מספרי פיבונצ'י

למורה

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

חובר על-ידי:

אלכס פרידלנדר
רחל וולטמן

הדפסה במחשב:

יעל עמנואל-אדרי

שרטוט ועריכה:

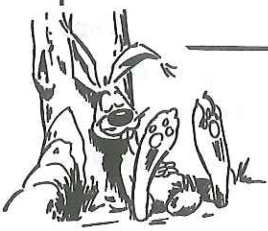
אבי טל

1. לארנבות באהבה!

(דפים לתלמיד)

לפני כ-800 שנה יצא לאור ספרו של פיבונצ'י (FIBONACCI) בשם LIBER ABACI
בעמודים 124-123 של המהדורה השניה של הספר מופיעה השאלה הבאה:

מישהו כלא בין חומות זוג ארנבות שזה עתה נולדו ורצה לבדוק מהו
מספר הארנבות שיוולדו במשך שנה אחת.
מניחים, כי כל זוג בוגר של ארנבות מוליד זוג נוסף מדי חודש בחודשו
וארנבות מגיעות לבגרות חודשיים מיום היוולדם.



1. פתור את שאלתו של פיבונצ'י.

תוכל להעזר בטבלה הבאה:

תחילת החודש ה-	זוגות צעירים (בני חודש)	זוגות בוגרים	זוגות נולדים	סה"כ זוגות
1	0	0	1	1
2	1	0	0	1
3	0	1	1	2
4	1	1	1	3
5	1	2	2	5
6	2	3	3	8
7	3	5	5	13
8	5	8	8	21
9	8	13	13	34
10	13	21	21	55
11	21	34	34	89
12	34	55	55	144
13	55	89	89	233

<u>מספרי פיבונצ'י</u> הם המספרים המציינים את מספר זוגות הארנבות בכל חודש, לפי התנאים של בעית פיבונצ'י.

2. א. רשום את עשרת מספרי פיבונצ'י הראשונים:

1 , 1 , *2* , *3* , *5* , *8* , *13* , *21* , *34* , *55*

ב. רשום בעזרת המספרים הנ"ל שני קשרים מסוגים שונים המתקיימים בסדרה (אפשר להעזר גם בטבלה).
למשל:
1. סכום שני מספרים צמודים מהווה את המספר הבא.
2. סדרת ההפרשים של שני מספרים צמודים מהווה גם כן סדרת מספרי פיבונצ'י.

ג. בדוק אם קשרים אלה מתקיימים גם עבור מספרים נוספים בסדר.

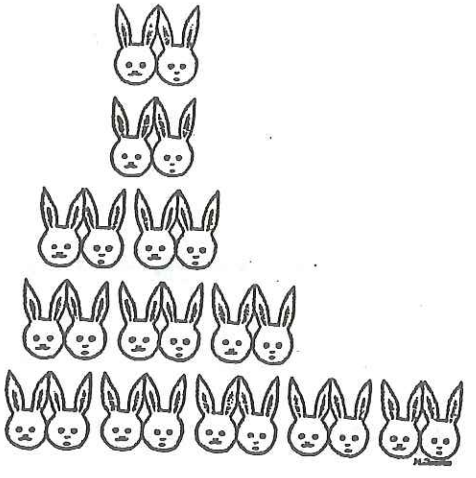
ד. השלם את המקומות המסומנים ב* בטבלה:

תחילת החודש	זוגות צעירים (בני חודש)	זוגות בוגרים	זוגות נולדים	סה"כ זוגות
25				* *75,025*
26				* *121,393*
27				* *196,418*
28	* *75,025*	* *121,393*	* *121,393*	317 ,811
29	* *121,393*	* *196,418*	* *196,418*	514 ,229
30	* *196,418*	* *317,811*	* *317,811*	* *832,040*

ה. כמה זוגות ארנבות יהיו בתום שנתיים? שנתיים וחצי?

בתום שנתיים יהיו 75,025 זוגות ארנבות.

ובתום שנתיים וחצי יהיו 1,346,269 זוגות.



כאילו פיבונצ׳י

4. השלם את ״סדרות פיבונצ׳י״ הבאות:

א. $3 \ , \ -4 \ , \ \underline{-1} \ , \ \underline{-5} \ , \ \underline{-6} \ , \ \underline{-11}$

ב. $\underline{-1} \ , \ \underline{3} \ , \ 2 \ , \ 5 \ , \ \underline{7} \ , \ \underline{12}$

ג. $-2 \ , \ \underline{1} \ , \ -1 \ , \ \underline{0} \ , \ \underline{-1} \ , \ \underline{-1} \ , \ \underline{-2} \ , \ \underline{-3} \ , \ \underline{-5}$

ד. $\underline{1} \ , \ \underline{3} \ , \ 4 \ , \ \underline{11} \ , \ \underline{15} \ , \ 26$

ה. $-9 \ , \ \underline{2} \ , \ \underline{-7} \ , \ -5 \ , \ \underline{-12} \ , \ \underline{-17} \ , \ \underline{-29}$

ו. $-4 \ , \ \underline{3} \ , \ \underline{-1} \ , \ 2 \ , \ 1$

ז. $\frac{1}{2} \ , \ \underline{1} \ , \ 1\frac{1}{2} \ , \ 2\frac{1}{2} \ , \ 4$

5. א. השלם את ״סדרות פיבונצ׳י״ הבאות:

א. $\underline{d-2m} \ , \ 2m \ , \ d \ , \ \underline{2m+d} \ , \ \underline{2m+2d} \ , \ \underline{4m+3d}$

ב. $\underline{x-y} \ , \ \underline{y} \ , \ x \ , \ \underline{x+y} \ , \ \underline{2x+y} \ , \ 3x+2y$

ג. $\underline{2.5x} \ , \ \underline{-1.5x} \ , \ x \ , \ -\frac{x}{2} \ , \ \frac{x}{2} \ , \ \underline{0} \ , \ \frac{x}{2} \ , \ \frac{x}{2} \ , \ \underline{x}$

ד. $2y+3 \ , \ \underline{0} \ , \ \underline{2y+3} \ , \ 2y+3 \ , \ \underline{4y+6} \ , \ \underline{6y+9} \ , \ \underline{10y+15}$

ה. $a \ , \ \frac{b}{2}-\frac{a}{2} \ , \ \frac{b}{2}+\frac{a}{2} \ , \ b$

6. א. בכמה אפשרויות תוכל למלא את הסדרות בתרגיל 4? *אחת!*

ב. בכמה אפשרויות תוכל למלא את הסדרות בתרגיל 5?
<u>יותר</u> מאפשרות אחת.

Leonardo Fibonacci

1. לארנבות באהבה

(הערות למורה)

פתיחה

נספר תחילה מעט על הרקע ההיסטורי של פיבונצ'י.

<u>מיהו פיבונצ'י?</u>

Leonardo da Pisa (בערך 1170-1250) המכונה בשם Fibonacci (בנו של בונצ'י) הינו אולי גדול המתמטיקאים של ימי הביניים.
אביו היה סוחר בפיזה והרבה להפליג בין איטליה וצפון אפריקה. מסיבה זו, לאונרדו חונך בצפון אפריקה, פגש מדענים ערביים רבים ולמד את שיטות החישוב הנהוגות במסחר. כך הוא גילה, כי שיטות החישוב של הערבים היו המתקדמות ביותר. בשובו לפיזה, כתב פיבונצ'י את הספר Liber Abaci אשר התפרסם ב-1202 ושרד במהדורתו השניה מ-1228. בספר זה, מושוות שיטות הספירה הרומאית והערבית, והודות לכך הוכנסה השיטה העשרונית למערב.
תפקידו של לאונרדו לא הצטמצם בהעברת ידע. הוא הצטיין בפתירת משוואות בתורת המספרים.

נוכל לבקש מן התלמידים לחפש באנציקלופדיות, ספרי היסטוריה ומקורות אחרים על פיבונצ'י ועל מאורעות נוספים שחלו במאה בה חי פיבונצ'י (המאה ה-13):

כמו כן ניתן לשאול שאלות נוספות:

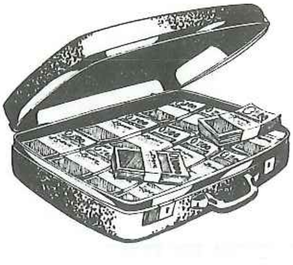
* לפני כמה שנים כתב פיבונצ'י את ספרו?
* באיזו מאה התפרסם ספרו של פיבונצ'י? *מאה ה-13.*
* מה מספר הגורמים הראשוניים של 1202 - שנת פרסום הספר?
  שניים: 601 ו- 2.

בהמשך נציג את "הבעיה של פיבונצ'י" בפני הכיתה (בעית הארנבות), ויחד עם התלמידים נמלא את השורות הראשונות בטבלה שתוצג על שקף.
כדאי להדגיש, כי אפשר למצוא את מספר זוגות הארנבות בתום מספר מסוים של חודשים, על ידי חישוב המספר הפיבונצ'י המתאים לתחילת החודש הבא (למשל, מספר זוגות הארנבות בתום שנה אחת הוא מספר הפיבונצ'י ה-13).

פעילות וסיכום

לאחר הצגת הבעיה בפתיחת השיעור, יעבדו התלמידים על המשך מילוי הטבלה ועל שאלות 2 ו-3. לפני שיעברו לשאלות הבאות, רצוי לסכם יחד עם המורה את ממצאיהם.

עתה, נוכל להדגים לתלמידים סדרות אחרות בעלות חוקיות דומה (כלומר סדרות ששני אבריהן הראשונים אינם 1).
את שאלות 4, 5 ו-6 יוכלו התלמידים לפתור בדרך של ניסוי וטעיה. אין הכוונה לפתח כאן "שיטות" או למצוא את המספרים בעזרת משוואות.
כדי שהתלמידים יבינו את אופי המשימה, כדאי לפתור יחד תרגיל אחד ולהדגים את השיקולים הדרושים למציאת "מספרי ביניים".



2. סכומים

(דפים לתלמיד)

נסמן: a_1 מספר פיבונצ׳י ראשון,

a_2 שני,

a_3 שלישי וכך הלאה.

a_n מספר פיבונצ׳י ה-n בסידרה.

1. השלם את המספרים המתאימים:

$a_1 = \underline{1}$ $\quad$ $a_2 = \underline{1}$ $\quad$ $a_3 = \underline{2}$

$a_6 = \underline{8}$ $\quad$ $a_{9-3} = \underline{8}$ $\quad$ $a_{6+1} = \underline{13}$

$a_2 + a_4 = \underline{4}$ $\quad$ $a_8 + 3 = \underline{24}$ $\quad$ $a_4 - 1 = \underline{2}$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \underline{7}$ $\quad$ $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = \underline{-1}$

2. א. השלם בעזרת ״סימוני a״ הצגות שונות למספר פיבונצ׳י מסוים:

I

$$a_3 = a_1 + a_2$$
$$a_3 = a_4 - a_2$$
$$a_3 = a_5 - a_4$$

רשום את סכומי האגפים: $3 \cdot a_3 = a_1 + a_5$

II

$$a_4 = a_2 + a_3$$
$$a_4 = a_5 - a_3$$
$$a_4 = a_6 - a_5$$

רשום את סכומי האגפים: $3 \cdot a_4 = a_2 + a_6$

III

$$a_{20} = a_{18} + a_{19}$$

$$a_{20} = a_{21} - a_{19}$$

$$a_{20} = a_{22} - a_{21}$$

רשום את סכומי האגפים: $3 \cdot a_{20} = a_{18} + a_{22}$

IV

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

$$a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$$

$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

רשום את סכומי האגפים: $3 \cdot a_n = a_{n-2} + a_{n+2}$

ב. שער מה יהיו סכומי האגפים של קובץ דומה עבור a_{100}

$$3 \cdot a_{100} = a_{98} + a_{102}$$

הוכח השערתך!

תזכורת:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

3. א. נסה למצוא חוקיות לגבי סכום מספרי פיבונאצ'י במקומות האי זוגיים.

"שפת a"	שפת המספרים		"שפת a"
a_1+a_3	$1+2$	$=3$	$=a_4$
$a_1+a_3+a_5$	$1+2+5$	$=8$	$=a_6$
$a_1+a_3+a_5+a_7$	$1+2+5+13$	$=\underline{21}$	$=a_8$
$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$	$1+2+5+13+34$	$=\underline{55}$	$=a_{10}$
$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$	$1+2+5+13+34+89$	$=\underline{144}$	$=a_{11}$
⋮			
$a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{21}$	$\longrightarrow$		$=a_{22}$
⋮			
$a_1+a_3+a_5+\ldots+a_n$	$\longrightarrow$		$=a_{n+1}$

n אי זוגי

ב.נסה למצוא חוקיות לגבי סכום מספרי פיבונצ׳י במקומות הזוגיים.

"שפת a"	שפת המספרים		"שפת a"
a_2+a_4	$1+3$	$=4$	$=a_5-1$
$a_2+a_4+a_6$	$1+3+8$	$=12$	$=a_7-1$
$a_2+a_4+a_6+a_8$	$1+3+8+21$	$=33$	$=a_9-1$
$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$	$1+3+8+21+55$	$=88$	$=a_{11}-1$
$\vdots$			
$a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{22}$	$\longrightarrow$		$=a_{23}-1$
$\vdots$			
$a_2+a_4+a_6+\ldots+a_n$	$\longrightarrow$		$=a_{n+1}-1$
n זוגי			

ג. נסה למצוא חוקיות דומה לגבי סכום מספרי פיבונצ׳י.

"שפת a"	שפת המספרים		"שפת a"
a_1+a_2	$1+1$	$=2$	$=a_4-1$
$a_1+a_2+a_3$	$1+1+2$	$=4$	$=a_5-1$
$a_1+a_2+a_3+a_4$	$1+1+2+3$	$=7$	$=a_6-1$
$\vdots$			
$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{20}$	$\longrightarrow$		$=a_{22}-1$
$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{21}$	$\longrightarrow$		$=a_{23}-1$
$\vdots$			
$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$	$\longrightarrow$		$=a_{n+2}-1$

4. ידוע, כי

$$a_{20} = 6765$$

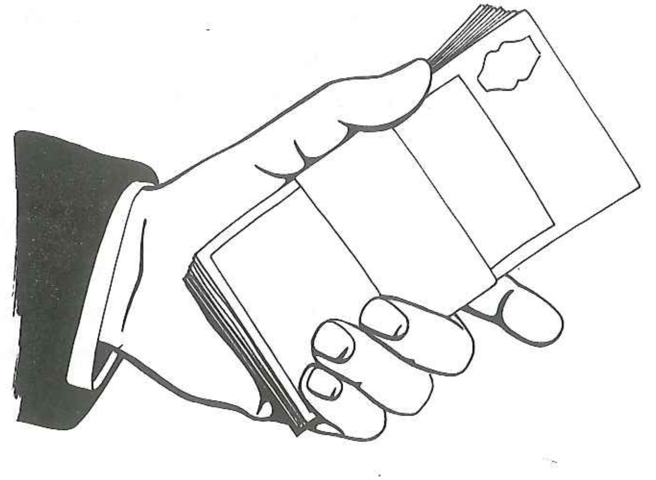
$$a_{21} = 10{,}946$$

מצא את הסכומים הבאים:

א. $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots + a_{20} = a_{21} - 1 = 10{,}945$

ב. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{21} = a_{22} = 16{,}711$

ג. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{17} = a_{19} - 1 = 4180$



2. סכומים

(הערות למורה)

פתיחה

בפתח השעור נציג את סדרת פיבונצ׳י שוב, ונעמוד על הסימונים עבור מספרי - הסידרה.
יש להדגיש את ההבדל בין המספר המציין את מקום האיבר בסידרה לבין ערך של מספר, כמו למשל a_{4-1} לעומת $a_4 - 1$, ולוודא, כי התלמידים אכן פותחים את שאלה 1 בדף לתלמיד ללא טעויות.

פעילות

שאלה 2 על סעיפיה מתרגלת שימוש והצגת מספר פיבונצ׳י מסויים בעזרת סכומים והפרשים של מספרים אחרים בסדרה. זוהי הכנה לקראת שימוש בטורים טלסקופיים לחישוב סכום או להוכחת חוקיות לגבי סכום איברים של סדרה נתונה. בתום העבודה על שאלה זו יש לסכם יחד ולהדגים את אחד הקבצים.
עתה יוכלו התלמידים לגשת לפתרון שאלה 3. לתלמידים המתקשים, אפשר להציע לחפש קשר בין הסכומים המתקבלים לבין מספרי פיבונצ׳י הרשומים ב״תזכורת״ שלפני תרגיל 3.
כדאי להסב את תשומת ליבם של התלמידים המתקשים בתרגיל 4, כי תרגיל זה הוא שימוש בתוצאת התרגיל הקודם.

סיכום

לסיכום, נציג על שקף את 3 הטורים הטלסקופיים הבאים:

א	ב	ג
$a_1 = a_2$	$a_2 = a_1$	$a_1 = a_3 - a_2$
$a_3 = a_4 - a_2$	$a_4 = a_5 - a_3$	$a_2 = a_4 - a_3$
$a_5 = a_6 - a_4$	$a_6 = a_7 - a_5$	$a_3 = a_5 - a_4$
$a_7 = a_8 - a_6$	$a_8 = a_9 - a_7$	$a_4 = a_6 - a_5$
$a_9 = a_{10} - a_8$	$a_{10} = a_{11} - a_9$	$a_5 = a_7 - a_6$
$a_{11} = a_{12} - a_{10}$	$a_{12} = a_{13} - a_{11}$	$a_6 = a_8 - a_7$
$a_{13} = a_{14} - a_{12}$	$a_{14} = a_{15} - a_{13}$	$a_7 = a_9 - a_8$
		$a_8 = a_{10} - a_9$
		$a_9 = a_{11} - a_{10}$
		$a_{10} = a_{12} - a_{11}$

האם ניתן להסביר בעזרת הטורים האלה את הקשרים אליהם הגענו בשאלה 13?

על-ידי חיבור אגפי השוויונות בטורים. לאחר כנוס וביטול תבניות נגדיות נקבל:

<u>*טור א'*</u> $$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{13} = a_{14}$$

__טור ב׳__ $a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{14}=a_{15}+a_1-a_3=a_{15}+1-2=a_{15}-1$

__טור ג׳__ $a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{10}=a_{12}-a_2=a_{12}-1$

עתה אפשר לשאול מדוע נקראים טורים אלה טורים ״טלסקופיים״?

החיבור לפי אגפים גורם להתכנסות וביטול איברים בדומה להתקצרות של טלסקופ על-ידי התכנסות הטבעות המרכיבות אותו אחת בתוך השניה.

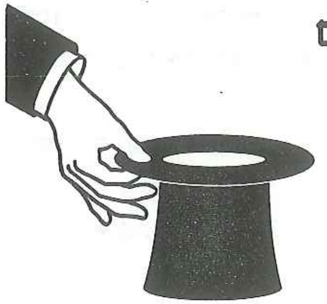
את השוויונים האלה ניתן להכליל גם עבור סכום n איברים בסידרת פיבונצ׳י. למסקנה לגבי סכום n מספרי פיבונצ׳י הראשונים (שאלה 3 ג׳) נוכל להגיע גם על סמך המסקנות שהוסקו בשני הסעיפים הקודמים:

אם n זוגי

$$\begin{aligned}
&a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n=\\
&=(a_2+a_4+a_6+\ldots+a_n)+(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{n-1})=\\
&\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\\
&=\quad(a_{n+1}-1)\qquad+\qquad a_n=\\
&=\qquad a_{n+2}-1
\end{aligned}$$

אם n אי זוגי

$$\begin{aligned}
&a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n=\\
&=(a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{n-1})+(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_n)\\
&\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\\
&=\quad(a_n-1)\qquad+\qquad a_{n+1}=\\
&=\qquad a_{n+2}-1
\end{aligned}$$



3. קסמים

(דפים לתלמיד)

חיבור מהיר

1. בחר שני מספרים שלמים קטנים.

א. בנה סידרה לפי חוקיות פיבונצ'י בעזרת שני מספרים אלה בזמן של 2 דקות בדיוק (תן לחברך למדוד את הזמן ולאחר מכן תתחלפו בתפקידים).

ב. הקף קבוצה של 6 מספרים סמוכים כלשהם בסידרה שבנית <u>וחבר אותם</u>!

ג. קיים קסם לבדיקה מהירה של החיבור!
בקש מן המורה הקוסם לבדוק במהירות את נכונות הסכום שבנית.

ד. למציאת סוד הקסם, השלם את הסידרה הבאה לפי חוקי פיבונצ'י:

$$a\ ,\ b\ ,\ a+b\ ,\ \underline{a+2b}\ ,\ \underline{2a+3b}\ ,\ \underline{3a+5b}$$

מצא את סכום הסידרה (ורשום אותו כמכפלה)

$$8a + 12b = 4(2a + 3b)$$

מהו הקסם?

סכום המספרים בקבוצה הוא 4 פעמים המספר החמישי בקבוצה.

2. נסה למצוא קסם דומה לגבי סכום 10 מספרים סמוכים בסדרה בעלת חוקיות פיבונצ'י (חצי סודי: שים לב למספר השביעי)

הסידרה תהיה:

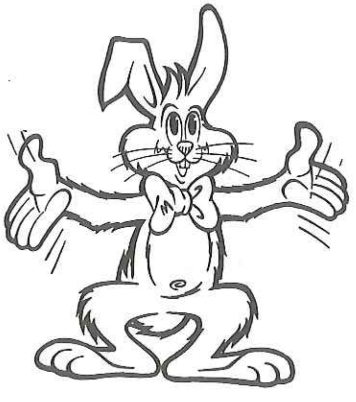
$$a \ , \ b \ , \ a+b \ , \ a+2b \ , \ 2a+3b \ , \ 3a+5b \ , \ 5a+8b \ ,$$

$$8a+13b \ , \ 13a+21b \ , \ 21a+34b$$

והסכום המתאים יהיה:

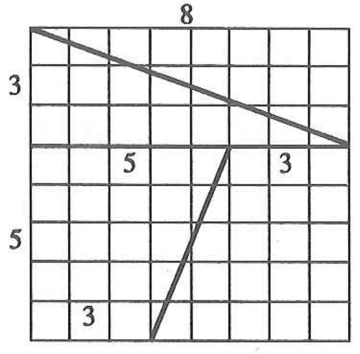
$$55a+88b=11(5a+8b)$$

כלומר, סכום 10 מספרים בקבוצה הוא 11 פעמים המספר השביעי.

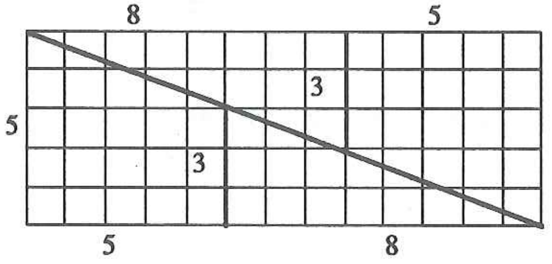


תעלומת הריבוע

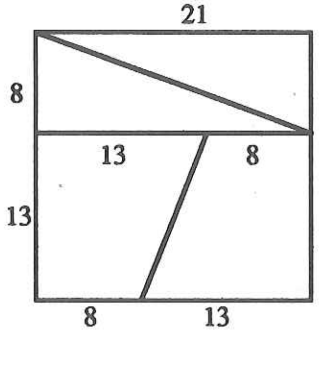
1. א. שרטט ריבוע של 8×8.
חלק אותו כמו בשרטוט.
מהו שטח הריבוע? *64*

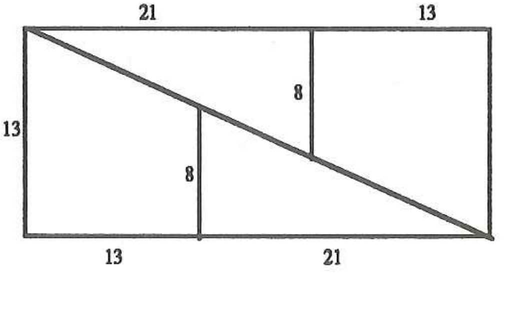


ב. גזור את הריבוע ל-4
החלקים, ובנה מלבן.
מהו שטח המלבן? *65*
כיצד תוכל להסביר
את היווצרות המשבצת
הנוספת.
נסה להסביר את הקסם!



2. חזור על הקסם עם ריבוע של 21×21
חלק אותו באופן דומה לפי 8 ו-13.
השווה שוב בין שטח הריבוע ושטח המלבן.





3. א. השלם והסק מסקנות

"שפת a"		שפת המספרים	"שפת a"
$a_5 \cdot a_7$	$5 \cdot 13$	$= 65$	$= a_6^2 + 1$
$a_7 \cdot a_9$	$13 \cdot 34$	$= 442$	$= a_8^2 + 1$
$a_9 \cdot a_{11}$	$34 \cdot 89$	$= 3026$	$= a_{10}^2 + 1$
$a_{11} \cdot a_{13}$	$89 \cdot 233$	$= 20{,}737$	$= a_{12}^2 + 1$
$a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ n זוגי	$\longrightarrow$		$= a_n^2 + 1$

ב. מהו הקשר בין המסקנות שהסקת בסעיף הקודם ובין "תעלומת הריבוע"?

ג. מצא חוקיות דומה עבור מכפלת מספרי פיבונצ'י במקומות הזוגיים.

"שפת a"	שפת המספרים				"שפת a"
$a_2 \cdot a_4$	$1 \cdot 3$	=	3	=	$a_3^2 - 1$
$a_4 \cdot a_6$	$3 \cdot 8$	=	24	=	$a_5^2 - 1$
$a_6 \cdot a_8$	$8 \cdot 21$	=	168	=	$a_7^2 - 1$
$a_8 \cdot a_{10}$	$21 \cdot 55$	=	1155	=	$a_9^2 - 1$
$a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ n אי זוגי	$\longrightarrow$			=	$a_n^2 - 1$

3. קסמים

(הערות למורה)

פתיחה ל"חיבור מהיר"

כפתיחה לשיעור נפתור את סעיפים א', ב' ו-ג' כפעילות משותפת. המורה יכול לעבור מתלמיד לתלמיד ולבדוק במהירות את נכונות הסכומים על ידי שימוש ב"קסם" שעדיין אינו ידוע לתלמידים: סכום 6 מספרים סמוכים בסידרה לפי חוקיות פיבונצ'י הוא 4 פעמים המספר החמישי.

כעת יוכלו התלמידים להמשיך ולעבוד על התרגיל למציאה ונימוק סוד הקסם (סעיף ד') ולמציאת הקסם בשאלה 2.

סיכום ל"חיבור מהיר"

לסיכום חלק זה של הפעילות, נרכז את התוצאות ונסיק מסקנות לגבי שני הקשרים העומדים מאחורי סוד החיבור המהיר של סדרת מספרים בעלת חוקיות פיבונצ'י.

פתיחה ל"תעלומת הריבוע"

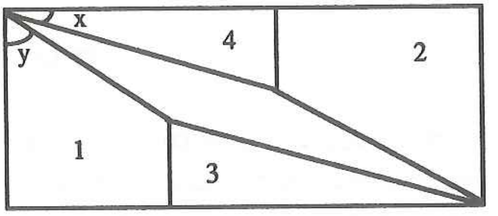
גם ב"קסם" זה כדאי שהמורה יעבוד יחד עם הכיתה בפעילות משותפת. קשה להניח שנקבל מהתלמידים הסבר מדוייק לסוד היווצרות המשבצת הנוספת.
נוכל לקבל אולי השערות כי השרטוט איננו מדויק או הסבר מדויק יותר, כי "האלכסון" של המלבן איננו בעצם קו ישר.

כעת יוכלו התלמידים לעבוד על התרגילים 2 ו-3. אם הפעילויות הקודמות ארכו זמן רב, אפשר לדלג על תרגיל 2.

סיכום ל"תעלומת הריבוע"

לאחר סיכום ההכללות בתרגיל 3, ניתן להדגיש, כי תרגיל זה מציג את האספקט המספרי של התופעה ההנדסית מן התרגילים 1 ו-2.

כהסבר הנדסי ל״תעלומת הריבוע״ נוכל להציג על שקף את השרטוט ״המדוייק״ של הרכבת ארבעת החלקים למלבן:



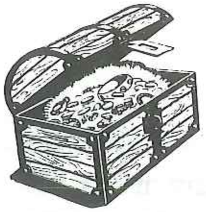
השרטוט מציג בצורה מוגזמת את המקבילית הנוצרת בין ארבעת החלקים המורכבים למלבן.

מכיוון ששטחה של מקבילית זו היא יחידה אחת, אין אנו מבחינים בה בהרכבת החלקים למלבן.

חישובים טריגונומטריים מראים כי $\sphericalangle x = 20.55^\circ$

$\sphericalangle y = 68.20^\circ$

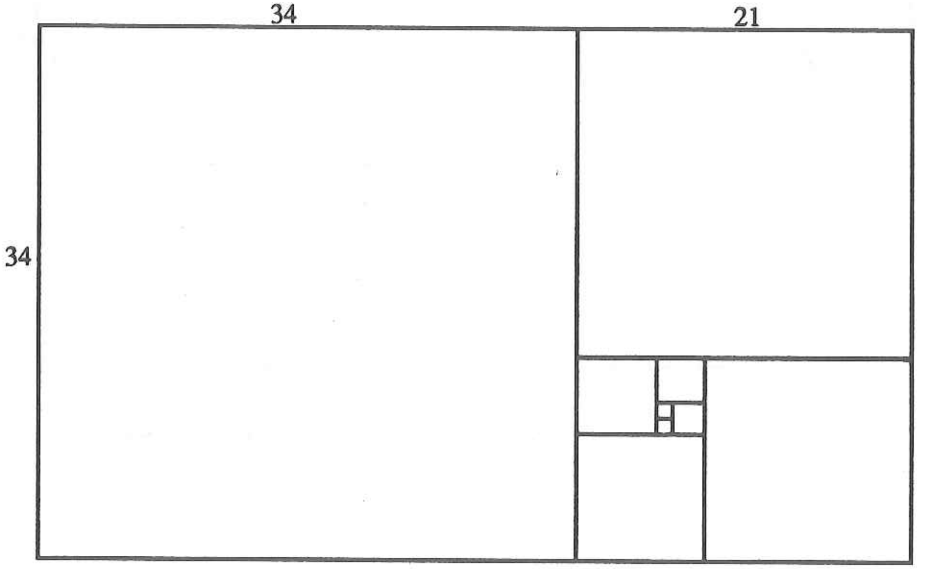
והזוית החדה של המקבילית היא 1.25°



4. יחס הזהב

(דפים לתלמיד)

1. שרטט על נייר משובץ גדול מלבן של 34×55 משבצות. בכל שלב, הפרד מן המלבן שנוצר, ריבוע שאורך צלעו מספר פיבונצ'י (ראה שרטוט).
כלומר, עליך להפריד ריבוע של 34×34, 21×21 וכך הלאה עד הריבוע של 1×1.



2. א. רשום את שטח המלבן הגדול כסכום שטחי ריבועי החלוקה.

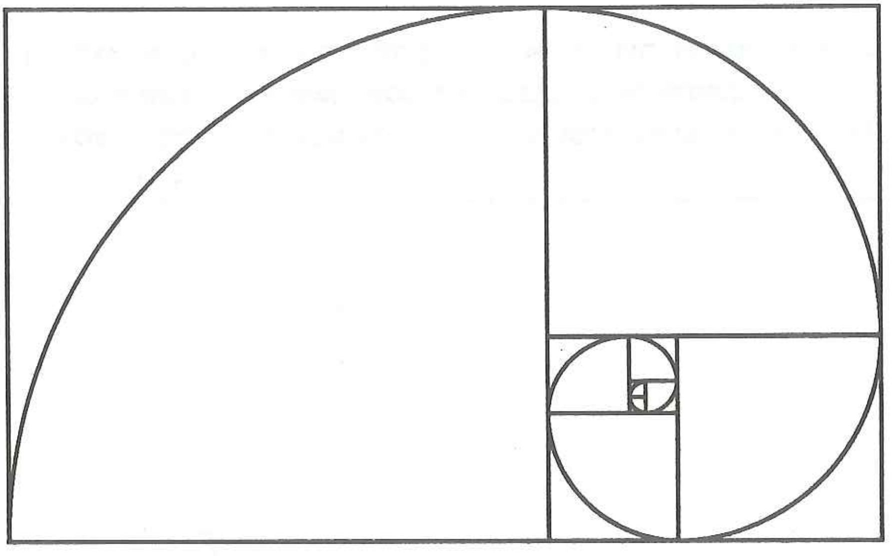
$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2+21^2+34^2=34\times55$$

ב. רשום מבלי לשרטט את שטח המלבן של 55×89 משבצות כסכום ריבועים:

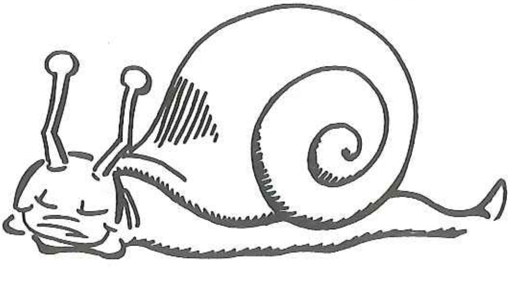
$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2+21^2+34^2+55^2=55\times89$$

ג. השלם: $1^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+a_{n-1}^2+a_n^2=a_n\cdot a_{n+1}$

3. במלבן ששרטטת בתרגיל 1, חבר בעזרת רבעי מעגל את הנקודות המודגשות כאן, בתנועה סיבובית בכיוון השעון, החל מנקודה A.



קרא בספר "מתמטיקה" (בהוצאת מעריב) על פרחים וקונכיות לוליניות.



4. א. מצא את היחס בין אורכו ורוחבו של כל אחד מן המלבנים ששרטטת.

מידות המלבן	יחס הצלעות
1×2	$\frac{2}{1}=2$
2×3	$\frac{3}{2}=1.5$
3×5	$\frac{5}{3}=1.66$
5×8	$\frac{8}{5}=1.6$
8×13	$\frac{13}{8}=1.625$
13×21	$\frac{21}{13}=1.6153846$
21×34	$\frac{34}{21}=1.6190476$

ב. מה תוכל לומר על היחסים שנוצרו?

החל מהמלבן השלישי היחס בין הצלעות נע בסביבות 1.6.
והחל מהמלבן השישי היחס מתיצב סביב 1.61.

ג. מהי המשמעות ההנדסית של התופעה שמצאת?

מכיוון שיחסי צלעות המלבנים "כמעט" שווים, כל המלבנים הנוצרים "כמעט" דומים.

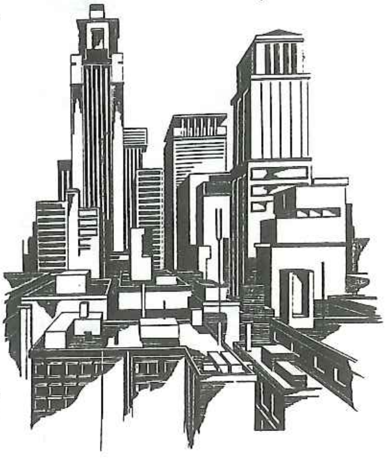
5. א. הפוך לשברים פשוטים ועשרוניים:

$$1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}=2$$

$$1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}=1.5$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}=1+\cfrac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}=1.66$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}=1+\cfrac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}=1.6$$



$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}=1+\cfrac{1}{\frac{8}{5}}=\frac{13}{8}=1.625$$

ב. מה תוכל לומר על ערכי השברים שנוצרו?

מתקבלים אותם הערכים כמו בשאלה הקודמת.

6. קרא על "יחס הזהב".

4. יחס הזהב

(הערות למורה)

פתיחה

בתחילת העיסוק במספרי פיבונצ'י, הבאנו כדוגמא למספרי פיבונצ'י את תהליך התרבות הארנבות.
כעת, נביא דוגמאות נוספות מן האומנות, הארכיטקטורה והן מהטבע. ראשית, נציג על שקף מלבן שאורך צלעותיו הן שני מספרי פיבונצ'י סמוכים. נציג את אופן חלוקת המלבן ל"ריבועי פיבונצ'י". לאחר ההדגמה יוכלו התלמידים לגשת לפתרון השאלות באופן עצמאי.

פעילות

בזמן שהילדים עובדים על השאלות, כדאי לעבור ולוודא שהם אכן מבצעים את החלוקה באופן נכון. כלומר, מתקדמים בתנועה שבלולית בכיוון השעון.
בשאלה 3 יש לשים לב, כי התלמידים אכן מחברים נקודות סמוכות.

סיכום

בסיכום השיעור מומלץ להראות על שקף את החוקיות המתבקשת בשאלה 2, ו"לשרטט" את הקו הלוליני על-ידי חיבור נקודות חלוקת הצלעות. בדיון ועל שאלה 3, רצוי להביא דוגמאות של שבלולים, פרחים לוליניים, מבנים ארכיטקטוניים וציורי אמנים המקיימים את יחס הזהב, אותו מצאנו בשאלה זו. דוגמאות כאלה מובאות בספר "מתמטיקה" מסדרת LIFE (עמ' 92-97) ובספרים רבים אחרים העוסקים בהיסטוריה של המתמטיקה.

בשאלה 4 אפשר לדון גם במישור המספרי וגם במישור ההנדסי. במישור המספרי, ניתן לראות כי יחסיהם של שני מספרי פיבונצ'י סמוכים הולכים ומתייצבים סביב ערך קבוע. במשמעות ההנדסית של התופעה אפשר לדון גם בכיתות שלא למדו את המושג של דמיון. ניתן להביא דוגמאות של מלבנים דומים ולא דומים ולהגיע למסקנה, כי שני מלבנים דומים אם יחסי צלעותיהם שווים (או בשפה פורמלית יותר, צלעותיהם פרופורציוניות). לכן, גזירת ריבוע

מתוך מלבן שמידותיו שני מספרי פיבונצ׳י סמוכים יוצרים מלבן ש״כמעט״ דומה למלבן המקורי.

שאלה 5 מציגה תופעה מעניינת אחרת: השבר המשולב המורכב מ-1 יוצר תמיד יחס של שני מספרי פיבונצ׳י סמוכים. אפשר להציע לילדים לא לחשב כל שבר ״מבראשית״, אלא להשתמש בתוצאה שהתקבלה בשלב הקודם:

כל שבר משולב שווה ל- $1 + \frac{1}{\text{השבר מן השלב הקודם}}$

התופעה זו מאפשרת גם למצוא את הערך המספרי אליו מתקרבים היחסים שבנינו. נניח, כי היחסים האלה אומנם מתקרבים לערך קבוע מסויים ונסמן ערך זה ב-k.

במקרה של השבר המשולב האינסופי, נוכל לרשום את המשוואה

$$1 + \frac{1}{k} = k$$

שפתרונה הוא

$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618034 \ldots$$

(אין אנו מתעניינים בפתרון השני השלילי של אותה המשוואה $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$). בנושא זה אפשר לדון גם בכיתות שלא למדו לפתור משוואות ריבועיות. הערך המספרי שקיבלנו עבור k הוא יחס הזהב. כדאי להפנות את התלמידים לקרוא אודות יחס זה (ראה שאלה 6) ולהציג את ממצאיהם בכיתה.