°. הגובה המורד על הבסיס הוא h, שרטטו.

בטאו בעזרת h את מחוגו של המעגל ואת מרחקו של המרכז מבסיס המשולש.

30. משפט: אם חוצה זווית במשולש הוא גם תיכון, אז המשולש שווה שוקיים.



א) רשמו נתון וצ"ל.

ב) משפט זה נכון. בהוכחה שלפניכם נפלה שגיאה. מצאו אותה.

נוכיח חפיפה של המשולשים : ABD , ACD.

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ (נתון)

$BD = DC$ (נתון)

AD צלע משותפת

$\Downarrow$

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (לפי משפט חפיפה צ. צ.ז.)

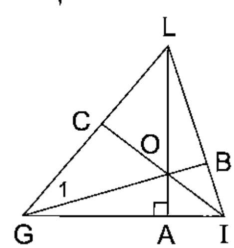
$\Downarrow$

$AB = AC$

ב) הוכיחו את המשפט.

רמז: האריכו את התיכון כאורכו והוכיחו שהמרובע המתקבל הוא מעוין.

31. שלושת הגבהים במשולש GIL נפגשים בנקודה O.



א) מצאו שלושה זוגות של משולשים דומים.
הוכיחו את הדמיון לגבי זוג אחד.

ב) הוכיחו:

(i) מרובע GAOC בר חסימה (כלומר ניתן לחסום אותו במעגל).

(ii) $\measuredangle G_1 = \measuredangle CAO$.

32. ABC משולש ישר זווית. $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$.

חוצה זווית C חותך את הניצב AB בנקודה D.

א) שרטטו וחשבו את היחס $\frac{AD}{DB}$.

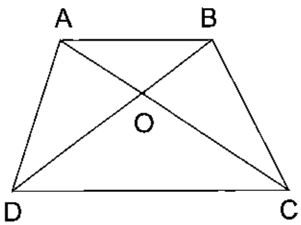
ב) נתון 20 יח' = AC. חשבו את DC.

33. בטרפז ABCD (AB||CD), האלכסונים נחתכים בנקודה O.

2 יח' = AB, 6 יח' = DC.

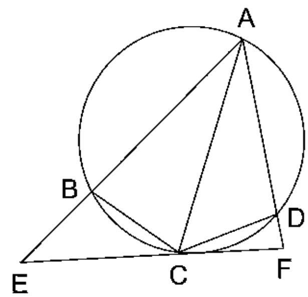
שטח משולש ABO שווה ל-S יח"ר.

הביעו את שטח הטרפז באמצעות S.



רמז: בטאו את שטחי כל המשולשים באמצעות S.

34. מרובע ABCD חסום במעגל, נתון: BC=CD. המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשכי הצלעות AB ו- AD בנקודות E ו-F.



א) מצאו שני זוגות של משולשים דומים. הוכיחו.

ב) בנוסף, נתון ש- $\triangle EBC \cong \triangle FDC$.

(i) איזה סוג המרובע ABCD? הוכיחו.

(ii) איזה סוג המשולש AEF? הוכיחו.

(iii) מה אפשר לומר על AC?

(iv) 10 יח' = AC, 6 יח' = BC. חשבו את היחס בין שטח המרובע ABCD לשטח המשולש BEC.

(v) חשבו את היחס בין שטח המרובע ABCD לשטח המשולש AEF.

35. ABC ו-DEF הם שני משולשים דומים ויחס הדמיון הוא k.

הוכיחו:

א) היחס בין רדיוסי המעגלים החסומים במשולשים שווה ל-k.

ב) היחס בין רדיוסי המעגלים החוסמים את המשולשים שווה ל-k.

36. מנקודה A מחוץ למעגל O יוצאים שני משיקים למעגל בנקודות B ו-C.

שרטטו את המעגל, המשיקים ואת הרדיוסים OB ו-OC.

הוכיחו:

א) מרובע ABOC בר חסימה.

ב) אפשר לחסום מעגל במרובע ABOC.

מבחר תשובות לפרק ד': הכול יחד

דמיון במעגל (עמודים 164-160)

3. א) 5.8 ס"מ

5. א) $\frac{7}{8}a$ ב) $\frac{a}{\sqrt{2}}$

7. 7.04 ס"מ

תרגילים מכול הנושאים (עמודים 174-165)

3. א) $\frac{1}{2}$ ב) $\frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{2}$ ס"מ

5. $\frac{a \cdot b}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$

8. ב) $67.5^0, 67.5^0, 45^0$ ג) $(2+\sqrt{2})r$ ד) $6+4\sqrt{2}$

9. ב) $2a+8$, $4a$ ה) 12 ס"מ , 24 ס"מ

11. א) ריבוע ב) $16\sqrt{2}$ ס"מ , 32 סמ"ר

12. א) ריבוע ב) $\frac{1}{2}$ ג) ריבוע ד) $\frac{1}{4}$

13. ריבוע

14. א) משולש שווה שוקיים ב) טרפז שווה שוקיים

16. 2:1

17. א) 8 ס"מ ב) 3 ס"מ

19. א) 40 יח'

20. א) כן ב) לא ג) $2\sqrt{3}$

25. א) $CD =$ 9 יח' ב) היקף 22 יח' ג) 2 יח' ד) 22 יח"ר

26. $(4+2\sqrt{3})r$

27. א) 1:1   ב) 2:1

29. הרדיוס: 2h, מרחק: h

32. א) 2:1   ב) $DC = \frac{20}{\sqrt{3}}$

33. 16S

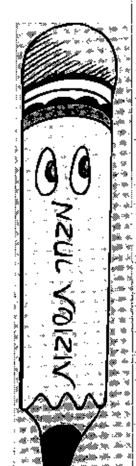
34. ב) (i) דלתון עם שתי זוויות נגדיות שוות

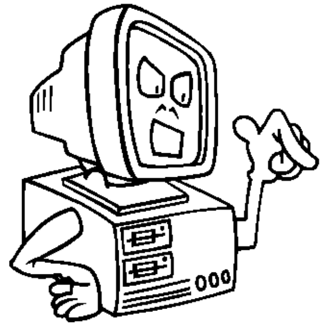
(ii) משולש שווה שוקיים

(iii) AC קוטר

(iv) 3.55

(v) 0.64





פעילויות מחשב

נספח I:

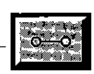
פעילויות בעזרת הלומדה "הנדסה בתנועה"

פעילות מבוא (לתרגיל 3 עמוד 8)

בפעילות תכירו כיצד לעבוד עם הלומדה "הנדסה בתנועה".

במהלך הפעילות תשרטטו קטעים וזוויות שגודלם אינו ניתן לשינוי וכאלה שגודלם ניתן לשינוי. בפעילות זו, כמו גם בכל שאר הפעילויות בהמשך, תיאור מהלך הבנייה מחולק לשני טורים. מימין הוראות הבנייה הגיאומטרית, ומשמאל רשומות הוראות הבנייה בעזרת הלומדה.

1. שרטוט ומחיקה

הוראות הבנייה הגיאומטרית	הוראות הבנייה בעזרת הלומדה
• סמנו 3 נקודות A, B ו-C.	 ← הביאו את הסמן למסך והקישו. תסומן נקודה A. הזיזו את העכבר והקישו שנית. תסומן נקודה B. הזיזו והקישו בשלישית. תסומן נקודה C.
• שרטטו קטע AB. • שרטטו גם את AC.	 ←  ← ישר מ-A ל-B ← **בנה.** ← ישר מ-A ל-C ← **בנה.**
מחקו את קטע AB.	 ← הביאו את הסמן לקטע AB והקישו. הקטע יסומן:  הקישו במקלדת על Backspace והקטע AB ימחק.
• מחקו את A. מחקו את שאר הנקודות.	הביאו את הסמן ל-A והקישו. אחר-כך הקישו על Backspace.

2. מה משתנה ומה קבוע?

א) מה משתנה ומה לא משתנה בקטע?

- סמנו 2 נקודות A ו-B. ← ...
- שרטטו קטע AB. ← ← ישר מ-A ל-B ← **בנה**.
- שנו אותו. ← הביאו את הסמן לאחת הנקודות, לחצו, גררו ושחררו.

מה משתנה ומה לא משתנה בקטע AB?

ב) מה משתנה ומה לא משתנה בקטע שאורכו נתון?

- סמנו נקודה C. ← הביאו את הסמן למסך והקישו.
- שרטטו קטע מ-C שאורכו 5 יחידות. ← ← ישר מ-C באורך 5 ← **בנה**.
- שנו אותו. ← הביאו את הסמן לאחד מקצות הקטע, לחצו, גררו ושחררו.

מה משתנה ומה לא משתנה בקטע CD?

3. בניית קטעים שווים

- מחקו את השרטוט בדרך הבאה:

← הביאו את הסמן למסך, לחצו, גררו את העכבר כך שהמסגרת הנוצרת תקיף את כל השרטוט שברצונכם למחוק. אחר כך הקישו על Backspace.

- סמנו 3 נקודות A, B, C.

← הביאו את הסמן למסך והקישו, תסומן A. סמנו באותו אופן שתי נקודות נוספות.

- חברו את AB. שרטטו קטע CD שאורכו שווה ל-AB.

← ← ישר מ-A ל-B ← **בנה.**

← ישר מ-C באורך AB ← **בנה**

- שנו את אורך CD. האם הצלחתם?

← . . .

שנו את AB ובדקו מה קורה ל-CD. הסבירו.

4. בניית זוויות

- מחקו את השרטוט.

שרטטו זווית בגודל 40°. לשם כך:

- סמנו 2 נקודות A ו-B.

← ...

- חברו את AB.

← ← ישר מ-A ל-B ← **בנה**

- בנו זווית בת 40°.

← ← מישר AB, בנקודה A

בגודל 40° ← **בנה.**

כיוון השוק השנייה של הזווית ניתן לשינוי.

הקישו על **בנה** ובדקו את האפשרויות.

- מחקו את השרטוט.

← . . .

5. בניית זווית משתנה

• סמנו 3 נקודות B ,A ו-C.	← ...
• חברו את A עם B ואת A עם C.	← ← ישר מ-A ל-B ← **בנה.** ← ישר מ-A ל-C ← **בנה.**
• שנו את הזווית.	← ...

מה ניתן לשינוי ומה לא ניתן לשינוי כשמנסים להזיז נקודות וקטעים? הסבירו.

6. מעוין

• שרטטו מעוין.	← ← **בנה.**
• מדדו את צלע AB. מדדו את שאר צלעות המעוין.	← הביאו את המסגרת למסך, הקישו ושחררו. רשמו במסגרת את שם הצלע.
• מדדו את זווית A. מדדו את שאר זוויות המעוין	← הביאו את המסגרת למסך, הקישו ושחררו. רשמו במסגרת את שם הזווית בעזרת 3 אותיות.
• שנו ובדקו איך משתנים אורכי הצלעות וגודלי הזוויות.	← ...
• מחקו את השרטוט.	**הערה:** כשמוחקים את השרטוט, מסגרת המדידה נשארת. כדי למחוק מסגרת מדידה יש לסמנה בנפרד ולהקיש על Backspace.

פעילות 1 (לתרגיל 1 עמוד 16)

שרטוט משולש לפי שתי צלעות וזווית מול אחת מהן

כמה משולשים, שאינם חופפים, ניתן לשרטט על פי שתי צלעות וזווית מול אחת מהשתיים?

- שרטטו קטע AB באורך 6 יח'.

 ← הביאו את הסמן למסך והקישו, תסומן נקודה A.

 ← 

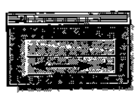
- שרטטו זווית A (לדוגמה, בת 35°).

 ← ישר מישר AB, בנקודה A,

בזווית של 35° ← **בנה**

תוכלו להקיש על **בנה** כדי לקבל אפשרויות שונות של כיוון השוק AC.

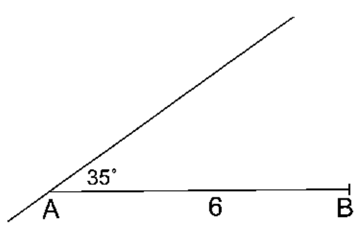
- עברו לישר AC (במקום קטע).

הקישו במסגרת למטה 

(החץ האדום יעבור למטה והקטע המסומן יהפוך לישר).

 ← הזיזו את C על הישר מחוץ למסך.

עד עכשיו בניתם:

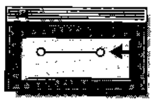


כעת תשלימו למשולש תוך בדיקת מקרים שונים של אורך הצלע מול A, וזיהוי מספר המשולשים הנוצרים בכל מקרה.

- לשם כך בנו קטע BD, שאורכו 4 יחידות.

 ←  ← . . .

- חזרו לשרטוט קטעים (ולא ישרים).

במסגרת למטה הקישו 

תוכלו לצבוע את הקטע (השאירו את הקטע מסומן), פתחו **צבעים** ובחרו צבע [מה שמסומן, נצבע בצבע שבחרתם].

- הזיזו את BD, כך ש- D תהיה על הישר AC ובדקו בכמה אופנים ניתן לעשות זאת.

 ← הזיזו את D והביאו לישר AC.

כמה משולשים שונים ניתן לשרטט, כאשר גודלה של הצלע מול A הוא 4 יחידות?

חזרו על בניית הקטע מול ∢A: בנו קטעים נוספים _B, באורכים שונים (למשל, BE = 3 ; BF = 7 ; BG = 6). תקבלו 4 קטעים בעלי אורך שונה היוצאים מ-B.
הזיזו את קצות הקטעים ובדקו כמה משולשים _AB, המתאימים לנתונים קיימים בכל מקרה.

סכמו:

א) כמה משולשים שאינם חופפים, ניתן לבנות לפי צלע (AB) זווית (A) וצלע מול הזווית הנתונה (BC). דונו באפשרויות השונות תוך התייחסות לקשר בין אורך AB לאורך הצלע מול הזווית A.

ב) באיזה מהמקרים הנ"ל ניתן לנסח משפט חפיפה? (קיים משולש יחיד) נסחו.

ג) האם קיים מקרה, בו הקטע מול הזווית A קטן מ-AB ובכל זאת מתקבל משולש יחיד? (נקודת חיתוך יחידה בבניה.)

הדגימו את האפשרויות השונות באופן כללי.

- שרטטו מעגל, שמרכזו B ורדיוסו משתנה.

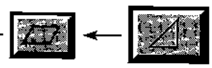
← הביאו את הסמן ל-B לחצו, הזיזו ושחררו, כאשר המעגל יחתוך את הקרן מ-A בשתי נקודות.

חזרו על הפעולה, כך שיתקבלו מעגלים שונים, המאפיינים מספרי נקודות חיתוך שונים עם הקרן מ- A. (כלומר, אפשרויות שונות של מספר משולשים אפשרי).

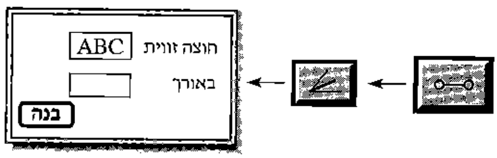
פעילות 2 (לתרגיל 1 עמוד 21)
חוצי זוויות במקבילית

1. א) העבירו חוצה של אחת מזוויות המקבילית. מה תוכלו לומר על המשולשים שהתקבלו? כמה משולשים כאלה נוצרו? בדקו אפשרויות שונות באמצעות הלומדה.

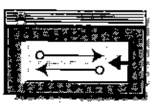
- בחרו מקבילית.


← **בנה.**

- העבירו חוצה זווית (לדוגמה $\sphericalangle B$) והאריכו אותו על ידי הזזת E.



- האריכו את CD לקרן.
האריכו באופן דומה את AD.


← סמנו את CD והקישו

לפי הצורך.

- שנו את המקבילית.

בדקו כמה משולשים נוצרים ומאיזה סוג הם. הסבירו מדוע המשולשים הם מהסוג הנ"ל, והוכיחו.

ב) מה תוכלו לומר על החוצים של שתי זוויות נגדיות?

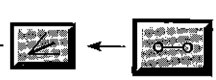
העבירו את חוצה הזווית D. שנו את המקבילית, נסחו משפט והוכיחו.

ג) מה תוכלו לומר על החוצים של שתי זוויות סמוכות?

- מחקו את חוצה הזווית D.


← סמנו את חוצה הזווית D ומחקו.

- העבירו את חוצה הזווית C (כך שתתקבל קרן מ-C).


← . . .

מה לדעתכם גודל הזווית בין החוצים?

- בדקו על-ידי מדידת הזווית.

 ← . . .

- שנו את המקבילית.

הוכיחו את טענתכם.

2. א) חקרו מה הקשר בין אורך BC לאורך BA, כאשר נקודת החיתוך של חוצי הזוויות B, C על AD.

- מדדו את BC ואת BA.

 ← הביאו את המסגרת למסך והקישו BC

 ← הביאו מסגרת נוספת והקישו BA

- שנו את המקבילית על ידי הזזת קודקודים. דאגו שהצלע (AD) תעבור דרך חיתוך חוצי הזוויות.

 ← הביאו את הסמן לאחד הקודקודים והזיזו.

על פי המדידות שביצעתם, מהו לדעתכם, הקשר בין אורכי צלעות המקבילית, כאשר נקודת החיתוך של החוצים על הצלע (AD)? הסבירו מדוע, והוכיחו.

ב) מה יהיה הקשר בין אורכי הצלעות הנ"ל כאשר נקודת הפגישה של חוצי הזוויות הסמוכות:

- בתוך המקבילית?
- מחוץ למקבילית?

3. א) איזה מרובע יתקבל אם נעביר את ארבעת חוצי הזוויות? הוכיחו.
(תוכלו לבדוק, על ידי העברת שני חוצי הזוויות האחרים ושינוי המקבילית.)

ב) איזה מרובע יוצרים חוצי הזוויות אם ABCD מלבן? הוכיחו
(הזיזו קודקודים כך ש-ABCD יהיה מלבן או שרטטו מלבן ואת חוצי הזוויות.)

ג) מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות, אם ABCD מעוין? הוכיחו.

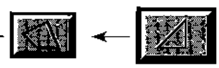
ד) מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות אם ABCD ריבוע? נמקו.

פעילות 3 (לתרגיל 3 עמוד 23)

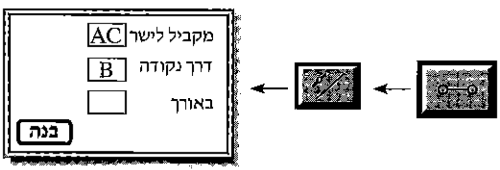
מקבילים לאלכסוני מרובע

1. א) דרך הקודקודים של מרובע העבירו מקבילים לאלכסונים. איזה סוג מרובע יוצרים מקבילים אלו? בדקו בעזרת הלומדה.

- בחרו מרובע.

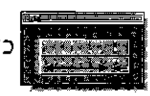

← **בנה.**

- העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים.



- צַבעו אותם בצבע אחר.

צבעים . . .

הקישו  כדי לקבל ישר מקביל.

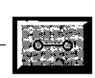
העבירו את שאר המקבילים.

- שנו את המרובע.

איזה סוג מרובע יוצרים מקבילים אלו? הוכיחו.

ב) במרובע שאלכסוניו **מאונכים** זה לזה, העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים. איזה סוג מרובע חייב להתקבל? רשמו את השערתכם ובדקו.

- בניה חדשה.
- שרטטו קטע AB.

 ← . . .

- בחרו נקודה C מחוץ לקטע.


...

- העבירו אנך מ-C ל-AB, והפכו את האנך לקרן מעבר ל-D.



אנך מנקודה C לישר AB.

- סמנו נקודה E על המשך CD וחברו את CE.
- חברו את קודקודי המרובע ACBE (חזרו לקטעים).
- העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים וצבעו אותם.
- שנו את המרובע.

הסבירו מדוע חייב להתקבל המרובע המשורטט על המסך והוכיחו.

ג) במרובע שאלכסוניו **שווים** זה לזה, העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים. איזה סוג מרובע חייב להתקבל? רשמו את השערתכם ובדקו.

- שרטטו קטע AB.
- סמנו נקודה C ושרטטו קטע CD שאורכו AB. (הזיזו כך ש CD יחתוך את AB).
- חברו את קודקודי מרובע ACBD.
- העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים וצבעו.
- שנו את המרובע ACBD.

איזה סוג מרובע בין המקבילים חייב להתקבל? הוכיחו.

ד) במרובע שאלכסוניו **מאונכים ושווים** זה לזה העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים. איזה סוג מרובע חייב להתקבל? רשמו את השערתכם ובדקו.

- בנו בדומה לסעיף ב', אלא שאחרי העברת האנך, שרטטו קטע CE ששווה באורכו ל-AB.
- חברו קודקודים.
- העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים וצבעו אותם.

איזה סוג מרובע בין המקבילים חייב להתקבל? הוכיחו.

פעילות 4 (לתרגיל 4 עמוד 41)

בתרגיל זה תשוו שטחים של מרובעים בעלי אלכסונים שאורכם קבוע.

א) שרטטו מרובעים שונים, שאורכי אלכסוניהם קבועים והם מאונכים זה לזה. מה תוכלו לומר על השטחים שלהם?

- בנו קטע AB, שאורכו נתון, למשל 8 יח'. (בחרו גודל כרצונכם.)

← ← ישר מ-A באורך 8 ← **בנה**

- סמנו נקודה C, מחוץ לקטע AB.
- שרטטו אנך מ-C ל-AB.

← ← אנך מנקודה C לישר AB ←

בנה

- שרטטו קטע מ-C ל-D שאורכו נתון. למשל 6 יח'. (התקבלה נקודה E).

← ישר מ-C ל-D באורך 6 ←

בנה

- חברו את BE ,CB ,AC ו-EA.
- מדדו את שטח ACBE.

← הביאו את המסגרת למסך והקישו:

ACBE =

- שנו את המרובע על ידי הזזת קודקודים.

מה תוכלו לומר על השטח? הוכיחו.

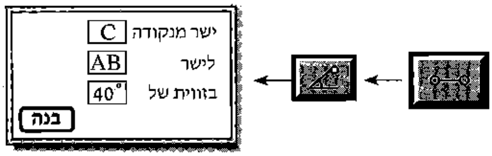
ב) שרטטו מרובעים שונים בעלי אותם אלכסונים וזווית α קבועה ביניהם. מה תוכלו לומר על השטחים שלהם?

- מחקו את C מהבניה הקודמת.

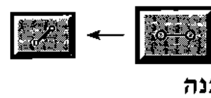
סמנו נקודה C ומחקו.

- סמנו נקודה C מחוץ לקטע AB.

- שרטטו זווית מ-C ל-AB, שגודלה למשל, 40°. (בחרו גודל שונה מ-90°, כרצונכם).



- שרטטו קטע מ-C ל-D שאורכו נתון, למשל, 6 יח'.



ישר מ-C ל-D באורך 6

- חברו את קודקודי המרובע ACBE.
- מדדו את שטחו.

- שנו את המרובע.

מה תוכלו לומר על השטח? הוכיחו.

ג) מה קורה לשטח מרובע, הבנוי על פי שני אלכסונים בעלי אורך נתון, כשהזווית החדה בין האלכסונים גדלה? מתי לדעתכם מתקבל השטח המכסימלי? הוכיחו.

- מחקו את C. | סמנו את הנקודה C ומחקו.
- סמנו נקודה C מחוץ לקטע AB.
- שרטטו קטע נוסף CD, שאורכו נתון (כרצונכם).
- הזיזו את D, כך ש- AB ו-CD יחתכו זה את זה.
- חברו את קודקודי המרובע ACBD.
- מדדו את שטחו.
- שנו את הזווית על ידי הזזת D.

מה קורה לשטח? מתי הוא מכסימלי? נמקו.

תוכלו לשרטט טבלה ו/או גרף, לתיאור הקשר בין הזווית שבין האלכסונים ושטח המרובע.

טבלה

- סמנו את נקודת החיתוך של AB ו-CD ‏(E).

 ←  . . .

- הכינו טבלה של ∢CEB ושטח ACBD.

 ← הקישו והביאו למסך.
רשמו בכותרת CEB בטור אחד ו-ACBD בטור השני.

- פתחו מד זווית.

 ← הביאו את המסגרת למסך והקישו CEB.

שנו את גודל הזווית והשלימו את הטבלה.

 ← הזיזו את D, תוך לחיצה, כך ש-$\measuredangle CEB \approx 10^\circ$ ושחררו,
(גודל הזווית והשטח ירשמו בטבלה).
חזרו, הזיזו את D ושחררו כך שתתמלא הטבלה.

גרף של השתנות השטח לפי ∢CEB.

- פתחו מערכת צירים ורשמו מה מייצג כל ציר
(אופקי ∢CEB, אנכי שטח ACBD)

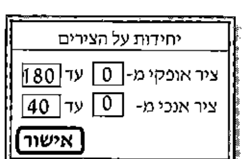
 ← הביאו את המערכת למסך.
הביאו את הסמן לחץ שבמד הזווית, לחצו והזיזו עד לחץ שבתחתית הגרף. ∢CEB תרשם מתחת לציר האופקי.
הביאו את הסמן לחץ שבמד השטח, לחצו והזיזו עד לחץ שמעל לגרף. ACDB ירשם מעל לציר האנכי.

- שרטטו את הגרף.

 ← הביאו את הסמן ל-D והזיזו, הגרף ישורטט.

- שנו את היחידות על הצירים.

הקישו על הצירים פעמיים יפתח מסך "יחידות על הצירים".

הקישו: 

תארו את שינוי השטח כשהזווית בין האלכסונים משתנה.

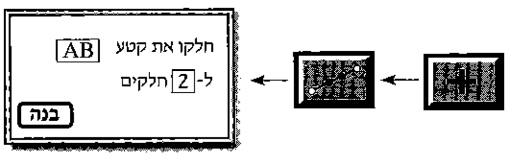
פעילות 5 (לתרגיל 16 עמוד 80)

אמצעי צלעות במרובע

א) מה תוכלו לומר על המרובע המתקבל מחיבור אמצעי צלעות של מרובע כלשהו? (החיבור מתבצע מאמצע צלע לאמצע הצלע הסמוכה).

- בחרו מרובע.

- סמנו את אמצע צלעותיו וחברו את הנקודות. (תוכלו לסמן את הקטעים האלה ולצבוע בצבע שונה).



חזרו עבור הצלעות האחרות.

- שנו את המרובע.

נסחו משפט והוכיחו אותו.

ב) מה תוכלו לומר על המרובע המתקבל מחיבור אמצעי צלעות כנ"ל, אם אלכסוני המרובע המקורי מאונכים זה לזה?

- חברו את AC ו-BD (צבעו בצבע שלישי).
- שנו את המרובע כך שהאלכסונים יהיו מאונכים. צרו מרובעים שונים כאלה.

וודאו שהזווית בין האלכסונים ישרה. לשם כך סמנו את נקודת החיתוך בין האלכסונים ומדדו את הזווית.

הערה: קשה להגיע בדיוק לזווית של $90°$. למרות אי הדיוק ניתן להגיע להשערה.

במקום להזיז, כך שהאלכסונים יהיו מאונכים, תוכלו לבנות מחדש: בנו שני קטעים מאונכים, ($CD \perp AB$) חברו את קודקודי המרובע שנוצר, סמנו וחברו את אמצעי הצלעות. שנו את המרובע.

נסחו משפט והוכיחו.

ג) מה תוכלו לומר על המרובע המתקבל מחיבור אמצעי צלעות כנ"ל, אם אלכסוני המרובע המקורי **שווים** זה לזה?

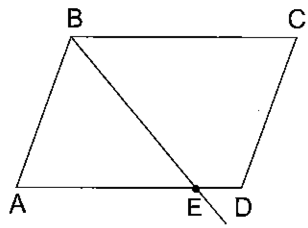
שנו את המרובע כך שהאלכסונים יהיו באורך שווה.

וודאו שאורכי האלכסונים שווים. לשם כך מדדו את אורכי האלכסונים.

צרו מרובעים שונים כאשר אתם שומרים על אורך שווה של האלכסונים.

נסחו משפט והוכיחו.

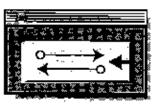
פעילות 6 (לתרגיל 6 עמוד 84)



- בחרו מקבילית.

 ←  ← **כללי.**

- סמנו נקודה E על AD.
- חברו את BE

לאחר שהקטע סומן, הקישו: 

המשיכו את BE מעבר ל-E.

- המשיכו את AD ו-CD מעבר ל-D.
- סמנו את נקודת החיתוך (F) של BE ו-CD.

 ←  ← נקודת חיתוך בין BE ו-CD

- מדדו את AE · CF.

 ← רשמו במסגרת AE · CF.

- הזיזו את E על הצלע AD ועל המשכה מעבר D, ובדקו מה קורה למכפלה.
- הזיזו שנית את E, כולל המקרה ש-E ו-F מתלכדות עם D.

1. מה הקשר של מכפלה זו למכפלת אורכי הצלעות? בדקו בעזרת המחשב, על-ידי מדידה מתאימה ושינוי המקבילית.
2. נסחו והוכיחו משפט מתאים.

מעגל חסום

פעילות זו והפעילות שאחריה קשורות אחת לשנייה ורצוי לעשותן ברציפות.

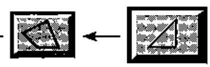
פעילות 7 (לתרגיל 3 עמוד 130)

חוצי זוויות במרובע

1. כמה נקודות חיתוך יכולות להיות ל-4 ישרים שונים? דונו בכל המקרים האפשריים.

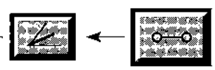
2. כמה נקודות חיתוך יכולות להיות לארבעה חוצי הזוויות במרובע? חקרו בעיה זו בעזרת המחשב.

- בנו מרובע כלשהו (כללי).



← כללי.

- שרטטו את חוצי הזוויות של המרובע.



← חוצה זווית: BAD.

שרטטו את שאר חוצי הזוויות.

- שנו את המרובע. (אם יש צורך האריכו את החוצים.)

← גררו את הקודקודים או את הצלעות.

א) שנו את המרובע, כך שחוצי הזוויות ייפגשו בנקודה אחת. נסו לקבל שרטוטים שונים, בהם קיימת נקודת מפגש יחידה.

ב) שנו את מרובע ABCD במטרה לחקור כל אחת מהשאלות הבאות:

i מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות ועל המרובע ABCD אם יש להם 5 נקודות חיתוך?

ii מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות אם יש לחוצי הזוויות במרובע 4 נקודות חיתוך?

– מה תוכלו לומר במקרה זה על המרובע שנוצר על-ידי חוצי הזוויות?

– ומה עם המרובע ABCD במקרה זה?

– נסחו טענות והוכיחו אותן.

iii מה בדבר 3 נקודות חיתוך? בדקו במחשב והוכיחו את מסקנתכם.

3. סכמו מה המספר האפשרי של נקודות חיתוך שיוצרים ארבעת חוצי הזוויות במרובע.

4. איזו תכונה מאפיינת את נקודת המפגש של חוצי הזוויות במרובע, כאשר כולם נפגשים בנקודה אחת? נמקו.

5. **ובמשולש**? כמה נקודות חיתוך יכולות להיות לשלושת חוצי הזוויות במשולש?

א) שערו תחילה מהן האפשרויות השונות ואחר כך בדקו באמצעות הלומדה.

- שרטטו משולש.  ← **כללי**.
- העבירו את חוצי הזוויות  ←  ← . . .

  שרטטו את שאר חוצי הזוויות.
- שנו את המשולש.  ← . . .

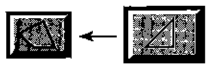
ב) נסחו והוכיחו משפט בדבר מספר נקודות החיתוך של חוצי הזוויות במשולש.

פעילות 8 (לתרגיל 3 עמוד 130)

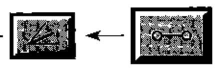
חוצי זוויות במרובע ומשולש, ומעגל משיק לצלעות

1. מה הקשר בין חוצי הזוויות במרובע לבין מעגל המשיק (מבפנים), לצלע אחת או יותר של המרובע? בדקו בעזרת המחשב.

- שרטטו מרובע.


← **כללי.**

- שרטטו את כל חוצי הזוויות של המרובע.


← ...

- שרטטו מעגל שמרכזו בתוך המרובע.


← לחצו (במקום בו יהיה המרכז) גררו ושחררו.

א) היכן יימצא מרכז המעגל אם הוא משיק לשתי צלעות של המרובע?

- שנו את המעגל כך שישיק לצלע אחת ואחר כך לשתיים.


← ...

ב) היכן יימצא מרכז המעגל המשיק ל-3 מצלעות המרובע?

ג) האם תוכלו לשנות את המעגל כך שישיק ל-4 צלעות? אם לא, שנו את המרובע.

ד) היכן יימצא מרכז המעגל המשיק לכל צלעות המרובע?

נסחו והוכיחו משפט בדבר הקשר בין חוצי הזוויות במרובע ומעגל החסום במרובע.

2. ובמשולש? האם אפשר להעביר מעגל חסום בכל משולש? נמקו (תוכלו לבדוק באמצעות הלומדה).

3. **שאלות לסיכום:**

א) במה דומה ובמה שונה הקשר בין חוצי הזוויות למעגל החסום במרובע ובמשולש?

ב) לומדה מאפשרת שרטוט מעגל חסום במשולש ולא מאפשרת שרטוט מעגל חסום במרובע. הסבירו מדוע.

פעילות 9 (לתרגילים 5-1 עמוד 138)

מעגל חוסם

1. בדקו אם ניתן למצוא נקודה D, כך שמעגל שמרכזו D, יעבור דרך שלושת הקודקודים של משולש.

- בחרו משולש כלשהו ABC.

 ← **כללי.**

- סמנו נקודה D (בתוך המשולש).

 ← . . .

- העבירו מעגל שמרכזו D ורדיוסו AD.

 ←  ← מעגל שמרכזו D ורדיוסו AD.

- גררו את D כך שהמעגל יעבור גם דרך B.

 ← . . .

- האם תוכלו להזיז את D כך שהמעגל יעבור גם דרך C?
- שנו את המשולש וחזרו על גרירת D, כך שהמעגל יעבור גם דרך C.
- שנו את המשולש וחזרו על הזזת D, כך שהמעגל יעבור דרך שלושת הקודקודים. (שנו גם למשולש קהה זווית.)

2. א) חקרו היכן נמצא מרכז של מעגל, שעובר דרך שלושת קודקודי משולש?

- סמנו שתי נקודות.
- שרטטו מעגל העובר דרך שתי נקודות האלה.

(תוכלו לשרטט על-ידי שרטוט מעגל חופשי, או על ידי חיפוש בנייה מתאימה).

- שרטטו מעגלים נוספים העוברים דרך שתי נקודות האלה.
  - כמה מעגלים כאלה אפשר לשרטט?
  - היכן נמצאים מרכזי **כל** המעגלים האלה?

ב) בנו מעגל החוסם משולש.

- בחרו משולש כלשהו ABC.
- שרטטו את קבוצת "כל הנקודות" שהן מרכזי המעגלים העוברים דרך A ו-B. (חפשו בנייה מתאימה.)

- בנו מעגל אחד כזה (העובר דרך A ו-B).
- מצאו בנייה בעזרתה תתקבל (ללא גרירה), נקודה שהיא מרכז מעגל העובר דרך A, B, ו-C, כלומר מעגל החוסם את המשולש.

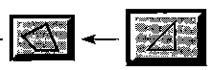
3. א) מה הקשר בין אנכים אמצעיים לצלעות משולש, לבין המעגל החוסם?

ב) האם בכל **משולש** ניתן למצוא נקודה, שהיא מרכז של מעגל, העובר דרך שלושת הקודקודים?

ג) כמה מעגלים, שעוברים דרך A, B ו-C, ניתן לשרטט?

4. **ובמרובע**? האם תמיד ניתן למצוא נקודה (E) כך שמעגל, שמרכזו בנקודה, יעבור דרך ארבעת הקודקודים של מרובע ABCD?

- שרטטו מרובע כללי ABCD.


← **בנה.**

שרטטו מעגל העובר דרך כמה שיותר קודקודים מבלי לשנות את המרובע.

לשם כך:

- בחרו נקודה E.


← ...

- שרטטו מעגל שמרכזו E ורדיוסו AE.
- גררו את E, כך שהמעגל יעבור דרך קודקודים נוספים.
  – האם אפשר לשרטט מעגל העובר דרך כל קודקודי המרובע?
- שנו את המרובע ובדקו עבור מרובע אחר.

5. חקרו מה הקשר בין מעגל חוסם מרובע לאנכים אמצעיים לצלעות:

- בחרו מרובע כללי ABCD.
- מצאו בעזרת בניית אנכים אמצעיים, מרכז של מעגל שעובר דרך A, B ו-C.

האם הוא עובר גם דרך D? אם לא, היכן נמצאים מרכזי כל המעגלים העוברים דרך C ו-D? שרטטו.

- שנו את המרובע, כך שהמעגל יעבור גם דרך D.

מה הקשר בין אנכים אמצעיים לצלעות המרובע, לבין המעגל החוסם?

6. א. בדקו מאיזה סוג המרובע, אם שני אנכים אמצעיים שלו מתלכדים.

לשם כך:

- מחקו את המעגל והוסיפו אנך אמצעי רביעי.
- שנו את המרובע שבסעיף הקודם, כך ששני אנכים אמצעיים יתלכדו.

ב. נסו לשנות את המרובע כך **שרק** שתי נקודות חיתוך של האנכים האמצעיים תתלכדנה. הסבירו.

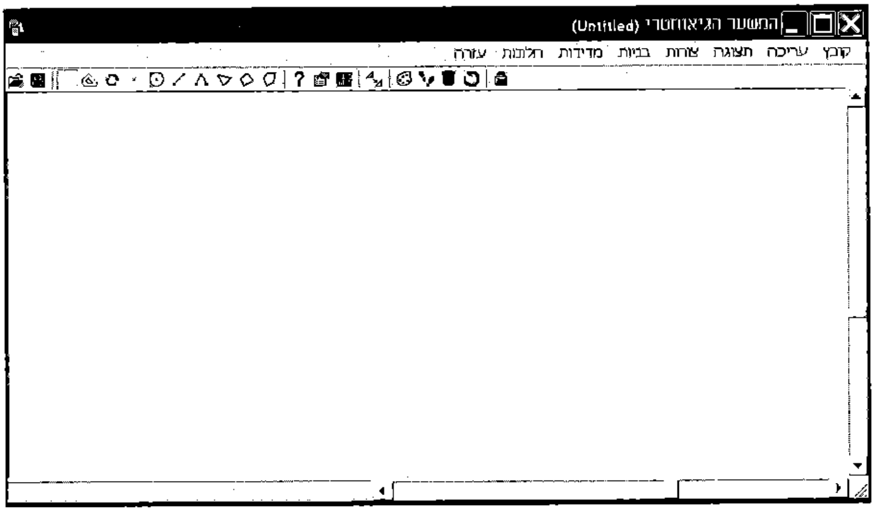
נספח II:

פעילויות בעזרת הלומדה "המשער הגיאומטרי"

מבוא (לתרגיל 3 עמוד 8)

פעילות בעזרת לומדה זו מאפשרת לשרטט צורות שונות ולמדוד קטעים, זוויות, ושטחים. כמו כן תוכלו לשנות את השרטוט, על ידי הזזת הקודקודים.

פתחו את התוכנה וקבלו את המסך שבהמשך.



מספר הנחיות כלליות:

א) שרטוט צורה:

כדי לשרטט צורה כלשהי (נקודה, קטע, מצולע, מעגל) ניתן לבחור מהצורות בסרגל הכלים משמאל. לאחר שבוחרים את הצורה, יש להקיש בלחצן השמאלי של העכבר.

את כל אחת מהצורות ניתן גם לשרטט באמצעות התפריט מימין.

ב) מדידת צורה:

בעזרת התוכנה ניתן למדוד: היקף, שטח, אורכי קטעים, זוויות של צורות שונות.

לשם כך יש לסמן את הצורה שברצונכם למדוד ולבחור מהתפריט מימין ב"מדידות".

הוראות מפורטות תמצאו בצמוד לפעילויות עצמן.

ג) שינוי צורה:

ניתן לשנות את הצורות (במידה והמידות לא קבועות) על ידי הזזת אחד הקודקודים.

פעילות 1 (לתרגיל 1 עמוד 16)

שרטוט משולש לפי שתי צלעות וזווית מול אחת מהן.

א) כמה משולשים, שאינם חופפים, ניתן לשרטט על פי שתי צלעות וזווית מול אחת מהשתיים?

• שרטטו קטע AB באורך 6 יח'.

צורות ← משולש ← לפי צלעות וזוויות

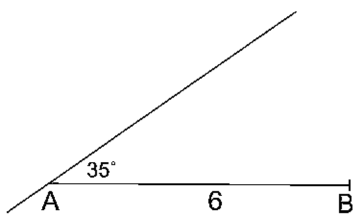
הקישו על לחצן שמאלי של העכבר. יפתח חלון "צלעות וזוויות". פעלו לפי הכתוב בחלון שנפתח. השאירו חלון זה פתוח עד לסיום בניית המשולש.

← 6:אורך צלע ← **בצע**.

• שרטטו זווית A (לדוגמה, בת 35°).

זווית ← מנקודה A ← 35:זווית ← **בצע**

עד עכשיו בניתם:



כעת השלימו ל-ΔABC תוך בדיקת מקרים שונים של אורך הצלע מול A, וזיהוי מספר המשולשים הנוצרים בכל מקרה, לשם כך:

• בנו צלע BC שאורכה 4 יח'.

באותו חלון של "צלעות וזוויות":

אורך ← מנקודה B ← 4:אורך צלע

נוצרה קשת החותכת את שוק הזווית בשתי נקודות.

בחרו באחת מהנקודות ויתקבל אחד מהמשולשים.

ב) העבירו את המשולש שהתקבל לחלון שבתחתית המסך.

סמנו את המשולש.

• חזרו על בניית המשולש על פי אותם נתונים, כש-BC משורטט באופן אחר.	חזרו על הבניות שבסעיף א' עד לשרטוט הקשת, אחר-כך בחרו את הנקודה השניה, השונה מזו שסמנתם בפעם קודמת, ויתקבל המשולש השני.
• העבירו את המשולש שהתקבל לחלון שבתחתית המסך.	סמנו את המשולש.

שני המשולשים שבניתם, המופיעים בתחתית המסך, שווים בשתי צלעות ובזווית מול אחת מהן, פרטו. האם שני המשולשים שהתקבלו חופפים?

ג) בנו משולשים נוספים שבהם 6 יח' = AB , $\measuredangle A = 35°$, ואורך הצלע BC משתנה (למשל: 2 יח' = BC, 6 יח' = BC, 7 יח' = BC).

בדקו כמה משולשים ABC, המתאימים לנתונים, קיימים בכל מקרה.

ד) **סכמו:**

– כמה משולשים, שאינם חופפים, ניתן לבנות לפי צלע (AB), זווית (A), וצלע מול הזווית הנתונה (BC). דונו באפשרויות השונות, תוך התייחסות לקשר בין אורך AB לאורך הצלע מול הזווית A.

– באילו מהמקרים ניתן לנסח משפט חפיפה? (קיים משולש יחיד) נסחו.

– האם קיים מקרה, בו הקטע מול הזווית A קטן מ AB ובכל זאת מתקבל משולש יחיד? (נקודת חיתוך יחידה בבניה.)

פעילות 2 (לתרגיל 1 עמוד 21)

חוצי זוויות במקבילית

1. א) העבירו חוצה של אחת מזוויות המקבילית. מה תוכלו לומר על המשולשים שהתקבלו? כמה משולשים כאלה נוצרו? בדקו אפשרויות שונות באמצעות הלומדה.

• בחרו מקבילית.	צורות ← מרובע ← מקבילית ← אקראית
• העבירו חוצה זווית (נניח של $\sphericalangle B$).	בניות ← ישרים ← חוצה זווית ← ABC;זווית ← אורך כלשהו

• שנו את המקבילית.

בדקו כמה משולשים נוצרים ומאיזה סוג הם. הסבירו מדוע המשולשים הם מהסוג הנ"ל, כלומר, הוכיחו.

ב) מה תוכלו לומר על החוצים של שתי זוויות נגדיות? העבירו את חוצה הזווית D. שנו את המקבילית, נסחו משפט והוכיחו.

ג) מה תוכלו לומר על החוצים של שתי זוויות סמוכות?

• מחקו את חוצה הזווית D.	סמנו את חוצה הזווית ומחקו.
• העבירו את חוצה הזווית C.	בניות ← ישרים ← חוצה זווית ← DCB;זווית ← אורך כלשהו.

מה לדעתכם הזווית בין החוצים?

בדקו על-ידי מדידת הזווית. לשם כך:

• סמנו את נקודת החיתוך של שני החוצים (תסומן ב-G).	בניות ← נקודת חיתוך ← רשמו בחלון את הקטעים המתאימים
• סמנו שלוש נקודות היוצרות את הזווית $\sphericalangle BGC$ ומדדו אותה.	בעזרת העכבר ו- SHIFT. מדידות ← זווית
• שנו את המקבילית.	

מה גודל הזווית בין החוצים? הסבירו מדוע, והוכיחו.

2. א) חקרו מה הקשר בין אורך BC לאורך BA, כאשר נקודת החיתוך של חוצי הזוויות על AD.

- הזיזו את נקודה G עד למפגש עם צלע המקבילית AD.
- מדדו את צלעות המקבילית.

סמנו את שני הקטעים באמצעות העכבר ו-SHIFT. מדידות ← אורך

- שנו את המקבילית על ידי הזזת קודקודים. דאגו שהצלע (AD) תעבור דרך חיתוך חוצי הזוויות.

על פי המדידות שבצעתם, מהו לדעתכם, הקשר בין אורכי צלעות המקבילית, כאשר נקודת החיתוך של החוצים על הצלע (AD)? הסבירו והוכיחו.

ב) מה יהיה הקשר בין אורכי צלעות אלו כאשר נקודת הפגישה של חוצי הזוויות הסמוכות:

– בתוך המקבילית?
– מחוץ למקבילית?

3. א) איזה מרובע יתקבל אם נעביר את ארבעת חוצי הזוויות?

(תוכלו לבדוק, על ידי העברת שני חוצי הזוויות האחרים ושינוי המקבילית). הוכיחו.

ב) איזה מרובע יוצרים חוצי הזוויות אם ABCD מלבן? הוכיחו.

(הזיזו קודקודים כך ש-ABCD יהיה מלבן או שרטטו מלבן ואת חוצי הזוויות.)

ג) מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות אם ABCD מעוין? הוכיחו.

ד) מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות אם ABCD ריבוע? נמקו.

פעילות 3 (לתרגיל 3 עמוד 23)

מקבילים לאלכסוני מרובע

1\. א) דרך הקודקודים של מרובע העבירו מקבילים לאלכסונים. איזה סוג מרובע יוצרים מקבילים אלו? בדקו בעזרת הלומדה.

• שרטטו מרובע כלשהו.	בחרו מרובע מסרגל הכלים משמאל.
• שרטטו את האלכסונים.	בניות ← קטע / מצולע מנקודות
• העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים, וצבעו אותם בצבע אחר.	בניות ← ישרים ← מקביל ← קטע BD, נקודה A. חזרו על שרטוט מקבילים לאלכסונים דרך יתר הקודקודים.
• סמנו את נקודות החיתוך של המקבילים שבניתם.	בניות ← נקודת חיתוך ← ...
• שנו את המרובע.	

איזה סוג מרובע יוצרים מקבילים אלו? הוכיחו.

ב) במרובע שאלכסוניו **מאונכים** זה לזה, העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים.
איזה סוג מרובע חייב להתקבל? רשמו את השערתכם ובדקו.
שרטטו שני קטעים מאונכים שישמשו את אלכסונים. לשם כך:

• שרטטו קטע AB.	בחרו קטע מסרגל הכלים.
• סמנו נקודה C מחוץ לקטע.	בחרו נקודה מסרגל הכלים.
• העבירו אנך מ-C ל-AB.	בניות ← ישרים ← אנך
• כדי לקבל קטע ולא ישר סמנו את הנקודות C ו- D.	היעזרו בעכבר ו-SHIFT לסימון הנקודות C ו-D. בניות ← קטע/מצולע מנקודות.
• הסתירו את הישר.	סמנו את הישר ← תצוגה ← הצג/הסתר צורה.

• חברו את הנקודות A, C, B, D (בסדר זה) לקבלת מרובע ACBD.	בניות ← קטע/מצולע מנקודות.

- העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים וצבעו אותם.
- שנו את המרובע.

הסבירו למה חייב להתקבל המרובע המשורטט על המסך כלומר, הוכיחו.

ג) במרובע שאלכסוניו **שווים** זה לזה, העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים. איזה סוג מרובע חייב להתקבל? רשמו את השערתכם ובדקו.

שרטטו שני קטעים נחתכים שווים שישמשו כאלכסונים. לשם כך:

• שרטטו קטע AB.	בחרו קטע מסרגל הכלים.
• סמנו נקודה כלשהי C.	בחרו נקודה מסרגל הכלים.
• שרטטו ישר דרך C, הישר יסומן ב- CD	בניות ← ישרים ← ישר דרך נקודה.
• על הישר בנו קטע מ-C השווה ל-AB.	בניות ← שכפול קטע ← קטע AB, נקודה C, ישר/קטע CD.
• הסתירו את ישר CD	סמנו את הישר ← תצוגה ← הצג/הסתר צורה.
• הזיזו את הקטעים CE ו-AB כך שיחתכו אחד את השני.	
• שרטטו את המרובע AEBC.	בניות ← קטע/מצולע מנקודות

- העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים וצבעו.
- שנו את המרובע AEBC.

איזה סוג מרובע חייב להתקבל? הסבירו למה כלומר הוכיחו.

ד) במרובע שאלכסוניו **מאונכים ושווים** זה לזה העבירו מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים. איזה סוג מרובע חייב להתקבל? רשמו את השערתכם ובדקו.

- בנו בדומה לסעיף ב', אלא שאחרי העברת האנך, שרטטו קטע CE ששווה באורכו ל-AB.
- חברו קודקודים.
- העבירו, מקבילים לאלכסונים דרך הקודקודים וצבעו אותם.

איזה סוג מרובע חייב להתקבל? הוכיחו.

פעילות 4 (לתרגיל 16 עמוד 80)
חיבור אמצעי צלעות במרובע

א) מה תוכלו לומר על מרובע המתקבל מחיבור אמצע צלעות של מרובע כלשהו? (החיבור מתבצע מאמצע צלע לאמצע הצלע הסמוכה).

• שרטטו מרובע כלשהו.	בחרו מרובע מסרגל הכלים משמאל.
• סמנו אמצעי צלעות המרובע.	בניות ← חלוקה ← קטע.
• חברו את נקודות החלוקה בזה אחר זה.	סמנו את הנקודות שברצונכם לחבר בעזרת SHIFT ואז: בניות ← קטע/מצולע מנקודות.
• שנו את המרובע.	הזיזו אחד הקודקודים.

מה תוכלו לומר על המרובע שהתקבל? הוכיחו.

ב) מה תוכלו לומר על מרובע המתקבל מחיבור אמצעי צלעות כנ"ל, אם אלכסוני המרובע המקורי **מאונכים** זה לזה?

• שרטטו את האלכסונים AC ו-BD.	בניות ← קטע/מצולע מנקודות. (סמנו תחילה את הנקודות)
• שנו את המרובע כך שהאלכסונים יהיו מאונכים.	הזיזו אחד הקודקודים.
לשם כך סמנו את נקודת החתוך של האלכסונים (תסומן ב-I).	בניות ← נקודת חיתוך
• מדדו את $\measuredangle$CID .	מדידות ← זווית (סמנו תחילה את הנקודות C ,I ,D)

הערה: קשה להגיע בדיוק לזווית של 90°. למרות אי הדיוק ניתן להגיע להשערה.

מאיזה סוג המרובע שהתקבל? הוכיחו.

ג) מה תוכלו לומר על המרובע המתקבל מחיבור אמצעי צלעות כנ"ל, אם אלכסוני המרובע המקורי **שווים** זה לזה.

- שנו את המרובע כך שהאלכסונים יהיו באורך שווה.
- מדדו את האלכסונים.
- צרו מרובעים שונים כאשר אתם שומרים על אורך שווה של האלכסונים.

ד) מה תוכלו לומר על מרובע המתקבל מחיבור אמצעי צלעות כנ"ל, אם אלכסוני המרובע המקורי שווים ומאונכים זה לזה? בדקו והוכיחו.

מעגל חסום

פעילות זו והפעילות שאחריה קשורות אחת לשנייה ורצוי לעשותך ברציפות.

פעילות 5 (לתרגיל 3 עמוד 130)

חוצי זוויות במרובע

1. כמה נקודות חיתוך יכולות להיות ל-4 ישרים שונים? דונו בכל המקרים האפשריים.

2. כמה נקודות חיתוך יכולות להיות לארבעת חוצי הזוויות במרובע?

- בחרו מרובע כלשהו.
- שרטטו חוצי זוויות.

בניות ← ישרים ← ABC: זווית ←
בניות ← אורך כלשהו

באופן דומה שרטטו את שאר חוצי זוויות המרובע.

- שנו את המרובע.

א) שנו את המרובע, כך שחוצי הזוויות ייפגשו בנקודה אחת. נסו לקבל שרטוטים שונים, בהם קיימת נקודת מפגש יחידה.

ב) שנו את מרובע ABCD במטרה לחקור כל אחת מהשאלות הבאות:

i מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות ועל המרובע ABCD אם יש להם 5 נקודות חיתוך?

ii מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות אם יש לחוצי הזוויות במרובע 4 נקודות חיתוך?

– מה תוכלו לומר במקרה זה על המרובע שנוצר על-ידי חוצי הזוויות?

– ומה עם המרובע ABCD במקרה זה?

– נסחו טענות והוכיחו אותן.

iii מה בדבר 3 נקודות חיתוך? בדקו במחשב והוכיחו את מסקנתכם.

3. סכמו מה המספר האפשרי של נקודות חיתוך שיוצרים ארבעת חוצי הזוויות במרובע.

4. איזו תכונה מאפיינת את נקודת המפגש של חוצי הזוויות במרובע, כאשר כולם נפגשים בנקודה אחת? נמקו.

5. **ובמשולש**? כמה נקודות חיתוך יכולות להיות לשלושת חוצי הזוויות במשולש?

א) שערו תחילה מהן האפשרויות השונות ואחר כך בדקו באמצעות הלומדה.

- בנו משולש כלשהו, העבירו את חוצי הזוויות, ושנו את המשולש על-ידי הזזת אחד מקודקודיו.

ב) נסחו והוכיחו משפט בדבר מספר נקודות החיתוך של חוצי הזוויות במשולש.

פעילות 6 (לתרגיל 3 עמוד 130)

חוצי זוויות במרובע ובמשולש, ומעגל משיק לצלעות

1. מה הקשר בין חוצי הזוויות במרובע לבין מעגל המשיק (מבפנים), לצלע אחת או יותר של המרובע? בדקו בעזרת המחשב.

- שרטטו מרובע כלשהו.
- שרטטו את כל חוצי הזוויות של המרובע.

  בניות ← ישרים ← [זווית:ABC]

  באופן דומה שרטטו את שאר חוצי זוויות המרובע.

- שרטטו מעגל שמרכזו בתוך המרובע.

א) היכן יימצא מרכז המעגל אם הוא משיק לשתי צלעות של המרובע?

- שנו את המעגל כך שישיק לצלע אחת ואחר כך לשתיים.

ב) היכן יימצא מרכז המעגל המשיק ל-3 מצלעות המרובע?

ג) האם תוכלו לשנות את המעגל כך שישיק ל-4 צלעות? אם לא, שנו את המרובע.

ד) היכן יימצא מרכז המעגל המשיק לכל צלעות המרובע?

נסחו והוכיחו את משפט בדבר הקשר בין חוצי הזוויות במרובע ומעגל החסום במרובע.

2. ובמשולש? האם אפשר להעביר מעגל חסום בכל משולש? נמקו (תוכלו לבדוק באמצעות הלומדה).

3. **שאלות לסיכום:**

א) במה דומה ובמה שונה הקשר בין חוצי הזוויות למעגל החסום במרובע ובמשולש?

ב) לומדה מאפשרת שרטוט מעגל חסום במשולש ולא מאפשרת שרטוט מעגל חסום במרובע. הסבירו מדוע.

פעילות 7 (תרגילים 1-5 עמ' 138)

מעגל חוסם

1. בדקו אם ניתן למצוא נקודה D, כך שמעגל שמרכזו D, יעבור דרך שלושת הקודקודים של משולש.
   - בחרו משולש כלשהו ABC.
   - סמנו נקודה D (בתוך המשולש).
   - העבירו מעגל שמרכזו D ורדיוסו AD.

     בניות ← מעגלים ← לפי מרכז ורדיוס

     ← AD קטע X 1 קבוע
   - גררו את D כך שהמעגל יעבור גם דרך B.
   - האם תוכלו להזיז את D כך שהמעגל יעבור גם דרך C?
   - שנו את המשולש וחזרו על גרירת D, כך שהמעגל יעבור גם דרך C.
   - שנו את המשולש וחזרו על הזזת D, כך שהמעגל יעבור דרך שלושת הקודקודים. (שנו גם למשולש קהה זווית.)

2. א) חקרו היכן נמצא מרכז של מעגל, שעובר דרך שלושת קודקודי משולש?
   - סמנו שתי נקודות.
   - שרטטו מעגל העובר דרך שתי נקודות האלה.

   (תוכלו לשרטט על-ידי שרטוט מעגל חופשי, או על ידי חיפוש בנייה מתאימה).
   - שרטטו מעגלים נוספים העוברים דרך שתי נקודות האלה.
     - כמה מעגלים כאלה אפשר לשרטט?
     - היכן נמצאים מרכזי **כל** המעגלים האלה?

   ב) בנו מעגל החוסם משולש.
   - בחרו משולש כלשהו ABC.
   - שרטטו את קבוצת "כל הנקודות" שהן מרכזי המעגלים העוברים דרך A ו-B. (חפשו בנייה מתאימה.)
   - בנו מעגל אחד כזה (העובר דרך A ו-B).
   - מצאו בנייה בעזרתה תתקבל (ללא גרירה), נקודה שהיא מרכז מעגל העובר דרך A, B, ו-C, כלומר מעגל החוסם את המשולש.

3. א) מה הקשר בין אנכים אמצעיים לצלעות משולש, לבין המעגל החוסם?

ב) האם בכל **משולש** ניתן למצוא נקודה, שהיא מרכז של מעגל, העובר דרך שלושת הקודקודים?

ג) כמה מעגלים, שעוברים דרך A, B ו-C, ניתן לשרטט?

4. **ובמרובע**? האם תמיד ניתן למצוא נקודה (E) כך שמעגל, שמרכזו בנקודה, יעבור דרך ארבעת הקודקודים של מרובע ABCD?

- שרטטו מרובע כללי ABCD.

שרטטו מעגל העובר דרך כמה שיותר קודקודים מבלי לשנות את המרובע.

לשם כך:

- בחרו נקודה E.
- שרטטו מעגל שמרכזו E ורדיוסו AE.
- גררו את E, כך שהמעגל יעבור דרך קודקודים נוספים.
  - האם אפשר לשרטט מעגל העובר דרך כל קודקודי המרובע?
- שנו את המרובע ובדקו עבור מרובע אחר.

5. חקרו מה הקשר בין מעגל חוסם מרובע לאנכים אמצעיים לצלעות:

בחרו מרובע כללי ABCD.

- מצאו בעזרת בניית אנכים אמצעיים, מרכז של מעגל שעובר דרך A ,B ו-C. האם הוא עובר גם דרך D? אם לא, היכן נמצאים מרכזי כל המעגלים העוברים דרך C ו-D? שרטטו.
- שנו את המרובע, כך שהמעגל יעבור גם דרך D.

מה הקשר בין אנכים אמצעיים לצלעות המרובע, לבין המעגל החוסם?

6. א) בדקו מאיזה סוג המרובע, אם שני אנכים אמצעיים שלו מתלכדים.

לשם כך:

- מחקו את המעגל והוסיפו אנך אמצעי רביעי.
- שנו את המרובע שבסעיף הקודם, כך ששני אנכים אמצעיים יתלכדו.

ב) נסו לשנות את המרובע כך **שרק** שתי נקודות חיתוך של האנכים האמצעיים תתלכדנה. הסבירו.