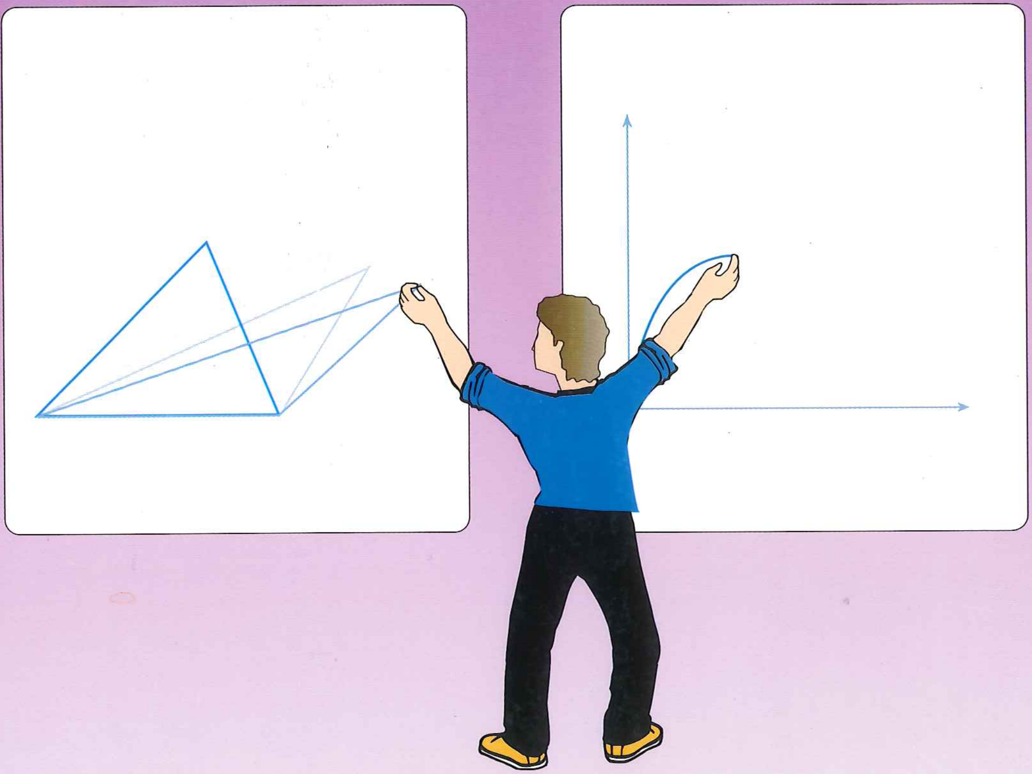
על השתנות גאומטרית וגרפים

אברהם הרכבי
נורית הדס



המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע, רחובות

מתימחשב

מתימחשב

על השתנות גאומטרית וגרפים

אברהם הרכבי
נורית הדס

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

יוצא לאור ביוזמתו ופיקוחו
של המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט:
משרד החינוך, התרבות והספורט, האוניברסיטה העברית בירושלים מכון ויצמן למדע ברחובות
ואוניברסיטת תל-אביב

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאכסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או
אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה.
שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט אלא ברשות מפורשת בכתב מהמו״ל.

©
כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע
ומשרד החינוך התרבות והספורט

נדפס בישראל תשנ״ט - 1999
הרצות פילמים: גרפאור בע״מ

חובר על ידי:
אברהם הרכבי
נורית הדס

ריכוז פרוייקט:
רנה הרשקוביץ

הערות והארות:
רוזי נעמתי
רן סגל

עריכה לשונית:
נגה ואן דורמולן-אברהמי

הדפסה ועריכה במחשב:
אורנה עמר

שרטוטים:
אסנת סרבגילי

עיצוב והפקה:
אגי (רחל) בוקשפן

לתלמיד ולמורה

בחוברת זו 13 פעילויות חקר, המשלבות פתרון בעיות גאומטריות עם חקירת ההשתנות של צורות גאומטריות, המתבצעת בו זמנית עם שינוי גרפי ונומרי. החקירה המשולבת הזו מאפשרת התייחסות לאפיונים שונים של התופעה הנחקרת.

לייצוגם השונים של ההשתנות גאומטרי, נומרי, ואלגברי, מספר תפקידים:

א) לאפשר העלאת השערות ובדיקתן.

ב) לעורר צורך בהסבר והוכחה של ממצאים מפתיעים שונים המתאימים להשערות שהועלו.

ג) לקשר בין השתנות של צורה גאומטרית על צג המחשב, לבין הביטוי של ההשתנות הזו בגרף ובייצוג האלגברי של הבעיה.

ד) לאפשר הסברים מסוגים שונים: הסברים המתבססים על השתנות גאומטרית או גרפית המתרחשות בו זמנית על הצג, הסברים המבוססים על משפטים והגדרות גאומטריים, והסברים באמצעות ביטויים אלגבריים.

העבודה בחוברת מתבצעת באמצעות תוכנה של גאומטריה דינימית: הנדסה בתנועה - Inevntor של Logal. (ההפצה של התוכנה נעשית על ידי מטח.)

הפעילויות מתאימות לשילוב במקומות שונים במהלך לימוד הגיאומטריה בכיתות ט' ו- י', בעיקר ברמות הגבוהות (4 ו- 5 יחידות לימוד).

רצוי לבצע את הפעילויות במסגרת של כל הכיתה ולשלב עבודה בזוגות ליד המחשב, עם דיונים כיתתיים במקומות המתאימים במהלך הפעילות.

כמו כן יוכלו זוגות של תלמידים בודדים לבחור, ולבצע פעילויות מסויימות. גם במקרה זה חשוב כי המורה יהיה מעורב בעבודה ובמתן היזון חוזר על הממצאים וההסברים.

אנו מקווים כי תהנו מהעבודה, וכי הפעילויות יציגו בפניכם פן נוסף של התמודדות עם בעיות גאומטריות, יגוונו ויעשירו את היכולת לחקור, להעלות השערות, להסיק מסקנות ולהסבירן.

תוכן עניינים

פעילות 1 - צלעות ואלכסונים במצולע 7

פעילות 2 - מרחקים לצלעות משולש 10

פעילות 3 - אלכסונים מאונכים ושווים 17

פעילות 4 - שטח מלבן 22

פעילות 5 - משולש שווה שוקיים 26

פעילות 6 - ואם המשולש לא שווה-שוקיים? 32

פעילות 7 - ישרים במעגל 38

פעילות 8 - מרחק מערים 42

פעילות 9 - השתנות שטח 48

פעילות 10 - השתנות שטח בתוך עיגול 55

פעילות 11 - צלעות וכל היתר 58

פעילות 12 - מוטות הרמוניים 64

פעילות 13 - זוויות מול קטעים שווים 69

שילוב הפעילויות

הפעילויות מתאימות לשילוב בשלבים מתקדמים של לימוד הגאומטריה ולאחר שמכירים את מושג הפונקציות. בעמוד זה אנו מפרטים החל מאיזה מקום, במהלך הלימוד, ניתן לשלב כל אחת מהפעילויות.

1. צלעות ואלכסונים במצולע: לאחר לימוד הנושאים מצולעים ומשפט פיתגורס בגאומטריה, והנושא פונקציה קווית באלגברה.
2. מרחקים לצלעות משולש: במהלך הוראת הנושא שטחים, או לאחריו.
3. אלכסונים מאונכים ושווים: לאחר היכרות עם תכונות קטע אמצעים במשולש.
4. שטח מלבן: במהלך, או לאחר, לימוד הנושא שטחים.
5. משולש שווה שוקיים: לאחר לימוד הנושא משולש שווה שוקיים בגאומטריה ולאחר לימוד הנושא מבוא לפונקציות.
6. ואם המשולש לא שווה שוקיים: לאחר, וברצף עם הפעילות הקודמת.
7. ישרים במעגל: בשלב בו מלמדים את המשפטים העוסקים בישרים ובמעגל. (הפעילות קשורה בדמיון משולשים ובנושא זוויות במעגל.)
8. מרחק מערים: בשלב מאוחר של לימוד הגאומטריה, בסוף כיתה ט', או בכיתה י', ולאחר לימוד משפט פיתגורס.
9. השתנות שטח: במהלך לימוד הנושא פונקציות (יכול להיות גם בעת לימוד הנושא מבוא לפונקציות.)
10. השתנות שטח בתוך עיגול: במהלך לימוד הנושא פונקציות ולאחר לימוד משפט פיתגורס, והנושא מעגל.
11. צלעות וכל היתר: במהלך או לאחר לימוד משפט פיתגורס.
12. מוטות הרמוניים: לאחר לימוד הנושא דמיון משולשים.
13. זוויות מול קטעים שווים: לאחר לימוד התכונות של משולש שווה שוקיים ובשלב בו מכירים את הנושא פונקציות. (רצוי בסוף כיתה ט').

פעילות 1 - צלעות ואלכסונים במצולע

בפעילות נבדוק את הקשר בין אורך האלכסון לאורך הצלע במצולעים משוכללים שונים.

1. בריבוע

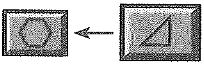
בחרו ריבוע.	← חופשי (ללא מגבלות). ← **בנה**.
העבירו את האלכסון AC.	← חברו את A עם C ← **בנה**.
מדדו את אורך AB.	← הביאו את המסגרת למסך והקישו, רשמו AB. (הקישו Enter להפסקת הכתיבה.)
מדדו את אורך AC.	← הביאו את המסגרת למסך הקישו, ורשמו AC. (הקישו Enter להפסקת הכתיבה.)
שרטטו גרף המתאר את אורך האלכסון כשאורך הצלע משתנה.	← הביאו את המסגרת למסך והקישו. הביאו את הסמן לַחֵץ הנמצא בקצה השמאלי של מד האורך (המודד את AB) לחצו, הזיזו לחץ שמתחת לציר האופקי ושחררו.
שנו יחידות על הצירים.	חזרו לגבי מד האורך AC והציר האנכי. הקישו הקשה כפולה על אחד הצירים ורשמו: ציר אופקי: מ-0 עד 10 ציר אנכי: מ-0 עד 20
שנו את הריבוע.	← גררו אחד מקודקודי הריבוע והגרף ישורטט.

היעזרו בשיקולים גאומטריים ואלגבריים כדי להסביר את הגרף שהתקבל.

2. במחומש

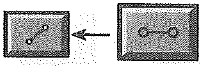
מחקו את הריבוע והשאירו את מערכת הצירים.

בחרו מחומש.



הקישו 5 צלעות. דאגו שהמשבצת משוכלל תסומן ב-x .

העבירו את האלכסון AC.

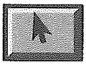


...

על מדי האורך יופיעו, כעת, אורך הצלע AB ואורך האלכסון AC של המחומש.

שערו, האם הגרף החדש יהיה "מעל" הגרף המשורטט או מ"תחתיו"?

שרטטו גרף.



גררו את אחד הקודקודים.

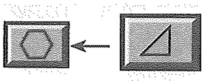
היעזרו במדי האורך כדי לחשב את הגרף.
(בעזרת דמיון משולשים, ו/או משפטים אחרים, אפשר למצוא את ערך השיפוע בלי ל"מדודי".)

המספר ... $1.61803 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ המייצג את השיפוע (היחס בין אורך האלכסון לאורך הצלע) במחומש משוכלל, נקרא "חתך הזהב". חתך הזהב מופיע בהקשרים שונים בגאומטריה, בארכיטקטורה, ואפילו בתופעות בטבע.

3. במשושה

מחקו את המחומש.

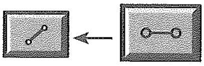
בחרו משושה.



הקישו 6 צלעות.

דאגו שהמשבצת משוכלל תסומן ב- x.

העבירו את כל האלכסונים מקודקוד A.

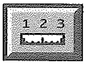


...

א) מה תוכלו לומר על אורכי האלכסונים מקודקוד A?

שרטטו גרף המתאר את השתנות אורכי האלכסונים לפי השתנות אורך הצלע.

על מדי האורך יופיעו כעת אורך הצלע AB ואורך האלכסון AC של המשושה. הביאו מד אורך נוסף ומדדו גם את AD.



...

שרטטו גרפים המתארים את השתנות האלכסון AC והשתנות האלכסון AD, כשהצלע AB משתנה.

שנו יחידות על הצירים ושרטטו גרף של AC. אחר כך חברו את מד האורך AD לציר האנכי ושרטטו את הגרף של AD.

ב) חשבו את שיפועי הישרים בעזרת שיקולים אלגבריים וגאומטריים, והשוו עם שיפועי הישרים המשורטטים.

ג) הסבירו מדוע שיפוע האלכסון AC גָדֵל, כאשר מספר צלעות המצולע גָדֵל.

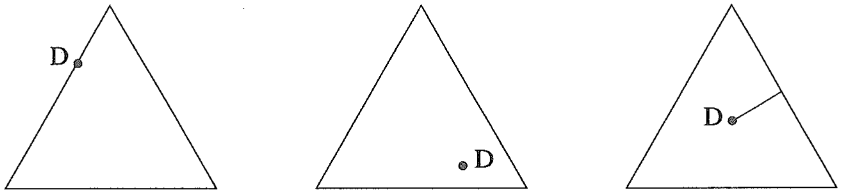
ד) הסבירו מדוע שיפוע האלכסון בכל מצולע תמיד קטן מ- 2.

פעילות 2 - מרחקים לצלעות משולש

בפעילות זו נעסוק בהשתנות סכום המרחקים של נקודה בתוך מצולע אל צלעותיו.

1. המשולשים המשורטטים כולם שווי צלעות.

א) שרטטו בכל משולש את המרחקים מ- D לצלעות. (מרחק אחד משורטט.)

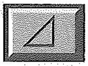
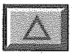


(i) (ii) (iii)

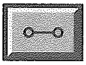
ב) באיזה משלושת המשולשים, סכום המרחקים לצלעות הוא הקטן ביותר, לדעתכם?

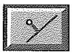
2. א) נשרטט גרף המתאר את סכום המרחקים לצלעות, כפונקציה של מרחק הנקודה מאחד הקודקודים.

בחרו משולש שווה צלעות, שבו אורך הצלע קבוע.

 ←  ← **היקף קבוע** 20 ← **בנה.**

העבירו אנכים מהנקודה לצלעות.

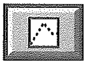
 ←הביאו את הסמן לנקודה בתוך המשולש והקישו, (תסומן D).

 ←אנך מ- D לישר BC ← **בנה.**

אנך מ- D לישר AB ← **בנה.**

אנך מ- D לישר AC ← **בנה.**

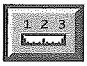
הביאו מערכת צירים ורשמו מה מייצג כל ציר:

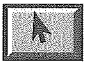
 ←הביאו את המסגרת למסך והקישו.
הביאו את הסמן מתחת לציר x, הקישו כך שיופיע סמן לכתיבה.
רשמו DA. (Enter לסיום הכתיבה.)
הביאו את הסמן מעל למסגרת השרטוט הלבנה, קצת מימין לציר y, והקישו כך שיופיע סמן לכתיבה.
רשמו את סכום המרחקים: DE + DF + DG.
(Enter לסיום הכתיבה.)

שנו יחידות על הצירים.

הקישו על אחד הצירים הקשה כפולה.
ציר אופקי: 0 - 10
ציר אנכי: 0 - 10

מדדו את סכום הקטעים.

 ←הביאו את המסגרת למסך והקישו.
רשמו את סכום המרחקים:
DE + DF + DG (Enter לסיום הכתיבה).

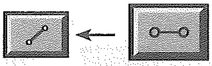
 ←גררו את D בתוך המשולש ועל הצלעות ולא מחוץ למשולש).

מה קיבלתם?

הזיזו את D ונסו לראות איזה גודל מייצג הסכום הזה.

כדי להמחיש זאת, נבנה את שלושת המרחקים על קטע אחד בתוך המשולש.

נבנה את DF כהמשך של ED מ- D.

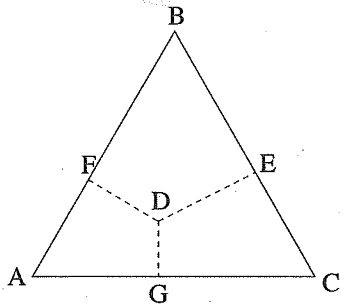


← מ- D אל E באורך DF
← הקשה כפולה של בנה.

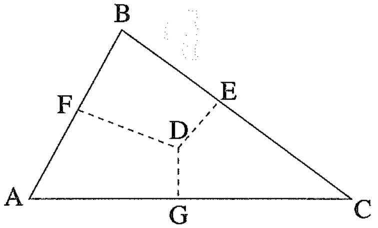
נבנה את DG כהמשך של הקטע החדש.

← מ- H אל D באורך DG
← הקשה כפולה של בנה.

גררו את D בתוך המשולש ועל הצלעות וקבעו למה שווה הגודל הנמדד.
הסבירו את התוצאה שהתקבלה. (תוכלו להיעזר בשטחי המשולשים הנוצרים בין כל זוג של קודקודי המשולש והנקודה D.)



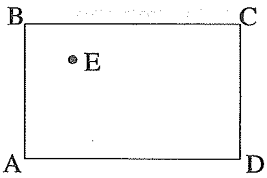
ב) – מה לדעתכם קורה לסכום המרחקים כאשר המשולש איננו שווה-צלעות?



– תוכלו לבדוק בעזרת המחשב.
בחרו משולש כלשהו וחזרו על בניית האנכים מנקודה D בתוך המשולש, כפי שעשיתם בחלק הקודם, והסבירו מה קורה.

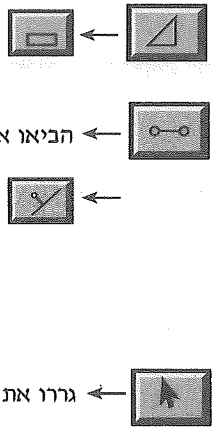
3. ומה במרובעים?

א) שערו מה קורה לסכום המרחקים של נקודה E מצלעות של מלבן.
תוכלו לבדוק באמצעות המחשב.



בחרו מלבן.

סמנו נקודה E בתוך המלבן, והעבירו אנכים לצלעות.



חופשי.

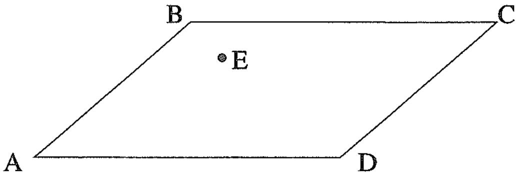
הביאו את הסמן למסך והקישו.

אנך מ - E
ל - AB
ל - BC
ל - CD
ל - DA

גררו את E.

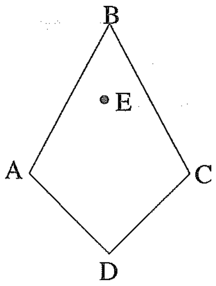
(כדי שהמלבן עצמו לא ישתנה אל תגררו את קודקודיו.)
כדי לבדוק איך משתנה הסכום, תוכלו למדוד.
הסבירו את הממצאים.

ב) שערו מה קורה, כאשר מדובר בסכום המרחקים של נקודה E מצלעות של מקבילית.



בדקו:
בחרו מקבילית, סמנו נקודה בתוכה, והעבירו את האנכים לצלעות.
תוכלו גם למדוד את סכום המרחקים.
הסבירו את הממצאים.

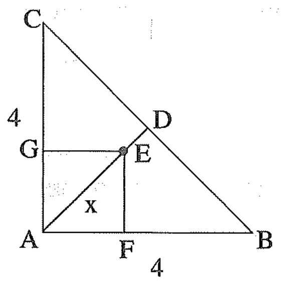
ג) שערו מה קורה, כאשר מדובר בסכום המרחקים של נקודה E מצלעות של דלתון. בדקו.



ד) מה קורה, לדעתכם, לסכום המרחקים של נקודה E מצלעות של מעוין? הסבירו.

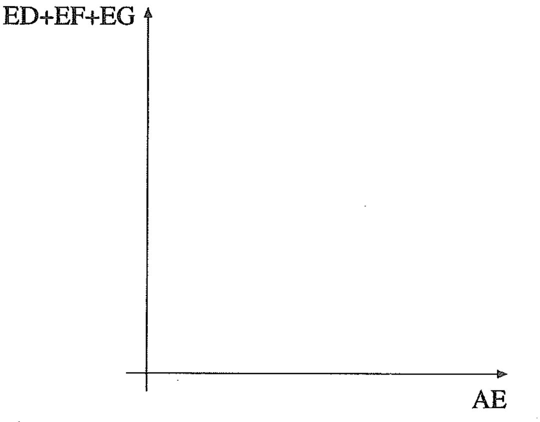
ה) ולסיכום תרגיל זה:
נסו למצוא איזו תכונה של המרובעים מבטיחה סכום מרחקים קבוע, והסבירו.

4. נבדוק מקרה פרטי מיוחד של סכום מרחקים משתנה.
ΔABC שווה-שוקיים וישר-זווית, והנקודה E, ממנה מודדים את סכום המרחקים, נמצאת על הגובה ליתר.



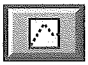
שרטטו AB באורך 4.	← הביאו את הסמן למסך, והקישו. תסומן נקודה A. ← ישר מ- A באורך 4.
שרטטו את הניצב AC באורך AB.	← אנך לישר AB, מ- A באורך AB.
חברו את B עם C.	← ישר מ- B ל- C.
העבירו גובה מ- A ל- CB.	← אנך מ- A ל- CB.
סמנו נקודה E על AD.	← הביאו את הסמן למקום כלשהו על AD והקישו, תסומן נקודה E.
העבירו אנכים מ- E ל- AB ול- AC.	← ...

א) שרטטו גרף משוער, המתאר כיצד משתנה סכום המרחקים כאשר AE משתנה. התייחסו לצורת הגרף כאשר מזיזים את E בתוך המשולש, ומחוץ למשולש מעבר ל- D.



שרטטו את הגרף באמצעות המחשב:

הביאו מערכת צירים.

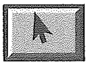


רשמו AE מתחת לציר x, ומעל ציר y
רשמו את סכום המרחקים ED+EF+EG.

שנו יחידות על הצירים.

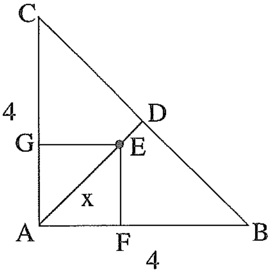
הקישו פעמיים על אחד הצירים . . .

גררו את E על הישר AD, גם בתוך המשולש וגם מחוצה לו.

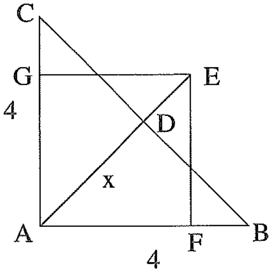


ב) הסבירו באופן אלגברי את הגרף שהתקבל:

- חשבו את AD, DB, CB.
- בטאו את סכום המרחקים כפונקציה של x,
  כאשר הנקודה E בתוך המשולש.

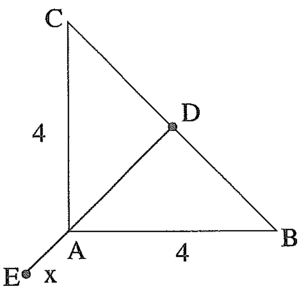


- בטאו את סכום המרחקים כפונקציה של x,
  כשהנקודה E מחוץ למשולש.



כיצד מסבירים הביטויים האלגבריים את הגרף שהתקבל?

ג) מה יקרה כשתזיזו את E מחוץ למשולש,
מעבר לנקודה A?
המשיכו את שרטוט הגרף על ידי גרירת E
מעבר ל- A, והסבירו.

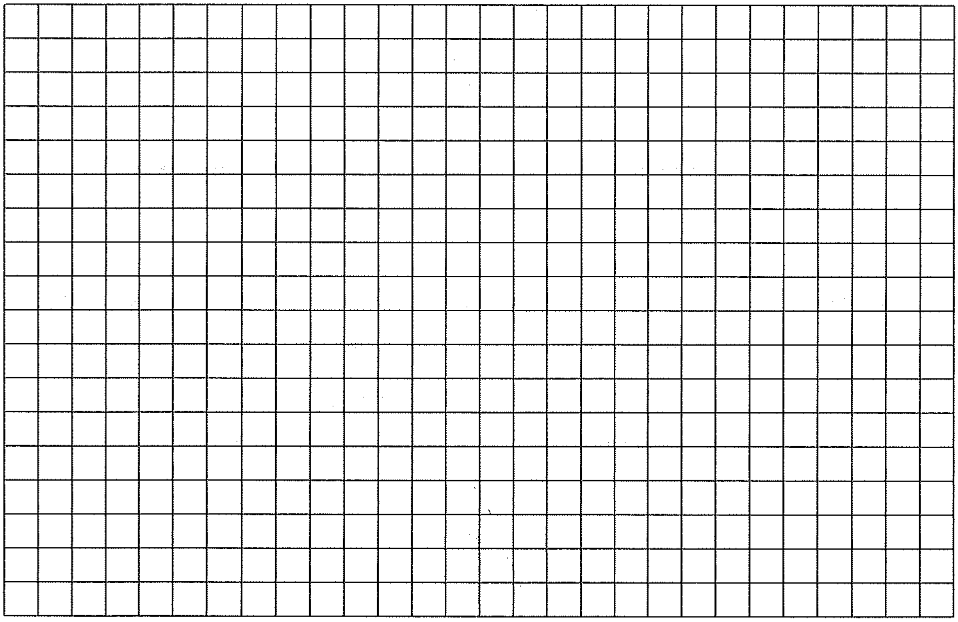


פעילות 3 - אלכסונים מאונכים ושווים

מאיזה סוג המרובע?

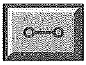
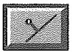
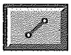
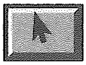
1. אילו מרובעים יתקבלו, לדעתכם, אם משרטטים מרובעים שאלכסוניהם מאונכים וגם שווים זה לזה?
רשמו ושרטטו דוגמאות.

2. א) שרטטו על הדף המשובץ, מרובעים שאורך אלכסוניהם 10 יחידות (יחידה - משבצת), והם מאונכים זה לזה. (התחילו משרטוט האלכסונים.)



3. חקרו את האפשרויות השונות, של מרובעים שאלכסוניהם מאונכים ושווים, באמצעות המחשב:

א) בנו במחשב מרובע שאלכסוניו שווים ומאונכים זה לזה.

שרטטו קטע AB.	 ← הביאו את הסמן למסך לחצו, הזיזו ושחררו. הביאו את הסמן לנקודה מחוץ ל- AB והקישו.
סמנו נקודה C, מחוץ לקטע AB.	
שרטטו אנך מ- C, ל- AB.	 ← אנך מ- C לישר AB
שרטטו על האנך קטע CE השווה ל- AB.	 ← ישר מ- C ל- D באורך AB.
חברו את צלעות המרובע ACBE.	← ישר מ- A ל- C. חברו את שאר הצלעות.
תוכלו לצבוע את צלעות המרובע בצבע שונה מצבע האלכסונים.	 ← לחצו על Shift וסמנו את הצלעות. **צבע** ← ...
שנו את המרובע.	

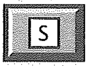
כשגוררים את C (ולא גוררים את A או B), אורך האלכסונים אינו משתנה.
בדקו והסבירו מדוע.

ב) – שנו את המרובע ובדקו אילו מרובעים יכולים להתקבל, ואילו מרובעים לא ניתן לקבל. (בדקו את כל סוגי המרובעים שאתם מכירים.)
– השוו עם השרטוטים ששרטטתם בתרגילים 1 ו- 2.
– האם ניתן לקבל דלתון שאינו ריבוע? אם כן, הראו. אם לא, נמקו.
– האם ניתן לקבל מלבן שאינו ריבוע? אם כן, הראו. אם לא, נמקו.
– האם ניתן לקבל מרובע שאינו דלתון, מקבילית, או טרפז?

4. **על שטחי המרובעים האלה**

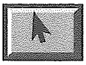
א) נבדוק את ההשתנות של השטח.

מדדו את השטח.



רשמו ACBE. (הקישו מחוץ למסגרת להפסקת הכתיבה.)

הזיזו את C, בדקו מה מתקבל.

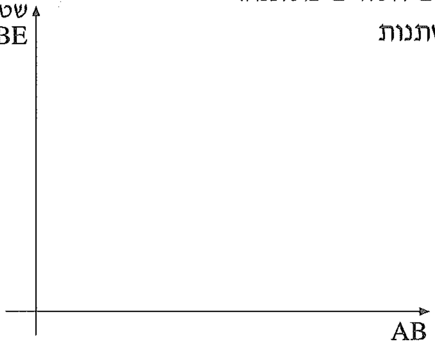


...

הסבירו. (תוכלו להיעזר בשטחי משולשים.)

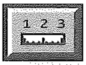
5. נחקור מה קורה כאשר אורך האלכסונים השווים משתנה.

א) שרטטו גרף משוער המתאר את השתנות השטח כשמשנים את אורך AB.



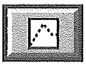
ב) שרטטו גרף באמצעות המחשב:

מדדו את AB.



הביאו את המסגרת למסך ורשמו בתוכה AB.

הביאו מערכת צירים ורשמו מה מייצג כל ציר.

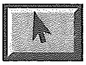


הביאו את המסגרת למסך והקישו.
הביאו את הסמן לַחֵץ הנמצא בקצה השמאלי של מד האורך ↗, לִחְצוּ, הזיזו לַחֵץ שמתחת לציר האופקי ↗ ושחררו.
חזרו עבור מד השטח וציר y.

שנו יחידות על הצירים.

הביאו את הסמן לאחד הצירים, הקישו פעמיים ורשמו:
ציר אופקי מ- 0 עד 10
ציר אנכי מ- 0 עד 50.

שרטטו.



הביאו את הסמן לקודקוד B וגררו. הגרף ישורטט.

השוו את הגרף שהתקבל עם הגרף ששרטטתם בסעיף א'.

ד) רשמו תבנית אלגברית המתאימה לאורך האלכסון AB, את שטח המרובע ACBF.

ה) בדקו אם התבנית שרשמתם מתאימה לגרף:
הציבו את ערך AB בתבנית שרשמתם ובדקו אם מתקבל השטח הרשום במד השטח.
שנו את AB וחזרו על ההצבה והבדיקה.

בתרגיל 6 תעסקו באותה הבנייה.

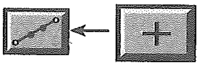
"מרובע של אמצעי צלעות"

6. נבדוק אילו סוגי מרובעים מתקבלים כאשר מחברים את אמצעי הצלעות של המרובעים שאלכסוניהם שווים ומאונכים זה לזה.

א) סמנו בערך את אמצעי הצלעות במרובעים ששרטטתם בשאלה 2 (בחלק א').
אילו מרובעים קיבלתם?
אילו סוגי מרובעים ניתן, לדעתכם, לקבל?

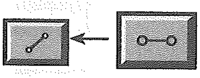
ב) חצו את צלעות המרובע ACBE שעל המחשב.

סמנו את אמצעי הצלעות של ACBE.



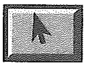
חלקו את AC ל- 2 חלקים שווים. המשיכו לחלק את שאר הצלעות.

חברו את נקודות החלוקה ברצף.



חברו את FG. המשיכו לחבר.

צבעו את הצלעות של המרובע החדש בצבע שונה.

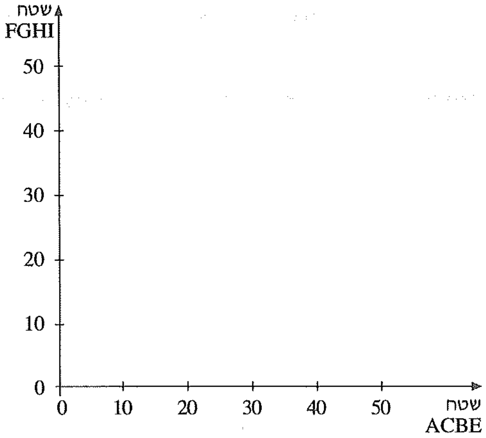


סמנו את הצלעות.

צבע ...

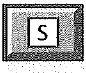
שנו את המרובע על ידי גרירת C (גרירת C אינה משנה את אורך האלכסונים), ואחר כך על ידי גרירת B. מה תוכלו לומר על "המרובע של אמצעי הצלעות"? הסבירו את ממצאיכם באמצעות שיקולים גאומטריים.

7. א) איך, לדעתכם, ייראה הגרף המתאר את השתנות שטח מרובע FGHI ("מרובע של אמצעי הצלעות"), כאשר משנים את שטח מרובע ACBE שרטטו.



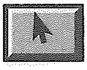
ב) שרטטו באמצעות המחשב ובדקו אם הגרף ששרטטתם מתאים.

פתחו מד שטח נוסף עבור FGHI.



← ...

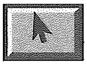
מחקו את הנתונים בגרף המשורטט.


← הקישו על מערכת הצירים לסימונה.

עריכה ← מחק את הנתונים.

חברו את מד-השטח ACBE לציר האופקי, ואת מד-השטח של FGHI לציר האנכי.

בחרו יחידות מתאימות ושרטטו על ידי גרירת B.

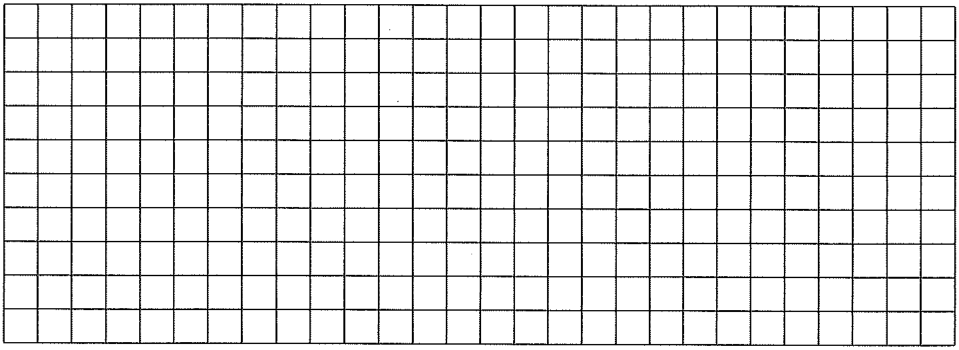

← ...

ג) מה הקשר בין שטחי שני המרובעים? הסבירו מדוע.

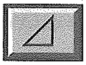
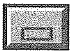
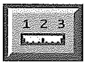
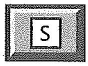
פעילות 4 - שטח מלבן

בפעילות זו נחקור השתנות שטח מלבן שהיקפו קבוע.

1. א) שרטטו 5 מלבנים שהיקפם 12 יחידות (יחידה - צלע משבצת).

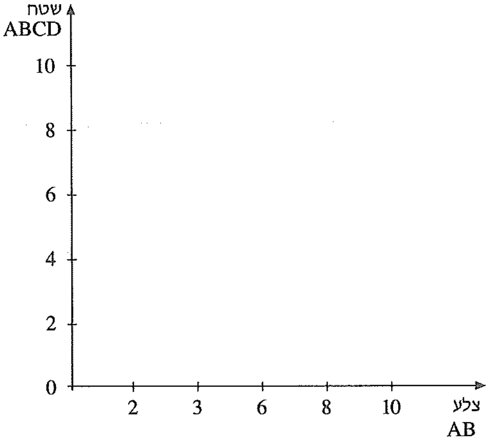


2. א) שרטטו, בעזרת הלומדה, מלבן משתנה שהיקפו 12.

בחרו מלבן שהיקפו 12 יחידות.	 ←  ← היקף קבוע 12
מדדו את אורך AB.	 ← הביאו את המסגרת למסך והקישו AB. (Enter לסיום הכתיבה.)
מדדו את שטח המלבן.	 ← הביאו את המסגרת למסך והקישו ABCD.

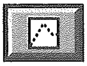
ב) – בין אילו ערכים משתנה אורך AB? הסבירו מדוע.
– בין אילו ערכים משתנה שטח המלבן? הסבירו מדוע.

ג) שרטטו גרף משוער המתאר את השתנות השטח כשהצלע משתנה.



ד) שרטטו את הגרף באמצעות המחשב:

הביאו מערכת צירים ורשמו מה מייצג כל ציר.



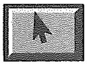
הביאו את המסגרת למסך.

הביאו את הסמן לְחֵץ הנמצא בקצה השמאלי של מד-האורך AB, לחצו, הזיזו לְחֵץ שמתחת לציר האופקי ושחררו.
חזרו עבור מד השטח וציר y.

שנו יחידות על הצירים.

הביאו את הסמן לאחד הצירים, הקישו פעמיים ורשמו יחידות בהתאם למה שרשמתם בסעיף ב'.

שרטטו את הגרף.

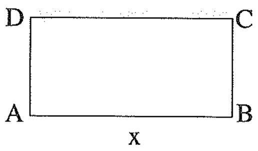


הביאו את הסמן לאחד הקודקודים לְחצו וגררו. הגרף ישורטט.

השוו את הגרף שהתקבל עם הגרף המשוער ששרטטתם.

ה) מצאו בגרף נקודה המתאימה למלבן ששטחו 8. כמה נקודות מתאימות יש בגרף?
כמה מלבנים כאלה קיימים?

ו) איזה הוא המלבן ששטחו הגדול ביותר?

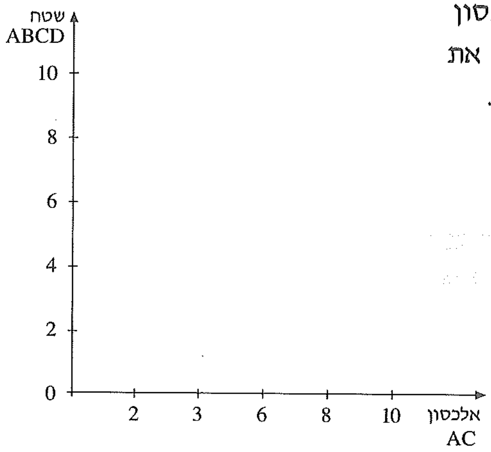


ז) תארו בעזרת תבנית אלגברית את השטח כפונקציה של הצלע.

ח) בדקו בעזרת התבנית שמצאתם מהי צורת הגרף, ואיזה הוא המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

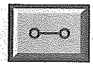
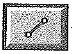
3. עד עכשיו בדקתם את השתנות השטח כפונקציה של הצלע. בהמשך פעילות זו נחקור כיצד משתנה השטח כפונקציה של אלכסון המלבן.

א) עקבו אחר השתנות מידות האלכסון והשטח ושרטטו גרף משוער המתאר את שטח המלבן כפונקציה של האלכסון.



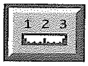
ב) שרטטו באמצעות המחשב גרף המתאר את שטח המלבן כפונקציה של האלכסון.

חברו את האלכסון AC.

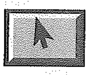
ישר מ- A ל-C.

מדדו את האלכסון.



...

מחקו את הגרף המשורטט.



הקישו על מערכת הצירים כדי לסמנה.

עריכה ← מחק את הנתונים.

חברו את מד האורך של האלכסון לציר האופקי.

שרטטו את הגרף החדש.

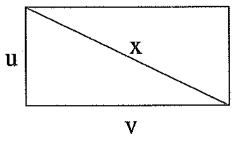
גררו את קודקודי המלבן.

ג) כדי להסביר את תכונות הגרף שהתקבל, הוסיפו אלכסון בכל אחד מחמשת המלבנים ששרטטתם בתרגיל 1.
- באיזה מהמלבנים הנ"ל, אורך האלכסון הוא הגדול ביותר?
- באיזה מהמלבנים הנ"ל, אורך האלכסון הוא הקטן ביותר?
- האם תוכלו לשרטט מלבן בו אורך האלכסון יותר קטן מאלה ששרטטתם? אם כן, שרטטו.

ד) – בין אילו ערכים משתנה אורך האלכסון? הסבירו.
- בין אילו ערכים משתנה שטח המלבן?

ה) הסבירו מדוע הנקודה נעה הלוך וחזור בעת שרטוט הגרף.

ו) אייל טוען שהגרף שהתקבל הוא קטע של קו ישר, מה דעתכם?



כדי לבדוק זאת נתאר את הבעיה באופן אלגברי.
נציג כאן דרך שתאפשר לקבל את הביטוי בקלות.

i) הביטוי הבא יעזור לבצע את המשימה:

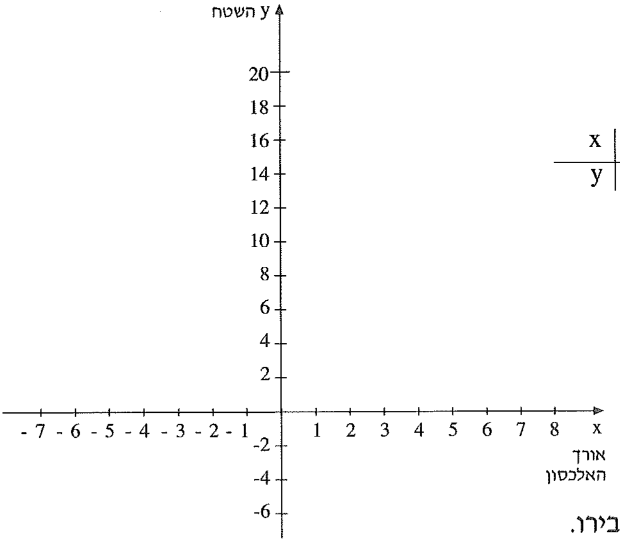
$$x^2 = (u + v)^2 - 2u \cdot v$$

הסבירו למה ביטוי זה נכון.

ii) בטאו את $u+v$ ואת $u \cdot v$ באמצעות ההיקף הנתון, והשטח - y.
רשמו את החוק המתאר את השטח y כפונקציה של האלכסון.

iii) שרטטו את גרף הפונקציה שרשמתם בסעיף (ii) והדגישו את קטע הגרף המתאים לתאור הבעיה.

x					
y	0				0



iv) האם אייל צודק? הסבירו.

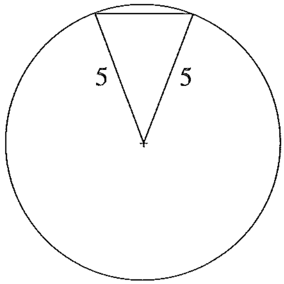
פעילות 5 - משולש שווה-שוקיים

פעילות זו והפעילות הבאה אחריה קשורות זו לזו ורצוי לעשותן ברציפות.

בפעילות זו נחקור השתנות שטח משולש שווה-שוקיים, על פי השתנות גדלים שונים של המשולש. בפעילות הבאה נחקור השתנות שטח משולש, שאינו שווה-שוקיים, על פי השתנות של אותם גדלים.

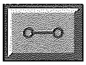
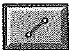
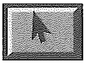
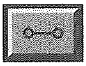
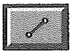
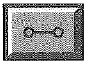
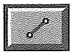
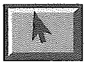
1. רדיוס המעגל המשורטט 5 יחידות.

א) שרטטו עוד שני משולשים שונים, שאחד מקודקודיהם במרכז המעגל ושני קודקודים אחרים על ההיקף.



מה המשותף לכל המשולשים האלה ומה שונה?

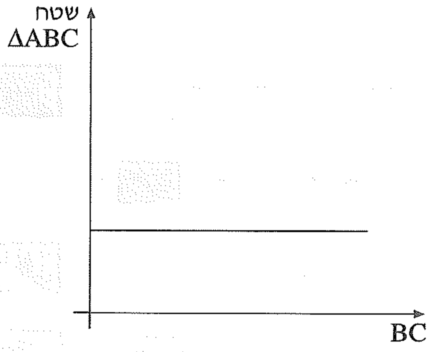
2. נבנה, במחשב, משולש שווה שוקיים משתנה, שאורך השוק שלו 5 יחידות. (בדומה למשולשים ששרטטתם בתרגיל 1, אך ללא מעגל.)

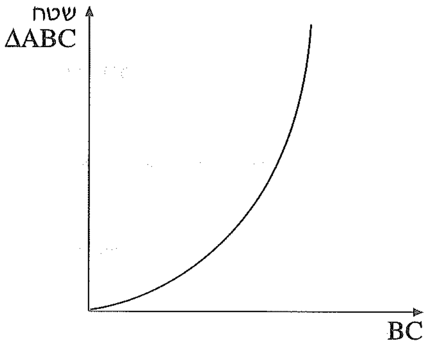
סמנו נקודה A.		הביאו את הסמן למסך והקישו. תסומן נקודה A.
שרטטו קטע AB באורך 5 יחידות.		ישר מ- A באורך 5 יחידות.
הזיזו את AB כך שלא יהיה אופקי.		לחצו על B, הזיזו, ושחררו.
שרטטו קטע AC באורך 5 יחידות.	 	ישר מ- A באורך 5 יחידות.
חברו את CB.	 	ישר מ- B ל- C. (וודאו כי משבצת האורך ריקה.)
שנו את משולש ABC.		...

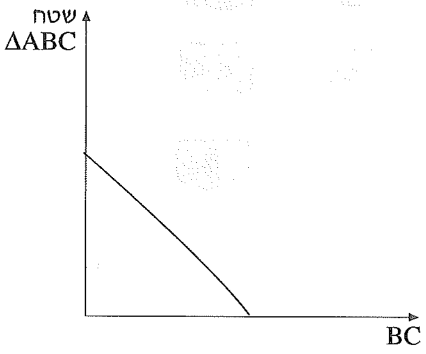
מה משתנה ומה נשאר קבוע כשגוררים את הקודקודים?

בהמשך הפעילות נחקור כיצד משתנה השטח של המשולש שווה-השוקיים כאשר משנים את הבסיס BC.

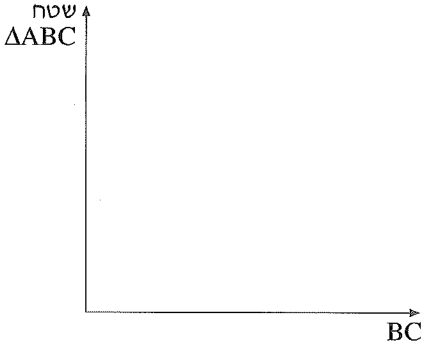
3. א) הסבירו מדוע אף אחד מהגרפים הבאים, אינו מתאר את השתנות השטח כאשר משתנה אורך BC.







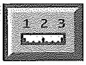
ב) בין אילו ערכים משתנה הבסיס?
הסבירו מדוע.
בין אילו ערכים משתנה שטח המשולש?
הסבירו מדוע, ורשמו יחידות על הצירים.



ג) איך, לדעתכם, ייראה הגרף? נסו לשרטט, ותארו במילים. (התייחסו לעלייה, ירידה, סימטריה, נקודת קיצון.)

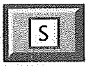
ד) באיזה מקרה מתקבל, לדעתכם, השטח הגדול ביותר?

4. א) מדדו את אורך BC.



הביאו את המסגרת למסך ורשמו BC.

מדדו את שטח ΔABC.



הביאו את המסגרת למסך ורשמו ABC.

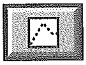
שנו את המשולש, עקבו אחר השתנות אורך הבסיס והשטח, וענו:

i) מה השטח כשהבסיס 3 יחידות?

ii) מה הבסיס כשהשטח 8 יחידות?

iii) בין אילו ערכים משתנה אורך הבסיס? הסבירו למה והשוו עם התשובה הקודמת (סעיף ב').

5. א) שרטטו באמצעות המחשב, גרף המתאר את השטח כשהבסיס משתנה.



הביאו את המסגרת למסך והקישו.

רשמו על הציר האופקי BC.

הביאו את הסמן לַחֵץ, הנמצא בקצה השמאלי של מד האורך BC, לְחצו, והזיזו לַחֵץ שמתחת לציר האופקי ושחררו.

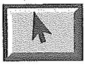
רשמו על הציר האנכי ABC.

חזרו עבור מד-השטח וציר y.

שנו יחידות על הצירים. רשמו מספרים בהתאם לקנה המידה הרצוי על ציר.

הביאו את הסמן לאחד הצירים והקישו פעמיים.

שרטטו את הגרף.



הביאו את הסמן לקודקוד B או C וגררו. הגרף ישורטט.

ב) במה דומה ובמה שונה הגרף שהתקבל מהגרף ששרטטתם?

ג) אם משתמשים לחישוב השטח בצלע BC ובגובה אליה, שני הגדלים משתנים בעת שינוי המשולש. חשבו על דרך בה חישוב השטח ויתבסס על גודל אחד, המשתנה בעת שינוי המשולש.

– כיצד דרך זו מסייעת בהסבר מיקום נקודת השיא?

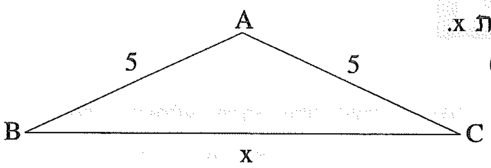
– חשבו את השטח המקסימלי.

– נסו להסביר את הקשר בין מיקום נקודת השיא, לסימטריה/אי סימטריה של הגרף המשורטט על צג המחשב.

6. עד כה טיפלנו בבעיה הגאוממטרית ותיאורה באמצעות גרף. כעת נתאר את הבעיה באופן אלגברי.

נסמן את BC ב- x.

א) בטאו את שטח המשולש באמצעות x.
(בטאו תחילה את הגובה לבסיס.)

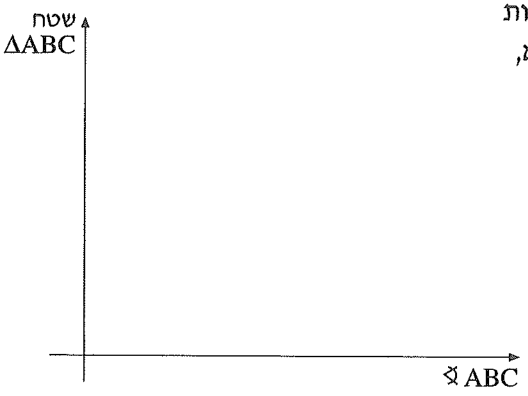


ב) בדקו בנוסחה שקיבלתם את התכונות שמצאתם קודם.

i) מה התחום של הפונקציה (בין אילו ערכים משתנה אורך הבסיס BC)?
הציבו ובדקו מה ערכי הפונקציה בנקודות הקצה של הגרף.

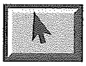
ii) הציבו את ערך x של נקודת השיא ובדקו שאכן מתקבל השטח המקסימלי.

7. א) האם הגרף המתאר את השתנות השטח לפי זווית הראש הוא, לדעתכם, גרף סימטרי?
הסבירו ושרטטו גרף משוער.



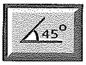
ב) שרטטו במחשב והשוו עם הגרף המשוער.

מחקו את הגרף הקודם.



← הקישו על מסגרת הגרף,
עריכה ← מחק את הנתונים.

מדדו את ∢BAC.

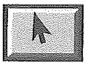


← ...

רשמו על הציר האופקי ∢BAC.

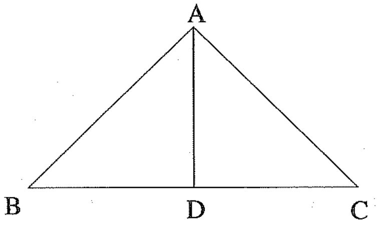
חברו את החץ שליד מד הזווית, לחץ שליד הציר האופקי.

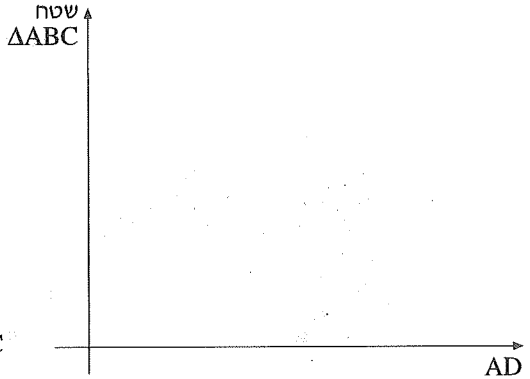
שרטטו את הגרף.



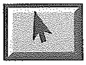
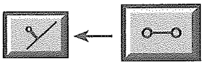
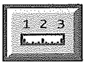
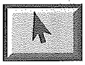
← גררו את B או C לשרטוט הגרף.

8. א) איך לדעתכם, ייראה הגרף המתאר את השתנות השטח לפי הגובה לבסיס?
בין אלו ערכים משתנה הגובה?





ב) בדקו באמצעות המחשב. שרטטו את הגרף החדש באותה מערכת צירים.

מחקו את הגרף הקודם.		← הקישו על מסגרת הגרף. **עריכה** ←מחק את הנתונים.
שרטטו גובה לבסיס.		← ← גובה מ- A לצלע BC.
מדדו את הגובה.		← . . .
חברו את מד-הגובה לציר האופקי.		← הביאו את הסמן לקודקוד B או C וגררו, הגרף ישורטט.

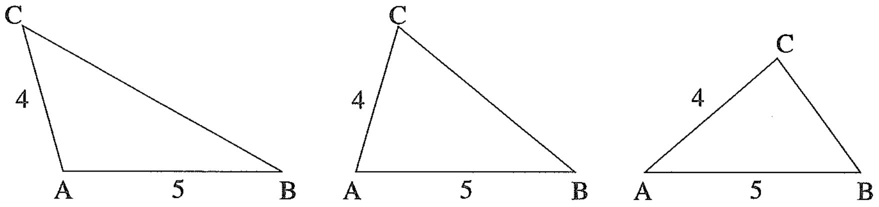
ג) במה דומה ובמה שונה הגרף שהתקבל מהגרף המשוער ששרטטתם?

שימו לב! תוכלו לשמור את הבנייה והיא תשמש לפעילות הבאה.

| **קובץ** ← שמור תחת שם (בחרו שם כרצונכם).

פעילות 6 - ואם המשולש לא שווה-שוקיים?

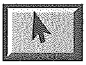
1. א) במשולש ABC $AB = 5$, $AC = 4$



בין אילו ערכים יכול להיות אורך BC?

ב) בנו משולש כזה במחשב, ובדקו את תשובתכם לסעיף א'.

אם שמרתם את המשולש בפעילות הקודמת, תוכלו לקבל את המשולש החדש על ידי שינוי AC ל- 4. אם לא, עברו להוראות הבנייה שבעמוד הבא.

פתחו את הקובץ ששמרתם.	**קובץ** ← **פתח** ← הקישו על שם שנתתם.
שנו את אורך AC ל- 4.	הקישו הקשה כפולה על AC, ייפתח מסך הבנייה. רשמו במשבצת האורך 4 ← **שנה**.
	 ← הקישו על המשולש והשינוי יושלם.

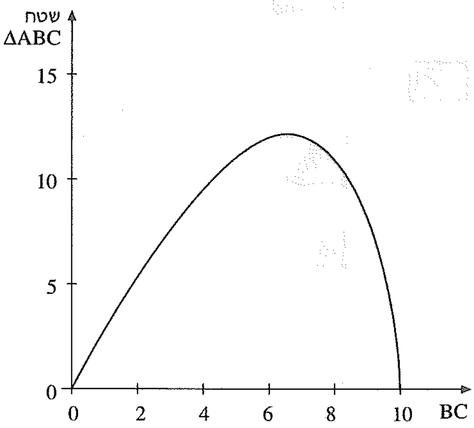
הוראות לבנייה החדשה (אם לא שמרתם את הבנייה הקודמת).

שרטטו קטע AB באורך 5 יחידות.	← הביאו את הסמן למסך והקישו, תסומן נקודה A. ← ישר מ- A באורך 5.
הזיזו את AB כך שלא יהיה אופקי.	← לחצו על B גררו ושחררו.
שרטטו קטע AC באורך של 4 יחידות.	← ← ישר מ- A באורך 4.
חברו את CB.	← ישר מ- C ל- B.
מדדו את BC.	← הביאו את המסגרת למסך ורשמו BC.
מדדו את שטח ΔABC.	← הביאו את המסגרת למסך ורשמו ABC.
שנו את המשולש.	← גררו את B או C.

ג) שרטטו גרף המתאר את שטח המשולש כאשר BC משתנה.
הוראות:

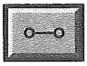
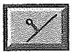
	← הביאו את המסגרת למסך והקישו.
רשמו על הציר האופקי BC.	הביאו את הסמן לַחֵץ הנמצא בקצה השמאלי של מד האורך (המודד את AD). לחצו, הזיזו לַחֵץ שמתחת לציר האופקי, ושחררו.
רשמו על הציר האנכי ABC.	חזרו לגבי מד-השטח והציר האנכי.
שנו יחידות על הצירים.	הביאו את הסמן לאחד הצירים והקישו פעמיים. בחרו ערכים מתאימים לכל ציר.
שרטטו את הגרף.	← הביאו את הסמן ל- B או ל- C, לחצו וגררו, הגרף ישורטט.

ד) בפעילות הקודמת שרטטתם גרף עבור משולש שווה שוקיים בו $AB = AC = 5$
התקבל הגרף:

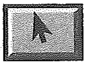


במה דומה ובמה שונה הגרף שקיבלתם כעת על צג המחשב? הסבירו.

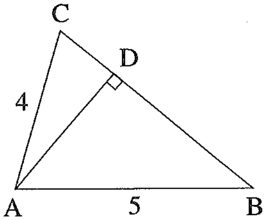
2. בתרגיל זה נחקור, כיצד משתנה השטח כאשר משנים את הגובה לצלע השלישית ב-ΔABC בו $AB = 5$, $AC = 4$.

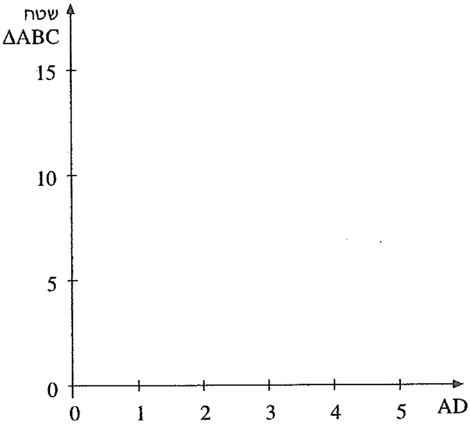
אם עדיין אין גובה מ- A ל- BC, שרטטו אותו.  ←  ←

צבעו את הגובה. צבע ← ...

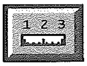
שנו את המשולש, ועקבו איך משתנה הגובה ואיך משתנה השטח.  ← ...

א) שרטטו גרף משוער.

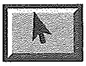




ב) נשרטט את הגרף על צג המחשב.

אם אין מד אורך לגובה AD, פתחו מד-אורך חדש.  ← הביאו את המסגרת למסך ורשמו AD.

רשמו על הציר האופקי AD. הביאו את הסמן אל החץ הנמצא בקצה השמאלי של מד-האורך AD, לחצו, הזיזו אל החץ שמתחת לציר האופקי, ושחררו.

שרטטו את הגרף.  ← הביאו את הסמן לקודקוד B או C וגררו.

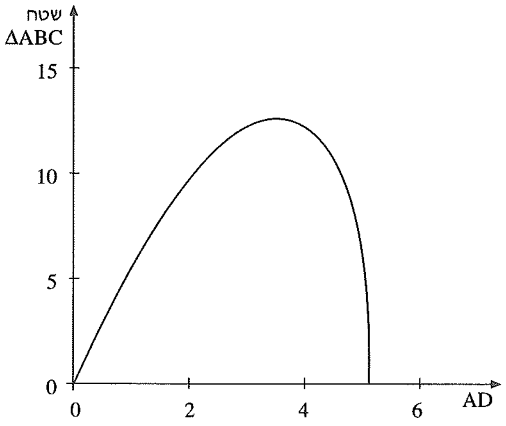
ג) נסו להסביר את צורת הגרף שהתקבל.

ד) מצאו שטחים מתאימים לגובה 2, העתיקו את המשולשים לכאן.

ה) האם עבור כל גובה שנבחר יתקבלו שני משולשים? הסבירו.

ו) מהו השטח המקסימלי ועבור איזה גובה הוא מתקבל?
הסבירו באמצעות שיקולים גאומטריים.

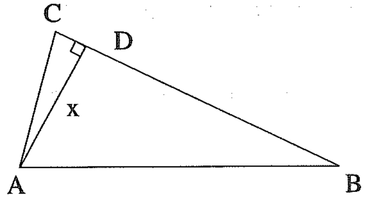
ז) בפעילות הקודמת שרטטת גרף המתאר את השתנות השטח של משולש שווה שוקיים כאשר משנים את הגובה.



הסבירו את הסיבות להבדלים בין הגרף הזה לגרף הנמצא כעת על צג המחשב.

ח) נתאר את הבעיה באופן אלגברי.

– בטאו את שטח המשולש באמצעות x (אורך AD), עבור שתי האפשרויות השונות.



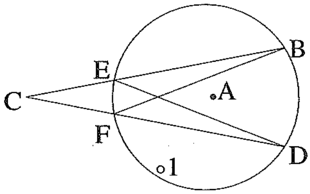
– האם השרטוט והתבנית מתאימים לכל המקרים האפשריים?
אם כן, הסבירו, אם לא, מצאו תבנית מתאימה למקרים האחרים.

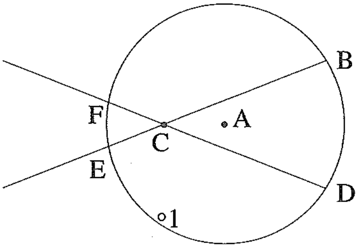
– הסבירו באמצעים אלגבריים את הגרף שהתקבל.

פעילות 7 - ישרים במעגל

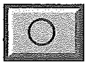
1. בפעילות זו נחקור את הקשר בין אורכי קטעים, הנוצרים על-ידי חיתוך מיתרים, או המשכם.

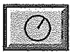
שרטטו באמצעות המחשב את השרטוט המופיע כאן, על פי ההוראות.



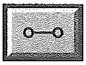


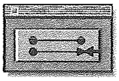
שרטטו מעגל שרדיוסו 4 יחידות.


←הביאו את הסמן למסך והקישו.
תסומן נקודה A.

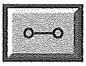

←המרכז A הרדיוס 4.

שרטטו קרן מנקודה B בתוך המעגל.

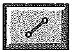

←הביאו את הסמן לנקודה הנמצאת על המעגל, הקישו, הזיזו ושחררו בתוך המעגל.


←העבירו את החץ לקרן.

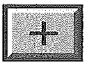
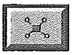
סמנו נקודה D על המעגל.


←הביאו את הסמן לנקודה אחרת על המעגל. הקישו.

חברו את C עם D.


←חברו את C עם D.

סמנו את נקודת החיתוך השנייה של כל אחת משתי הקרניים עם המעגל. (הנקודות E ו- F בשרטוט.)


←

←חיתוך של BC עם המעגל.
(כדי לרשום o1 הביאו את הסמן למעגל והקישו.
הקישו בנה עד שתסומן נקודת החיתוך השנייה של הקרן והמעגל.)

←נקודות חיתוך של DC ו- o1.

נבדוק אם ואיך משתנים אורכי הקטעים הנוצרים על המיתרים.

א) – אילו מהנקודות F, E, D, C, B ניתנות לגרירה? גררו ובדקו.

– עבור הנקודות הניתנות לגרירה, רשמו את הקטעים שאורכם משתנה בעת הגרירה.

– גררו כך שנקודת הפגישה של BE ו- DF תהיה מחוץ למעגל.

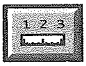
ב) בהמשך הפעילות נעסוק במכפלות של הקטעים הנוצרים על כל מיתר.

– הסתכלו על אורכי הקטעים המשתנים והשוו את המכפלות BC·CE ו- DC·CF.

– מה יקרה לקשר בין גודל המכפלות כאשר מזיזים את C?

– בדקו באמצעות המחשב.

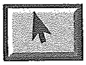
מדדו את המכפלות DC · CF ו- BC · CE, ובדקו את השערתכם.



← הביאו את המסגרת למסך ורישמו את המכפלה.

← הביאו מסגרת נוספת למכפלה השנייה.

שנו את מקומן של B, C ו- D (C בתוך המעגל) מה תוכלו לומר על המכפלות?



← הביאו את הסמן לאחת הנקודות, לחצו, גררו ושחררו.

2. נסחו משפט והוכיחו אותו.

3. בדקו אם המשפט שרשמתם מתקיים עבור המקרים הבאים:

א) כאשר שני הישרים נפגשים על המעגל. אילו נקודות מתלכדות במקרה זה? מה גודל המכפלה?

ב) כאשר הישרים, נחתכים מחוץ למעגל, **ואין** נקודות מתלכדות. בדקו את שלבי ההוכחה שרשמתם בתרגיל 2. נסחו משפט מתאים.

ג) כאשר הישרים נחתכים מחוץ למעגל, ואחד מהישרים משיק למעגל. בדקו את שלבי ההוכחה ונסחו משפט מתאם.

ד) כאשר שני הישרים נחתכים מחוץ למעגל, ושניהם משיקים לו. בדקו את שלבי ההוכחה ונסחו משפט.

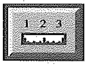
נסו לבדוק את ארבעת המקרים הנ"ל (א'-ד'), על ידי הזזת C או B.

שימו לב: על פי הבניות שביצעתם, המחשב לא מכיר ב-B ו ב-D כנקודות חיתוך של המעגל עם הישרים. לכן, כאשר C מחוץ למעגל, יכולה B להתלכד עם E (ו/או D עם F), למרות שיש למעגל ולישר עוד נקודת חיתוך שאינה מסומנת, והיא כמובן זו, המתאימה למשפט.

4. בהמשך הפעילות נתייחס רק למקרים בהן הנקודות אינן מתלכדות.

א) גרירה של אילו נקודות **אינה משנה** את גודל המכפלה? (גררו את הנקודות D, B ו- C). גרירה של אילו נקודות **משנה** את גודל המכפלה?

ב) באיזה מרחק תלוי גודל המכפלה?



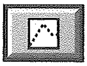
← הביאו את המסגרת למסך ורשמו שם של קטע המתאים למרחק הזה.

ג) צרו מצב שהמכפלה תהיה שווה ל- 5. נסו להזיז את C מבלי שהמכפלה תשתנה. מה תוכלו לומר על כל הנקודות C שעבורן המכפלה 5?

(תארו במילים מה קורה למכפלה כאשר C קרובה ל-A, כאשר C בתוך המעגל ומתקרבת להיקפו, וכאשר C מתרחקת מהמעגל.

5. שרטטו גרף משוער, שיתאר את המכפלה כפונקציה של המרחק CA.

שרטטו גרף המתאר את גודל המכפלה כפונקציה של **המרחק** הנ״ל.



← הביאו את המסגרת למסך והקישו.

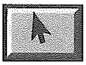
רשמו על הציר האופקי שם של קטע המייצג את המרחק הנ״ל. רשמו על הציר האנכי את המכפלה.

הביאו את הסמן אל החץ הנמצא בקצה השמאלי של מד-המרחק. לחצו, הזיזו אל החץ שמתחת לציר האופקי, ושחררו.
חזרו עבור מד-המכפלה וציר y.

שנו יחידות על הצירים.

הביאו את הסמן לאחד הצירים והקישו פעמיים.
ציר אופקי מ- 0 עד 10.
ציר אנכי מ- 0 עד 20.

שרטטו את הגרף.

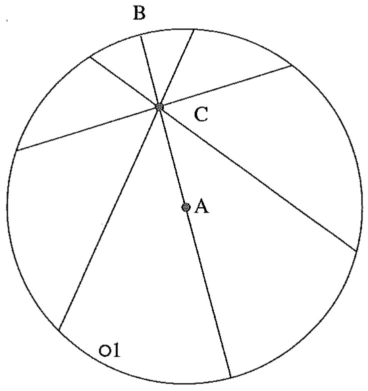


← הביאו את הסמן לנקודה שגרירתה משנה את המרחק, לחצו, וגררו אותה. הגרף ישורטט.

השוו עם הגרף המשוער ששרטטתם.

3. הסבירו כיצד הגרף שקיבלתם מתאר את כל המקרים בהם עסקתם בתרגיל 3.
(התיחסו לנקודות חיתוך עם הצירים, עלייה, ירידה וכו׳.)

6. נבדוק מהו הייצוג האלגברי של הפונקציה.
מאחר וכל המכפלות של קטעי המיתרים שוות (כפי שהוכח לעיל) נוכל להיעזר במיתר העובר דרך המרכז.
סמנו $CA = x$, בטאו את המכפלה בעזרת x והרדיוס שאורכו 3.

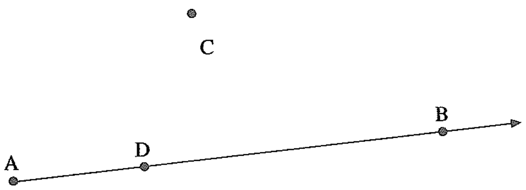


איזה ביטוי יתקבל אם C מחוץ למעגל?
הסבירו את הקשר בין הביטויים האלגבריים שקיבלתם והגרף.

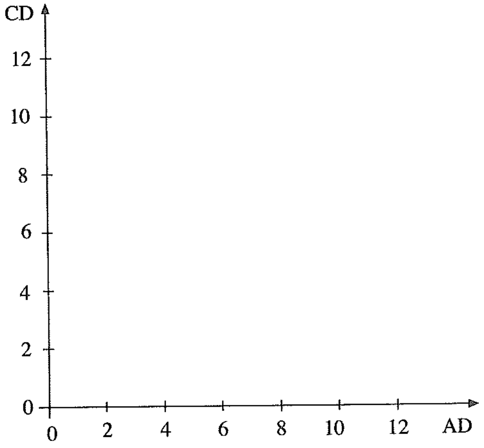
פעילות 8 - מרחק מערים

מכונית נוסעת על כביש היוצא מעיר A.

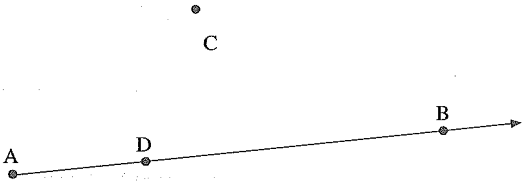
נחקור כיצד משתנה המרחק של D מהעיר C ככל ש- D מתרחקת מ- A לכיוון B.



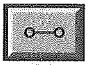
1. א) שרטטו גרף משוער המתאר השתנות זו, והסבירו.

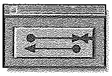


ב) בנו באמצעות המחשב.



שרטטו קרן AB.

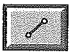

הביאו את הסמן למסך והקישו.
גררו ושחררו.

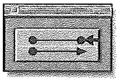

עברו לשרטוט קרניים.

סמנו נקודה C מעל הקרן.
סמנו נקודה D על הקרן.

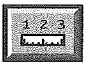
הביאו את הסמן למסך והקישו.
הביאו את הסמן לקרן והקישו.

חברו את CD.

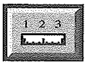

ישר מ- C ל- D.


עברו לשרטוט קטעים.

פתחו מד-אורך למדידת
AD ו- CD.

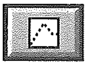


...



...

הכינו מערכת צירים לשרטוט
הגרף על המסך.


הביאו את המסגרת למסך והקישו.

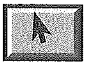
רשמו מה מתאר כל ציר.

חברו את מד-האורך AD לציר x.
ואת מד-האורך CD לציר y.

שנו יחידות על הצירים.

הביאו את הסמן לאחד הצירים והקישו פעמיים.
ציר אופקי מ- 0 עד 15.
ציר אנכי מ- 0 עד 15.

שרטטו את הגרף.


גררו את D.

i) השוו את צורת הגרף שהתקבל עם הגרף המשוער, ששרטטתם בסעיף א'.

ii) באיזה מקום נמצאת המכונית (D) כאשר המרחק CD מינימלי?
הסבירו מדוע.

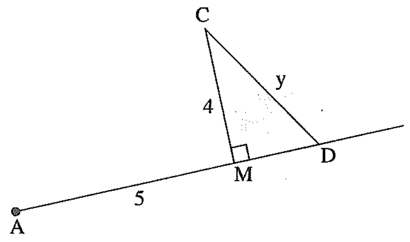
iii) באיזה תחום הגרף סימטרי? הסבירו מדוע.

iv) עבור ערכים גדולים **מאוד** של AD הגרף מתקרב לקו ישר. נסו להסביר מדוע, תוך הסתכלות על השתנות האורכים AD ו- CD.

ג) שנו את מקום הנקודה C ושרטטו גרף נוסף.
במה דומים ובמה שונים שני הגרפים?

ד) מה תוכל לומר על הגרף אם C על הישר AB?

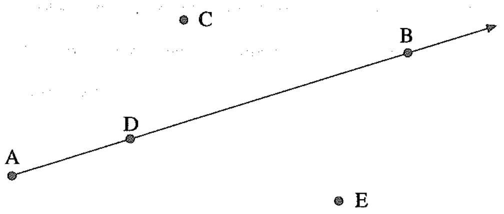
ה) **וקצת אלגברה** (תוכלו לעבור לתרגילים מ- 3 והלאה ולחזור לאלגברה שבסעיף זה בסוף הפעילות.)
לצורך בניית חוק הפונקציה, נבחר מספרים עבור הגדלים הקבועים בבעיה:
CM = 4
AM = 5



- בטאו את CD (y) כפונקציה של AD (x).
- האם הנוסחה שרשמתם מתאימה גם כאשר D מהצד השני של M? הסבירו.
- הסבירו כיצד מתבטאת הסימטריה בביטוי האלגברי שרשמתם?

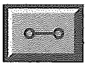
ו) בטאו בצורה אלגברית את השתנות המרחק CD, כפונקציה של AD, כאשר C על הישר. (ראו סעיף ד'.)

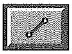
2. נוסיף עיר מצידו השני של הכביש. נחקור את השתנות **סכום המרחקים** של מכונית הנוסעת על הכביש כפונקציה של מרחקה מ- A.



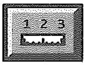
א) שרטטו במחשב.

הוסיפו נקודה E מצדו השני של הישר,
וחברו את ED


← הבא את הסמן למסך והקש.


← קטע מ- D ל- E.

מדדו את הסכום DE+CD.

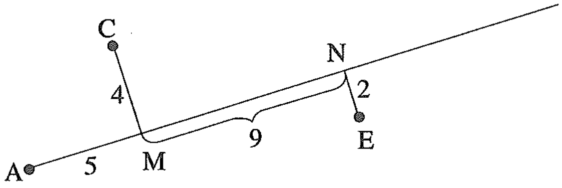


← רשום במסגרת CD + DE.

ב) שרטטו גרף באמצעות המחשב. חברו את מד האורך DC+DE לציר האנכי וגררו את D.

ג) היכן נמצאת המכונית כאשר סכום המרחקים מינימלי? הסבירו מדוע.

ד) עבור המקרה המשורטט, סמנו את הנקודה D כך שסכום המרחקים CD+CE יהיה מינימלי.



AM = 5

CM = 4

MN = 9

EN = 2

ה) היעזרו בדמיון משולשים, כדי לחשב את AD.

3. נחקור, כעת, כיצד משתנה המרחק של המכונית (D) מ- E ‏(DE), כפונקציה של מרחקה מ- C ‏(DC).

קשה לשרטט גרף משוער מתוך שיקולים בלבד, לכן נסמן נקודות תחילה. (תוכלו לנסות לשרטט גרף במערכת הצירים כאן למטה, ללא סימון הנקודות.)

א) נתחיל בסימון נקודות: סמנו את D בשרטוט, אם נתון כי: AD = 1.

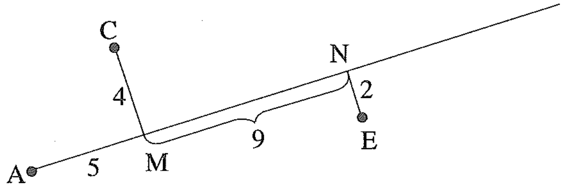
חשבו את DC ואת DE.

AM = 5

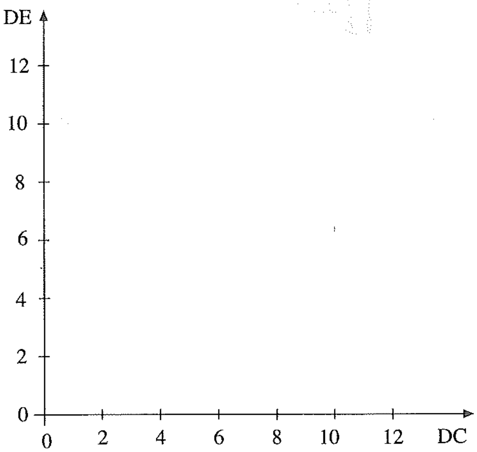
CM = 4

MN = 9

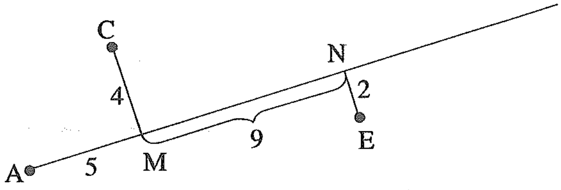
EN = 2



סמנו נקודה מתאימה במערכת הצירים.



חזרו על סימון בשרטוט, על החישוב ועל סימון במערכת הצירים עבור המקרים הבאים:



AD = 3

AD = 4

AD = 5

AD = 7

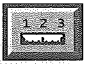
AD = 9

ב) שרטטו גרף משוער על פי הנקודות שסימנתם.

ג) שרטטו באמצעות המחשב.

ניתן למחוק את הגרפים המשורטטים על ידי **עריכה** ← מחק את הנתונים.

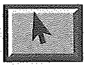
מדדו את DC ואת DE.



← ...

← הביאו את המסגרת למסך וחברו את מד-האורך DC לציר האופקי. ואת מד-האורך DE לציר האנכי.

שרטטו את הגרף.


← גררו את D.

השוו את צורת הגרף, שקיבלתם על מסך המחשב, עם הגרף המשוער.

ד) בגרף 3 חלקים. מה הקשר בין מיקום המכונית לחלקי הגרף השונים?

ה) הסבירו מדוע הגרף אינו חותך את הצירים.

ו) כאשר D מתרחקת מאוד מ- A הגרף מתקרב לקו ישר. הסבירו מדוע.

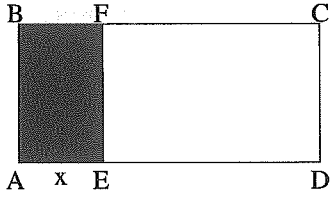
פעילות 9 - השתנות שטח

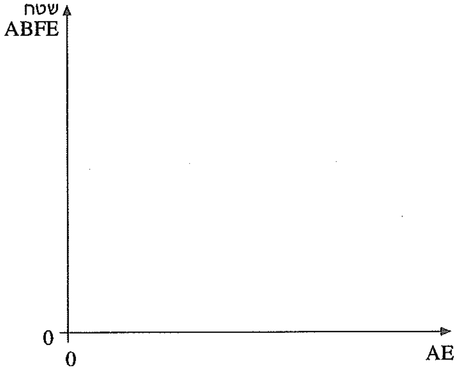
בפעילות זו נחקור כיצד משתנה שטח הכלוא בתוך צורות שונות.

1. א) **מלבן בתוך מלבן קבוע**

בחרו מלבן.	← ← חופשי.
סמנו נקודה E על צלע AD.	←הביאו את הסמן למקום כלשהו על AD והקישו. תסומן נקודה E.
העבירו אנך מנקודה E, לישר BC.	← רשמו במסגרת המיועדת אנך מ-E לישר BC.
צבעו את השטח ABFE.	←הקישו על **Shift** ועל הנקודות A, B, F, E.
	עריכה ←מלא צורה.
פתחו מד-אורך למדידת אורך AE.	←הביאו את המסגרת למסך רשמו AE.
פתחו מד-שטח למדידת שטח ABFE. שרטטו את הגרף.	←רשמו ABFE.
גררו את E בכיוון ל- D, ובדקו כיצד משתנה השטח.	← ...

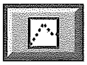
ב) שרטטו גרף משוער המתאר את השתנות השטח ABFE כפונקציה של AE. (הכוונה לצורת הגרף ולכן אין הכרח להוסיף יחידות.)





כאשר AE גָדֵל, גָדֵל גם השטח. מה תוכלו לומר על קצב **הגידול** של השטח? הסבירו. בדקו באמצעות המחשב.

הכינו מערכת צירים לשרטוט הגרף באמצעות המחשב.



← הביאו את המסגרת למסך והקישו.

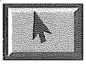
רשמו מה מתאר כל ציר.

הביאו את הסמן אל החץ שבתחתית מד-האורך, לחצו, הזיזו אל החץ שמתחת לציר האופקי, ושחררו.
יירשם AE.
חזרו עבור מד-השטח וציר y.

בחרו יחידות מתאימות לצירים.

הביאו את הסמן לאחד הצירים, הקישו פעמיים ובחרו יחידות מתאימות.

שרטטו את הגרף המתאר את השתנות השטח ABFE כפונקציה של AE.

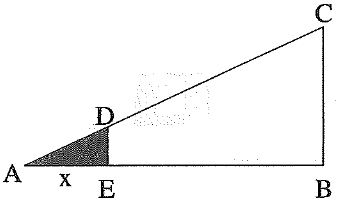


← הביאו את הסמן לנקודה E, לחצו וגררו אותה לאורך AD.
הגרף ישורטט.

השוו את הגרף המשוער ששרטטתם עם הגרף שהתקבל על המסך, והסבירו.

ג) שנו את המלבן ABCD כך שתקבלו גרף ששיפועו גדול יותר, ושרטטו את הגרף באמצעות המחשב.

2. משולש בתוך משולש

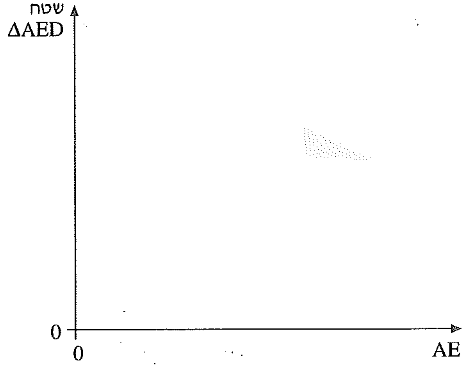


א) הוראות לבניית המשולש ישר הזווית:

שרטטו קטע AB שאורכו 6 יחידות.	← הקישו. תסומן נקודה A. רשמו: ישר מ-A באורך 6.
שרטטו אנך ל- AB בנקודה B באורך 3.	← אנך מישר AB מהנקודה B באורך 3.
חברו את AC.	← קטע מ- A ל- C.
סמנו נקודה D על AC.	← הביאו את הסמן ל- AC והקישו. תסומן D.
העבירו אנך לישר AB.	← רשמו אנך מ-D לישר AB.
צבעו את שטח משולש AED.	← הקישו על **Shift** ועל הנקודות D, E, A
	עריכה ← מלא צורה.
פתחו מד-אורך למדידת AE.	← רשמו AE.
פתחו מד-שטח למדידת AED.	← רשמו AED.

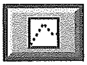
הזיזו את D ובדקו כיצד משתנה השטח.

ב) שרטטו גרף משוער המתאר את השתנות שטח משולש AED כפונקציה של AE.
(הכוונה לצורת הגרף, לכן אין הכרח להוסיף יחידות.)



ג) שרטוט הגרף באמצעות המחשב.

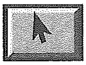
מערכת צירים.


→ הביאו את המסגרת למסך והקישו.

רשמו מה מתאר כל ציר ושנו יחידות על הצירים.

חברו את מד-האורך לציר x, ואת מד-השטח לציר y.
הביאו את הסמן לאחד הצירים, הקישו פעמיים ורשמו יחידות מתאימות.

שרטטו את הגרף, עליכם לגרור את D כדי ש-E והאנך DE יזוזו לאורך AB.


→ גררו את D.

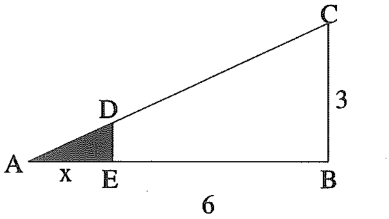
השוו את הגרף שהתקבל עם הגרף המשוער ששרטטתם בסעיף ב'.

ד) כאשר AE גֵדֵל, גָדֵל גם השטח. מה תוכלו לומר על קצב הגידול של השטח?
הסבירו.

ה) מצאו את אורך AE, שעבורו שטח משולש ADE הוא חצי משטח משולש ABC.
(היעזרו במדידות ובגרף.) הסבירו.

ו) – מצאו את שטח משולש ADE כאשר AE הוא חצי מ- AB, והשוו עם שטח משולש ABC. הסבירו.
– מצאו את השטח כאשר AE, הוא שליש AB והשוו עם שטח משולש ABC.
הסבירו.

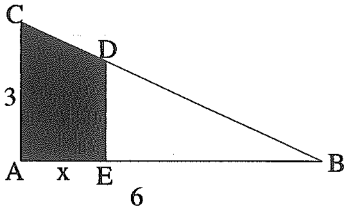
ז) בסעיף זה תרשמו את חוק ההתאמה של הפונקציה.
בטאו את DE בעזרת x והנתונים.
היעזרו בדמיון משולשים.



בטאו את שטח המשולש ADE באמצעות x.

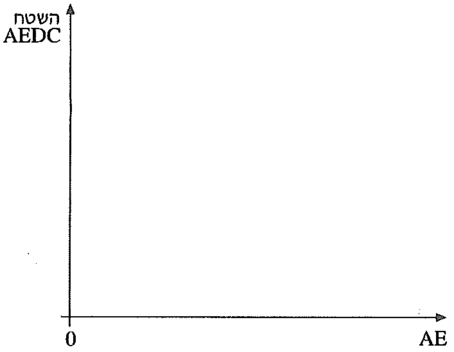
3. טרפז בתוך משולש

א) בנו משולש כבשרטוט:
שרטטו קטע AB באורך 6.
העבירו אנך ל- AB ב- A, באורך 3.
צבעו את הטרפז AEDC.
פתחו מד-אורך למדידת AE,
ומד-שטח למדידת AEDC.



גררו את D, בכיוון ל- B, ובדקו כיצד משתנה שטח הטרפז.

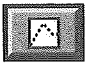
ב) שרטטו גרף משוער המתאר את השתנות שטח הטרפז AEDC כפונקציה של AE.
(הכוונה לצורת הגרף, לכן אין הכרח להוסיף יחידות.)



ג) מה קורה לשטח, ולקצב הגידול שלו כאשר AE גָדֵל?

ד) שרטטו את הגרף באמצעות המחשב.

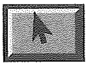
הכינו מערכת צירים לשרטוט הגרף.

 ← הביאו את המסגרת למסך והקישו.

רשמו מה מתאר כל ציר.

שנו יחידות על הצירים.

שרטטו את הגרף.

 ← גררו את D.

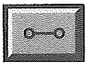
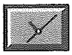
השוו את הגרף שהתקבל עם הגרף המשוער ששרטטתם בסעיף ב'.

בטאו את שטח הטרפז כפונקציה של x.

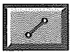
4. **וכל השלושה יחד**

א) המשיכו את הבנייה שבתרגיל 3 של הפעילות, על פי ההוראות הבאות:

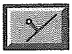
העבירו אנך ל- AB בנקודה B באורך AC.

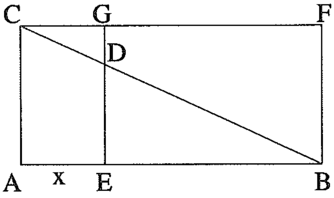
 ←  ← ...

חברו את CF.

 ← ...

העבירו אנך מנקודה D ל-CF

 ← ...



ב) שרטטו, במערכת הצירים בה משורטט הגרף הקודם (מתרגיל 3), גרף נוסף המתאר את השתנות שטח ΔCGD כפונקציה של AE (ששווה ל-CG).
לשם כך:
פתחו מד-שטח למדידת שטח ΔCGD.
חברו אותו עם ציר y.
גררו את D.
קיבלתם באותה מערכת גם את הגרף שבתרגיל 2 של הפעילות. הסבירו.

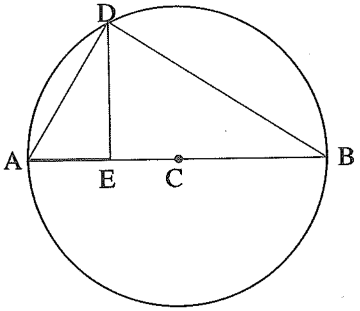
ג) מה משמעות הנקודות המשותפות של שני הגרפים?

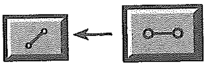
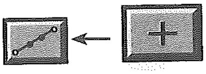
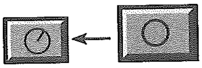
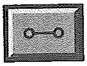
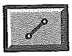
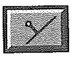
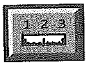
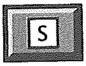
ד) שרטטו באמצעות המחשב, את הגרף של סכום שתי הפונקציות המשורטטות. לשם כך, פתחו מד שטח למדידת AEDC+CGD, חברו מד-שטח זה לציר y, וגררו את D. הסבירו.

ה) חברו את שני חוקי הפונקציות שרשמתם בתרגילים 2 ו- 3 של הפעילות, ובדקו אם החוק מתאים לגרף הסכום שקיבלתם כאן.

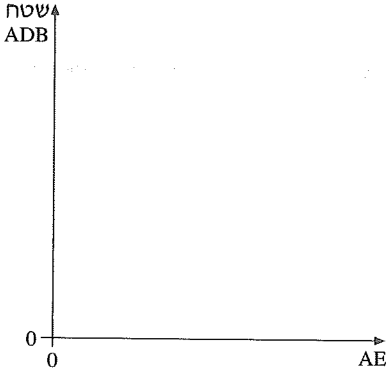
פעילות 10 - השתנות שטח בתוך עיגול

בתרגיל זה נבדוק כיצד משתנה שטח ΔADB כפונקציה של AE.

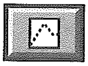


שרטטו קטע AB באורך 6.	 הביאו את הסמן למסך והקישו. תסומן A. רשמו ישר מ-A באורך 6.
חצו את AB.	 חלקו את AB ל- 2 חלקים שווים.
שרטטו מעגל שמרכזו C ורדיוסו AC.	 ...
סמנו נקודה D על המעגל.	 הביאו את הסמן לנקודה **על המעגל** והקישו. תסומן הנקודה D.
חברו את DA ואת DB.	 ישר מ- D ל- A. ישר מ- D ל- B.
שרטטו אנך מ- D ל- AB.	 ...
מדדו את AE.	 ...
מדדו את שטח משולש ADB.	 ...

ב) שרטטו גרף משוער המתאר את השתנות שטח המשולש ADB כאשר AE גָדֵל.
(הכוונה לצורת הגרף לכן אין הכרח להוסיף יחידות.)

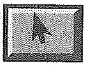


ג) שרטטו גרף באמצעות המחשב.



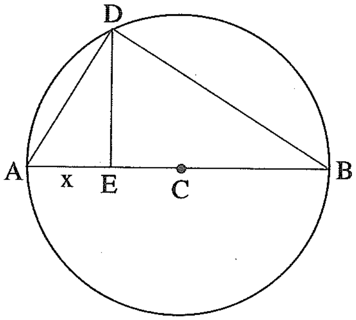
הביאו את המסגרת למסך.
חברו את החץ שבקצה מד-האורך AE לחֵץ שליד הציר האופקי, ואת החץ שבקצה מד השטח לחֵץ שליד הציר האנכי.

שנו יחידות על הצירים. — הקישו הקשה כפולה על אחד הצירים ורשמו יחידות מתאימות.

שרטטו את הגרף. —  ...

ד) השוו את הגרף המשוער עם הגרף שהתקבל על צג המחשב.
- מה צורת הגרף שקיבלתם?
- עבור איזה ערך של AE מתקבל המקסימום?
- מהו הערך המקסימלי?

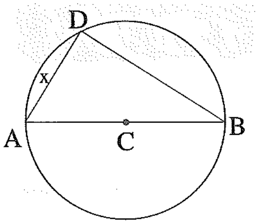
הסבירו, בעזרת שיקולים גאומטריים, איזה סוג משולש הוא ΔADB במקרה זה?



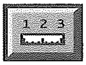
ה) נדון כעת בשאלה באמצעות חוק הפונקציה.
- בטאו את DE בעזרת x.
- בטאו את שטח ΔADB.

כיצד מתבטא התחום ונקודת הקיצון בחוק ההתאמה של הפונקציה?

2. נבדוק כעת את השתנות שטח המשולש (ADB) כפונקציה של אחד הניצבים (AD).

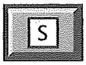


א) פתחו מד אורך למדידת AD.



← רשמו AD וחברו את החֵץ שבקצה מד האורך לחֵץ שליד הציר האופקי.

פתחו מד שטח למדידת שטח ΔADB.

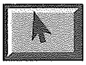


← רשמו ADB וחברו לחֵץ שליד הציר האנכי.

מחקו את הגרפים המשורטטים. הקישו על המערכת לסימונה.

עריכה ← מחקו את הנתונים.

שרטטו את גרף השטח כפונקציה של AD.



← הזיזו את D.

ב) מהו תחום ההשתנות של x?
מה תוכל לומר על ΔADB כאשר x באמצע התחום?
הסבירו מדוע הגרף שהתקבל אינו סימטרי.
חשבו את ערך AD שעבורו השטח מקסימלי, ומצאו את השטח המקסימלי.
– מה הקשר בין שטחי המשולשים ACD ו- BCD?
– איך לדעתכם ייראה גרף המתאר את שטח משולש ADC כפונקציה של x? שרטטו ובדקו.

ג) איך ייראה לדעתכם, הגרף שמתאר את שטח ΔADB כפונקציה של DB. (במקום כפונקציה של AD)? בדקו באמצעות המחשב.

ד) בטאו את שטח משולש ADB כפונקציה של x.

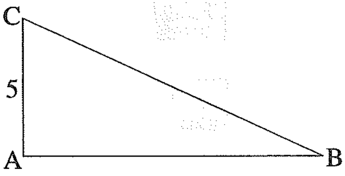
ה) בדקו אם הנוסחה מתאימה לגרף שהתקבל. היעזרו בערכי x, עבורם השטח אפס.

בסעיף ב׳ מצאתם את ערכו של AD עבורו השטח מקסימלי. הציבו ערך זה בחוק ההתאמה של הפונקציה, ובדקו אם מתקבל השטח המקסימלי שמצאתם בסעיף ב׳.

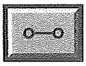
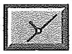
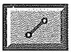
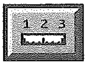
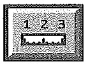
שימו לב! בניגוד לגרף שהתקבל בתרגיל 1 (המתאים לתבנית $y = 3\sqrt{6x - x^2}$), כאן לא ניתן לגלות את נקודת המקסימום על פי חוק הפונקציה שמצאתם. במסגרת לימוד האנליזה, תלמדו כיצד ניתן למצוא את נקודת המקסימום של הפונקציה בעזרת החוק.

פעילות 11 - צלעות וכל היתר

בפעילות זו נחקור את ההשתנות של אורכי הצלעות במשולש ישר זווית.



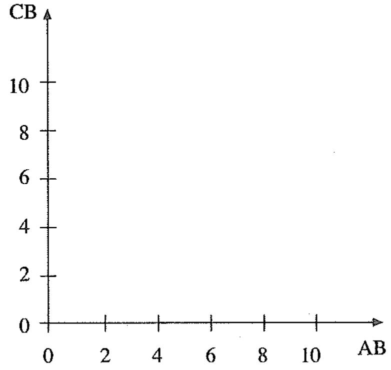
1. היתר כפונקציה של ניצב

שרטטו קטע AB.		← הביאו את הסמן למסך, הקישו, הזיזו ושחררו.
שרטטו אנך ל- AB, מהנקודה A, באורך 5.		←אנך לישר AB, מהנקודה A, באורך 5.
חברו את CB.		←ישר מ- B ל- C.
מדדו את AB ואת CB.		← הביאו את המסגרת למסך ורשמו AB.
		← הביאו את המסגרת למסך ורשמו CB.

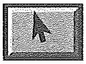
גררו את B, ובדקו את ההשתנות של BC כפונקציה של AB.

- מתי מתקבל ערך מינימלי עבור BC?
- מה תוכלו לומר על אורך CB ביחס לאורך AB.

ב) היעזרו בתכונות שרשמתם ושרטטו גרף משוער.



ג) שרטטו את הגרף באמצעות המחשב.

		← הביאו את המסגרת למסך והקישו. חברו את החֵץ שבקצה מד-האורך של AB, לחֵץ שליד הציר האופקי. חברו את החֵץ שבקצה מד-האורך של BC, לחֵץ שליד הציר האנכי.
בחרו יחידות מתאימות לצירים.	הביאו את הסמן לאחד הצירים, הקישו פעמיים ורשמו יחידות מתאימות.	
שרטטו את הגרף.		← גררו את B.

ד) נדון בתכונות של השתנות הצלעות, כפי שהן באות לידי ביטוי בגרף.

למשל, מה אורך CB כאשר:

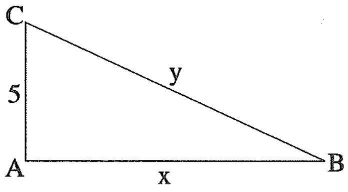
AB = 10

AB = 20

AB = 100

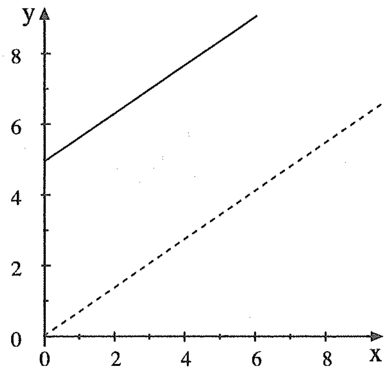
עבור ערכים גדולים של AB גרף הפונקציה מתקרב לקו ישר. נסו להסביר מדוע.

ד) בטאו את CB כפונקציה של AB.

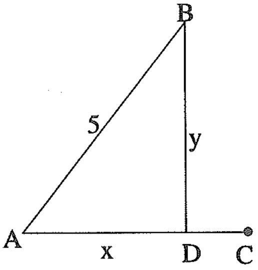


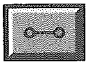
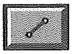
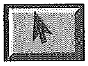
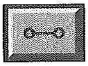
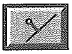
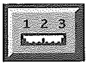
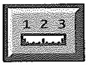
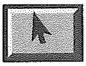
היעזרו בפעולות אלגבריות והסבירו מה קורה כאשר x גָדֵל, ומהי משוואת הישר אליו מתקרב גרף הפונקציה.

ה) הגרף כלוא בין שני ישרים מקבילים. מה משוואותיהם? הסבירו מה מייצג כל אחד מהישרים מבחינה גאומטרית, ולמה הגרף כלוא בין השניים.



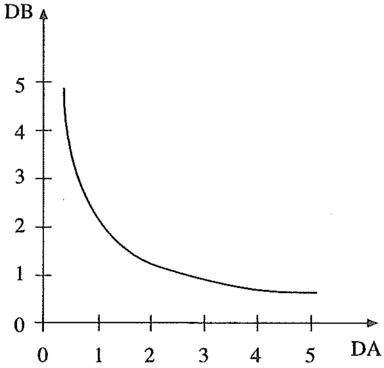
2. ניצב כפונקציה של ניצב

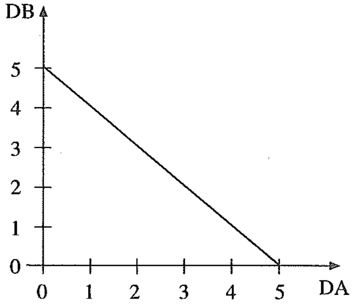


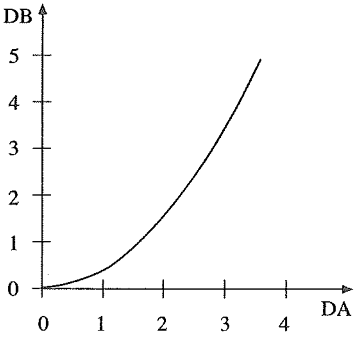
שרטטו קטע AB באורך 5.	 ←  ← הביאו את הסמן למסך והקישו. ישר מ- A באורך 5.
שנו את כיוון AB.	 ← גררו את B כך ש- AB לא יהיה אופקי.
שרטטו ישר נוסף מ- A.	 ← הביאו את הסמן ל- A הקישו, הזיזו ושחררו.
שרטטו אנך מ- B ל- AC.	 ← אנך מהנקודה B לישר AC.
מדדו את AD ואת BD.	 ← הביאו את המסגרת למסך ורשמו AD.  ← הביאו את המסגרת למסך ורשמו BD.
שנו את המשולש.	 ← גררו את B.

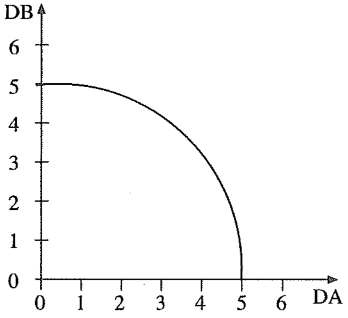
ב) מה תוכלו לומר על הקשר בין אורכי הניצבים AD ו- DB?

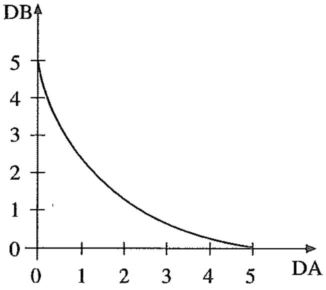
ג) התייחסו לכל גרף והסבירו למה הוא יכול, או לא יכול, לייצג את ההשתנות של DB כפונקציה של DA.

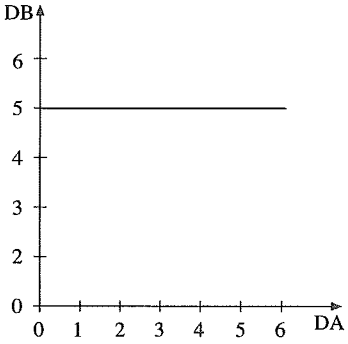




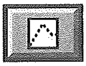








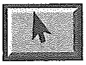
ד) לצורך בדיקה שרטטו באמצעות המחשב:



← הביאו את המסגרת למסך והקישו. חברו את החֵץ שליד מד-האורך AD, לַחֵץ שליד הציר האופקי, ואת החֵץ שליד מד-האורך BD, לַחֵץ שליד הציר האנכי.

ה) **עקבו** אחר מקום הנקודה B.

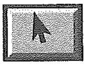
סמנו אותה.



← הקישו על B.

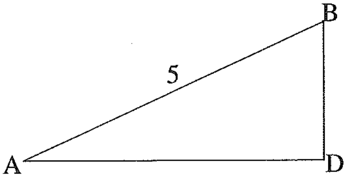
תנועה ← הפעילו עקבות.

וכעת גררו את B, ותקבלו את עקבותיה על המסך.



← . . .

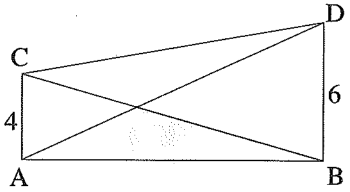
ו) בטאו את DB כפונקציה של AD.



ז) היעזרו בפעולות אלגבריות, וקבעו איזו משוואה התקבלה והאם היא מתאימה לצורת העקבות שעל המסך.

פעילות 12 - מוטות הרמוניים

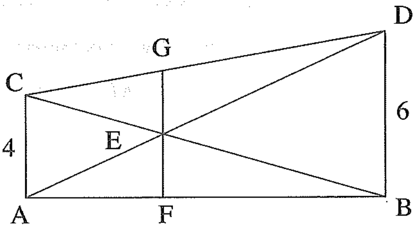
1. באתר בנייה העמידו שני עמודים AC ו- BD, בגובה 4 מ' ו- 6 מ', וחברו את הקצה העליון CD של המוטות. כמו כן חברו בכבל כל קצה עליון עם הקצה התחתון של המוט השני (הקטעים AD ו- CB).



א) כדי שהכבלים יהיו מתוחים צריך להעמיד מוט שיתמוך בשלושת הכבלים.
היכן כדאי להעמיד את המוט כך שיהיו רק שני חיבורים בין המוט והכבלים?
השלימו את השרטוט.

ב) שרטטו שני תרשימים על דף המשבצות, כך שהמרחק בין המוטות יהיה שונה, ואורך המוטות ישאר 4 מ' ו-6 מ'. מה אורך המוט התומך בכל מקרה?

ג) נחקור באמצעות המחשב, את הקשר בין המרחק שבין המוטות (AB) ואורך המוט התומך.

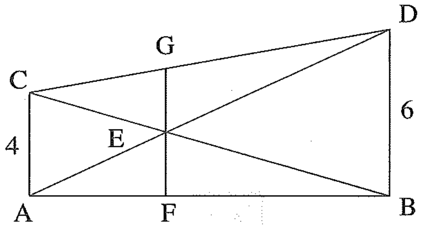


שרטטו ישר AB.	הביאו את הסמן למסך, הזיזו ושחררו.
העבירו אנך ל- AB בנקודה A באורך 4. העבירו אנך ל- AB בנקודה B באורך 6.	אנך לישר AB מ-A באורך 4 אנך לישר AB מ- B באורך 6.
חברו את CD, CB ו- AD.	ישר מ- C ל- D ישר מ- C ל- B ישר מ- D ל- A
סמנו את נקודת החיתוך של CB ו- AD.	חיתוך של AD ושל CB.
שרטטו אנך מנקודת החיתוך ל- AB.	אנך מ- E ל- AB.
סמנו את נקודת החיתוך של האנך EF ו- CD.	חיתוך של EF ו- CD.
חברו את הנקודה שקיבלת ו-E.	חברו את E ו-G.
מדדו את FG.	הביאו את המסגרת למסך ורשמו GF.
הזיזו את B ובדקו כיצד משתנה FG כאשר AB משתנה.	...

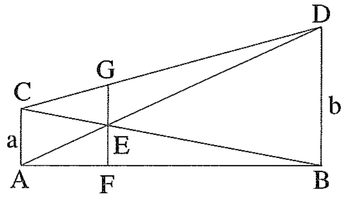
ד) כדי להסביר את התוצאה נחשב את GF. אפשר לעשות זאת בדרכים שונות:

i) להיעזר בדמיון משולשים: חשבו את EF בעזרת דמיון של ΔABC ו- ΔFBE ושל ΔADB ו- ΔAEF.
בדרך דומה מצאו את GE, ואחר-כך את FG.

ii) תוכלו להיעזר במשוואות של ישרים: בחרו את A כראשית הצירים, ורשמו את משוואות הישרים: AD , CB, ו- CD.

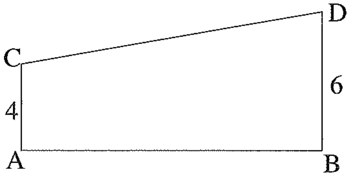


ה) חזרו על התהליך שביצעתם בסעיף ד' , אם אורך המוטות מיוצג על-ידי a ו- b.

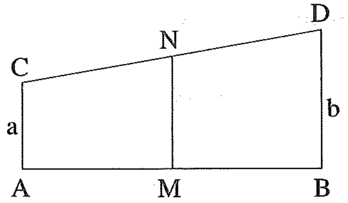


מספר המתקבל באופן בו ביטאתם את GF בעזרת a ו-b, בסיסי הטרפז, נקרא **הממוצע ההרמוני** של a ו- b.

ו) – שרטטו קטע אמצעים MN, בטרפז (ישר-הזווית) ABDC, וחשבו את אורכו.

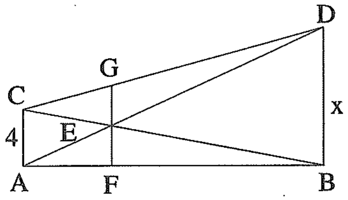


- בטאו גם את אורך קטע האמצעים בטרפז ישר-זווית בעזרת a ו-b (בסיסי הטרפז).
- האם אורך GF (הממוצע ההרמוני של a ו- b) **תמיד** קטן מאורך קטע האמצעים NM, (הממוצע החשבוני של a ו-b)? הסבירו.

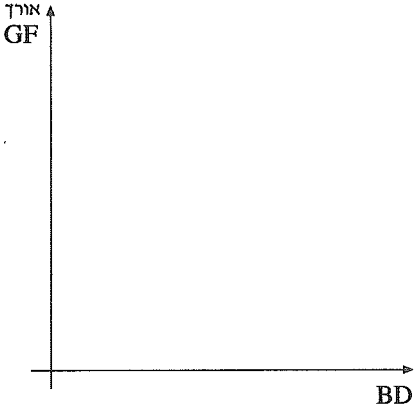


2. נבדוק כעת, את השתנות הקטע שהוא "הממוצע ההרמוני" של הבסיסים, לפי השתנות אחד הבסיסים, כאשר הבסיס השני קבוע.

א) רשמו את הפונקציה המתאימה.



ב) כיצד לדעתכם ייראה הגרף?
נסו לשרטט גרף משוער.

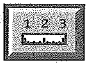


ג) נבנה את הגרף גם באמצעות הנדסה בתנועה.

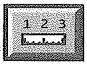
שנו את הבנייה כך שאורך BD יהיה ניתן לשינוי.

הקישו הקשה כפולה על BD, ומחקו במשבצת האורך את המספר הרשום.

מדדו את BD ואת GH.

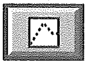


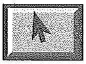
← ...



← ...

שרטטו גרף המתאר את השתנות GF כאשר BD משתנה.


← הביאו את המסגרת למסך, וחברו את מד האורך BD לציר האופקי, ואת מד האורך GF לציר האנכי.


← גררו את D, לשרטוט הגרף.

במה דומה ובמה שונה הגרף שהתקבל מהגרף המשוער ששרטטתם? הסבירו.

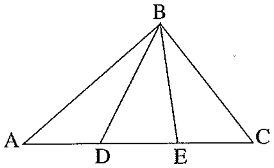
פעילות 13 - זוויות מול קטעים שווים

שני התרגילים הראשוניים הם תרגילי הכנה לקראת הפעילות המרכזית בתרגיל 3.

1. בין אילו ערכים משתנה גודל זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים? הסבירו.

2. אחד מהתיכונים במשולש מתלכד עם חוצה הזווית. מה תוכלו לומר על המשולש? הסבירו.

3. חילקו צלע AC של משולש ABC לשלושה חלקים שווים וחברו עם נקודות החלוקה.

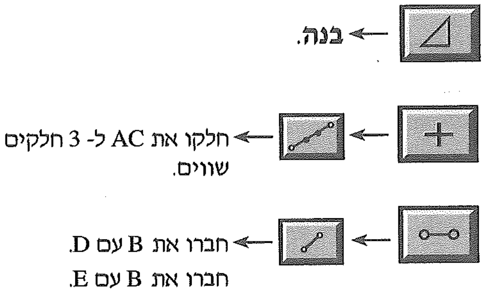


מה תוכלו לומר על שלוש הזוויות שנוצרו בקודקוד B?

בדקו באמצעות המחשב.

חלקו את צלע AC ל 3 חלקים שווים.

חברו את נקודות החלוקה עם הקודקוד B.



האם הזוויות תמיד שוות? אולי הן שוות במקרים מסוימים? ואולי אף פעם אינן שוות?

נסו ליצור, על ידי שינוי המשולש, מצב בו 3 הזוויות שוות זו לזו.

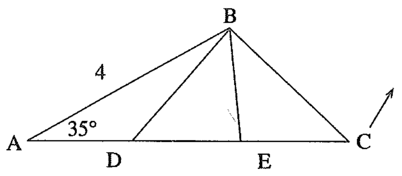
ב) כדי לבצע חקירה שיטתית יותר של הבעיה ניעזר בגרפים.

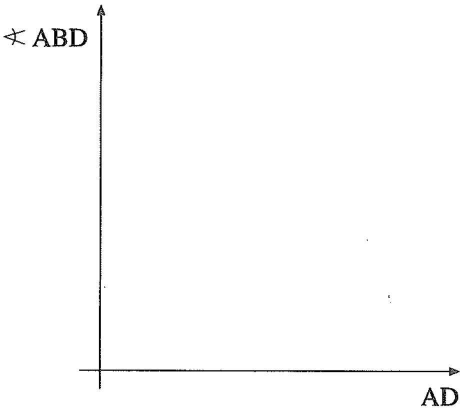
נשרטט באותה מערכת צירים, 3 גרפים שיתארו את השתנות כל אחת מ- 3 הזוויות כפונקציה של AD.

- איך יתבטא בגרף מצב בו שלוש הזוויות שוות זו לזו?

  כדי לשרטט את הגרף יש לקבוע 2 גדלים: נקבע AB = 4 יח׳ ∢BAC = 35°

- איך לדעתכם יראה הגרף של ∢ABD כפונקציה של AD כשגוררים את C ו- A בכוון החץ? שרטטו גרף משוער.





- שרטטו, באותה מערכת צירים, גרפים משוערים המתארים את השתנות ∢DBE ואת התשנות ∢EBC כפונקציה של AD, כשגוררים את C בכוון החץ.

שרטטו את הגרפים באמצעות המחשב.

שרטטו קטע AB שאורכו, למשל, 4 יחידות.

הביאו את הסמן למסך והקישו. תסומן נקודה A. רשמו קטע מ- A באורך 4.

שרטטו זווית BAC שגודלה, למשל, 35°.

זווית מ AB בגודל 35°.

חבר את BC.

חברו את B עם C.

חלקו את AC ל 3 חלקים שווים.

חלקו את AC ל 3 חלקים שווים.

חברו את B עם נקודות החלוקה.

חברו את B עם D.
חברו את B עם E.

הביאו מד אורך למדידת AD.

הביאו את המסגרת למסך ורשמו AD, (Enter לסיום הכתיבה).

הביאו מערכת צירים.

הביאו את המסגרת למסך. הביאו את הסמן לַחֵץ שליד מד האורך לְחצו, והזיזו לַחֵץ שליד הציר האופקי במערכת הצירים.

חזרו עבור מד הזווית ABD והציר האנכי.

שנו את היחידות על הצירים.

הקישו הקשה כפולה על אחד הצירים יפתח מסך של קנה מידה.
רשמו: ציר אופקי 0 מ עד 8.
ציר אנכי 0 מ עד 150.

שרטטו את הגרפים.

הזיזו את C, הגרף ישורטט.

חברו את מד הזווית DBE לציר האנכי.

הזיזו את C, והגרף השני שורטט.

שרטטו גם את הגרף של הזווית השלישית EBC.

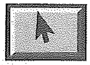
האם עבור הנתונים שנבחרו יש מקרה של 3 זוויות שוות?

הזיזו את C, כך שהנקודה המסומנת על הגרף תגיע אל נקודת חיתוך של שניים מהגרפים.
מה מייצגת הנקודה הזו?
מה מייצגת כל אחת משתי נקודות החיתוך האחרות?

האם לזוג כלשהו, מבין שלושת הגרפים, יכולה להיות נקודת חיתוך נוספת (פרט ל- (0,0), ולנקודה המופיעה על המסך)?

עד כה בדקתם משפחה מסויימת של משולשים ($AB = 4$ $\sphericalangle BAC = 35°$) וקיבלתם 3 נקודות חיתוך נפרדות. השאלה כעת היא, אם ניתן לבחור נתונים אחרים כך שנקודות החיתוך תתקרבנה אחת לשניה ואולי אף תתלכדנה.

שנה את הנתונים.

שנו את גודל הזווית.	הקישו פעמיים על הצלע AC יפתח המסך של בניית הזווית. בחרו גודל אחר ל $\sphericalangle$BAC והקישו על **שנה**.
מחקו את הגרפים.	 ← הקישו על מסגרת הגרף. **עריכה** ← מחק את הנתונים.
שרטטו את הגרפים עבור הנתונים החדשים.	← גררו את C ושרטטו אחד מהגרפים. שרטטו גם את שני הגרפים האחרים.

האם בנתונים החדשים קיבלתם מקרה של 3 זוויות שוות בקודקוד B?
תוכלו לשנות את הנתונים כרצונכם, ולבדוק אם ניתן להגיע ל- 3 זוויות שוות.
(אל תמהרו להסיק מסקנות - קחו בחשבון את הדיוק של המחשב.)

האם אפשר להגיע ל- 3 זוויות שוות? אם כן, הסבירו באיזה מקרה ולמה, ואם לא, הסבירו מדוע לא?