גיאומטריה אנליטית

מדריך למורה



המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

חובר על ידי:
רחל בוהדנה

ייעוץ:
אברהם הרכבי

הערות והארות:
ליליה קוט

עריכה לשונית:
נגה ואן דורמולן-אברהמי

הדפסה ועריכה במחשב:
אורנה עמר

שרטוטים:
אסנת סרבגילי
חגית נתן

עיצוב והפקה:
אגי (רחל) בוקשפן

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאכסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה.
שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט אלא ברשות מפורשת בכתב מהמו"ל.

©
כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע
ומשרד החינוך התרבות והספורט

נדפס בישראל תשנ"ח - 1998
הרצות פילמים: גרפאור בע"מ
דפוס מאירי בע"מ

תוכן עניינים

מבוא 5-9

פרק א: קבוצות של נקודות 11-28

קרוב רחוק 11

סימון נקודות במערכת צירים 19

קבוצות של נקודות במערכת צירים 23

פרק ב: הקו הישר 29-142

שיפוע 31

ישר דרך הראשית 40

הזזה ומשוואת ישר 46

גאומטריה במערכת צירים 59

פעילויות מחשב-מבוא 69

פעילות במחשבון גרפי או מחשב - פעילות 1 71

מצב הדדי של ישרים 85

פעילות במחשבון גרפי או מחשב - פעילות 2 91

נקודות חיתוך 98

עוד על נקודות חיתוך 107

נקודות חיתוך עם הצירים 114

משוואת ישר דרך נקודה נתונה 120

משוואת ישר דרך שתי נקודות 125

ישרים מאונכים 131

עוד על ישרים מאונכים 138

פרק ג: שיקוף, סימטריה ואמצע הקטע 143-174

ציר סימטריה 143

פעילות במחשבון גרפי או מחשב - פעילות 3 152

היכן האמצע? 159

על תיכון במשולש ואמצעי צלעות במקבילית 166

פרק ד: מעגל 175-201

מרחק בין נקודות 175

מעגל שמרכזו (0 , 0) 183

מעגל וישר 188

לא רק (0 , 0) כמרכז 194

עוד על מעגל וישר 199

פרק ה: קבוצות של נקודות-משוואות וגרפים 202-207

מבוא

גאומטריה אנליטית מהי ?

גאומטריה אנליטית היא "חלק במתמטיקה העוסק בחקר תכונותיהן של הצורות הגאומטריות השונות בשיטות האלגברה והאנליזה באמצעות קואורדינטות" (מתוך מילון אבן שושן). בהגדרה זו נקודת המוצא היא הגאומטריה, אך נוכל להציע הגדרה אחרת בה נקודת המוצא היא השילוב בין האלגברה והאנליזה.
למשל: "גאומטריה אנליטית היא החלק במתמטיקה אשר מעניק (בעזרת מערכות צירים) משמעות גאומטרית למשוואות אלגבריות".
הגאומטריה האנליטית שנלמדת בבית הספר, מתבססת, על פי רוב, על מערכת צירים קרטזית (צירים מאונכים). יש לציין שהתחום עוסק גם במערכות צירים נוספות (פולרית, מקבילה, וכדומה). בספר זה נלמד ונעסוק רק במערכת צירים קרטזית.

מעט מן ההיסטוריה

כמו בתחומים מתמטיים אחרים, ההתחקות אחר ההיסטוריה של הגאומטריה האנליטית איננה משימה קלה. זרעים של הרעיונות השונים נזרעו לאורך מאות שנים, למרות זאת ישנם ציוני דרך אשר עליהם יש תמימות דעים בין החוקרים השונים הרואים בעבודתם של דקארט ופרמט את פריצת דרך לביסוס התחום.
דקארט (Descartes) היה פילוסוף צרפתי, שנולד ב- 1596 ונפטר ב- 1650. הוא ראה במתמטיקה את הבסיס לכל חשיבה רציונלית.
פרמט (Fermat), שהיה גם הוא צרפתי, נולד ב- 1608 ונפטר ב- 1665, היה משפטן שהתעניין בגאומטריה הקלאסית של היוונים.
שניהם התבססו על קודמיהם, אך הרחיבו את רעיונותיהם על ידי כך שקישרו בין צורות גאומטריות והמשוואות האלגבריות המבטאות אותן. הם דיברו על מקומות גאומטריים הנובעים מכל "משוואה בה יש שני נעלמים המתארים קו (ישר או עקום)". זאת הייתה פריצת דרך אדירה, אשר לדעת רבים היא בין החשובות בתולדות המתמטיקה.
אמנם, הן הסימון שלהם והן "מערכת הקואורדינטות", לא נראות כמו אלה בהם אנו משתמשים כיום, אך הרעיון לקשר תחומים שעד כה היו נפרדים, קידם הן את הגאומטריה והן את האלגברה והאנליזה.

על ספר זה

ספר זה שייך לסדרת ספרי הלימוד, שפותחו לתלמידים הלומדים ברמה של שלוש יחידות. הוא מיועד לתלמידי כיתות י'. כמו בספרים האחרים של סדרה זו, הלימוד מדגיש קשר בין נושאים ובין ייצוגים שונים: ייצוג מילולי, ייצוג גאומטרי (גרפי), וייצוג אלגברי (משוואה).

מבנה הספר לתלמיד

בספר חמישה פרקים וכל פרק מחולק לסעיפים. בכל סעיף יש תרגילי "מפתח" בהם מוצג הנושא הנלמד והמושגים החדשים הקשורים בו. לאחר תרגילים אלה מופיעות דוגמאות של תרגילים אופייניים המתאימים לעבודה בכיתה, ללימוד וביסוס המושגים החדשים. בדרך זו מאפשרים לתלמידים לקלוט ולבסס היטב את הידע החדש תוך כדי יישומו המיידי. הדגש הוא על הבנת המושגים בצורה אנטואיטיבית.

בפרקים השונים משולבים סעיפים הנקראים "גאומטריה במערכת צירים" - בסעיפים אלה עוסקים בלימוד או בחזרה על תכונות של צורות גאומטריות.

בחלק האחרון של כל סעיף, לאחר הכותרת "תרגילים", מופיע תרגול נוסף המתאים לשיעורי בית או לעבודה עצמית בכיתה.

על מנת לעזור בזיהוי סוג הפעילות בחרנו לצרף "תמרורים", אשר פירושם ניתן בעמוד הראשון בגוף הספר, לידיעת המורים והתלמידים.

הנושאים המודגשים בספר

א. **מקום גאומטרי** - אוסף של נקודות המקיימות תכונה מסוימת - התכונה יכולה להינתן באופן מילולי, במשוואה, בטבלה או בגרף. עיקר הפעילות בגאומטריה אנליטית הוא זיהוי תכונות של מקומות גאומטריים בכל אחד מהייצוגים.

ב. **הקו הישר** - מוצג כמקום גאומטרי, ובאמצעותו לומדים מושגים מרכזיים כגון שיפוע של קו ישר, ישרים מאונכים, ישרים מקבילים, אמצע קטע ואורך קטע, חיתוכים בין ישרים ועוד.

ג. **המעגל** - מוצג אף הוא כמקום גאומטרי באמצעות הייצוגים השונים. כמו כן מציגים את הפרבולה והאליפסה כמקומות גאומטריים, בעזרת משוואה, בעזרת הגרף, ובעזרת ייצוג מילולי.

כל הנושאים האלה משלבים חזרה והרחבה של תכנית הלימודים בגאומטריה אוקלידית שנלמדה בחטיבת הביניים.

הגישה להוראה

א. התבססות על התנסות מעשית, פיתוח תפיסה ויזואלית (שימוש בגרפים, קווים שקופים ניידים) ורק לאחר מכן הצגת הגדרות או נוסחאות. הסקת מסקנות בעקבות התנסויות רבות בעלות עניין, ללא דרישה להוכחות מתמטיות רבות.

השימוש בגרף (בשרטוט) הוא "קרש הצלה" לתלמידים המתקשים, לכן חשוב לעודד את אותם התלמידים להשתמש בו.

ב. לימוד הפרקים השונים הוא ספירלי, כלומר הידע הקודם מטופל באמצעות סיטואציות חדשות, לכן אין צורך להגיע מיד לשליטה מוחלטת בנושאים החוזרים מספר פעמים במהלך ההתקדמות בספר.

ג. הקשר בין הייצוגים נבנה לאורך זמן. השימוש בייצוגים השונים נותן לתלמידים כלים לבדיקה עצמית, וגם מעמיד בפניהם את האופציה של "לאן לברוח". לדוגמה: כאשר הם מתקשים בפתרון אלגברי של מציאת נקודות החיתוך של הישר עם הצירים, הם יכולים לשרטט (או לחילופין להניח) את הישר במערכת צירים, ולקרוא את שיעורי הנקודות. כמו כן, הם יכולים לקרוא מהשרטוט את משוואת הישר העובר דרך שתי נקודות נתונות או לרשום משוואת ישר מקביל, מאונך או חותך לישר נתון.

ד. בדרך כלל, במקרים בהם דרושה הטכניקה האלגברית, היא מובאת עם תוכן ומשמעות גאומטריים. למשל: פתרון מערכת שתי משוואות לינאריות בשני משתנים (בייצוג האלגברי) פירושו מציאת שיעורי נקודת החיתוך של הישרים המתאימים (בייצוג הגאומטרי).

ה. ההתקדמות בחומר - חשוב מאד להתקדם גם אם לא כל התלמידים מגיעים לשליטה. לפעמים, למרות שהתלמידים פתרו את כל השאלות בפרק מסוים, עדיין קשה להם לתפקד באופן עצמאי בנושא, או ייתכן שהמורה מרגיש שהחומר לא נקלט היטב. חשוב להזכיר כי בהמשך יהיו הזדמנויות נוספות לחזור אל אותו נושא מנקודות מבט שונות, לכן אין צורך להתעכב עד שכל התלמידים יוכלו לתפקד באופן עצמאי לחלוטין בפתרון השאלות. בדרך כלל חשוב לתלמידים לדעת שהם מתקדמים בחומר. אם בכל זאת המורה רוצה לבסס את דרך הפתרון של שאלה מסוימת הוא יוכל לתת שאלה נוספת דומה כעבודת בית או כחזרה בכיתה.

ו. מומלץ מאוד להשתמש בשקפים, אשר מגוונים את השיעורים, ממקדים את ההקשבה וחוסכים בזמן.

המלצות לדרך העבודה בכיתה

א. כשהתלמידים אינם מביניים את הנדרש בשאלה שבספר או אינם מצליחים לקשר בין הנתונים - כדאי לנסח את השאלה בצורה אחרת בעל-פה, תוך הדגשה מתאימה.

לפעמים פתרון שאלה במשותף בכיתה, עוזר לתלמידים שאינם מוצאים את הדרך לפתרון. לפעמים במקום לפתור את השאלה במשותף, אפשר להסתפק בהוספת שאלות ביניים בעל-פה ורישום רמזים על הלוח, דבר שיכול לעזור לאלה שאינם יודעים איך להתחיל, או שנתקעים באמצע הדרך.

ב. סיכומים - חשוב לעשות סיכום שיעור, פרק או נושא, על מנת לעזור לתלמידים לארגן את ידיעותיהם ולזכור אותם.

ג. טיפול בידע קודם - כדאי שההכנה תיעשה בתחילת השיעור, על-ידי מספר "תרגילי חימום" או כעבודת בית לשיעור קודם. במקרה זה בדיקת שיעורי הבית בתחילת השיעור תרענן את הזכרון, ויש סיכוי שהתלמידים ידעו להשתמש בו בעת הצורך. במדריך נביא הצעות לתרגילי הכנה כאלה.

ד. שיעורי בית - כדאי להקדיש מספר דקות בסוף השיעור לנתינת שיעורי הבית כך שאפשר להסביר בנחת את הטעון הסבר. לא רצוי לתת עבודה רבה לשיעורי בית כדי לא לייאש את התלמידים. כדאי לתת כשיעורי בית, תרגילים, שרוב התלמידים יוכלו להתמודד איתם, ויוכלו בעזרתם לחזור על החומר ולהתאמן בו. אין צורך לבדוק את כל שיעורי הבית באופן שיטתי, בדיקה שיטתית היא לעיתים ארוכה, מייגעת ומחטיאה את המטרה. כמו כן, אין צורך לגזול זמן רב מן השיעור לצורך הבדיקה. אם תוך כדי הבדיקה המורה מגלה שהשיעורים לא הובנו, גם אז אין צורך להקדיש חלק גדול מן השיעור להסבר. במקרים כאלה כדאי לתת לכל הכיתה תרגילים, דומים לתרגילים שניתנו לשיעורי בית, כך תהיה תעסוקה גם לתלמידים שפתרו היטב את שיעורי הבית.

מפעם לפעם המורה יכול לבקש מן התלמידים להכין את שיעורי הבית על דפים ולאסוף אותם לבדיקה. במקרה כזה חשוב להחזיר לתלמידים במהירות את הדפים עם הערות תיקון.

מה במדריך זה?

במדריך זה תוכל למצוא:

1. בתחילת כל פרק את מהלך הפרק והקשר בין הסעיפים השונים.
2. דוגמאות למערכי שיעור.
3. דוגמאות לפתיחה או סיכום של שיעור, פרק או נושא.
4. הצעות לשיעורי בית.
5. דוגמאות של קשיים של תלמידים והצעות כיצד להתמודד איתם.

הצעה לחלוקה לשיעורים (לפי פרקים)

מספר שיעורים

פרק א': קבוצות של נקודות 4

פרק ב': הקו הישר 25-22

פרק ג': שיקוף, סימטריה ואמצע קטע 6

פרק ד': מעגל 8-7

פרק ה': קבוצות של נקודות - משוואות וגרפים 1

סה"כ 44-40

נספח I: פעילויות במחשבון גרפי 3

נספח II: פעילויות מחשב באמצעות הלומדה מתמטיx. 3

פרק א' - קבוצות של נקודות (עמודים 7 – 23 בספר)

עיקרו של הפרק הוא הקשר בין הייצוגים השונים של מקומות גאומטריים (קבוצות של נקודות בעלות תכונה משותפת), ובו שלושה סעיפים.

בסעיף הראשון משרטטים על דף משובץ, ללא מערכת צירים, קבוצות של נקודות המקיימות תכונה מסויימת. תוך כדי כך מכירים ומשתמשים במונחים "מרחק בין נקודות" ו"מרחק נקודה מישר", בעזרת הייצוג המילולי והייצוג הגאומטרי (הגרף).

בסעיף השני עושים חזרה על מערכת צירים וסימון נקודות במישור, כדי לבנות את הקשר בין הידע הקודם לידע החדש, ולהקל את המעבר אל הייצוג האלגברי - המשוואה.

בסעיף השלישי לומדים על ישרים מקבילים לצירים. ישרים אלה מוצגים כקבוצת כל הנקודות המקיימות את התכונה ששיעור ה-x של כולן שווה, או שיעור ה- y שווה, ולומדים על משוואות של ישרים כאלה.

קרוב רחוק (עמודים 7 - 14 בספר)

בסעיף זה לומדים ומכירים את המושגים: "מרחק בין נקודות" ו"מרחק נקודה מישר", ומשרטטים מקומות גאומטריים באמצעות שימוש במושגים אלה.

בכל תרגיל מסמנים תחילה מספר נקודות המקיימות תכונה מסוימת, ורק אחר-כך את **כל** הנקודות המקיימות את התכונה.

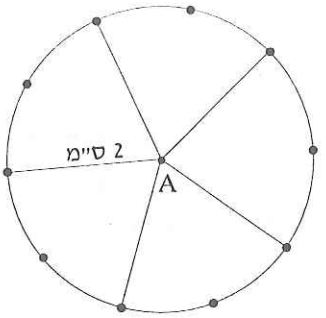
תרגילים 1 - 3: מרחק בין נקודות

בתרגילים אלה נעשה שימוש במושג "מרחק בין נקודות", במובן האוקלידי הפשוט, אשר ניתן למדוד אותו בעזרת סרגל או כל כלי מדידה אחר.

לאחר שרטוט חלק מן הנקודות, התלמידים מגיעים למסקנה לגבי הצורה המתקבלת. המטרה בתרגילים אלה היא יצירת התחושה של בניית צורה גאומטרית מקבוצת נקודות אשר להן תכונה משותפת.

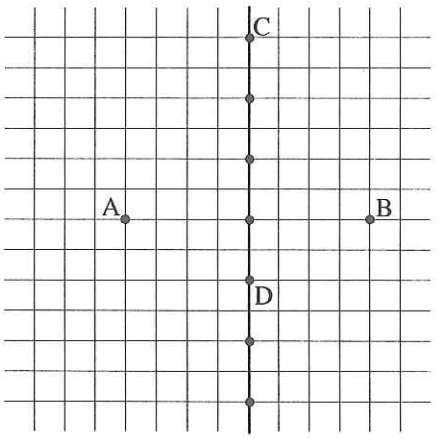
תרגיל 1

מתקבל מעגל שמרכזו A ורדיוסו 2 ס"מ.



תרגיל 2

הקו ישר, המתקבל בתרגיל זה, ניתן לאפיון במספר צורות. בכיתות הניסוי ראינו, שתלמידים שלמדו לפני כן את היחידה "פונקציות ותבניות ריבועיות", אפיינו אותו כ"ציר סימטריה של הנקודות A ו- B", אחרים כ"אנך אמצעי לקטע AB".



כסיכום, לאחר תרגיל 2, אפשר להעלות לדיון כיתתי את השאלה הבאה:
איך נבדוק שאכן כל אחת מהנקודות המסומנות נמצאת במרחק שווה מ- A ומ- B? כאן ייתכנו תשובות שונות. רצוי לתמוך בתשובות השונות ולתת לתלמידים להיווכח שאכן הנקודות הנתונות הן במרחק שווה מ- A ומ- B.
את המרחק אפשר למדוד בעזרת סרגל או כל כלי מדידה אחר, או על ידי ספירה במאוזן ובמאונך. לדוגמה: כדי להגיע מ- A ל- D הלכנו 4 משבצות ימינה וירדנו 2 משבצות, כדי להגיע מ- B ל- D הלכנו 4 משבצות שמאלה וירדנו 2 משבצות.
בכיתות הניסוי ראינו גם שחלק מהתלמידים נעזרו במושג "מרחק אלחוטי" ואחרים במשפט פיתגורס, כיוון שלמדו קודם את היחידה "מסלולים שטחים והיקפים" מסדרה זו. ייתכן שחלק מהתלמידים יעדיפו להיעזר בחפיפת משולשים. כל הסבר מנומק של התלמידים, נותן ביטוי לקשר האסוציאטיבי שלהם, ועוזר לשאר התלמידים לקשר בין נושאים שונים.

תרגיל 3

תרגיל זה דומה לתרגיל הקודם, אלא שהשרטוט מדגיש זווית במקום קטע שנחצה.

גם כאן ניתן לאפיין את הקו הישר כציר סימטריה של הנקודות A ו- B.

תרגילים 4 - 5: מרחק נקודה מישר

בתרגילים אלה נבנה המושג "מרחק נקודה מישר" תוך כדי פעילות.

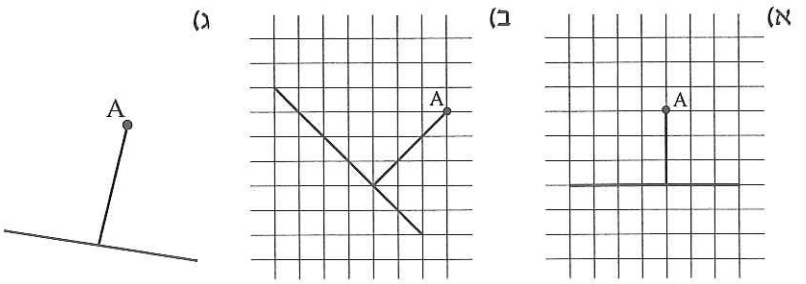
תרגיל 4

א) התלמידים יכולים למדוד את השבילים, ולהגיע למסקנה שמבין השבילים המשורטטים שביל אי הוא הקצר ביותר. בכיתות הניסוי ראינו תלמידים שהשתמשו באמצעים שונים למדידה: חלקם מדדו עם סרגל, אחרים השתמשו בדף משבצות, והיו כאלה שהניחו קצה של דף וסימנו עליו את אורכי השבילים.

ב) חלק מהתלמידים הניחו סרגל (או קצה של דף) על שביל אי וסובבו את הסרגל, תוך כדי הסיבוב מרגישים שככל שהזווית הנוצרת עם הנהר מתקרבת לזווית לישרה, השביל מתקצר.

חשוב לציין שלרוב התלמידים יש אינטואיציה נכונה לגבי הדרך הקצרה, אך לחלקם קשה לנסח זאת במילים. הניסוח המתאים מופיע בספר לאחר ההתנסות בתרגיל 5.

תרגיל 5



בסיכום התרגיל אפשר להעלות לדיון את השאלה הבאה:

כיצד נשכנע, שאורך האנך מהנקודה אל הישר היא הדרך הקצרה ביותר?

הסבר פורמלי יכול להיות בעזרת משפטים בגאומטריה. למשל, אם נשרטט כל מרחק אחר (בנוסף לאנך) מ-A לישר, נוצר משולש ישר זווית, בו המרחק הנוסף הוא היתר, אשר תמיד גדול מכל ניצב.

תרגילים 6 - 13: מקומות גאומטריים בעזרת מרחק נקודה מישר

תרגיל 6

המקום הגאומטרי המתקבל הוא שני ישרים המקבילים לישר הנתון. בדרך כלל תלמידים נוטים לשרטט רק ישר אחד, לכן מופיע סעיף ג' המרמז שיש יותר מישר אחד כזה. חלק מהתלמידים מתייחסים לנקודות בודדות (נקודות השריג) ומסמנים את כל הנקודות במסגרת השרטוט, אך לא מחברים אותן לקו ישר. במקרה כזה יש מקום לשאול, אם יש נקודות נוספות שאינן בצמתי המשבצות המקיימות אותה תכונה.

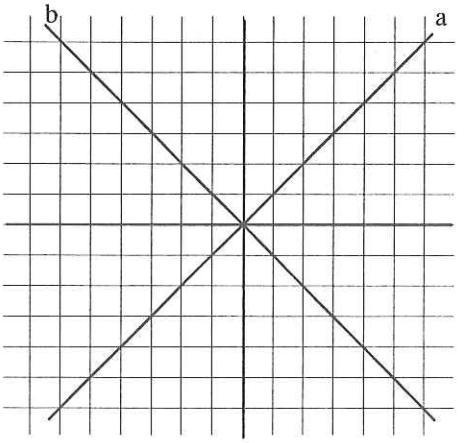
בעקיפין, תלמידים חוזרים כאן על הרעיון שהמרחק בין מקבילים הוא קבוע.

תרגיל 7

הישר המתקבל מקביל לשני הישרים שבשרטוט, ומרחקו מכל אחד מהם הוא חצי המרחק בין הישרים הנתונים. כדי להגיע לתשובה, התלמידים יכולים לבחור נקודות על הישר ולבדוק אם התכונה מתקיימת עבורן.

תרגיל 8

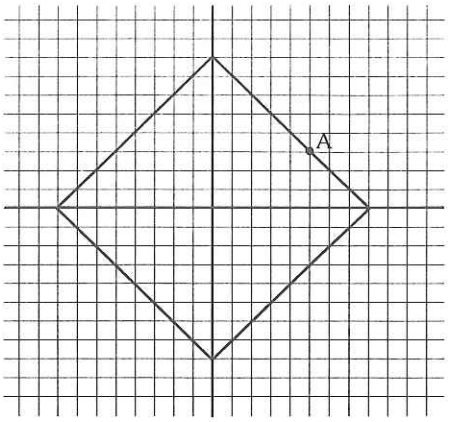
מתקבלים שני הישרים a ו- b, כל אחד מהם חוצה את הזווית בין הישרים המשורטטים. מנסיוננו חלק מהתלמידים מוצאים תחילה נקודה אחת המקיימת את התכונה, ומחפשים נקודות סימטריות לה לגבי הישרים המאונכים. חלק טועים ומחברים את ארבעת הנקודות ומקבלים ריבוע. במקרה כזה כדאי להדריך אותם לבדוק נקודות נוספות, ולהיווכח אם הן אכן מקיימות את התכונה הנדרשת. ייתכן ותלמידים יעלו את הטענה ש- a ו- b מאונכים, במקרה כזה מומלץ לא להכנס לדיון בטענה זו, כי נחזור ונטפל בה כשנלמד על ישרים מאונכים, ואז נקשר בין הנושאים.



תרגיל 9

בתרגיל זה משתמשים בסכום המרחקים.
מומלץ לעזור למתקשים על ידי בחירת נקודות ובדיקת התכונה עבורן.

א) - ב)



ג) מתקבל ריבוע ששטחו 32 משבצות. כשאלת אתגר אפשר לבקש מהתלמידים לנמק מדוע מתקבל ריבוע.

את שטח הריבוע ניתן לחשב במספר דרכים: על-ידי ספירת משבצות, על-ידי מציאת שטחו של משולש ישר זווית אחד וכפל ב- 4, על-ידי מציאת שטח משולש שווה שוקיים וכפל ב- 2, על-ידי חישוב מחצית מכפלת האלכסונים (כי מתקבל מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה), ועוד. מומלץ לעודד את התלמידים להציע מספר דרכים לחישוב.

תרגילים

מטרת התרגילים הבאים היא לבסס את מה שנלמד עד כה.

תרגיל 10

מתקבל ישר מקביל לשני הישרים a ו- b , שעובר דרך C.

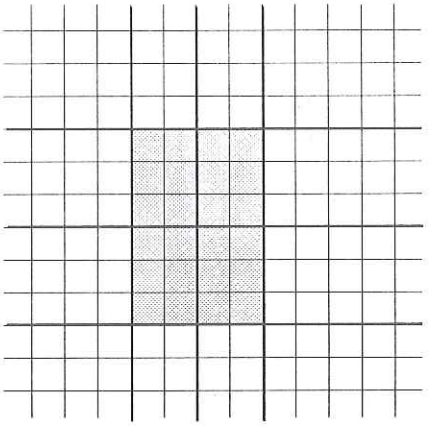
תרגיל 11

בתרגיל זה הוסרה התמיכה של המשבצות, ואפשר לפתור אותו גם בעזרת אומדן.
מתקבל ישר מקביל לישרים המשורטטים, שמרחקו מכל ישר שווה לחצי המרחק בין הישרים הנתונים.
חלק מהתלמידים משרטטים מספר סופי של נקודות, כפי שעשו בתרגילים קודמים, לכן רצוי לשאול על נקודות נוספות.

תרגיל 12

מטרת תרגיל זה היא למצוא את התכונה של המקום הגאומטרי, ללא התמיכה של המשבצות, כלומר, לשרטט את שני הישרים המקבילים.

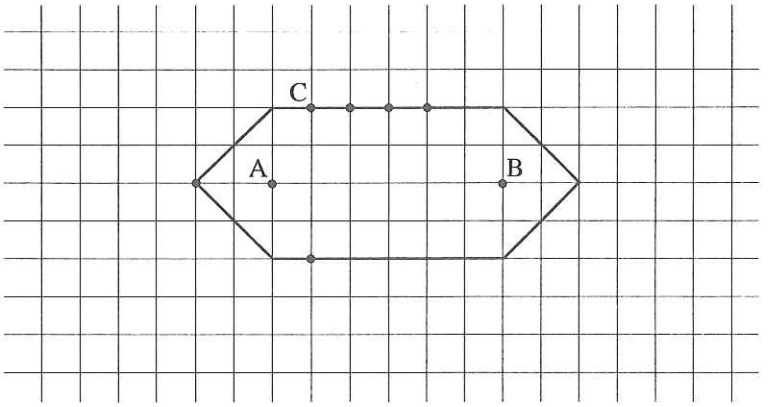
תרגיל 13



ג) מתקבל מלבן שצלעותיו מקבילות לישרים המשורטטים, ואורכיהן 4 משבצות ו- 6 משבצות, לכן היקפו 20 משבצות ושטחו 24 משבצות שטח.
חישוב ההיקף והשטח יכול להיעשות גם על ידי ספירה.

תרגיל 14

תרגיל זה מיועד למתקדמים, אינו הכרחי להמשך, לכן ניתן לדלג עליו.
בתרגיל זה מוגדר מקום גאומטרי על בסיס הגדרת מרחק על קווים ישרים (לא המרחק האוקלידי הקלאסי). מרחק זה מקובל ב"גאומטריה של מוניות". הצורה המתקבלת היא "אליפסה" ב"גאומטריה של מוניות".



הצעות לתרגילים נוספים

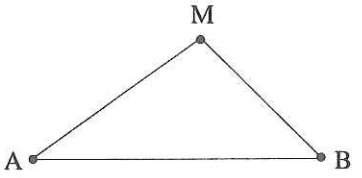
התרגילים הבאים אינם מופיעים בספר, הם כולם תרגילי אתגר, ואין מטרתם לבסס את החומר, אפשר להשתמש בהם לתרגול נוסף, כדף עבודה, או לדלג עליהם.

בתרגיל I יישום המושג "מרחק מנקודה לישר" (כגובה במשולש).

בתרגיל II יש קושי בהבנת התכונה, "מרחק פי 2", לכן ניתן רמז על ידי סימון שתי נקודות כאלה.

בתרגיל III משלבים את שני המושגים: "מרחק נקודה מנקודה" ו"מרחק נקודה מישר". השילוב מהווה קושי, לכן ניתנה הדרכה מפורטת למציאת המקום הגאומטרי.

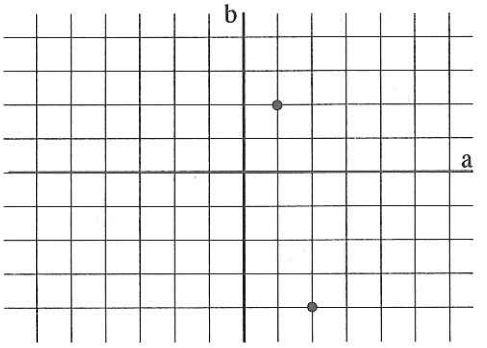
I. שרטט את מרחק הנקודה M מהקטע AB.



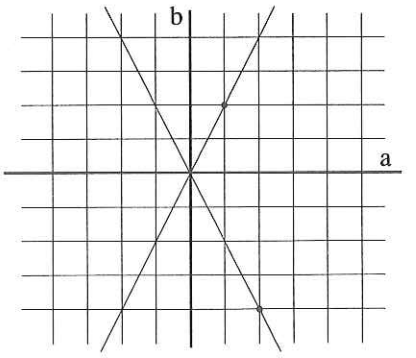
II. בשרטוט שתי נקודות שמרחקן מהישר a גדול פי 2 ממרחקן מהישר b.

א) סמן לפחות עוד 6 נקודות כאלה.

ב) שרטט את קבוצת **כל** הנקודות המקיימות תכונה זו.

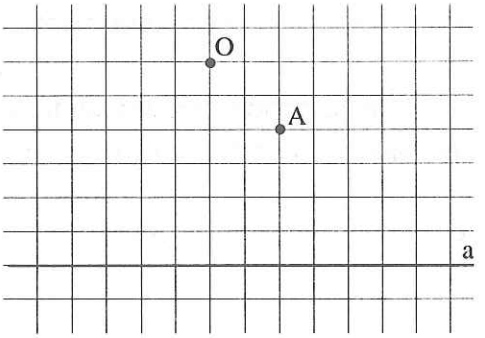


תשובה לסעיף ב'



III. "מרחק נסיעה" בין שתי נקודות הוא אורך מסלול הנסיעה, הקצר ביותר האפשרי, בין שתי הנקודות, **על קווי המשבצות בלבד**.

א) הנקודה A נמצאת במרחק נסיעה של 4 יחידות מהנקודה 0, ובמרחק של 4 יחידות מהישר a. סמן נקודה נוספת כזו. האם תוכל למצוא נקודות נוספות כאלה?



ב) כמה נקודות יש, הנמצאות במרחק נסיעה של 6 יחידות מהנקודה 0, ו- 6 יחידות מהישר a? סמן אותן.

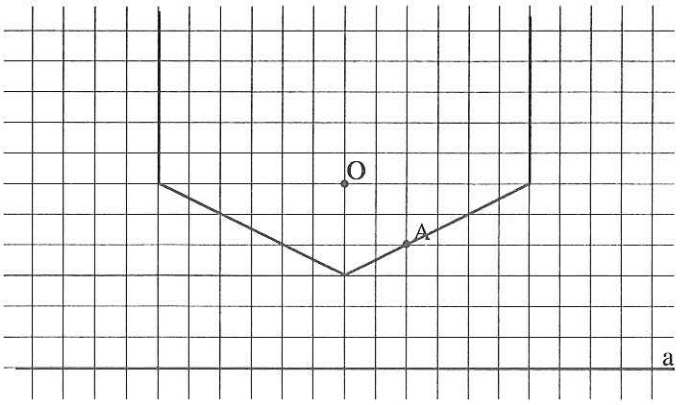
ג) כמה נקודות יש, הנמצאות במרחק נסיעה של 8 יחידות מהנקודה 0, ו- 8 יחידות מהישר a? סמן אותן.

ד) כמה נקודות יש, הנמצאות במרחק נסיעה של 5 יחידות מהנקודה 0, ו- 5 יחידות מהישר a? סמן אותן.

ה) כמה נקודות יש, הנמצאות במרחק נסיעה של 3 יחידות מהנקודה 0, ו- 3 יחידות מהישר a? סמן אותן.

ו) שרטט את קבוצת **כל** הנקודות שמרחק נסיעתן מהנקודה 0 שווה למרחק מהישר a.

תשובה: הצורה שמתקבלת היא "פרבולה" ב"גאומטריה של מוניות".



סימון נקודות במערכת צירים (עמודים 15 - 17 בספר)

בסעיף הראשון פגשנו שני ייצוגים של צורות גאומטריות - המילולי והגאומטרי (הגרפי). בסעיף זה חוזרים על מערכת הצירים וסימון נקודות במישור כשהמטרה היא להגיע אל הייצוג האלגברי (המשוואה).

כהכנה לסעיף, ממולץ לשחק בלומדה "קדימה אל הקודקודים".

המשחקים בלומדה זו מאפשרים חזרה מעניינת, במתכונת של משחק. בכל מקרה, אם אין אפשרות ל"שחק" במחשב, יש לעשות חזרה ותזכורת מתאימות, בעזרת פעילויות הדומות לאלו הניתנות בלומדה.

במסגרת הלומדה המחשב בוחר מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים, ועל התלמידים לגלות אותו על-ידי מציאת שיעורי קודקודיו. כל נקודה שהתלמיד מציע, מסומנת במערכת הצירים בהתאם למצבה, ביחס למלבן שהמחשב בחר (אם היא בתוך המלבן, מחוץ למלבן, על צלע המלבן, או קודקוד).

בלומדה ארבעה משחקים, מן הקל אל הקשה:

- אל המלבן עם רמז.
- אל המלבן בלי רמז.
- אל המלבנים - משחק לשניים.
- אל המלבנים הסימטריים - משחק לשניים.

מומלץ שהתלמידים "ישחקו" בפעילות הראשונה שני משחקים, אחר כך בפעילות השנייה - משחק אחד.

רצוי שליד כל מחשב יעבדו שני תלמידים ביחד, ועל-ידי כך יוכלו להיעזר זה בזה. תלמידים מתקדמים יהנו גם מן המשחק השלישי שהוא תחרותי. המשחק הרביעי הוא אתגר ואינו נחוץ לצורך החזרה.

היתרונות לחזרה בדרך כזו:

א) סימון נכון של נקודה במישור (לא מתבלבלים בסדר שיעורי הזוג).

ב) עוברים תוך כדי משחק על **הרבה** נקודות בשיעור אחד.

ג) פוגשים בישרים מקבילים לצירים - כהכנה לסעיף הבא.

ד) מוטיבציה ועידוד לתלמידים החלשים, כאשר הם מצליחים לגלות את המלבן במספר קטן יותר של צעדים מאשר התלמידים הטובים יותר.

תרגילים

כל התרגילים הבאים עוסקים במצבים שנובעים באופן טבעי מהפעילות במחשב. תלמידים מתקדמים ששיחקו במחשב, יכולים לדלג על חלק מתרגילים אלה. לתלמידים המתקשים מומלץ לפתור תרגילים אלה כחזרה נוספת.

תרגיל 2

א) הקודקוד הרביעי הוא (4 , 1).

ב) הקודקודים האחרים הם (4 , 4–) , (2– , 2–).

תרגיל 3

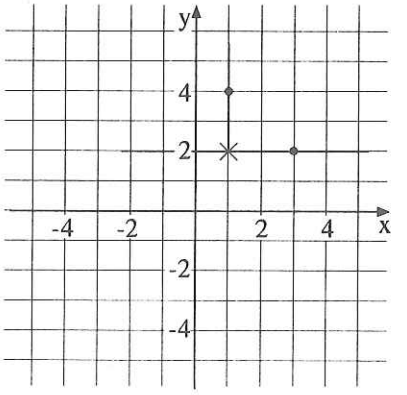
המטרה בתרגיל זה היא לראות שייתכנו מצבים בהם יש יותר מפתרון אחד. כדי להגיע לתשובה, התלמידים יכולים לסמן את הנקודות ולשרטט "חלק מהמלבן", אחר כך לקרוא את שיעורי אחד הקודקודים, ולהגיע למסקנה לגבי יתר הקודקודים.

הנקודות (4 , 1) ו- (2 , 3) נמצאות על שתי צלעות סמוכות של מלבן, לכן ישנן שתי אפשרויות.

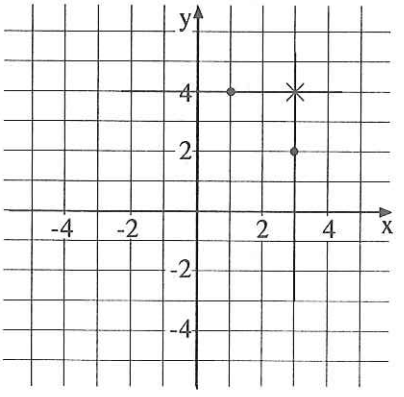
האפשרות הראשונה: אחד הקודקודים הוא (2 , 1) ויתר הקודקודים לא ידועים, ידוע עליהם רק שהאחד הוא מהצורה (_ ,1) והאחר (2 , _) .

האפשרות השנייה: הקודקוד הוא (4 , 3) ויתר הקודקודים האחד מהצורה (_ , 3) והאחר (4 , _).

אפשרות ראשונה

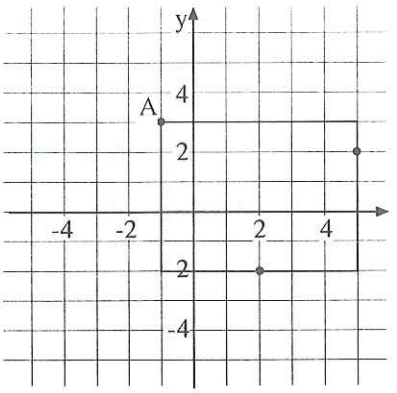


אפשרות שנייה



בכל אחת מהאפשרויות הנ"ל ישנם אינסוף מלבנים כאלה.

תרגיל 4



א) מתקבל מלבן יחיד שקודקודיו הם:
(–2 , –1) , (–2 , 5) , (3 , 5) , (3 , –1).

ב) הנקודות שיש למחוק הן:
(–3 , 5) הנמצאת מחוץ למלבן,
(0 , 2) ו- (2 , 2) הנמצאות בתוך המלבן.

בכיתות הניסוי ראינו שתלמידים משרטטים תחילה ישרים מקבילים לצירים דרך הנקודה A, ואחר כך משרטטים מקביל לציר x דרך הנקודה T, מקביל לציר y דרך הנקודה M, ומתוך השרטוט קוראים את קודקודי המלבן וממיינים את הנקודות.

תרגיל 5

א) כל נקודה שבה שיעור ה- x הוא בין 1 ל- 7 ושיעור ה- y הוא 5.
ב) הקודקוד הרביעי הוא (–1 , 7).

אם בודקים את התרגיל בכיתה, אפשר לשתף תלמידים רבים ולהפנות אליהם שאלות שונות. לדוגמה:

- היכן (ביחס למלבן) נמצאת הנקודה (5 , 10)? הצע עוד נקודה כזו.
- היכן (ביחס למלבן) נמצאת הנקודה (0 , 0)? הצע עוד נקודה כזו.
- רשום שיעורי נקודה הנמצאת על ציר x והיא בתוך המלבן.

עם התלמידים המתקדמים בכיתה אפשר לדון גם בשאלה: כמה מלבנים שונים, שצלעותיהם מקבילות לצירים, אפשר לשרטט אם נתון:

א) קודקוד אחד? (אינסוף מלבנים.)
ב) שני קודקודים? (אם שני הקודקודים הם קודקודים סמוכים, אז יש אינסוף מלבנים, ואם הם קודקודים נגדיים אז יש מלבן אחד בלבד.)
ג) שלושה קודקודים? (מלבן אחד בלבד.)

תרגילים 6 - 7

תרגילים אלה מהווים הכנה לקראת ביטוי אלגברי של התכונה המשותפת לכל הנקודות הנמצאות על ישר שמקביל לאחד הצירים.

תרגיל 6

כל הנקודות הנמצאות על הישר מקיימות את התכונה שהשיעור הראשון שלהן 2– , לכן הן מהצורה (__ , 2–).

תרגיל 7

כל הנקודות הנמצאות על הישר מקיימות את התכונה שהשיעור השני שלהן 3, לכן הן מהצורה (3 , __).

קבוצות של נקודות במערכת צירים (עמ' 18 - 23 בספר)

מטרת הסעיף היא להראות את הקו הישר המקביל לאחד הצירים, כקבוצת נקודות להן תכונה משותפת (הישר כמקום גאומטרי). התכונה המשותפת יכולה להינתן באחד משלושת הייצוגים: מילולי, אלגברי (משוואה), וגאומטרי (גרף). ריבוי הייצוגים תומך בהבנת המושגים. במקרים רבים אפשר לבחור בייצוג המתאים והנוח ביותר לפתרון התרגילים.

תחילה התלמיד "נפגש" עם קבוצה של נקודות בעלות תכונה משותפת, הנתונה בייצוג המילולי, הוא משרטט את כל אותן הנקודות המקיימות אותה התכונה (ייצוג גרפי), ואחר כך מבטא את התכונה המשותפת במשוואות מהצורה $y = \square$, $x = \square$. בהמשך פוגשים תרגילים העוסקים במעברים בין הייצוגים השונים, לאו דווקא בסדר זה.

פעמים רבות התלמידים טועים ברישום משוואות הצירים, למשל, הם שוגים ורושמים $x = 0$ כמשוואת ציר x. מומלץ לא לתת לתלמידים כללים לשינון, אלא להדריך אותם להגיע לפתרון, למשל: לסמן מספר נקודות, ולחפש את התכונה המשותפת להן.

לאורך כל הדרך מומלץ ללמד אסטרטגיות ליצירת דרכי פתרון במקום שינון כללים.

תרגיל 1

מטרת התרגיל היא להגיע אל המשוואה של ישר המקביל לאחד הצירים, והוא מהווה הכנה מדורגת למעברים בין שלושת הייצוגים השונים. מתחילים מסימון חמש נקודות המקיימות תכונה מסוימת, מכלילים בשרטוט, ומגיעים למשוואה (האיפיון באמצעות ביטוי אלגברי של התכונה המשותפת).

רצוי לפתור את שני הסעיפים הראשונים ביחד עם התלמידים בכיתה, כאשר למורה יש מערכת צירים מוכנה על שקף או על נייר בריסטול.

א) כל הנקודות הן מהצורה (3 , ___).

ב) מתקבל ישר מקביל לציר x. חשוב להדגיש שהישר ממשיך לשני הכיוונים גם מעבר למערכת המשורטטת.

לאחר שפותרים ביחד את שני הסעיפים, ולפני שמגיעים למשוואה, רצוי לשאול שאלות נוספות על הישר שהתקבל, למשל:

- האם הנקודה (3 , 105) נמצאת על הישר?
- האם הנקודה (105 , 3) נמצאת על הישר?
- באיזה מרחק מציר x נמצא הישר?

- האם הנקודה $(3\ ,\ 3)$ נמצאת על הישר?
- האם הנקודה $(3\ ,\ -3)$ נמצאת על הישר?
- האם הנקודה $(-3\ ,\ 3)$ נמצאת על הישר?
- הצע נקודה על הישר, שנמצאת בין הנקודות $(3\ ,\ -3)$ ו- $(3\ ,\ 3)$.
- הצע נקודה על הישר, שנמצאת בין הנקודות $(5\ ,\ 3)$ ו- $(6\ ,\ 3)$.
- הצע נקודה שאינה על הישר.
- הצע נקודה שאינה על הישר ונמצאת ברביע הראשון.

בסיכום הדיון מגיעים אל הייצוג האלגברי שהוא המשוואה $y = 3$. בתחילת הדיון אפשר לשאול את התלמידים: "איזו דרך אלגברית היו מציעים לציין תכונה זו?". מנסיוננו, יהיו תלמידים שיציעו את המשוואה $y = x + 3$ כשבעצם הם מתכוונים ל- $(x\ ,\ 3)$, כיוון שאינם מיומנים עדיין בתרגום אל המשוואה. בעזרת דיון כזה, התלמידים יהיו שותפים ליצירת המשוואה המתאימה, ותוך כדי כך יעלו על פני השטח קשיים שונים של תלמידים, כך שהמורים יוכלו להיות מודעים להם ויוכלו לנסות לפתור קשיים אלה בדרכים מתאימות.

ג) משוואת הישר $y = -2$.

ד) משוואת הישר $x = 2$.

ה) נקודות החיתוך הן : $(3\ ,\ 2)$, $(-2\ ,\ 2)$.

תרגיל 2

ייתכנו תשובות שונות של תלמידים כי כל תלמיד משרטט מלבן אחר. אין צורך לבדוק את כל התשובות, אפשר גם לעבור בין התלמידים ולבדוק מספר תשובות ביחד.

תרגיל 3

גם בתרגיל זה מטפלים במעבר מן הייצוג המילולי אל הייצוג הגאומטרי (השרטוט) וממנו אל הייצוג האלגברי (המשוואה). הפעם עושים שימוש במושג "מרחק בין ישרים".

א) $y = 2$ ב) $y = -4$ ג) $y = -1$

תרגילים נוספים שכדאי להציג בשלב זה:

המורה מניח במערכת הצירים ישר שמקביל לאחד הצירים ושואל:

- מה משוואת הישר?
- רשום שיעורים של שלוש נקודות הנמצאות על הישר.
- המורה נותן שיעורי נקודה (שאינה בגבולות מערכת הצירים המשורטטת) ושואל אם היא נמצאת על הישר.

תרגילים 4 - 5

תרגילים אלה מטפלים במשוואות הישרים הנמצאים על הצירים, תוך כדי מעבר בין הייצוגים השונים. דרך העבודה עשויה להרגיל תלמידים לרשום את משוואת הציר (או משוואת כל ישר אחר), תוך כדי בדיקת שיעוריהן של מספר נקודות, ומציאת התכונה המשותפת להן.

העבודה מתבצעת באופן הדרגתי: תחילה ישרים מקבילים לצירים, אחר כך רישום וסימון נקודות על הצירים, ולבסוף השרטוט והמשוואה של הצירים עצמם.

תרגילים

תרגילים 6 - 8 מתאימים לשיעורי בית.

תרגיל 6

א) $x = 1$ ב) $y = 2$ ג) $(1 , 2)$

תרגיל 7

ישר א': $y = 3$ ישר ב': $y = -3$ ישר ג': $x = 2$ ישר ד': $x = -3$

בבדיקת התרגיל אפשר לשאול: מה שיעורי נקודת החיתוך של הישרים א' ו- ד'? או א' ו- ג'?

תרגיל 8

ב) $y = 3$

ג) כדאי לבדוק את מגוון התשובות האפשריות ולעודד תשובות לא שגרתיות (כמו משוואות בהן המספר הוא שלילי או אפס.)

דוגמה לשאלות נוספות, שאפשר לשאול תוך כדי בדיקת התרגיל עם כל הכיתה:

- איזה מבין הישרים הבאים מקביל לישר $y = 1$, ואיזה חותך אותו?

  $y = 8$, $y = -5$, $x = 6$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -2.5$

- האם שתי הנקודות $(8 , 15)$ ו- $(20 , 15)$ יימצאו על ישר שמקביל לישר $y = 1$?

תרגיל 9

עד כה המקומות הגאומטריים בהם טיפלנו על-ידי מעברים בין ייצוגים היו קווים ישרים, מקבילים לצירים. בתרגיל זה רואים את הייצוגים השונים של מקרים בהם הגרף אינו קו ישר. בחלק מהכיתות תרגיל זה מהווה חזרה על ידע קודם בנושא הפונקציה הריבועית, אך הפעם מנקודת ראות של הגאומטריה האנליטית. למשל ראיית הפונקציה הריבועית כמקום גאומטרי. תלמידים שלא למדו נושא

זה קודם יפגשו פה את הפרבולה כקבוצה של נקודות המקיימות תכונה מסוימת, כאשר התכונה נתונה בייצוג האלגברי, אפשר לבקש מהתלמידים לנסח את התכונה במילים.

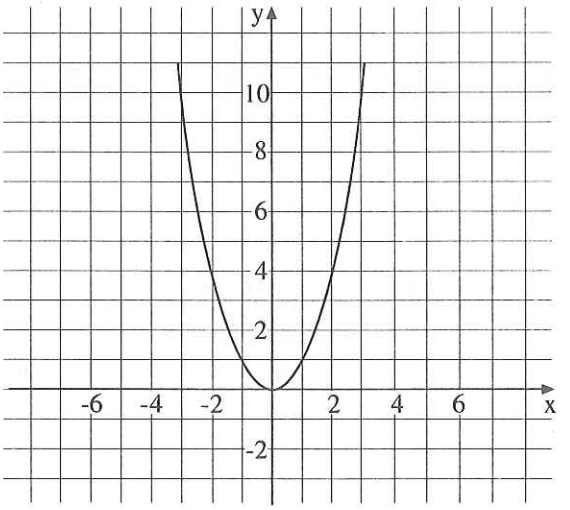
א) התלמידים משלימים את שיעורי הנקודות על-ידי הצבה, שיקולים או פתרון משוואה.

הנקודות: $(1\ ,\ 1)\ ,\ (-\frac{1}{2}\ ,\ 2\frac{1}{4})\ ,\ (1\frac{1}{2}\ ,\ 2\frac{1}{4})$

$(-2\ ,\ 4)\ ,\ (2\ ,\ 4)\ ,\ (-1\ ,\ 1)$

$(-3\ ,\ 9)\ ,\ (3\ ,\ 9)\ ,\ (0\ ,\ 0)$

ב ו- ג) הגרף המתקבל נקרא פרבולה.



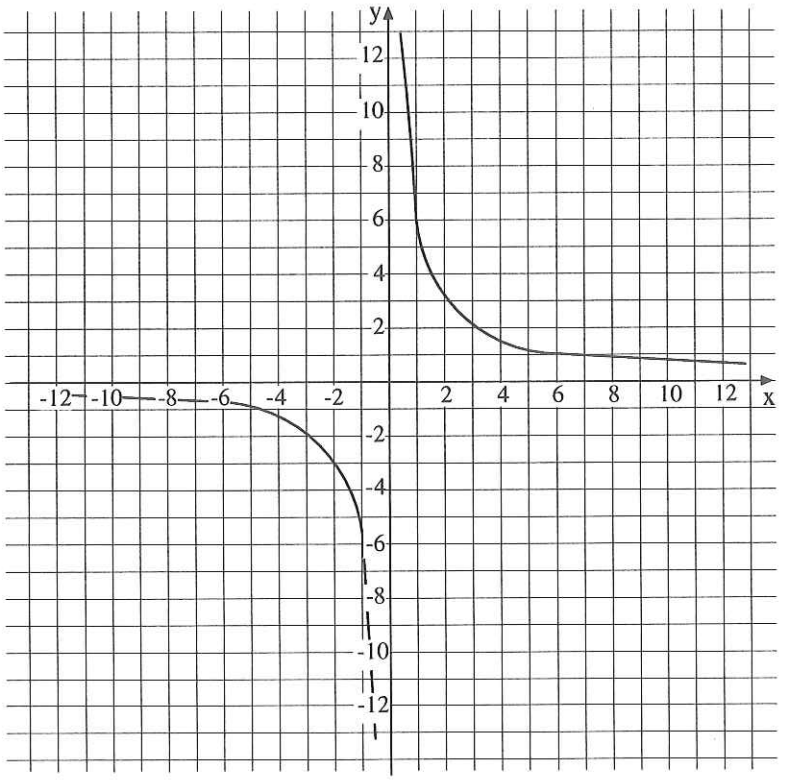
ד) לצורה יש ציר סימטריה והוא ציר y , שמשוואתו $x = 0$.

תרגיל 10

תרגיל זה הוא תרגיל נוסף שמטרתו להעשיר את אוסף המקומות הגאומטריים מעבר לקווים ישרים, כמו בתרגיל הקודם.

שני הסעיפים א' ו- ב' ניתנו בנפרד, כדי למנוע מן התלמידים את השגיאה של חיבור שני הענפים כדי לקבל קו רציף. תלמידים רבים נוטים לבדוק את התכונה לגבי מספרים שלמים בלבד, ואז הם מחברים את הנקודות בקטעים.

יש לעודד אותם לבחור גם מספרים שאינם שלמים, (בכך ייאלצו להשתמש במחשבון) וכך "לראות" את ההיפרבולה המתקבלת כקו עקום. על פונקציה זו ילמדו באנליזה, ולכן אין להרחיב כאן את הדיבור עליה.



ג) המשוואה המתאימה היא $xy = 6$.

לשיקול דעת המורה אפשר להעלות לדיון את השאלות הבאות:

- האם ייתכן שהגרף שיתקבל יחתוך את ציר x? אם לא, נמק. אם כן, באיזו נקודה?
- האם ייתכן שהגרף שיתקבל יחתוך את ציר y? אם לא, נמק. אם כן, באיזו נקודה?

התלמידים יכולים לענות על בסיס ההגדרה של המקום הגאומטרי (מכפלת השיעורים שווה ל- 6), ועל בסיס הידע שלהם על שיעורי נקודות שעל הצירים (אחד השיעורים אפס). גם נושא האסימפטוטות מטופל באנליזה, כך שאין כאן מקום להרחיב את הדיון.

פרק ב' - הקו הישר (עמודים 24 - 109 בספר)

בפרק זה נעסוק בישרים שאינם מקבילים לצירים, ובמושגים מרכזיים הקשורים לקו הישר: שיפוע, ישרים מקבילים, ישרים מאונכים, נקודות חיתוך ועוד. גם כאן, כמו בפרק הקודם, נעסוק במעבר בין הייצוגים השונים, תוך שימוש רב בייצוג הגרפי.

המושג המרכזי המלווה את מהלך ההוראה הוא "הקשר הקרטזי" - המבטא את הקשר בין הייצוג האלגברי. (המשוואה) לייצוג הגרפי. נקודה נמצאת על קו (ישר או עקום) אם ורק אם הזוג הסדור המייצג אותה מקיים את משוואת הקו.

קשר זה נראה לנו, אמנם, קשר פשוט שניתן ללמוד אותו בקלות על-ידי כך שמשננים ומתרגלים אותו, אך הוא בעל "פנים רבות". בונים אותו לאורך זמן ובהקשרים שונים. לעיתים נראה כי התלמידים יודעים ומבינים את טיב הקשר, אך במטלה שאינה שגרתית, נראה כי הם אינם מפעילים את הקשר ולכן נכשלים. (בהמשך נתייחס למטלות מסוג זה).

השלבים במהלך הוראת הפרק:

השלב הראשון (עמודים 24 - 30) מתחילים משיפוע של קטע ומכלילים לשיפוע של ישר. מסיקים שהשיפוע לאורך הישר קבוע ושווה לשיפוע של כל קטע שנבחר על הישר. למסקנה זו מגיעים בתרגיל 4 שבעמוד 26 , על-ידי בדיקת שיפועי קטעים על ישר, ומשתמשים בה במהלך כל הלימוד. חשוב להדגיש שבדיקה כזו אינה הוכחה. מאחר והחוברת היא מדריך למורה אנו מביאים **למורים בלבד** את ההוכחה הפורמלית. אין צורך להביא זאת לתלמידים ברמה של 3 יח"ל, כיוון שהדבר עשוי לסבך את התלמידים ולהרחיק אותם מההבנה האינטואיטיבית.

השיפוע מוצג כמדד של "תלילות": כהתקדמות במקביל לציר y, על כל יחידה אחת של התקדמות במקביל לציר x. כמעט בכל הספר, הדיוק של קביעת השיפוע מתוך הגרף בשיטה זו מספיק בהחלט. התלמידים קוראים שיפועים של ישרים המשורטטים על דף משובץ או משרטטים ישרים בעלי שיפוע נתון. בשלב זה לא עוסקים עדיין במשוואת הישר.

השלב השני (עמודים 31 - 35) עוסקים בישרים העוברים דרך ראשית הצירים. מאפיינים ישרים אלה כקבוצת כל הנקודות בהן שיעור y הוא פי מספר מסוים משיעור x. הקשר בין השיעורים נובע מתוך הסתכלות בטבלה, אותה משלימים על פי הגרף, וכך מגיעים להצגה האלגברית של ישרים אלה באמצעות המשוואה $y = ax$ (כאשר a מייצג את השיפוע).

השלב השלישי (עמודים 36 - 49) עוברים מהמשוואה $y = ax$ למשוואה הכללית $y = ax + b$. המעבר נעשה על ידי שרטוט מקבילים לישרים העוברים דרך הראשית ומציאת ההזזה המתאימה. (גם במקרה זה, עם התלמידים אנו יוצאים מתוך ההנחה שלישרים מקבילים יש אותו שיפוע, ורושמים משוואות מתאימות, את ההוכחות הפורמליות למשפטים אלה נביא **למורים בלבד**). מגיעים למסקנה שמשוואת הישר המקביל ($y = ax + b$) מתקבלת על ידי תוספת קבועה b למשוואה $y = ax$, כאשר הישר המקביל חותך את ציר y בנקודה (0,b). הכל נעשה בעזרת דוגמאות מספריות ולא באמצעות פרמטרים.

השלב הרביעי (עמודים 50 - 107) מקשרים בין המשוואה הכללית של ישר $ax + by + c = 0$ למשוואה מהצורה $y = ax + b$ או $x = c$. מגיעים למשוואות של ישרים מקבילים, למשוואות של ישרים נחתכים ומציאת נקודת החיתוך, ולמשוואות של ישרים מאונכים. חשוב לציין שלא נכנסים לחישוב אלגברי של השיפוע בעזרת חישוב של מנת הפרשים, וכן לא למציאת a ו- b של משוואת הקו הישר על ידי פתרון משוואות.

לאורך כל הפרק התלמידים משרטטים ישרים לפי שתי נקודות או לפי נקודה ושיפוע, וקוראים את המשוואה מתוך השרטוט, ולהיפך, כלומר, משרטטים ישרים לפי משוואות נתונות.

בחלק מן התרגילים התלמידים משרטטים ממש, ובחלק הם מניחים ישרים ניידים (המשורטטים על נייר שקוף) במערכת צירים. מערכת הצירים והישרים הניידים מלווים את התלמידים לאורך כל היחידה.

אנו ממליצים למורים להמחיש, להסביר ולקיים דיונים כיתתיים בעזרת מערכת צירים המצולמת על שקף או משורטטת על בריסטול או על פוליגל, ובישרים ניידים.

השימוש במערכת הצירים ובישרים ניידים מאפשר שרטוט קל ומהיר של ישרים רבים, ולכן ניתן להתרכז בשלב של דיונים והסקת מסקנות הקצאת זמן מיותר לטכניקת השרטוט המקובלת.

במהלך הפרק משולבים סעיפים הנקראים "גאומטריה במערכת צירים". סעיפים אלה עוסקים בחקר צורות גאומטריות בכלים אלגבריים. בדרך זו תלמידים לא רק חוזרים על מושגים ותכונות של צורות שונות, אלא מגוונים את העבודה ומקשרים בין נושאים שונים. כמו כן, משולבות טכניקות אלגבריות הקשורות לנושא ומשמשות לחזרה ולהתקדמות.

שיפוע (עמודים 24 - 30 בספר)

הסעיף מתחיל בשימוש אינטואיטיבי בתכונות "תלול יותר או פחות". תחילה מתייחסים למושג השיפוע של קטע מבחינה איכותית (תלול יותר או פחות, שיפוע חיובי או שלילי), ומראים שהגובה אינו מדד מספיק לקביעת השיפוע. עוזרים לתלמידים להסיק כי השיפוע מוגדר לפי השינוי בגובה יחסית להתקדמות, שינוי זה מאופיין באמצעות מספר. המספר וסימנו נקבעים על פי מספר היחידות שעולים או יורדים במקביל לציר y, על כל יחידת התקדמות ימינה במקביל לציר x. בהמשך, לאחר בדיקה והסקה אינטואיטיבית, מגיעים למסקנה שהשיפוע לאורך הישר קבוע, והוא שווה לשיפוע של כל קטע שנבחר על הישר.

לאחר מכן התלמידים מתאמנים במציאת שיפוע של ישר נתון, ובשרטוט ישרים על פי שיפוע נתון. מאחר והתלמידים אינם צריכים, בכל המקרים, לשרטט ממש אלא להניח ישרים, אפשר לפתור תרגילים רבים בזמן קצר.

בעזרת מערכת הצירים שעל שקף או על פוליגל וישרים ניידים, נוכל לתת תרגילי "חימום" בתחילת שיעור או כפסק זמן במהלך השיעור לריכוז התלמידים. למשל:

א) לברר שיפועים של ישרים שונים - המורה מניח ישרים במערכת הצירים ומבקש מהתלמידים לקרוא את השיפוע.

ב) לקרוא לתלמידים להניח ישרים בעלי שיפוע נתון.

למורים בלבד

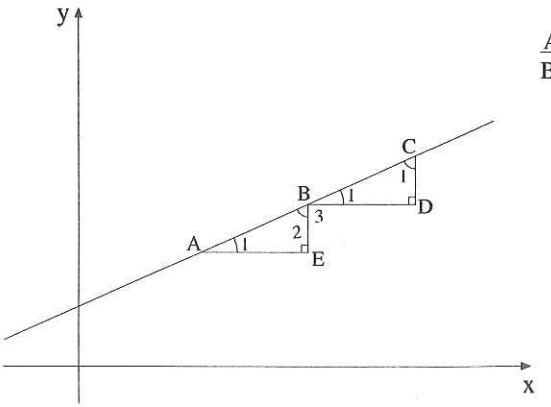
נוכיח להלן את המשפטים: גרף הוא קו ישר אם ורק אם השיפוע שלו קבוע.

1. **משפט:** אם הגרף הוא קו ישר אז השיפוע שלו קבוע.

נתבונן במשולשים CBD ו- BAE, שניהם ישרי זווית.

$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle B_2$ (מתאימות בין מקבילים $CD \parallel BE$)

מכאן: $\Delta CBD \sim \Delta BAE$ לפי זוויות.



ולכן מתקבל השוויון: $\frac{AE}{BD} = \frac{BE}{CD}$

ניתן גם לרשום: $\frac{BE}{AE} = \frac{CD}{BD}$

כלומר, השיפוע קבוע.

2. **משפט הפוך:** אם השיפוע קבוע אז הגרף הוא קו ישר.

נשתמש בשרטוט הקודם, ונסמן את השיפוע ב- a.

נבחר שלוש נקודות כלשהן A , B , C על הגרף.

על פי הנתון: אם $AE = m$ אז $BE = am$

אם $BD = n$ אז $CD = an$

מכאן: $\frac{AE}{BD} = \frac{BE}{CD}$

לכן: $\Delta CDB \sim \Delta BEA$ (שני משולשים ישרי זווית בעלי ניצבים פרופורציוניים.)

$\Rightarrow \sphericalangle B_1 = \sphericalangle A_1$

$\sphericalangle A_1 + \sphericalangle B_2 = 90°$

לכן: $\sphericalangle B_1 + \sphericalangle B_2 + \sphericalangle B_3 = 180°$ כלומר $\sphericalangle ABC = 180°$.

מכאן שהנקודות A , B , C נמצאות על ישר אחד.

תרגילים 1 - 3: שיפוע של קטע

המטרה בתרגילים אלה היא להכיר את המושג "שיפוע של קטע", ולאפיין אותו באמצעות מספר, תוך שימוש במושגים עלייה וירידה.

מושג השיפוע הוא מושג בסיסי במהלך לימוד הגאומטריה האנליטית וגם יותר מאוחר באנליזה. על כן חשוב מאד שהתלמידים יקבלו תחושה של מהו שיפוע, ידעו לקרוא שיפועים ולעבור מייצוג גרפי לייצוג נומרי. מהניסוי בכיתות מסתבר, שתלמידים הלומדים להכיר את השיפוע במשמעות "כמה עולים או יורדים על כל צעד של התקדמות", ומשתמשים בהגדרה אינטואיטיבית זו כאשר הם משרטטים או מניחים ישרים, וקוראים שיפועים מתוך ישרים משורטטים, זוכרים את המושג גם בשלב מאוחר יותר, כשהם מחשבים שיפוע על פי גובה ורוחב המדרגה. הם יכולים לחזור ולבדוק אם התשובה הגיונית או לחזור ולחשב בעזרת ההגדרה האינטואיטיבית. והעיקר, שימוש בהגדרה האינטואיטיבית מאפשר לתלמידים לפעול מתוך הבנת המושג.

נוח לדון בתרגילים אלה בכיתה כאשר הגרפים המשורטטים בספר, משורטטים גם על שקף, כך ניתן להתייחס לקטעים המתאימים, לרכז את התלמידים ותוך כדי דיון להגיע למסקנות המתאימות.

תרגיל 1

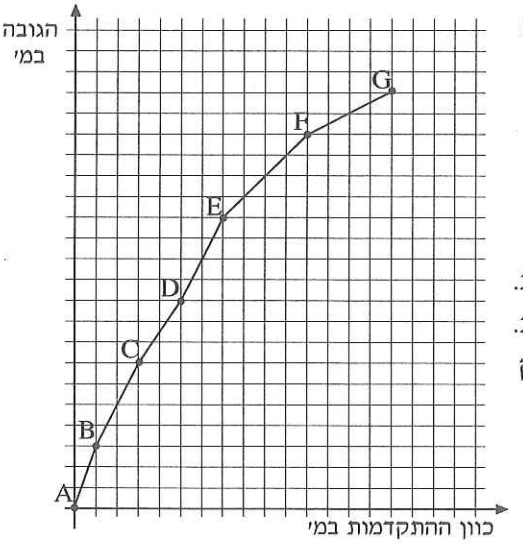
בתרגיל זה נעשה המעבר מהמושג האינטואיטיבי של "תלול יותר" ו"תלול פחות" אל מושג השיפוע של קטע ואיפיונו באמצעות מספר. אין הכוונה להשתמש בהגדרת השיפוע כמנת הפרשים או בנוסחה לחישוב השיפוע, אלא להסתמך על האינטואיציה, תוך טיפוח הצד הוויזואלי. תלמידים יכולים לנסות לשכנע לגבי

מידת התלילות במספר אופנים, למשל: הקטע שהכי קשה לטפס עליו, הקטע שהוא הקרוב ביותר לאנך ועוד. אם מתעורר ויכוח בין התלמידים, אפשר להציע להם להניח את הקטעים זה ליד זה ולראות מי תלול יותר.

אפשר, כמובן, לדון ב"גובה" במספר היבטים:

- אותו גובה של מדרגה אך רוחב שונה. למשל, המדרגות המתאימות לקטעים AB ו- CD אותו גובה 3 אך רוחב שונה.
- רוחב וגובה שונים לשתי המדרגות. למשל, המדרגות המתאימות לקטעים AB ו- BC.

המטרה היא להגיע עם התלמידים למסקנה, שהשינוי בגובה אינו מדד מספיק לקביעת השיפוע. לפיכך הוא נקבע לפי השינוי בגובה יחסית להתקדמות. כדי להקל, שורטטו הקטעים על דף משובץ והדיון הראשוני נעשה לגבי קטעים שהשיפוע שלהם מאופיין על ידי מספר חיובי, כאשר אורך צלע משבצת נקבע כמטר אחד.



א) – הקטע התלול ביותר הוא AB.
– בקטע FG השיפוע הוא הקטן ביותר.

ב) – ל- DE שיפוע גדול יותר מאשר ל- EF.
– E גבוהה מ- D ב- 4 משבצות.
– F גבוהה מ- E ב- 4 משבצות.
– השינוי בגובה אינו מספיק לקביעת השיפוע.

ג) השיפוע בקטע DE - 2, בקטע EF - 1.

ד) – לקטע BC.
– כשמטפסים לאורך BC עולים 2 מטר על כל מטר של התקדמות.
– כשמטפסים לאורך CD עולים 1.5 מטר על כל מטר של התקדמות.

ה) שיפוע AB הוא 3, שיפוע FG הוא 0.5.

תרגיל 2

תרגיל זה עוסק בשיפועי קטעים המשורטטים במערכת צירים, ובשיפוע המאופיין על ידי מספר שלילי, כלומר, "התקדמות וירידה".

חשוב להדגיש לתלמידים שההתקדמות במקביל לציר x היא תמיד **ימינה**, כדי למנוע בלבול בגלל הכנסת השיפוע השלילי. ישנם תלמידים ש"הולכים" שמאלה ואחר-כך עולים או יורדים. מכאן, במקום להשתמש במונחים "התקדמות ועלייה או ירידה", עוברים לשימוש ב"התקדמות במקביל לצירים". מינוח זה נותן אפשרות לאפיין שיפוע של קטע כלשהו במערכת הצירים.

במהלך התרגיל אפשר לשרטט על כל קטע "מדרגות" שהרוחב שלהן יחידה אחת, ולהגיע למסקנה ששיפוע הקטע הוא המספר המאפיין את "גובה המדרגה" כאשר x גדל ביחידה אחת.

א) שיפוע AB הוא 3, שיפוע BC הוא 1.

ב) שיפוע CD הוא 2–.

תרגיל 3

גם בתרגיל זה עוסקים בשיפועי קטעים שונים, אך ההתייחסות לשיפוע היא איכותית - חיובי, שלילי או אפס, כמו כן עוסקים בקשר בין סימן השיפוע למצב הקטע - עולה, יורד או קבוע.

שני התרגילים הקודמים עסקו בשיפוע של "קטע עולה" ושל "קטע יורד", כאשר ההתקדמות היא לכיוון החיובי של ציר x, המסקנה הייתה:

קטע עולה - שיפועו מאופיין על ידי מספר חיובי.

קטע יורד - שיפועו מאופיין על ידי מספר שלילי.

בתרגיל זה מגיעים למסקנה שאם אין התקדמות במקביל לציר y כאשר מתקדמים במקביל לציר x (כלומר, שהקטע לא "עולה" ולא "יורד"), אז השיפוע הוא אפס.

מכאן, הקטעים ששיפועם חיובי הם: BC , CD , DE.

הקטעים ששיפועם שלילי הם: AB , FG.

הקטע ששיפועו אפס הוא: EF.

תוך כדי פתרון התרגיל אפשר לבקש מן התלמידים לאפיין את שיפועי הקטעים גם בעזרת מספר מתאים.

תרגילים 4 - 5 : שיפוע של ישר

בסיום תרגיל 3 אנו ממליצים לדון בשאלה: כיצד נוכל למדוד שיפוע של ישר?
תוך כדי דיון ובדיקת שיפועים של קטעים שונים על הישר, שנבחרו באופן מקרי על ידי התלמידים, מגיעים למסקנה, שאפשר לחשב שיפוע של ישר כפי שמחשבים שיפוע של קטע, ולכן שאפשר לחשב את השיפוע בין שתי נקודות כלשהן על הישר. מציאת השיפוע נעשית על ידי ספירת משבצות.
את השיפוע קוראים התלמידים בדרך הבאה: בוחרים נקודה על הישר שהיא נקודת שריג (נקודה ששני שיעוריה שלמים), מתקדמים יחידה אחת ימינה (במקביל לציר x) וחוזרים לישר (במקביל לציר y). "גובה המדרגה" הוא השיפוע.
בשלב זה לא עוסקים בנוסחאות, ובהמשך, כשלומדים למצוא משוואת ישר העובר דרך שתי נקודות, אנו ממליצים לתלמידים המתקשים להשתמש במדרגה לחישוב השיפוע (במקום בנוסחה). (ראה עמוד 114 בספר לתלמיד).
בשני תרגילים אלה התלמידים מתאמנים בשרטוט ובהנחת ישרים על פי שיפוע נתון.

תרגיל 4

מטרת התרגיל לבסס את הבנת המושג "שיפוע של ישר". שני הסעיפים מטפלים בהיבטים האיכותיים והכמותיים של השיפוע. מאוסף התשובות של כל התלמידים בכיתה מתקבלים בכל סעיף ישרים רבים.

א) בסעיף זה ההתייחסות לשיפוע היא איכותית - הקשר בין סימן השיפוע (חיובי, שלילי או אפס) לבין עלייה או ירידה של הישר. אפשר להשתמש גם במערכת צירים לא משובצת וללא שנתות ולהניח ישרים ששיפועם חיובי או שלילי או אפס. בסעיף זה אפשר גם לבדוק מיידית אם התלמידים שרטטו נכון.

ב) בסעיף זה ההתייחסות לשיפוע היא בעזרת מספר. בכל חלק שבסעיף מתקבלים מכל התלמידים בכיתה ישרים שונים להם אותו שיפוע, כלומר מקבילים זה לזה.

תרגיל 5

א) המטרה בסעיף זה היא להיווכח שיש יותר מישר אחד בעל שיפוע נתון, כלומר ששיפוע נתון לא קובע ישר יחיד, ובנוסף להגיע למסקנה שישרים בעלי אותו שיפוע מקבילים.
למסקנה זו אפשר להגיע גם כאשר מניחים מספר ישרים עם אותו שיפוע, ולמעשה התלמידים מבינים כי יש אינסוף ישרים כאלה.

כפעילות נוספת בכיתה אפשר להניח ישרים מקבילים במערכת הצירים, לקרוא את שיפועיהם ולראות שהם שווים.

כיצד נוכל לשכנע שאכן ישרים בעלי אותו שיפוע מקבילים ולהיפך? אפשר לשמוע הצעות מהתלמידים בכיתה. יהיו תלמידים שיציעו לבדוק מרחק אנכי בין זוגות של נקודות שעל הישרים.

מפגש נוסף עם שאלה זו יהיה בסעיף הבא כשילמדו למצוא משוואת ישר מהצורה $y = ax + b$.

ב) בסעיף זה המטרה היא לחזק את התחושה שדרך נקודה נתונה אפשר להניח (או לשרטט) ישרים רבים עם שיפועים שונים, אך אם השיפוע נתון אפשר לשרטט רק ישר אחד.

– שיפוע ישר העובר דרך הנקודה (3 , 1–) ומקביל לציר x הוא 0 ומשוואתו $y = 3$.

מומלץ להשתמש במערכת הצירים ובישרים הניידים, כדי לשאול שאלות נוספות לזיהוי שיפוע.

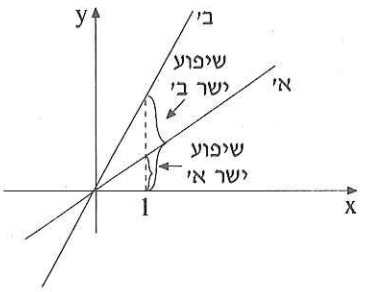
הצעה לתרגילים נוספים

משתמשים במערכת צירים לא משובצת.

I - מניחים שני ישרים ושואלים למי שיפוע גדול יותר לישר א׳ או לישר ב׳?

- אפשר גם לבקש לאמוד את השיפוע של כל ישר.

אפשר להראות כיצד ניתן לעשות אומדן "חכם", למשל: אם משרטטים מדרגה שרוחבה יחידה אחת, ומשווים את הגובה, רואים שעל אותה התקדמות יש פעם עלייה קטנה ופעם עלייה גדולה.

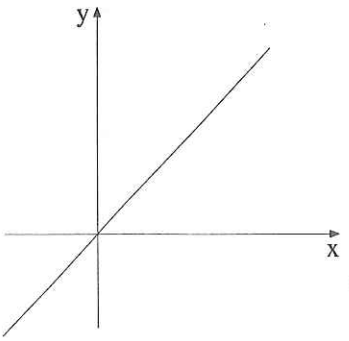


II. לבקש מהתלמידים לנסות לאמוד את שיפוע הישר שבשרטוט.

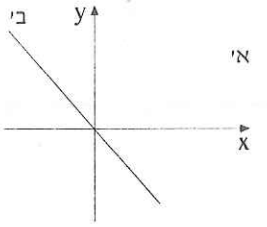
נניח שתלמיד אומר שהשיפוע 1.5, (רצוי שיסביר את קביעתו).

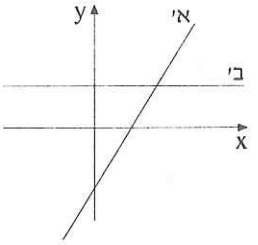
על סמך האומדן שהתקבל להזמין את התלמידים להניח ישרים נוספים:

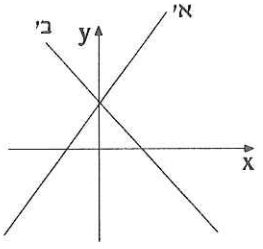
ישר ששיפועו 2, ישר ששיפועו 2-, ישר ששיפועו 1, ישר ששיפועו 0.5, ששיפועו 0.

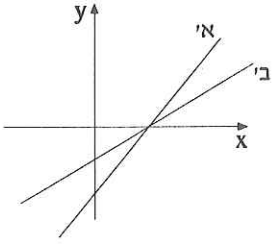


III. לבקש מהתלמידים לנסות לאמוד את השיפועים של זוגות הישרים הבאים.





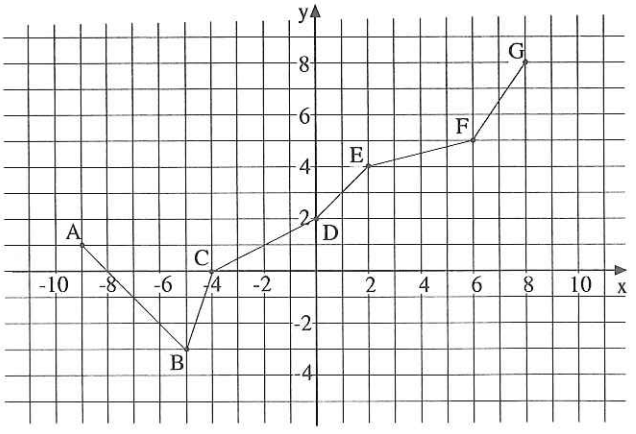




תרגילים

תרגיל 6

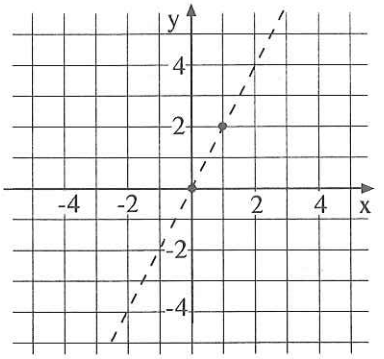
שיפועי הקטעים הם:



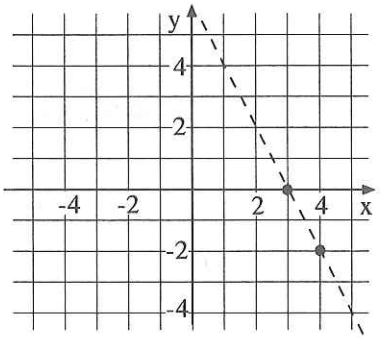
–1	–	AB
0.25	–	EF
0.5	–	CD
1	–	DE
1.5	–	FG
3	–	BC

תרגיל 7

בתרגיל זה רצוי שהמורה ידגים, בחלק מן הסעיפים, כיצד להניח ישר לפי נקודה ושיפוע, ולתת לתלמידים להתנסות.



למשל, הדגמת המורה בהנחת ישר דרך (0 , 0) ששיפועו 2. מסמנים קודם את הנקודה (0 , 0), אחר כך מתקדמים ימינה יחידה אחת, ועולים שתי יחידות (כי השיפוע 2). מגיעים לנקודה (1 , 2) ומסמנים אותה. מניחים ישר דרך שתי הנקודות המסומנות.



דוגמא נוספת: ישר דרך (0 , 3) ששיפועו 2–.
מסמנים את הנקודה (0 , 3).
מתקדמים יחידה אחת ויורדים 2 יחידות, מגיעים לנקודה (2– , 4) ומסמנים אותה ומניחים ישר דרך שתי הנקודות.

אחת האפשרויות לבדוק אם התלמידים הניחו נכון ישרים היא לבקש מהם לרשום שיעורים של שתי נקודות הנמצאות על כל אחד מהישרים ששרטטו.

סעיפים נוספים שמומלץ לבצע בכיתה ואינם מופיעים בספר

א) להניח ישר דרך (2 , 1–) ששיפועו 0.

ב) להניח ישר דרך (2– , 1–) ששיפועו 3.

תרגיל 8

א) 1 ב) 2 ג) 1.5

ד) 0 ה) 4– ו) 3–.

תרגיל 9

המטרה בתרגיל זה היא להסתמך על קריאת השיפועים מן השרטוט ועל הראייה, כדי לקבוע את המצב ההדדי בין הישרים. (כלומר, לקבוע אם הישרים מקבילים או נחתכים.) בהמשך לתרגילים 4 - 5 מתחזקת שוב המסקנה האינטואיטיבית, שאם לשני ישרים אותו שיפוע אז הם מקבילים, ואם לישרים יש שיפועים שונים אז הם נחתכים.

א) הישרים נחתכים, שיפועיהם: 2 ו- 0.5– .

ב) הישרים מקבילים, שיפועיהם 1–.

ג) הישרים נחתכים, שיפועיהם 3 ו- 0.5.

ד) הישרים מקבילים, שיפועיהם 3.

אם יהיו תלמידים שיבחינו שהישרים בסעיף א' מאונכים, אפשר לבקש מהם להסביר. אך מומלץ לא להכנס כאן לדיון בנושא זה יתקיים מאוחר יותר.

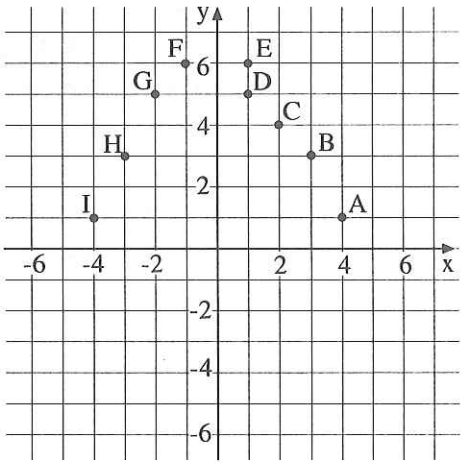
ישר דרך הראשית (עמודים 31 - 35 בספר)

בסעיף זה נעשה המעבר בין הייצוגים השונים של ישר דרך הראשית, החל מגרף אל טבלת ערכים מתאימה, וממנה למשוואה מהצורה $y = ax$ (תוך שילוב התיאור המילולי). התרגילים הראשונים עוסקים בכיוון זה, כלומר, משוואת ישר ששיפועו a ועובר דרך ראשית הצירים היא $y = ax$.

בהמשך ישנם תרגילים העוסקים בכיוון ההפוך, כלומר, ישר שמשוואתו $y = ax$ הוא ישר שעובר דרך הראשית ושיפועו a.

תרגיל 1

א) בסעיף זה משלימים טבלה של שיפועים, ומטרתו הכנה לסעיף הבא - הבנת הקשר בין השתנות השיפוע לסיבוב הישר, סביב נקודת ראשית הצירים.



הנקודה	A	B	C	D	E	F	G	H	I
השיפוע	$\frac{1}{4}$	1	2	5	6	-6	-5	-1	$-\frac{1}{4}$

ב) כאשר מסובבים ישר סביב (0 , 0) , בכיוון מנוגד לכיוון השעון ברביע הראשון, השיפוע הולך וגדל והוא מספר חיובי. ברביע השני - השיפוע הוא שלילי. כשממשיכים לסובב את הישר סביב (0 , 0) ברביע השני השיפוע הולך וגדל, אך בערכו המוחלט הולך וקטן. אין צורך להכנס לכל הדיון הזה עם התלמידים, מספיק שהם **יחושו** מה קורה לשיפוע אם מסובבים את הישר.

תרגיל 2

התרגיל מיועד ליצור את הקשר בין מה שהתלמידים יודעים על שיפוע של ישר מתוך הגרף שלו, לבין המספר שמכפיל את ה-x במשוואה: $y = \square \cdot x$.

הקשר הזה נבנה בשלושה שלבים:

בשלב א' - קוראים את השיפוע מתוך הגרף, כפי שעשו עד כה.

בשלב ב' - קוראים את השיעורים של הנקודות מתוך הגרף, ומשלימים טבלה.

בשלב ג' - מכלילים מהטבלה ומגיעים אל המשוואה.

שלב א' - תורגל קודם ועל פי רוב אין בו בעיות. שלב ב' - תורגל קודם לגבי ישרים המקבילים לצירים (ראה פרק א'), גם כאן אין לְצָפוֹת בעיות מיוחדות.

שלב ג' - כאן יש פעילות חדשה, בה הטבלה אמורה לתווך על מנת ליצור את המשוואה. יוצרים את המשוואה תוך הסתכלות בטבלה על היחס שבין ערכי x ו-y של כל זוג. נוכחים לדעת שערכי y מתקבלים על ידי מכפלה של ערכי x במספר קבוע.

ייתכן ושלב ההסתכלות בטבלה "יוליד" כללים או קשרים בין x ל- y שאינם נכונים. ניתן לבדוק אותם יחד עם התלמידים. ייתכן גם שההסתכלות בטבלה תהיה אנכית ולא אופקית, זאת אומרת שתלמידים יגידו, למשל, בסעיף א' כי "כל פעם מוסיפים 3", ההסתכלות היא נכונה והיא משקפת את מה שעשו בגרף (התקדמות של 1 גורמת לעלייה של 3), כדאי אז לדון בעובדה שבהינתן x מסוים, למשל גדול מאוד, לא יהיה יעיל להגיע אל ה- y בצורה זו. יחד עם זאת יש להסב את תשומת הלב למציאת כלל שתלוי בערך ה- x.

ההכללה המבוקשת יכולה להתקבל באופן מילולי, למשל, שיעור y הוא פי 3 משיעור x, ואחר כך לבטא אותה בסמלים (משוואה).

משוואות הישרים: א) $y = 3x$ ב) $y = 0.5x$ ג) $y = -2x$

ד) סעיף זה מיועד לגלות את הקשר בין השיפוע והמספר שמכפיל את x במשוואה $y = ax$. אפשר לנסח קשר זה במילים, ואפשר להשתמש בסמלים כמו $y = \square \cdot x$.

אם שלושת המקרים, שפתרו בתרגיל זה, אינם מספיקים כדי להגיע למסקנה, אפשר להשתמש במערכת הצירים הניידת ובישרים, ולפתור תרגילים נוספים כדוגמת אלה.

תרגיל 3

בתרגיל זה מיישמים את הקשר אליו הגיעו בתרגיל הקודם.

א) $y = 4x$ ב) $y = -4x$ ג) השיפוע -3

תרגיל 4

גם בתרגיל זה כדאי להשתמש במערכת הצירים הניידת, שיש לתלמידים ובשקף (או לוח הפוליגל) ולשאול שאלות נוספות בשני הכיוונים. אפשר גם לבקש מהתלמידים "להמציא" שאלות ולהפנות שאלות לכיתה מספר שאלות לדוגמה:

- להניח ישר דרך הראשית ולשאול מה משוואת הישר המונח במערכת הצירים.
- לבקש מהתלמידים להניח ישר שהמשוואה המתאימה לו היא למשל, $y = 2x$. כדי לבדוק אם התלמידים הניחו נכון את הישרים רצוי לבקש מהם לקרוא שיעורי נקודה שנמצאת על הישר שהניחו, ולהציבה במשוואת הישר, בכך מתחילים לטפח את "הקשר הקרטזי".
- האם הנקודה $(45 , 15)$ נמצאת על הישר $y = 3x$? הסבר.
- ידוע שהנקודה $(____ , 25)$ נמצאת על הישר $y = 2x$. מה שיעור ה- y?
- לבקש שיעורי נקודה שנמצאת על הישר ולא ניתנת לקריאה בשרטוט.
- לבקש שיעורי נקודה שלא נמצאת על הישר.

תרגיל 5

בתרגיל זה מיישמים את המעבר מהייצוג הגרפי (שרטוט) אל הייצוג האלגברי (משוואה) - קוראים מתוך השרטוט את השיפוע, ועל סמך הקשר $y = \square \cdot x$ רושמים את המשוואה.

משוואת ישר א' היא $y = \frac{1}{4}x$, משוואת ישר ב' היא $y = 4x$,
משוואת ישר ג' היא $y = -4x$.

תרגיל 6

המטרה של התרגיל היא חזרה על טכניקה אלגברית (פישוט תבניות) בהקשר עם מה שנלמד כעת - זיהוי משוואה מהצורה $y = ax$.

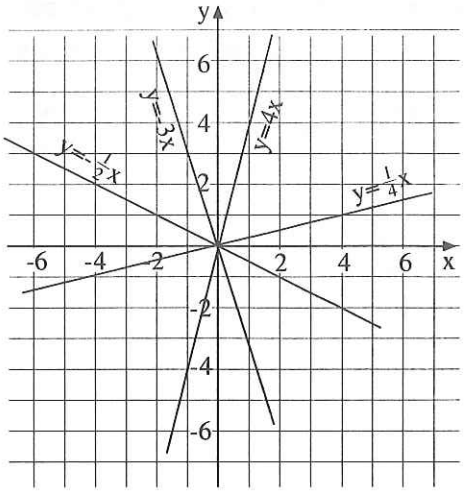
בחלק מן הסעיפים משתמשים בחוק הפילוג המורחב, כדאי להזכיר את החוק לתלמידים. רצוי גם שהמורה ידגים לתלמידים מספר תרגילים, אך אין "לשקוע" בזה הרבה, כי ריבוי תרגילים העוסקים בטכניקה יסיטו את תשומת הלב מהמהלך, ולכן אין לראות בהם יותר מהזדמנות לקשר טכניקה אלגברית עם מה שנלמד. מסיבה זו גם אין לשאוף להגיע לשליטה בשלב זה. בהמשך מהלך הספר תהיינה הזדמנויות נוספות לחזרות ולשילוב תרגילים דומים.

א) $y = 8x + 1$, אינה מהצורה.
ב) $y = 5x$, משוואה מהצורה $y = ax$, והגרף הוא ישר שעובר דרך $(0 , 0)$ ושיפועו 5.
ג) $y = 3x - 2$, אינה מהצורה.
ד) $y = 2x^2 + 7x$, אינה מהצורה.

תרגילים

תרגיל 7

i)



ii) מטרת הסעיף לחזק את הקשר הקרטזי המלווה את כל המהלך. כלומר, נקודה נמצאת על ישר אם שיעוריה מקיימים את משוואת הישר, ולהיפך, נקודה ששיעוריה מקיימים את משוואת הישר, נמצאת על הישר.
אפשר לשאול, מה הנקודה המשותפת לכל הישרים, וכיצד אפשר לראות זאת במשוואה. שאלה זו יכולה להוות הקדמה (הכנה) לשאלה הבאה.

תרגיל 8

בתרגיל זה מתקבלות תשובות רבות ומגוונות. המשותף לכל הישרים הוא שהם עוברים דרך (0 , 0), והמשוואה שלהם היא מהצורה $y = ax$, כאשר a הוא השיפוע. נוסף על הנעשה בתרגיל, אפשר לבקש מהתלמידים להניח (או לשרטט) שני ישרים כנ"ל, אך במערכת צירים לא משובצת. במקרה כזה אפשר לבקש לאמוד את השיפוע ולרשום את המשוואות על סמך האומדן.

תרגיל 9

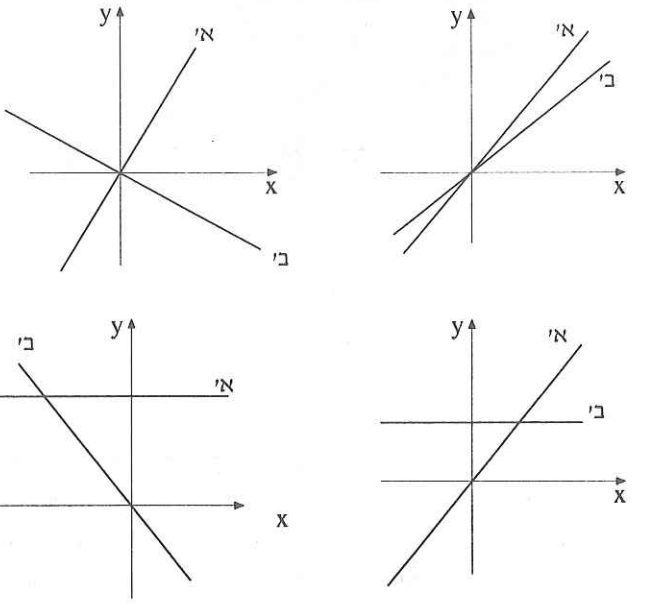
תרגיל זה מהווה חזרה נוספת על טכניקה אלגברית, וכולל אפשרות לבדיקה עצמית.

א) $y = 1.5x - 6$, אינה מהצורה.
ב) $y = -6x$ השיפוע -6.
ג) $y = x$, השיפוע 1.
ד) $y = -3x$ השיפוע -3.
ה) $y = 14x$, השיפוע 14.
ו) $y = 2x^2 - x - 3$ אינה מהצורה.
ז) $y = 2x$, השיפוע 2.
ח) $y = 2x^2 + x - 10$, אינה מהצורה.

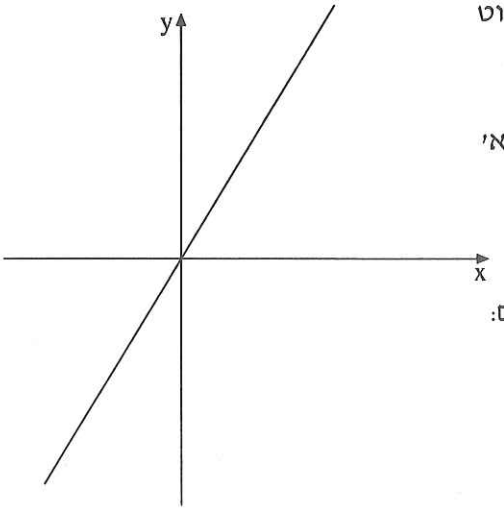
הצעה לתרגילים נוספים לסיכום הסעיף, או כפתיחה לשיעור הבא

משתמשים במערכת צירים לא משובצת (ללא שנתות).

I. המורה מניח זוגות של ישרים ומבקש מהתלמידים לרשום את המשוואות שלה.
להלן מספר דוגמאות לזוגות ישרים (אין צורך לבצע את כולם).



II. א) המורה מניח ישר כבשרטוט ושואל מה משוואת הישר.



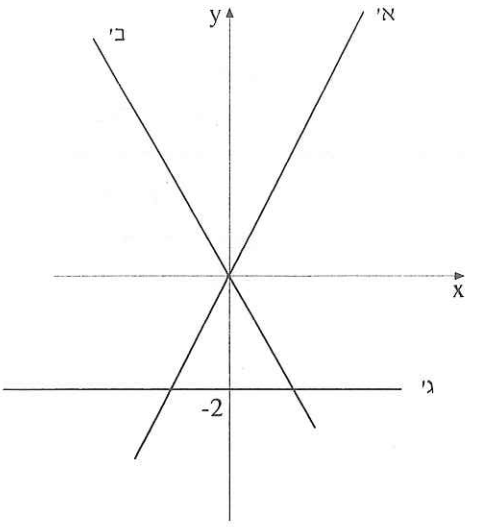
ב) נניח שבתשובה לסעיף א' התלמידים אומרים $y = 2x$.
המורה מבקש: שרטט או הנח (בקירוב) במערכת הצירים את הישרים הבאים:

$y = -3x$, $y = 3x$, $y = x$

$y = -3$, $y = 3$, $y = 0.5x$

III. משוואתו של ישר היא $y = -2x$

א) איזה מבין שלושת הישרים המשורטטים הוא הגרף המתאים למשוואה?



ב) אמוד את השיפועים של שני הישרים האחרים, ורשום על סמך האומדן שלך את משוואות הישרים האלה.

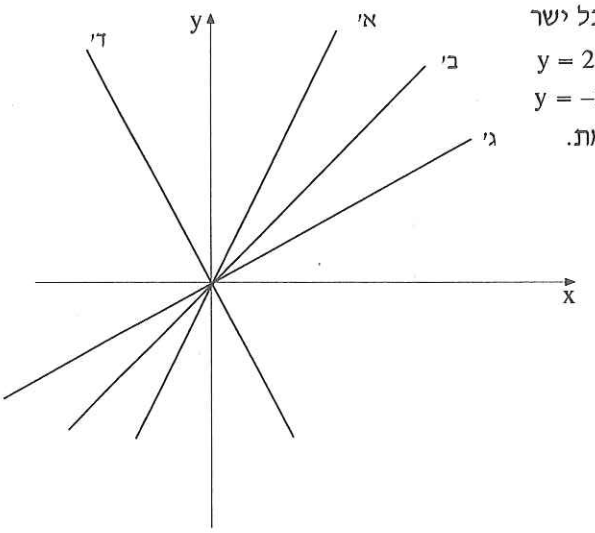
ג) השלם את שיעורי הנקודה (___ , 1) אם ידוע שהיא נמצאת על ישר א', על ישר ב', על ישר ג'.

IV. א) התאם משוואה לכל ישר

$y = 2x$, $y = 0.5x$

$y = -2x$, $y = x$

הסבר כיצד התאמת.



ב) על איזה ישר מבין הישרים הנ"ל נמצאת כל אחת מהנקודות הבאות? נמק.

(1 , 1) , (–2 , –4) , (10 , 5) , (–4 , –2).

הזזה ומשוואת הישר (עמודים 36 - 45 בספר)

בסעיף זה נעשה המעבר ממשוואת ישר העובר דרך הראשית $y = ax$ אל משוואת ישר מהצורה $y = ax + b$.
גם כאן מתבססים על המעבר מהגרף אל המשוואה, תוך שימוש במה שנלמד בסעיף הקודם.
תחילה התלמידים מתבקשים לשער את משוואת הישר המתקבל על ידי הזזה של $y = ax$ במקביל לישר הנתון, b יחידות כלפי מעלה.
אחר כך בוחרים נקודה, הנמצאת על הישר המוזז, ובודקים אם שיעוריה מקיימים את משוואת הישר ששיערו. תוך כדי המהלך מגיעים למסקנה שאת ההזזה במקביל לישר נתון (שעובר דרך הראשית), אפשר לקרוא גם על ציר y, על פי נקודת החיתוך עם ציר y של הישר המוזז. מכאן שהמשוואה המתאימה לישר המקביל שעובר דרך $(0 , b)$, מתקבלת על-ידי תוספת של קבוע b למשוואה $y = ax$, ואז מתקבלת המשוואה $y = ax + b$.
המהלך דומה למהלך שנעשה בספר "פונקציות ותבניות ריבועיות" בו מזיזים את גרף הפונקציה $y = x^2$, c יחידות למעלה או למטה, (לאורך ציר y).

חשוב להדגיש שבסעיף זה התלמידים מוצאים את משוואות הישרים על פי השרטוט בלבד ולא דרך נוסחאות, גם קריאת הפרמטרים (a ו- b) נעשית מתוך השרטוט בלבד.
במהלך הסעיף מומלץ להיעזר במערכת צירים ניידת (על שקף או על פוליגל) ובישרים ניידים.

בסעיפים קודמים הסתמכנו על הראייה ועל קריאת שיפועים, כדי לקבוע אם הישרים מקבילים או נחתכים. המסקנה שישרים בעלי אותו שיפוע הם מקבילים זה לזה מובנת לתלמידים באופן אינטואיטיבי (ראה תרגיל 5 בספר לתלמיד עמוד 27). את הכיוון השני - לישרים מקבילים יש אותו שיפוע לא כל כך מדגישים.
כדי להדגיש גם כיוון זה אפשר לשאול אם השיפוע השתנה בגלל ההזזה ולבקש מהתלמידים לקרוא ולבדוק מתוך הגרף את תשובתם.
המשפטים שלישרים מקבילים יש אותו שיפוע, ולהיפך, שישרים בעלי אותו שיפוע מקבילים מובאים להלן למורים בלבד.

למורים בלבד

משפט: שני ישרים בעלי אותו שיפוע - מקבילים.

<u>הוכחה אלגברית:</u>

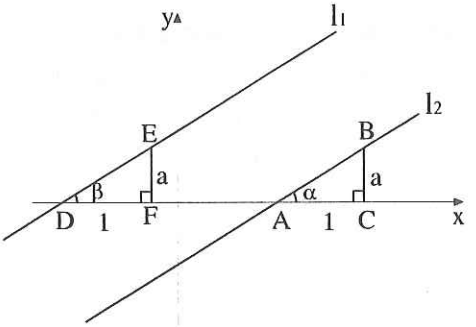
נתונים שני ישרים שונים בעלי אותו שיפוע בהצגה אלגברית:

$y = ax + b$ ו- $y = ax + c$ $(b \neq c)$.

נבדוק אם לישרים יש נקודה משותפת, כלומר, נפתור: $ax + b = ax + c$.

מתקבל: $0x = b - c$, אך $b \neq c$, לכן לגרפים של שני הישרים אין נקודה משותפת, ולכן הם מקבילים.

<u>הוכחה גאומטרית:</u>



נתונים שני ישרים l_1 ו- l_2 ,

נבחר: $AC = DF = l$

כיוון שלישרים יש אותו שיפוע,

נסמנו ב- a

נקבל: $EF = CB = a$,

ומכאן $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

לכן $\alpha = \beta$ ומכאן $l_1 \parallel l_1$.

משפט הפוך: לשני ישרים מקבילים יש אותו שיפוע.

הוכחה:

נתונים שני ישרים l_1 ו- l_2 (מהשרטוט הקודם).

נבחר: $AC = DF = l$,

כיוון שהישרים מקבילים מתקבל $\alpha = \beta$, ומכאן $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, לכן: $EF = CB$, כלומר, השיפועים שווים.

תרגיל 1

כמו בסעיף הקודם, גם בתרגיל זה מגיעים מן הגרף אל המשוואה. כדי לבדוק אם ההשערה נכונה, בודקים את "הקשר הקרטזי". מומלץ לבצע את הפעילות יחד עם התלמידים בכיתה.

בסעיף ב' רצוי לרשום על הלוח את המשוואות שהתלמידים מציעים, ולבדוק ביחד בסעיף ג', את הקשר הקרטזי במשוואות אלה. מכאן אפשר להסיק, כי מספיקה נקודה אחת על הישר, שאינה מקיימת את המשוואה, על מנת "לפסול" משוואה זו. אם בין ההצעות לא מופיעה המשוואה המתאימה, אפשר להזכיר את המהלך הדומה שנעשה בספר "פונקציות ותבניות ריבועיות", ולכוון את התלמידים להגיע אל הכלל הנכון ובדיקתו.

מהניסיון בכיתות מסתבר, שהתלמידים מציעים את כל "הצירופים" השונים האפשריים עם המספרים 0.5 ו- 3.
דוגמאות למשוואות שהוצעו:

$$y+3=\frac{1}{2}x \quad , \quad y=\frac{1}{2}x\cdot 3 \quad , \quad y=3x+\frac{1}{2} \quad , \quad y=\frac{1}{2}x+3 \quad , \quad y=3\frac{1}{2}x \quad , \quad y=3x$$

בבדיקה איזו מהמשוואות המוצעות מתאימה - בוחרים נקודה כלשהיא על הישר המוזז, ובודקים על ידי הצבה במשוואה.
כדאי לקיים דיון בכיתה בנקודות הבאות:
- איזו מבין הנקודות נוחה לבדיקה?
- האם השיפוע השתנה כתוצאה מההזזה?

תרגיל 2

בכל סעיף נתונים שני ישרים מקבילים. אפשר לבקש מהתלמידים לבדוק כיצד נשכנע שאכן הישרים מקבילים. יהיו תלמידים שיגידו, כי המרחק בין כל שתי נקודות בעלות אותו שיעור x הוא שווה, אחרים יכולים לבדוק שיפועים כדי לשכנע.
הגרף מדגיש שההקבלה התקבלה על ידי הזזה, כדי לרמוז ולתמוך ב- "b+". תוך כדי דיון אפשר להגיע למסקנה שכדאי לקרוא תוספת זו על ציר y, כי היא למעשה שיעור y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר y. כמו כן, רצוי לבדוק שהתוספת הקבועה אכן אינה משפיעה על שיפועי הישרים.

א) ישר II הוא $y=1\frac{1}{2}x+2$.
ב) ישר II הוא $y=-2x+3$.

תרגיל 3

המטרה בתרגיל זה ליישם את מה שנלמד עד עכשיו, הפעם ב"הזזות כלפי מטה", כלומר כאשר ה- "b" שלילי.
כמו בתרגיל הקודם רצוי לדון בנוחיות של קריאת התוספת מנקודות שונות.

א) ישר I הוא $y=\frac{1}{3}x$, ישר II הוא $y=\frac{1}{3}x-2$.
ב) ישר I הוא $y=-x$, ישר II הוא $y=-x-4$.

הצעה לתרגיל נוסף לחיזוק משמעות ההזזה

השלם:

א) הישר $y = 3x + 10$ הוא הזזה במקביל של $y = 3x$ _____ יחידות למעלה.

ב) הישר $y = 3x - 7$ הוא הזזה במקביל של $y = 3x$ _____יחידות _____ .

ג) איזו הזזה בוצעה לגבי הישר $y = 3x + 0$? הסבר.

מטרת סעיף ג' היא לזהות ש- (0+) משמעותו שאין הזזה, כלומר, שמדובר ב- $y = 3x$, את זאת יודעים גם מהשוויון הטריוויאלי $3x = 3x + 0$.

תרגיל פשוט זה בא לחזק את ראיית אותה התופעה בייצוגים השונים, הגרפי והאלגברי, ועל ידי כך לתמוך בבניית הקשרים ביניהם.

תרגיל 4

בתרגיל זה מופיעים שני ייצוגים האלגברי והגרפי, והוסרה התמיכה של המשבצות. התרגיל תומך לא רק בבניית ההכללה, אלא גם עשוי לכוון את העיניים למשמעות ה- b על ציר ה- y.

ההתאמה בין הייצוגים יכולה להיעשות במספר דרכים.

א) במעבר מהגרף אל המשוואה אפשר:

- להתחיל מישר II, שהוא הישר העובר דרך $(0\ ,\ 0)$ ומשוואתו $y = 2x$, מכאן לקרוא או לנסות להעריך את ההזזה בנקודה כלשהי, כפי שנעשה בתרגילים קודמים, או אפילו לבדוק רק את כיוון ההזזה, ועל סמך זה לקבוע את ההתאמה.
- להשתמש במסקנות שהוסקו בתרגילים קודמים, ולבדוק את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר y.

ב) במעבר מהמשוואה אל הגרף אפשר להשתמש ב"קשר הקרטזי", להשלים מהמשוואות את שיעורי הנקודה $(__\ ,\ 0)$, ולבדוק על אלו מהישרים הנקודות נמצאות.

ישר I הוא $y = 2x - 3$, ישר II הוא $y = 2x$, ישר III הוא $y = 2x + 2$.

תרגיל 5

א) ישר II הוא $y = -2x + 2$, ישר III הוא $y = -2x - 4$.

ב) ישר II הוא $y = \frac{1}{2}x + 2$, ישר III הוא $y = \frac{1}{2}x - 4$.

במסגרת בניית ההכללה רצוי לדון בקשר בין כיוון ההזזה (למעלה או למטה), וסימנו של ה- b (שהוא התוספת הקבועה ל- $y = ax$). ה- b מייצג מספר חיובי כאשר ההזזה היא כלפי מעלה (כפי שהתקבל בתרגיל 2), והוא מייצג מספר שלילי כאשר ההזזה היא כלפי מטה (כפי שהתקבל בתרגיל 3). ובאופן כללי, משוואת ישר, המתקבל מהזזת הישר $y = ax$, b יחידות לאורך ציר y, היא $y = ax + b$.

שוב, תוך כדי דיון, יש לראות את הקשר בין b לשיעור y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר y.

אפשר לראות קשר זה מתוך:

i) הגרף - ההזזה הקבועה לאורך הישר היא גם ההזזה מ- $(0 , 0)$, b יחידות על ציר y, ולכן מגיעים לנקודה $(0 , b)$.

ii) הקשר הקרטזי - אם משוואת הישר היא $y = ax + b$, נקודת החיתוך שלו עם ציר y היא מהצורה $(___ , 0)$. על ידי הצבה מתקבל $y = a \cdot 0 + b$, כלומר הנקודה היא $(0 , b)$.

תרגיל 6

בתרגילים הקודמים עסקנו בקשר בין שני ייצוגים: הגרפי והאלגברי. בתרגיל זה נעשה מעבר מהייצוג המילולי, דרך הגרפי אל הייצוג האלגברי.

מתוך הפעילות, שנעשתה בתרגילים קודמים, רואים שאפשר לקרוא את ההזזה על פי נקודת החיתוך של הישר עם ציר y, ומכאן אם שיפוע הישר a והוא עובר דרך $(0 , b)$ משוואתו $y = ax + b$.

יהיו תלמידים שיראו את הישר $y = ax + b$ לא כהזזה של $y = ax$ אלא כישר העומד בפני עצמו (כיישות נפרדת, כמו בסיכום המופיע במסגרת), ואותו יתרגלו תוך מעבר בין הייצוגים השונים.

א) $y = \frac{1}{2}x + 4$, ב) $y = -2x - 1$, ג) $y = -3x + 2$

ד) $y = 5x + b$ ה) $y = ax + b$

תרגיל נוסף לגיוון ולחיזוק

המורה מניח על מערכת הצירים הניידת את הישר $y = 3x$, ושואל:

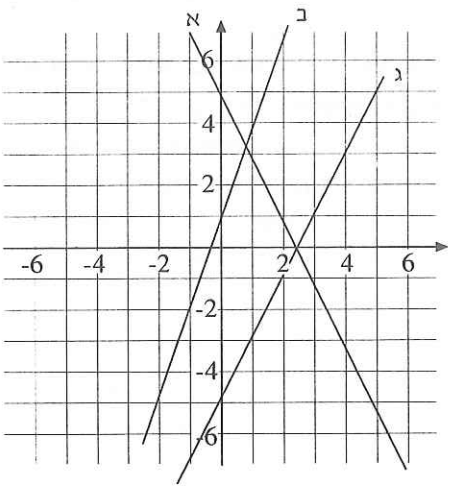
א) איזו הזזה נבצע על מנת "לשרטט" מיידית את הישר $y = 3x + 2$?
את הישר $y = 3x - 1$?

ב) איזו הזזה ביצענו על הישר $y = 3x$ אם התקבל הישר $y = 3x - 4$?

ג) האם אפשר, על ידי הזזה במקביל של הישר $y = 3x$, לקבל את הישר $y = 2x + 3$? נמק.

תרגיל 7

א) $y = -2x + 5$ ב) $y = 3x + 1$ ג) $y = 2x - 5$.



התרגיל נתון בצורה מדורגת.
בסעיף א' נתונים השיפוע ונקודת החיתוך עם ציר y, ויש לרשום את המשוואה, כפי שנעשה עד כה.
בסעיף ב' - עדיין עם הדרכה - מתבקשים לרשום את המשוואה מתוך השרטוט, כאשר ההכוונה היא איזה נתון יש לקרוא על מנת להצליח לרשום משוואה.
בסעיף ג' - התלמידים נדרשים לרשום את המשוואה, לאחר שרטוט או הנחת הישר (ללא הדרכה).

רצוי להרגיל את התלמידים לבצע בדיקה כחלק אינטגראלי של הפתרון. כלומר, לבדוק את תשובותיהם על-ידי בדיקה האם שיעורי נקודה הנמצאת על הישר מקיימים את המשוואה.

באחת מכיתות הניסוי ראינו, כי חלק מהתלמידים ידעו לרשום, בסעיף א', את משוואת הישר גם ללא שרטוט. בסעיף ב', חלק שרטטו וקראו את הפרמטרים מתוך השרטוט ואז רשמו את המשוואה. אחת התלמידות, שרשמה, את המשוואה ללא שרטוט, נשאלה כיצד הגיעה לפתרון. היא ענתה: "הישר עובר דרך (2– , 1–) ושיפועו 3, לכן אם נתקדם יחידה אחת ימינה נצטרך לעלות 3 יחידות ואז נגיע לנקודה (1 , 0), כעת יש לי שיפוע ונקודת חיתוך עם ציר y, לכן אני יודעת מה המשוואה". אם הצעה כזו עולה בכיתה, כדאי להראות זאת לכל התלמידים.
בסעיף ג' נעשה שיקול דומה על-ידי התלמידה: "אם השיפוע 2 והישר עובר דרך (3– , 1), אז אם נלך שמאלה יחידה אחת נצטרך לרדת 2 יחידות ונגיע לנקודה (5– , 0), ומכאן המשוואה".
חשוב לציין שבשלב זה **אין** הכוונה שהתלמידים יציבו ויפתרו משוואות, אלא שיקראו את הפרמטרים מתוך השרטוט וירשמו את המשוואה.

תרגיל 8

המטרה בתרגיל זה ובתרגיל הבא אחריו להראות שנתון אחד (נקודה או שיפוע), אינם קובעים ישר יחיד אלא אינסוף ישרים. לעומת זאת, כשנתונים נקודה ושיפוע אפשר לשרטט רק ישר אחד.

א) אינסוף ישרים, אלו הם כל הישרים המקבילים ששיפועם 3. אפשר לבקש מהתלמידים שיציעו משוואות לדוגמה, לרשום משוואות אלה על הלוח ולראות שהן כולן מהצורה $y = 3x + ___$.
אפשר לשאול את התלמידים מה המשותף לכל המשוואות שהציעו, כדי לחזור על דברים שכבר יודעים, ולקראת ראייה כללית יותר.

ב) אינסוף ישרים, והם אלומה של ישרים שעוברים דרך אותה נקודה $(2\ ,\ -1)$.
בסעיף זה כדאי לדון יחד עם התלמידים בשאלות הבאות:
האם בין הישרים האלה יש ישר
- שמקביל לציר x? אם כן, מה משוואתו?
- שמקביל לציר y? אם כן, מה משוואתו?
- ששיפועו חיובי? אם כן, מה משוואתו ?
- ששיפועו 2– ? אם כן, מה משוואתו ?
- שעובר דרך $(0\ ,\ 0)$? אם כן, מה משוואתו ?

ג) ישר אחד ומשוואתו $y = 3x + 5$.

תרגיל 9

מטרת תרגיל זה היא להמשיך לטפל בהכללות, הפעם דרך משמעות הפרמטרים.

א) כדי לעזור לתלמידים כדאי לקיים דיון בכיתה ולשאול:
- אם $a = 0$, מה המשמעות? יהיו תלמידים שיגידו שהשיפוע הוא 0, אחרים יגידו $y = b$, ואז אפשר לשאול מה זה אומר לגבי הישרים? (במקרה זה יש לחזור על דברים שכבר יודעים מהפרק הראשון, לגבי ישרים שמקבילים לציר x.)
- אם $b = 0$, מה המשמעות? מה שיעורי נקודת החיתוך של הישר עם ציר y? מה משוואת הישר? מה המשותף לכל הישרים האלה? וכד'.

ב) - אינסוף ישרים, אלו הם כל הישרים המקבילים זה לזה ששיפועם 5.
המשוואות המתאימות הן מהצורה $y = 5x + b$.
- אינסוף ישרים, והם אלומה של ישרים שעוברים דרך $(0,3)$. המשוואות מהצורה $y = ax + 3$.
- ישר אחד בלבד, משוואתו $y = 5x + 3$.

תרגיל 10

בתרגיל זה נעשית תפנית: מקביעת ישר על פי שיפוע ונקודה, לקביעת ישר על פי שתי נקודות. שתי הנקודות ניתנו בטווח המערכת המשורטטת, כך שהתלמידים יוכלו לשרטט ישר דרך שתי הנקודות, ויוכלו לתרגם נתונים אלה למצב של שיפוע ונקודה.

בשלב זה עדיין נתמכים על ידי שרטוט. בשלב מאוחר יותר (מעמוד 89 והלאה) ילמדו כיצד למצוא את השיפוע, כששיעורי הנקודות גדולים, או מחוץ לטווח המערכת.

מתקבלים שני ישרים מקבילים, לשניהם שיפוע 1−.

בסעיף א' הישר $y = -x + 2$ ובסעיף ב' הישר $y = -x - 3$.

תרגיל 11

א) $y = 2x + 1$ ב) $y = -3x + 6$

שאלה נוספת שאפשר לשאול כאן: האם הישרים מקבילים או נחתכים? אם הם נחתכים, מהי נקודת החיתוך?

המטרה היא לראות אם התלמידים שמים לב ששני הישרים עוברים דרך אותה נקודה (מהנתונים), וזה מאפשר להם מעין בדיקה, אם עבדו נכון.

בשלב זה התלמידים מוצאים את נקודת החיתוך מתוך השרטוט ובודקים במשוואות.

תרגיל 12

בתרגיל זה מטפלים במעבר בין הייצוגים השונים של הישר, ובכל מה שלמדו עד כה. בחלק מן הסעיפים עוברים מהייצוג המילולי דרך הייצוג הגרפי אל הייצוג האלגברי, ובחלק מהייצוג האלגברי אל הגרפי, כמו כן הנתונים המופיעים הם מסוגים שונים. המטרה לרכוש מיומנות בזיהוי הפרמטרים a ו- b של הקו הישר ובמשמעותם, מתוך המשוואה ומתוך הגרף, ולעבור מייצוג אחד לאחרים.

כדאי להיעזר במערכת הצירים הניידת ולהוסיף תרגילי זיהוי ושרטוט, אם יש צורך. הכוונה לתרגילי זיהוי השיפוע והמשוואה מתוך ישר משורטט.

א) הישר הראשון: $y = 3x$, הישר המוזז: $y = 3x - 4$.

ב) הישר הנתון: $y = -x$ (חלק מהתלמידים ירשמו $y = -1x$. המורה, על פי שיקול דעתו ועל פי מצב הכיתה, יחליט אם להתעכב ולדון בזה או לשאול אם אפשר לרשום אחרת וכו'). הישר המוזז: $y = -x + 2$.

ג) משוואת הישר: $y = -\frac{1}{2}x$, משוואת הישר המוזז: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

ד) רצוי להרגיל את התלמידים לבדוק את התשובה, אם על ידי בחירת נקודות על הישר שהניחו והצבתם במשוואה, או כל בדיקה אחרת שהתלמידים יציעו, כמו למשל דרך הזזה.

ה) $y = -2x + 5$.

ו) $y = x - 2$.

יש לשים לב, שפשוט יותר לקרוא את השיפוע מהגרף, לעומת חישוב השיפוע מתוך התבנית של מנת ההפרשים, שלא מובאת כאן. לפעמים בחישוב השיפוע מהתבנית, יש צורך להציב מספרים שליליים, דבר שיוצר קשיים רבים וגורר טעויות.

תרגיל 13

תרגיל זה נועד לתמוך בהמשך הבנייה של "הקשר הקרטזי", בצורה קצת אחרת. חלק מן הנקודות אפשר לבדוק מתוך השרטוט, וחלק דרך הצבה במשוואה. כלומר:

- כל זוג מספרים שמהצבתו במשוואה מתקבל פסוק אמת הוא נקודה על הישר, ולהיפך.
- על ישר יש אינסוף נקודות, כלומר, יש אינסוף זוגות של מספרים שהצבתם נותנת פסוק אמת. ישנם גם אינסוף זוגות של מספרים שהצבתם נותנת פסוק שקר, ואלו הן כל הנקודות שאינן על הישר.

משוואת הישר היא $y = 2x - 3$, והנקודות שעל הישר הן:

$(15\ ,\ 27)$, $(1\frac{1}{2}\ ,\ 0)$, $(0\ ,\ -3)$.

תרגילים

תרגיל 14

בתרגיל זה, לאחר הנחת ישר מתאים במערכת הצירים, קוראים את שני הפרמטרים מתוך השרטוט, ורושמים את המשוואה.

סעיף א' ניתן עם הדרכה - תחילה לשרטט או להניח, אחר-כך לקרוא את הנתונים המתאימים ולרשום את המשוואה. בסעיפים ב' ו- ג' הוסרה התמיכה, במטרה שהתלמידים יבנו את המשוואה בעצמם.

חשוב לציין שהתלמידים מוצאים את המשוואה על פי השרטוט בלבד ולא דרך נוסחאות.

א) $y = x + 4$ ב) $y = 2x - 5$ ג) $y = -3x + 7$

כדאי לדון עם התלמידים בשאלה, כמה ישרים שונים אפשר להעביר דרך שתי נקודות נתונות.

תרגיל 15

בתרגיל זה המעבר הוא מהייצוג המילולי אל המשוואה. תלמידים שרכשו את המיומנות של זיהוי הפרמטרים מתוך הנתונים, יכולים לרשום את המשוואה. תלמידים מתקשים יוכלו להיעזר בהנחת ישרים מתאימים במערכת הצירים כדי לקרוא את המשוואה.

א) $y = -5x + 3$, ב) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, ג) $y = -4$ ד) $y = 2.5x$

תרגיל 16

גם בתרגיל זה שרטוט הישרים נעשה לפי הפרמטרים, אלא שהייצוג הוא אלגברי. משוואות הישרים הן:

א) $y = 2x$ ב) $y = 1\frac{1}{2}x - 1$, ג) $y = 3$ ד) $y = x + 2$

על מנת לבדוק, אם התלמידים שרטטו נכון, אפשר לבקש מהם לבחור נקודה על הישר ששרטטו, לקרוא את שיעוריה ולבדוק במשוואה.

אפשר גם לערוך בדיקה כיתתית על ידי שאלות כמו:

- מי מבין כל הישרים עובר דרך $(0, 0)$?
- למי שיפוע חיובי?
- מי מהישרים חותך את ציר y בחלק החיובי?
- האם מבין הישרים יש זוג ישרים מקבילים? האם יש שני ישרים שנחתכים באותה נקודה על ציר y?

תרגיל 17

תרגיל זה ניתן בצורה מדורגת. בסעיף א', נתונים השיפוע ונקודת החיתוך עם ציר y, ובעצם רוב התלמידים רושמים את המשוואה בלי להניח את הישר. הנחת הישר מאוד תומכת בסעיפים ב' ו- ג' כשנתון השיפוע ונקודה כלשהיא על הישר. בכיתות הניסוי ראינו שישנם תלמידים שהגיעו לנקודת החיתוך עם ציר y דרך שיקולים של תנועה בעזרת השיפוע (ראה תרגיל 7 בעמוד 48).

א) $y = 2x + 4$. בסעיף זה אפשר לקרוא את הפרמטרים מתוך הנתונים.

ב) $y = 2x - 8$. בסעיף זה אפשר לקרוא רק פרמטר אחד (השיפוע) מתוך הנתונים, וניתנת תמיכה במציאת הפרמטר השני, על מנת לרשום את המשוואה.

ג) $y = -2x + 3$. בסעיף זה מוסרת התמיכה, והמטרה שהתלמידים יחליטו בעצמם מה צריך "לקרוא מהשרטוט" על מנת לרשום את המשוואה.

תרגיל 18

את ההתאמה בין המשוואות לישרים אפשר לבצע במספר דרכים (רצוי לעודד פתרון בדרכים שונות בכיתה).

- זיהוי הפרמטרים מתוך הגרפים, והתאמתם למשוואות.
- רישום משוואות הישרים המשורטטים והתאמתם למשוואות הרשומות.
- זיהוי הפרמטרים מתוך המשוואות והתאמתם לגרף.
- זיהוי לפי אחד הפרמטרים בלבד, למשל השיפוע, (אפשר קודם לפי הסימן ואחר כך לפי הערך), או דרך נקודת החיתוך עם ציר y.
- להיעזר באומדן וויזואלי, שמתפתח תוך כדי שרטוט או הנחת ישרים שונים. למשל: ישר "עולה" שיפועו חיובי, וככל שהוא תלול יותר השיפוע גדול יותר.

א) $y = x + 1$ ב) $y = \frac{1}{3}x - 2$

ג) $y = -x$ ד) $y = -4x - 2$

תרגיל 19

תרגיל זה משלב חזרה על טכניקה אלגברית הקשורה לחומר הנלמד.

א) $y = 4$ ב) $y = 4x$

השורה האחרונה מאפשרת בדיקה עצמית של התלמידים אם פישטו נכון ו/או שרטטו נכון.

תרגיל 20

בתרגיל 18 כשנתבקשו התלמידים להתאים בין שני ייצוגים, יכלו להתאים מייצוג אלגברי לגרף. בתרגיל זה אין אפשרות להתאמה כזו והתלמידים צריכים ליצור בעצמם את התבנית מהגרף.

א) $y = 1.5x + 1$ ב) $y = -2x + 2$

ג) $y = 0.5x$ ד) $y = -x + 2$

יש לשים לב שבסעיף א' עשוי להופיע אי-דיוק בקריאת השיפוע, אם מתקדמים יחידה אחת ימינה ועולים. אך אם מתקדמים שתי יחידות, מגלים שעולים 3 יחידות, כלומר, על כל יחידת התקדמות עולים 1.5 יחידות, וזה השיפוע.

תרגיל 21

א) מאיסוף התשובות בכיתה מגיעים למסקנה שיש אינסוף ישרים העוברים דרך (0,5). המשותף לישרים אלה הוא נקודת החיתוך עם ציר y. המשתנה הוא השיפוע, כלומר, משוואת כל ישר היא מהצורה $y = ax + 5$.
ישר נוסף הוא $x = 0$ (ייתכן שחלק מהתלמידים ישכחו את האפשרות של הישר $x = 0$, כי אין לו שיפוע).

ב) יש אינסוף ישרים בעלי שיפוע -0.5, הגרפים שלהם הם קווים מקבילים. המשוואות המתאימות הן מהצורה $y = -0.5x + b$.

ג) מתוך המשפחות של סעיפים א' ו- ב' יש רק ישר אחד שמקיים את שני התנאים והוא הישר $y = -0.5x + 5$.

תרגיל 22

בתרגיל זה חוזרים על פישוט תבניות בהקשר לחומר הנלמד - זיהוי משוואה מהצורה $y = ax + b$.
מומלץ שהמורה יפתור מספר דוגמאות יחד עם התלמידים, כדי לרענן את הידע בחוקי הפישוט.

א) $y = -3x - 4$ ב) $y = -2x + 2$

ג) $y = -11$ ד) $y = -4x$

ה) $y = 2x$ ו) $y = -6x + 3$

ז) $y = x + 7$

יש לשים לב לשגיאות הנפוצות של התלמידים: שימוש חלקי בחוק הפילוג, כינוס שגוי של איברים, ופתיחת סוגריים שלפניהן "מינוס".

הצעות לתרגילים נוספים

להלן הצעה לתרגילים נוספים לסיכום הסעיף, או לגיוון במהלך הוראת הסעיף, או לתחילת שיעור.

I. איזה מבין הישרים הבאים עובר דרך $(0\ ,\ 0)$? נמק.

$y = 3$; $y = 3x$; $y = x + 3$; $y = x - 3$;

(הנימוק יכול להיות אלגברי - על ידי הצבה, או גרפי.)

II. א) שרטט או הנח באותה מערכת צירים את הישרים הבאים:

$y = x + 3$, $y = -2x + 3$, $y = 4x + 3$, $y = -3x + 3$

ב) מה המשותף לכל הקווים ששרטטת?

ג) מה המשותף לכל המשוואות?

ד) רשום משוואה של ישר נוסף המקיים את התכונה המשותפת שמצאת.

ה) הייתכן ישר מאותה "משפחה" ששיפועו 0? הסבר.

III. תרגיל אתגר למתקדמים.

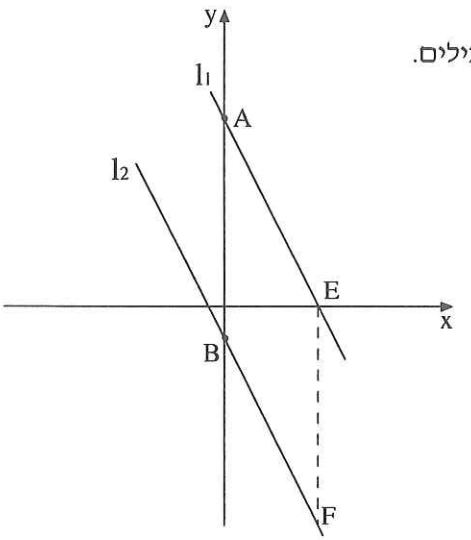
הישרים l_1 ו- l_2 שבשרטוט מקבילים.

אורך הקטע EF הוא 7 יחידות.

שיעור y של הנקודה B הוא 2–.

השיפוע של l_1 הוא 2–.

מה משוואות הישרים?



תרגיל III הוא תרגיל אתגר ולפתרונו התלמידים נדרשים לשלב ידע קודם ומעבר גמיש בין ההצגות.

אם תלמידים "נתקעים" בפתרון, אפשר לשאול אותם שאלות מכוונות.

דוגמה לשאלות כאלה:

א) מה אורך הקטע AB?

ב) האם וכיצד אפשר לקבוע את שיעורי הנקודה A?

ג) מה תוכל לומר על שיפועי הישרים?

גאומטריה במערכת צירים (עמודים 46 - 49 בספר)

בסעיפים הקודמים התלמידים למדו ותרגלו:

- משוואות של ישרים המיוצגות באחת משתי הצורות: $y = ax + b$ או $x = c$.
- מעבר בין הייצוגים השונים (מהגרף אל המשוואה ולהיפך, כולל הייצוג המילולי).
- שרטוט גרף על פי משוואה או על פי תכונות (לפי שיפוע ונקודה או לפי שתי נקודות).

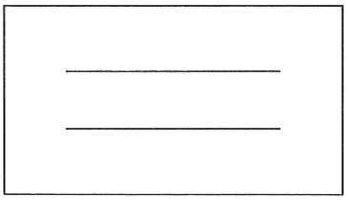
בסעיף זה אנו מנצלים את הכלים שנרכשו כדי לפתור בעיות גאומטריות, וכדי לחזור על חלק מן התכונות של מרובעים ומשולשים.

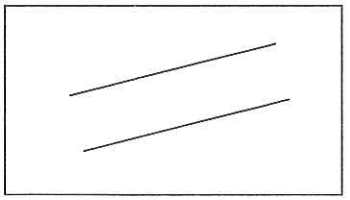
מרובעים

בתת סעיף זה עוסקים במקביליות: חישוב שטחים, ותרגול התכונה של צלעות נגדיות מקבילות.

תרגיל 1

תרגיל זה הוא תרגיל הכנה ומטרתו לזהות מרובעים שהם מקביליות.
המרובעים שהם מקביליות מופיעים בסעיפים א', ב', ד', ה'. תלמידים נוטים לשגות ולא לזהות מרובעים מיוחדים כמקביליות, לדוגמה מרובע א' מזוהה כמעוין, ומרובע ד' כמלבן אך לא כמקבילית.
אם מתעוררים קשיים בכיתה אפשר לתת כתרגיל פתיחה, לפני תרגיל הזיהוי, את התרגיל הבא:
להשתמש בשני שקפים שעל כל אחד משורטטים זוג ישרים מקבילים, להניח אותם זה על זה בצורות שונות, כך שתתקבלנה מקבילות שונות.





תרגיל כזה עשוי להמחיש שמקבילית יכולה להיות ריבוע, מלבן ומעוין, אך לא טרפז או דלתון, כי אי-אפשר ליצור אותם בעזרת השקפים.

תרגיל 2

גם תרגיל זה עוסק בגאומטריה במערכת צירים ומטרתו להפגיש את התלמידים עם בעיה שיש לה יותר מפתרון אחד, להכיר ולהשתמש בתכונות של מקבילית, ולפתח אסטרטגיות לשימוש בהן.

מתוך הניסוי בכיתות מתקבלים מתלמידים שונים מקבילות שונות, וכשמרכזים את התשובות מהתלמידים, מתקבלות כל שלוש האפשרויות.

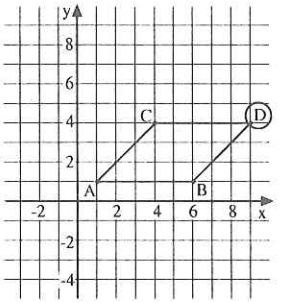
בסיכום העבודה בכיתה, רצוי להראות בשקף ששלושת המקבילות מתקבלות על פי קביעת סדר מיקומם של הקודקודים.

אם התלמידים משרטטים מקבילות על פי ניסוי וטעייה או לפי "כך זה נראה", כדאי לדון בשאלה כיצד נבדוק שאכן המרובע המשורטט הוא מקבילית. דיון כזה מחזק את מה שלמדו על השיפוע, על ישרים מקבילים וכד'.

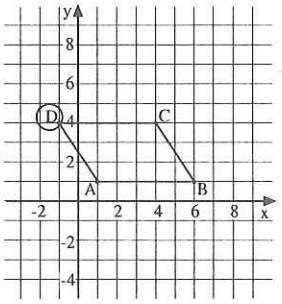
נוח לדון בפתרון כשהנקודות מסומנות באותיות.

א) הקודקוד הרביעי הוא (4 , 9) או (4 , 1–) או (2– , 3)

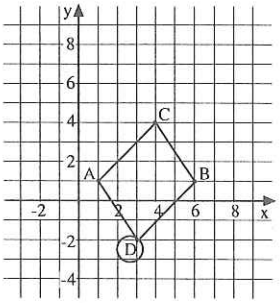
(i)



(ii)



(iii)



דוגמה לדרך עבודה של התלמידים באחת מכיתות הניסוי:

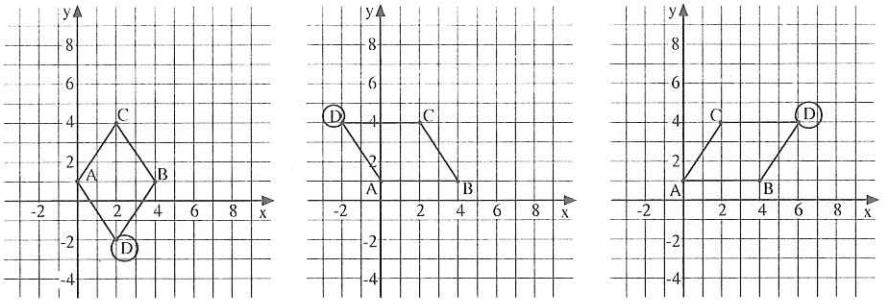
"נסמן את הקודקודים באותיות, למשל A (1 , 1) , B(6 , 1) , C(4 , 4) ,

למקבילית (i): מ- A ל- B הלכתי 5 יחידות ימינה לכן מ- C גם אלך 5 יחידות ימינה, ואגיע לקודקוד הרביעי שהוא (4 , 9).

למקבילית (ii): אלך שמאלה מ- C 5 יחידות ואגיע אל (4 , 1–).

למקבילית (iii): אם מ- C ל- B הלכתי ימינה 2 יחידות וירדתי 3 יחידות, אז אם אעשה אותו דבר מ- A אגיע ל- (2– , 3)."

ב) הקודקוד הרביעי הוא (6 , 4) או (4 , 2–) או (2– , 2).

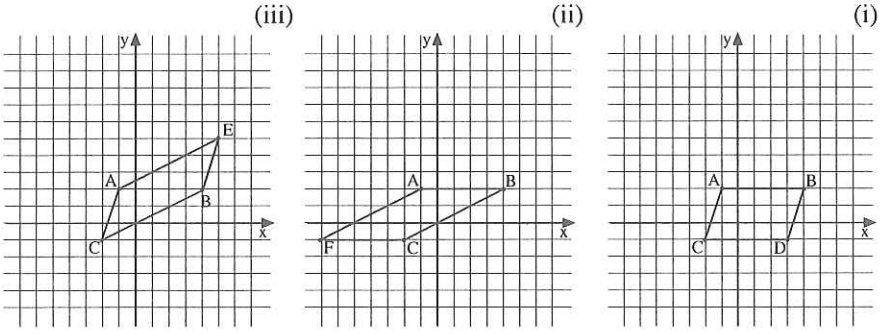


תרגיל 3

החידוש בתרגיל זה, ביחס לתרגיל הקודם, הוא סעיף ב' בו מתבקשים למצוא את השטחים של המקבילות.

א) סעיף זה זהה לתרגיל הקודם. שלוש המקבילות הן:
ABDC , ABCF , ACBE.

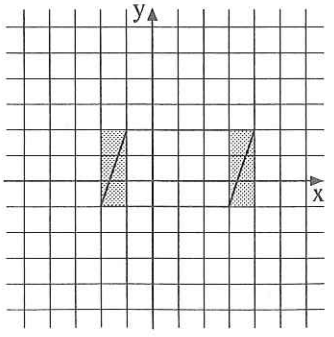
(i) (ii) (iii)



ב) לשלוש המקבילות אותו שטח: 15 משבצות.

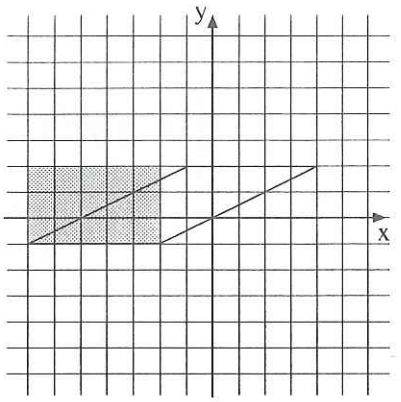
חשוב להדגיש שחישוב שטח המקבילית יכול להיעשות במספר דרכים, וכדאי לעודד בכיתה דרכי פתרון שונות.

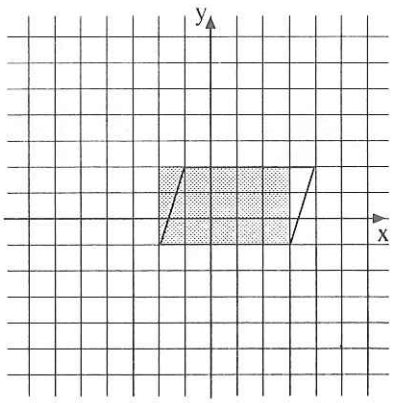
לדוגמה:



(i) על ידי ספירת המשבצות הכלואות במקבילית. למשל, אפשר להשלים חלקים למלבנים כך שאפשר יהיה לספור משבצות שלמות, ולחשב בהתאם.
12 משבצות בפנים ועוד חצי ממספר המשבצות שבשני המלבנים, סך הכל 15 משבצות.

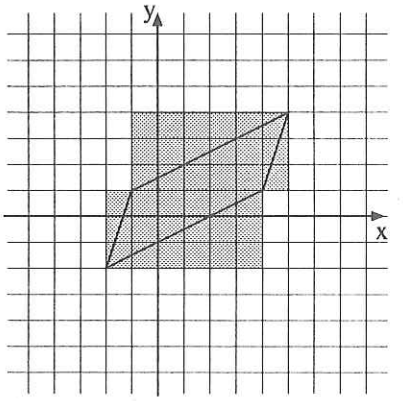
(ii) על ידי שרטוט מלבן שווה שטח.





(iii) על ידי שרטוט מלבנים, שצלעותיהם מקבילות לצירים, הכולאים בתוכם את המקבילית.

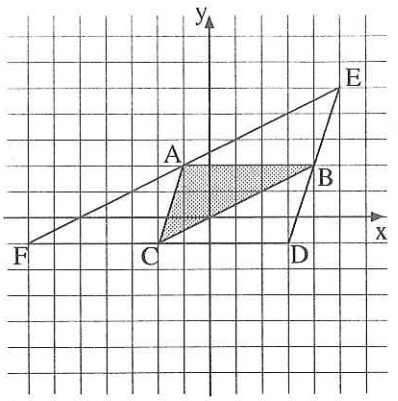
בשטח המקיף 36 משבצות, השטח המבוקש 15 משבצות.



באחת מכיתות הניסוי, הוצגה תחילה כל אחת מן המקבילויות בנפרד, על שקף בתוך מערכת צירים (כל מקבילית נצבעה בצבע שונה), אז נשאלה השאלה: למי משלושת המקבילויות שראינו, יש השטח הגדול ביותר ?

התלמידים הציעו לספור משבצות. במקבילויות (i) ו- (ii) שבסעיף א' לא היה קושי בספירת המשבצות, ואילו במקבילית (iii) הציעו "לסובב" את המקבילית כך שאחת הצלעות תהיה מונחת על ישר מקביל לציר x. במקרה זה היה קושי בספירת המשבצות והתלמידים השתמשו באומדן וקיבלו שלמקבילית (iii) יש שטח גדול יותר.

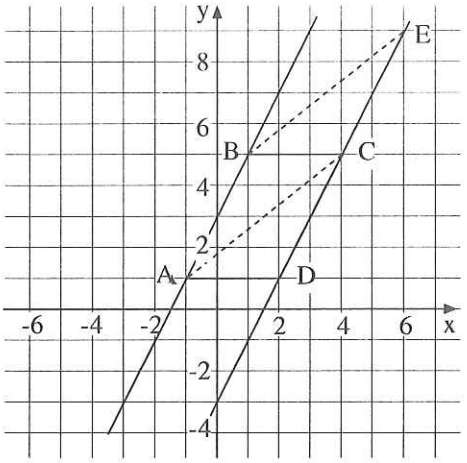
בשלב זה הונחו שלושת המקבילויות זו על גבי זו, כפי שמוצג בשרטוט.
התלמידים ראו כי יש משולש משותף לכולן, ששטחו מחצית משטח כל מקבילית,
לכן לשלושת המקבילויות אותו שטח.



אפשר גם להדגים זאת בעזרת שקף בו מופיע המשולש "הקבוע" ABC ומשולש
שחופף לו, שמונח בשלוש דרכים שונות, כדי להרכיב את המקבילית.

תרגיל 4

על בסיס התרגילים הקודמים נעשה בתרגיל זה הקשר בין שני הייצוגים האלגברי והגרפי, כאשר הסדר בין הקודקודים נקבע.



א) $y = 2x + 3$.

ב) $y = 2x - 3$ (כפי שנלמד בסעיף הקודם, את השיפוע יודעים מהעובדה שהישרים מקבילים, ומהשרטוט קוראים את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר y).

ג) D (2 , 1).
קביעת שיעורי הנקודה יכולה להיעשות "לפי העין" או על ידי ספירת משבצות.
שטח המקבילית הוא 12 משבצות.

ד) E (6 , 9) גם שטח מקבילית זו הוא 12 משבצות.
אין כאן אפשרות למקבילית שלישית, כמו שהתקבל בתרגילים קודמים, כי ישנו האילוץ של קו מקביל.
לשם חיזוק "הקשר הקרטזי" רצוי, בסעיפים ג' וד', לבדוק אם שיעורי הנקודות אכן מקיימות את משוואת הישר שרשמו בסעיף ב'.

משולשים

בתת סעיף זה מטפלים במשולשים בהקשר של מקומות גאומטריים, תוך חזרה על תכונות גאומטריות פשוטות וידועות.

תרגיל 5

לסעיפים א' ו-ב' פתרונות רבים. הנקודות C ו- D הן מהצורה (__ ,1–), פרט לנקודה (2 , 1–) שנמצאת על הקטע. מהניסיון בכיתה מתברר שהתלמידים מצליחים למצוא נקודות כאלה ולא מתעוררים קשיים. ישנם תלמידים שאומרים "רואים לפי העין", אחרים מנמקים כפי שעשו בפרק הראשון (עמוד 7 תרגיל 2). אם בכל זאת יהיו תלמידים שיתקשו, אפשר להראות להם נקודה אחת לדוגמה. את שטח המשולש אפשר לחשב בדרכים שונות, בדומה לחישוב שטח המקבילית.

ג) מריכוז התוצאות של התלמידים בכיתה, מתקבלות נקודות רבות, ואפשר לנסח את התכונה המשותפת להן באופנים שונים.
בכיתות הניסוי קיבלנו את התשובות הנכונות הבאות:

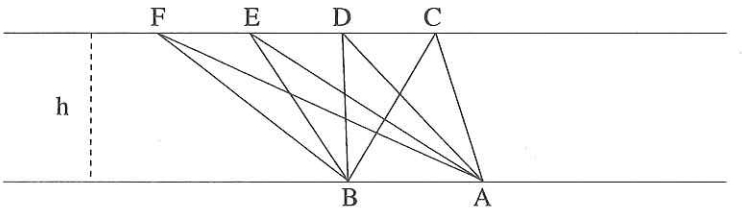
- אנך אמצעי ל- AB (או ישר מאונך שחוצה את AB).
- ציר סימטריה בין A ל- B.
- הישר $x=-1$.
- כל הנקודות בהן שיעור x הוא 1-.

תרגיל 6

בתרגיל זה דנים בשטחים של משולשים להם אותו בסיס (AB) ואותו גובה (המרחק בין המקבילים), ומכאן אותו שטח.

אם נסמן את המרחק בין המקבילים ב- h,

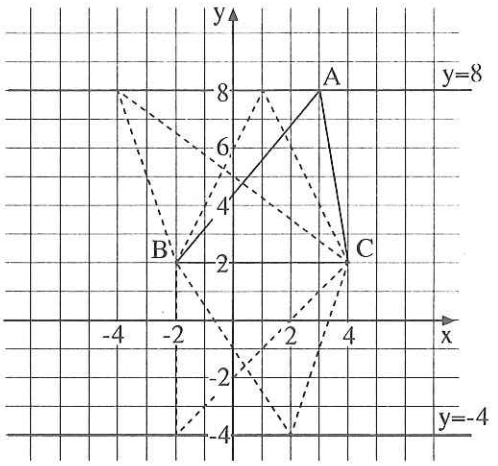
אז השטח של כל משולש הוא $\frac{AB\cdot h}{2}$.



חשוב שהתלמידים יראו ויווכחו שלמרות שהמשולשים נראים בעלי שטח שונה (ואינם חופפים), הן הבסיס והן הגובה שלהם זהים ולכן שטחם שווה.
אפשר לבקש מהתלמידים לשרטט משולש נוסף, ששטחו שווה לשטחי המשולשים שבשרטוט. (כל נקודה על הישר FC יחד עם AB תיצור משולש כזה, גם נקודות על מקביל, במרחק שווה בצד השני יצרו משולש כזה יחד עם AB. עובדות אלה כבר תורגלו בהקשר אחר בתחילת הספר, ותחזורנה שוב בתרגיל הבא סעיף ג').

תרגיל 7

א) בסיס המשולש הוא BC ואורכו 6 משבצות (מתקבל על ידי ספירה), גובה המשולש הוא המרחק של A מ-BC, ואורכו גם הוא 6 משבצות לכן שטח המשולש 18 משבצות.



חלק מהתלמידים יחשבו את שטח המשולש על-ידי השלמה למלבן שצלעותיו מקבילות לצירים, וחלוקה ב- 2.

ב) הקודקוד השלישי של המשולש יכול להיות (8 , 1) או (4– , 1).

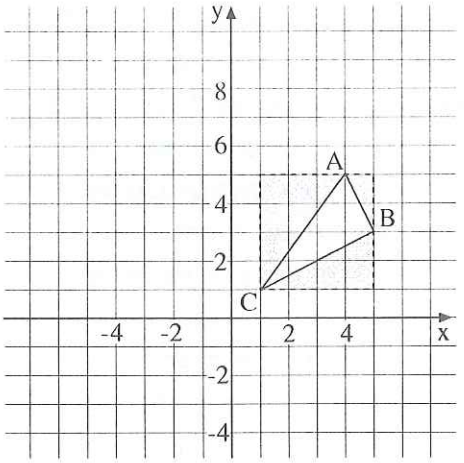
ג) הקודקוד השלישי יימצא על הישר $y = 8$ או על הישר $y = -4$.

תרגיל 8

גם תרגיל זה, כמו תרגילים קודמים, עוסק במשולשים להם אותה צלע ושטחם שווה, אך במקרה זה אין אף צלע שמקבילה לאחד הצירים.

כיוון שהצלע המשותפת לכל המשולשים היא BC (נמצאת על ישר שמשוואתו $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$), אז הקודקוד השלישי יימצא על ישר מקביל ל- BC ועובר דרך A, כלומר על הישר $y = \frac{1}{2}x + 3$.

למעשה, כמו בתרגיל קודם, קיים ישר נוסף והוא $y = \frac{1}{2}x - 2$, אך גילויו קשה לתלמידים, לכן לא מבקשים למצוא אותו, אנו מסתפקים בידיעה שהוא ישנו.



באחת מכיתות הניסוי, ביקשנו מהתלמידים לחשב את שטח המשולש ABC. חלק מהתלמידים השלימו למלבן, כמתואר בציור, ומשטח המלבן הורידו את שטחי המשולשים שנוספו. התקבל ששטח המלבן 16 משבצות, לכן שטח המשולש הוא: $16 - 4 - 1 - 6 = 5$.

דוגמאות לתרגילים נוספים

תרגילים אלה עוסקים בגאומטריה במערכת צירים, ומשלבים בתוכם ידע שנרכש בכל אחד מהסעיפים הקודמים.

I. הנקודות $(-1, -3)$, $(-1, 7)$, $(4, -3)$ הן שלושה קודקודים של מלבן.
א) מצא את הקודקוד הרביעי.
ב) מצא את משוואות האלכסונים של המלבן.
ג) נסה לשער (או לקרוא מהגרף), את שיעורי נקודת החיתוך של האלכסונים. הצב במשוואות ובדוק.

II. הישרים $y = 3$ ו- $x = 2$ יוצרים מלבן עם הצירים.
א) שרטט את המלבן וחשב את שטחו.
ב) מצא את משוואת האלכסון של המלבן ששיפועו שלילי.

III. הישרים $y = x$, $y = -x$, $x = 4$ יוצרים משולש.
א) מצא את קודקודי המשולש וחשב את שטחו.
ב) דני אמר: אם נחבר כל נקודה על ציר y עם הקודקודים המונחים על הישר $x = 4$, נקבל משולש עם שטח שווה. האם דני צדק? הסבר.

IV. צלעותיו של מלבן מקבילות לצירים.
שניים מקודקודיו הם:
A(3 , 2) , B(–2 , 2), שטח המלבן 15 משבצות.
א) שרטט את המלבן וחשב את היקפו.
ב) כמה מלבנים כאלה ישׁ?
ג) שרטט מקבילית (שאיננה מלבן) עם צלע AB, ששטחה שווה לשטח המלבן.
כמה מקביליות כאלה ישׁ?

V. שניים מקודקודי משולש הם: A(0 , 5) , B(–4 , –3).
א) רשום את שיעורי הנקודה C כך שהמשולש ABC יהיה שווה שוקיים עם בסיס BC. מה שטחו?
ב) מצא נקודה אחרת D, כך שהמשולש ABD יהיה שווה שוקיים עם בסיס BD.
מה שיעורי D? מה שטח המשולש ABD?

פתרונות לתרגילים הנוספים

I. קריאת הנתונים נעשית מתוך השרטוט, תוך יישום הידע שנרכש עד עכשיו.
א) (4 , 7) ב) $y = 2x - 1$, $y = -2x + 5$ ג) (1.5 , 2)

II. א) שטח המלבן 6 משבצות.
ב) $y = -1.5x + 3$

III. א) קודקודי המשולש הם (0 , 0) , (4 , –4) , (4 , 4) ושטחו 16 משבצות.
ב) כפי שהתקבל בתרגיל 6, ציר y מקביל לישר $x = 4$ עליו מונחת הצלע של המשולש. מכאן שלכל המשולשים האלה יש אותה צלע ואותו גובה, לכן אותו שטח.

IV. א) היקף המלבן 16 יחידות.
ב) קיימים שני מלבנים כאלה ABCD ו- ABEF.
ג) אינסוף מקביליות, שני הקודקודים הנוספים נמצאים על הישרים $y = 5$ או $y = -1$.

V. א) C(4 , –3) , שטח המשולש 32 משבצות.
ב) D(–4 , 13), שטח המשולש 32 משבצות.

פעילויות מחשב

מבוא

כחלק מהגישה המנחה את פיתוח חומרי הלימוד, שולבו בספר נספחים עם פעילויות בעזרת מחשבון גרפי או מחשב. בתחילת כל פעילות מצוין מהו המקום המתאים לשילובה במהלך הלימוד.

לשימוש בכלי טכנולוגי כזה יתרונות רבים:

א) מאפשר להציג בעיות בהן מודגשים מטרות ועקרונות שלפעמים אי-אפשר להשיגם באמצעות נייר ועיפרון, כמו למשל:

- כיווני תרגול אחרים. כמו העתקת שרטוט נתון למסך המחשבון כאשר השרטוט נתון ללא המשאוות. בדרך כלל עובדים על שרטוט גרפים למשוואות נתונות. הכיוון האחר הוא העתקת שרטוט נתון למסך המחשבון, כאשר לא נתונות משוואות הישרים. לביצוע פעילות כזו נדרש לרשום משוואות מתאימות.
- כאשר קובעים תחום במערכת הצירים, כדי לקבל את הגרף המבוקש באמצעות נייר ועפרון, קביעת הסקלות במערכת נעשית לפני השרטוט, ואילו בשרטוט גרף באמצעות המחשב קביעה זו נעשית רק לאחר שרואים את ה"תוצר" המתקבל על המסך.
- שליטה בגרף, הנראה על הצג באמצעות שימוש ב-zoom או בשינוי סקלות.
- "הליכה" על הגרף תוך קבלת שיעורי הנקודות בכל צעד וצעד.
- הצגת מספר גרפים בו-זמנית על המסך.

ב) מדגיש ומחדד אספקטים מסוימים במהלך הלימוד.

- נותן את כל הייצוגים (נומרי, אלגברי, גרפי), ומאפשר מעבר ביניהם.
- מאפשר לשלב את ההיבט הנומרי ואת הקשר הקרטזי.
- מחדד את העובדה שלקבלת הייצוג הגרפי חייבים לעבור דרך הייצוג האלגברי.

ג) מגביר את היכולת ואת העצמאות בתהליכי פתרון ו"חקירה" של סיטואציות שונות.

- מספק לתלמיד משוב ובקרה על פעולותיו, ומעביר אליו את האחריות לשיפוט מעשיו - המחשב מראה לתלמיד את התוצר של פעולותיו המתמטיות, והתלמיד שופט בעצמו את "טיב התוצר".
- התלמיד יכול לשער כל דבר ולבדוק, והדבר לא נחשב ל"לא נכון".

הפעילויות בעזרת מחשב או מחשבון גרפי מיועדות לעבודה עצמית או בזוגות. ההמלצה היא לעבוד בקבוצות של שני תלמידים, כדי לאפשר דיון שיכול להתפתח בין התלמידים, תוך כדי האינטראקציה עם הכלי הטכנולוגי. הדיון בקבוצה קטנה מעשיר את הלמידה. את הדיונים הכיתתיים רצוי לערוך לאחר הפעילות, כדי לא להפסיק את העבודה בקבוצות באמצע ולאפשר לתלמידים להתמודד לבד או עם חברים במשימות השונות.
במהלך הפעילות המורה יכול לעבור בין התלמידים, ולעזור להם, במידת הצורך, אם מתעוררות בעיות טכניות, או לדון בבעיות הקשורות בהיבט המתמטי.

בנספחים I ו- II מופיעות שלוש פעילויות שונות בנושאים הבאים:
פעילות 1. גאומטריה במערכת צירים - שרטוט ישרים על המסך כדי לקבל צורות גאומטריות כמו משולשים ומרובעים.
פעילות 2. מצב הדדי של ישרים.
פעילות 3. שיקוף ישרים וסימטריה.

הפעילויות הנ"ל מופיעות:
בנספח I - פעילויות במחשבון גרפי. (עמודים 172-179).
בנספח II - פעילויות במחשב, באמצעות מתמטיx. (עמודים 180-187).

במדריך זה שילבנו את ההדרכה לפעילויות במקומות המתאימים. במידה והתלמידים עדיין אינם מכירים עבודה עם מחשבון גרפי, כדאי לשלב לפני הפעילות הראשונה את הפעילות שנמצאת בדף הראשון (עמ' 172) "הכנת המחשבון".
חשוב לציין כי המספרים המתקבלים במחשבון ב"הליכה על הגרף" אינם מדויקים, בגלל הרזולוציה של המחשבון. להגבלה זו יש, בדרך כלל, יתרון בפיתוח היכולת של התלמידים באומדן ובשיפוט פעולותיהם.

פעילות במחשבון גרפי או מחשב - פעילות 1

(עמודים 172-174 או 180-181 בספר)

בפעילות זו חמש משימות. מטרת הפעילות היא להשתמש בידע לגבי משוואת ישר, כדי לשרטט על מסך המחשבון (או על מסך המחשב) ישרים או צורות גאומטריות (מקבילית, משולש שווה שוקיים וכדי) לפי נקודות או לפי ישר משורטט.

קבלת ה"תמונה המתאימה" תלויה ברישום נכון של משוואות הישרים, ובבחירת מערכת צירים מתאימה (או תחום מתאים במערכת).

אם מתקבל שרטוט שגוי, "תיקון" השרטוט נעשה על ידי רישום משוואות אחרות. ואם לא מתקבל שרטוט, או שמתקבל שרטוט חלקי, אז שינוי הסקלות מאפשר לראות את השרטוט המבוקש.

1. במשימה זו התלמידים צריכים להשתמש בידע לגבי ישרים מקבילים כדי לקבל מקבילית. יתרון המחשבון הגרפי (או המחשב) הוא שאפשר לראות מייד אם הישרים מקבילים, ואם אכן מתקבלת מקבילית. אם לא, התלמידים עצמם משנים את המשוואות, ואינם זקוקים לביקורת של המורה. בסעיף ג', על פי רוב רושמים התלמידים משוואות של שני ישרים נוספים מקבילים בעלי שיפועים שליליים. אפשר לבקש מהם לשרטט מקבילית כך ששיפועי הישרים יהיו חיוביים.
2. במשימה זו משרטטים ישרים לפי נקודות חיתוך עם הצירים. כדי לרשום את המשוואות, על התלמיד לחשב את השיפוע, ולהיות מודע לכך ש- b יקבע על פי נקודת החיתוך עם ציר y. אפשר כמובן להיעזר גם בשיקולים גאומטריים ואלגבריים כדי להגיע לתשובות.

למשל בסעיפים א' ו- ב', הישר עם הצירים יוצר משולש שווה שוקיים לכן השיפוע הוא 1 אם הישר עולה, ו- (1–) אם הישר יורד.

סעיף ג' שונה כי יש לו תשובות רבות נכונות. התלמידים יכולים לרשום משוואות של שני ישרים ששיפועיהם נגדיים (לאו דווקא 1 ו- (1–)) כדי לקבל משולש כבשרטוט. גם כאן אפשר לבדוק מייד אם המשוואות שנרשמו נכונות, תוך השוואת הגרפים שמתקבלים על המסך עם הגרף הנתון בתרגיל.

אפשר לקיים דיון בכיתה על שיעורי x של הנקודות A ו- B, ואומדן גרפי וכדי. כפעילות נוספת אפשר להציע לזוג תלמידים לשרטט ישר כלשהו, להראות את השרטוט (ללא המשוואה) לזוג תלמידים אחר, ולבקש מהם לקבל אותו שרטוט. חשוב לציין כי השרטוט המתקבל על המסך הוא של ישר ולא שרטוט של קטעים (כפי שמשורטט בספר).

3. במשימה זו חוזרים שוב לצורות גאומטריות מוכרות, שכדי לשרטט אותן יש צורך לדעת כיצד מתבטאות התכונות שלהן במשוואות הישרים.
הפתרון של סעיף א' יכול, למעשה, להיות "מחצית" הפתרון של סעיף ב'. רוב התלמידים עשויים לשרטט מעוין שאלכסוניו נפגשים בראשית הצירים. אפשר לבקש מהתלמידים הזריזים לשרטט מעוין אחר. הבעיה שמתעוררת כאן היא לדאוג שאורכי הצלעות יהיו שווים. כדי לפתור בעיה זו אפשר להדריך את התלמידים לשרטט סקיצה של מעוין כזה, ואז מתוך שיקולים לרשום משוואות מתאימות.
4. במשימה זו לומדים לבחור תחום במערת צירים, כך שאפשר לראות על המסך את הישר ואת נקודות החיתוך שלו עם הצירים.
קביעת הסקלות נעשית לאחר שמתקבל, או לא מתקבל, חלק מהישר במערכת הצירים. כשפותרים תרגיל כזה עם נייר ועפרון, קובעים את הסקלות על מערכת הצירים לפני שמשרטטים, ואז משרטטים סקיצה. במקרה כזה לא "מודעים" לשאלה "מה יתקבל אם נקבע סקלות אחרות במערכת". לעומת זאת בשרטוט במחשבון (או במחשב) השאלה נשאלת כחלק מתהליך העבודה ומעוררת לחשוב על האפשרויות השונות.
5. גם במשימה זו, בדומה למשימה הקודמת, לומדים לבחור תחום במערכת הצירים. אלא שהמטרה היא "לראות" את הישר ו"להעלים" אותו.
כיוון שלא נדרש לראות את נקודות החיתוך של הישר עם הצירים, אפשר לבחור תחום כזה שמערכת הצירים לא תיראה על המסך.

עוד על משוואות של ישרים (עמודים 50 - 57 בספר)

בסעיף זה נעשה הקשר בין המשוואה הכללית של הישר $Ax + By = C$ למשוואות המוכרות לתלמידים (מהצורה $y = ax + b$ או $x = c$).
מטרת הסעיף היא שהתלמידים יתיידדו עם צורה זו של משוואות לקראת לימוד הנושא "תכנון לינארי".
לכל אחת מהצורות (משוואה מפורשת של ישר ומשוואה כללית של ישר) יש יתרונות וחסרונות, ובסיום הסעיף כדאי לדון בכך עם התלמידים.
במהלך הסעיף מנצלים את צורת הרישום כמשוואה כללית לחיזוק הקשר הקרטזי וכן את המעבר בין הצורות, לתירגול בטכניקה אלגברית ולהתאמה בין הייצוגים השונים.
חשוב לחזור ולהדגיש:
עבור כל משוואה (הרשומה, למשל, על הלוח) והגרף שלה, (המוצג על מערכת הצירים), אפשר לומר:
א) כל זוג מספרים המקיים את המשוואה (פתרון המשוואה), הוא תיאור של נקודה הנמצאת על גרף המשוואה.
לשם המחשה נבחר זוג מספרים שהוא פתרון המשוואה, ונבדוק אם הנקודה המתאימה לו אכן נמצאת על הגרף.
ב) כל זוג מספרים המתאים לנקודה הנמצאת על הגרף הוא פתרון של המשוואה.
לשם המחשה נבחר נקודה על הישר, וניווכח שהזוג המתאים לה, אכן, הוא פתרון המשוואה.
לחילופין אפשר להראות שנקודה המתאימה לזוג מספרים, שאינם מקיימים את המשוואה - אינה נמצאת על הישר, ונקודה שאינה נמצאת על הישר - שיעוריה אינם מקיימים את המשוואה.
לכן, כשנתון גרף של ישר, אפשר לקרוא מתוכו זוגות של מספרים המתאימים למשוואת הישר, גם אם היא אינה נתונה.

כאשר נתונה משוואת ישר, ניתן לשרטט אותו באחת משתי הדרכים:
- לפי הפרמטרים (שיפוע ונקודת חיתוך עם ציר y, כפי שנלמד בסעיפים הקודמים).
- לפי שתי נקודות.

שרטוט לפי נקודות נוח כאשר השיפוע הוא מספר שלא נוח "להתקדם" על פיו, או כאשר המשוואה נתונה בצורה $Ax + By = C$, ואז פשוט יותר לחשב שיעורי נקודות מאשר לעבור לצורה המפורשת. אמנם גם לפישוט יש חשיבות, כי אז מגלים אינפורמציה על צורת הקו (עולה , יורד, תלול יותר או פחות וכדי), אפשר לקרוא את השיפוע, לדעת האם הישר חותך את ציר y בחלקו החיובי או השלילי ועוד.

תרגיל 1

א) $y = 2x - 1$ ג) $y = 4x - 3$

ב) $y = -1.5x + 3$ ד) $y = -0.5x + 2$

תרגיל 2

בתרגיל זה התלמידים נדרשים לפשט כדי להתאים בין משוואה לישר. כלומר, המעבר הוא מהייצוג האלגברי לגרפי. אפשר לבצע את ההתאמה כאשר הכיוון הוא מהגרף אל המשוואה. למשל: על ידי בדיקת הקשר הקרטזי. לדוגמה: הנקודה $(0\ ,\ 0)$ נמצאת על ישר (2), יש לבדוק איזו משוואה הנקודה מקיימת.

מומלץ לדון עם התלמידים בדרכי פתרון שונים.

א) $y = -2x + 4$ מתאימה לישר (4) ב) $y = \frac{1}{2}x$ מתאימה לישר (2)

ג) $x = 3$ מתאימה לישר (1) ד) $y = 2$ מתאימה לישר (3)

תרגיל 3

בתרגיל זה משולבים גם ישרים מקבילים לצירים. ברישום משוואות של ישרים כאלה עשויים להופיע קשיים. במקרה כזה כדאי להדריך את התלמידים, ולהציע להם לבדוק ולחפש את התכונה המשותפת לכל הנקודות הנמצאות על ישר מסוים, ואז להגיע למסקנה לגבי המשוואה.

ישר א': $y = 3$, ישר ב': $y = x + 1$

ישר ג': $x = 4$, ישר ד': $x = -1$

תרגיל 4

בתרגיל 2 נתבקשו התלמידים להתאים בין הייצוג האלגברי לייצוג הגרפי, ואילו בתרגיל זה מתאימים בין ייצוגים אלגבריים שונים. ההתאמה נעשית לאחר פישוט המשוואות שבטור א' (כפי שמוצע בתרגיל). ייתכן ויהיו תלמידים שיציעו לבצע את ההתאמה תוך בדיקת הקשר הקרטזי. לדוגמה: במשוואות שבטור ב' אפשר לקרוא את נקודת החיתוך עם ציר y, לכן מחשבים את הנקודה המתאימה במשוואות שבטור א'.

טור א'	טור ב'
$x + 2y = 10$	$y = -2x + 8$
$2x + y = 8$	$y = 4x - 3$
$x + 2y = 2y + 4$	$y = -\frac{1}{2}x + 5$
$x + 2y + 1 = 5x + y - 2$	$x = 4$

תרגיל 5

המטרה בתרגיל זה ובתרגילים הבאים (6 ו- 8) היא להמשיך לבנות את הקשר הקרטזי גם במשוואות שלא נתונות בצורה מפורשת.

עד עכשיו התלמידים שרטטו (או הניחו) ישרים שהמשוואות שלהם היו מהצורה $y = ax + b$ או $x = c$, בדקו אם נקודה נמצאת על ישר או השלימו שיעורי נקודה כזו מתוך הגרף (אם היה אפשר) או מתוך המשוואה. בתרגיל זה תחילה רושמים בצורה מפורשת ורק אחר כך משרטטים, ומשלימים שיעורים או בודקים. כדאי לבקש מהתלמידים להציע דרכים נוספות לפתרון סעיפים ב' ו- ג', שאחת מהן יפגשו בתרגיל 8.

א) $y = -2x + 1$

ב) $(3 , \underline{-5})$, $(0.5 , \underline{0})$, $(-1 , \underline{3})$, $(10 , \underline{-19})$, $(30 , \underline{-59})$

ג) $(2 , -3)$, $(100 , -99)$

תרגיל 6

א) משוואת הישר: $y = 2x - 3$

ב) $(\underline{3} , 3)$, $(0 , \underline{-3})$, $(-2 , \underline{-7})$, $(\underline{4} , 5)$, $(\underline{1.5} , 0)$

בדרך כלל, התלמידים רושמים את משוואת הישר בצורתה המפורשת, כלומר: $y = 2x - 3$.

בדיון בכיתה המורה יכול להציע משוואות נוספות, לדוגמה:

$2x - y = -3$, $2x - y = 3$, $2y - 4x = 6$, ולשאול האם יש לנו דרך לבדוק מי מהן היא המשוואה, בלי לעבור דרך הפישוט.

גם במקרה זה, כמו בתרגילים קודמים, השלמת הנקודות יכולה להיעשות במספר דרכים, לדוגמה:

- קריאה מתוך השרטוט. (כדאי להרגיל את התלמידים לבדוק על-ידי הצבה במשוואה. רצוי לערוך דיון בכדאיות ההצבה, במיוחד במקרים שהקריאה "אינה מדויקת".)
- על-ידי הצבת השיעור המתאים במשוואת הישר ופתרון המשוואה המתקבלת, כדי למצוא את השיעור השני. דרך זו מסובכת יותר כי יש צורך לחזור על פתרון משוואות. לפעמים, על מנת לשכנע את התלמידים לבדוק דרך המשוואות, (או אפילו להתחיל "להיגמל" מקריאת הפתרונות) אפשר לתת גם נקודות שהן מחוץ למערכת, כמו למשל $(___ , 15)$.

תרגיל 7

מטרת התרגיל להביא למודעות התלמידים את התכונות של הכלים השונים בהם הם עובדים. קשה לתלמידים להבין כי הכלים מייצגים, בדרכים שונות, את אותו דבר. הנטייה שלהם היא לראות כל ייצוג כדבר נפרד, ולכן ניתנים כאן התרגילים כדי לבנות את הקשרים בין הייצוגים. המטרה היא לא "לפתור" תרגיל, אלא לדבר "על", כדי ללמוד דרך התכונות של הייצוגים מתי כדאי לבחור ייצוג אחד על פני השני.

להלן חלק מהיתרונות והחסרונות, שעלו בכיתות הניסוי.

יתרונות השרטוט וקריאה ממנו:

- אפשר לקרוא הרבה נקודות שנמצאות על הקו.
- אפשר לקרוא הרבה נקודות שאינן על הקו.
- נותן תמונה כללית ויזואלית של הישר.

חסרונות השרטוט:

- בדרך כלל, לא ניתן לקרוא במדויק שיעורי נקודות.
- מערכת הצירים תמיד מוגבלת, ולא מראה את כל הערכים האפשריים.

יתרונות ההצבה במשוואה:

- אפשר לבדוק **כל** נקודה (הייצוג אינו מגביל אותנו).
- אפשר לקבל ערכים מדויקים יותר.

חסרונות ההצבה:

- לפעמים כרוכה בעבודה טכנית.

תרגיל 8

מטרת תרגיל זה להכיר דרך נוספת לבדיקת הקשר הקרטזי, על מנת להקל ולמנוע טעויות. אם דרך זו הוצעה בכיתה, בתרגיל זה או בתרגילים קודמים, אפשר לתת לתלמידים לפתור תרגיל זה באופן עצמאי.

א) הנקודות הנמצאות על הישר הן:
$(30 , -30)$, $(10 , 0)$, $(6 , 6)$, $(-10 , 30)$, $(4 , 9)$, $(5 , 7.5)$

ב) $(2 , \underline{12})$, $(\underline{14} , -6)$, $(-2 , \underline{18})$

את שיעורי הנקודות אפשר להשלים במספר דרכים, לדוגמה:

- על ידי הצבה ופתרון משוואה.
- בעזרת שיקולים של "ניחוש" פתרון.
- על ידי מעבר לצורה המפורשת, הצבה ופתרון.

ג) $(6 , 6)$, וזאת אפשר למצוא מסעיף א'. אם הכיתה מתקדמת מספיק, אפשר להציע להציב x במקום y ולקבל $3x + 2x = 30$, לפתור ולמצוא את הנקודה.

תרגילים

תרגיל 9

א) $y = 3x - 3$

ב) $y = -\frac{3}{2}$

ג) $x = 2$

ד) $y = x - 6$

תרגיל 10

את שרטוט הישרים, שמשוואותיהם נתונות בצורה לא מפורשת, אפשר לבצע על ידי רישום המשוואות בצורה מפורשת ושרטוט לפי הפרמטרים, או על ידי מציאת שתי נקודות הנמצאות על הישר. יש לעודד את התלמידים לעבוד לפי הדרכים השונות, ולתת להם לבחור, אם כי ברוב המקרים הם בוחרים לפעול בדרך אחת.
כבדיקה נוספת אפשר לבקש מהתלמידים לרשום את קודקודי המקבילית.
קודקודי המקבילית שמתקבלת הם: $(-2, 0)$, $(-1, 2)$, $(0, 2)$, $(1, -2)$.

תרגיל 11

בתרגיל זה משוואות הישרים נתונות בצורה מפורשת, את ההתאמה בין ישר למשוואה אפשר לבצע על ידי שיקולים של השיפוע, נקודת החיתוך עם ציר y, ושל ישרים מקבילים לצירים.

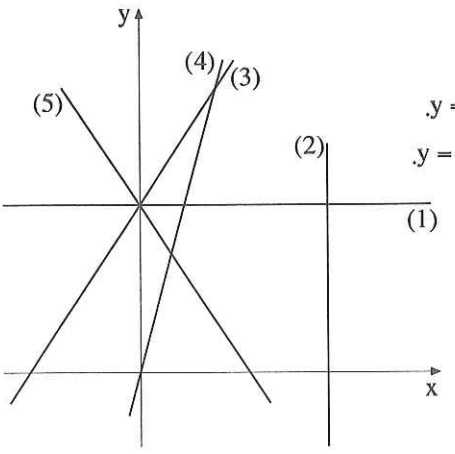
לישר (1) מתאימה המשוואה $y = 4$.

לישר (2) מתאימה המשוואה $x = 4$.

לישר (3) מתאימה המשוואה $y = 4x$.

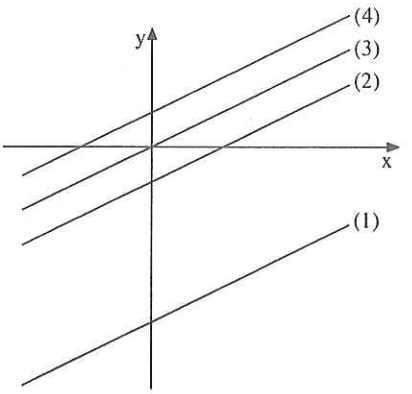
לישר (4) מתאימה המשוואה $y = 1\frac{1}{2}x + 4$.

לישר (5) מתאימה המשוואה $y = -1\frac{1}{2}x + 4$.



תרגיל 12

בתרגיל זה משוואות חלק מהישרים נתונות בצורה לא מפורשת. בדרך כלל התלמידים רושמים אותן בצורה מפורשת, ואז מבצעים את ההתאמה משיקולים של נקודת חיתוך עם ציר y (הישרים מקבילים, לכולם אותו שיפוע $\frac{1}{2}$).
אפשר גם להדריך את התלמידים להתאים על-ידי מציאת שיעורי נקודה לכל אחת מהמשוואות. במקרה כזה כדאי לבחור נקודות שיש להן אותו שיעור x, כי מערכת הצירים היא ללא שנתות. נקודה נוחה, למשל, היא (__ , 0).



לישר (1) מתאימה המשוואה $y = \frac{1}{2}x - 5$.

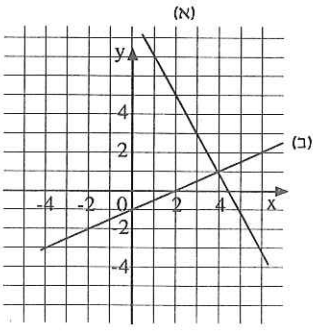
לישר (2) מתאימה המשוואה $y = \frac{1}{2}x - 1$.

לישר (3) מתאימה המשוואה $2y - x = 0$.

לישר (4) מתאימה המשוואה $2y - x = 2$.

תרגיל 13

בתרגיל זה פוגשים התלמידים שוב את המושג "נקודת חיתוך" (נקודת מפגש) של שני ישרים.
את שיעורי הנקודה קוראים מהמערכת, ובודקים בעזרת הצבה במשוואות.
בשלב זה עדיין לא מלמדים טכניקות של מציאת נקודת חיתוך.



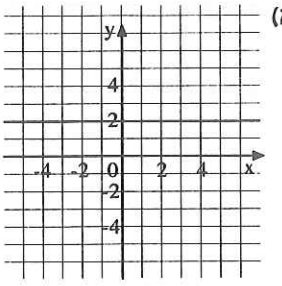
א) $y = -2x + 9$ ב) $y = \frac{1}{2}x - 1$ ג) $(4 , 1)$

תרגיל 14

מטרת התרגיל לחזור על הייצוג המילולי של קו ישר, כקבוצה של נקודות המקיימת תנאי מסוים.

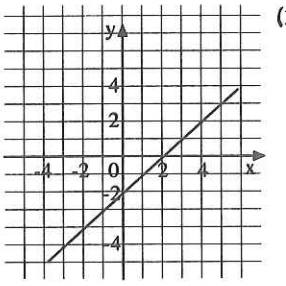
מתרגיל זה ניתן ללמוד כי ייתכנו תיאורים מילוליים שונים של אותו גרף. רצוי להעיר את תשומת ליבם של התלמידים על כך.

(א)



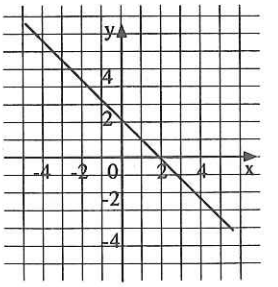
- קבוצת כל הנקודות הנמצאות על ישר המחבר את $(0\ ,\ 2)$ ו- $(2\ ,\ 3)$. ← ישר א'
- קבוצת כל הנקודות הנמצאות על ישר $y = x - 2$. ← ישר ג'
- קבוצת כל הנקודות הנמצאות על ישר המחבר את $(3\ ,\ 1)$ ו- $(1-\ ,\ 1)$. ← ישר ג'

(ב)



- קבוצת כל הנקודות הנמצאות על ישר המחבר את $(2\ ,\ 0)$ ושיפועו 1-. ← ישר ב'
- קבוצת כל הנקודות הנמצאות על ישר $y = 2$. ← ישר א'
- קבוצת כל הנקודות הנמצאות על ישר העובר דרך $(0\ ,\ 2)$ ושיפועו 0. ← ישר א'
- קבוצת כל הנקודות שסכום שיעוריהן 2. ← ישר ב'
- קבוצת כל הנקודות ששיעור y שלהן 2. ← ישר א'
- קבוצת כל הנקודות הנמצאות על הישר העובר דרך $(2\ ,\ 0)$ ושיפועו 1. ← ישר ג'
- קבוצת כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + y = 2$. ← ישר ב'

(ג)



תרגיל 15

מטרת תרגיל זה היא להיווכח כי ייתכנו תיאורים אלגבריים רבים עבור אותו גרף, תוך כדי כך התלמידים מתרגלים מעבר בין צורות שונות של אותה משוואה.

המשוואות הן: $y = -x - 1$ או $x + y = -1$ או $x + y + 1 = 0$.

בכיתות הניסוי ראינו שחלק מהתלמידים רשמו את משוואת הישר המשורטט וחיפשו אותה בין המשוואות, אחרים חיפשו נקודות על הישר ובדקו לאילו משוואות הן מתאימות. כאן חשוב לדון בבעיה כמה נקודות נחוצות כדי לקבוע ישר אחד, ואילו מהנקודות הן הנוחות ביותר לחישוב.

(הנקודות הן: $(-1, 0)$, $(0, -1)$ שהן נקודות החיתוך של הישר עם הצירים.)

תרגיל 16

$(6, 0)$, $(0, -10)$, $(3, -5)$

תרגיל 17

א) $y = 2x + 1$

ב) $y = x + 2$

חשוב לזכור, שבשלב זה, התלמידים עדיין מוצאים את משוואות הישרים על פי השרטוט בלבד ולא דרך נוסחאות.

ג) התלמידים בוחרים משפטים נכונים מתוך השרטוט, ללא צורך בחישובים או נימוקים.

התשובות המתאימות הן:

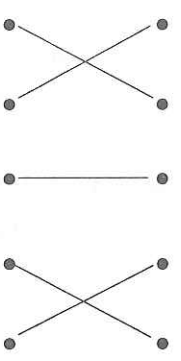
- שני הישרים נחתכים.
- לשני הישרים שיפועים חיוביים.
- הנקודה $(1, 3)$ משותפת לשני הישרים.

תרגיל 18

מטרת התרגיל היא חזרה נוספת על טכניקה אלגברית. כדי לבצע את ההתאמה יש צורך לפשט את המשוואות משני הטורים.

רצוי לחזור ולהסביר לתלמידים כיצד להכפיל לפי חוק הפילוג המורחב. אנו ממליצים לפשט את התבניות כמו $(x + 1)^2$ בעזרת חוק הפילוג המורחב, כלומר, לרשום בצורה $(x + 1)(x + 1)$ ולהכפיל, ולא להשתמש בנוסחאות הכפל המקוצר.

טור א'		טור ב'
$y = 5 - 3(2 - x)$		$y = x - \frac{x}{3}$
$y = \frac{1}{3}(2x + 6)$		$y = x - \frac{1}{2}(1 - 4x)$
$y = x - \frac{1}{2}(4x - 1)$		$y = -x$
$y = 2x - \frac{1}{2}(4x + 1)$		$y = (x + 1)^2 - x(x + 1)$
$y = -(1 - x)$		$y = x^2 + (3 + x)(3 - x)$



הצעות לתרגילים לסיכום הסעיף

I. נתונות משוואות של הישרים:

$x + 2y = 4$, $2x + y = 4$, $y = 2x + 2$

א) למי מהישרים שיפוע חיובי ולמי שיפוע שלילי?

ב) מי מהישרים עובר דרך $(2 , 0)$?

ג) לכל אחד מהישרים רשום משוואה של ישר נוסף שמקביל לו.

ד) רשום שיעורים של נקודה, שכל אחד מהישרים עובר דרכה.

II. נתונה משוואה של ישר $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

– כתוב אמת או שקר ליד כל פסוק, נמק.

א) הישר עובר דרך ראשית הצירים.

ב) הנקודה $(1 , 1)$ נמצאת על הישר.

ג) הישר חותך את ציר x בנקודה $(-2 , 0)$.

ד) הישר חותך את ציר y בחלקו החיובי.

ה) שיפוע הישר הוא שלילי.

ו) הישר עובר דרך הנקודה $(-14 , -4)$.

– הצע נקודה שהישר עובר דרכה והיא נמצאת ברביע השני.

III. נתונה משוואת הישר: $2x + y = 3$.

כיצד נוכל לקבוע:

- האם הישר עובר דרך הראשית?
- האם הישר חותך את ציר y בחלקו החיובי?
- האם לישר שיפוע חיובי או שלילי?

IV. א) דני טוען כי הישר $x + y = 5$ יוצר משולש ישר זווית ושווה שוקיים עם הצירים. האם הוא צודק? הסבר.

ב) מה שטח המשולש שרואה דני?

ג) הצע משוואה של ישר ששיפועו חיובי, והוא יוצר משולש שווה שוקיים עם הצירים.

ד) יוסי טוען כי כל ישר מהצורה $y = x + b$ יוצר משולש שווה שוקיים עם הצירים. האם הוא צודק? הסבר.

ה) מה הקשר בין תשובתך לסעיף א' לתשובתך לסעיף ד'?

ו) איזה סוג משולש יוצר הישר $y = 2x + 1$ עם הצירים? הסבר.

ז) הצע משוואה של ישר שאינו יוצר משולש כלשהו עם הצירים. הסבר.

V. לכל משוואה מטור א' מצא משוואה מטור ב', כך ששני הישרים יחתכו את ציר y באותה נקודה.

טור א'	טור ב'
$y = x - \frac{2x + 8}{4}$	$y = 4x - 3$
$y = (2x + 1)^2 - (2x - 1)^2$	$y = -2x + 1$
$y = -(3 - x)$	$y = 3x - 2$
$y = 5(x - 1) + 2(x + 3)$	$y = -2\frac{1}{2}$
$y = \frac{4x - 2}{4} - \frac{2x + 4}{2}$	$y = \frac{1}{2}x$

פתרונות לתרגילים לסיכום הסעיף

I. א) הישר ששיפועו חיובי: $y = 2x + 2$.

הישרים ששיפועם שלילי: $x + 2y = 4$ (שיפועו $-\frac{1}{2}$), $2x + y = 4$ (שיפועו -2).

ב) $y = 2x + 2$, $x + 2y = 4$

ג) בשלב זה התלמידים רושמים משוואה של ישר מקביל, לאחר שהם רושמים את המשוואות הנתונות בצורה מפורשת.

II. מטרת התרגיל היא חיזוק נוסף של הקשר הקרטזי.

א) שקר $0 \neq \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3}$

ב) אמת $1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}$

ג) אמת $0 = \frac{1}{3} \cdot (-2) + \frac{2}{3}$

ד) אמת הנקודה היא $(\frac{2}{3} , 0)$.

ה) שקר השיפוע $\frac{1}{3}$ והוא חיובי.

ו) אמת $-4 = \frac{1}{3} \cdot (-14) + \frac{2}{3}$

– רוב התלמידים יניחו (או ישרטטו) את הישר במערכת צירים, יקראו את אחד השיעורים של נקודה מתאימה, וישלימו את השיעור השני, דרך הצבה במשוואה.

III. בתרגיל זה יהיו תלמידים שיציעו לרשום תחילה את המשוואה בצורה מפורשת. כדי לבנות הקשר נוסף לקשר הקרטזי כדאי לדון בכיתה בשאלה, אם לא רושמים תחילה את המשוואה בצורה מפורשת, כיצד אפשר לענות על השאלות.

IV. המטרה בתרגיל היא ליישם ולשלב את מה שלמדו בסעיפים הקודמים, בהקשר נוסף של שילוב הגאומטריה.

לפתרון התרגיל התלמידים יכולים להיעזר בהנחה (או בשרטוט) ישרים במערכת צירים משובצת, אפשר גם להיעזר בשרטוט מדגים.

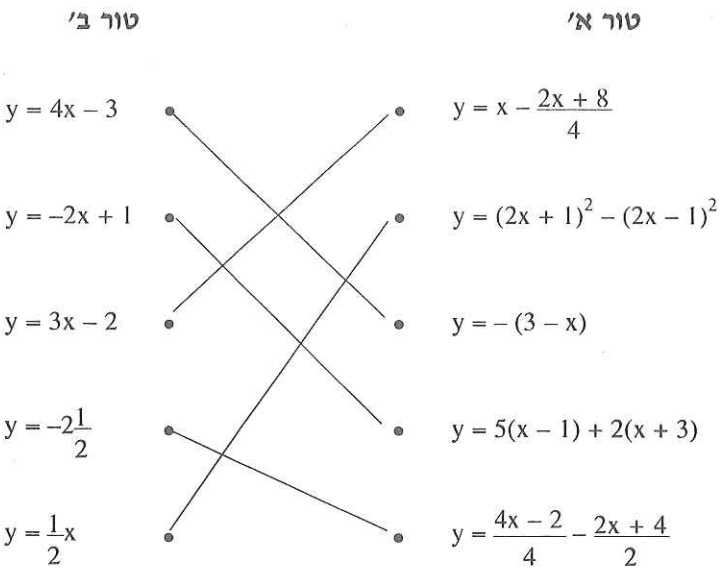
ז) בסעיף זה ייתכנו תשובות מהצורה $y = c$ או $x = c$ או $y = ax$.

לכל מקרה מתאים הסבר שונה.

V. את ההתאמה אפשר לבצע בשתי דרכים:

- לאחר פישוט המשוואות בטור א'.
- השלמת שיעורי הנקודה (___ , 0) לכל אחד מהישרים שבטור א' (ללא פישוט).

מומלץ לדון בכיתה ביתרונות ובחסרונות של כל אחת מהדרכים הנ"ל.



מצב הדדי של ישרים (עמודים 58 - 63 בספר)

בסעיפים הקודמים למדו התלמידים לשרטט ישרים לפי משוואה נתונה או לפי תכונות (נקודה ושיפוע או שתי נקודות), לרשום משוואות מתאימות, ולהתאים בין משוואות לישרים.

מטרת הסעיף הזה ושלושת הסעיפים הבאים (עמודים 58 - 84) להגיע בהדרגה למושג נקודות חיתוך של ישרים, כשנקודת המוצא היא הידע הקודם של התלמידים.

המהלך הוא:

בשלב הראשון - (עמודים 58 - 63) עוסקים בניתוח המצבים ההדדיים של מספר ישרים. עוברים משרטוט מדגים של מצב הדדי אל רישום משוואות מתאימות.

בשלב השני - (עמודים 64 - 71) עוסקים במציאת נקודות חיתוך בין ישרים, שהם מהצורה $y = ax + b$, בדרך אלגברית, ובמשמעות נקודות חיתוך אלה.

בשלב השלישי - (עמודים 79 - 80) עוסקים במציאת נקודות חיתוך בין ישרים, שהמשוואות שלהם רשומות בצורה לא מפורשת, בדרך אלגברית. כמו כן עוסקים ב"סיפור המסתתר" מאחרי מערכת המשוואות, ובקשר בין הפתרון לסיפור.

בשלב הרביעי - (עמודים 81 - 84) עוסקים במציאת נקודות החיתוך של ישרים עם הצירים, כשחלק ממשוואות הישרים נתונות בצורה מפורשת וחלק לא.

חשוב לציין שבכל השלבים מתעסקים עם שני הייצוגים, הגרפי והאלגברי, ובקשרים ביניהם.

כפי שנאמר לעיל, כיוון שנקודת המוצא היא הידע הקודם של התלמידים, ועל מנת להגביר את העניין של הקשר הקרטזי, נקודת ההתחלה בסעיף זה היא גאומטרית, כלומר מתחילים מהגרף ועוברים אל המשוואה. תוך כדי כך מקשרים:

- בין הגאומטריה לאלגברה.
- בין האינטואיציה שיש לתלמידים לגבי מצבם ההדדי של ישרים, הנובעת משרטוט, לבין משוואות מתאימות.

כיוון שהסעיף משמש בסיס משמעותי למציאת נקודת חיתוך, מהלך הסעיף הוא: מתחילים ממצבים הדדיים של **שני** ישרים שונים ורישום המשוואות המתאימות. אחר כך, עוברים **לשלושה** ישרים שונים ושוב רושמים משוואות מתאימות. הטיפול בשלושה ישרים שונים מביא להבחנה בין מצב בו מתקבל משולש, למצב שבו שלושת הישרים נחתכים באותה נקודה. בדרך כלל, התלמידים טוענים כי: "שלוש משוואות עם a ו- b שונים יוצרות משולש". לפיכך, מבקשים מהתלמידים להניח שלושה ישרים דרך נקודה נתונה, ולרשום משוואות מתאימות. התלמידים

נוכחים כי מתקבלות שלוש משוואות בהן a ו- b שונים, ובכל זאת הישרים עוברים דרך נקודה אחת. תוך כדי פעילות זו התלמידים מתרגלים לראות את האלגברה "בעיניים גרפיות", כך שבחלק מן המקרים הם יכולים לקבוע את המצב ההדדי מן המשוואות ובחלק לא. בסעיף הבא הם ילמדו לעשות זאת תוך פתרון מערכת המשוואות.

לקראת סוף הסעיף מדברים על **ארבעה** ישרים, כאשר אפשר להכליל גם למספר גדול יותר, כי מדובר רק על שתי המשפחות: ישרים העוברים דרך אותה נקודה על ציר y, וישרים שיש להם אותו שיפוע (כלומר מקבילים).

גם כאן, כמו בסעיפים קודמים, ישנו המעבר בין הייצוגים השונים, כאשר חלק מהמשוואות הנתונות מופיעות בצורה "לא מפורשת", אותה הכירו בסעיף הקודם.

תרגיל 1

לכל אחד משני הסעיפים יש אינסוף תשובות אפשריות, כך שאפשר לשתף תלמידים רבים מהכיתה ולדון בתשובותיהם.

א) כל שני ישרים שאינם מקבילים יש להם נקודת חיתוך.

בכיתות הניסוי ראינו שהתלמידים מציעים ישרים מהצורה $y = ax + b$ להם a-ים שונים (שיפוע שונה), או ישרים שהאחד מהצורה $y = ax + b$ והאחר מהצורה $x = c$.

ב) ישרים, שאין להם נקודת חיתוך, הם ישרים מקבילים. ההצעות שהתקבלו בכיתה היו ישרים מהצורה $y = ax + b$ להם אותו שיפוע, או ישרים מהצורה $x = c$, להם ערך שונה של c.

לגיוון, המורה יכול לרשום משוואות של ישרים על הלוח למשל:

$y = 5x + 6$, $y = -8$, $x = 7$, $y = -3x + 1$, ולבקש מהתלמידים להציע, לכל מקרה, ישר אחר שיש לו נקודת חיתוך עם הישר הרשום, וישר שאין לו נקודת חיתוך עם הישר הרשום.

אפשר גם לשתף תלמידים רבים בכיתה, ולהפנות שאלות שונות לתלמידים השונים בהתאם לרמתם, ובכך לנצל את הידע שנרכש עד כה.

למשל: המורה פונה לתלמיד אחד, מבקש משוואה של ישר כלשהו ורושם אותה על הלוח. פונה לתלמיד שני ומבקש שיציע משוואה של ישר שאין לו נקודת חיתוך עם הישר הרשום. מתלמיד שלישי מבקשים שיאמר משוואה של ישר שיש לו נקודת חיתוך עם הישר הנתון. מתלמיד רביעי מבקשים משוואה של ישר שנקודת החיתוך שלו עם הישר הראשון תהיה על ציר y. מתלמיד חמישי מבקשים משוואה של ישר ששיפועו גדול משיפוע הישר הנתון, ונקודת החיתוך שלו עם הישר הנתון תהיה על ציר y.

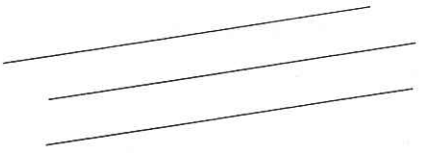
תרגיל 2

בתרגיל זה דנים במספר נקודות החיתוך הנוצרות על ידי שלושה ישרים שונים.

א) ישנן ארבע אפשרויות שונות:

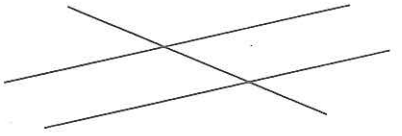
(i) אפס נקודות חיתוך - שלושת הישרים מקבילים זה לזה.

השרטוט המתאים:



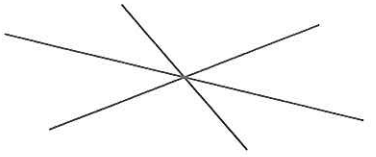
(ii) שתי נקודות חיתוך - שני ישרים מקבילים וישר שלישי חותך אותם.

השרטוט המתאים:



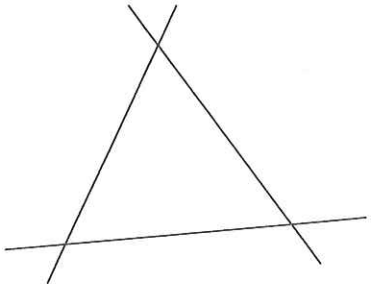
(iii) נקודת חיתוך אחת.

השרטוט המתאים:



(iv) שלוש נקודות חיתוך.

השרטוט המתאים:



ב) לכל אחד מהמקרים הנ"ל אפשר להציע שלשות רבות של משוואות. בשלב זה התלמידים יוצרים שלשות של משוואות, ויודעים כמה נקודות חיתוך יש לשלושת הישרים, אך עדיין אינם מכירים את הטכניקה למציאת שיעורי הנקודות.

בכיתות הניסוי התקבלו משוואות בדרך הבאה:
במקרה (i) שהוא הקל ביותר לתלמידים - אפס נקודות חיתוך - נרשמו שלוש משוואות מהצורה $y = ax + b$ להן אותו a.
במקרה (ii) - שתי נקודות חיתוך - נרשמו שתי משוואות עם אותו a ומשוואה שלישית עם a שונה.
במקרה (iii) - נקודת חיתוך אחת - נרשמו שלוש משוואות עם אותו b, אך a שונה (הנקודה המשותפת היא נקודת החיתוך עם ציר y).
במקרה (iv) - שלוש נקודות חיתוך - נרשמו שלוש משוואות עם a שונה ו- b שונה.
בדיון שנערך בכיתה, נשאלו התלמידים האם לשלוש משוואות בהן ערכי a שונים וערכי b שונים, אכן, יש שלוש נקודות חיתוך (נוצר משולש) או נקודת חיתוך אחת (ששלושת הישרים עוברים דרכה). דרך פתרון, שהוצעה על ידי התלמידים, הייתה להניח ישרים מתאימים למשוואות ולבדוק.
במקרה (iv) אחת ההצעות הייתה: $x = 2$, $y = 3$, $y = -x + 5$. בבדיקה, על ידי הנחת הישרים המתאימים במערכת צירים, התברר שלשלושת הישרים נקודת חיתוך אחת. תגובה של אחת התלמידות הייתה: "נזיז למעלה את אחד הישרים, למשל ל- $y = -x + 7$, ואז בוודאי שיתקבלו שלוש נקודות חיתוך".

תרגיל 3

מטרת התרגיל להראות שערכים שונים של a, וערכים שונים של b, במשוואה מהצורה $y = ax + b$, אינם מבטיחים שלוש נקודות חיתוך.
כדי לרשום משוואות של ישרים שעוברים דרך הנקודה $(2 , -1)$ כפי שנדרש, התלמידים בכיתות הניסוי השתמשו במערכת צירים, הניחו ישרים דרך הנקודה לפי שיפוע כרצונם, וקראו את המשוואה. הם הציעו משוואות שונות, אך לא כולם הצליחו להבין כי נקודת החיתוך של כל הישרים היא $(2 , -1)$.

לכאורה, השאלה "מהי נקודת החיתוך..." נראית מיותרת, הרי ברור לנו כי היא הנקודה דרכה עברו כל הישרים. אך התלמידים אשר עסוקים בדברים רבים ושונים, עשויים לא להיות מודעים לכך. כשאנחנו שואלים אותם שאלה כזו, זה מחייב אותם לקשר בין הדברים, שעבורנו הם נראים מובנים מאליהם אך לתלמידים לא תמיד.

תרגיל 4

על מנת לקשר סעיף זה עם הסעיף הקודם, מטפלים בתרגיל זה במצב הדדי של ישרים שהמשוואות שלהם נתונות בצורה לא מפורשת.

א) זוג המקבילים הוא: $2x + y = 7$

$4x + 2y = 10$

התלמידים מגיעים למסקנה זו לאחר שהם רושמים את המשוואות בצורה המפורשת, כלומר: $y = -2x + 7$, $y = -2x + 5$.

יש לשים לב שהמטרה כאן היא לא ללמד שמשוואות, המתקבלות על-ידי הכפלת מקדמי x ו- y באותו מספר, מייצגות ישרים מקבילים. הנושא יטופל בשלב מאוחר יותר ביחידה "תכנון לינארי".

ב) כשמבקשים מהתלמידים להציע משוואות של ישרים, בדרך כלל הם מציעים משוואות בצורה $y = ax + b$, מכאן שכל מקביל נוסף לשניים שהתקבלו בסעיף א' הוא מהצורה $y = -2x +$ ☐ כאשר במשבצת הריקה אפשר לרשום כל מספר אחר פרט למספרים 7 או 5.

תרגיל 5

בתרגיל זה נעשה המעבר מהייצוג האלגברי אל הגרף. בחלק מהסעיפים אפשר לגלות, על פי ניתוח הפרמטרים, כמה נקודות חיתוך יש. בחלק אחר יש להשתמש בהנחת ישרים מתאימים במערכת צירים. חשוב לציין שהתלמידים עדיין לא מחשבים את נקודות החיתוך (במקרים שיש). המטרה העיקרית היא לראות את הייצוג האלגברי ב"עיניים גרפיות".

בסעיפים א' ו- ד' אין נקודות חיתוך - הישרים מקבילים.

בסעיפים ב' ו- ג' שלוש נקודות חיתוך.

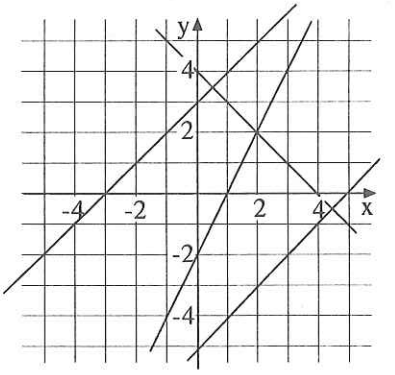
בסעיפים ה' , ז' , ח' ו- י' נקודת חיתוך אחת.

בסעיפים ו' ו- ט' שתי נקודות חיתוך.

תרגיל 6

בתרגיל זה עוסקים במצבים הדדיים בין ארבעה ישרים. בניגוד לסעיף "גאומטריה במערכת צירים", כאן מערכת הצירים לא ניתנת, והשרטוט הוא שרטוט מדגים, כדי להתמקד במשמעות המצב ההדדי של ישרים. מנסיוננו רוב התלמידים פותרים את התרגיל באופן הבא: מניחים ישרים מתאימים במערכת צירים, כמתואר בשרטוט, וקוראים מתוך השרטוט את המשוואות. חשוב לציין, שביצירת המשוואות הם מתעמתים עם המשמעות של

פתרון משוואות מבלי לפתור, כי עדיין לא למדו את הטכניקה לפתרון, זו תבוא בסעיף הבא, לאחר תרגילים רבים בהם נבנית המשמעות של נקודות חיתוך.
בכיתות הניסוי ראינו תלמידים שפתרו את התרגיל בכך שהשתמשו בחלק מהמשוואות שבתרגיל הקודם. למשל בסעיף ג' ראו כי לשלושה ישרים יש נקודת חיתוך אחת, לכן הציעו את המשוואות שבסעיף ז' בתרגיל הקודם, והוסיפו משוואה של ישר המקביל לאחד מהשלושה על-ידי שינוי ה- b.
בסעיף ב' היו תלמידים שאמרו: "כדי לקבל טרפז, נבחר שני ישרים מקבילים ושניים לא". ובדומה לתרגיל 2, נערך דיון בשאלה האם כל 4 ישרים כאלה אכן יוצרים טרפז. ההרגשה של התלמידים הייתה שכן, לכן הציעו את המשוואות $y = -x + 4$, $y = 2x - 2$, $y = x - 5$, $y = x + 3$, ולבדיקה הניחו ישרים מתאימים במערכת הצירים והתקבל השרטוט הבא, בו נקודת החיתוך של הישרים שאינם מקבילים נמצאת בין הישרים המקבילים.



ואז הציעו להזיז את אחד הישרים, כך שנקודת החיתוך של הישרים שאינם מקבילים תהיה מחוץ לישרים המקבילים, ואז שינו את המשוואה בהתאם.
חשוב לציין, כי תלמידים רבים מתקשים להתנתק ממצב הישרים כמו שהם מדמיינים אותם במערכת צירים, ולהתמקד במצבם ההדדי.
לדוגמה: בסעיף א' אחד התלמידים הציע את המשוואות:
$y = 2$, $y = 5$, $y = 2x + 7$, $y = 2x + 1$.
לשאלה האם ייתכן שהמשוואות הן:
$y = -3x + 1$ $y = -3x + 5$, $y = 2x + 7$, $y = 2x + 1$ הוא טען שלא, כי אין בשרטוט ישרים ש"מצויירים" כישרים "יורדים" עם שיפוע שלילי.

תרגיל 7

שלושת הישרים יוצרים משולש.

הנימוק שהובא בכיתה (ללא ציור) היה: "לכל זוג ישרים יש נקודת חיתוך אחת כי אין להם אותו שיפוע. ושני הישרים $y = 2x + 1$, $y = x + 1$ נחתכים בנקודה $(0, 1)$, שאינה נמצאת על הישר השלישי $y = 3x$, לכן יש שלוש נקודות חיתוך".

פעילות במחשבון גרפי או מחשב - פעילות 2

(עמודים 175 - 176 או 182 - 184 בספר)

הפעילות עוסקת במצב הדדי של ישרים, ובה שבע משימות.

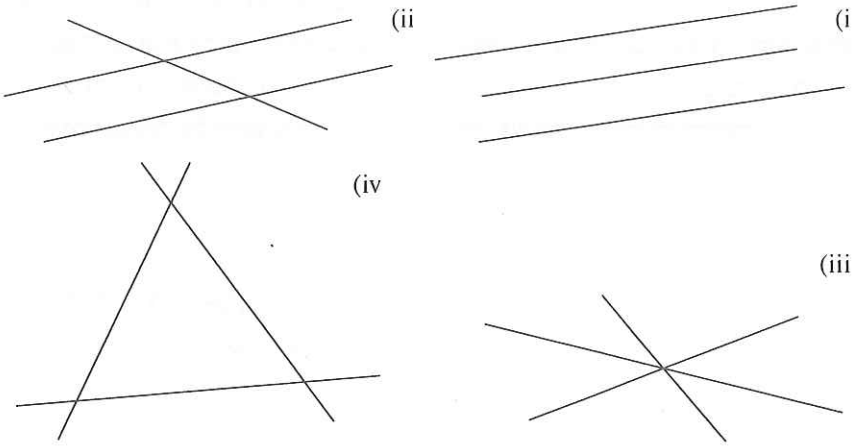
פעילות זו היא למעשה חזרה עצמית (בעזרת המחשב או המחשבון) על שלבי הדיון בכיתה, בנושא הקשר בין המצב ההדדי של ישרים למספר נקודות החיתוך.

בנוסף, פעילות זו מדגישה, את עניין הקשר הקרטזי, כלומר, הימצאות נקודה על ישר מחייבת ששיעוריה יקיימו את משוואת הישר. ומכאן היות הנקודה נקודת חיתוך של מספר ישרים, מחייבת ששיעוריה יקיימו את משוואות כל הישרים העוברים דרכה.

בתחילת הפעילות עוברים משרטוט מדגים של מצב הדדי אל רישום משוואות מתאימות, ולאחר מכן אל שרטוט ישרים לפי תכונות: על פי שתי נקודות או על פי שיפוע ונקודה.

1. במשימה זו מתאימים משוואות לשני ישרים מקבילים ולשני ישרים נחתכים. כדי לקבל על המסך כל אחד מהמצבים, התלמידים צריכים לרשום זוג משוואות. למעשה יש תרגיל דומה בפרק זה (עמוד 58 תרגיל 1) אבל כאן התלמיד יכול לבדוק בעצמו אם אכן מתקבל המצב ההדדי אותו ביקש לשרטט.

2. במשימה זו עוסקים בארבעת המצבים ההדדיים של שלושה ישרים שונים:



כמו במשימה הקודמת, כדי לשרטט מצבים אלה, יש צורך לרשום משוואות מתאימות. בדרך כלל במצבים (i) ו- (ii) לא מתעוררות בעיות, והתלמידים יודעים כי במצב (i) לשלושת הישרים אותו שיפוע אך הפרמטר b שונה.
במצב (ii) - ישרים שני ישרים בעלי אותו שיפוע ולשלישי שיפוע שונה.
מנסיוננו לשני המצבים האחרים הבחירה של התלמידים היא:
למצב (iii) - ישרים עם שיפועים שונים אך עם אותו b.
למצב (iv) - ישרים שערכי a שלהם שונים וערכי b שלהם שונים.
במקרה של בחירת ערכי a שונים וערכי b שונים ייתכן ויתקבל המצב (iii) ואז יש צורך לשנות אחת המשוואות.
הטיפול במקרה כזה מופיע במשימה הבאה.

3. כמו בדיון הכיתתי גם כאן לאחר הדיון במצב ההדדי, דנים במיוחד במקרה של שלושה ישרים בעלי ערכי a שונים וערכי b שונים, שאינם מחייבים מצב של שלוש נקודות חיתוך.
כאן מוכנס גורם חדש שהוא הקשר הקרטזי, כלומר, נקודה שנמצאת על ישר מחייבת ששיעוריה יקיימו את משוואת הישר. תוך כדי כך לומדים "להלך" על הגרף, כדי לבדוק אם, אכן, הישר עובר דרך הנקודה. אפשר לעקוב בצורה ויזואלית אחרי הקשר בין הייצוגים הגרפי והאלגברי, תוך טיול על הישר עם הסמן. חשוב לציין שבמחשבון לא מתקבלים ערכים מדויקים לשיעורי הנקודה אלא ערכים מקורבים, וזאת בגלל הרזולוציה של המחשבון. כדאי שהתלמידים יכירו זאת וילמדו להסתדר עם מגבלה זו. בפעילות עם המחשב מתקבלים ערכים מדויקים.

4. גם במשימה זו רושמים ומשרטטים ישרים העוברים דרך נקודה.
מטרת התרגיל להביא למודעות שהנקודה (0 , 4) היא נקודת החיתוך עם ציר x, ובכך, למנוע את השגיאה של רישום הנקודה כ- b.

5. במשימה זו משלבים גאומטריה עם מצבים הדדיים של ישרים ועם הילוך על הגרף. תלמידים יכולים להיעזר בשרטוט מדגים במחברת, ובעזרת שיקולים לרשום משוואות מתאימות לישרים.
בכיתות הניסוי ראינו שהיו תלמידים שקבעו כי בסיס המשולש נמצא על ציר x ומשיקולי סימטריה קבעו את שיעורי הקודקודים האחרים, ואז רשמו משוואות ישרים העוברים דרך שתי נקודות.
בדיון שנערך בכיתה, לאחר הפעילות, הגיעו התלמידים למסקנה שכל ישר אחר המקביל לציר x, שאינו עובר דרך (4 , 2–) יוצר עם שני הישרים הנ"ל משולש שווה שוקיים שקודקודו (4 , 2–).

משימות 6 - 7

במשימות אלה חוזרים על הפעילות של שרטוט ישר לפי תכונות (נקודה ושיפוע או שתי נקודות) ומהלכים על הגרף לשם בדיקה ויזואלית.
כשמבצעים פעילות כזו עם נייר, עיפרון וישרים, קודם מניחים (או משרטטים) את הישר במערכת, ורק אחר-כך קוראים את המשוואה מתוך השרטוט. השרטוט במחשבון מתבצע בכיוון הפוך, כלומר, קודם רושמים משוואה ואז מתקבל השרטוט.

תרגילים

תרגיל 8

א) $y = 3x + 11$, $y = 3x + 5$, הישרים מקבילים.

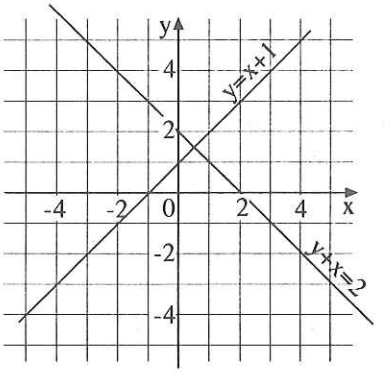
ב) $y = -1.5x + 2.5$, $y = -2x + 3$, הישרים נחתכים.

ג) $y = -0.5x - 2$, $y = -0.5x + 10$, הישרים מקבילים.

ד) $y = -5x$, $y = -x$, הישרים נחתכים.

תרגיל 9

א)

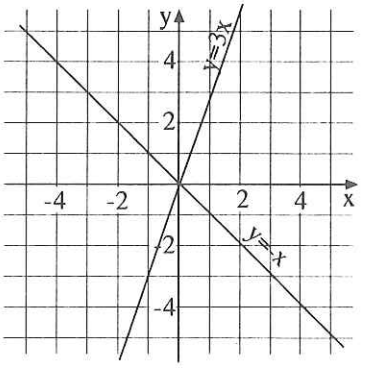


ב) כדי שיהיו בסך הכל שתי נקודות חיתוך, כל ישר שלישי חייב להיות מקביל לאחד משני הישרים הנתונים. לכן, משוואת הישר השלישי היא מהצורה:

$y = x +$ ☐ (במקום הריק אפשר לרשום כל מספר פרט ל- 1), או מהצורה $y = -x +$ ☐ (במקום הריק אפשר לרשום כל מספר פרט ל- 2).

תרגיל 10

א)

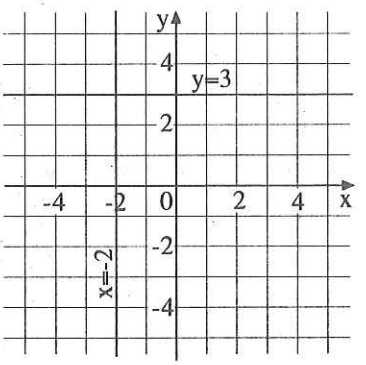


ב) - ג) נקודת החיתוך של שני הישרים הנתונים היא (0 , 0) , לכן הישר $x = 0$ או כל ישר מהצורה $y = a \cdot x$ (כשהשיפוע אינו 3 או 1–) מתאים כתשובה.

רצוי לדון בכל משוואה שהתלמידים מציעים, ולבדוק אם היא מקיימת את התנאי. בדרך כלל, תלמידים לא מציעים כישרים נוספים את משוואות הצירים ($x = 0$ או $y = 0$).

תרגיל 11

א) נקודת החיתוך (3 , 2–).



ב) כל ישר מהצורה $y = ax + b$ כאשר $a \neq 0$ ואינו עובר דרך הנקודה (3 , 2–).

ג) המשולש הכלוא הוא ישר זווית.

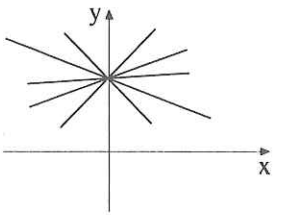
כדאי לדון עם התלמידים בשאלות:

- האם המשולש יכול להיות שווה שוקיים? באיזה מקרה? (כן, אם ורק אם $a = 1$ או $a = -1$).
- האם המשולש יכול להיות שווה צלעות? (לבקש מהתלמידים להסביר למה. חשוב לשמוע ולדון בנימוקים מדוע לא ייתכן משולש שווה צלעות).

את שטח המשולש אפשר לחשב במספר דרכים, כפי שתארנו בסעיף הקודם. כל תלמיד יפתור בדרכו , ואפשר לדון בדרכים השונות.

תרגיל 12

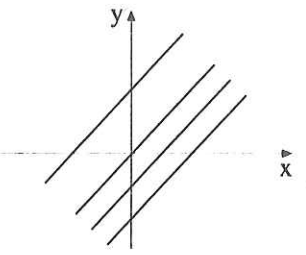
א) בסעיף זה נדרש שרטוט מדגים, כלומר, שרטוט שאינו דורש פרטים מספריים, לפיכך השרטוט יהיה 4 ישרים העוברים דרך אותה נקודה הנמצאת על ציר y.



ב) בגרף מתקבלים ארבעה ישרים העוברים דרך הנקודה (0 , 5). כלומר, ל"משפחה" זו של ישרים יש נקודה אחת משותפת והיא (0 , 5), לכן כל ישר שהוא מהצורה $y = ax + 5$ וכן הישר $x = 0$ (שהוא ציר y) שייכים ל"משפחה".

תרגיל 13

א) בדומה לתרגיל הקודם, השרטוט המדגים יהיה 4 ישרים מקבילים זה לזה.



ב) בגרף מתקבלים ארבעה ישרים מקבילים ששיפועם 4. מכאן משוואה מתאימה של כל ישר נוסף השייך ל"משפחה" זו היא מהצורה $y = 4x + b$.

תרגיל 14

הישרים המקבילים הם: $x + \frac{1}{2}y = 3$, $4y + 8x = 5$, $y = 10 - 2x$, $4x + 2y = 1$

ושיפועם 2–.

הצעות לתרגילים נוספים לסיכום הסעיף ולגיוון

I. האם שלושת הישרים $y = x$, $y = -x$, $x = 4$, יוצרים משולש? אם כן, מצא את קודקודיו.

II. א) הסבר מדוע הישרים $y = x + 2$, $y = 2x + 2$, והישר $x + y = 2$ לא יוצרים משולש.

ב) שנה אחת המשוואות בלבד, כך שיתקבל משולש.

III. א) הסבר מדוע הישרים $y - x = 1$, $y = x + 4$, $y - x = 0$ לא יוצרים משולש.

ב) האם ניתן לשנות **רק אחת** המשוואות כדי לקבל משולש? הסבר.

IV. האם לשלושת הישרים $2y = 2x + 6$, $y = 3x + 6$, $y = -x + 6$ יש נקודת חיתוך אחת? אם כן, מהי? אם לא, הסבר.

תשובות לתרגילים הנוספים

I. כן, הקודקודים הם: $(0 , 0)$, $(4 , 4)$, $(4 , -4)$.

II. א) לשלושת הישרים נקודת חיתוך אחת $(0 , 3)$.

ב) שינוי ה- b באחת המשוואות, יוצר שלוש נקודות חיתוך, לכן משולש.

III. א) כי הם מקבילים.

ב) לא כי גם אם נשנה את השיפוע של אחד הישרים עדיין ישארו לנו שני ישרים מקבילים, לכן לא יתקבל משולש. אם נשנה את ה- b (בלי לשנות את השיפוע) יתקבלו תמיד שלושה ישרים מקבילים.

IV. הישרים הם: $y = x + 3$, $y = 3x + 6$, $y = -x + 6$, לכן לשלושת הישרים שלוש נקודות חיתוך.

נקודות חיתוך (עמודים 64 - 71 בספר)

בסעיף הקודם "התיידדו" התלמידים עם המושג נקודות חיתוך, כלומר, בדקו מצבים הדדיים, קיום או אי-קיום נקודות חיתוך, וגם רשמו משוואות של מספר ישרים שיש להם מספר נתון של נקודות חיתוך.
בסעיף זה ילמדו למצוא בדרך אלגברית את שיעורי נקודות החיתוך, אם הן קיימות.
עד כה עבדנו על נקודות חיתוך ששיעוריהן מספרים שלמים, שהן קלות לקריאה מתוך מערכת הצירים, ואינן "נופלות" מחוץ לתחום המערכת. המטרה הייתה להכיר את המושג, להתיידד איתו ולספק בסיס אינטואיטיבי וגרפי לנושא.
בסעיף זה ילמדו למצוא את הפתרון האלגברי שכרוך בלימוד מיומנויות (טכניקה), אך דרכו ניתן למצוא פתרון מדויק עבור כל זוג משוואות. רצוי שהתלמידים יהיו מודעים ושותפים למטרה זו. מה שנלמד בסעיפים הקודמים (פתרונות גרפיים) משמש כעת גם בסיס לביקורת הפתרון שמתקבל בצורה סימבולית (אלגברית).
נקודת החיתוך היא הנקודה המשותפת לישרים. הנקודה ששיעוריה מקיימים את משוואות הישרים, כלומר, עבור אותו x מתקבל אותו y בשתי המשוואות. דרך הפתרון האלגברית המוצעת כאן נובעת ממשמעות זו, ולכן משתמשים ברישום המשוואות בצורה מפורשת, והשוואת שיעורי y.
על סמך ניסיוננו בכיתות, תלמידים מתקשים בפתרון בדרכים אחרות. לכן בחרנו להציג את הדרך המשמעותית לתלמידים.
דרכי פתרון אלגברי נוספות:

- פתרון על ידי צרוף לינארי - לתלמידים רבים משמעות הפעולה לא ברורה.
- הצבה של תבנית בתוך תבנית (לבטא את x באמצעות y, ולהציב את הביטוי במקום x, ולהיפך) כרוכה לעיתים בטכניקה אלגברית מסורבלת ומתסכלת.

לכן דרכי פתרון אלה לא הוצגו בספר לתלמיד, אך אם תלמיד מעלה אותן, אפשר להתייחס אליהן, אבל חשוב שהדרך שמציגים לפני התלמידים תהיה משמעותית, וזו השיטה המוצגת בספר לתלמיד.

מהלך הסעיף:
התרגילים הראשונים (1 - 5) הם תרגילי הכנה, בהם מוודאים את משמעות נקודת החיתוך.
התרגילים 6 - 7, יוצרים את המוטיבציה ללימוד שיטתי של פתרון, בכך שהם מעמתים את התלמידים עם החסרונות והמגבלות של מה שהם יודעים. ניסוי וטעייה יכולה להיות אפשרות אך לא תמיד מוצלחת, שרטוט גרף כנ"ל.

בתרגילים 8 - 10, נעזרים במשמעות כדי למצוא, בדרך אלגברית, את הנקודה.
דרך הוראה כזו חשובה כדי שהתלמידים יהיו שותפים למהלך, יבינו מה הם עושים, והפעילות לא תהיה טכנית בלבד.

תרגיל 1

בארבעת הסעיפים שבתרגיל מופיעים שני הייצוגים - האלגברי והגרפי. התאמת המשוואות לישרים יכולה להתבצע על-ידי בדיקת אחד הפרמטרים. למשל, סימן השיפוע קובע את כיוון הישר, ונקודת החיתוך עם ציר ה- y יכולה להיות חיובית או שלילית, או נקבעת ישירות על ידי משוואת הישר, כמו בסעיף ד'.

א) ישר א' הוא $y = x + 2$, ישר ב' הוא $y = -x + 2$, נקודת החיתוך היא $(0\ ,\ 2)$.

ב) ישר א' הוא $y = 2x - 1$, ישר ב' הוא $y = 2x + 3$.

השיפועים שווים לכן הישרים מקבילים, כלומר, אין להם נקודה משותפת.

ג) ישר א' הוא $y = 2x - 1$, ישר ב' הוא $y = -3x - 1$, נקודת החיתוך היא $(0, -1)$.

ד) ישר א' הוא $y = 2$ ישר ב' הוא $x = 3$, נקודת החיתוך היא $(3\ ,\ 2)$.

תרגיל 2

אפשר לפתור תרגיל זה על ידי שיקולים (שיפוע שונה או שווה) או על ידי הנחת ישרים מתאימים במערכת הצירים. בחלק מן הסעיפים יש לפשט תחילה את המשוואות.

א) אין נקודת חיתוך (הישרים מקבילים).

ב) לאחר פישוט מתקבלים הישרים $y = -x - 1$, $y = x - 6$ והישרים נחתכים.

ג) הישרים נחתכים. (ניתן לקרוא מיידית את נקודת החיתוך $(-1\ ,\ 0)$).

ד) הישרים נחתכים.

תרגיל 3

דרך מקובלת, עד כה, בפתרון תרגיל זה היא להניח במערכת הצירים ישר בעל שיפוע כלשהו, שעובר דרך הנקודה $(3\ ,\ -2)$, לקרוא מהגרף את שיפוע הישר ואת נקודת החיתוך עם ציר y, ואז לרשום את משוואתו. על מנת לחזק את הקשר הקרטזי, ולהדגיש את משמעות נקודת החיתוך, רצוי לבקש מן התלמידים לבדוק אם שיעורי הנקודה, אכן, מקיימים את משוואות הישרים שהציעו.

גם במקרה זה (כמו בתרגיל 3 שבסעיף הקודם) השאלה "מהי נקודת החיתוך" עלולה להישמע טריוויאלית ומיותרת. אך לפעמים העיסוק בהנחת הישר וברישום משוואתו עשויים להשכיח את מטרת התרגיל, או את משמעות "נקודת החיתוך", לכן הצענו אותה כתזכורת.

תרגיל 4

א) הנקודות $(2\ ,\ 4)$, $(1\ ,\ 5)$ נמצאות על הישר $x + y = 6$.

הנקודות $(2\ ,\ 7)$, $(1\ ,\ 5)$ נמצאות על הישר $y = 2x + 3$.

ב) הנקודה המשותפת היא $(1\ ,\ 5)$ והיא נקודת החיתוך של שני הישרים.

תרגיל 5

מטרת תרגיל זה לחזק את משמעות המושג "נקודת חיתוך" כנקודה ששיעוריה מקיימים את שתי המשוואות.

את התרגיל אפשר לפתור על ידי הצבת שיעורי הנקודות במשוואות ובדיקה, או על ידי הנחת ישרים מתאימים במערכת הצירים וקריאה מהגרף.

א) $(-2\ ,\ 2)$ ב) $(0\ ,\ -2)$ ג) $(0\ ,\ 1)$

באחת מכיתות הניסוי היו תלמידים שהציבו את **כל הנקודות** ובדקו. הם עשו זאת "כדי להיות בטוחים", גם אם גילו שהנקודה הראשונה היא הנקודה המשותפת. במקרה זה כדאי לקיים דיון על מספר נקודות חיתוך בין שני ישרים שונים.

תרגיל 6

מטרת תרגיל זה להציע "ניסוי וטעייה" כדרך למצוא את נקודת החיתוך, ולדון בטיב השיטה שעלולה להיות ארוכה, מייגעת ולפעמים לא מובילה להצלחה.

א)

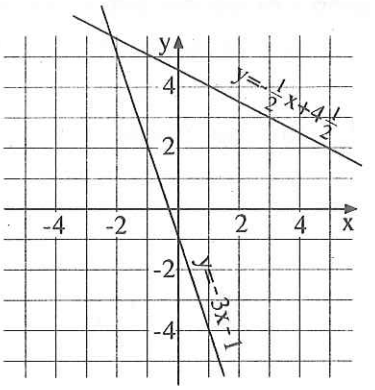
$x + 2y = 15$	$2x - y = -5$
$(-3\ ,\ 9)$	$(-3\ ,\ -1)$
$(1\ ,\ 7)$	$(1\ ,\ 7)$
$(0\ ,\ 7\frac{1}{2})$	$(0\ ,\ 5)$
$(3\ ,\ 6)$	$(3\ ,\ 11)$

ב) נקודת החיתוך היא $(1\ ,\ 7)$.

תרגיל 7

מטרת תרגיל זה היא להראות את מגבלות הגרף. כאן שרטוט הישרים אמנם נוח, אך לא ניתן לקרוא במדויק את שיעורי נקודת החיתוך.

א)



ב) מהשרטוט מתקבל ששיעור x של נקודת החיתוך נמצא בין 3– ל- 2–.

ג) כיוון שעל פי הגרף ניתן רק לאמוד את שיעורי נקודת החיתוך, חשוב לשמוע אומדנים שונים של התלמידים, להציב במשוואות ולבדוק. על פי רוב, תלמידים מנסים "לתקן" את האומדן שלהם, כדי להגיע ל"תשובה יותר מדויקת". כדאי לדון עם התלמידים בכך.

תרגיל 8

מטרת התרגיל היא ללמוד דרך שיטתית למציאת נקודת החיתוך.

חשוב להדגיש, שאם התלמידים בכל זאת מצליחים למצוא, בחלק מן המקרים על ידי שיקולים כלשהם, את נקודת החיתוך ללא הפתרון האלגברי, חשוב לקבל את התשובה ולבדוק אותה ואין לדרוש מהם פתרון שיטתי.

מפתרון המשוואה $-3x + 12 = 7x + 2$ מתקבל $x = 1$. מהצבת שיעור x בכל אחת מהמשוואות, מתקבל $y = 9$. לכן נקודת החיתוך היא (9 , 1).

כדאי לטפח את ההרגל לרשום את הפתרון כזוג סדור (x , y), כדי לקשר עם המשמעות הגרפית של הפתרון, וכן למנוע את המצב בו התלמידים מוצאים את שיעור x של הנקודה ומסיימים בכך את הפתרון.

תרגיל 9

בתרגיל זה מחשבים את שיעורי נקודת החיתוך (במקרים שיש). כדי לתרגל את השיטה, דאגנו ששיעורי כל נקודות החיתוך יהיו מספרים שלמים בלבד. חשוב לציין, שבחלק מן הסעיפים קל לקרוא את הפתרון מהגרף אם משרטטים או מניחים ישרים מתאימים, בחלק מהסעיפים אפשר למצוא את הפתרון על-ידי שיקולים, ובחלק על ידי פתרון אלגברי. אין לחייב את התלמידים לדרך פתרון מסוימת, רק חשוב להדגיש שבפניהם עומדות מספר דרכים לפתרון, וכל אחד יכול לפתור בדרך הנוחה לו.

רישום הפתרון כזוג סדור ניתן לשם בדיקה ולחיזוק הקשר הקרטזי.

א) $(-4\ ,\ 13)$ ב) $(-2\ ,\ 7)$ ג) $(-4\ ,\ 3)$

ד) הישרים מקבילים - אין נקודת חיתוך.

ה) $(5\ ,\ 17)$ ו) $(-3\ ,\ 4)$

תרגיל 10

בתרגיל זה יש שילוב של שתי ההצגות של ישרים: האלגברית והגרפית. בתרגיל קודם התלמידים יכלו לבדוק את הפתרון על ידי הצבה במשוואות, בתרגיל זה יש דרך נוספת לבדיקה - על-ידי מיקום משוער של הנקודה במערכת הצירים. גם במקרה זה תלמידים יכולים למצוא את הפתרון על ידי הנחת ישרים מתאימים, ולבדוק על-ידי הצבה במשוואות.

כדאי לעודד את התלמידים לבצע שיקולים במציאת הפתרון, בחלק מן המקרים. למשל, בסעיף ד' הישר הראשון הוא קבוצת כל הנקודות שהשיעור הראשון שלהן 5, לכן, שיעור ה- x של נקודת החיתוך הוא 5, מכאן נחפש על הישר השני את הנקודה $(___\ ,\ 5)$ ונקבל $(8\ ,\ 5)$.

גם ההתאמה בין הישר למשוואה יכולה להיעשות על ידי שיקולים, מתוך "הסתכלות" במשוואות. למשל, על ידי קריאת השיפוע , או על ידי נקודת החיתוך עם ציר y. אפשר גם להניח ישרים מתאימים במערכת צירים, לקרוא מהגרף את הפתרון, ולבדוק במשוואות את התשובה.

א) $(-2\ ,\ -2)$ ב) $(4\ ,\ 6)$ ג) $(2\ ,\ -4)$ ד) $(5\ ,\ 8)$ ה) $(2\ ,\ -3)$ ו) $(4\ ,\ 3)$

תרגיל 11

א) משוואת הישר AB היא: $y = -x + 3$, ומשוואת הישר AD היא: $y = 2x - 3$.

ב) את שיעורי הנקודות B ו- D אפשר לקרוא מיידית לאחר ההתאמה, ומתקבל:
$B(0 , 3)$, $D(0 , -3)$.
הנקודה A היא נקודת המפגש של שני הישרים. כדי למצוא את שיעוריה, בדרך אלגברית, יש לפתור את מערכת המשוואות ומתקבל $A(2 , 1)$.

ג) משוואת המקביל דרך B היא $y = 3$. בנקודת החיתוך של המקביל עם הישר AD שיעור ה- y שלה הוא 3, לכן יש לחפש נקודה על הישר $y = 2x - 3$ שבה $y = 3$, כלומר, נרשום $3 = 2x - 3$, נפתור ונקבל $C(3 , 3)$.

תרגיל 12

א) משוואת הישר AB היא: $y = 2x - 6$.
משוואת הישר BC היא: $y = -x + 6$.
משוואת הישר AC היא: $y = -3x + 4$.
גם פה, כמו במקרים קודמים אפשר לעשות את ההתאמה על ידי שיקולים שונים: בעזרת השיפוע, או נקודת החיתוך עם ציר y. רצוי לעודד נימוקים שונים להתאמה.

ב) $(0 , 6)$, $(0 , 4)$, $(0 , -6)$

ג) $A(2 , -2)$, $B(4 , 2)$, $C(-1 , 7)$.

תרגילים 13 - 15

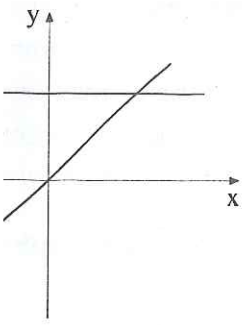
תרגילים אלה משלבים בין הגאומטריה והאלגברה. כדאי לעודד את התלמידים לפנות לשיקולים כדי להקל על עצמם. רצוי להרגיל את התלמידים לשרטט שרטוט מדגים, ולרשום את המשוואות המתאימות בשרטוט כזה.

תרגיל 13

דוגמה לשיקולים ונימוקים מתאימים:
מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות. לישרים מקבילים יש שיפועים שווים.
בין ארבעת הישרים יש שני זוגות של ישרים מקבילים:
$y = 4x$ ו- $y = 4x - 12$ (השיפוע 4) ,
וכן $y + 2x = 6$ ו- $y + 2x = 0$ (השיפוע -2).
שיעורי הקודקודים: $(0 , 0)$, $(2 , -4)$, $(3 , 0)$, $(1 , 4)$.

V. להלן שרטוט מדגים.

הסבר בכל מקרה האם זוג המשוואות מתאים לשרטוט, ומדוע.



א) $y + x = 0$, $y = 3$

ב) $y = 2x$, $y = 3x$

ג) $y = 0$, $x = 2$

ד) $y - x = 0$, $y = 1$

פתרון התרגילים הנוספים

I. א) אין מספרים כאלה כי הישרים מקבילים (השיפוע 3).

ב) אפשר לרשום במשבצות כל מספר כרצוננו, בתנאי שהמספרי
לשני הישרים. נקודת החיתוך תהיה (3 , 0).

ג) אפשר לרשום כל מספר.

ד) אפשר לרשום כל מספר פרט ל- (1–).

II. אפשר לפתור תרגיל זה בשתי דרכים:

– על-ידי שרטוט או הנחת ישר במערכת צירים דרך הנקודה
שיפוע הישר הראשון הוא 2– , ושיפוע הישר השני הוא 1, וקו

– על ידי בדיקת הקשר הקרטזי. למשל, במשוואה $x + \square$
מספר שיקיים $\square + 1 \cdot 2- = 2$, ונקבל 4, לכן $4 + 2x- =$

III. א) סעיף זה לא מהווה קושי אצל מרבית התלמידים, בדרך כלל
משוואות בצורה המפורשת, עם אותו b.

ב) בדרך כלל, תלמידים פותרים סעיף זה על ידי הנחת יש
צירים וקריאה מהגרף.

IV. הישרים $x = 1$, $y = -x + 2$.

V. א) לא מתאים, כי המשוואה $y + x = 0$ מתארת ישר ששיפועו ש

ב) לא מתאים, כי שתי המשוואות מתארות ישרים שעוברים ד

ג) לא מתאים. אחת המשוואות מתארת את ציר x, והאחרת
לציר y.

ד) מתאים.

עוד על נקודות חיתוך (עמודים 72 - 80 בספר)

בסעיף זה עוסקים במציאת נקודות חיתוך של ישרים, שהמשוואות שלהם נתונות בצורה לא מפורשת. תחילה מתרגלים את המעבר לצורה המפורשת, ואחר כך משתמשים במה שנלמד בסעיף קודם ומוצאים את נקודת החיתוך.
חשוב להדגיש כי מרישום המשוואות בצורה מפורשת אפשר לגלות אינפורמציה רבה על הגרף. למשל: לגלות אם הישרים מקבילים או לא, אם יש או אין להם נקודת חיתוך, לגלות את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר y, ועוד, וזאת מבלי להפעיל מיידית את הטכניקה האלגברית.

תרגיל 1

בתרגיל זה הישר נתון בהצגתו המילולית - כמקום גאומטרי. הצגה זו מדגישה את התכונה המשותפת של כל הנקודות שעל הישר. מכאן שנקודת החיתוך של שני ישרים, שהיא הנקודה המשותפת לשני ישרים - מקיימת גם את התכונה של הנקודות שעל הישר הראשון וגם את התכונה של הנקודות שעל הישר השני.

להלן הצעה להצגת השאלה כפתיחה לנושא.

בתחילת השיעור נרשום על הלוח את שתי התכונות שרשומות בתרגיל 1:

- נקודות שסכום שיעוריהן 6.
- נקודות בהן ההפרש בין שיעור y לשיעור x הוא 2.

נבקש מן התלמידים לתת דוגמאות של נקודות המקיימות את התכונה הראשונה, ונשאל מה המשוואה המתאימה. נבדוק אם הזוגות שניתנו מקיימים את המשוואה שרשמנו.

נבקש דוגמאות של נקודות המקיימות את התכונה השנייה, ונשאל מה המשוואה המתאימה. נבדוק אם הזוגות שניתנו מקיימים את המשוואה.

נשאל, האם יש נקודה שמקיימת את שתי התכונות ? אם כן, מהי?

מה משמעותה לגבי שתי המשוואות?

האם קיימת עוד נקודה כזו?

לסיכום, אפשר להיעזר במערכת הצירים ובישרים, ולהניח ישרים מתאימים כדי להדגים את הגרף של כל משוואה, ואת פתרון המערכת בצורה גרפית.

א) $x + y = 6$

ב) $y - x = 2$

ג) הנקודה המשותפת היא (4 , 2). נקודה זו מקיימת הן את התכונה הראשונה (סכום השיעורים 6) והן את התכונה השנייה (ההפרש בין שיעור y לשיעור x הוא 2).

תרגיל 2

א) $y = -3x + 10$ ב) $y = \frac{1}{2}x - 3$

ג) $y = -\frac{2}{3}x + 5$ ד) $y = 2x - 4$

תרגיל 3

א) $y = -2x - 1$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ב) $-2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 2$, לכן נקודת החיתוך היא $(-2\ ,\ 3)$.

תרגיל 4

כמו בתרגילים קודמים, גם בתרגיל זה אנו פותרים את מערכת המשוואות לאחר שנרשום כל אחת מהמשוואות בצורה מפורשת. במערכות שבתרגיל זה, אחת המשוואות רשומה כבר בצורה זו, לכן יש לרשום את המשוואה השנייה בצורה זו ולפתור.

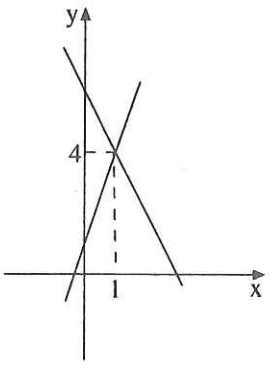
כאמור, אנו ממליצים לא לפתור בשיטה של הצבת תבנית בתוך תבנית, כי הצבה כזו כרוכה בטכניקה אלגברית מסורבלת, המהווה קושי ומשמעותה לא ברורה לתלמידים.

א) $(0\ ,\ 5)$ ב) $(2\ ,\ 1)$ ג) $(3\ ,\ 1.5)$ ד) $(3\ ,\ -1)$

תרגיל 5

א) נקודת החיתוך $(4\ ,\ 1)$.

ב)



רצוי לבקש מן התלמידים להתאים משוואה לכל ישר ולרשום בשרטוט. אמנם במקרה זה, למציאת נקודת החיתוך אין צורך בהתאמה זו, אך זה מאפשר חזרה נוספת לקשר בין הגרף למשוואה, וכן למשמעות הגרפית של הזוג הסדור המתקבל מהפתרון האלגברי. חזרה כזו מונעת את המצב שתלמידים מסיימים את הפתרון לאחר מציאת x ושוכחים למצוא את y, ומאפשרת ביקורת על הפתרון. למשל: x יכול, או לא יכול, להיות שלילי, וכדי.

תרגיל 6

מטרת התרגיל היא ללמוד שמשוואה יכולה לתאר גם סיפור, ולפתרון יש משמעות לפי תוכן הסיפור.

כאן אנו מציעים מספר מצומצם של שאלות כאלה. אנו ממליצים לא לגלוש כאן לפתרון בעיות, כי התלמידים יתעסקו ביחידה כזו בהמשך.

א) $5x - y = 9$, יש אינסוף פתרונות, כי קיימים אינסוף זוגות המקיימים את המשוואה.

ב) $6x - 2y = 10$.

ג) פתרון המערכת הוא: $(2 , 1)$.

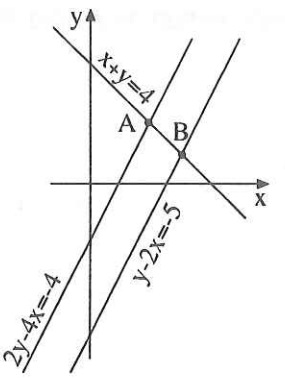
ד) על כל פגיעה מקבלים 2 נקודות, ועל כל החטאה מורידים נקודה אחת.

באחת מכיתות הניסוי, כשהתבקשו התלמידים לפתור את השאלה, טענה אחת התלמידות: בסה"כ שני הילדים פגעו 11 פעמים והחטיאו 3 פעמים, לכן אפשר לרשום את המשוואה: $11x - 3y = 19$, ואז אי-אפשר לפתור, כי אין לי מערכת משוואות. תלמיד אחר הציע לה לקחת כמשוואה שנייה את המשוואה שמתקבלת מסעיף א' ולפתור כמערכת.

תרגיל 7

בתרגיל זה, שלא כמו בתרגיל 5, יש חשיבות להתאמה בין הישר למשוואה כדי לקבוע איזו מערכת יש לפתור, על מנת למצוא שיעורי כל אחת מן הנקודות.

א)



ב) שיעורי הנקודות: $A(2\ ,\ 2)$, $B(3\ ,\ 1)$.

תרגיל 8

לתרגיל זה שתי מטרות: עיסוק במשמעות נקודת החיתוך, וחיזוק הבנת הקשר הקרטזי.

א) מבין הישרים הרשומים, הישר $y = 10x - 8$ אינו עובר דרך $(3\ ,\ 1)$.

ב) שיעורי נקודת החיתוך $(3\ ,\ 1)$.

בכיתות הניסוי היו תלמידים שפתרו את מערכת המשוואות, וכשהגיעו לתשובה $(3\ ,\ 1)$ הייתה התגובה: "כן ברור, הרי כל הישרים עוברים דרך הנקודה". מטרת התרגיל היא לחזק תגובות כאלה.

להלן הצעה נוספת להצגת התרגיל בכיתה:

לבקש מהתלמידים להציע משוואות של ישרים ולרשום אותן על הלוח. (בדרך כלל התלמידים מציעים משוואות בצורה מפורשת, על ידי הנחת ישר עם שיפוע כרצונם דרך הנקודה.) המורה יכול להוסיף משוואות בצורה לא מפורשת.

בסעיף ב' המורה יכול לבחור, מבין המשוואות שהוצעו בכיתה, זוג משוואות, ולפעול לפי ההוראות בתרגיל.

תרגילים

תרגיל 9

א) $y = 3x + 9$

ב) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

ג) $y = x - 3$

ד) $y = 2x$

ה) $y = -\frac{1}{2}x + 5$

ו) $y = -\frac{2}{3}x$

ז) $y = 2x - 10$

ח) $y = -\frac{3}{5}x + 3$

תרגיל 10

א) $y = -x + 5$, $y = 2x + 2$, נקודת החיתוך: $(4 , 1)$.

ב) $y = x + 8$, $y = -2x + 5$, נקודת החיתוך: $(7 , -1)$.

ג) $y = \frac{1}{2}x + 7$, $y = -2x - 3$, נקודת החיתוך: $(5 , -4)$.

ד) $y = 2x + 4$, $y = 3x + 6$, נקודת החיתוך: $(0 , -2)$.

ה) $y = -3x + 21$, $y = \frac{1}{2}x$, נקודת החיתוך: $(6 , 3)$.

ו) $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = -\frac{1}{4}x + 4$, נקודת החיתוך: $(4 , 3)$.

תרגיל 11

השרטוט המתאים ל- א' הוא (ii), שיעורי נקודת החיתוך: $(1 , 2)$.

השרטוט המתאים ל- ב' הוא (iv), שיעורי נקודת החיתוך: $(-1 , 2)$.

השרטוט המתאים ל- ג' הוא (i), שיעורי נקודת החיתוך: $(1 , -2)$.

השרטוט המתאים ל- ד' הוא (iii), שיעורי נקודת החיתוך: $(-1 , -2)$.

תרגילים 12 - 14

בתרגילים אלה נעשה שילוב בין שלושת הייצוגים של הקו הישר (מילולי, אלגברי וגרפי) עם המשמעות של נקודת החיתוך.

תרגיל 12

א) $x + y = 7$

ב) $y - x = 5$

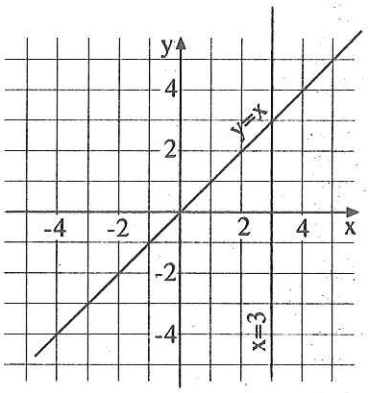
ג) הזוג המקיים את שתי התכונות הוא (1 , 6).

תרגיל 13

א) $x = 3$

ב) $y = x$

ג) (3 , 3)

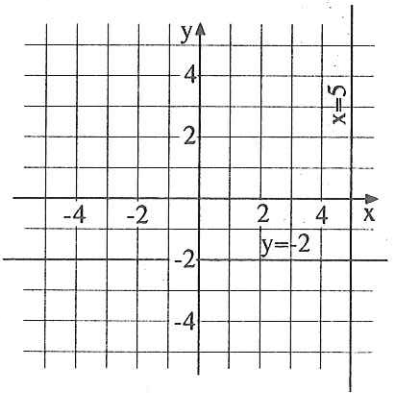


תרגיל 14

א) $x = 5$

ב) $y = -2$

ג) (5 , –2)



תרגילים 15 - 16

כאמור, המטרה בתרגילים אלה היא לקשר בין משוואות ל"סיפורים", ובין פתרון מערכת משוואות לתוכן הסיפור. בשלב מאוחר יותר יתעסקו התלמידים בצורה מסודרת יותר בפתרון בעיות.

תרגיל 15

א) $25x + 10y = 650$ ב) $20x + 10y = 550$ ג) $(20 , 15)$

ד) בכל חבילה 20 ורדים אדומים ו- 15 ורדים לבנים.

תרגיל 16

א) $15x - 10y = 55$

ב) $20x - 4y = 92$

ג) $(5 , 2)$

ד) על תשובה נכונה מקבלים 5 נקודות, ועל תשובה שגויה מורידים 2 נקודות.

תרגיל 17

מתקבל "נקודה וישר".

נקודות חיתוך עם הצירים (עמודים 81 - 84 בספר)

בסעיפים הקודמים למדו התלמידים את המשמעות של נקודת החיתוך של שני ישרים ולחשב אותה בדרך אלגברית. כל אחד מן הצירים הוא ישר, כך שנקודות החיתוך של ישר כלשהו עם הצירים הן למעשה נקודות חיתוך בין ישרים. לנקודות אלה תכונה מיוחדת (אחד השיעורים הוא אפס), לכן הוקדש סעיף מיוחד למציאת נקודות אלה.

- כאשר משוואת הישר נתונה בצורה מפורשת, אפשר לקרוא מהמשוואה את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר y, אך יש לחשב (על ידי פתרון משוואה או בעזרת שיקולים, של התקדמות או נסיגה, בעזרת השיפוע) את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר x.
- כאשר משוואת הישר נתונה בצורה לא מפורשת, יש לחשב את שיעורי שתי הנקודות על ידי פתרון משוואות מתאימות, ואין צורך להביא את המשוואה לצורתה המפורשת.

במקרים רבים, תלמידים מתבלבלים ברישום שיעורי הנקודות שעל הציר. שני התרגילים הראשונים הם תרגילי הכנה, ומטרתם למנוע שגיאות מסוג זה.

להלן הצעה לפתיחת השיעור.

המורה מניח במערכת צירים את הישר המתאים (מקביל לציר x) ומבקש:

- הציעו נקודות על הישר $y = 2$. מה המשותף לכל הנקודות האלה?
- הציעו נקודות על הישר $y = -5$. מה המשותף לכל הנקודות האלה?
- הציעו נקודות על הישר $y = 0$. מה המשותף לכל הנקודות האלה?
- בכיוון ההפוך: לשאול היכן יימצאו כל הנקודות שהשיעור השני שלהן 6? 2–? 0? ולבקש לרשום משוואות מתאימות.
- באופן דומה לפעול לגבי ישרים המקבילים לציר y.

תרגיל 1

בסיום התרגיל כדאי להגיע עם התלמידים לסיכום כי: כל נקודה על ציר x היא מהצורה (___ , 0) וכל נקודה על ציר y היא מהצורה (0 , ___).

תרגיל 2

על ציר x: (0 , 0) , (25 , 0) , (12 , 0) , (4 , 0) , (–3 , 0).

על ציר y: (0 , 0) , (0 , –10) , (0 , – 4) , (0 , 1) , (0 , 5) , (0 , –2).

תרגיל 3

א) $A(-6\,,\,0)$, $B(0\,,\,3)$

ב) $y = 2x + 3$, נקודת החיתוך עם ציר x היא $(-1.5\,,\,0)$.

ג) $y = -x + 3$, נקודת החיתוך עם ציר x היא $(3\,,\,0)$.

בכיתות הניסוי ראינו שחלק מהתלמידים מצאו את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר x על ידי ירידה באמצעות השיפוע. כדאי לבקש מהם להציב במשוואה ולבדוק.

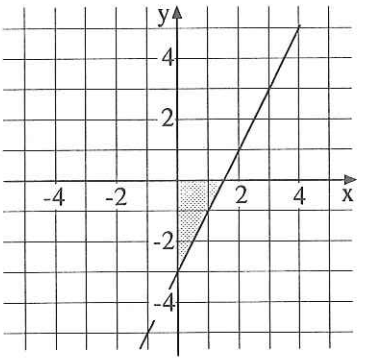
תרגיל 4

ב) נקודת החיתוך עם ציר x היא $(1.5\,,\,0)$, עם ציר y היא $(-3\,,\,0)$.

אפשר למצוא נקודות אלו במספר דרכים:

- קריאה מהשרטוט ובדיקה במשוואות.
- בדרך אלגברית, על-ידי פתרון משוואה מתאימה.
- שיקולים בעזרת השיפוע.

ג) שטח המשולש 2.25 משבצות.



גם את שטח המשולש אפשר לחשב במספר דרכים כמו: ספירה של משבצות, השלמה למלבן ששטחו כפול משטח המשולש וחישוב השטח, על ידי הכפל $\frac{3 \cdot 1.5}{2}$. כדאי לעודד את התלמידים לפתור בדרכים שונות.

תרגיל 5

בסעיפים הקודמים, כשהייתה נתונה משוואה לא מפורשת של ישר, בדקנו על-ידי הצבה אם נקודה נמצאת על הישר, או השלמנו שיעורי נקודות על הישר על-ידי פתרון משוואה. כשרצינו לשרטט ישר שמשוואתו לא מפורשת, כתבנו קודם את

המשוואה בצורה מפורשת, ואז שרטטנו על-ידי השיפוע ונקודת החיתוך עם ציר y.
בתרגיל זה מנצלים את חישוב נקודות החיתוך עם הצירים לשרטוט ישר.
כדאי להתחיל את התרגיל בדיון: כיצד נוכל לשרטט את הישר $2x + 3y = 12$ בדרך קצרה ללא צורך לרשום את המשוואה בצורה מפורשת? מגיעים למסקנה שמספיק לבחור שתי נקודות על הישר כדי לשרטט אותו. תוך כדי הדיון מסיקים, שהנקודות הנוחות הן נקודות החיתוך עם הצירים, כי בנקודות אלה אחד השיעורים הוא אפס. חישוב נקודות אלה נעשה על ידי פתרון משוואה מתאימה.
לאחר חישוב הנקודות, המורה מניח על מערכת הצירים שעל המטול את הישר המתאים, והתלמידים משרטטים אותו במחברותיהם, או מניחים גם הם ישר במערכת שלהם. כמובן אפשר להוסיף ולשאול שאלות על הישר המונח: למשל, לבקש מהתלמידים שיעורים של נקודה נוספת הנמצאת על הישר, לתת שיעורי נקודה ולשאול אם היא נמצאת על הישר, אפשר גם לשאול לגבי השיפוע ועוד.

א) $(0 , 4)$, $(6 , 0)$ ב) $(0 , 0.5)$, $(-1 , 0)$ ג) $(3 , 2)$

תרגיל 6

א) $A(0 , 6)$, $B(2 , 0)$
ב) שטח המשולש AOB הוא 6 יחידות. כיוון שהישר אינו משורטט במערכת צירים משובצת, אפשר לחשב את שטחו על ידי השלמה למלבן וחישוב מתאים, או ישירות מתוך נוסחת השטח.

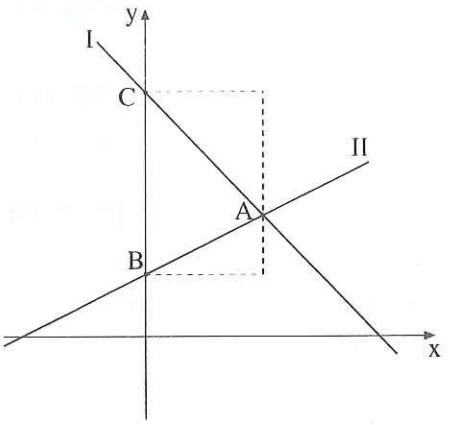
תרגיל 7

רצוי לשמוע מן התלמידים את הנימוקים שלהם להתאמה בין הישרים למשוואות. על פי רוב, התלמידים מתאימים לפי השיפוע או לפי נקודת החיתוך עם ציר y, אך אפשר גם בדרכים נוספות כמו על פי השלמת שיעורי נקודה כלשהי, למשל, $(__ , -1)$ בכל אחד מהישרים.
לאחר שהתלמידים מזהים את הישר עם המשוואה, כדאי לבקש מהם לרשום על כל ישר את משוואתו, ואז אפשר לשאול שאלות נוספות, כמו:

- אם נעביר דרך הנקודה C מקביל לציר x, מה תהיה משוואתו?
- אם נעביר דרך הנקודה A מקביל לציר x , מה תהיה משוואתו? מה תהיה משוואת המקביל לציר y?

א) ישר I הוא הישר $y = -x + 8$, ישר II הוא $y = \frac{1}{2}x + 2$.
ב) $C(0 , 8)$, $B(0 , 2)$, $A(4 , 4)$

ג) מטרת הסעיף היא לזהות גדלים בהקשרים שונים, למשל, שגובה המשולש הוא שיעור x של A וכדי. שטח המשולש 12 יחידות שטח.



גם במקרה זה אפשר להשלים את המשולש למלבן, שצלעותיו מקבילות לצירים ושטחו כפול משטח המשולש, לחשב את שטח המלבן וממנו את שטח המשולש.

תרגיל 8

בתרגיל זה המשוואות נתונות בצורה לא מפורשת. כדאי לדון עם התלמידים בשאלה איך לבצע את ההתאמה, ויחד איתם להגיע למסקנה שאפשר להתאים על-ידי חישוב נקודות על כל ישר (במקרה זה נוח לבדוק את נקודות החיתוך עם הצירים), או על-ידי כתיבת המשוואות בצורה מפורשת וקריאת הפרמטרים.
בחישוב שטח המשולש, התלמידים מזהים את הבסיס והגובה, אך ניתנה התמיכה בסעיף ג' כי מתעסקים גם עם מספרים שליליים. גם כאן, כדאי לאחר ההתאמה, לבקש מהתלמידים לרשום על כל ישר את משוואתו, כדי לחזק את הקשר בין הייצוגים.

א) ישר I הוא $x + y = 5$, ישר II הוא $2x - y = -2$.

ב) שיעורי הנקודות: $A(1 , 4)$, $D(-1 , 0)$, $E(5 , 0)$

ג) חישוב אורך DE ייעשה על ידי ספירה או בעזרת שיקולים, כמו למשל, כמה יחידות יש מ- (–1) עד 5, ואין צורך להשתמש בנוסחאות.
אורך הקטע DE הוא 6 יחידות.

ד) שטח המשולש 12 יחידות.

תרגיל נוסף

סמן את הסעיף בו רשומות נקודות החיתוך של הישר $y = -2x + 12$ עם הצירים.

א) $(12 , 0)$, $(6 , 0)$ ב) $(6 , 0)$, $(12 , 0)$

ג) $(0 , 12)$, $(24 , 0)$ ד) $(6 , 0)$, $(0 , 12)$

תשובה: סעיף ד'

תרגילים

תרגיל 9

עם ציר x : $(-4, 0)$, עם ציר y: $(0, 12)$.

תרגיל 10

א) $A(0, -10)$

ב) מטרת הסעיף היא חיזוק נוסף של הקשר הקרטזי. הנקודה $(4, 0)$ אינה על הישר, כי הצבת שיעוריה במשוואת הישר לא מקיימת את המשוואה. אפשר, כמובן, להמשיך ולבקש לחשב את שיעורי הנקודה B.

תרגיל 11

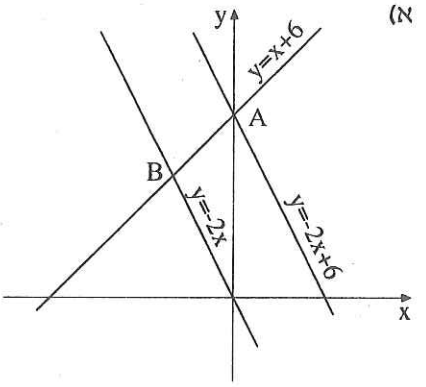
א) הישר AC הוא $y = -\frac{1}{2}x + 2$, הישר OB הוא $y = \frac{1}{2}x$.

ב) שיעורי הנקודות: $C(0, 2)$, $A(4, 0)$, $B(2, 1)$.

תרגיל 12

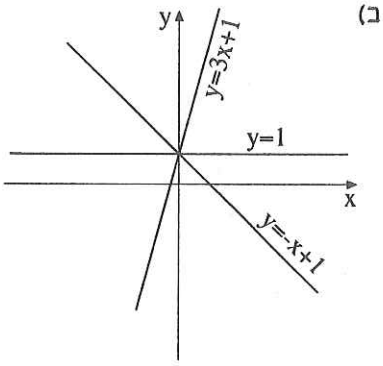
בשאלה זו התלמידים מתבקשים לשרטט ישרים מדגימים, הכוונה היא לשרטוט "סקיצה", ללא מערכת צירים, המתארת את המצב ההדדי של שלושת הישרים. הדיון יהיה מעניין יותר אם התלמידים ישרטטו שרטוט מדגים, במערכת צירים ללא שנתות.

א)



נקודות החיתוך: $A(0, 6)$
$B(-2, 4)$

ב)



נקודת החיתוך $(0, 1)$

תרגיל 13

בתרגיל זה הדרישות בסעיפים א' וב' הפוכות זו לזו. בסעיף א' התלמידים מתבקשים למצוא את שיעורי קודקודי המשולש שצלעותיו נתונות, ובסעיף ב' לרשום את משוואות הצלעות של משולש שקודקודיו נתונים.

א) את שיעורי הקודקודים התלמידים יכולים למצוא על ידי פתירת מערכת משוואות מתאימה. המתקשים יכולים לשרטט את הישרים במערכת צירים, ולקרוא את שיעורי הנקודות מהגרף. במקרה כזה חשוב להרגיל אותם לבדוק על-ידי הצבה במשוואות.

שיעורי הקודקודים הם: $(6\ ,-1)$, $(1.5\ ,0.5)$, $(3\ ,2)$.

ב) $y=0$, $x=0$, $x+y=2$.

משוואת ישר דרך נקודה נתונה (עמודים 85 - 88 בספר)

עד עכשיו, כשהתבקשו התלמידים לרשום משוואת ישר לפי שיפוע ונקודה, הם שרטטו את הישר במערכת צירים, קראו את הפרמטרים (השיפוע ונקודת החיתוך עם ציר y) ורשמו את המשוואה. בסעיף זה ילמדו לרשום את המשוואה גם במקרים בהם קשה למצוא זאת באופן הנ"ל.

מתחילים משיפוע ידוע (a), ורושמים את המשוואה בצורה $y = ax + \square$.

מחשבים את המספר החסר שבמשבצת על-ידי הצבת שיעורי נקודה שהישר עובר דרכה. מומלץ לעבוד על פי צורה זו, ולמצוא את המספר החסר בעזרת שיקולים או להיעזר במחשבון במידת הצורך. אנו ממליצים לא לפתור משוואה פרמטרית לחישוב ה- b, כי תלמידים רבים נוטים להסתפק במציאתו ולא ממשיכים לרשום את המשוואה, ואילו בדרך זו מתקבלת המשוואה כולה.

חשוב לציין, כי בחלק מן התרגילים שבסעיף, השיפוע נתון בצורה מפורשת ובחלק אחר צריך לקבוע אותו מתוך הנתונים שבשאלה.

בסוף הסעיף מופיעים תרגילים המשלבים חישובים אלה בתוך צורות גאומטריות.

תרגיל 1

א) $y = 2x + 3$

ב) מתוך הסתכלות בשרטוט, בנקודת החיתוך עם ציר y, התלמידים קוראים את ערך הפרמטר b.

משוואת הישר: $y = 2x + 5$.

ג) מטרת הסעיף היא להשתמש ב"תחושה" של התלמידים ובהבנת הנתונים, כדי להגיע לאומדן טוב. הסעיף מהווה מוטיבציה ללימוד הדרך האלגברית.

באחת מכיתות הניסוי מצאו התלמידים את נקודת החיתוך עם ציר y דרך השיפוע ו"הליכה אחורנית". השיקולים היו: "אם הנקודה (15 , 3) נמצאת על ישר ששיפועו 2, אז אם נלך אחורה יחידה אחת, נצטרך לרדת 2 יחידות ונגיע לנקודה (13 , 2), בדרך זהה נגיע ל- (11 , 1) ואז ל- (9 , 0).

לכן המשוואה היא $y = 2x + 9$.

תרגיל 2

א) 5, הישר יחתוך את ציר ה-y ב- (0,5)

ב) 20–

להלן דוגמה **לשאלת הכנה**, במידה ויש צורך.

איזה מבין המספרים הבאים נרשום במשבצת הריקה $y = 2x + \square$, אם ידוע שהישר עובר דרך (18 , 3)?

3 , 18 , 12 , 15 , 21.

תרגיל 3

אפשר לפתור תרגיל זה בדרך אלגברית (כפי שהוצעה בתרגיל 2), או לשלב הנחת ישר במערכת צירים עם שיקולים אלגבריים.

א) $y = 4x + 8$ ב) $y = 4x - 8$ ג) $y = 4x + 80$

אפשר להוסיף ולשאול על המצב ההדדי של כל הישרים האלה, או לבקש מהתלמידים למצוא את נקודת החיתוך עם הצירים, של כל אחד מהישרים.

יש לשים לב שבסעיף ב' ייתכן ויהיו תלמידים שיטעו ויחשבו ש- (0 , 2) היא נקודת חיתוך עם ציר y וירשמו 2 כ- b, כדאי לדון בשגיאה זו עם הכיתה.

תרגיל 4

א) $y = 3x - 25$ ב) $y = -2x - 1$ ג) $y = -x + 12$ ד) $y = 10x + 50$

את התלמידים המתקשים עדיין, אפשר לכוון להדרכה נוספת כמו בתרגיל 2.

ייתכן שבחלק מהסעיפים יהיו תלמידים שיניחו ישרים ויקראו את המשוואות מהגרף, אך לא תמיד זה נוח (למשל בסעיפים א' וג'), לכן רצוי שיחשבו בדרך האלגברית כפי שהוצגה בתרגיל 2.

תרגיל 5

שיפוע הישר המקביל הוא $\frac{1}{2}$ לכן משוואתו היא מהצורה $y = \frac{1}{2}x + \square$.

מהצבת שיעורי הנקודה בכל אחד הסעיפים, תתקבל משוואת ישר.

א) $y = \frac{1}{2}x$ ב) $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$ ג) $y = \frac{1}{2}x + 3$ ד) $y = \frac{1}{2}x$

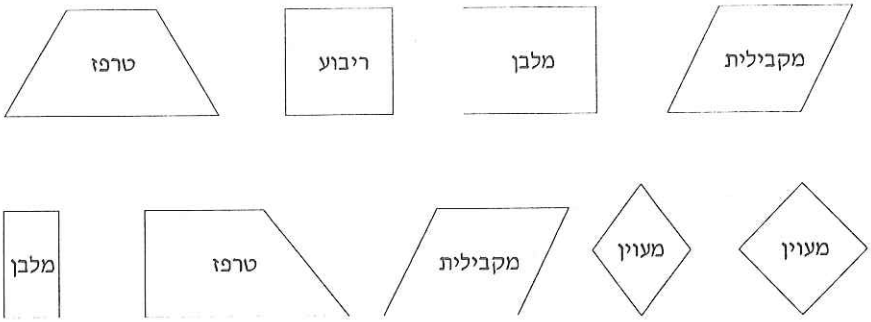
תרגיל 6

המטרה היא להגיע לשרטוט מדגים של מרובעים. תרגיל זה מהווה הכנה להמשך שילוב של צורות גאומטריות עם משוואות ישרים (ולא לשרטוט מדויק) תוך כדי חזרה על חלק מהתכונות שלהם הנדרשות בתרגיל.

השרטוטים הם סקיצות. חשוב לדון עם התלמידים לגבי מספר הפתרונות שיש בכל סעיף, ועל ההבדלים בין סעיף א' לסעיף ב'.

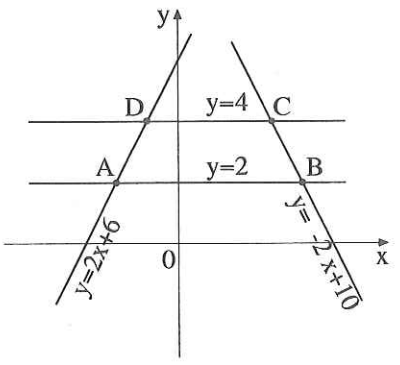
תרגיל 7

גם תרגיל זה, בדומה לתרגיל הקודם, הוא תרגיל הכנה להמשך. ההבדל ביניהם הוא שתרגיל זה דורש זיהוי מרובעים (בהסתמך על חלק מתכונותיהם), בעוד שתרגיל 6 היה תרגיל של יצירה (כלומר שרטוט "סקיצה" של המרובע הנדרש). בתוך המרובעים רשומים השמות, שיש לשער שתלמידים יגידו אותם. אפשר בהחלט להסתפק בשמות אלה.



תרגיל 8

א) זיהוי הישרים וההתאמה בין ההצגות מתבצעת בעזרת שיקולים של השיפוע ונקודת החיתוך עם ציר y.



ב) את שיעורי הנקודות אפשר למצוא במספר דרכים: למשל, על ידי שילוב בין הידע של מציאת נקודות חיתוך (נושא שנלמד בסעיפים הקודמים), עם "ראייה אלגברית" של ישר המקביל לציר x, כקבוצת כל הנקודות המקיימות את התכונה ששיעור y שווה ל. . .). לדוגמה: נקודה A נמצאת על הישר $y = 2$, מכאן, כל נקודה על הישר היא מהצורה $(2, \square)$. נקודה זו נמצאת גם על הישר $y = 2x + 6$, לכן "נחפש" על ישר זה נקודה כזו (כלומר נפתור $2 = 2x + 6$).
בכיתות הניסוי ראינו שהתלמידים המתקשים פתרו תרגיל זה על-ידי הנחה או שרטוט ישרים מתאימים במערכת צירים, וקראו את שיעורי הנקודות מהגרף.

במקרה כזה כדאי להרגיל אותם לבדוק תשובותיהם על ידי הצבה במשוואות.

$A(-2\ ,\ 2)$, $B(4\ ,\ 2)$, $C(3\ ,\ 4)$, $D(-1\ ,\ 4)$

ג) טרפז.

כהכנה להמשך, אפשר לבקש מן התלמידים לחשב את אורכי הבסיסים.

(מתקבל: $AB = 6$, $CD = 4$.)

תרגילים

תרגיל 9

א) $y = 2x + 7$ ב) $y = -5x + 1$ ג) $y = 3x - 12$

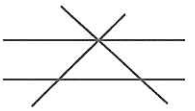
תרגיל 10

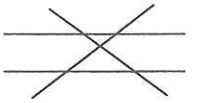
לתרגיל זה תשובות רבות. תלמידים רבים רושמים בחלק מהצלעות ישרים מקבילים לצירים (כמו בתרגיל 8 הנ"ל).

לגיוון אפשר לרשום על הלוח משוואות של שתיים מהצלעות, לדוגמה:

$y = -2x + 5$, $y = x - 1$, ולבקש שירשמו עוד שתי משוואות לשני ישרים נוספים, כך שארבעת הישרים יחד יצרו טרפז או מקבילית.

בסעיף א' התלמידים מציעים זוג משוואות של ישרים מקבילים (כבסיסי הטרפז), וזוג משוואות של ישרים שאינם מקבילים (כשוקי הטרפז). חשוב לבדוק עם התלמידים שאכן מתקבל טרפז מהמשוואות שהציעו, כי ייתכן ונקודת החיתוך של הישרים שאינם מקבילים תהיה "בין" הישרים המקבילים או על אחד מהם, כלומר יתקבל השרטוט שאינו טרפז, כפי שמשורטט להלן.





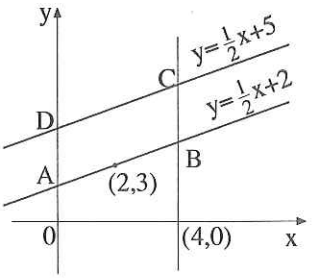
תרגיל 11

א) $y = \frac{1}{2}x + 2$ ב) מקבילית.

ג) כדאי לדון עם התלמידים באסטרטגיות של מציאת שיעורי הנקודות.

$A(0\ ,\ 2)$, $B(4\ ,\ 4)$

$C(4\ ,\ 7)$, $D(0\ ,\ 5)$



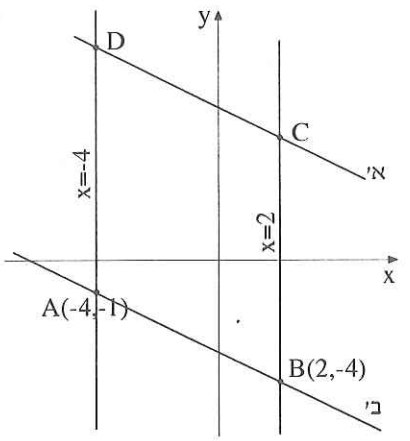
תרגיל 12

תרגיל זה מקשר בין נושאים שונים שנלמדו בסעיפים הקודמים: זיהוי ישרים, הקשר הקרטזי, משוואות של ישרים, נקודות חיתוך ותנאי הקבלה. שרטוט הסקיצה, במערכת צירים ללא שנתות, מהווה סוג של בדיקה לתשובות בסעיפים השונים. כדי להקל בקביעת דרך הפתרון, רצוי לרשום על כל ישר את משוואתו לפני שמתחילים לפתור.

א) $A(-4\ ,\ -1)$, $B(2\ ,-4)$.

ב) $x = -4$, $x = 2$

ג) $D(-4\ ,\ 7)$, $C(2\ ,\ 4)$



תרגיל נוסף לדיון בכיתה

נתונה משוואת הישר: $y = 2x + 2$.

רשום משוואת ישר מקביל לו העובר דרך הנקודה $(22\ ,\ 10)$. מה משמעות התשובה שקיבלת?

תשובה

משוואת המקביל היא $y = 2x + 2$. משמעות התשובה היא שהישר הנתון עצמו עובר דרך הנקודה הנתונה. כלומר, הנקודה $(22\ ,\ 10)$ נמצאת על הישר $y = 2x + 2$.

משוואת ישר דרך שתי נקודות (עמודים 89 - 93 בספר)

בסעיפים הקודמים ראו התלמידים כי, שני נתונים (נקודה ושיפוע או שתי נקודות) קובעים ישר באופן יחיד. בסעיף זה ילמדו לרשום משוואת ישר לפי שתי נקודות, במקרים בהם קשה לקרוא מהגרף את השיפוע ואת נקודת החיתוך עם ציר y. (למשל, כאשר השיפוע הוא מספר "לא נוח" או כשהנקודות הן מחוץ למערכת.)
המהלך הוא: תחילה מחשבים את שיפוע הישר לפי שתי הנקודות הנתונות, לאחר מכן, משתמשים בידע שנרכש בסעיף הקודם (משוואת ישר לפי נקודה ושיפוע), רושמים את משוואת הישר, לפי השיפוע שחישבו ואחת מהנקודות הנתונות.
הגישה לחישוב השיפוע מתבססת על הבנת המושג והסתכלות בגרף (על מערכת משובצת או משרטוט מדגים). משרטטים "מדרגה" המדגימה "הליכה ימינה" ועלייה או ירידה. למעשה, מתקבל משולש ישר זווית, שהניצבים שלו מקבילים לצירים, והיתר שלו הוא קטע הישר בין שתי הנקודות. מחשבים את השיפוע על פי היחס בין גובה המדרגה לרוחבה.
לגישה ויזואלית זו יתרונות רבים:

א. בעזרת "המדרגה" אפשר לפתור כל בעיה בנושא זה.
ב. ה"מדרגה" תשמש לנו להבנה וחישוב של נושאים אחרים, כמו, מרחק בין נקודות ואמצע קטע.
ג. ה"מדרגה" נוחה לשימוש וקלה לזכירה או לשחזור במקרה של שיכחה.
ד. ה"מדרגה" עוקפת את השימוש בנוסחת מנת ההפרשים, כולל כל השגיאות הנגררות ממנה, לדוגמה:
   - מה רושמים כמונה ומה כמכנה.
   - מה פרוש הסמלים y_1 , y_2 וכו'.
   - רישום סדר שונה במונה מזה של המכנה.
   - טעויות חישוב כאשר הנקודות ברביעים שונים, ועוד.

דוגמה לתרגילים בהם כדאי להתחיל, בפתיחת השיעור, כתרגילי חימום וכניסה לנושא

I. ישר עובר דרך הנקודות (2 , 1) , (2 , 0). סמן משפטים נכונים.
   א) שיפוע הישר חיובי.
   ב) שיפוע הישר שלילי.
   ג) שיפוע הישר אפס.
   ד) הישר מקביל לציר y.
   ה) הישר מקביל לציר x.

II. האם שיפוע הישר העובר דרך הנקודות: (1 , 1) , (5 , 7–) הוא חיובי או שלילי?

III. הצע שתי נקודות כך ששיפוע הישר העובר דרכן יהיה:

א) חיובי ב) שלילי ג) אפס.

IV. נתונה הנקודה (1 , 2). הצע שיעורים של נקודה נוספת כך ששיפוע הישר העובר דרכן יהיה:

א) חיובי ב) שלילי ג) אפס.

תרגיל 1

תרגיל זה הוא תרגיל הכנה, בו אפשר לקרוא את השיפוע מתוך השרטוט, כאן ההתקדמות ימינה מנקודה לנקודה היא 1.

א) 3 ב) 4

תרגיל 2

א) ההתקדמות במקביל לציר x היא 1 ובמקביל לציר y היא 10, לכן השיפוע 10.

ב) ההתקדמות במקביל לציר x היא 1 ובמקביל לציר y היא 6, לכן השיפוע 6.

ג) ההתקדמות במקביל לציר x היא 2 ובמקביל לציר y היא 8, לכן השיפוע 4.

תרגילים 3 - 6

בתרגילים אלה לומדים לחשב את השיפוע בעזרת ה"מדרגה".

תחילה (תרגיל 3) בעזרת שרטוט מדויק במערכת צירים. אחר-כך (תרגיל 4) בעזרת שרטוט מדגים נתון. לאחר מכן (תרגיל 5) בעזרת שרטוט מדגים, אותו התלמידים יוצרים אשר שיפועו חיובי. לבסוף (תרגיל 6) בעזרת שרטוט מדגים, שהתלמידים יוצרים, אשר שיפועו שלילי.

תרגיל 3

בתרגיל זה אפשר אמנם לקרוא את השיפוע מתוך השרטוט, אך כדאי לעבוד גם דרך ההגדרה המילולית של השיפוע, הנתונה במסגרת שבסוף התרגיל. כדאי להראות לתלמידים בשרטוט שהתקדמות של 3 ועלייה של 9 (סעיפים ב'-ג') זהה להתקדמות של 1 ועלייה של 3 (סעיף ד').

א) 3 ב) $AC = 3$ ג) $BC = 9$ ד) 3

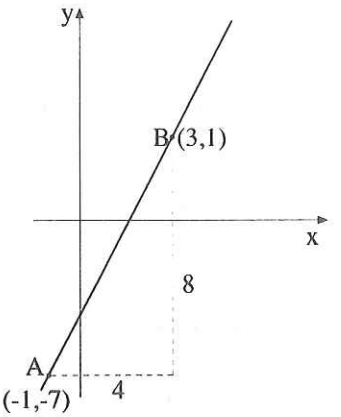
תרגיל 4

בתרגיל זה לא נשאלים על שיעורי C, אך כדאי להדגיש שמציאת השיעורים של C עוזרת בחישוב גובה המדרגה ורוחבה (ישנם תלמידים שיבחינו כי C בעל שיעור x זהה לשיעור x של B ובעל שיעור y זהה לשיעור y של A).

א) $AC = 3$ $BC = 6$ ב) השיפוע 2.

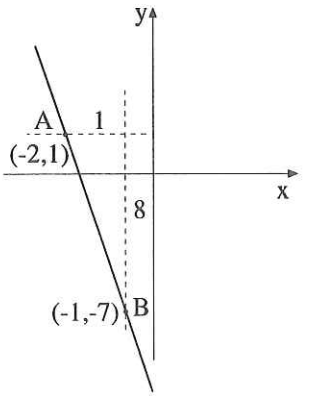
תרגיל 5

רוחב המדרגה 4 , גובה המדרגה 8, לכן השיפוע 2.



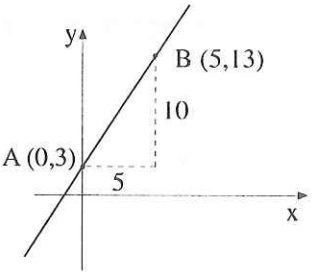
תרגיל 6

רוחב המדרגה 1, גובה המדרגה 8, ומכיוון שיורדים, לכן השיפוע (8 –).



תרגיל 7

בתרגיל זה מוסרת התמיכה, ועל התלמידים לארגן את דרך העבודה, (כלומר, לשרטט שרטוט מדגים, לחשב את גובה המדרגה ורוחבה, ומכאן את השיפוע).



א) רוחב המדרגה 5,
גובה המדרגה 10,
לכן השיפוע 2.

ב) $y = 2x + 3$

דוגמה לתרגילים נוספים (בכיוון ההפוך) שאפשר לשאול תוך כדי מהלך השיעור

I. א) סמן שתי נקודות ברביע הראשון, כך ששיפוע הישר העובר דרכן הוא 3.
ב) רשום את משוואת הישר.

II. כמו תרגיל I, אלא שהנקודות ברביעים שונים.

תרגילים נוספים כאלה בודקים הבנה ויישום של מושג השיפוע, ולכן ערכן רב.

תרגילים

תרגיל 8

א) $\frac{1}{2}$ ב) 3 ג) 2 ד) –2 ה) –4 ו) 2

תרגיל 9

א) 1 ב) $y = x + 3$ ג) $y = x + 5$ ד) $y = x + 30$

תרגיל 10

א) $y = x$ ב) $y = \frac{1}{2}x$ ג) $y = 2x + 13$

תרגיל 11

א) $y = 3x + 6$

ב) ישנן מספר דרכים אפשריות לפתרון:

- לפי הביטוי האלגברי בלבד (אותו מצאו בסעיף א'), על ידי בחירת x כלשהו וחישוב y.
- על ידי ניחוש שיעורי נקודה בשרטוט המדגים, בדיקה בביטוי האלגברי ותיקון, אם נדרש.
- על ידי מציאת החיתוך עם ציר y (מהביטוי האלגברי), שהוא (0 , 6), והתקדמות או נסיגה ממנו על פי השיפוע.

ג) $y = 3x - 4$

ד) בסעיף זה כדאי לקיים דיון בכיתה בשאלות:

- האם בחירת כל שתי נקודות על הישר $y = 3x - 4$ מקיימת את התנאי? (פרט למקרים שנוצרת מקבילית, כלומר שמתקיים AD ∥ BC).
- אילו נקודות "נוחות" לבחירה?
- האם נקודות החיתוך של הישר המקביל עם הצירים, יכולות להיות תשובה לשאלה?

תרגילים נוספים לסיכום הסעיף

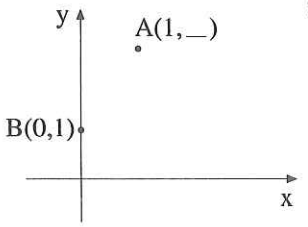
I. אילו משלוש הנקודות הבאות נמצאות על ישר אחד?

א) (0 , 2) , (2 , 4) , (3 , 5)

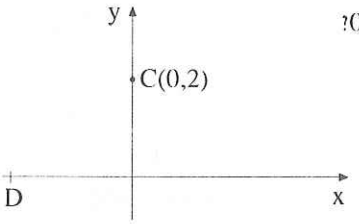
ב) (1 , 1) , (2 , 3) , (10 , 19)

ג) (2 , 1) , (3 , 1) , (4 , 2)

II. מה שיעור y של הנקודה A, אם שיפוע AB הוא 3?



III. מה שיעורי הנקודה D, אם שיפוע CD הוא 0.5?



תשובות לתרגילים הנוספים

I. בתרגיל זה יש מספר דרכים אפשריות לפתרון:
- לבדוק שיפועים בין שני זוגות של נקודות. אם השיפועים זהים אז הנקודות נמצאות על ישר אחד.
- לרשום משוואת ישר שעובר דרך זוג נקודות, ולבדוק אם הנקודה השלישית נמצאת על אותו ישר.

רק הנקודות שבסעיף ב' נמצאות על ישר אחד.

II. פתרון מיידי וקל הוא על ידי שימוש ב"מדרגה" ומשמעות השיפוע.
שיעור y הוא 4.

III. שיעורי הנקודה $(0\ ,\ -4)$.

ישרים מאונכים (עמודים 94 - 100 בספר)

הטיפול בישרים מאונכים מתבצע בשני שלבים:

בשלב הראשון (בסעיף זה) עוסקים במקרה הכללי, כלומר, בישרים שהמשוואה שלהם היא מהצורה $y = ax + b$ כאשר $a \neq 0$.

בשלב השני (בסעיף הבא "עוד על ישרים מאונכים") עוסקים בישרים "מיוחדים", ישרים המקבילים לצירים.

הנושא העיקרי הנלמד בסעיף זה הוא הקשר בין השיפועים של שני ישרים מאונכים. תחילה חוזרים על משמעות המושג "מאונכים", לאחר מכן לומדים על הסימנים של שיפועי ישרים מאונכים, ולבסוף על הערכים שלהם.

כמו בסעיפים קודמים, גם במהלך סעיף זה מופיעים תרגילים המשלבים קשר זה עם צורות גאומטריות.

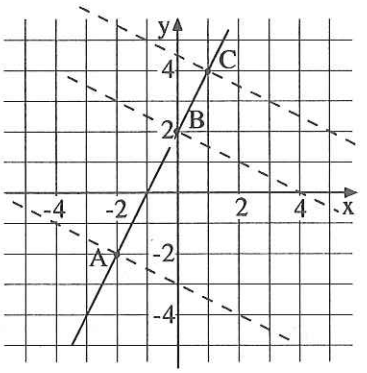
תרגיל 1

מטרת התרגיל היא לחזור על המושג "מאונכים", ולתרגל קריאת שיפועים מתוך גרף, כדי לחוש בקשר בין הערכים והסימנים.

א) שיפוע AB הוא 2 , שיפוע האנך הוא $-\frac{1}{2}$.

ב) הישרים המקווקווים הם ישרים המאונכים לישר המשורטט.

השיפוע של כל אנך כזה הוא $-\frac{1}{2}$.



המסקנה שהתלמידים מגיעים אליה היא: כמו שלישר אחד יש ישרים רבים מקבילים, כך יש לו ישרים רבים מאונכים, ולכל המאונכים האלה יש אותו שיפוע, כי הם מקבילים זה לזה.

תרגילים 2 - 4

בתרגילים אלה לומדים על סימן השיפוע של הישר המאונך. בתרגיל 2 הישרים נתונים בהצגה גרפית, בתרגיל 3 הם נתונים בהצגה אלגברית, ובתרגיל 4 ניתן סיכום במילים.

במהלך הדיון בכיתה, כדאי להשתמש במערכת צירים לא שנתות ולהניח כל פעם ישר ועליו להניח ישר מאונך, כדי להחליט על סימן השיפוע.

תרגיל 2

בסעיפים ב' ו- ג' שיפוע הישר המשורטט - חיובי, ושיפוע האנך לו - שלילי.

בסעיפים א' ו- ד' שיפוע הישר המשורטט - שלילי, ושיפוע האנך לו - חיובי.

תרגיל 3

א) שלילי ב) חיובי ג) שלילי ד) שלילי ה) חיובי ו) חיובי

תרגיל 4

א) אם שיפוע של ישר הוא **חיובי**, אז לישר המאונך לו יש שיפוע **שלילי**.

ב) אם שיפוע של ישר הוא **שלילי**, אז לישר המאונך לו יש שיפוע **חיובי**.

תרגיל 5

תרגיל זה מיועד להבליט את הקשר בין השיפועים, תוך כדי קריאתם מהגרף.

א) (i) -2 ו- $\frac{1}{2}$, (ii) 3 ו- $-\frac{1}{3}$, (iii) 2 ו- $-\frac{1}{2}$.

(iv) 1 ו- -1 , (v) $\frac{2}{3}$ ו- $-\frac{3}{2}$, (vi) $\frac{3}{2}$ ו- $-\frac{2}{3}$.

ב) מתוך זוגות הערכים, בולטת העובדה כי השיפועים של ישרים מאונכים הם הופכיים זה לזה, בערכיהם המוחלטים, וסימניהם מנוגדים.

תרגיל 6

א) זוגות המשוואות שבשני הסעיפים אכן מקיימים את הקשר.

ג) לבדיקה אם הישרים מאונכים אפשר להשתמש באמצעים שונים הנמצאים בידי התלמידים, כמו:

- מדידת הזווית באמצעות מד-זווית.
- בדיקה על-ידי שימוש בקצה של דף.
- בדיקה על-ידי שימוש בסרגל משולש.

תרגיל 7

מטרת התרגיל היא המחשה ויזואלית למה שקורה ל"מדרגות" של ישרים מאונכים. שיפועי הישרים $\frac{1}{2}$ ו- -2.

אפשר גם לבנות כלי עזר, להמחשה ויזואלית של הקשר בין שיפועי שני ישרים מאונכים.

נבנה ערכה של שקפים ברבדים:

הרובד הראשון מערכת צירים משובצת.

על כל אחד מהרבדים השני והשלישי נשרטט ישר, ונסמן עליו את המדרגה של השיפוע. את שני השקפים האלה נחבר בעזרת "וו" לשקף של מערכת הצירים.

תחילה נניח את שני הישרים זה על זה, אחר כך נסובב את השקף האחד עד שיתקבל ישר מאונך לישר שעל השקף השני. התלמידים יוכלו לראות מה קורה לרוחב ולגובה המדרגה כאשר מבצעים את פעולת הסיבוב עד שמתקבלים ישרים מאונכים.

תרגיל 8

א) $-\frac{1}{3}$ (אפשר לבדוק זאת גם בעזרת הגרף).

ב) $-\frac{1}{a}$, בסעיף זה אפשר לציין בנוסף שנקודת המפגש בין שני הישרים היא $(0\ ,\ b)$ שעל ציר y.

אפשר גם לשאול את התלמידים מדוע מציינים ש- $a \neq 0$?

תרגיל 9

מכפלת השיפועים של שני ישרים מאונכים ששיפועם שונה מ- 0 היא 1–.

אנו ממליצים לעבוד עם תיאור הקשר בין שיפועי ישרים מאונכים שהתקבל מתרגילים קודמים (אשר רשום במסגרת הסיכום שבעמוד 98 בספר) ולא ללחוץ לזכור שהמכפלה היא 1– , כי עובדה זו אינה תורמת למשמעות הקשר.

תרגיל 10

א) למציאת שיעורי קודקודי המשולש, התלמידים יכולים להניח ישרים מתאימים, לקרוא את השיעורים מתוך המערכת, ולבדוק במשוואות. לחילופין, אפשר לשרטט משולש מדגים, ולמצוא את שיעורי קודקודיו בדרך אלגברית (כחזרה על מה שלמדו), או בעזרת שיקולים (על ידי ראייה גרפית של המשוואות). לדוגמה: אפשר לראות מהמשוואות כי הישרים AB ו- AC נפגשים בנקודה A ששיעוריה $A(0\ ,\ 2)$. על הישר BC נמצאות כל הנקודות שהשיעור הראשון שלהן הוא 1 לכן מתקבל $B(1\ ,\ 5)$ וכן $C(1\ ,\ 1\frac{2}{3})$.

ב) כדי לקבוע מי קודקוד הזווית הישרה, יש להסתכל על שיפועי הישרים. הישרים AB ו- AC מאונכים, לכן קודקוד הזווית הישרה הוא A.

תרגיל 11

רצוי להיעזר בשרטוט מדגים. תלמידים מתקשים יכולים לשרטט או להניח ישרים מתאימים במערכת צירים.

שיפוע האנך 2–, ולכן משוואתו $y = -2x + ___$.

על ידי הצבת שיעורי הנקודה מגיעים למשוואת האנך $y = -2x + 9$.

תרגילים

תרגיל 12

	שיפוע הישר הנתון	שיפוע הישר המאונך
א)	5	$-\frac{1}{5}$
ב)	-2	$\frac{1}{2}$
ג)	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
ד)	$\frac{1}{8}$	-8
ה)	1	-1

תרגיל 13

משוואת ישר I היא $y = 3x$, משוואת הישר המאונך (ישר II) היא $y = -\frac{1}{3}x$.

תרגיל 14

א) על פי הסתכלות במשוואות, תלמידים יוכלו להבחין שיש זוגות של ישרים מקבילים וזוגות של מאונכים.

למרות שבניסוח התרגיל יש עידוד להסתכל במשוואות בלבד, תלמידים רבים ישרטטו כדי לקבל המחשה ויזואלית, ואכן באחת מכיתות הניסוי תלמידים שרטטו מלבן מדגים, ורשמו על הצלעות משוואות מתאימות והסבירו שמתקבל מרובע שיש בו ארבע זויות ישרות ולכן הוא מלבן.

חשוב לציין ששרטוט המלבן המדגים עזר להם בפתרון סעיף ב'.

ב) קודקודי המלבן: $(-1\ ,\ 6)$, $(7\ ,\ 2)$, $(4\ ,\ -4)$, $(-4\ ,\ 0)$.

תרגיל 15

בכיתות הניסוי ראינו, שתלמידים רבים רשמו משוואות בדרך הבאה: שני ישרים שכל אחד מהם מקביל לאחד הצירים וישר שלישי שחותך אותם. במקרה כזה חשוב לבדוק שאכן מתקבל משולש, ולא מתקיים ששלושת הישרים עוברים דרך אותה נקודה.

תרגיל 16

א) $y = 3x$.

ב) שיפוע הישר הנתון 3, לכן שיפוע הישר המאונך הוא $-\frac{1}{3}$, לפיכך כל הישרים שהם מהצורה $y = -\frac{1}{3}x + \square$ מאונכים לישר שבסעיף א'. לכן משוואת האנך העובר דרך $(0\ ,-4)$ היא $y = -\frac{1}{3}x - 4$.

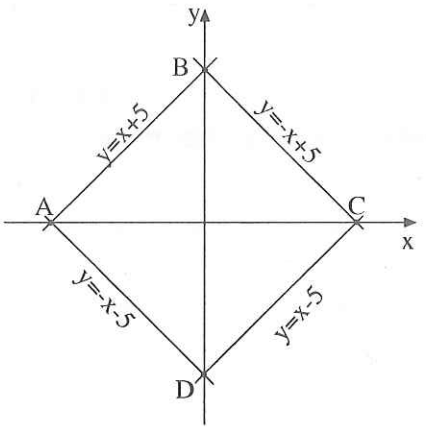
ג) $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

תרגיל 17

א) $y = -x + 5$ ב) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ג) $y = -3x + 9$ ד) $y = 4x - 5$

כדי לחזור על מה שנלמד בסעיפים הקודמים, ולקשר את הידע החדש לקיים אפשר לבחור שתיים מבין משוואות האנכים שבתרגיל, ולשאול באיזו נקודה הם נחתכים.

תרגיל 18



א) $A(-5\ ,\ 0)$, $B(0\ ,\ 5)$

ב) $y = -x + 5$

ג) $C(5\ ,\ 0)$

לפתרון סעיף זה מספר דרכים:

- פתרון אלגברי (כפי שנלמד בסעיפים קודמים).
- על ידי שיקולים, למשל, כיוון ששיפוע האנך 1–, ייתכן שתלמידים יבחינו ש- $OB = OC$, מכאן $OC = 5$.

ד) האנך מ- A הוא $y = -x - 5$,
האנך מ- C הוא $y = x - 5$.

ה) $D(0\ ,\ -5)$

ו) ריבוע ששיטחו 50 יחידות שטח.

דוגמה לדיון נוסף שאפשר לנהל בשאלה זו

מה יקרה למשוואת הישר AB, אם נזיז את A על ציר x כש- B נשמרת?
(תשובה: השיפוע משתנה.)
לחילופין: איזו נקודה תשתנה וכיצד, אם במקום $y = x + 5$ נרשום $y = 2x + 5$?
או נרשום $y = -x + 5$?

תרגילים נוספים

I. נתונה משוואה של ישר: $y = 3x - 4$

א) רשום משוואת ישר מקביל לו העובר דרך (32 , 12). מה קיבלת? הסבר.

ב) רשום משוואת אנך לישר הנתון העובר דרך (32 , 12).

ג) מהי נקודת החיתוך בין המקביל והאנך שמצאת?

II. נתון הישר $y = \frac{1}{2}x + 2$.

א) רשום משוואת אנך לישר הנתון העובר דרך (4 , 2).

ב) רשום משוואת אנך לישר שמצאת בסעיף א' העובר דרך (4 , 2).

תשובות לתרגילים הנוספים

I. א) משוואת המקביל היא $y = 3x - 4$. המשמעות: הישר הנתון עובר דרך הנקודה הנתונה.

ב) משוואת האנך $y = -\frac{1}{3}x + 36$.

ג) נקודת החיתוך של המקביל והאנך היא (32 , 12).

II. א) $y = -2x + 8$ ב) $y = \frac{1}{2}x + 3$

עוד על ישרים מאונכים (עמודים 101 - 107 בספר)

בסעיף זה מטפלים בישרים מאונכים "מיוחדים" - הישרים המקבילים לצירים. כיוון שאין אפשרות להגיע לקשר בין השיפועים, כפי שנלמד בסעיף הקודם (לישרים המקבילים לציר x יש שיפוע 0, ולישרים המקבילים לציר y אין שיפוע) מתבססים על הידע שיש לתלמידים לגבי ישרים אלה. כלומר; ישרים מהצורה $y = b$ מאונכים לישרים מהצורה $x = c$.

בנוסף, לומדים את נושא הישרים המאונכים בהקשרים גאומטריים שונים. למשל, גובה במשולש (תרגילים 4 , 5 ,10), מלבנים ושטחים (תרגילים 6, 8, 9). לימוד הנושא כולל ישרים מאונכים שאינם מקבילים לצירים (עליהם אפשר ליישם את כלל ההופכי ונגדי) וישרים מאונכים המקבילים לצירים.

תרגיל 1

א) שיפוע 0, למעשה כל הישרים המקבילים לציר x שיפועם 0.
אמנם התלמידים עבדו עם משוואות מסוג זה, אך ייתכן שיש להזכיר את המשמעות (כפי שמפורט בתרגיל 2).
$y = 3$ פירושו: קבוצת כל הנקודות שהשיעור השני שלהן 3. על ידי סימון מספר נקודות כאלה במערכת צירים מתקבל הגרף.
ב) $x = 2$.

תרגיל 2

ב) $y = 2$ ג) $x = 5$ ד) $x = -1$, $y = -3$

אפשר להוסיף ולשאול איזה מרובע כולאים ארבעת הישרים, ולבקש לחשב את שטחו ואת היקפו.

תרגיל 3

התרגיל עוסק בכל המקרים האפשריים של ישרים מאונכים. מטרתו להגיע למסקנות שיאפשרו לזהות "מאונכות" באופן ישיר מהביטויים האלגבריים, מבלי לשרטט.

א) מאונכים ב) מקבילים ג) נחתכים ואינם מאונכים ד) מקבילים
ה) נחתכים ואינם מאונכים ו) מאונכים (אלו הם, למעשה, שני הצירים).

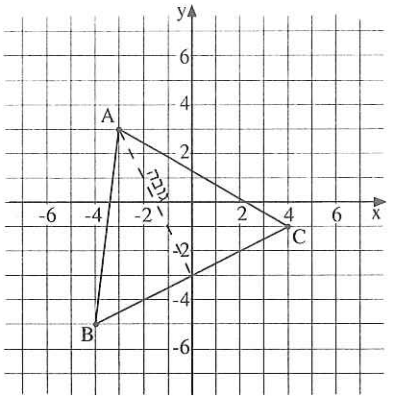
תרגיל 4

מטרת התרגיל היא לראות את נושא המאונכים בהקשר של גובה במשולש.

א) $\frac{1}{2}$

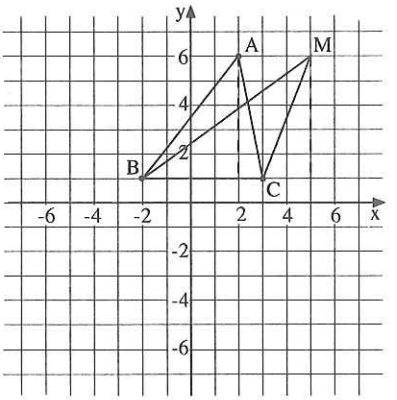
ב) -2

ג) $y = -2x - 3$



תרגיל 5

א)



ב) $x = 2$ ג) $x = 5$

בדיון נוסף אפשר לשאול:

- מה תוכלו לומר על שטחי המשולשים ABC ו- MBC ?
- היכן יימצא הקודקוד D של משולש DBC, אם משוואת הגובה היא $x = -1$? ואם משוואת הגובה $x = -5$?
- מה יהיו שיעורי הקודקוד E של משולש EBC ששטחו שווה לשטח המשולש ABC, ומשוואת הגובה שלו היא $x = 0$?

שאלות מסוג זה מקשרות "קצוות" שונים של מה שנלמד עד כה, ולא רק את הנושא ישרים מאונכים.

תרגיל 6

ב) משוואות האנכים: $y = 2$ ו- $y = -3$.

ג) שטח המלבן 35 משבצות.

תרגיל 7

ישרים מקבילים בסעיפים א' , ד' , ה'.

ישרים מאונכים בסעיפים ב' , ו' , ז'.

ישרים שאינם מקבילים ואינם מאונכים בסעיפים ג' , ח'.

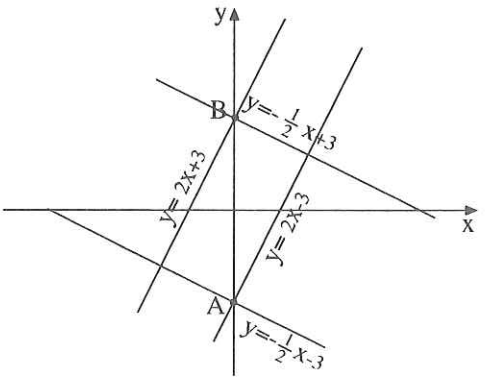
חשוב לשמוע את הנימוקים של התלמידים, מדוע הישרים שבסעיפים ג' ו- ח' אינם מאונכים ואינם מקבילים.

תרגיל 8

חשוב להרגיל את התלמידים לרשום בשרטוט המדגים, על כל ישר את המשוואה המתאימה לו, כי אז קל להם להתמקד במה שנדרש.

א) משוואות האנכים:

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \quad , \quad y = -\frac{1}{2}x - 3$$



ב) מלבן.

תרגיל 9

$A(-2\ ,\ -1)$, $B(1\ ,\ 2)$

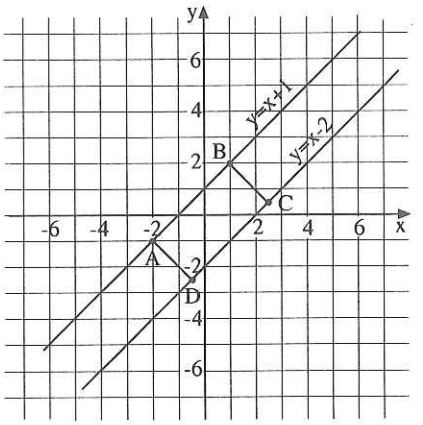
א) אם השלמת שיעורי הנקודות נעשית מתוך קריאה מהגרף, רצוי לבקש מהתלמידים לבדוק על-ידי הצבה במשוואות.

ב) בסעיף זה משלבים ידע גאומטרי עם מה שנלמד בסעיפים הקודמים.

$C(2.5\ ,\ 0.5)$, $D(-0.5\ ,\ -2.5)$.

אפשר להגיע לשיעורי הנקודות C ו- D במספר דרכים:

- על ידי התקדמות לפי שיפוע האנך.
- על ידי שרטוט הישר המאונך לפי שיפוע ונקודה, וקריאת שיעורי נקודת החיתוך מהגרף.
- בדרך אלגברית, על-ידי רישום משוואת האנך (לפי נקודה ושיפוע) ומציאת נקודת החיתוך על-ידי פתרון מערכת המשוואות המתאימה.



אפשר לשרטט מלבן אחד, כי מנקודה על ישר אפשר להעביר אנך אחד לישר.

משוואות הצלעות: $BC:\ y = -x + 3$

$AD:\ y = -x - 3$

ג) על ידי בחירת זוגות שונים של נקודות E ו- F, מקבלים את התחושה שיש אינסוף מקבילות.

ד) חשוב לקיים דיון עם התלמידים כיצד לקבוע את אמיתות הפסוקים. המטרה היא לדון בשיקולים, ולא לחשב במדויק את ההיקף או את השטח של המרובעים שהתקבלו.

- שטח המלבן שווה לשטח המקבילית המשורטטת, כי לכולן צלע AB וגובה שהוא המרחק בין המקבילים.
- היקף המלבן קטן מההיקף של כל אחת מהמקבילות האחרות.

תרגיל 10

א) $x = 2$ ב) $y = 4$ ג) $y = 4x - 5$

תרגיל 11

התרגיל משלב נושאים רבים שדנו בהם בסעיפים הקודמים, כאשר משוואות הישרים נתונות חלקן בצורה מפורשת וחלקן לא. הנושאים הם: ישרים מקבילים, מאונכים, נחתכים, וישרים שעוברים דרך נקודה נתונה.
מתקבל: "הכל טוב!"

תרגיל 12

א) ריבוע. קודקודיו: $(-2 , 0)$, $(0 , -2)$, $(2 , 0)$, $(0 , 2)$.

ב) טרפז. קודקודיו: $(3 , 7)$, $(5 , -5)$, $(5 , 5)$, $(-7 , 3)$.

ג) מקבילית. קודקודיה: $(-0.5 , 0.5)$, $(0.5 , -0.5)$, $(1 , 1)$, $(0 , 2)$.

פרק ג'- שיקוף, סימטריה ואמצע קטע

(עמודים 108– 134 בספר)

בפרק זה מטפלים בסימטריה של נקודות, ישרים וצורות ביחס לישר. המטרה העיקרית היא להגיע לחישוב אמצע קטע.

למה סימטריה

נושא הסימטריה אינו נושא בתכנית הלימודים של הגאומטריה האנליטית, אך ההתעסקות בו מהווה פתיחה מעניינת לנושא אמצע קטע, והזדמנות נוספת לשילוב גאומטריה במערכת צירים. בנוסף, נושא הסימטריה מחזק מושגים שונים בגאומטריה, כמו: קטע אמצעים במשולש, התיכון במשולש ותכונת האלכסונים במקבילית.

אם אין זמן, אפשר לדלג על חלק מהתרגילים בסעיף זה.

ציר סימטריה (עמודים 108 - 118 בספר)

בסעיף זה מכירים את פעולת השיקוף בישר. ישר השיקוף (שהוא גם קו הקיפול) הוא ציר הסימטריה של הצורה ושיקופה.

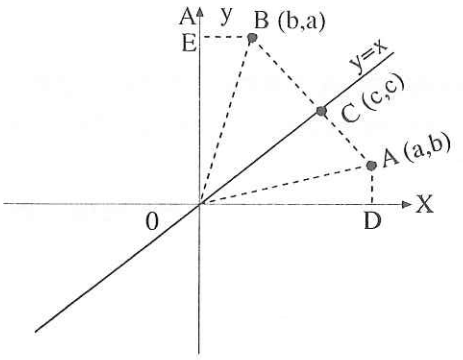
מהלך הסעיף: תחילה מסמנים נקודות סימטריות לגבי ישר (תרגיל 1), משלימים לצורות סימטריות (תרגילים 2 - 4, 6 בהם נעזרים בנייר נקודות, בדף משבצות או בקיפול) ובודקים כמה צירי סימטריה יש לצורות נתונות (תרגיל 5).

בשלב השני, במערכת צירים, משקפים ישרים ופרבולות בציר x, ורושמים משוואות מתאימות.

ברוב הפעילויות התלמידים יכולים לבדוק את תשובותיהם על ידי קיפול, ולנמקן גם בעזרת שיקולים.

למורים בלבד

שתי נקודות A ו- B נקראות סימטריות לגבי ישר l, אם הישר l הוא אנך אמצעי של הקטע AB.
הישר l נקרא "ציר הסימטריה של AB".
למשל: הנקודות A(a , b) ו- B(b , a)
סימטריות זו לזו לגבי הישר y = x.
יש להוכיח שישר זה הוא אנך אמצעי לקטע AB.



הוכחה בעזרת הגאומטריה האנליטית

קודם מראים ששיפוע OC הוא 1,

שיפוע הקטע AB הוא $\frac{a-b}{b-a} = -1$

לכן OC ו- AB מאונכים.

אחר כך מראים שהמרחק בין (a , b) ל- (c , c) שווה למרחק בין (b , a) ל- (c , c).

הוכחה גאומטרית

תחילה מוכיחים ש- $\Delta OEB \cong \Delta ODA$ לפי צ . ז . צ.

$(\sphericalangle E = \sphericalangle D = 90^\circ , AD = EB = b , OD = OE = a)$.

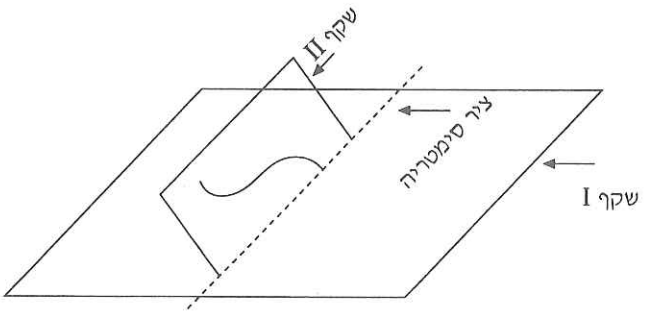
אחר כך מוכיחים ש- $\Delta OBC \cong \Delta OAC$ לפי צ . ז . צ.

$(\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2 , OC = OC , OA = OB)$.

מכאן: $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$, לכן $OC \perp AB$ וכן $BC = CA$, כלומר, OC הוא אנך אמצעי לקטע AB.

עם התלמידים אין צורך להגיע להוכחה, אלא לדבר על "קו קיפול" או "מראה".

אפשר להדגים לתלמידים, באמצעות שקפים, כיצד לשרטט צורות סימטריות, באופן הבא:
משתמשים בשתי שכבות של שקפים (או בדף מחברת ודף שקוף) המחוברים בדבק שקוף לאורך ציר הסימטריה, על פי התרשים הבא.



על רובד הבסיס משורטטת הצורה.
מעתיקים אותה על הדף השקוף (או על שקף II) המחובר לאורך ציר הסימטריה, ומקפלים לכיוון השני.

תרגיל 1

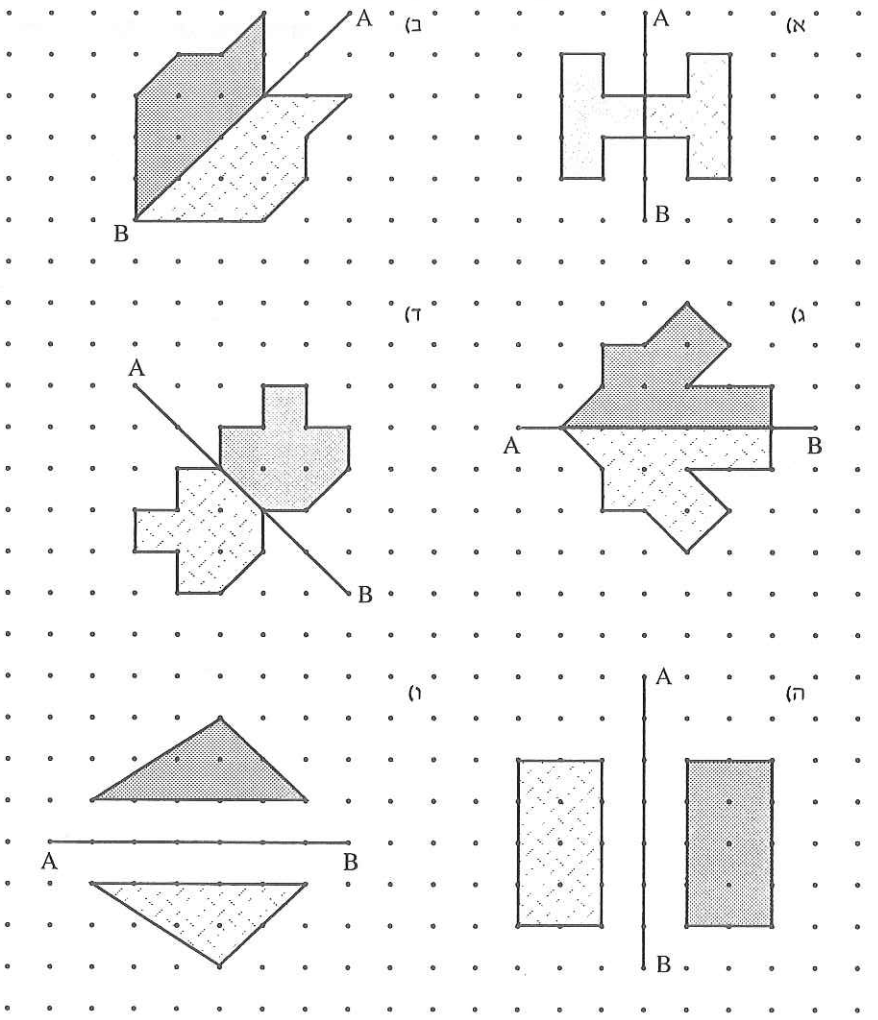
בעזרת קיפול אפשר לגלות שקו הקיפול הוא ישר השיקוף.
ציר הסימטריה ("המראה") הוא למעשה, האנך האמצעי לקטעי 'MM.
הנקודות M ו- 'M סימטריות זו לזו לגבי ישר זה.





תרגיל 2

מטרת נייר הנקודות שבתרגיל היא לעזור לתלמידים לגלות נקודות סימטריות לנקודות שמהן מורכבת הצורה שבשרטוט, ובכך לגלות את הצורה כולה. אם התלמידים שוגים בשרטוט הצורה הסימטרית, הם יכולים לבדוק את תשובותיהם בעזרת קיפול. לתלמידים שמתקשים בשרטוט הצורה הסימטרית אפשר להמליץ להיעזר בהעתקת הצורה על דף שקוף, לקפל ולשרטט.

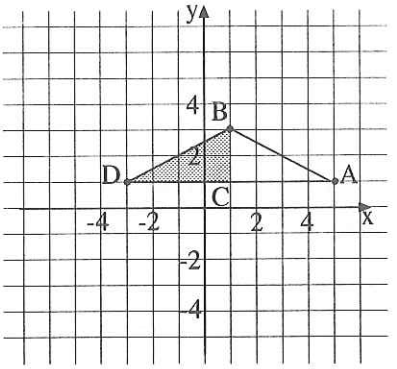


תרגיל 3

תרגיל זה עוסק בסימטריה של צורות גאומטריות בתוך מערכת צירים, ומקשר בין הייצוגים הגרפי והאלגברי. אם התלמידים מתקשים, אפשר להדריך אותם להעתיק את המשולש ABC על דף שקוף, ולקפל בכל פעם לפי הציר המבוקש. זו יכולה להיות גם דרך לבדיקת התשובות ולקריאה של שיעורי הנקודה F (בקירוב) שבסעיף ג'.

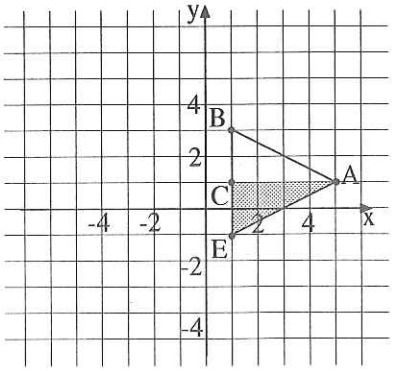
א) D(–3 , 1)

המשולש DBA הוא שווה שוקיים (DB = BA).



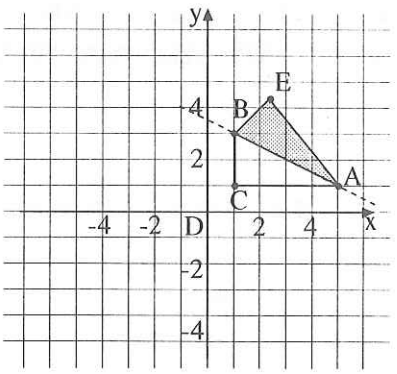
ב) E(1 , –1)

המשולש EBA הוא שווה שוקיים (EA = BA).



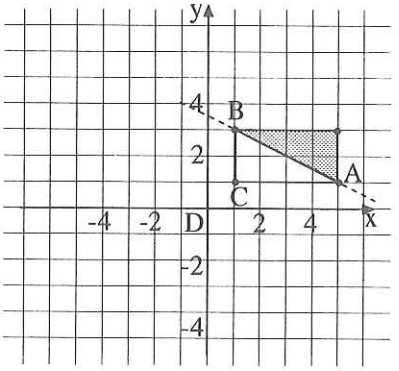
ג) F(2.6 , 4.2)

המרובע שמתקבל הוא דלתון AF = AC ו- BC = BF.



בכיתות הניסוי ראינו כי בסעיף זה התלמידים התקשו בשרטוט או בזיהוי הצורה, חלק שרטטו מרובע נכון אך התקשו בקריאת שמו, וחלק שרטטו מלבן (כפי שמתואר בשרטוט השגוי שלהלן) ולא שמו לב לציר הסימטריה.

שרטוט שגוי



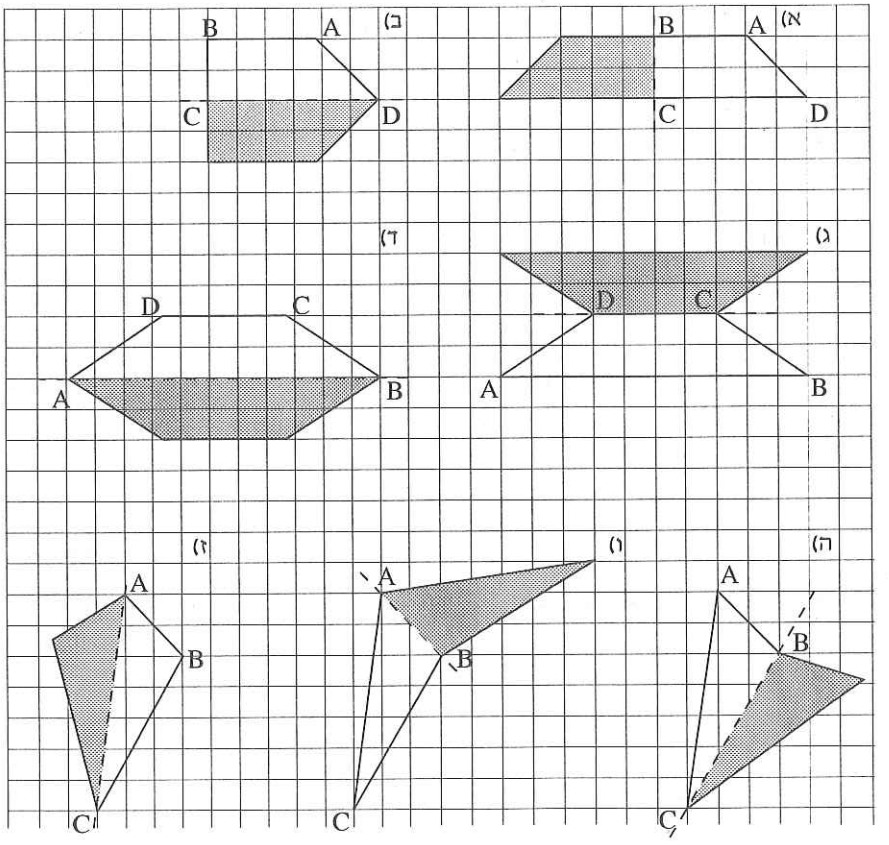
תרגיל 4

בתרגיל זה, בדומה לתרגיל 2, משרטטים שיקופים של צורות נתונות, אלא שהפעם נעזרים במשבצות.

לתלמידים המתקשים בשרטוט השיקוף (במיוחד בצורות ה', ו', ז') אפשר להמליץ להיעזר בשרטוט הצורה על דף שקוף והעתקתה.

צורה א' - טרפז שווה שוקיים. צורה ב' - מחומש. צורות ג' ו- ד' - משושה. צורות ה', ו' ו- ז' - דלתון (תלמידים יכולים להגיד מרובע ובשלב זה אפשר לקבל תשובה זו).

אפשר לדון עם התלמידים בקשר בין מספר צלעות הצורה המשתקפת, לבין מספר הצלעות של שתי הצורות גם יחד - הצורה ושיקופה (ראה למשל תרגיל 6).



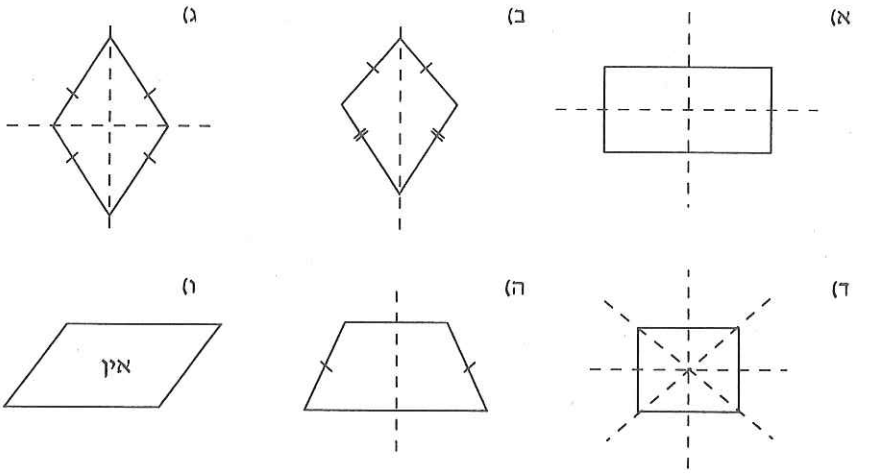
תרגיל 5

בתרגיל קודם התלמידים השלימו צורות, כאשר היה נתון חלק מהצורה הנמצא מצד אחד של ציר הסימטריה. המטרה בתרגיל זה לשרטט את ציר הסימטריה (אם הוא קיים) של צורה הנתונה בשלמותה.

במהלך הדיון בכיתה, כדאי להביא צורות סימטריות ולהדגים את הסימטריה על ידי קיפול.

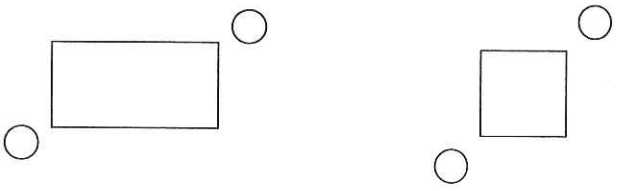
כדאי גם לדון במספר צירי הסימטריה שיש לצורות שונות.

הקווים המרוסקים שבשרטוטים להלן, הם צירי הסימטריה של הצורות. חשוב לציין, כי תלמידים רבים שוגים בסעיף ו' ומשרטטים את האלכסון כציר סימטריה. הדרך הפשוטה לשכנוע היא לשרטט מקבילית, לקפל סביב האלכסון ולראות מה קורה.



תרגילים נוספים

I. אפשר לתת צורות נוספות, מורכבות יותר, ולבדוק אם יש להן ציר סימטריה למשל:



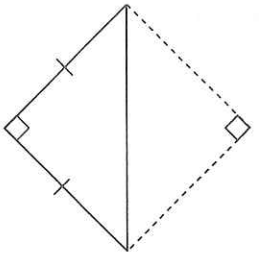
II. אפשר לבקש מהתלמידים לשרטט צורה שיש לה 6 צירי סימטריה.

תרגיל 6

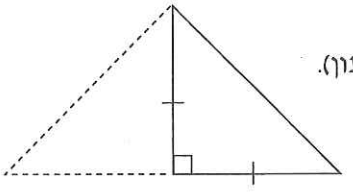
מטרת התרגיל היא לראות שאם משקפים משולש כל פעם בצלע שונה, מתקבלות צורות שונות.

אפשר לדון עם התלמידים בשאלה כיצד יודעים מה מתקבל?

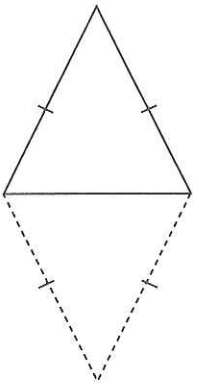
א) ריבוע.



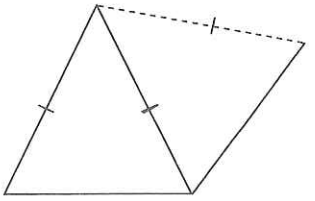
ב) משולש ישר זווית ושווה שוקיים
(הניצבים השווים הם היתר של המשולש הנתון).



ג) מעוין, כי מתקבלת מקבילית שצלעותיה שוות.



ד) דלתון.
כדאי בשלב זה לנתח גאומטרית את הצורה,
כדי שהתשובה לא תהיה מרובע.



פעילות במחשבון גרפי או במחשב - פעילות 3

(עמודים 177 - 179 או 185 - 187 בספר)

בפעילות זו ארבע משימות והיא עוסקת בשיקוף וסימטריה של ישרים ופרבולות בציר x. כדי לקבל את השרטוט המתאים, אפשר להיעזר בסקיצה במחברת, אפשר גם להניח ישר או פרבולה שקופה במערכת צירים לפי הדרישות, ואחר-כך לרשום את המשוואה. רישום המשוואה מאפשר העתקת גרף הפונקציה למסך המחשבון (או המחשב).

1. במשימה זו עוסקים בשרטוט ישרים סימטריים על מסך המחשבון ובהילוך על הגרף בעזרת המקש TRACE.

2. במשימה זו מתרגלים את הרעיון של משימה 1 לגבי ישר שאינו עובר דרך הראשית. תחילה משרטטים את הישר הסימטרי (בעזרת רישום משוואה מתאימה) ואחר כך מחפשים קשר בין הנקודות שעל שני הישרים, על-ידי ההילוך על הגרפים.

3. משימה זו עוסקת בשיקוף פרבולה בציר x, ובדיקת הקשר בין הנקודות שעל הפרבולה ושיקופה.
   הילוך על הגרף מאפשר קריאת שיעורי נקודות במקום חישובן האלגברי (במידה ותלמידים שכחו).

4. במשימה זו מתרגלים את הרעיון של משימה 3 בארבע פונקציות ריבועיות שונות. בסיומה אפשר לדון בצירי הסימטריה של זוג פרבולות הסימטריות זו לזו בציר x. וכן לשאול את התלמידים אם יש ישרים שהם סימטריים לעצמם לגבי ציר x, ומה משוואותיהם.

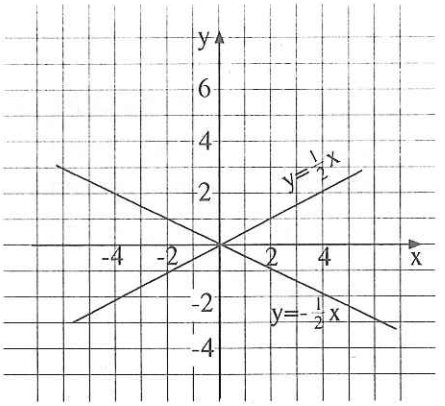
עד כה (פרט לתרגיל 3) התלמידים שרטטו שיקופים של צורות, או שרטטו צירי סימטריה של צורות נתונות. התרגילים הבאים בסעיף זה בספר, עוסקים בשיקופים של ישרים ושל פרבולות בתוך מערכת צירים, (כלומר, בשרטוט וברישום משוואות מתאימות). תחילה משרטטים את השיקוף, רושמים את המשוואה, ורק אחר כך בודקים נקודתית את הקשר בין הצורה ושיקופה.

תרגיל 7

א) $y = \frac{1}{2}x$

ב) $y = -\frac{1}{2}x$

ג) $(4\ ,\ 2)$, $(4\ ,\ -2)$



תרגיל 8

א) $y = x + 2$

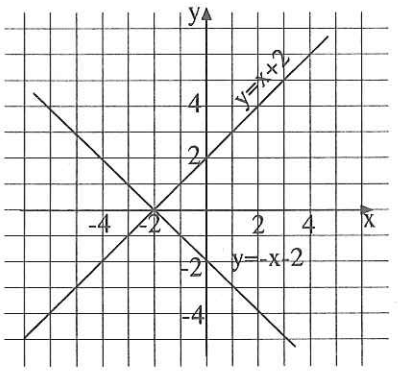
ב) $y = -x - 2$

ג) $(4\ ,\ 6)$, $(4\ ,\ -6)$

נקודות החיתוך עם ציר y:

$(0\ ,\ 2)$, $(0\ ,\ -2)$

עם ציר x: $(0\ ,\ -2)$



בסיום תרגילים 7 - 8 כדאי לערוך דיון בכיתה ולשאול, למשל:

- אילו נקודות אינן משתנות כאשר משקפים ישר בציר x?
- למה בתרגיל 7 הישרים אינם מאונכים ובתרגיל 8 הם כן מאונכים.

תשובה

כאשר משקפים ישר בציר x, הנקודה שאינה משתנה, כלומר נשארת קבועה היא הנקודה המשותפת לציר x ולישר, (אם יש כזו).

בסיום הדיון אפשר לתת **תרגיל אתגר** למתקדמים: לנסות למצוא את השיקוף של ישר בציר x בדרך אלגברית ורק אחר כך לבדוק בשרטוט.

בדיון בפתרון תרגיל האתגר אפשר לנתח, בדרך אנליטית, את הממצאים שהתקבלו עד כה. למשל:

- שיפועי הישרים הם מספרים נגדיים
- בנקודות החיתוך עם ציר y של הישרים הסימטריים, שיעור ה- y של נקודות אלה חייב להיות נגדי בגלל הסימטריה.

מכאן, בעזרת השיפוע ונקודת החיתוך עם ציר y אפשר לרשום את המשוואה של ישר השיקוף.

אפשר גם להתחיל מטיפול נקודתי ולהכליל. למשל, הנקודה הסימטרית בציר x לנקודה (x , y) היא $(x , -y)$, לכן אם משוואת הישר שמשקפים היא $y = ax + b$, אז משוואת ישר השיקוף היא $-y = ax + b$ (או: $y = -ax - b$).

תרגיל 9

בתרגיל זה עוסקים בשיקוף פרבולה בציר x. כמו בתרגילים הקודמים גם כאן מתחילים משיקוף כל הפרבולה, ורק אחר כך מטפלים בנקודות.

א) את משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה ושיעורי קודקוד הפרבולה אפשר לקרוא מתוך הגרף, ולראות את הקשר בין שיעורי הקודקוד לציר הסימטריה של הפרבולה.

משוואת ציר הסימטריה: $x = 1$, שיעורי הקודקוד: $(2- , 1)$.

ב) משוואת פרבולת השיקוף: $y = -x^2 + 4x$. שיעורי הקודקוד שלה: $(2 , 1)$.

ג) נקודות החיתוך זהות: $(0 , 0)$, $(0 , 0)$, $(2 , 0)$, אלו הן הנקודות שעל ישר הקיפול והן נשארות קבועות.

ד) $(3 , 6)$, $(3- , 6-)$ סימטריות בציר x.

תרגילים

תרגיל 10

$(1- , 3-)$, סימטרית ל- $(1- , 3-)$. $(4 , 5)$, סימטרית ל- $(5- , 4-)$.

$(1- , 3-)$, (סימטרית ל- $(1 , 3-)$. $(4- , 5)$, סימטרית ל- $(4 , 5-)$.

$(0 , 8)$, סימטרית ל- $(8- , 0)$. $(0 , 2-)$, סימטרית ל- $(0 , 2-)$.

תרגיל 11

א) $x = 1$ ב) $y = 1$ ג) $x = 1\frac{1}{2}$ ד) $y = x$

תרגיל 12

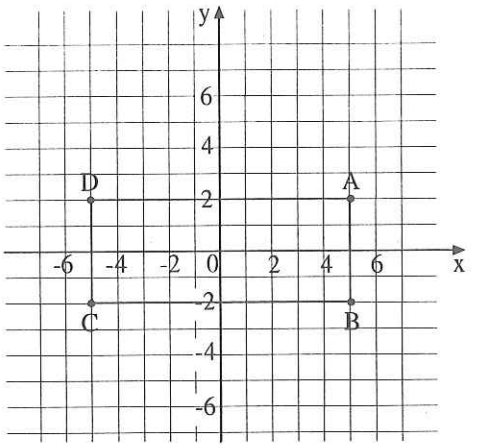
נתונה הנקודה A(5 , 2).

ב) B(5 , –2)

ג) C(–5 , –2)

ד) D(–5 , 2)

ה) מתקבל מלבן שהיקפו 28 יחידות ושטחו 40 משבצות.



תרגיל 13

בתרגיל זה משולבים שני ייצוגים של ציר הסימטריה - האלגברי והגאומטרי. מהבחינה הגאומטרית, התלמיד צריך לשרטט את הציר, ומהבחינה האלגברית, לחפש משוואה של ישר.

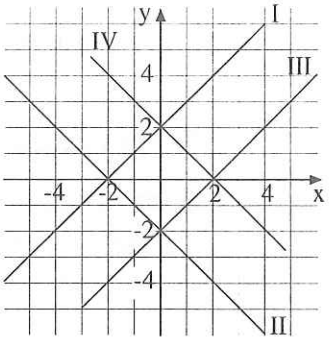
א) לכל אחת מהצורות יש ציר סימטריה אחד, אפשר לגלות אותו מניתוח גאומטרי של הצורה.

אם התלמידים לא מצליחים למצוא את ציר הסימטריה, אפשר להמליץ להם להעתיק את הצורה ולקפל. לאחר שהתלמידים משרטטים את ציר הסימטריה, הם יכולים לרשום את המשוואה שלו מתוך קריאה מהשרטוט ולבדוק.

(i) $y = x$ (ii) $y = x + 4$ (iii) $y = 2$ (iv) $y = x + 1$

ב) בדרך כלל התשובה המתקבלת היא מרובעים. כדאי לנתח גאומטרית שוב את הצורות כדי להגיע לדלתון, כאן יכולה להיות הפתעה של "קעירות" ו"קמירות" של הצורה ואפשר לדון בכך.

תרגיל 14



הישר I הוא $y = x + 2$.

א) הישר II הוא $y = -x - 2$.

ב) הישר III הוא $y = x - 2$.

ג) הישר IV הוא $y = -x + 2$.

ד) הצורה שהתקבלה היא ריבוע, שטחה - 8 משבצות.

צורה זו חוזרת בהקשרים שונים במהלך הלימוד. הנימוק מדוע מתקבל ריבוע משתנה בהתאם למה שלמדו התלמידים. בכיתות הניסוי תלמידים בדקו שיפועים, והשתמשו באינטואיציה כדי לקבוע שהאורכים שווים.
היו תלמידים שנימקו: "כי כל ישר עם הצירים יוצר משולש ישר זווית ושווה שוקיים, וארבעת המשולשים האלה חופפים ולכן מתקבל ריבוע."

את התשובה לשטח הריבוע היו תלמידים שקראו מתוך השרטוט, חלק חישבו בעזרת התבנית לשטח מרובע שאלכסוניו מאונכים. אחרים חישבו שטח של משולש אחד וכפלו ב- 2 או ב- 4, לפי המשולש שבחרו.

תרגיל 15

הצורות הסימטריות לגבי ציר x הן ב', ג', ד'.

הצורות הסימטריות לגבי ציר y הן א', ג', ד'.

בדיון עם התלמידים אפשר להגיע למסקנה שלמעגל שבשרטוט יש אינסוף צירי סימטריה, שהם כל הישרים שעוברים דרך הראשית (כלומר בנוסף לצירים גם כל הישרים מהצורה $y = ax$).

לריבוע שבשרטוט יש שני צירי סימטריה נוספים והם הישרים $y = x$ ו- $y = -x$.

אפשר גם לשאול, כיצד תשתנה התשובה אם:

- נעשה שיקוף בציר x של כל אחת מהצורות?
- נעשה שיקוף בציר y של כל אחת מהצורות?

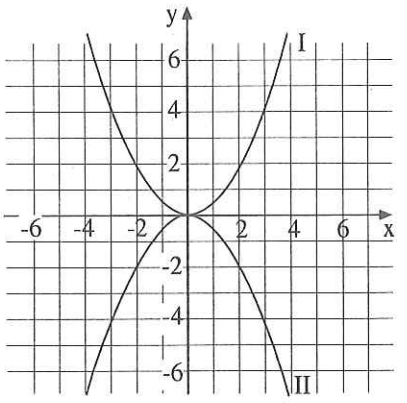
עם תלמידים מתקדמים אפשר להגיע למסקנות כלליות, כמו למשל: צורה שסימטרית בציר x, שיקופה באותו ציר משאיר אותה כמו שהיא, ואילו משיקופה בציר y מתקבלת צורה שגם היא סימטרית בציר x.

אפשר להיעזר בצורות המשורטטות על שקפים כדי לבדוק נכונות התשובות.

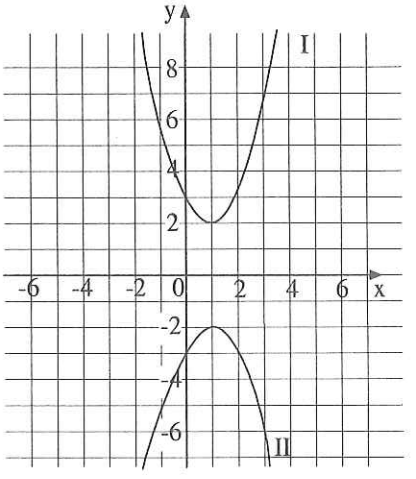
תרגיל 16

תרגיל זה עוסק בשיקוף פרבולות בציר x ורישום משוואת ציר הסימטריה שלהן.
גם תלמידים שלא למדו על הפונקציה הריבועית, או לא זוכרים, יכולים לזהות את ציר הסימטריה של הפרבולה מבלי לדעת את משוואתה.
עם תלמידים אלה אפשר לדלג על הקטע של רישום משוואת פרבולת השיקוף.
אם יש תלמידים שמתקשים בשרטוט פרבולת השיקוף, אפשר להמליץ להם להעתיק את הפרבולות על דף שקוף וליצור שיקופים מתאימים.
בכל השרטוטים שלהלן פרבולה I היא הפרבולה הנתונה, ופרבולה II היא שיקוף של I בציר x.

א) משוואת פרבולה II: $y = -\frac{1}{2}x^2$.
ציר הסימטריה של שתיהן:
$x = 0$ (ציר y).



ב) משוואת פרבולה II: $y = -x^2 - 3$.
ציר הסימטריה של שתיהן:
$x = 0$ (ציר y).

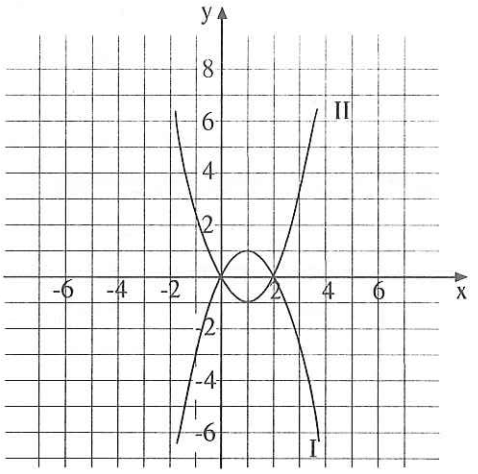


ג) משוואת פרבולה II:

$y = x^2 - 2x$.

ציר הסימטריה של שתיהן:

$x = 1$.

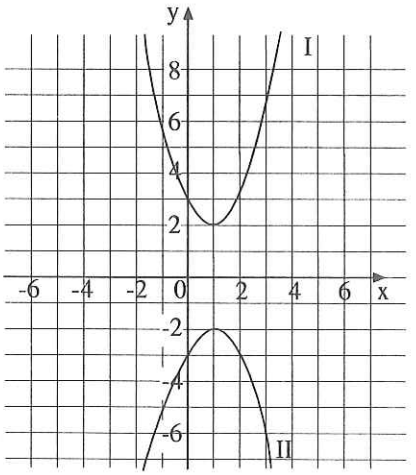


ד) משוואת פרבולה II:

$y = -x^2 + 2x - 3$.

ציר הסימטריה של שתיהן:

$x = 1$.



בסיכום הסעיף אפשר לדון עם התלמידים ולהגיע למסקנה, כי בפרבולות מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ ציר הסימטריה לא משתנה אם מזיזים את הפרבולה למעלה או למטה או אם משקפים אותה בציר x.

מהלך הסעיף:

בשלב הראשון מוצאים אמצעי קטעים הנמצאים על ישרים מקבילים לצירים: מתבססים על ספירה וקריאה מהמערכת. הספירה מלווה אותנו לאורך כל הדרך. עם מספרים גדולים משתמשים בשרטוט מדגים ושיקולי מרחק (ללא צורך להשתמש בנוסחה).

בשלב השני מטפלים בקטעים שאינם מקבילים לצירים - אמצעי קטעים כאלה מחשבים בעזרת שרטוט משולש ישר זווית שניצבים מקבילים לצירים ומציאת אמצעי הניצבים. כמו בשלב הראשון גם כאן מחשבים תחילה אמצע קטע, על-ידי הסתכלות וקריאה מתוך המערכת, ואז מגיעים להכללה ולדרך החישוב.

בשלב השלישי משלבים "גאומטריה במערכת צירים" - מוצאים משוואת אנך אמצעי לקטע, ותכונות קטע אמצעים במשולש.

תרגיל 1

תרגיל זה מקשר את נושא הסימטריה, שנלמד בסעיף הקודם, לנושא אמצע קטע. נקודת האמצע היא הנקודה המחלקת קטע לשני חלקים שווים באורכם, והיא למעשה, נקודת החיתוך בין הישר עליו מונח הקטע, ובין הישר ששתי נקודות קצה הקטע סימטריות לגביו (ציר הסימטריה של שתי נקודות קצות הקטע).

ב) $y = 2$

ג) $(2\ ,\ -3)$, נקודה זו נמצאת באמצע הקטע AB.

השאלה מה מקומה של הנקודה על AB, מזמינה תשובה טיפוסית: על הקטע ועל הציר. חשוב לחדד ולשאול לגבי מרחק הנקודה מקצות הקטע, במקרה זה הערכת המרחק די אינטואיטיבית.

אם תלמידים מעירים שהישר, ששרטטו בסעיף ב', הוא האנך האמצעי לקטע AB, אפשר לקבל תשובה זו אך לא כדאי להרחיב את הדיון בכך.

תרגיל 2

בתרגיל זה משתמשים בפעם הראשונה במושג "אמצע קטע" מבלי להציגו רשמית. מושג זה נובע מהפעילות שנעשתה בתרגיל קודם.

כל הקטעים בתרגיל זה מקבילים לציר x. התלמידים קוראים את שיעורי אמצע הקטע מהשרטוט, ומגיעים בעצמם למסקנה שלנקודת האמצע יהיה אותו שיעור y.

בסעיף II לא ניתן להשתמש בקריאת שיעורי אמצע הקטע מתוך השרטוט, ולכן יש צורך בחישוב. בכיתות הניסוי ראינו שבחישוב שיעור x התלמידים הוסיפו מחצית מאורך הקטע לשיעור x של הקצה השמאלי, או החסירו מחצית אורך הקטע מהקצה הימני.

I) א) (4 , 5) ב) (2 , 1) ג) (1.5 , 6) ד) (–2 , 5)

II) (125 , 7) , (8.5 , 10)

תרגיל 3

כל הקטעים בתרגיל זה מקבילים לציר y, התלמידים מחשבים אמצעי קטעים כאלה, ומגיעים בדרך דומה למה שעשו בתרגיל 2.

I. א) (2 , 3) ב) (– 4 , –1) ג) (5 , 1.5)

II. (5 , 25) , (8 , 110)

תרגיל 4

המטרה בתרגיל זה היא להתמודד עם שגיאה נפוצה של תלמידים: בלבול בין אמצע קטע לאורך מחצית הקטע. עושים זאת על ידי דוגמה שמבליטה את הטעות.

בכיתות הניסוי ראינו, שתלמידים מסבירים את טעותו של דני על ידי שרטוט מדגים ואומרים ש"הנקודה (2 , 3) אינה נמצאת בכלל על הקטע". בתרגיל מסוג כזה אנו מצפים שהתלמידים יהיו מודעים למקור בלבול אפשרי, במיוחד כאשר המספרים לא כל כך מבליטים את ההבדל כמו בתרגיל זה.

תרגיל 5

תרגיל זה נבנה בעקבות התרחשות בכיתת ניסוי. כמובן ששתי השיטות זהות מתמטית, ובזה מטפלים בתרגיל הבא (במקרה ומחליטים לעשות אותו). אך פיתוח שיטות אלטרנטיביות מראה על מעורבות והבנה "פרטית" של הנושא, ולכן יש לעודד אותן.

תרגיל 6

המטרה בתרגיל זה להוכיח, בצורה אלגברית, את המסקנה שהתקבלה בתרגיל הקודם. אפשר לדלג על התרגיל והמהלך לא ייפגע.

לנקודת אמצע הקטע הנתון יש אותו שיעור y, כלומר 7. שיעור x ניתן לחישוב באחת משתי הדרכים כפי שמתואר. אם פותרים את התרגיל בכיתה, כדאי לפתור זאת על הלוח, לפשט את התבניות, ולהראות כי שתי התבניות תואמות, כלומר מתקבל:

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

של יפעת של עמית

לאחר מכן כל תלמיד מחשב את אמצע הקטע בדרך הנוחה לו.

תרגיל 7

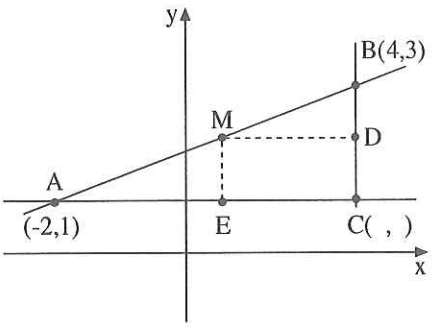
כמו בנושאים האחרים, העיסוק הראשון בנושא אמצע של קטע שאינו מקביל לצירים הוא הסתכלות וקריאה ממערכת צירים.

בכיתות הניסוי חלק מהתלמידים נעזרו ב"מדרגה" מתאימה. למשל: כדי להגיע מ- A אל B נעים ימינה 4 ועולים 2, האמצע יתקבל אם ננוע ימינה 2 ונעלה 1, כלומר האמצע יהיה (3 , 3).

א) C(3 , 3) ב) R(2 , 6.5) ג) P(1 , –1) ד) (2 , 7)

תרגיל 8

המטרה של התרגיל היא לתמוך בהכללה למציאת אמצע קטע, ולהצדקתה בדרך אלגברית. בניית משולש ישר זווית, כמו בשרטוט, מבליטה את העובדה ששיעורי M הם ממוצע השיעורים של A ו- B.



E אמצע AC (שמקביל לציר x),
D אמצע BC (שמקביל לציר y).
לכן M מתקבלת מתוך E ו- D.

מכאן: C(4 , 1) , E(1 , 1) , D(4 , 2) , M(1 , 2).

תרגיל 9

א) (8 , 4) ב) (1 , 4) ג) (2.5 , 2) ד) (8.5 , 7.5)

כדאי לתת תרגילים נוספים, בהם נתונות שתי נקודות להן אותו שיעור x או שנקודת אמצע הקטע שבין שתי הנקודות נמצאת על אחד הצירים.

לדוגמה:

1) (3 , 12) , (3 , 8)
2) (3 , 5) , (–3 , 5)
3) (10 , 0) , (6 , 0), להוסיף ולשאול היכן נמצאות שלוש הנקודות: השתיים שנתונות, ונקודות האמצע.
4) (0 , 5) , (–5 , 0), להוסיף ולשאול היכן נמצאות שלוש הנקודות: השתיים שנתונות, ונקודת האמצע?

אפשר גם לבקש שיתנו דוגמה לשתי נקודות נוספות שאמצע הקטע המחבר אותן הוא זה שמצאו. כמו כן אפשר לעשות תרגול בעל-פה, בו המורה רושם על הלוח שתי נקודות והתלמידים מתבקשים לומר מה שיעורי אמצע הקטע, במערכת צירים, המחבר נקודות אלה. תלמידים יוכלו תמיד להיעזר בשרטוט במערכת צירים או בשרטוט מדגים, כדי למצוא את השיעורים או כדי לשחזר את דרך החישוב, במקרה ששכחו.

תרגיל 10

בתרגיל זה פוגשים שוב את ה"אנך האמצעי", הפעם גם לפי ההגדרה הניתנת כסיכום לתרגיל.

במציאת המשוואה של אנך אמצעי מספר שלבים, כמספר הסעיפים בשאלה (תהליך המשלב חזרה על מספר נושאים).

א) שיעורי נקודת אמצע הקטע, $C(4\ ,\ 2)$.

ב) שיפוע הקטע, 0.5.

ג) שיפוע האנך לקטע, 2–.

ד) רישום משוואת הישר (האנך האמצעי) לפי שיפוע ונקודה, או מתוך קריאה מהשרטוט, $y = -2x + 10$.

תרגיל 11

תרגיל זה מדגים את ה"אלגברה" של אמצע קטע בהקשר סיפורי.

סעיף א' הוא דוגמה פרטית, ואילו סעיף ב' הוא הכללה שנבנית על הדוגמה.

א) משקל הבקבוק הריק 200 גרם, משקל היין 700 גרם.

לכן משקל בקבוק המכיל חצי כמות היין של בקבוק מלא יהיה:

$(200 + \frac{700}{2})$ גרם, כלומר 550 גרם.

ב) משקל הבקבוק הריק a גרם, משקל היין $(b - a)$ גרם.

לכן משקל בקבוק המכיל חצי הכמות של בקבוק מלא יהיה: $a + \frac{b - a}{2}$ גרם.

התבנית המתקבלת לאחר פישוט: $\frac{a + b}{2}$ (בדומה למה שעשו בתרגיל 6).

תרגילים

תרגיל 12

א) $(4\frac{1}{2}, 7)$ ב) $(1\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2})$ ג) $(0, 1)$ ד) $(4\frac{1}{2}, -6)$

תרגיל 13

בתחילת התרגיל או בסופו, כדאי לדון עם התלמידים בשאלה כיצד מחלקים קטע לארבעה חלקים שווים. אפשר להיעזר בחוט ולבקש מהתלמידים להדגים איך מחלקים אותו ל- 4 חלקים שווים.

במהלך הדיון התלמידים מגיעים למסקנה לגבי דרך הביצוע: קודם מוצאים אמצע קטע, ואחר כך מחפשים את נקודת האמצע של כל חצי.

נקודת אמצע הקטע AB היא $C(6, 8)$, נקודת אמצע הקטע AC היא $(4.5, 6)$, ואמצע BC היא $(7.5, 10)$.

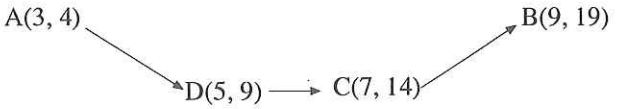
לתלמידים מתקשים כדאי להמליץ לשרטט ולבדוק.

תרגיל אתגר

חילקו את הקטע AB : $A(3, 4)$, $B(9, 19)$ לשלושה קטעים שווים.

כמה נקודות חלוקה יהיו ? מצא שיעוריהן.

במקרה זה כדאי להיעזר בשרטוט מדרגה. רוחב המדרגה בין A ל- B הוא 6 וגובהה 15. לכן, כדי לחלק את הקטע לשלושה חלקים שווים, ניצור שלוש מדרגות זהות, שרוחב כל אחת מהן 2 והגובה 5. לכן הנקודות יהיו:



תרגיל 14

א) השיפוע 3, משוואת AB היא: $y = 3x + 2$.

ב) שיפוע האנך $-\frac{1}{3}$.

ג) נקודת אמצע הקטע AB היא: $(2, 0)$, ומשוואת האנך האמצעי: $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

ד) $(0, 2)$

תרגיל 15

א) $D(2\ ,\ 1)$ ב) שיפוע AB: 0.5, שיפוע האנך ל-AB: -2.

ג) משוואת האנך האמצעי ל- AB : $y = -2x + 5$.

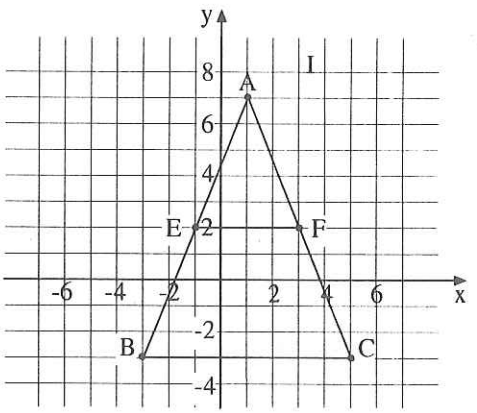
תרגיל 16

א) -4 ב) $y = -4x + 12$ ג) $C(3\ ,\ 0)$

תרגיל 17

בתרגיל זה ישנה הדרכה ליישום המשפט: קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

א)



ב) $E(-1\ ,\ 2)$

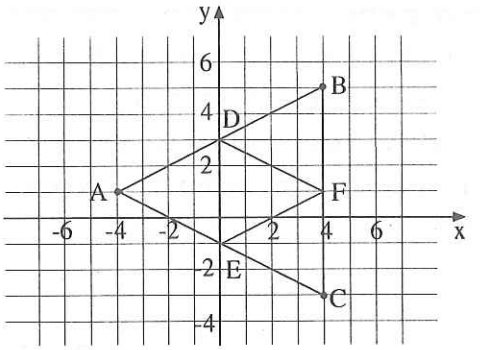
ג) $F(3\ ,\ 2)$

ד) השיפועים שווים לאפס (הקטעים מקבילים לציר x).

ה) מתוך קריאה וספירה מתקבל: אורך EF הוא 4 ואורך BC הוא 8.

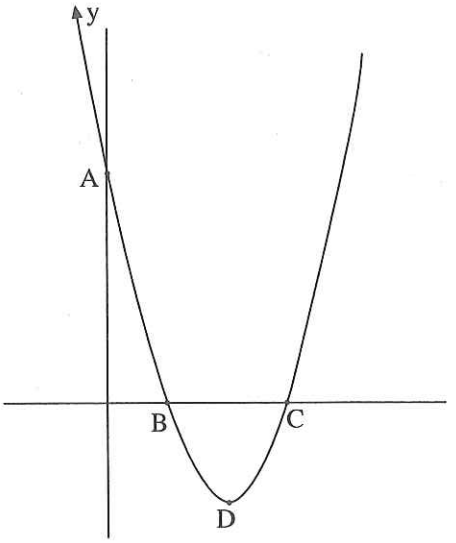
תרגיל 18

גם תרגיל זה הוא יישום של משפט גאומטרי: קטעי האמצעים במשולש מחלקים אותו לארבעה משולשים השווים בשטחם. זה הֶקשר מעניין עם "ערך מוסף", ולא סתם תרגול של קטע אמצעים.



את שטח המשולש DEF אפשר למצוא על-ידי ספירת משבצות, על-ידי חישוב בעזרת הנוסחה של מכפלת מחצית הצלע בגובה שלה, או על-ידי השלמה למלבן מתאים, כפי שנעשה עד כה. כל דרך נכונה, שבה התלמידים מחשבים, תתקבל.

תרגיל אתגר



נתונה הפרבולה: $y = x^2 - 5x + 4$.

א) חשב את שיעורי הנקודות A , B , C , D.

ב) חשב אמצע הקטע AB.
האם אמצע הקטע נמצא על הפרבולה? נמק.

ג) חשב אמצע הקטע BC.

ד) רשום משוואת הישר המקביל לציר y ועובר דרך D.

ה) חשב שטח המשולש BDC.

תשובה לתרגיל אתגר

א) A(0 , 4) , B(1 , 0) , C(4 , 0) , D(2.5 , –2.25)

ב) (0.5 , 2)

ג) (2.5 , 0)

ד) $x = 2.5$

ה) 3.375 יחידות שטח.

על תיכון במשולש ואמצעי צלעות במקבילית

(עמודים 126 - 134 בספר)

סעיף זה, מטפל דרך הייצוג האלגברי, ב"תיכון במשולש", "אלכסונים במקבילית", וכן במשפטים נוספים בגאומטריה ותכונותיהם של מרובעים מסוימים. הכוונה היא לא להביא הוכחות גאומטריות, אלא להסתפק באינטואיציה ובהבנת התכונות והמשפטים.

בנוסף, מוצאים ומחשבים קצה שני של קטע, אם נתונים אחד הקצוות ונקודת האמצע, בדרך גאומטרית (תרגילים 3 ,5) ובדרך אלגברית (תרגיל 4). ולבסוף מגיעים לחישובים הקשורים לאמצעי קטעים בתוך צורות גאומטריות. (גם בתוך מערכת צירים.)

תרגיל 1

מטרת התרגיל היא היכרות עם המושג "תיכון במשולש".

תרגיל 2

התרגיל משלב את הייצוג הגאומטרי (שרטוט התיכון במשולש) עם הייצוג האלגברי (רישום משוואת התיכון), כאשר עדיין אפשר לקרוא מהשרטוט הן את אמצעי הצלעות והן את משוואות התיכונים.

א) אמצע הצלע: $M(-1\ ,\ 3)$, משוואת התיכון CM: $y = 3x + 6$.

ב) אמצע הצלע: $K(-2\ ,\ -)$, משוואת התיכון AK: $x = -2$.

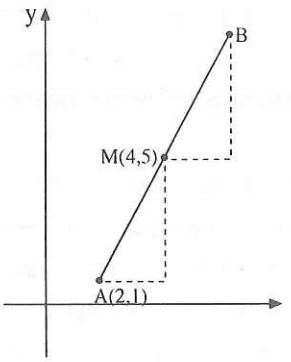
תרגיל 3

מטרת התרגיל היא למצוא את קצה הקטע בדרך של שרטוט. מציאת מקומה של B יכול להיעשות באמצעות סרגל או כל כלי מדידה אחר, ואפשר להיעזר בקיפול.

תרגיל 4

בתרגיל זה מחשבים שיעורי קצה קטע כאשר נתונים הקצה השני ואמצע הקטע. לחישוב זה מומלץ להיעזר במדרגה מתאימה (החוסכת את החישוב דרך משוואות). מדרגה זו יוצרת למעשה שני משולשים חופפים.

א) יהיו תלמידים שיפתרו סעיף זה בדרך אינטואיטיבית, אך אפשר גם להיעזר במדרגות מתאימות באופן הבא:



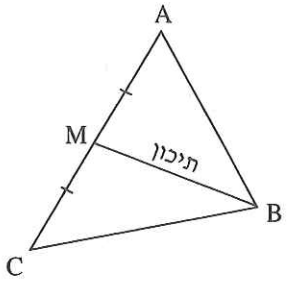
כדי לעבור מ- A ל- M, רוחב המדרגה 2 וגובהה 4.

לכן, מ- M ל- B ניצור אותה מדרגה ונקבל B(6 , 9).

השרטוט המצורף ממחיש את מה שנדרש בתרגיל.

ב) בסעיף זה התלמידים מתבקשים "ליצור" בעצמם את השרטוט המתאים, הם עלולים לשגות ולחשב את אמצע הקטע בין הנקודות הנתונות. לכן כדאי לדון במיקום "המקורב" של הנקודה D. מתקבל: D(1 , 5).

תרגיל 5



תרגיל זה הוא הרחבה של תרגיל 3.

בכיתות הניסוי ראינו שרוב התלמידים הצליחו לשרטט את המשולש.

תמיכה אפשרית: לסמן בקו מקווקו, את התיכון, כדי למנוע שגיאה שעשויה לקרות, כמו בסעיף ב' של תרגיל קודם.

תרגיל 6

תרגיל זה הוא בדיקה אלגברית של מקרה פרטי של המשפט: האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.

א) (3 , 2) ב) (3 , 2)

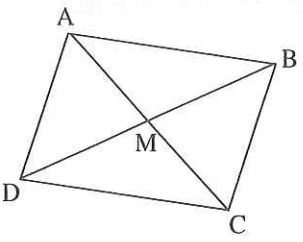
ג) AC ו- BD הם אלכסונים במקבילית, וידוע שהאלכסונים במקבילית חוצים זה את זה, לכן מתקבלת אותה התוצאה.

כדאי לבקש מן התלמידים לבדוק, שאכן ארבעת הנקודות הנתונות הן קודקודים של מקבילית.

תרגיל 7

תרגיל זה הוא יישום של המשפט שבדקו בתרגיל הקודם, והייצוג הוא בשרטוט בלבד. את הקודקודים האחרים של המקבילית אפשר למצוא באופן דומה לפתרון תרגיל 5.

בכיתות הניסוי ראינו שהתלמידים שרטטו את המקבילית באופן הבא:



האריכו את AM כאורכו בכיוון ל- M, וסימנו את C.
האריכו את BM כאורכו בכיוון ל- M, וסימנו את D.
אחר כך חיברו את הקודקודים המתאימים, כדי לקבל את המקבילית ABCD.

תמיכה אפשרית: לסמן בקו מקווקו את האלכסונים. למתקשים אפשר לשרטט מקבילית מדגימה, כדי להקל עליהם להחליט אילו קטעים יש להאריך.

תרגיל 8

תרגיל זה דומה לתרגיל 7, אך הוא משלב את שני הייצוגים: האלגברי והגרפי. אפשר להיעזר במדרגות מתאימות (כמו בסעיף ב' שבתרגיל 4), כדי למצוא את שיעורי הקודקודים האחרים של המקבילית.

מתקבל: C(7 , 9) , D(5 , 5).

תרגיל 9

א) נסמן אמצע AC ב- M ונקבל M(3 , –1).

ב) D(3 , –6).

אפשר לפתור את סעיף ב' במספר דרכים:

- כיישום של המשפט "האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה" - ואז הפתרון חוסך חישובים מיותרים.
- כיישום של המשפט "הצלעות הנגדיות במקבילית שוות ומקבילות" - כלומר, להשתמש במדרגה מ- B ל- A ולשרטט מדרגה שווה מ- C.
- רישום משוואות מתאימות לצלעות ומציאת נקודות חיתוך.

מהמסיימים, אפשר לבקש שירשמו את משוואות האלכסונים AC ו- BD, ויבדקו אם, אכן, הנקודות שמצאו נמצאות על הישרים שרשמו.

בפתרון התרגילים התלמידים יכולים להיעזר בשרטוט הצורה במערכת צירים, בשרטוט סקיצה של הצורה במערכת צירים ללא שנתות, או בשרטוט סקיצה של הצורה ללא מערכת צירים.

תרגיל 10

בתרגיל זה ניתנה הדרכה לשלבי הפתרון כדי שבתרגיל הבא, או בדומים לו, יוכלו התלמידים לארגן לעצמם את שלבי הפתרון.

א) $(1\ ,\ 3)$ ב) $y = 2x + 1$.

תרגיל 11

בתרגיל זה הוסרה התמיכה, כדי שהתלמידים יתכננו בעצמם את מהלך הפתרון.

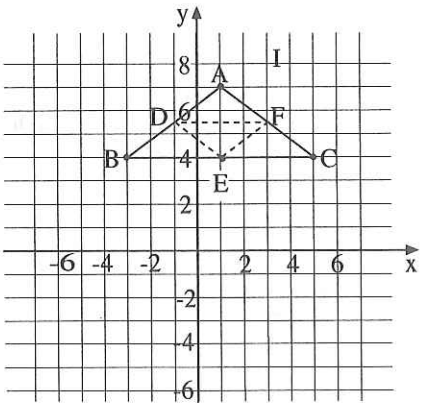
אמצע הצלע BC: $(1\ ,\ 0)$, משוואת התיכון: $y = 3x - 3$.

תרגיל 12

א) $D(-1\ ,\ 5.5)$, $E(1\ ,\ 4)$, $F(3\ ,\ 5.5)$.

ב) שטח המשולש ABC הוא 12 יחידות שטח.

שטח כל אחד מהמשולשים: DEF , CEF, BDE , ADF הוא 3 יחידות שטח.



המשולש DEF הוא משולש קטעי האמצעים. הוא מתקבל כאשר ארבעת המשולשים שהתקבלו הם שווים בשטח, ולמעשה הם חופפים (מסקנה זו הוסקה בסעיף הקודם בתרגיל 18).

תרגיל 13

אמצע האלכסון: (1 , 2), הקודקוד הרביעי: (0 , 3).

אם מעוניינים אפשר להזכיר את תכונות המעוין, ואז אפשר לשלב ידע מתוך גאומטריה עם ידע באנליטית, ולשאול שאלות כמו:

- הסבר מדוע המקבילית שהתקבלה היא מעוין.
- מאיזה סוג המקבילית ABCD? נמק.

הנימוקים יתבססו על התכונות הרלוונטיות של המעוין.

למשל: "מעוין הוא מקבילית שאלכסוניה מאונכים" - אפשר לבדוק את השיפועים המתאימים, או: "מעוין הוא מקבילית שצלעותיה שוות" - אפשר לבדוק וויזואלית את אורכי הצלעות (ללא התבנית).

תרגיל 14

מטרת התרגיל היא לחזור על הנושא "ישרים מקבילים לצירים", בהקשרים שנלמדו בסעיפים הקודמים (אמצע קטע, ישרים מאונכים).

ב) משוואת הישר הנוסף: $x = -2$.

ג) המלבן הוא ריבוע. למסקנה זו אפשר להגיע ישירות מהשרטוט. תלמידים נעזרים בספירה ובמשבצות לנימוקים מתאימים.

סעיפים נוספים לתרגיל

- כמה מלבנים היינו יכולים לקבל, אילו השמטנו את הנתון של נקודת מפגש האלכסונים?
- מה משוואת הישר הרביעי?
- היכן נמצאות כל הנקודות, שהן מפגש האלכסונים של כל אחד מהמלבנים האלה?

תשובות לסעיפים הנוספים

כאשר משמיטים את הנתון של נקודת מפגש האלכסונים, מתקבלים אינסוף מלבנים.

משוואת הישר עליו מונחת הצלע הרביעית היא מהצורה $x = \square$ (כאשר במשבצת הריקה אפשר לרשום כל מספר פרט ל- 2).

נקודות מפגש האלכסונים של כל המלבנים האלה נמצאות על הישר $y = 3$.

תרגיל 15

שלושת הקודקודים שבתרגיל קובעים מלבן יחיד. (מצב שונה מהתרגיל הקודם בו שלושת הישרים קבעו אינסוף מלבנים). סדר הקודקודים במלבן נקבע לפי הקטעים המאונכים.

הקודקוד הרביעי הוא $(-1 , 7)$, נקודת מפגש האלכסונים: $(2 , 4)$.

אפשר לבקש מן התלמידים לרשום את משוואות צלעות המלבן.

תרגיל 16

בתרגיל זה אפשר לתת לתלמידים להתנסות, ותוך כדי ההתנסות להעלות את התכונות הרלוונטיות. כמו כן אפשר להיעזר בסקיצה כדי לראות מה נדרש ובאיזו דרך כדאי לעבוד.

כדי לשרטט את הריבוע מאריכים את AM כאורכו, מעבר לנקודה M, ומסמנים את הקודקוד ב- C.

ב- M משרטטים אנך ל- AC, מקצים על האנך משני צידי הנקודה M קטעים השווים ל- AM, מסמנים נקודות אלה ב- B ו- D.

מחברים קודקודים מתאימים ומקבלים את הריבוע ABCD. בגלל תכונות הריבוע מתקבל ריבוע אחד בלבד.

תרגיל 17

בתרגיל זה מתקבל ריבוע שאלכסוניו מקבילים לצירים. אפשר לראות ולבדוק על ידי ספירה, שאורכי האלכסונים שווים ושהם חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה. הסעיף הבא עוסק בחישוב אורכי קטעים, ואז אפשר יהיה לתת ריבוע המונח בצורה אחרת במערכת.

קודקודי הריבוע הם: $(2 , 4) , (5 , 1) , (2 , -2) , (-1 , 1)$.

סעיפים נוספים, לתרגיל

- רשום את משוואות הצלעות ואת משוואות האלכסונים.
- חשב את שטח הריבוע.

תשובות לסעיפים הנוספים

- משוואות הצלעות: $y = x + 2$, $y = -x$, $y = x - 4$, $y = -x + 6$.
  משוואות האלכסונים: $x = 2$, $y = 1$.
- שטח הריבוע 18 משבצות.

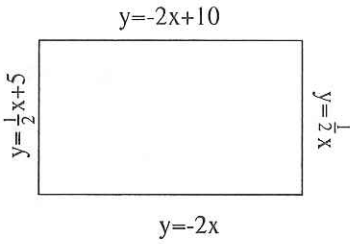
תרגיל 18

א) מלבן. מבדיקת השיפועים רואים, שיש שני זוגות של ישרים מקבילים, וכן הישרים הנחתכים מאונכים.

ב) $(0\ ,\ 0)$, $(-2\ ,\ 4)$, $(2\ ,\ 6)$, $(4\ ,\ 2)$.

ג) $(1\ ,\ 3)$.

כדאי להדריך את התלמידים להיעזר בשרטוט מדגים של מרובע, ולרשום על צלעותיו את המשוואות.



תרגיל 19

א) מעוין.

רוב התלמידים אומרים שמתקבלת מקבילית (מתוך הסתכלות בשיפועי הישרים). אפשר להיעזר בספירה ובמשבצות כדי לראות שאורכי הצלעות שווים, ו/או בתכונה שמקבילית שאלכסוניה מאונכים היא מעוין.

ב) את שיעורי הקודקודים אפשר למצוא על ידי פתרון משוואות מתאימות. תלמידים הנעזרים בשרטוט הישרים במערכת צירים, יכולים לקרוא את שיעורי הקודקודים מתוך המערכת. במקרה זה חשוב שיבדקו את התשובות על ידי הצבה במשוואות המתאימות.

שיעורי הקודקודים: $(2\ ,\ 0)$, $(0\ ,\ 4)$, $(-2\ ,\ 0)$, $(0\ ,\ -4)$.

ג) $(0\ ,\ 0)$.

תרגיל 20

גם בתרגיל זה כדאי לעודד את התלמידים להיעזר בשרטוט במערכת צירים או בשרטוט מדגים.

הקודקודים האחרים: $C(1\ ,\ -2)$, $D(-6\ ,\ -2)$.

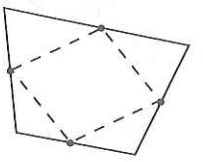
מהתלמידים המשרטטים את המקבילית במערכת צירים אפשר לבקש לחשב את שטחה.

תרגיל 21

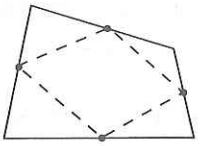
תרגיל זה והבא אחריו עוסקים בתכונה הבאה: "אם מחברים את אמצעי הצלעות במרובע כלשהו תתקבל מקבילית".

אין צורך להוכיח תכונה זו, אפשר להסתפק בהשערה (תרגיל 21) ובדיקתה במערת צירים (תרגיל 22).

א)



ב)



תרגיל 22

בתרגיל זה מנצלים את התכונה הגאומטרית מתרגיל 21, כדי להציג את התרגיל בהקשר אלגברי. אין הכוונה שהתלמידים יישנו את המשפט, אלא שבעזרת הגאומטריה האנליטית יגלו תכונות גאומטריות.

ב) $M(-2\ ,\ -1)\ ,\ N(2\ ,\ 3)\ ,\ L(4\ ,\ -1)\ ,\ K(0\ ,-5)$.

ג) שיפוע האלכסון AC הוא 1, ושווה לשיפועי הקטעים MN ו- KL.

ד) שיפוע האלכסון BD הוא 2–, ושווה לשיפועי הקטעים MK ו- NL.

ה) שיפועי הצלעות הנגדיות שווים, לכן המרובע הוא מקבילית.

תרגיל 23

- אם מחברים את אמצעי הצלעות של מרובע שאלכסוניו מאונכים, מקבלים מלבן.
- אם מחברים את אמצעי הצלעות של מרובע שאלכסוניו שווים, מתקבל מעוין.
- אם מחברים את אמצעי הצלעות של מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה ושווים זה לזה, מקבלים ריבוע.

חשוב לציין, שאין להכנס להוכחות גאומטריות. אפשר להסתפק בהשערה. ואם רוצים, אפשר לבדוק את ההשערה במערכת צירים, כפי שנעשה בתרגיל 22.

אם אין זמן, אפשר לדלג על תרגיל זה והמהלך לא ייפגע.

תרגילים נוספים לישום חלק מהתכונות שהתקבלו בתרגיל 23

I. $A(-3\ ,\ 3)$, $B(11,5)$, $C(2\ ,\ -7)$, $D(-5\ ,\ -3)$ הם קודקודים של מרובע ABCD.

א) שרטט את המרובע במערכת צירים.

ב) הראה שאלכסוני המרובע מאונכים זה לזה.

ג) סמן: M אמצע AB, N אמצע BC, L אמצע CD, K אמצע AD.

– חשב את שיפועי הקטעים MK, LK, NL, MN.

– מה תוכל לומר על צלעות המרובע MNLK על סמך חישובי השיפועים?

II. אלכסוני מרובע מונחים על הישרים: $AC : y = -2x - 3$, $BD : y = \frac{1}{2}x - 3$

א) שרטט את הישרים במערכת הצירים.

ב) בחר על כל ישר שתי נקודות כך שאם נחבר אותן יתקבל מרובע ABCD.

ג) חבר את אמצעי צלעותיו.

איזה מרובע התקבל מחיבור אמצעי הצלעות? הסבר.

תשובות לתרגילים הנוספים

I. ב) שיפוע AC הוא 2–, שיפוע BD הוא $\frac{1}{2}$ ולכן AC ו- BD מאונכים.

ג) $M(4,\ 4)$, $N(6\frac{1}{2}\ ,\ -1)$, $L(-1\frac{1}{2}\ ,\ -5)$, $K(-4\ ,\ 0)$

שיפוע MN = שיפוע LK = 2–

שיפוע NL = שיפוע MK = $\frac{1}{2}$

המרובע MNLK שהתקבל הוא מלבן (כי כל שתי צלעות סמוכות מאונכות.)

II. גם בתרגיל זה מתקבל מלבן.

כיוון שכל תלמיד בכיתה בוחר שתי נקודות כרצונו על כל ישר, יתקבל שכל אחד מהמרובעים ABCD שהתקבלו אצל תלמידי הכיתה מקיימים את התכונה שאלכסוניהם מאונכים.

מחיבור אמצעי הצלעות של כל אחד מהמרובעים האלה מתקבל מלבן.

פרק ד': מעגל (עמודים 135 - 165 בספר)

המהלך של הכרת משוואת המעגל בנוי כמו המהלך של הכרת משוואת הקו הישר.
תחילה רואים את המעגל כמקום גאומטרי (אותו מקבלים מסימון נקודות, הנמצאות במרחק שווה מנקודה מסוימת. המרחק מתקבל על-ידי ספירה או בצורה אינטואיטיבית), את התכונה הנ"ל מבטאים בצורה אלגברית, לגבי מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו r, ולאחר-מכן לגבי מעגל שמרכזו (a , b) ורדיוסו r.
לבסוף, בודקים מצבים הדדיים בין מעגלים וישרים ובין שני מעגלים.
כדי לבטא בצורה אלגברית את התכונה של המעגל כמקום גיאומטרי, לומדים, בסעיף הראשון, לחשב "מרחק בין נקודות".

מרחק בין נקודות (עמודים 135 - 143 בספר)

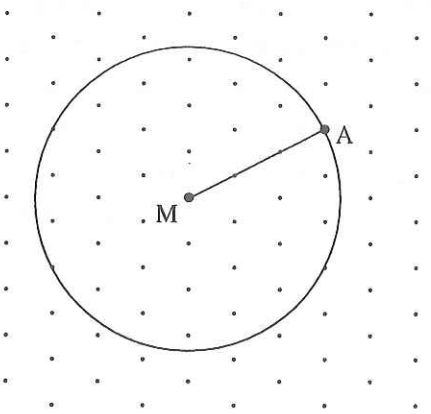
התרגילים הראשונים בסעיף זה עוסקים בקבוצות של נקודות (מקומות גאומטריים), המקיימות תכונה הקשורה במרחק בין נקודות. (תרגילים אלה דומים לתרגילים שמופיעים בפרק הראשון שבספר) תפקיד התרגילים ליצור מוטיבציה ללמוד כיצד לחשב מרחק.
חישוב מרחק זה נעשה בשלבים, כמו בסעיפים הקודמים.
בשלב הראשון (תרגילים 1 - 3), שימוש במושג "מרחק", כדי לשרטט קבוצות של נקודות, אותן מקבלים על-ידי ספירה או בצורה אינטואיטיבית.
בשלב השני (תרגיל 4) מחשבים מרחק בין נקודות, הנמצאות על ישרים מקבילים לאחד הצירים. (מתבססים על ספירה וקריאה מהמערכת, ונעזרים בשרטוט מדגים לגבי נקודות שהם מחוץ למערכת.)
בשלב השלישי (תרגילים 5 - 8) לומדים לחשב מרחק בין שתי נקודות כלשהן. לצורך החישוב נעזרים במשפט פיתגורס.

כמו בחישוב השיפוע, נעזרים בשרטוט מדגים ובמושגים המוכרים: "גובה המדרגה" ו"רוחב המדרגה".
חשוב לציין, כי השימוש ב"מדרגה" נוח וקל לזכירה או לשיחזור, ועוקף את השימוש בנוסחה.
בהמשך ישנם תרגילים המשלבים מושגים גאומטריים שונים שגם הם קשורים במרחק.

תרגיל 1

התרגיל הוא מבוא להגדרה של מעגל כמקום גאומטרי, והוא מהווה חזרה "אינטואיטיבית", לא פורמלית, (תוך כדי עשייה) על המושג מרחק (אוקלידי). כדי לגלות נקודות רבות המקיימות את התנאי, אפשר להיעזר בסרגל או בכל כלי מדידה אחר.

מתקבל מעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו אורך הקטע MA.



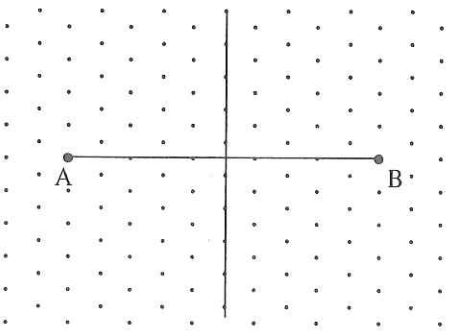
תרגילים 2 - 3

בתרגילים אלה עוסקים מחדש במושג "אנך אמצעי של קטע", בתרגיל 2 בעזרת שרטוט ובתרגיל 3 בעזרת משוואה, תוך יישום נוסף לא פורמלי של המושג "מרחק".

תרגיל 2

מתקבל קו ישר שהוא אנך אמצעי לקטע AB.

בכיתות הניסוי ראינו שתלמידים מתארים את מה שקיבלו, באמצעות מושגים אותם פגשו בסעיפים קודמים. כמו: ציר סימטריה או קו קיפול.



תרגיל 3

א) (i) $x = 1$ (ii) $y = -2$

ב) $y = -x$

תרגיל 4

בתרגיל זה מחשבים מרחקים בין נקודות הנמצאות על ישרים מקבילים לצירים. תחילה מחשבים, על-ידי ספירה, כאשר הנקודות נמצאות בחלק המשורטט של המערכת (כמו שכבר נעשה כאשר חישבו שיפוע של ישר או אמצע קטע). לאחר מכן, כאשר הנקודות נמצאות מחוץ למערכת המשורטטת, משתמשים בשיקולים. יש לשים לב, שחלק מן התלמידים עשוי לטעות ולרשום שיעורי אמצע הקטע במקום לחשב את אורך הקטע.

א) (i) 6 (ii) 8 (iii) 9

ב) 18 ג) 22 ד) 20

תרגילים 5 - 8

בתרגילים אלה התלמידים לומדים לחשב מרחק בין נקודות כלשהן, על ידי שרטוט משולש ישר זווית מתאים, וחישוב היתר בעזרת משפט פיתגורס.

תחילה (תרגיל 5) מחשבים מרחק בין שתי נקודות על דף משובץ.

אחר-כך (תרגיל 6) מחשבים המרחק במערכת צירים גם עם נקודות ששיעוריהן מספרים שליליים. לאחר מכן (תרגיל 7) מחשבים המרחק בין נקודות ששיעוריהן מספרים חיוביים, על- ידי שרטוט סקיצה, ולבסוף (תרגיל 8) מחשבים מרחק בין נקודות ששיעוריהן מספרים חיוביים ושליליים על-ידי שרטוט סקיצה.

תרגיל 5

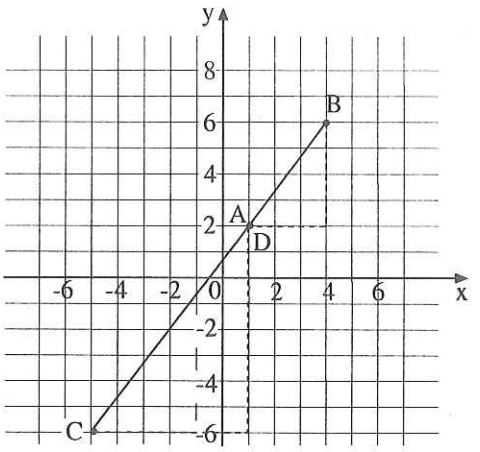
מטרת התרגיל היא "לרענן" את הידע במשפט פיתגורס.

חשוב, שאת השורשים שמחפשים לא להשאיר באמצעות סימן השורש, אלא להשתמש במחשבון ולחשב את התוצאה המקורבת, כדי שיקבלו תחושה לגבי הגודל של המספר.

א) 15 ב) 7.21 ג) 13.41 ד) 7.07

תרגיל 6

בתרגיל זה חישוב המרחק נעשה בשני שלבים.
בשלב הראשון: שתי הנקודות נמצאות ברביע הראשון.
בשלב השני: חישוב המרחק בין שתי נקודות כלשהן.



א) אורכי הניצבים 3 ו- 4, אורך AB הוא $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

ב) אורכי הניצבים 6 ו- 8, אורך CD הוא 10.

כדאי גם לדון בחישוב אורך BC, אותו אפשר למצוא בשתי דרכים שונות: או על ידי סכום הקטעים AC + AB, או כאורך היתר במשולש ישר זווית שניצביו 9 ו- 12.
יש לשים לב לכך שתלמידים רבים נוטים להשאר "שבויים" בנושאים האחרונים שלמדו, למשל: ייתכן והם ישרטטו משולש ואז יחשבו את השיפוע במקום את אורך הקטע.

תרגיל 7

בתרגיל זה, כמו בסעיפים קודמים, כאשר אי-אפשר לסמן את הנקודות במערכת הצירים, נעזרים בסקיצה המהווה תמיכה לדרך החישוב.
אורכי הניצבים 12 ו- 5, לכן אורך היתר (שהוא המרחק בין הנקודות) הוא 13.

תרגיל 8

בתרגיל זה, בדומה לתרגיל הקודם, נעזרים בסקיצה כתמיכה, אלא שהנקודות נמצאות ברביעים שונים.

ג) בכיתות הניסוי ראינו, כי בחישוב רוחב או גובה המדרגה התלמידים נעזרו במשמעות של "כמה צעדים התקדמנו, או כמה צעדים עלינו או ירדנו".

למשל: מ- A ל- B התקדמנו 9 צעדים ועלינו 15, לכן רוחב המדרגה הוא 9 וגובה המדרגה הוא 15.

דרך חישוב כזו מונעת שגיאות, שעלולות להופיע כאשר מחשבים הפרש בין מספרים שליליים.

ד) $AB = \sqrt{9^2 + 15^2} = \sqrt{306} = 17.49$.

תרגילים

תרגיל 9

א) 5 ב) 16.64 ג) 1 ד) 7 ה) 10

ו) 15

תרגיל 10

$AB = 7.28$, $AD = 4.47$, $BC = 6.4$, $CD = 4.47$

היקף המרובע: 22.62 יחידות.

תרגיל 11

אורך צלע הריבוע: 5.1 יחידות, שטח הריבוע: 26 משבצות.

סעיף נוסף כאתגר

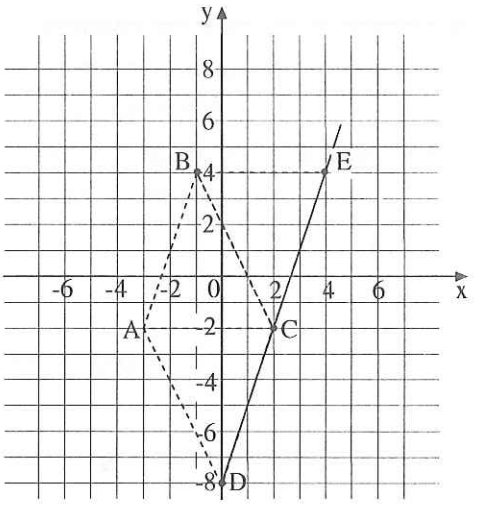
מצא שיעורי הקודקודים האחרים של הריבוע. (שים לב ישנם שני ריבועים.)

תשובה

אפשר להיעזר בשרטוט הריבוע במערכת צירים כדי למצוא את הקודקודים האחרים של הריבוע. הקודקודים הם: (2–, 0) ו- (3- , 5) או (8 , 2) ו- (7 , 7).

תרגיל 12

התרגיל משלב חישובי מרחקים עם היקף ושטח של מקבילית. על אף שהמשימה מורכבת, ראינו שבכיתות הניסוי רוב התלמידים התמודדו בהצלחה עם המשימות.



א) $AB = 6.32$

ב) $D(0\ ,\ -8)$.

היקף המקבילית: 26.06.

ג) $E(4\ ,\ 4)$

היקף המקבילית: 22.64.

סעיפים נוספים לתרגיל

סעיפים אלה אפשר לתת לפני חישוב ההיקפים.

- לאיזו מקבילית היקף גדול יותר? נמק.
- לאיזו מקבילית שטח גדול יותר? נמק.
- קבע מאיזה סוג הוא המרובע ABED. נמק.

הערה: אחד הנימוקים בתשובות לסעיפים אלה יכול להיות החישוב עצמו.

תרגיל 13

בתרגיל זה מנצלים את מושג המרחק כאורך קטע, ועוברים למיון משולשים, כהזדמנות נוספת לשילוב גאומטריה עם אלגברה.

א) שווה שוקיים, $AB = BC = \sqrt{41} = 6.4$.

ב) שונה צלעות. $BC = \sqrt{32} = 5.65$, $AC = \sqrt{73} = 8.54$, $AB = \sqrt{17} = 4.12$.

ג) שווה שוקיים, $AB = AC = \sqrt{13} = 3.6$.

ד) ישר זווית ושווה שוקיים, $AB = AC = 4$, $\sphericalangle A = 90^\circ$.

תרגילים 14 - 19

המטלות הנדרשות בתרגילים אלה משלבות ידע שנלמד בסעיפים קודמים עם ידע חדש שנלמד בסעיף זה. כל זאת בהקשרים שונים של שילוב הגאומטריה ואלגברה.

תרגיל 14

א) $B(0\ ,\ 3)$, $A(4\ ,\ 0)$ ב) $AB = 5$

תרגיל 15

ב) $M(4\ ,\ 0)$ ג) $AM = 7.21$

תרגיל 16

המטלה בתרגיל זה זהה לזו שבתרגיל קודם, אלא שבתרגיל זה הוסרה התמיכה, על-מנת שהתלמידים יארגנו בעצמם את שלבי החישוב.

אמצע הצלע BC הוא: $D(4\ ,\ 1)$, אורך התיכון $AD = 3.16$.

תרגיל 17

רצוי לעודד את התלמידים לענות על חלק מהשאלות על-ידי קריאת אינפורמציה מתאימה מתוך השרטוט.

למשל, את אורכי הצלעות AB ו- CD, או קביעת סוג המרובע.

א) $AB = 4$, $CD = 8$, $AD = BC = 8.25$

ב) המרובע הוא טרפז שווה שוקיים והיקפו 28.5 יחידות.

סעיפים נוספים לתרגיל

א) מצא נקודה E כך שהמרובע BCDE יהיה מקבילית.

מאיזה סוג יהיה המשולש ADE? נמק.

ב) רשום שיעורים של שני קודקודים נוספים, כך שתתקבל מקבילית, שאחת מצלעותיה DC ושטחה שווה לשטח המקבילית BCDE.

ג) רשום שיעורי קודקוד שלישי של משולש, שאחת מצלעותיו DC, ושטחו שווה לשטח המקבילית BCDE.

כמה משולשים כאלה ישׁ? היכן נמצא הקודקוד השלישי?

תשובות

א) $E(4\ ,\ 5)$, והמשולש ADE הוא שווה שוקיים.

אפשר להגיע לכך על-ידי חישוב, ואפשר לנמק על ידי התבוננות במשולשים ADM ו- EDM.

ב) כל שתי נקודות הנמצאות על הישר AB שמשוואתו $x = 4$, או על הישר שמשוואתו $x = -12$, והמרחק ביניהן 8 יחידות ($CD = 8$).

ג) יש אינסוף משולשים כאלה. הקודקוד השלישי נמצא על הישר $x = 12$ או על הישר $x = -20$.

בשרטוט אחד המשולשים האלה הוא ΔDCP.

תרגיל 18

מתקבל מעוין.

אורכי צלעותיו: $AB = BC = CD = AD = 5.09$,

והיקפו: 20.36 יחידות.

תרגיל 19

ב) אורך כל אחת מהצלעות 5 יחידות.

ג) שיפוע הצלעות AB ו- CD הוא $\frac{4}{3}$ ושל AD ו-BC הוא $-\frac{3}{4}$, לכן זוויות המרובע ישרות.

ד) המרובע הוא ריבוע.

יש מספר אפשרויות לקבוע את סוג המרובע. אחת מהן היא לפי התשובות שהתקבלו בסעיפים א' וב'. אך יש לעודד פתרונות נוספים, אם הם עולים בכיתה.

לדוגמה, באחת מכיתות הניסוי, לאחר חישוב אורכי הצלעות, אחד התלמידים ביקש לבדוק אם המרובע הוא מעוין או ריבוע, לשם כך הוא הציע לחשב את אורך האלכסונים.

סעיף נוסף כאתגר

שנה את אחד הקודקודים, כך שהמרובע שיתקבל יהיה טרפז ישר זווית.

כמה תשובות לשאלה?

תשובה

אפשר לקיים דיון בפתרון סעיף זה, ולשמוע מהתלמידים את הצעותיהם ולהכליל.

למשל:

כדי לקבל טרפז ישר זווית, אפשר לשנות כל אחד מן הקודקודים, השינוי ייעשה על ידי בחירה של נקודה אחרת, הנמצאת על אחת הצלעות המתחברות על-ידי אותו קודקוד, או על המשכי אותן צלעות, מעבר לקודקוד.

מעגל שמרכזו (0 , 0) (עמודים 144 - 150 בספר)

בסעיף זה מתבססים על המרחק בין נקודות, כדי להגדיר משוואת מעגל שמרכזו (0 , 0).

נקודת המוצא היא הייצוג הגרפי. בהתחלה מוצאים נקודות שמרחקן מ- (0 , 0) שווה ל-5. אחר כך מגיעים אל ההכללה - מציאת קבוצת כל הנקודות המקיימות את התכונה, ולבסוף מציאת המשוואה המתאימה.

במציאת נקודות בודדות, מסתכלים על נקודות מיוחדות: אלה שנמצאות על הצירים, ואלה שהן סימטריות לנקודות נתונות לגבי ציר x ולגבי ציר y.

הפעילויות במהלך הן בשני הכיוונים: מהשרטוט אל המשוואה, ומהמשוואה אל השרטוט.

כלומר, לאחר פעילויות בהן מגיעים למשוואת מעגל, ישנן פעילויות בהן קוראים מתוך משוואה נתונה את הרדיוס ומשרטטים (או מניחים מעגל מתאים). תוך כדי כך בודקים (מהשרטוט או בעזרת חישובים) אם נקודה נמצאת בתוך המעגל או מחוצה לו, וצובעים תחום מתאים לנקודות כאלה.

תרגילים 1 - 2

בתרגילים אלה עוסקים במקרה הפרטי של מציאת נקודות המקיימות את התכונה, שמרחקן מהראשית שווה, מגיעים לשרטוט ולמשוואת מעגל.

לאחר שני תרגילים אלה מסכמים את הקשר בין הצורה ההנדסית המתקבלת למשוואה האלגברית שהיא: $x^2 + y^2 = r^2$.

תרגיל 1

תרגיל זה משלב מרחק עם תכונות המעגל, הוא עוסק בחישוב מרחק שווה מנקודה מסוימת.

בעזרת משפט פיתגורס מתקבל $OA = 13$.

א) (5 , –12) סימטרית ל- A לגבי ציר x.

ב) (i) (–5 , 12) סימטרית ל- A לגבי ציר y.

(ii) (–5 , –12)

בכיתות הניסוי ראינו שתלמידים מצאו נקודות נוספות, על-ידי שרטוט "מדרגה" שרוחבה 12 וגובהה 5, והגיעו לנקודה (5 , 12) ובעקבותיה גם לנקודות (5 , –12) , (–5 , 12) , (–12 , –5).

ג) (13 , 0) , (0 , 13) , (–13 , 0) , (0 , –13).

ד) מעגל שמרכזו (0 , 0) ורדיוסו 13.

ה) $x^2 + y^2 = 13^2$

תרגיל 2

א) 5 ב) $(-4\,,3)$, $(-3\,,-4)$, נקודות נוספות שתלמידים עשויים להציע:
$(4\,,-3)$, $(-4\,,-3)$.

ג) (i) $(5\,,0)$, $(-5\,,0)$ (ii) $(0\,,5)$, $(0\,,-5)$

ד) $x^2 + y^2 = 5^2$.

תרגיל 3

בשני התרגילים הקודמים הגיעו התלמידים אל משוואת המעגל, בתרגיל זה נתונה המשוואה והתלמידים מתבקשים למצוא את הרדיוס. חשוב לציין שהמשוואה לא מראה "ישירות" את הרדיוס אלא את ריבועו. כמו כן משלבים את הקשר הקרטזי, כלומר, נקודה שמקיימת את משוואת המעגל נמצאת על המעגל ולהיפך.

I. א) 10 ב) $\sqrt{50} = 7.07$ ג) 11 ד) $\sqrt{10} = 3.16$

בדומה לחישובי מרחקים, שבסעיף הקודם, גם כאן, בסעיפים ב' ו-ד', התלמידים משתמשים במחשבון ומעגלים את התוצאה (המספר המתאים לרדיוס).

II. בסעיף זה, בנוסף לבדיקת הקשר הקרטזי, יש כאן נסיון לקשור ולהזכיר את המשמעות של הרדיוס כמרחק.

$(7\,,1)$ או $(-7\,,1)$. מרחקן מהראשית הוא 7.07 (שווה לרדיוס).

תרגיל 4

תרגיל זה מיועד לזהות גרף על פי משוואה נתונה, כפי שנעשה בישרים. כדאי לעודד תלמידים לבדוק את עצמם.

נקודות החיתוך של מעגל ג' עם הצירים הן: $(-3\,,0)$, $(0\,,3)$, $(0\,,-3)$, $(3\,,0)$.

נקודות אלה נראות בגרף, אך ההצבה לשם בדיקה, מקשרת בין הייצוגים השונים.

תרגיל 5

המהלך בתרגיל זה הוא מהייצוג המילולי אל המשוואה ומשם לגרף.

א) $x^2 + y^2 = 25$

ב) $(5\,,0)$ ו- $(-4\,,-3)$.

ג) רוב התלמידים מצליחים למצוא נקודות נוספות על המעגל, כי מזהים את המעגל מתרגיל 2.

ד) המטרה של סעיף זה להגיע למסקנה, שכל נקודה שנמצאת בתוך המעגל מרחקה מהמרכז קטן מהרדיוס.

תרגיל 6

מטרת התרגיל היא למצוא את משוואת המעגל על-פי מרכז ורדיוס שאיננו נתון במפורש, אלא ניתן לחישוב על פי המרכז ונקודה שנמצאת על המעגל.

א) $r = \sqrt{52} = 7.21$ ב) $x^2 + y^2 = 52$

תרגיל 7

א) $x^2 + y^2 = 9$. בכיתות הניסוי ראינו שרוב התלמידים הצליחו לזהות מהשרטוט את הרדיוס.

ב) בסעיף זה התלמידים מתבקשים, למעשה, לרשום שיעורי נקודות נוספות הנמצאות על המעגל. התלמידים יכולים לפתור סעיף זה במספר דרכים, למשל: להניח במערכת צירים מעגל מתאים ולקרוא קירובים של שיעורי נקודות. אפשר לבחור כשיעור x מספר כלשהוא בין 3– ל- 3, להציב אותו במשוואה שהתקבלה בסעיף א', ולחשב את שיעור y המתאים.

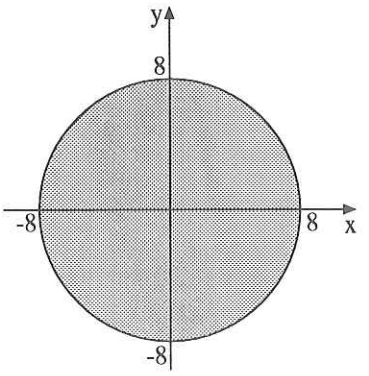
ג - ד) כל הנקודות הנמצאות בתוך המעגל.

ה) $x^2 + y^2 > 9$

תרגיל 8

בתרגיל זה התלמידים מתבקשים לשרטט סקיצה של המעגל. הכוונה היא שהתלמידים יסמנו, במערכת צירים לא משובצת, את ארבע נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים, וישרטטו ביד חופשית את המעגל.

התחום המתאים לאי-השוויון $x^2 + y^2 \leq 64$ הוא פנים המעגל כולל הנקודות הנמצאות על המעגל.



תרגיל 9

מטרת התרגיל לחזק את הקשר הקרטזי במעגל.
בדומה לקו הישר, התלמידים מציבים במשוואה את השיעור הנתון, ומחשבים (על ידי פתרון המשוואה) את השיעור החסר (כמובן תוך שימוש במחשבון). בכיתות הניסוי, היו תלמידים שהניחו מעגל מתאים במערכת הצירים, וקראו מהגרף (לפעמים באומדן) את השיעורים החסרים.
$(0 , 4)$, $(3 , 2.64)$ או $(3 , -2.64)$, $(4 , 0)$, $(3 , 2.64)$ או $(3 , -2.64)$,
$(3.46 , 2)$ או $(-3.46 , 2)$, $(0 , -4)$.

תרגיל 10

א) $x^2 + y^2 = 16$ ב) $x^2 + y^2 = 49$ ג) $x^2 + y^2 = 121$

ד) $x^2 + y^2 = 4$ ה) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

יש לשים לב, כי ברישום משוואת המעגל חלק מהתלמידים נוטים לשגות ולרשום $x^2 + y^2 = r$ במקום $x^2 + y^2 = r^2$.

תרגילים 11 - 13

בתרגילים אלה מומלץ להיעזר בשרטוט סקיצה כתמיכה לשלבי הפתרון.

תרגיל 11

א) $r = 7$ ב) $x^2 + y^2 = 49$

תרגיל 12

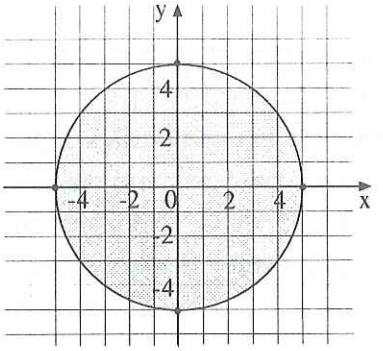
א) רדיוס המעגל הוא מרחק הנקודה $(-15 , -8)$ מ- $(0 , 0)$, כלומר $r = 17$.
ב) $x^2 + y^2 = 289$

תרגיל 13

א) מתקבל $r = 41$, מכאן שמשוואת המעגל: $x^2 + y^2 = 1681$.
ב) $(-40 , -9)$.

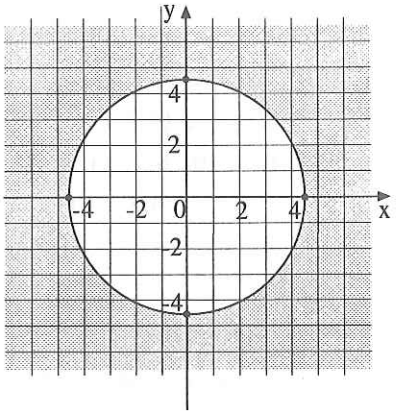
תרגיל 14

התחום המתאים לאי-שוויון $x^2 + y^2 \leq 25$ כולל את הנקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו $(0\ ,\ 0)$ ורדיוסו 5, ואת כל הנקודות הנמצאות בתוכו.



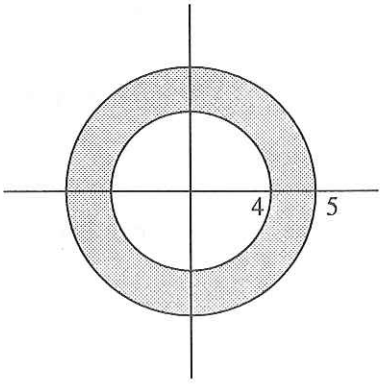
תרגיל 15

התחום המתאים לאי-שוויון $x^2 + y^2 \geq 20$ כולל את הנקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו $(0\ ,\ 0)$ ורדיוסו $\sqrt{20} = 4.47$, ואת כל הנקודות הנמצאות מחוץ למעגל זה.



תרגיל נוסף

מה אפשר להגיד על הנקודות הנמצאות בטבעת שבשרטוט?



תשובה

המרחק מהראשית של כל אחת מהנקודות הוא מספר בין 4 ל- 5.

מעגל וישר (עמודים 151 - 155 בספר)

סעיף זה דן במצבים ההדדיים בין ישר ובין מעגל שמרכזו (0 , 0).
תחילה, תוך כדי פתרון תרגיל, מזכירים את המשמעות של נקודת חיתוך, ולאחר מכן קוראים את נקודות החיתוך מהגרף, רק אחר כך עוברים לפתרון אלגברי של מציאת נקודות אלה על-ידי פתרון משוואות. בפתרון האלגברי מוצאים קודם נקודות חיתוך בין מעגל לישר המקביל לאחד הצירים, ורק אחר כך בין מעגל וישר כלשהו. תוך כדי פתרון משוואות חוזרים על אותן הטכניקות האלגבריות הדרושות לסעיף.

תרגיל 1

מטרת תרגיל זה היא להזכיר את המשמעות של "נקודות חיתוך" תוך חזרה על המשמעות האלגברית של "נקודה נמצאת על . . . (ישר, מעגל)".

א) $(4.4 , -0.8)$, $(2 , 4)$, $(-4 , -2)$

ב) $(1 , 6)$, $(0 , 8)$, $(2 , 4)$, $(4.4 , -0.8)$

ג) $(4.4 , -0.8)$, $(2 , 4)$

תרגיל 2

כהמשך לתרגיל הקודם, מוצאים נקודות חיתוך מהגרף, קוראים את השיעורים ובודקים אלגברית את מה שמצאו.
נקודות החיתוך על פי השרטוט: $(4 , -3)$, $(-3 , 4)$.
הבדיקה נעשית על ידי הצבת שיעורי הנקודות בכל אחת מהמשוואות.

תרגיל 3

לפני שניגשים ללמוד כיצד למצוא אלגברית נקודות חיתוך בין ישר למעגל, בודקים גאומטרית (כמו שנעשה עם ישרים), מה הם המצבים ההדדיים בין ישר למעגל שמרכזו (0 , 0). רצוי להשתמש בשקפים (או באמצעי הדגמה אחר) להניח על שקף, בו משורטטת מערכת צירים, מעגל שמרכזו (0 , 0). לבקש מהתלמידים לגשת ולהניח ישרים כלשהם. לאחר מכן דנים באפשרויות השונות של חיתוך בין ישר למעגל. (הסיכום רשום בסוף עמוד 153 בספר).

לסיום התרגיל, מומלץ לרשום משוואה של מעגל כלשהו שמרכזו ראשית הצירים, ולבקש מן התלמידים להציע משוואות של ישרים לפי המצבים ההדדיים השונים.

בכיתות הניסוי, רוב התלמידים נטו להציע ישרים מקבילים לאחד הצירים. יש לעודד מציאת ישרים אחרים ששיפועם שונה מאפס, במיוחד אלה שיש להם שתי נקודות חיתוך (למשל, העוברים דרך הראשית), או אלה שאין להם נקודות חיתוך עם המעגל. בשלב זה קשה יותר למצוא ישרים ששיפועם שונה מאפס המשיקים למעגל.

תרגיל 4

אמנם המעגל והישרים נתונים בהצגה אלגברית, אך קל למצוא את נקודות החיתוך גם בעזרת השרטוט ובדיקה במשוואה. מכיוון שהתלמידים כבר התנסו בשיטת הצבה כזו, כשעסקו במציאת נקודות חיתוך בישרים, יש לעודד גם בשלב זה את השימוש בדרך האלגברית.

א) $(3\ ,\ 4)$, $(3\ ,\ -4)$ ב) $(4\ ,\ 3)$, $(-4\ ,\ 3)$ ג) $(0\ ,\ 5)$

תרגיל 5

ההצגה הגרפית, שבתרגיל, משמשת רק לתמיכה, וכנקודת מוצא לעבודה בייצוג האלגברי - תחילה יש לרשום את משוואות המעגל והישר על פי הנתונים.
אחר-כך יש למצוא את נקודות החיתוך בדרך אלגברית. (התמיכה באמצעות הסריג הוסרה ולכן אין אפשרות אחרת.)

א) משוואת המעגל: $x^2 + y^2 = 169$, משוואת הישר $x = 5$.

ב) $(5\ ,\ 12)$, $(5\ ,\ -12)$

תרגיל 6

כמבוא למציאת נקודות חיתוך בין מעגל לישר כלשהו מהצורה $y = ax + b$, רצוי לחזור ולתרגל מעט מן הטכניקה הדרושה לכך.

א) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ ד) $(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{4}x^2$

ב) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ ה) $(-3x)^2 = 9x^2$

ג) $(2x)^2 = 4x^2$ ו) $(4 - 2x)^2 = 16 - 16x + 4x^2$

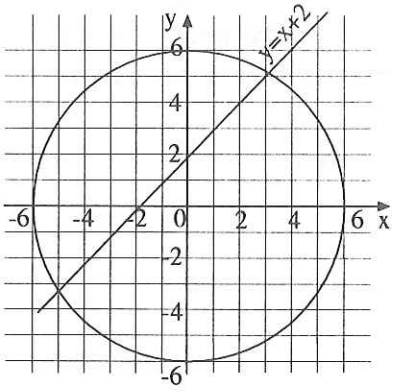
תרגיל 7

נקודת המוצא בתרגיל היא גרפית ולה שתי מטרות:

- ליצור מוטיבציה לצורך בדרך פתרון אלגברית, כי הגרף "איננו מדויק".
- להיעזר בערכים שנאמדו, על-מנת להשוות אותם לפתרון האלגברי, ולקבל תחושה של קירוב והגיוניות.

האומדן יוצר ציפייה לתחום המקורב של הפתרון שמחפשים.

א)



ב) נקודות החיתוך: (3.12 , –5.12) , (–3.12 , 5.12).

תרגילים

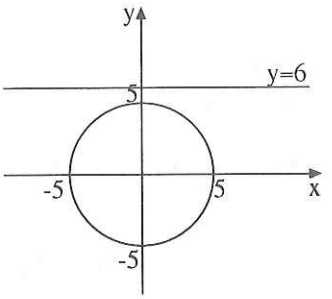
תרגיל 8

לפתרון התרגיל, התלמידים מתבקשים להניח מעגלים וישרים במערכת הצירים, אך אפשר גם לתרגל שימוש בשרטוט מדגים כשהמטרה היא:

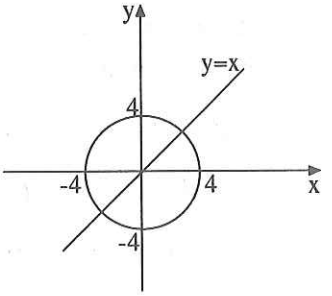
- להבליט שוב את המצבים ההדדיים.
- לתת באמצעות הגרף תחושה אינטואיטיבית של הפתרון, כבסיס וכעזר, שכנגדו בודקים את הפתרונות האלגברים.

השרטוטים להלן הם "שרטוטים מדגימים" של כל אחד מהמצבים שבשאלה.

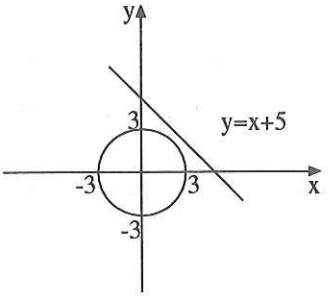
א) אין נקודות משותפות.



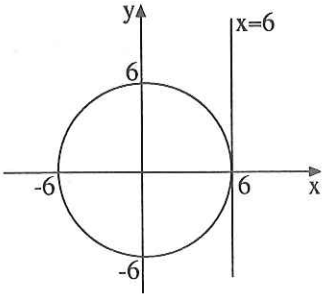
ב) שתי נקודות משותפות:
$(2.82\ ,\ 2.82)$, $(-2.82\ ,\ -2.82)$.



ג) אין נקודות משותפות.



ד) נקודת חיתוך אחת: $(6\ ,\ 0)$.



תרגיל 9

א) משוואת המעגל: $x^2 = y^2 = 25$, משוואת הישר: $y = \frac{3}{4}x$.

נקודות החיתוך: $(4 , 3)$, $(-3 , -4)$.

ב) $(0 , 5)$ ג) $(-3.53 , 3.53)$, $(3.53 , -3.53)$

תרגיל 10

בתרגיל זה יש חזרה נוספת על טכניקה אלגברית.
ישנם תלמידים שיזכרו בעל-פה את נוסחאות הכפל המקוצר, אך רצוי להראות, שאם לא זוכרים את הנוסחאות, תמיד אפשר לשחזר אותן. לכן בפישוט תבניות מהסוג הזה רצוי להרגיל את התלמידים לרשום אותן כמכפלה ולכפול.

א) $y^2 + 14y + 49$ ה) x^2

ב) $x^2 - 2x + 1$ ו) $4x^2$

ג) $x^2 + 14x + 49$ ז) $4x^2 + 4x + 1$

ד) $9x^2$ ח) $9x^2 - 12x + 4$

תרגילים 11 - 14

בתרגילים אלה מוצאים, בדרך אלגברית, את נקודות החיתוך בין מעגל וישר. בחלק מהתרגילים ניתנה הסקיצה של השרטוט, על-מנת שהתלמידים יוכלו לקבל תחושה של הגיוניות התשובה, וכדי שיוכלו לבנות לעצמם תמיכה.

תרגיל 11

א) 6 ב) שיעורי נקודות החיתוך: $(4.24 , 4.24)$, $(-4.24 , -4.24)$.

תרגיל 12

$(6 , 8)$, $(-8 , -6)$

תרגיל 13

$(12 , 5)$, $(-5 , -12)$

תרגיל 14

$B(-2\ ,\ -4)$, $C\ (2\ ,\ 4)$

כדאי לנצל את ההזדמנות כדי לקשר מושגים שונים מחומר הלימוד, למשל לשאול כאן את התלמידים "מה רדיוס המעגל?", (אפשר למצוא בשתי דרכים שונות: חישוב במחשבון של $\sqrt{20}$, או כמרחק בין $(0\ ,\ 0)$ ל- $(2\ ,\ 4)$).

הצעות לתרגילים נוספים

I. רשום משוואות של מעגל וישר שהנקודה המשותפת להם היא $(0\ ,\ -4)$.

II. מה אורך הקטע של הישר $y = x$, ה"כלוא" במעגל $x^2 + y^2 = 25$?

פתרונות

I. בשלב זה, מדובר במעגל שמרכזו $(0\ ,\ 0)$.
המעגל: $x^2 + y^2 = 16$, הישר: $x = -4$.

II. יש מספר דרכים לפתור שאלה זו, ואחת מהן משתמשת במושג הקוטר.
אורך הקטע : 10.

לא רק $(0 , 0)$ כמרכז (עמודים 156 - 163 בספר)

המהלך בסעיף זה דומה לזה שבסעיף הקודם. מתחילים ממקרה פרטי, בו מסמנים מספר נקודות המקיימות את התכונה (המרחק מנקודה נתונה, קבוע) מכלילים ומוצאים את אוסף כל הנקודות האלה. לבסוף מוצאים את המשוואה האלגברית המתאימה: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ כאשר (a , b) המרכז, r הרדיוס של המעגל.

רצוי להשאיר את המשוואה בצורה הזו, כי כך נוח יותר "לקרוא" מתוך המשוואה את המרכז ואת הרדיוס. כמו כן נוח יותר לבדוק מיקומן של נקודות שונות ביחס למעגל על-ידי שרטוט "מקורב" של המעגל.

תרגיל 1

בשלב הראשון מוצאים נקודות.

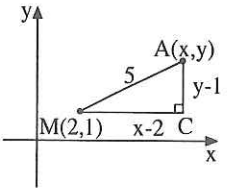
א) רוב התלמידים ימצאו תחילה את הנקודות $(1 , 7)$, $(-4 , 2)$, $(6 , 2)$, $(1 , -3)$.
כדאי להציע להיעזר בשיקולים של סימטריה, למשל, לגבי הישר $y = 1$ כדי למצוא את $(6 , -2)$, או לגבי הישר $x = 2$ כדי למצוא את $(4 , -2)$.
כדאי גם להזכיר את הדרך בה מצאו מרחק, ואז לשרטט מדרגה שרוחבה 3 וגובהה 4, כדי למצוא את הנקודות $(5 , 5)$, $(-3 , 5)$, $(5 , -1)$, $(-3 , -1)$.

חשוב לציין, כי מציאת הנקודות השונות הוא תרגיל חשוב בפני עצמו, מהסיבות הבאות:

- מדגימים כיצד נוצר המקום הגאומטרי.
- מתבססים וחוזרים על שיקולים גאומטריים ועל מושגים שלמדו.
- מכינים את הקרקע בעזרת מספרים, לבניית ההכללה שבסעיף ג'.

ב) מעגל שמרכזו $(1 , 2)$ ורדיוסו 5.

ג) המשולש AMC הוא ישר זווית, לכן לפי משפט פיתגורס מתקבל:
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$.



בשלב זה כדאי:

- לבדוק במשוואה נקודה אחת או שתיים שמצאנו קודם.
- להתבונן בתבנית שהתקבלה מול משוואת מעגל בעל אותו רדיוס שמרכזו $(0 , 0)$, כלומר ראיית המבנה בכללותו:
$(x - \square)^2 + (y - \square)^2 = r^2$ הכולל בתוכו את $x^2 + y^2 = r^2$.

אפשר לתמוך בהשוואה זאת על-ידי רישום מספרים כרצוננו, במשבצות הריקות ולראות x^2 כ- $(x - 0)^2$.

תרגיל 2

על מנת להדגים שנית את המהלך של התרגיל הקודם, חוזרים על אותו תהליך, הפעם עם מרכז שנמצא ברביע השני.

לפני שרושמים תבניות ל- MC ול- PC, רצוי לרשום בשרטוט את שיעורי הנקודה C שהם $(x\ ,\ 2)$. משוואת המעגל: $(x+3)^2+(y-2)^2=100$.

תרגיל 3

א) אורכי הניצבים: $MC=x-2$, $PC=y-1$.

ב) משוואת המעגל: $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

כדאי לעודד תלמידים, שייעזרו ברישום שיעורי C.

לאחר הסיכום שמופיע בספר, כדאי לדון עם התלמידים גם בצורה של משוואת מעגל שמרכזו על אחד הצירים.

תרגיל 4

תרגיל זה מיועד לפתח את היכולת לקרוא מתוך התבנית את שיעורי המרכז ואת אורך הרדיוס. בפעילות דומה עסקו התלמידים בנושא "הקו הישר", שם למדו לזהות את הפרמטרים מתוך המשוואה.

א) המרכז $(1\ ,\ 3)$ הרדיוס 6.

ב) המרכז $(3\ ,\ 2)$ הרדיוס 9.

ג) המרכז $(-1\ ,\ 0)$ הרדיוס 5.

ד) המרכז $(5\ ,\ 1)$ הרדיוס 7.

ה) המרכז $(6\ ,\ -1)$ הרדיוס 4.

ו) המרכז $(0\ ,\ 3)$ הרדיוס $\sqrt{5}$.

תרגיל 5

המשימה בתרגיל זה "הפוכה" מהמשימה שבתרגיל הקודם, ומטרתה לבנות את משוואת המעגל על פי נתונים.

א) $(x-2)^2+(y-4)^2=36$.

ב) $(x)^2+(y+2)^2=1$.

יהיו תלמידים שירשמו את המשוואה בצורה

$(x-0)^2+(y+2)^2=1$.

במקרה זה כדאי לדון ביתרונות ובחסרונות של כל אחת מהצורות.

ג) $(x+1)^2+(y-3)^2=16$.

תרגיל 6

את התרגיל אפשר לפתור על-ידי הנחת מעגל מתאים במערכת הצירים, וקריאה מהמערכת את מיקום הנקודות, אך רצוי גם לבדוק את הנקודות על-ידי הצבה במשוואה.

הנקודות שנמצאות על המעגל הן:

$A(1\ ,\ 7)\ ,\ C(-2\ ,\ -2)\ ,\ D(1\ ,\ -3)\ ,\ E(-4\ ,\ 2)\ ,\ G(4\ ,\ -2)\ ,\ H(5\ ,\ -1)$.

תרגיל 7

בתרגיל זה, התלמידים מתאמנים בשרטוט או בהנחת מעגלים על פי המשוואות שלהם. התלמידים יכולים להיעזר גם במעגלים שעל הדף השקוף.
על-מנת לבדוק אם שרטטו או הניחו נכון, כדאי לבקש שירשמו בכל סעיף שיעורי נקודה הנמצאת על המעגל או בתוך העיגול.

תרגיל 8

במהלך פתרון תרגיל זה חוזרים על מציאת שיעורי אמצע קטע, מציאת מרחק בין נקודות ורישום משוואת מעגל. כיון שזאת הפעם הראשונה שפוגשים את המושג "קוטר", רצוי לוודא שהתלמידים יודעים את הקשר שלו לרדיוס.

א) מרכז המעגל (7 , 7).

ב) את רדיוס המעגל אפשר למצוא בשתי דרכים (רצוי לעודד פתרונות שונים):
- מחצית אורך הקוטר AB.
- מרחק המרכז (7 , 7) מאחת הנקודות A או B.

מתקבל רדיוס המעגל: 5 ,
משוואת המעגל: $(x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 25$

אפשר לבקש מהתלמידים לבדוק במשוואה, שאכן הנקודות (3 , 10), (11 , 4) הן על המעגל, כדי:
- להזכיר את הקשר הקרטזי.
- לחזור על פעולת ההצבה.
- לבדוק אם לא טעו במציאת משוואת המעגל.

בדיקות מסוג זה עשויות לעזור לתלמידים למצוא שגיאות, אם הן קיימות, ולתקן את עצמם.

תרגיל 9

בסעיפים קודמים (עמודים 36 - 38) הזזנו ישרים שעוברים דרך (0 , 0), לאורך ציר y, כדי להכיר משוואות של ישרים אחרים המקבילים להם. דנו עם התלמידים במה שנשמר ומה משתנה בהזזות כאלה.
באופן דומה, אפשר לדון כאן עם התלמידים בהזזת מעגלים שמרכזם (0 , 0) לאורך ציר x, לאורך ציר y, או לנקודה כלשהיא במערכת הצירים, ללמוד להכיר את המשוואה של המעגל "המוזז" ולראות מה נשמר ומה משתנה.

א) המרכז החדש (2 , 0), הרדיוס 3, לכן המשוואה: $x^2 + (y - 2)^2 = 9$.

ב) המרכז החדש (3 , 0), הרדיוס 3, לכן המשוואה: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.

ג) המרכז החדש (2 , 3), הרדיוס 3, לכן המשוואה: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

תרגיל 10

א) התחום המתאים לאי-שוויון הוא קבוצת כל הנקודות הנמצאות בפנים המעגל או עליו.

מרכז המעגל (2 , 0) ורדיוסו 2.23 (= $\sqrt{5}$).

תרגילים

תרגיל 11

הנתונים בתרגיל מוצגים הן מילולית והן גרפית. מטרת ההצגה הגרפית לתת תמיכה למציאת הרדיוס, על פי המרכז ונקודה על המעגל.

רדיוס המעגל 5, ומשוואת המעגל: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

תרגיל 12

א) המרכז (4 , 0) והרדיוס 6.

ב) D(0 , 10)

ג)-ד) אפשר לשרטט או להניח מעגל מתאים במערכת הצירים ולקרוא מהגרף, אפשר גם להיעזר בשרטוט סקיצה ובשיקולים (כמו מרחק מהמרכז) כדי לרשום נקודות כנדרש.

תרגיל 13

א) $(x - 5)^2 + (y + 12)^2 = 169$.

ב) המעגל עובר דרך ראשית הצירים.

התלמידים יכולים לנמק על-ידי הצבת שיעורי הנקודה (0 , 0) במשוואה, ובדיקה אם מתקבל פסוק אמת, או על-ידי חישוב מרחק הראשית מהנקודה (5 , –12).

תרגיל 14

א) מרכז (3 , 2) רדיוס 9.

ב) מרכז (–1 , –3) רדיוס 10.

ג) מרכז (0 , 3) רדיוס 7.

ד) מרכז (–4 , 2) רדיוס 5.47.

תרגיל 15

תלמידים יכולים לגשת לפתרון בדרכים שונות: לבחור שרטוט ולחפש משוואה מתאימה או להיפך. רצוי לדון בכיתה באפשרויות השונות. לאחר הפתרון אפשר לתת תרגילים, לזיהוי מהיר של מעגלים שמרכזם על אחד הצירים, ולזהות על איזה ציר המרכז נמצא.

א) $(x-1)^2+y^2=9$ ב) $x^2+(y-1)^2=9$

ג) $x^2+(y+1)^2=9$ ד) $(x+1)^2+y^2=9$

תרגיל 16

כדאי לעודד תלמידים לשרטט שרטוט מדגים כתמיכה למהלך הפתרון.

א) מרכז (3 , 10) ב) הרדיוס 7.07

ג) משוואת המעגל: $(x-3)^2+(y-10)^2=50$.

תרגיל 17

א) המרכז החדש (3 , 2) הרדיוס 3, ולכן המשוואה $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

ב) המרכז החדש (4 , –3) הרדיוס 3, ולכן המשוואה $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

סעיפים נוספים לתרגיל

I. מה המצב ההדדי של שני המעגלים שמתקבלים בסעיפים א' וב'? או בין אחד המעגלים האלה והמעגל המקורי?

II. מה המרחק בין מרכזי המעגלים שהתקבלו בסעיפים א' וב'?

III. הצע הזזה כזו, כך שלמעגל החדש לא יהיו נקודות משותפות עם המעגל המקורי, או שתהיה לו נקודה משותפת אחת בלבד.

תרגיל 18

א) מרכז המעגל (–2 , 1) ורדיוסו 4, לכן התיאור המתאים לאי-שוויון $(x-1)^2+(y+2)^2\le 16$, הוא אוסף כל הנקודות שבתוך המעגל או שעליו.

עוד על מעגל וישר (עמודים 164 - 165 בספר)

בסעיף זה דנים במצב ההדדי שבין מעגל וישר, ובין שני מעגלים כלשהם.
בשלב הראשון מוצאים נקודות חיתוך של מעגל כלשהו עם הצירים, תחילה מתוך הגרף ואחר כך על ידי הצבה.
בשלב השני חוזרים על נקודות חיתוך של מעגל וישר כלשהו, ודנים במספר הנקודות המשותפות האפשריות בין מעגל וישר (מצבים הדדיים).
בשלב השלישי דנים במצבים ההדדיים שבין שני מעגלים. נעזרים בשרטוט כדי למצוא את מספר נקודות החיתוך בין זוגות מעגלים.
בכל אחד מהשלבים רצוי להיעזר בשרטוט לבדיקה.

בסעיף זה לא מופיעים תרגילים של חישוב נקודות חיתוך בין מעגל וישר או בין שני מעגלים. תרגילים כאלה יטופלו בשלב מאוחר יותר במסגרת החזרות ובמסגרת הטיפול בפתרון משוואות.

תרגיל 1

נקודות החיתוך עם הצירים: $(3\ ,0)$, $(-3\ ,0)$, $(0\ ,-2)$, $(0\ ,4)$.

תרגיל 2

$(5\ ,0)$, $(-5\ ,0)$, $(0\ ,9)$, $(0\ ,-1)$

תרגיל 3

בשני התרגילים הקודמים אפשר היה לקרוא במדויק, או בקירוב מתוך השרטוט, את נקודות החיתוך עם הצירים, להציב במשוואה לשם בדיקה. כדי לדייק יותר בתשובות נעזרים בדרך האלגברית. ייתכן שבשלב זה תלמידים שכחו דרך זו לכן בסעיף ב' ניתנת התמיכה לדרך החישוב.

מהפתרון האלגברי מתקבלות הנקודות:
$(6.92\ ,0)$, $(-4.92\ ,0)$, $(0\ ,4.92)$, $(0\ ,-6.92)$.

תרגיל 4

א) מרכז המעגל (12 , 6) ורדיוסו 10. למעגל אין נקודות חיתוך עם ציר x. את נקודות החיתוך עם ציר y מוצאים בדרך אלגברית.
מתקבלות הנקודות: (4 , 0) , (20 , 0).

ב) מרכז המעגל (0 , –4) ורדיוסו 6.
נקודות החיתוך עם הצירים:
(2 , 0) , (–10 , 0) , (0 , 4.47) , (0 , –4.47).

כדאי לדון עם התלמידים בשאלה, כיצד רואים רק מהנתונים אם יש או אין למעגל נקודות חיתוך עם הצירים. (אם לא מצליחים לראות מהמשוואה, אז נעזרים בשרטוט מדגים.)
בכיתות הניסוי היו תלמידים שמצאו את נקודות החיתוך משיקולים של המרכז והרדיוס, דבר המעיד על הבנת תכונת המעגל כמקום גאומטרי.

תרגיל 5

א) אין נקודות חיתוך.

ב) שתי נקודות חיתוך: (3 , 4.9) , (3 , –4.9).

ג) נקודה משותפת אחת (0 , 0).

ד) אין נקודות חיתוך.

תרגיל 6

תלמידים רבים נוטים לרשום משוואות של ישרים המקבילים לאחד הצירים, לאחר רישום משוואת מעגל.
בסעיף ג' הם נוטים לרשום משוואת מעגל שמרכזו (0 , 0), וישרים מהצורה $y = ax$.
כדאי לעודד אותם למצוא גם פתרונות אחרים.

תרגיל 7

תרגיל זה דן במצבים ההדדיים של שני מעגלים שמשוואותיהם נתונות.

א) שתי נקודות חיתוך ב) שתי נקודות חיתוך.

בסיום רצוי לעשות דיון כללי על המצבים ההדדיים של שני מעגלים, ולבקש מהתלמידים משוואות מתאימות.

חשוב להדגיש שהתלמידים נדרשים למצוא רק את מספר נקודות החיתוך ולא לחשב אותן.

כדי להבטיח שהתלמידים רואים, שמרכז משותף זאת לא נקודה משותפת של המעגלים, אפשר גם לשאול על מספר הנקודות המשותפות בין מעגלים מהסוג:

$$(x-3)^2+(y-3)^2=25$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=60$$

הצעות לתרגילים נוספים

I. רשום משוואה של מעגל שנמצא כולו
   - ברביע הראשון,
   - ברביע השלישי.

II. רשום משוואה של מעגל שחותך את ציר x פעם אחת, ואת ציר y פעם אחת.

III. רשום משוואה של מעגל שמרכזו על ציר x, ואינו חותך את ציר y.

IV. אם מרכז המעגל נמצא על הציר, בכמה רביעים הוא עובר? נמק.

V. רשום משוואה של מעגל שעובר דרך שלושה רביעים בלבד.

תרגילים כאלה מעודדים את הבנת הקשר בין הייצוגים הגרפי והאלגברי. תלמידים יכולים לשרטט סקיצה ולראות את הגרף ב"עיניים אלגבריות".

פרק ה' - קבוצות של נקודות - משוואות וגרפים

(עמודים 166 - 171 בספר)

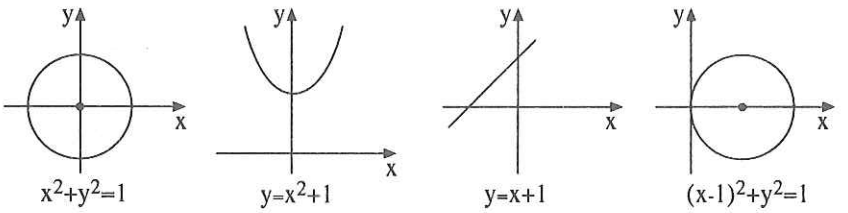
כפי שראינו בפרק א' - נקודת המוצא של קבוצות של נקודות (מקומות גאומטריים) היא התכונה אותה מקיימת כל נקודה בקבוצה. בפרק זה אנו למעשה "סוגרים את המעגל" של הצורות במישור, הנדרשות מהתלמידים לפי תכנית הלימודים.

כדי למצוא את הצורה הנדרשת, התלמידים מצאו תחילה מספר נקודות המקיימות תכונה מסוימת, בעזרת נקודות אלה גילו את השרטוט המתאים לקבוצת כל הנקודות המקיימות אותה תכונה, ומכאן הגיעו למשוואה האלגברית המתאימה.

מהפרקים הקודמים התלמידים מכירים את הייצוג הגרפי ואת הייצוג האלגברי של ישרים, מעגלים ופרבולות. בפרק זה הם מגלים תכונה נוספת בפרבולה, ומכירים את האליפסה באמצעות גרף ומשוואה.

תרגיל 1

מטרת התרגיל לקשר בין משוואה לשרטוט, בצורות המוכרות לתלמידים (ישרים, מעגלים ופרבולות). כיון שהשרטוט נתון בסקיצה, התלמידים נדרשים, למעשה, לגלות את התיאור הגרפי המסתתר מאחרי כל משוואה.



תרגיל 2

מטרת התרגיל היא פיתוח המיומנות לראות את האלגברה "בעיניים גרפיות".

רצוי לבקש מהתלמידים לשרטט סקיצה לחלק מהמשוואות שבתרגיל.

א) מעגל שמרכזו $(-1, 4)$ ורדיוסו 6.

ב) ישר ששיפועו 2 החותך את ציר y בנקודה $(0, -5)$.

ג) ישר מקביל לציר x ועובר דרך הנקודה $(0, 2)$.

ד) פרבולה בעלת קודקוד מינימום, וציר הסימטריה שלה הוא $x = 1.5$.

ה) ישר ששיפועו $\frac{2}{3}$ ועובר דרך הנקודה $(0, -5)$.

ו) מעגל שמרכזו (0 , 0) ורדיוסו 3.16 (= $\sqrt{10}$).

ז) מעגל שמרכזו (–2 , 0) ורדיוסו 4.

ח) ישר שהוא ציר y.

ט) ישר ששיפועו 1– ועובר דרך (0 , 0).

י) מעגל שמרכזו (3 , 2–) ורדיוסו 3.87 (= $\sqrt{15}$).

יא) פרבולה בעלת קודקוד מינימום (0 , 0) וציר הסימטריה שלה הוא $x = 0$.

יב) פרבולה בעלת קודקוד מקסימום, וציר הסימטריה שלה הוא $x = 0.75$.

תרגיל 3

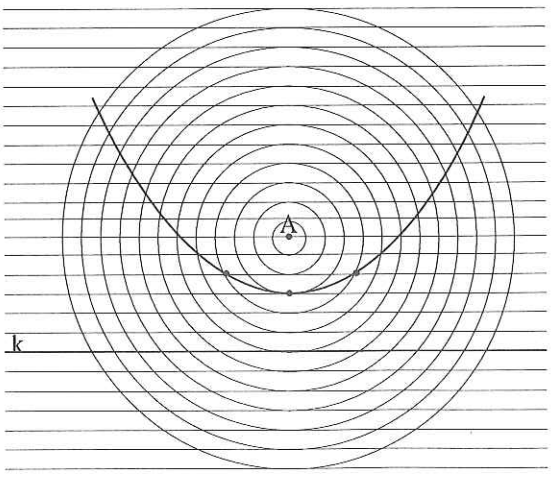
תרגיל זה עוסק בשרטוט פרבולה, כקו המתקבל מאוסף כל הנקודות אשר מרחקיהן מנקודה קבועה ומישר קבוע שווים.

בסעיפים הקודמים למדו ותרגלו את המושגים "מרחק נקודה מישר" ו"מרחק נקודה מנקודה". על מנת לבצע את המשימה, חשוב לציין את העובדות הבאות הקשורות לשרטוט:

- הרדיוס של כל אחד מהמעגלים המרכזיים (בעלי מרכז משותף A) גדל ממעגל למעגל כגודל רדיוס המעגל הקטן.
- רדיוס המעגל הקטן שווה למרחק בין שני ישרים מקבילים, הקרובים זה לזה ומקבילים לישר קבוע k.

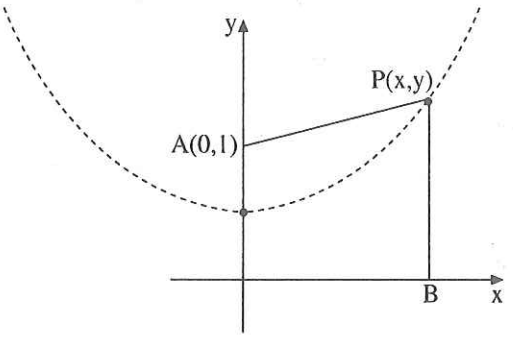
בהתייחס לעובדות אלה אפשר לומר שכל נקודת מפגש של מעגל, למשל המעגל החמישי עם הישר המקביל החמישי (אחת מהן היא זו שמסומנת בשרטוט שבספר) נמצאת במרחק שווה מ- A ומ- k. באותה דרך, נוכל לסמן את כל הנקודות בעלות התכונה הזו המתקבלות מהשרטוט.

הצורה המתקבלת היא פרבולה.



תרגיל 4

בתרגיל קודם שרטטו התלמידים את גרף הפרבולה, כשנעזרו בתכונה שלה כמקום גאומטרי. בתרגיל זה מתארים את הפרבולה בעזרת משוואה כלומר מתארים את התכונה הגאומטרית בצורה אלגברית - מתאימים משוואה לתכונת הפרבולה: הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודה (0 ,1) (שעל ציר y) ומציר x.



א) $PA^2 = x^2 + (y-1)^2$

ב) $PB = y$

ג) $x^2 + (y-1)^2 = y^2$

ד) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

ה) פרבולה בעלת קודקוד מינימום בנקודה $(0 , \frac{1}{2})$, וציר הסימטריה שלה הוא $x = 0$.

תרגיל 5

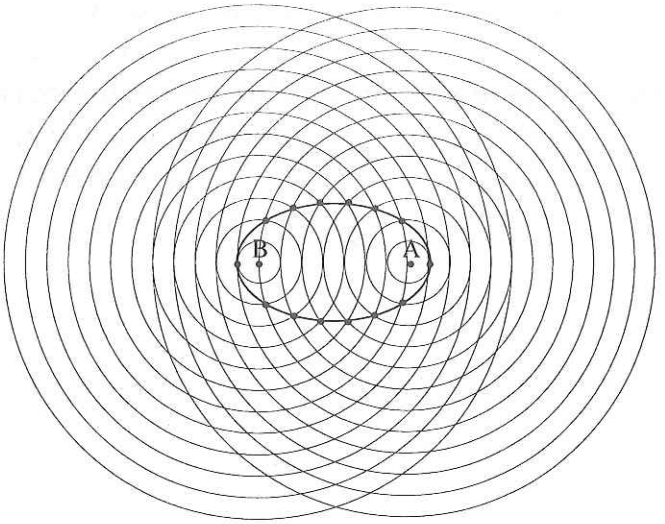
תרגיל זה מציג פרבולה בהצגתה האלגברית, ללא קשר לתכונה שלה כמקום גאומטרי.

בכיתות הניסוי התקבלו תשובות שונות, למשל, $y = x^2$ לסעיף א', ו- $y = -x^2$ לסעיף ב'. היו תלמידים שנעזרו במשוואות שבתרגיל 2 ורשמו אותן או משוואות דומות להן.

תרגיל 6

תרגיל זה עוסק בשרטוט אליפסה, כקו המתקבל מאוסף כל הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות נתון. יש לשים לב, שרדיוס המעגל הקטן ביותר הוא 1 יחידה, ורדיוס כל מעגל נוסף גדל ב-1 יחידה. למשל, הנקודה המסומנת, נמצאת על המעגל השלישי מ- A ועל המעגל השישי מ- B, לכן סכום מרחקיה מ- A ומ- B שווה ל- 9 יחידות. כמו-כן, כל נקודת מפגש של מעגל מרכזי מ- A עם מעגל מרכזי מ- B, כך שסכום מספריהם הסידוריים של המעגלים המרכזיים שווה ל- 9, תהיה נקודה רצויה.

הצורה המתקבלת היא אליפסה.



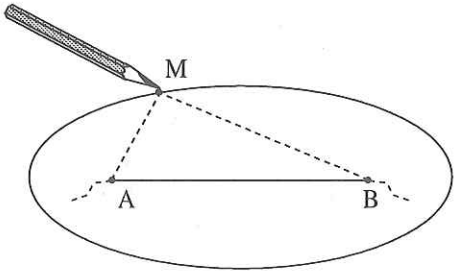
כדאי לשרטט עם התלמידים אליפסה גם בדרך הבאה:

א) נקח חוט שאורכו גדול מהמרחק בין A ל- B. (אורכו נותן בעצם את סכום המרחקים הקבוע.)

ב) נחבר קצה אחד ל- A ואת הקצה האחר ל- B.

ג) נמתח את החוט בעזרת עיפרון ונסובב את העיפרון סביב A ו- B, באופן שיהיה תמיד מאונך למישור השרטוט. העיפרון ישרטט אליפסה.

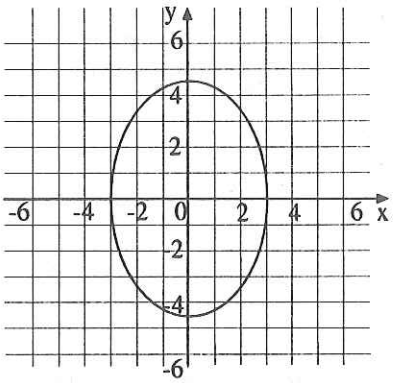
סכום המרחקים הקבוע הוא MA + MB.



תרגיל 7

בתרגיל זה רואים את התבנית האלגברית של האליפסה, כתוצאה מתהליך תרגום אלגברי של תכונת האליפסה כמקום גאומטרי. הפישוט הוא תהליך מסובך, ואינו נדרש מתלמידי 3 יח"ל, לפיכך נקודת המוצא היא אחרת: יוצאים ממשוואה ומחפשים נקודות המקיימות אותה, לאחר סימון נקודות אלה במערכת צירים וחיבורן מתקבלת האליפסה.

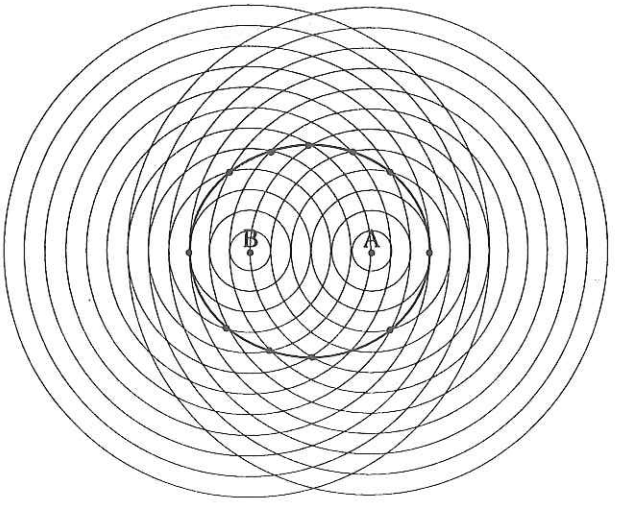
האליפסה המתקבלת היא:



תרגילים

תרגיל 8

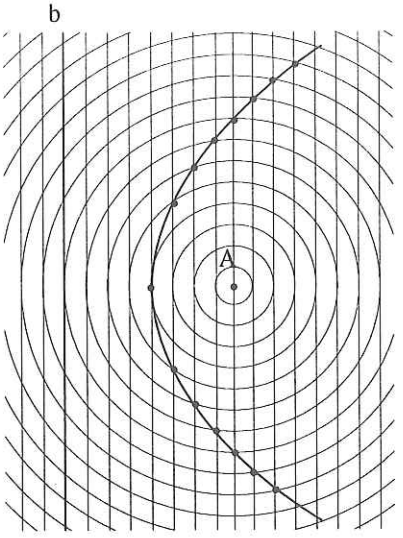
מתקבלת אליפסה לפי השרטוט:



תרגיל 9

בשני הסעיפים בתרגיל מתקבלות פרבולות. אם מעוניינים ויש זמן, אפשר לחקור עם התלמידים ולראות, כיצד משתנה הפרבולה כאשר מקרבים או מרחיקים את הישר b מהנקודה A.

א)



ב)

