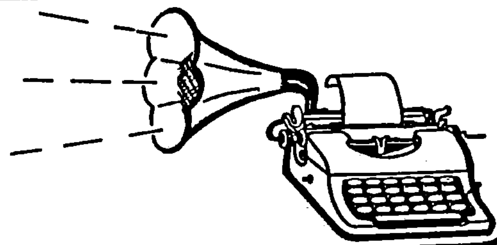
א2

מספרים

עלון למורי מתמטיקה

כרך א, חוברת מספר 2 , אלול תשמ"ז

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות



מספרים

תוכן העניינים

מאמרים:

מערכת מספרים:

מקסים ברוקהיימר נורית זהבי רחל בוהדנה מיכאל קורן

הדפסה: אהובה אביבי רחל נמרודי

גרפיקה: פולינה קרביץ עיצוב: רחל בוקשפן

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

נדפס בישראל 1987, תשמ"ז

קוראים יקרים,

במרכז החוברת תמצא **דף לתלמיד** שנועד לגרות ולעורר מחשבה בכיתה.

אנו מקוים שתלמידיכם ימצאו ענין בדפים אלה ומזמינים אתכם להציע רעיונות נוספים.

נשמח לשמוע "הערות והארות" לעלוננו *מסרים* ולקבל חומר מפרי עטכם.

הכתובת:
מסרים
מערכת *מסרים*
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

ב ב ר כ ה,
מסרים
מערכת מסרים

מאמרים

משחק גומלין בין ייצוגים
דיאלקטיקה של "אמצעי-מטרה" להרחבת היכולת המתמטית

מאת: ר. דואדי (Regine Douady)
תרגום: מיכאל קורן

הקדמה

אנחנו מתעניינים בתהליך המוביל לרכישת ידע מתמטי במסגרת של כיתת לימוד. המחקר התבצע בחמש השנים של בית ספר יסודי בצרפת (גילים 6-11). 20 תלמידים ניצפו במשך כל חמש השנים ואחרים בחלק של הזמן.

בפתח הדברים נציג מספר הנחות על התהליך של רכישת ידע. כדי לתת משמעות לדברים תכננו ובצענו פרוייקט לימודי ספציפי, תוך ארגון הלמידה, לפי ההנחות שלנו.

הפרוייקט התרכז במידות אורך ושטח (בעיקר של מלבנים) ובלמידת השברים העשרוניים. הדגשנו את התפקיד השונה אך הדומה של המידה ושל המספר, על ידי הכנסת מושג הפונקציה בהצגה אלגברית ובהצגה גרפית. שתי ההצגות עוזרות לקשר בין הגיאומטריה והמספרים.

מספר תנאים היו מיוחדים:

- המורות היו מצטיינות. האחת לימדה בשלוש השנים הראשונות והאחרת בשנתיים האחרונות.
- לתלמידים היו 40 דקות למידה בסוף היום להכנת שעורי בית (במתמטיקה ובצרפתית), בהשגחת המורה.

הרצאה זו ניתנה בכנס התשיעי של האגודה לפסיכולוגיה של החינוך המתמטי (P. M. E).
This article was translated, with permission, from the Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. The Netherlands, 1985.

- לכיתה היתה חצר צמודה, כך שהתאפשרה גמישות במערכת השעות.
עם זאת, בית הספר שהיה ללא מעמד נסוי, נמצא בפרבר ממוצע. תלמידים התקבלו לבית הספר לפי איזור מגורים (כמקובל בצרפת).

הפרוייקט תוכנן ל-4 עד 5 שנים, אך רוב המטרות הושגו כבר אחרי 3 שנים, כולל למידת השבר העשרוני. השנתיים האחרונות שמשו, לכן, לבדיקת העומק וההיקף של הלמידה ושל התפתחות המושגים.

אנחנו סבורים שההצה שהושגה בלימודים אינה ניתנת להסברה רק בתנאי העבודה אלא בכך שפעלנו על משתנים מהותיים לתהליך הלימוד.

הנחות היסוד

דרך ההוראה המקובלת היא "למד ויישם". כמו כן:

1. בעיות כוללות, רק לעיתים רחוקות, תכונות של מושגים שבאמת מצדיקות את השימוש בהם במדע.

   לדוגמא: שברים עשרוניים משמשים רק לעתים נדירות בבית הספר היסודי לקביעת מידה בדרגת דיוק רצויה.

2. הצגת המושגים נעשית לרוב בתחום יחיד והיישומים כולם באותו תחום.

אנו מציעים ארגון אחר של הלמידה, אשר מבוסס על דיאלקטיקה של "אמצעי - מטרה", על משחק גומלין בין ייצוגים שונים ועל יצירת מצבים של ערעור שווי המשקל ויצירת שיווי משקל מחודש.

מסגרת תיאורטית

א. **תהליך הלמידה.**

עבודות של פיאג'ה וורניו (Vergnaud), מהאסכולה של פסיכולוגיה חברתית של ג'נבה, מלמדות אותנו את חשיבות הפעולה ואת תפקיד התהליך של ערעור ובניה מחדש של שווי משקל, ואת תפקיד הקונפליקט החברתי-תפישתי.

מברוסו, לבורד ובלשף (G. Brousseau, G. Laborde ,N. Balacheff) אנחנו לומדים על חשיבות ההוכחה והניסוח הפורמלי ומברוסו אנחנו לומדים גם על חשיבות החוזה הדידקטי.

ב. מהות המתמטיקה.

במחקר מתמטי, החוקר מטפל בבעיות שטרם נפתרו (ולעומת זאת, התלמידים מטפלים בבעיות שהם מאמינים כי המורה יודע לפתור). כדי לפתור בעיות חדשות, המתמטיקאי יוצר מושגים שישמשו לו אמצעי מחקר. כדי שהמושגים יוכרו בקהילה המדעית ניתן להם מעמד עצמאי של "נושא" או "מושג". קורה גם שמושגים נוצרים ככאלה תוך כדי ארגון ענף מתמטי.

כך נאמר שמושג מתמטי הוא אמצעי אם ההתמקדות היא בשימוש בו לפתירת בעיות; אך הוא "נושא" אם ההתיחסות היא למושג עצמו כבעל עמדה והכרה במסגרת הידע המדעי כנושא לחקירה ולהכרה. נגדיר כ"מושג" כל רעיון מתמטי המוצג על ידי הגדרה, תאור מבני או דוגמאות.

מושג מתמטי הוא אמצעי כאשר התלמידים תוקפים בעזרתו, במפורש או במובלע, בעיה העומדת בפניהם. השימוש הוא במובלע אם התלמיד משתמש במושג כדי להצדיק תהליך <u>בו</u> הוא משתמש אך אינו יודע לנסח אותו.

לדוגמא: נסתכל בבעיה "האם קיים ריבוע ששטחו 12 ס"מ?" ובתשובת תלמיד "לריבוע שצלעו 3 ס"מ שטח של 9 סמ"ר, לריבוע שצלעו 4 ס"מ שטח של 16 סמ"ר, כאשר הצלע גדלה מ-3 ס"מ ל-4 ס"מ יש רגע בו השטח הוא 12 סמ"ר". כאן היחס 3 ס"מ$\longrightarrow$9 סמ"ר, 4 ס"מ$\longrightarrow$16 סמ"ר, הוא כלי מפורש. אך רציפות הפונקציה $x \longrightarrow x^2$ (הפונקציה עצמה, ומשפט ערך הביניים), הם כלים מובלעים שכן הם נחוצים כולם כדי להפוך את הנימוק למדוייק.

<u>דיאלקטיקה של "אמצעי-מטרה"</u>

נתאר כאן תהליך בן ששה שלבים שהוא מעגל למידה, המגדיר את הדיאלקטיקה של "אמצעי-מטרה". באופן כללי, לתלמידים ניתנת בעיה שהיא ברורה להם והם יכולים להתחיל לפתור אותה, אך לא יוכלו להגיע לפתרון מלא.

תהליך הלמידה מטרתו לפתח מושגים שישמשו אמצעים לפתרון.

ד ו ג מ א ו ת :

(1) איך לחשב שטחם של מלבנים שונים, שווי היקף? זו בעיה מעניינת לתלמידים שיודעים לחשב שטח (רק) כאשר המידות שלמות ואשר משוכנעים כי לכל מלבן יש שטח, אבל אינם יודעים מה לעשות כאשר המידות אינן שלמות.

(2) בעית הפרדה: יש לצבוע סריג נתון במערכת צירים בשלושה צבעים באופן הבא: כל נקודה (a, b) מייצגת מלבן שמימדיו a × b. אם שטח המלבן גדול מ-24, צבע את הנקודה באדום. אם שטח המלבן קטן מ-24, צבע את הנקודה בכחול. אם השטח הוא 24, צבע את הנקודה בשחור.

האם יש ריבוע בין המלבנים (ששטחם 24)?

נעבור כעת לתיאור שלבי מעגל הלמידה.

<u>מעגל למידה שלב א': הידוע במפורש</u>

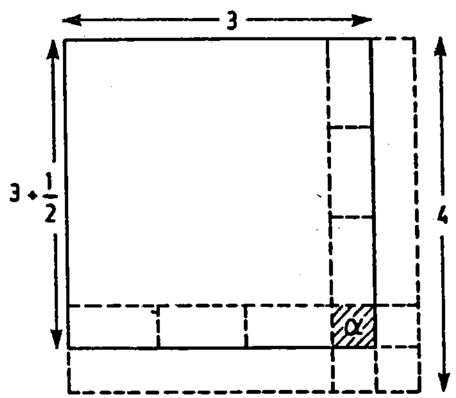
בשלב זה יש שימוש מפורש בכלים מתמטיים ידועים, להתחלת הפתרון. בדוגמאות לעיל: ב-(1) הילדים יכולים להציע מלבנים אחדים ולחשב את שטחם תוך שימוש במספרים טבעיים בלבד. ב-(2) הם יכולים לבחור נקודה, לקרוא את הקואורדינטות, לחשב את השטח a × b, להשוות ל-24 ולצבוע אותה.

<u>מעגל למידה שלב ב': חקירה, חדש מובלע</u>

יש קושי בפתרון מלא של הבעיה, או בגלל שהתהליך עתיר עבודה (פעולות חישוב רבות, שגיאות אפשריות...) או כי התהליך איננו מתאים. יש לחפש דרכי פתרון חדשות.

בדוגמא (1) אם ההיקף הנתון הוא 16 ס"מ, הילדים צריכים למצוא שני מספרים שסכומם 8. בין המלבנים ימצאו את הריבוע. אם ההיקף הנתון הוא 14 ס"מ, צלע הריבוע הוא $3\frac{1}{2}$ ס"מ ויש קושי בקביעת השטח. במצב זה מתחיל התלמיד בחקירה. כעת יהיה, למשל שימוש מובלע באדיטיביות של השטח, אשר תצמצם את הבעיה לקביעת השטח של הריבוע $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

כעת נכוון את התלמידים לסמן את החלקים השונים ולבדוק יחסים ביניהם.



אם a נחפש כחלק של ריבוע היחידה, קל לראות שריבוע היחידה ניתן לריצוף בעזרת ארבעה עותקים של a ובניסוח חשבוני מתקבל $4 \times a = 1$ או $a = \frac{1}{4}$.

באופן כללי, הילדים מונחים להרחבת היחס בין אורך לשטח למידות לא שלמות, ובמקביל מורחב הכפל לשברים פשוטים. זאת משיגים על ידי משחק הגומלין בין ההנדסה לחשבון.

בדוגמא (2), בתהליך הישיר של שלב א' ניתן לצבוע עשר, עשרים נקודות. בסריג כולו כאלף נקודות. הילדים צריכים למצוא תהליך חסכוני יותר לצביעת כל הנקודות. כאן הם ינצלו את תכונות הסדר של מכפלות. זהו שימוש מובלע המיושם לשברים ומורחב גם לגבי מספרים בהם אין הילדים יודעים לחשב. הם מצהירים: "נקודה אדומה - יותר מ-24; מעליה ומימין לה - נקודות אדומות". "מתחת ומשמאל לנקודה כחולה, נקודות כחולות" "מתחת לנקודה שחורה - כחולות, מעליה - אדומות" "נקודות שחורות יותר מעניינות" אלו הם צעדי מפתח. ביניהם פרקי זמן של התלבטות, השונים באורכם לפי הערכים המספריים ולפי התלמיד.

מאוחר יותר, תלמידים יחפשו את "הריבוע 24" (ריבוע ששטחו 24 סמ"ר) או בחיתוך של מלבנים בשטח 24 וריבועים, או במספר המקיים $X \times X = 24$. הבעיה אז היא כיצד לבחור ולחשב מספרים קרובים יותר ויותר לחיתוך. חקירה זו מובילה לשבר העשרוני כדרך לקירוב.

<u>מעגל למידה שלב ג': הבהרה ומיסוד מקומי</u>

כעת יכולים התלמידים לנסח, במונחים יישומיים, אמצעים (כלים) ששמשו אותם בשלב הקודם. יתכן שהמורה הוא שינסח אותם כמושגים. אלה הם "אמצעים גלויים חדשים" אותם יכולים הילדים להכיר ולהתרגל אליהם. כך בעיה (1) מובילה אל

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = X \qquad\qquad \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = (3 \times 5)X$$

$$4X = 1 \qquad\qquad (8 \times 8)X = 1$$

$$X = \frac{1}{4} \qquad\qquad X = \frac{1}{64}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 15 \times \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

החישוב נובע שוב, ממשחק הגומלין עם השטח.

בעיה (2) מנוסחת כחיפוש נקודות שחורות. הבעיה מעוררת את התלמידים לחפש משמעות לביטויים מהצורה $\frac{a}{b}$ (a ,b לאו דוקא שלמים). משחק הגומלין בין המישור למספרים מוביל להבנה כי $\frac{a}{b}$ הוא המספר עבורו $b \times X = a$. זהו הזמן הנאות לפתח את תהליך החילוק. החקירות בקשר לריבועים בשטח 24 סמ"ר, 27 סמ"ר... כרוכות בחישובים ובהשוואות, עם יתרון לשברים עם מכנה 10, 100, 1000 וכו'. מתבקשת שיטת רישום חסכונית למספרים כאלה. סימונים שונים יכולים להשקל ודיון משותף בהצעות מוביל לעיתים לפתרון.

במצבי תקשורת ידע "עובר בדיפוזיה" בדרכים שונות אצל ילדים שונים. כל אחד מעורב בדרך משלו בפתרון הבעיה. כדי לאפשר הבנה משותפת עם נקודות התיחסות לידע המתמטי של התלמיד הבודד, נחוץ השלב הבא:

מעגל למידה שלב ד': מיסוד - בנית מושג

המורה מציין מה חדש וחשוב שיישמר. בשלב זה המורה "מרצה". הוא מציג הגדרות מדוייקות, משפטים, אולי הוכחות. בדוגמאות שלעיל, בשלב זה תוצג הדרך המקובלת לכתיבת שברים עשרוניים והדרכים לחישוב בהם, ולהשוואה ביניהם, וכן הדרך לקירוב של מספר בעזרתם. כך המורה הופך ל"מושג" מה שבשלבים הקודמים היה "כלי". הידע החדש שמתגבש בשלב זה ישמש מאוחר יותר כידע מבוסס. שלב זה יגיע מאוחר יותר. לפני כן יש לדאוג להפנמת המבנים החדשים: הפנמה זו החחילה כבר בשלבים הקודמים וסיומה הוא בשלבים הבאים.

מעגל למידה שלב ה': החרגלות-יישום

התלמידים בשלב זה פותרים בעיות שונות שתרגלנה אותם למושגים החדשים. תוך כדי כך הם יפתחו הרגלי עבודה ויאחדו ידע משותף לאחרים עם הידע המיוחד שלהם. הבעיות בשלב זה, פשוטות או מסובכות, דורשות רק יכולת שנרכשה בשלבים הקודמים של מעגל הלמידה.

מעגל למידה שלב ו': מיומנות או בעיות חדשות

בשלב זה הידע החדש מנוצל למצבים מסובכים יותר הדורשים שילוב ידע ישן או ידע שיש ללמוד אותו.

דוגמא: האם תוכל למצוא מלבן כך שחצי היקפו 41 ס"מ ושטחו 402 סמ"ר? חצי היקף 39 ס"מ ושטח 402 סמ"ר?

מכאן ואילך הידע החדש הופך מוכר ומעגל למידה חדש מתחיל.

הערות: (1) לעתים יש צורך במעגל א-ב-ג-ד-א חוזר מספר פעמים לפני שניתן לסיים מעגל למידה שלם א-ו.

(2) יש הרגלים מתמטיים שהופכים למושגים רק אחרי זמן רב (מספר שנים). זהו למשל המקרה עם פונקציות ועם גרפים.

(3) לא חייבים ללמוד כל נושא חדש בדרך של מעגל למידה. המורה יכול ללמד נושאים מסויימים בדרכים הרגילות.

משחק הגומליך בין מערכות שונות

מושג עומד בפני עצמו רק לעתים רחוקות. בדרך כלל הוא חלק ממארג של נושאים קרובים. כשמתמטיקאי מנסה לפתור בעיה הוא מבזבז זמן נכבד לחיפוש ניסוחים חדשים, ליצוג במערכת שונה: אנחנו מתכוונים ליצוג חשבוני, יצוג אלגברי, יצוג גיאומטרי, יצוג גרפי וכו'. לגבינו יצוג מורכב ממושגים מתמטיים והיחסים שביניהם, דרכי התיאור שלהם והדימויים המתקשרים אליהם. בשנוי יצוג משיגים לעיתים ניסוח חדש המאפשר גישה חדשה לבעיה. זה קורה אם המאפיינים של בעיה מהורים חלק ממבנה מסויים. יצוג גרפי הוא דוגמא מובהקת.

נחזור לכך בקשר לתהליך הלימוד בבית הספר. בתהליך ההעברה, המתמטיקאי מחפש השערות חדשות ואפשרות למציאת מערכת יחוס שתאפשר הוכחה. קורה שדוגמאות נגדיות מבליטות מכשולים וכופות טיפול בבעיות ביניים או ויתור על ההשערה המקורית. התרגום מיצוג ליצוג מוביל לעיתים לתוצאות חדשות, טכניקות חדשות והעשרת התחום המקורי. <u>אנחנו מאמינים שניתן ליצור מצב דומה בבית הספר.</u>

נחזור לצביעת הסריג. הניסוח הוא גרפי. התהליך "חשב את המכפלה $a \times b$ והשווה ל 24" הוא תהליך טוב הדורש רק פעילות חשבונית. לצביעת כל הנקודות נוח לחזור למשמעות הגיאומטרית ולקשר בין שטחי מלבנים שונים (ליתר דיוק - הקשר בין יחס ההכלה לבין יחסי השטח). לב הבעיה טמון כאמור באיתור נקודות שחורות (כפי שראינו במעגל למידה שלב ג'). כלומר, לערך נתון a יש למצוא b כך ש $a \times b = 24$.

כדי למקם נקודות בסריג של עשיריות או של מאיות, תלמידים צריכים להשוות את $\frac{24}{a}$ עם שברים מהצורה $\frac{p}{10}$ או $\frac{p}{100}$. תהליך החילוק מתחיל כאן. ובכוון ההפוך - אם נקודה לא צבועה נמצאת בין נקודות שחורות, התלמיד יכול לקרוא בקירוב את שעוריה ולחשב את המכפלה. כשילדים חוקרים את צורת האזור השחור הם מפתחים את הידע והמיומנות הן במספרים הידועים והן בחדשים. מתפתחים גם מושגים "טופולוגיים": נקודות שכנות,

נקודות גבוליות, קו תוחם, קבוצות חלקיות במישור. כאן הנקודות שייצגו תחילה מלבנים התפתחו לנושא לחקירה. מצבם השתנה ממיצגים לעומדים בזכות עצמם.
כך יכולים התלמידים לראות כי כאשר לא ניתן למצוא פתרון מדוייק, יש טעם לחפש פתרון מקורב. תוך כדי התהליך הם לומדים כי פתרון מקורב יכול לתת תרומה משמעותית. יידרשו עוד שנים עד שיובן המספר הממשי כסדרה אינסופית של קירובים, ואולם כבר עתה הם מחפשים קירוב של $\sqrt{24}$ תוך כדי חיפוש ריבוע ששטחו 24 סמ"ר.

בתהליך שתיארנו, של משחק גומלין בין יצוגים, שלושה שלבים:

(1) שינוי תחום: ניתנת בעיה שהתלמידים אינם יכולים לפתור ביצוג המקורי, אך יש ביכולתם לתרגם את הבעיה כולה או חלקה למערכת חדשה כך שנוצרת התאמה בין המבנה של שתי המערכות.

(2) קשרים חלקיים: הקשרים בין היצוגים השונים אינם שלמים, או מסיבה מתמטית (ל $a + b = 8$ יש גם פתרונות שליליים שאינם מיצגים מידות של מלבן) או כי הידע של התלמידים אינו מספיק. זהו מקור לחוסר איזון. התלמיד יכול, לדוגמא, לשרטט מספר מלבנים שווי היקף אך לא יוכל לסמן את מידותיהם אלא אם הם במספרים שלמים, או בשלמים וחצאים,..., בתחום זה יהיו כמובן הבדלים בין תלמידים שונים. תלמיד אחד בשל לחשוב על השתנות צלע הריבוע באופן רציף מ 3 ס"מ ל 4 ס"מ, וחברו מכיר רק במידות שהוא יכול לחשב בהם. תלמיד פלוני יכול לחשב בחצאים ורבעים וחברו לא...

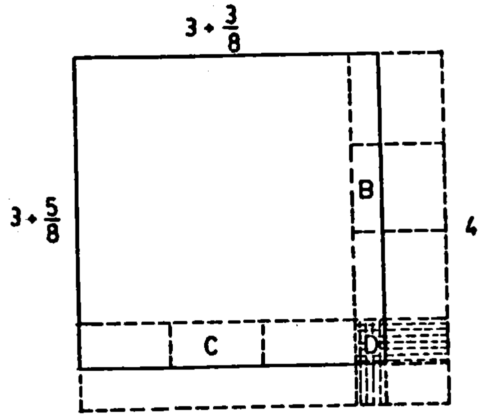
ההתאמה בין מידות המלבן למספרים מוגדרת רק למלבנים מסויימים,שאינם זהים לכל תלמידי הכיתה. תלמידים שחשים שכנוע עמוק כי קיימים מלבנים גם אינם יודעים לחשב את מימדיהם, ירגישו חוסר איזון בין השכנוע הגיאומטרי לבין הידע במספרים.

(3) שיפור הקשרים והרחבת הידע:

המעבר בין יצוגים מוביל לשיווי משקל מחודש. ראינו זאת בבעית הצביעה: בחיפוש הריבוע ששטחו 24.

דוגמא אחרת: חיפוש שטח המלבן שמימדיו: $(3 + \frac{3}{8})$ ס"מ, $(3 + \frac{5}{8})$ ס"מ.
כאן רוב התלמידים מזהים ארבעה חלקים של המלבן וברור להם כי שטח המלבן שווה לסכום החלקים. החלק האחד, 3×3, קל לחישוב. חישוב שטח החלקים $B + C$ יכול אף הוא להעשות, על ידי צירוף המלבנים,

במספרים שלמים. נשאר המקרה $\frac{5}{8} \times \frac{3}{8}$. כאן המורה מכוון את התלמידים לחפש שטח חלקי בו ניתן לבטא הן את D והן את ריבוע היחידה. מגלים כי ריבוע שצלעו $\frac{1}{8}$ ס"מ מתאים לכך.



באופן גיאומטרי קל לראות שיש לרצף את ריבוע היחידה ב-64 ריבועים כאלה. התשובה מתקבלת על ידי פתרון חשבוני של המשוואות $8 \times X \times 8 = 1$, $64 \times X = 1$.

ה ע ר ה: תיארנו בנפרד מעגל למידה ומשחק גומלין בין יצוגים. למעשה הם קשורים זה בזה. הדוגמאות שבחרנו היו מלמידת השבר הפשוט והשבר העשרוני. בסעיף הבא נציג את האפיונים המתמטיים המקשרים בין היצוגים השונים. ניתן גם דוגמא לתכנון פתרון בעיה ותכנון של שעור וכן נתאר יחידה, משנת הלימודים הראשונה, שנמשכה שלושה שבועות.

תכנון דידאקטי

(1) שברים עשרוניים, מנקודות מבט שונות.

- מבחינה טופולוגית, מצבי בעיה נחקרים תוך משחק גומלין בין יצוג הנדסי ליצוג מספרי. הערכות מלעיל ומלרע, משופרות בשלבים, הן כלי נאות.

- מנקודת מבט אלגברית, יש שימוש בחילוק האוקלידי למציאת השארית. דרך זו מתורגלת גם בנפרד בניסוח $a = (b \times q) + r$ $(r < b)$ או $a:b = q$ (שארית r).

- מנקודת מבט מספרית, יש תרגול רק בחישוב בעל-פה. זה כולל הסבר, הנמקות, פסילה או אישור של דרכי חישוב.

- חישוב בכח איננו מתורגל בשיטתיות, אלא רק כשהוא נחוץ לפתרון בעיה. עם זאת, במבחנים תהיה דרישה לחישוב בכתב.

- פונקציות מופיעות ככלי בעיקר בהקשר לגרפים ובקשר בין מסמן למסומן. לפונקציות הלינאריות תפקיד מיוחד. מספרים, ושברים עשרוניים בפרט, מנוצלים כתוויות לפונקציות לינאריות ונוצר מעבר בין חיבור, הרכבה והשוואת פונקציות לבין החישובים המתאימים במספרים. כל זה נעשה בדרך לא ממוסדת בלבד.

(2) מהלך שעור לדוגמא:

- חישוב בע"פ, כולל דיון בתוצאות, כ-10 דקות.

- חזרה על שעורים קודמים בנושא, 10 דקות או יותר.

- עבודה חדשה בשלושה שלבים:

א. המורה נותן הוראות ומבטיח, בדיון קצר, שהבעיה הובנה.

ב. התלמידים מתקיפים את הבעיה כיחידים או בקבוצות. בשלב זה יתכן שהמורה ירכז את הכיתה לדון בקושי כללי שעלה.

ג. מתקיים דיון כללי במדגם של העבודה בכל קבוצה. התוצרים השונים נידונים והכיתה מסכימה על המתאים ביותר, או מחליטה שיש צורך להמשיך ללמוד את הבעיה. שעור כזה נמשך כשעה וחצי. אין לוותר על הסיכום, אם כי ניתן לקיימו בתחילת השעור הבא.

כדוגמא לתכנון יחידה, נציג עתה את הנקודות המענינות שעלו בעת "משחק מטרה" (ניתוח שלם יותר מופיע אצל ר. דואדי 2, 1984, פרק III)...

(3) "משחק מטרה"

__מטרות לימודיות__

(א) שימוש במספרים, בסדר ובחיבור. הרחבת עולם המספרים בו התלמידים יכולים לפעול. הבנה טובה יותר של כתיבת מספרים.

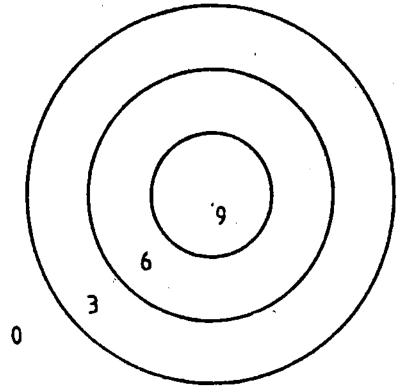
(ב) השגת מורכבות רבה יותר לבעיות שהתלמידים יכולים לפתור, תוך בנית שפה אלגברית ויצוגים (טבלות מספרים, דיאגרמות, גרפים...) לטיפול בכמות נתונים גדולה.

(ג) השימוש במכפלות ובמחלקים.

מטרות לימודיות אלו תושגנה רק כעבור מספר שנים.

תיאור המשחק

- נתון לוח מטרה. ללוח המטרה ארבעה איזורים, שניקודם 0, 3, 6, 9.



לכל שחקן כדור אותו מותר לו לזרוק למטרה שלוש פעמים. מנצח זה שצבר הכי הרבה נקודות.

שאלה לחקירה: סדר את השחקנים בסדר יורד של התוצאות.

מעגל למידה שלב א': הידוע במפורש

התלמידים יודעים שהניקוד הסופי ניתן על ידי סכום התוצאות. הם צריכים, איפוא לחבר שלושה מספרים שכל אחד מהם לכל היותר 9. אחר כך, עליהם לסדר בסדר יורד 28 מספרים (היו 28 שחקנים) שערכם לכל היותר 27. זאת הם כבר יודעים לעשות. השאלה היתה רק איך לדעת שהנתונים מדוייקים. בשיחה הוחלט שכל ילד ירשום את שלושת התוצאות שלו ליד שמו.

מעגל למידה שלב ב': חקירה, חדש מובלע

כעת השחקנים מחולקים לקבוצות של ארבעה והניקוד קבוצתי. כאן כבר יש לחבר שנים עשר מספרים. זוהי משימה מסובכת עבורם ועליהם לפתח דרך רישום שתקל על החישוב. התלמידים מחליטים לאסוף את התוצאות בטבלה בת ארבע שורות ושלושה טורים (שורה לכל שחקן בקבוצה, טור לכל זריקה). הבעיה, איך להשוות טבלאות? נוצר בכיתה חוסר בהירות.

כדי להבטיח חקירה פעילה של התלמידים, צריך לדאוג שהם יידרשו לניתוח מפורט של הטבלה של קבוצתם. כדי להשיג זאת עלו בדיון שאלות שונות בקשר למשחק, לציונים, לשחקנים; כל זאת לפני שלב הסידור של הקבוצות. בכיתה

שנצפתה, בשלב סידור הקבוצות בסדר יורד, התלמידים שינו סדר של שחקנים בקבוצה, חיפשו שחקנים עם מצב זהה, חיפשו שחקנים שקיבלו בכל הזריקות אותו ניקוד וכו'. זהו שלב חשוב ויש לאפשר בו חופש פעולה אמיתי לבחור פרוצדורה, ולהשתמש בידע מובלע.

<u>משחק גומלין בין רישום המשחק ומספרים</u>

מאוחר יותר, כדי להשוות טבלות, הם מתרכזים במספר האפסים ובמספר התשיעיות בקבוצה. הם מגלים שניתן להחליף 6 ו-3 ב 9 או 9 ב 3 + 3 + 3. בכיתה שנצפתה אם החליפו 3 + 3 + 3 ב 0 + 0 + 9, כדי להמנע ממשבצות ריקות. ניתן היה להחליף 6 + 6 + 6 ב 0 + 9 + 9 אך מקרה זה לא ארע. תלמידים טענו: הקבוצה עם הכי הרבה 9 מנצחת.

בעיה חדשה: כמה תשיעיות לכל קבוצה?חלקם רשומים כ-9 בטבלה. אחרים יש "לייצר". כאן התגלתה אי הבנה בין המורה לכיתה. הם טענו: "משני 6 מקבלים 9". למורה 6, 9 הם מספרים המקיימים 3 + 9 = 6 + 6. התלמידים לא הבינו שנחוץ שוויון מספרי והדיון "נתקע" כי המורה רצתה שיגיעו לתשובה בכוחות עצמם.

לבסוף אמר תלמיד "חשבתי קצת" וכתב 3+3 = 6 ואז החישובים הסתיימו בקלות.

לדעתנו, אי ההבנה נוצרה בגלל שהמורה והתלמידים עבדו במערכות שונות. הקונפליקט נפתר כאשר אחד התלמידים עבר ליצוג המספרי - סימן לכך היה שכל הכיתה הצליחה מיד לעקוב אחריו.

<u>ניסוח מחודש:</u> תלמידים דנים בזוגות (r, $9 \times n$) הם אומרים n תשיעיות ושארית וכותבים (אחרי דיון) $n \square 9 + r$ (הריבוע מסמך "חבילות"). הכתיבה החדשה מקדמת רק אם היא עוזרת בסידור הזוגות. במונחי המשחק הם כבר יודעים שהקבוצה עם הכי הרבה "חבילות" מנצחת, בלי תלות בשארית. למעשה הם משתמשים במובלע באלגוריתם:

$$n_i \square 9 + r_i < n_j \square 9 + r_i$$

אם $n_i < n_j$ או אם $n_i = n_j$ ו- $r_i < r_j$

לגילוי זה, של סדר מילוני יש בשלב זה משמעות רק במונחי המשחק. הסדר המילוני הוא איפוא, מכשיר סמוי בשלב זה.

מעגל למידה שלב ג': הבהרה ומיסוד מקומי

בעיה: בכיתה אחרת שחקו באותו משחק וקבוצה קיבלה 39 נקודות. היכן מקומה בין התוצאות שלנו?

התלמידים הוצרכו להשוות בין 39 למספרים הרשומים כ $ת \boxed{\ } 9 + r$.

עמדו לפניהם שתי דרכים: לכתוב את 39 בצורה $ת \boxed{\ } 9 + r$ או לחשב את תוצאות הקבוצות כולן. שני המקרים חייבו התייחסות למשמעות 39 כ $3 \boxed{\ } 10 + 9$.

הערה: בשלב זה לא נערך כל מיסוד. התלמידים מכירים את המספרים הכתובים בצורה זו, תוך כדי החישובים בהם.

מעגל למידה שלב ד': מיסוד.

(1) כתיבת מספרים דו ותלת-ספרתיים בטבלת אחדות, עשרות ומאות.

(2) אם $A < B$ אז קיים C כך ש $A + C = B$

מעגל למידה שלב ה': התרגלות - יישום

תרגול הקשור בשלב ד' (2): מציאת C לערכים שונים של A ו B.

מעגל למידה שלב ו': מצב חדש

שימוש בחיסור, ככלי מפורש, בהקשר של משחק חדש: עם אותו לוח מטרה, וקבוצות של ארבעה:

(1) לכל שחקן זריקה יחידה, ומנצחת קבוצה שמקבלת בדיוק 18 נקודות.

או

(2) לכל שחקן שלוש זריקות, ומנצחת הקבוצה שקרובה ביותר ל-50.

ס י כ ו ם

הפרוייקט ביקש לבדוק הנחות קוגניטיביות על למידת מתמטיקה במסגרת כיתתית. לשם כך נבחן ואורגן בסדרות למידה הידע המתמטי שיש ללמד. הזמן הרב שעמד לרשות הפרוייקט איפשר חופש לממש משחקי גומלין בין יצוגים, שימוש מפורש ומובלע בכלים מתמטיים ויצירת הרגלים.

כדאי להזכיר שיתכן ומחשבים יאפשרו מסגרת למידה יעילה למשחקי גומלין בין יצוגים. זאת אם לא יהיה השימוש בהם מנותק מיצוגים אחרים.

על מנת לעורר את התהליך הדיאלקטי שתארנו, חייבים להתקיים שני תנאים:

- לתלמידים צריכה להיות "מסה קריטית" של ידע (תלויה ביצוג ובבעיות).
- הבעיות הנשאלות צריכות להיות מורכבות מספיק לתלמידים כדי להוביל לתהליכי רכישת הידע.

נציין גם שהדיאלקטיקה של אמצעי-מטרה ומשחקי הגומלין בין יצוגים יכולים לאפשר למורים ולנציגי מורים להעריך דרכי הוראה ולנתח בעיות בהוראה. נקודה קריטית היא ארגון זמן הלמידה: הזמן של חקירה וטעיה נראה כזמן מבוזבז, אך הידע שנוצר בדרך זו הוא בעל בסיס מוצק יותר וניתן לשימוש באופן גמיש.

אין צורך שכל הידע יירכש בתהליכים שתארנו, אולם את המסגרת העיקרית של הידע יש לבנות בדרך זו. העבודה ברוח שתארנו יעילה רק אם ניתן לה להתפתח לאורך שנים מספר. כדי שתתאפשר עבודה ברוח זאת צריכה תכנית הלימודים להתאים לכך (כפי שאכן קרה בצרפת) וארגון הלמידה דורש תשומת לב רבה, יותר מן הנהוג היום. אולי המחשבים, המבשרים גמישות חדשה, הם הזדמנות טובה לשינויים כאלה.

BIBLIOGRAPHY

Balacheff, N.: 1982, 'Preuve et démonstration', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3.3.

Brousseau, G.: 1980, L'échec et le Contrat Recherches 41', (September 1980) et 'Problèmes de l'enseignement des décimaux', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1.1 et 2.1.

Chevallard, Y.: 'La transposition didactique. La pensée sauvage', (to appear).

Doise, W. et Mugny, G.: *Le développement social de l'intelligence,* Inter Editions 1981.

Douady, R. [1[: 'Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1.1.

Douady, R. [2]: 1984, 'Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques - une réalisation dans tout le cursus primaire', Thèse d'Etat, Université de Paris 7.

Laborde, C.: 1982, 'Langue naturelle et écriture symbolique', Thèse d'état, Université de Grenoble.

Perret-Clermont, A.N.: 1979, *La construction de l'intelligence sociale,* P. Lang.

Vergnaud, G.: 1981, 'Quelques orientations ... des recherches françaises en mathématiques' *Proceedings PME5.*

על משולשים הירוניים

מאת: דוד רימר

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

בהתרת משולשים, המספרים המתקבלים לפעמים אינם "נוחים", בכך מוסטת תשומת לבו של התלמיד מהעיקר. כדי להמנע מכך חשוב לבחור משולש כזה שצלעותיו ושטחו יהיו מספרים טבעיים.

אם בוחרים באקראי שלושה מספרים טבעיים c, b, a עבור הצלעות, אז השטח, לפי נוסחת HERON (הרון)*: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, (כאשר $p = \frac{a+b+c}{2}$) הוא ברוב המקרים מספר אי-רציונלי. דבר זה גורר כי הגדלים הנתונים בנוסחאות כמו: הגובה לצלע a: $h_a = \frac{2}{a}\cdot S$, רדיוס המעגל החוסם: $R = \frac{abc}{4s}$. רדיוס המעגל החסום: $r = \frac{s}{p}$, כולם מספרים אי-רציונליים.

משולש שצלעותיו ושטחו מספרים טבעיים נקרא משולש הרוני, על שמו של המתמטיקאי HERON, שנוסחה זו מיוחסת לו.

<u>משולשים הרוניים ישרי-זוית</u>

<u>משפט עזר</u>: ריבוע של מספר טבעי (p) מיוצג על-ידי אחת התבניות: $4m$ או $4m + 1$, כאשר $m \in N$.

<u>הוכחה</u>: אם p זוגי, $(p = 2k)$, אז $p^2 = 4k^2$ וזה מהצורה $4m$.

אם p אי-זוגי $(p = 2k + 1)$, אז $p^2 = 4(k^2 + k) + 1$.

$$= 4m + 1$$

<u>משפט 1</u>: משולש ישר-זוית שאורכי צלעותיו הם מספרים טבעיים, לפחות אחד הניצבים אורכו מספר זוגי.

<u>הוכחה</u>: נניח, בדרך השלילה, כי שני הניצבים מספרים אי-זוגיים,

ז.א.

$$a = 2p + 1$$
$$(p,q \in N)$$
$$b = 2q + 1$$

---

*HERON, חוקר יווני מן המאה הראשונה לפני הספירה. פרסם מחקרים רבים במתמטיקה ובמכניקה.

לפי משפט פיתגורס: $c^2 = a^2 + b^2$.

לכן: $c^2 = 4(p^2 + q^2 + p + q) + 2$

$$= 4m + 2$$

אבל, לפי משפט העזר, ריבוע של מספר טבעי יכול להיות רק מן הצורה $4m$ או $4m + 1$ וזו סתירה. מכאן לפחות אחד הניצבים מספר זוגי.

נשאלת השאלה איך נוכל למצוא באופן שיטתי, שלשה של מספרים טבעיים, c, b, a כך שיהיו אורכי צלעותיו של משולש ישר זוית?

<u>משפט 2</u>: אם n, m שני מספרים טבעיים כך ש $n < m$, אז המספרים:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

הן צלעותיו של משולש ישר זוית ששטחו מספר טבעי.

<u>הוכחה</u>:

I. נוכיח כי: c הוא המספר הגדול ביניהם.

$$c - a = m^2 + n^2 - (m^2 - n^2) = 2m^2 > 0 \Rightarrow c > a$$

$$c - b = m^2 + n^2 - 2mn = (m - n)^2 > 0 \Rightarrow c > b$$

II. נוכיח כי: $a + b > c$ (כלומר, נוכיח כי c, b, a מייצגים צלעותיו של משולש).

$$a + b - c = m^2 - n^2 + 2mn - (m^2 + n^2)$$

$$= 2mn - 2n^2$$

$$= 2n(m - n) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$a + b > c$$

III. נוכיח כי $a^2 + b^2 = c^2$ (כלומר המשולש ישר זוית).

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

IV. נוכיח כי S מספר טבעי.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(m^2 - n^2)\cdot 2mn \\ &= mn(m^2 - n^2) \\ &= \text{מספר טבעי} \end{aligned}$$

מכאן, קיימת שיטה פשוטה וברורה למצוא שלשה של מספרים טבעיים המהווים צלעות של משולש ישר זוית הרוני.

דוגמא: אם נבחר $n = 1$, $m = 2$ נקבל:

$$a = m^2 - n^2 = 3$$

$$b = 2mn = 4$$

$$c = m^2 + n^2 = 5$$

האם בשיטה זו יכולים לקבל <u>כל</u> משולש ישר זוית הרוני? התשובה היא שלילית והנה דוגמא נגדית.

המשולש (15, 12, 9), אינו יכול להתקבל בעזרת אותן נוסחאות, כלומר אם: $c = 15$, $b = 12$, $a = 9$, לא קיימים m, n טבעיים המהווים פתרון של מערכת המשוואות:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

בדוקו!

משפט 3: כל משולש ישר זוית הרוני יכול להתקבל משלושה מספרים טבעיים r, q, p בעזרת הנוסחאות.

$$a = (p^2 - q^2)r$$

$$b = 2pqr$$

$$c = (p^2 + q^2)r$$

הוכחה: נניח שבנוסחאות שבמשפט 2 התקבלו המספרים הטבעיים a ו c, כלומר: $a = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$.

ונניח m אינו מספר טבעי כפי שדורשת ההנחה של המשפט 2, ואפילו אינו מספר רציונלי. זאת אומרת:

נניח כי $m = p\sqrt{r}$ (כאשר $r \neq k^2$, $r \in N$).

היות ו- $b = 2mn$, נקבל $b = 2p\cdot\sqrt{r}\cdot n$.

אבל b מספר טבעי; מכאן $2p\cdot\sqrt{r}\cdot n$ = מספר טבעי.

p הוא מספר טבעי לכן $\sqrt{r}\cdot n$ חייב להיות מספר טבעי, מכאן שחייב להתקיים $n = q\cdot\sqrt{r}$, $q \in N$.

מתוך הנוסחאות של משפט 2, נקבל איפוא,

$$a = m^2 - n^2$$
$$= p^2r - q^2r = (p^2 - q^2)r$$

$$b = 2mn = 2pqr$$

$$c = m^2 + n^2$$
$$= p^2r + q^2r = (p^2 + q^2)r$$

שהן בדיוק הנוסחות ממשפט 3.

מסקנה: עבור כל שלשה (r, q, p) של מספרים טבעיים, ניתן למצוא c, b, a טבעיים (לפי הנוסחאות ממשפט 3), כך שיהיו צלעותיו של משולש ישר זוית הרוני, ולהיפך עבור כל שלשה (c, b, a) קיימת שלשה של מספרים טבעיים (r, q, p) כך ש-c, b, a נתקבלו מהם בעזרת אותן נוסחאות.

הערה:

אם c, b, a הם מספרים טבעיים, אז לא תמיד קיימים m ו n טבעיים המקיימים:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

לעומת זאת תמיד קיימים r, q, p טבעיים המקיימים:

$$a = (p^2 - q^2)r$$

$$b = 2pqr$$

$$c = (p^2 + q^2)r$$

ולפעמים קיים גם יותר מפתרון אחד.

לדוגמא למערכת:

$$(p^2 - q^2)r = 36$$

$$2pqr = 48$$

$$(p^2 + q^2)r = 60$$

יש שני פתרונות והם:

I. $p = 2 \quad , \quad q = 1 \quad , \quad r = 12$

II. $p = 4 \quad , \quad q = 2 \quad , \quad r = 3$

משולשים הרוניים כלשהם

נוכל לקבל בקלות משולש הרוני כלשהו אם נבנה שני משולשים ישרי זוית הרוניים השוים זה לזה בניצב אחד לפחות. אם נצמיד נכון את שני המשולשים זה לזה יתקבל משולש הרוני כלשהו.

דוגמאות:

א. עבור $m = 4$, $n = 3$ נקבל:

$a = 7$, $\underline{b = 24}$, $c = 25$

עבור $m = 7$, $n = 5$ נקבל:

$\underline{a = 24}$, $b = 70$, $c = 74$

אם נצמיד את שני המשולשים זה לזה, בניצב השווה, יתקבל משולש כלשהו שצלעותיו הן: 25 , 74 , 77 .

ב. עבור $m = 4$, $n = 3$ נקבל:

$$a = 7 \ , \ \underline{b = 24} \ , \ c = 25$$

עבור $m = 6$, $n = 2$ נקבל:

$$a = 32 \ , \ \underline{b = 24} \ , \ c = 40$$

במקרה זה נקבל משולש שצלעותיו הן: 25 , 40 , 39 .

גם עבור משולשים הרוניים כלשהם קיימת שיטה אלגברית למציאת הצלעות באופן דומה לשיטה שניתנה עבור משולשים ישרי-זוית.

יהיו t^2 , z^2 , y^2 , x^2 ארבעה ריבועים של מספרים טבעיים ו c, b, a שלושה מספרים המוגדרים בצורה הבאה:

$$a + b + c = x^2$$

$$a + b - c = y^2$$

$$a - b + c = z^2$$

$$-a + b + c = t^2$$

קל להוכיח כי c , b , a יכולים להיות צלעות של משולש.

כלומר: I. c , b , a מספרים חיוביים

II. מתקיימים אי-השוויונים:

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

מכאן:

$$a = \frac{1}{2}(x^2 - t^2)$$

$$b = \frac{1}{2}(x^2 - z^2)$$

$$c = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

לפיכך: $2c$, $2b$, $2a$ הם מספרים טבעיים.

אם כן, שטח המשולש שצלעותיו הן $2c$, $2b$, $2a$ הוא:

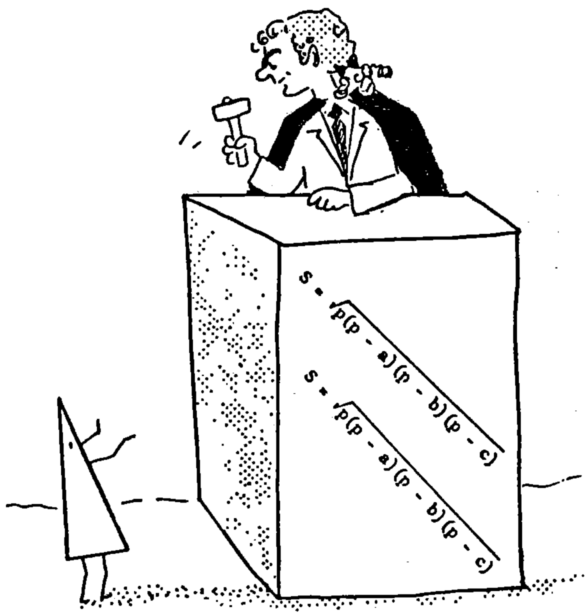
$$S = \sqrt{\frac{2a+2b+2c}{2} \cdot \frac{2a+2b-2c}{2} \cdot \frac{2a-2b+2c}{2} \cdot \frac{-2a+2b+2c}{2}}$$

$$= \sqrt{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot t^2}$$

$= xyzt =$ מספר טבעי

מכאן: המשולש שצלעותיו $(2a, 2b, 2c)$ הוא משולש הרוני.

קל להראות כי אם y, z, t הם מספרים זוגיים, אז גם המשולש שצלעותיו (a, b, c) הוא משולש הרוני. הוכח!



גרפים על מסך המיקרו

מאת: עמוס ארליך

בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב

בין "תורת המחשב" ובין "תרבות התוכנות המוכנות" משתרע תחום פעילות טבעי עבורנו, מורי המתמטיקה. תחום זה הוא תחום השימוש במחשב לבצוע מטלות מתימטיות. בדפים אלה נצטמצם לנושא אחד, שרטוט גרפים והשוואתם, אך דרכו תודגם גישה כללית שמאפייניה העיקריים הם:

א. תכניות מחשב קצרות.

ב. בניית התכנית, או קריאתה והבנתה, מהוות חלק של תהליך לימוד הנושא המתמטי.

ג. התוצאות המתקבלות מהרצות שונות של התכנית משמשות בסיס לניתוח ולחקירת תופעות מתמטיות.

ד. הנושאים המטופלים שייכים לתכנית הלימודים התיכונית במתימטיקה, או קרובים אליה.

התכנית בה נשתמש כתובה בשפת BASIC בגירסת APPLE II, בגירסת COMMODORE 64 ובגירסת IBM PC.

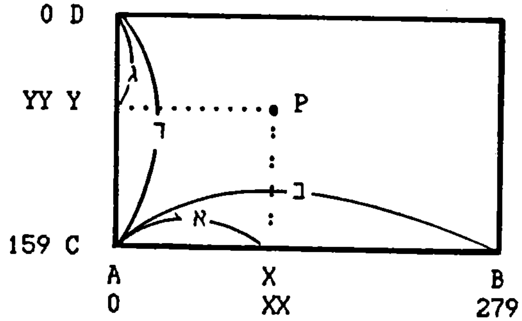
כשאנו באים לשרטט גרפים על מסך המחשב עלינו להתייחס אל שתי מערכות של קואורדינטות. האחת היא מערכת X-Y, כאשר X ו-Y הם המשתנים המופיעים בביטויים המתארים את הפונקציות. השניה היא המערכת שתיקרא כאן מערכת XX-YY; ב-XX וב-YY נסמן, בדפים אלה, את הקואורדינטות המופיעות בפקודות השרטוט שבתכנית המחשב.

ערכי X וערכי Y יהיו בין A ו-B ובין C ו-D בהתאמה; C,B,A ו-D ייקבעו על ידינו על פי הצורך (ויוכנסו למחשב בפקודת INPUT).

ערכי XX ו-YY של הפינה השמאלית <u>העליונה</u> של מסך המחשב הם (0,0).

קואורדינטות הפינה הימנית התחתונה ב-APPLE II "דף 1" הם (279,159), ב-COMMODORE 64 הם (320,200), וב- IBM PC (SCREEN 1) הם (319,199).

למציאת נוסחאות המעבר בין קואורדינטות X-Y וקואורדינטות XX-YY נתבונן בציור הבא: (במספרי APPLE)



נחשב את יחס הקטעים א ו-ב פעם ע"פ קואורדינטות X ופעם ע"פ קואורדינטות XX ונקבל

$$\frac{א}{ב} = \frac{X - A}{B - A} = \frac{XX}{279}$$

בדרך דומה נחשב היחס שבין ג ו-ד ע"פ Y וע"פ YY ונקבל

$$\frac{ג}{ד} = \frac{Y - D}{C - D} = \frac{YY}{159}$$

ומכאן

XX = (X-A)*279/(B-A)   X = XX*(B-A)/279 + A

YY = (Y-D)*159/(C-D)   Y = YY*(C-D)/159 + D

במסקנה ראשונה מנוסחאות אלה נקבל שציר X (X=0) עובר בנקודות בעלות קואורדינטת-מסך YY = D*159/(D-C), ואילו ציר Y (X=0) עובר בנקודות עם XX = A*279/(A-B).

הערה: טיפולנו הנוכחי בשינוי מערכת צירים פחות כללי מהמצוי בספרי לימוד למתימטיקה, אך עולה עליו בזה שכאן ברור לתלמידים "בשביל מה זה טוב". דבר זה תורם להבנת "מה הולך".

תכניתנו מקבלת את גבולות "דף השרטוט" (שורות 20,10); משרטטת את ציר X וציר Y, אם אינם מחוץ "לדף" (40-90); ואחר כך משרטטת <u>שני</u> גרפים (100-200).

פונקציה א כתובה בשורה 120 (בדוגמתנו: Y = X^2) ופונקציה ב בשורה 160 (בדוגמתנו Y = (X-2)^2).

אם רצונך להחליף פונקציה,עליך לתקתק רק את השורה המתאימה והיא תכנס במקום שורה קיימת הנושאת אותו מספר. ובפרט, אם רצונך לשרטט פונקציה יחידה - הכנס

```
160   Y = 0
```

והרי התכנית בגירסת APPLE (ההסברים שמשמאל טובים גם לגירסות האחרות).

`10 INPUT "A<X<B.    A,B=";A,B`	קבלת ערכי X בשמאל הדף ובימינו.
`20 INPUT "C<Y<D.    C,D=";C,D`	קבלת ערכי Y בתחתית הדף ובראשו.
`30 HGR : HCOLOR=3`	ניקוי המסך והכנה לשרטוט.
`40 IF C>0 OR D<0 THEN 70`	אם ציר X מחוץ לדף - דלג.
`50 YY = D*159/(D-C)`	חישוב מקום ציר X.
`60 HPLOT 0,YY TO 279,YY`	שרטוט ציר X.
`70 IF A>0 OR B<0 THEN 100`	אם ציר Y מחוץ לדף - דלג.
`80 XX = A*279/(A-B)`	חישוב מקום ציר Y.
`90 HPLOT XX,0 TO XX,159`	שרטוט ציר Y.
`100 FOR XX = 0 TO 279`	עבור כל נקודה XX לרחב המסך :
`110 X = XX*(B-A)/279+A`	חשב את X המתאים,
`120 Y = X*X`	חשב Y ע"פ פונקציה א,
`130 IF Y<C OR Y>D THEN 160`	אם Y מחוץ לדף - דלג,
`140 YY = (Y-D)*159/(C-D)`	חשב YY מתאים,
`150 HPLOT XX,YY`	וסמן את הנקודה על המסך.
`160 Y = (X-2)*(X-2)`	כעת חשב Y ע"פ פונקציה ב,
`170 IF Y<C OR Y>D THEN 200`	אם Y מחוץ לדף - דלג,
`180 YY = (Y-D)*159/(C-D)`	חשב YY מתאים,
`190 HPLOT XX,YY`	וסמן את הנקודה על המסך.
`200 NEXT XX`	עבור ל- XX הבא בתור (ולפקודה 110).

התכנית עבור COMMODORE 64 (עם SIMON'S BASIC) :

```
10 INPUT "A<X<B.     A,B=";A,B
20 INPUT "C<Y<D.     C,D=";C,D
30 HIRES 0,1
40 IF C>0 OR D<0 THEN 70
50 YY =  D*200/(D-C)
60  LINE 0,YY,320,YY,1
70 IF A>0 OR B<0 THEN 100
80 XX = A*320/(A-B)
90 LINE  XX,0,XX,200,1
100 FOR XX = 0 TO  320
110 X =  XX*(B-A)/320+A
120 Y = X*X
130 IF Y<C OR Y>D THEN 160
140 YY = (Y-D)*200/(C-D)
150 PLOT  XX,YY,1
160 Y = (X-2)*(X-2)
170 IF Y<C OR Y>D THEN 200
180 YY = (Y-D)*200/(C-D)
190 PLOT XX,YY,1
200 NEXT XX
210 GOTO 210
```

הערה: פקודה 210 מונעת את סיומה של ביצוע התכנית וכך מונעת מחיקת השרטוט. ליציאה מהמעגל לחץ מקש RUN/STOP.

התכנית בגירסת IBM PC:

```
10 INPUT "A<X<B.     A,B=";A,B
20 INPUT "C<Y<D.     C,D=";C,D
30  CLS : SCREEN  1 : KEY OFF
40 IF C>0 OR D<0 THEN 70
50 YY =  D*199/(D-C)
60  LINE  (0,YY)-(319,YY)
70 IF A>0 OR B<0 THEN 100
80 XX = A*319/(A-B)
90 LINE  (XX,0)-(XX,199)
100 FOR XX = 0 TO  319
110 X =  XX*(B-A)/319+A
120 Y = X*X
130 IF Y<C OR Y>D THEN 160
140 YY =  (Y-D)*199/(C-D)
150  PSET (XX,YY)
160 Y = (X-2)*(X-2)
170 IF Y<C OR Y>D THEN 200
180 YY = (Y-D)*199/(C-D)
190 PSET (XX,YY)
200 NEXT XX
```

דף לתלמיד

מרוץ התבניות

משחק לרענון החומר על תבניות מספר תואמות בתחילת כיתה ח' או באמצע כיתה ז.

לוח המשחק עליו רשומות תבניות מספר מופיע מעבר לדף.

לצורך המשחק יש להכין:

2 רצים

30 כרטיסים עליהם רשומות תבניות מספר תואמות לאלו שעל הלוח.

תבניות תואמות ל $3a + 3$

$5a + 3 - 2a$

$a \cdot 3 + 3$

$3 + 3a$

$3(a + 1)$

$(a + 1) \cdot 3$

תבניות תואמות ל $2a + 3$

$3(a + 1) - a$

$3a + 3 - a$

$2a + 2 + 1$

$3 + 2a$

$a \cdot 2 + 3$

תבניות תואמות ל $a + 3$

$3(a + 1) - 2a$

$3 + a$

$2a - a + 3$

$2a - (a - 3)$

$a + 1 + 1 + 1$

תבניות תואמות ל a

$1 \cdot a$

$2a - a$

$\frac{2a}{2}$

$3a - 2a$

$3 + a - 3$

תבניות תואמות ל $-a$

$-1 \cdot a$

$a - 2a$

$5 - (a + 5)$

$0 - a$

$3a - 4a$

תבניות תואמות ל $2a$

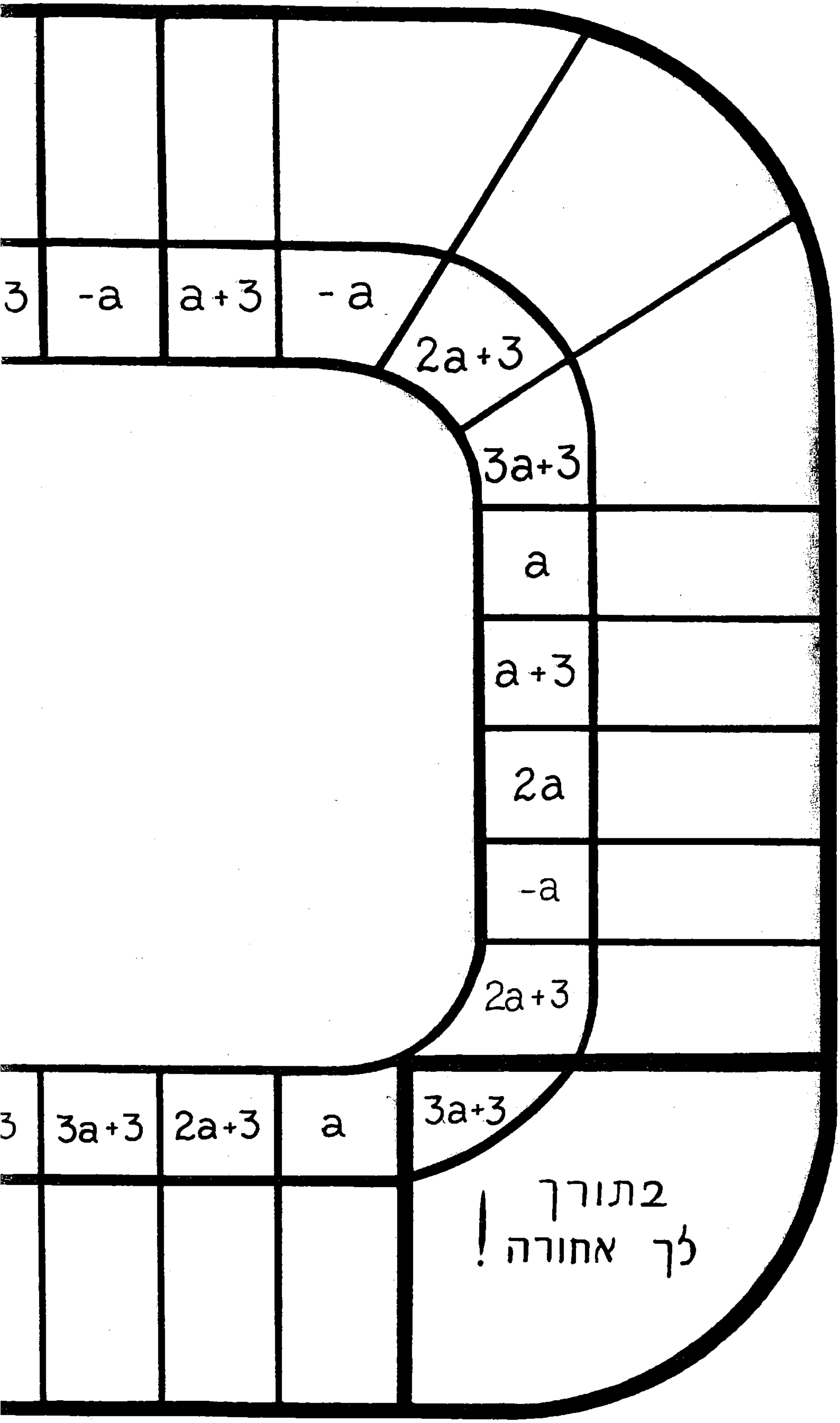
$a + a$

$2 \cdot a$

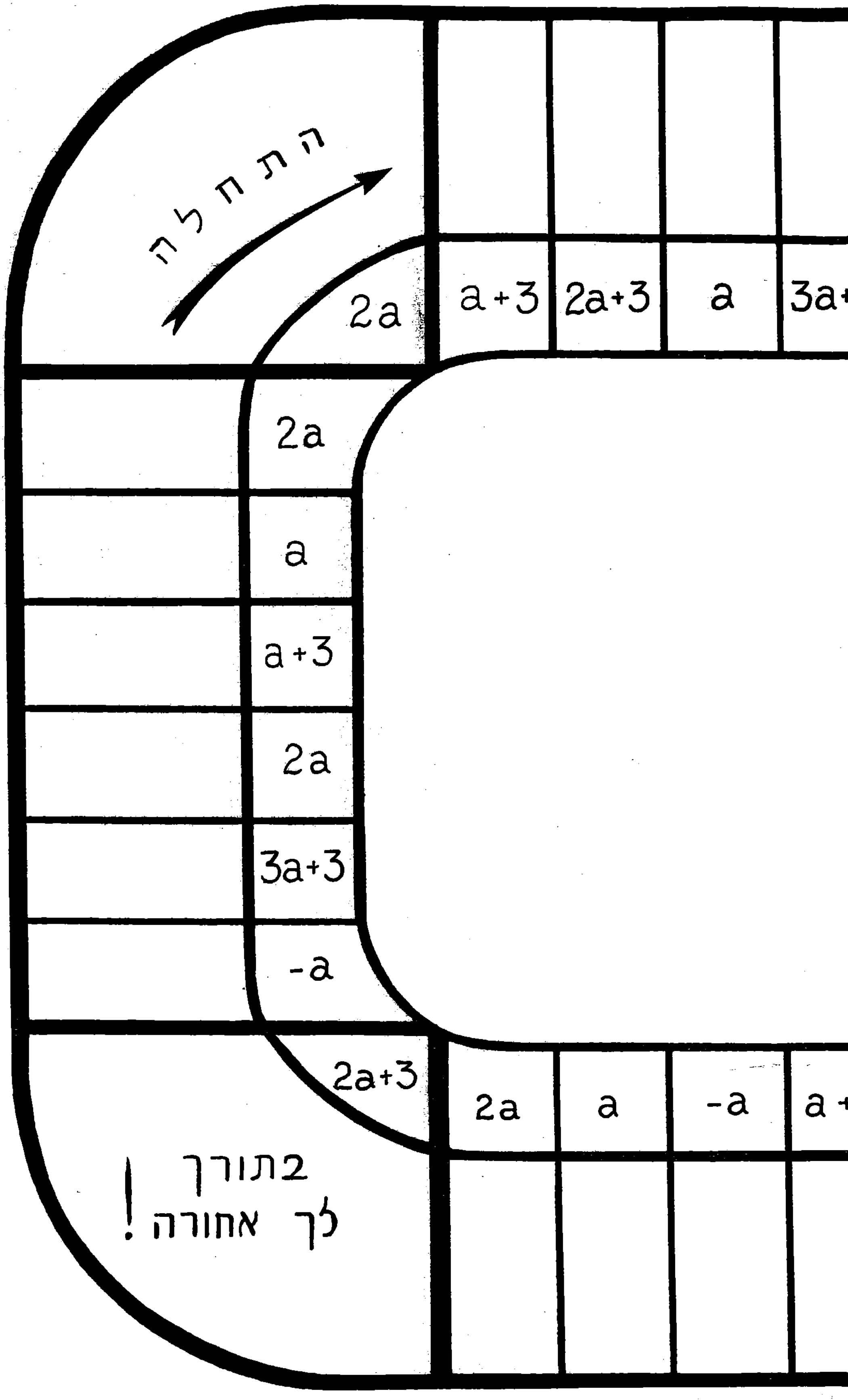
$\frac{4a}{2}$

$5a - 3a$

$2(a + 3) - 6$



3
-a
a+3
-a
2a+3
3a+3
a
a+3
2a
-a
2a+3
3a+3
a
2a+3
3a+3
3
בתורך
לך אחורה!


התחלה
2a
a+3
2a+3
a
2a
a
a+3
2a
3a+3
-a
2a+3
2a
a
-a
בתורך
לך אחורה!

במשחק ניתן לשחק בשני שלבים:

רמות א' יכולות לשחק בשלב ב' בלבד.

רמות ב' ישחקו בשני השלבים או בא' בלבד לפי רמת הכיתה.

<u>שלב א'</u>

בתחילת המשחק מערבבים את הכרטיסים ומניחים בערימה שפניה כלפי מטה.

כל משתתף מניח את הרץ שלו במשבצת המסומנת 

כל משתתף בתורו לוקח כרטיס מראש הערימה. הוא מתקדם עם הרץ שלו למשבצת הראשונה שיש בה תבנית מספר תואמת לזו שעל הכרטיס שלקח. הוא מחזיר את הכרטיס לתחתית הערימה, והתור עובר למשתתף הבא.

מנצח במשחק המשתתף שסיים ראשון סבוב שלם.

(אפשר לדרוש סיום שני סיבובים או סיבוב אחד במדויק).

<u>שלב ב'</u>

כמו שלב א', רק שבכל תור מחזיק המשתתף בידו 3 כרטיסים, מתוכם הוא בוחר כרצונו אחד, ומתקדם כמו בשלב א'. בסיום התור מחזיר את הכרטיס לתחתית הערימה ולוקח כרטיס אחר במקומו. (כך במשך כל המשחק יש בידי המשתתף 3 כרטיסים).

להלן, בסדר נושאים מקרי, מספר שימושים בתכנית, שאינם תלויים זה בזה.

1. <u>שינויים בפונקציה המזיזים את הגרף</u>

1.1 הזזות ימינה ושמאלה

הרץ את התכנית (כפי שהיא כתובה לעיל) וכשהתכנית תבקש INPUT הכנס 10 - עבור A, 10 עבור B, 5 - עבור C ו - 50 עבור D.

הראה לתלמידים שהגרף הראשון נוגע בציר X כאשר X = 0 והשני כאשר X = 2. אח"כ הראה שכל נקודה של הגרף השני מתקבלת מנקודה מתאימה בגרף הראשון ע"י הזזתה בשתי יחידות ימינה. ההסבר: ההזזה ימינה מפצה את X על חיסור ה-2.

שאל כיצד ייראה הגרף של

$$Y = (X + 3)^2$$

החלף שורה 160 ב- `160 Y = (X + 3) * (X + 3)`

והרץ עם C,B,A ו-D כמקודם.

1.2 הזזות מעלה ומטה

החלף שורה 160 ב- `160 Y = X * X + 10`

שאל מה יתקבל.

הרץ עם C,B,A ו-D כמקודם.

בקש מהתלמידים הצעות לניסויים נוספים. (הצעותיהם עשויות לחייב הכנסת C ו- D שונים מאלה שהכנסנו קודם).

1.3 הזזה ימינה ומטה.

החלף ל- `160 Y = (X-2)*(X-2)-1`

הרץ עם C,D = -5,25 A,B = -5,5

תרגיל: כתוב את X^2-6X+5 בצורת $(X-K)^2+L$ ומצא לפי זה היכן תמצא נקודת המינימום אם שורה 160 תהיה

```
160   Y=X*X-6*X+5
```

הנחיה: מצא תחילה את K ובעזרתו את L (L יהיה שלילי).

2. השוואת פונקציה ונגזרתה

א. הכנס את השורות

```
120   Y = X*X*X-6*X*X+15
160   Y = 3*X*X-12*X
```

הרץ עם C,D = -30,30 A,B = -3,7

דברים שאפשר יהיה לראותם:

1. F' (X) שווה ל-0 כאשר ל- F(X) יש מקסימום או מינימום.
2. F' חיובית כאשר F עולה ושלילית כאשר F יורדת.
3. F' גבוהה כאשר F תלולה.
4. כאשר ל-' F יש מינימום, ל-F נקודת פיתול.

ב. הכנס

```
120   Y = X*COS(X)
160   Y = COS(X)-X*SIN(X)
```

הרץ C,D = -5,5 A,B = -5,5

בקש מהתלמידים לומר מי משני הגרפים שהתקבלו הוא של F ומי של 'F. שאלה זאת יוצרת מקום לדיון ולחזרה על כל מה שניתן היה לראות בדוגמה הקודמת.

בדוגמתנו F אי-זוגית (גרף אנטי-סימטרי) ולכן 'F זוגית (גרף סימטרי). איני סבור ששאלה על זוגיות ואי-זוגיות של פונקציות צריכה להופיע במבחן, אך נראה לי שבהקשר הנכחי יכול דיון בסימטריות ואנטי-סימטריות לסייע ביצירת אינטואיציות-נרכשות נכונות על מושג הנגזרת.

3. <u>פתירת משוואות</u>

3.1 משוואה בשני נעלמים

לפתירת המערכת
$$3X + 7Y = 142$$
$$5X - 4Y = 33$$

הכנס

```
120  Y = (142-3*X)/7
160  Y = (33-5*X)/-4
```

והרץ תחילה בגבולות רחבים:

A,B = -100,100

C,D = -100,100

מהתמונה שתתקבל אפשר לקבל אומדן לא רע של הפתרון, אך בשלב ראשון מוצע שלא להחפז. כן מוצע שההרצה הבאה עדיין תראה את הצירים על המסך.

נריץ, אפוא עם A,B = 0,20 C,D = 0,20

כעת נבקש מהתלמידים לאמוד את קואורדינטות נקודת החיתוך, ובהתאם לאומדן נריץ למשל עם A,B = 15,18 C,D = 10,14

כאשר יציעו התלמידים שהפתרון הוא (17,13) נריץ לאימות עם

A,B = 16.99,17.01 C,D = 12.99,13.01

3.2 משוואה בנעלם אחד

לפתירת המשוואה $X^3-17X^2+15*X+170 = 0$ הכנס

```
120  Y = X*X*X-17*X*X+15*X+170
160  Y = 0
```

ולקבלת תמונה ראשונה נריץ עם

A,B = -100,100 C,D = -1000,1000

מתמונה זאת יעלה שלמשוואה שלשה פתרונות, וכולם בין 10- ובין 30.

בהרצה הבאה נכניס איפוא A,B = -10,30

ובמקביל נצמצם את גבולות Y ונכניס C,D = -500,500

(עם ההתקרבות לפתרונות נמשיך לצמצם את תחום Y, אך תמיד ישתרע תחום Y ממספר שלילי עד מספר חיובי, כי נרצה שציר X יופיע על המסך).

כעת נוכל לראות שהפתרונות הם בסביבות 3-, 5 ו-15.

להגדלת הדיוק של הפתרון שבסביבת 15 נריץ עם

A,B = 14.5 ,15.5   C,D =-100,100

וכן הלאה.

4. <u>חיבור פונקציות</u>

א. הכנס
120 Y = SIN(X)
160 Y = X/10

והרץ בגבולות A,B = -10,10   C,D = -2,2

שאל מה נקבל אם נכניס 120 Y = X/10 + SIN(X)

הכנס זאת, השאר את שורה 160 כמות שהיא, הרץ בגבולות הקודמים.

ב. הכנס
120 Y = X*X*X
160 Y = 4*X

והרץ בגבולות A,B = -3,3   C,D = -40,40

(אם לא עשית זאת בהזדמנות קודמת - הקדש כמה מלים להתנהגות X^3 בסביבת 0).

שאל איך ייראו הגרפים של 120 Y = X*X*X + 4*X

ושל 160 Y = X*X*X - 4*X

הכנס שורות אלה לתכנית והרץ בגבולות הקודמים.

הערה ("לטובת" תלמידים יחידים בלבד):

בזאת מיצינו את צורות הגרפים של פונקציות פולינומיאליות ממעלה שלישית; כי למשל,

$$X^3+6X^2-7X+10 = (X+2)^3-19(X+2)+40$$

לכן הגרף המתאים מתקבל מהגרף של X^3-19X ע"י הזזתו 2 יחידות שמאלה ו-40 יחידות כלפי מעלה.

5. <u>פונקציה נגזרת, ישירות מההגדרה</u>

א. יש משפטים מתימטיים שהוכחתם דומה לפתרון בעית-ביקוש בזה שאינה מחייבת אותנו לדעת מראש את כל פרטי הטענה אותה אנו באים להוכיח. אצל משפטים אחרים, חיפוש ההוכחה מסתייע לא רק בידיעת "מאין באת" אלא גם בידיעת "לאן אתה הולך".

המשפט של הנגזרת של X^2 הוא מהסוג הראשון ואילו המשפט על הנגזרת של SIN(X) הוא מן הסוג השני.

משפט כזה מזמין הקדמה המראה כיצד ניתן להגיע להשערה המתאימה, לפני הוכחתה.

נקדים לתכניתנו את השורה `5 DEF FNF(X) = SIN(X)`

ונכניס `120 Y = FNF(X)`

`160 Y = (FNF(X+.001)-FNF(X))/.001`

הרצה עם `C,D = -1,1` `A,B = -6.28,6.28` תתן קוסינוס ברור ויפה.

ב. למרות האמור לעיל יש טעם להריץ את תכניתנו עם הפונקציה

`5 DEF FNF(X) = X*X`

(והגבולות `C,D = -2,2` `A,B = -4,4`)

הרצה כזאת, שמקומה קודם, כמובן להצעה שלעיל, תשרת את המעבר מהמספר הנגזר אל הפונקציה הנגזרת.

תחבולה שכדאי לדעתה

אם הקטע (A,B) כולל נקודה שבה אין הפונקציה מוגדרת, עלול הדבר לעצור את בצוע התכנית. אפשר לפתור את הבעיה בזה שנותנים לנקודות המסוכנות ליפול בין נקודות השרטוט.

לדוגמא, לקבלת הגרף של Y = 1/X עבור ערכי X שבין 0 ו- 5 יש להריץ עם A,B = -0.001,5.

זה רעיון

הצגה: "בקולנוע - נקודות במישור"

להלן הצעה לאסטרטגיה מעניינת ולא שגרתית לסכום הנושא:
סימון נקודות במישור, מפי המורה ריבי בן משה, מביה"ס תיכון עירוני ט' בתל-אביב.

המטרה בפעילות זו היא להגיע לשליטה במיומנות יסודית בסימון נקודות במערכת צירים. להשגתה הוצבו המטלות הבאות:

א. מציאת נקודה מתאימה לזוג סדור.

ב. קריאת שיעורי נקודה נתונה במערכת צירים ועל הצירים.

ג. זהוי "נקודות סמוכות" על-ידי קריאת זוגות סדורים.

ד. זהוי הרביעים בהם נמצאות הנקודות הנתונות.

ה. משמעות הסדר בין אברי הזוג הסדור.

ו. הסקת מסקנות מהנקודות המסומנות במערכת.

הצגה: "בקולנוע - נקודות במישור"

ריבי בן משה

<u>השחקנים:</u> קריין-מנחה, בעל האולם, סדרן ומבקרים.

<u>אמצעי עזר:</u>

א. כרטיסי קולנוע גדולים שהכתוב בהם ניתן לקריאה על-ידי כל התלמידים בכיתה (לדוגמא: L(-5 ,-3)).

ב. מערכת צירים מוכנה על לוח קלקר או על בריסטול.

ג. דפי בקרה - לתלמידי הכיתה הצופים. בדפים אלה הם מסמנים את הזוגות הסדורים המציינים את מקומם של המבקרים בקולנוע, לפני שהסדרן מושיב אותם במקום המתאים.

<u>משך המופע:</u> 20 דקות.

בקולנוע "נקודות במישור"

הבעלים: שלום, נעים מאד. אני בעל רשת בתי הקולנוע "נקודות במישור". אני רוצה לגלות לכם סוד: החלטתי לשנות את סימון הכסאות באולמות.

הקריין: תכנן וסכם:

הבעלים: שורת הכסאות שמאחורי המעבר תסומן ב-0. השורה שלפניה תסומן ב 1- וכך הלאה. השורות שאחרי השורה אפס יסומנו ב 1+, 2+ וכך הלאה. טור הכסאות המרכזי יסומן באפס, הטור משמאל לו, יסומן ב 1- וכך הלאה. הטורים מימין לטור האפס יסומנו בסימנים חיוביים 1+ , 2+ וכו'. זהו זה.

הקריין: בעל האולם והקופאי שכחו לעדכן את הסדרן, ובהצגה הראשונה בה שונו הסימונים הגיע הסדרן ההמום ואמר:

הסדרן: מה כתוב בסימנים - סינית? מה פרוש הסימון המוזר הזה?

הבעלים: חבוב, אל דאגה. דוגמא אחת ותבין הכל.
מעכשיו, יסומנו הכסאות בעזרת זוג מספרים, כאשר המספר הראשון משמאל שהוא שיעור x, יסמן תמיד את הטור ואילו המספר השני שהוא שיעור y יסמן תמיד את השורה.

(-3 , +4)

⇓ ⇓

שיעור y   שיעור x

שורה   טור

הסדרן: נראה לי שהסתבכתי. טור, שורה, שיעור x, שיעור y סיפור אמיתי!

מבקר A: שלום, עזור לי סדרן, היכן אני יושבת?

סדרן: רגע אל תפריעי לי. טור שורה, טור שורה, A(-4 , +2) פרושו טור 4- שורה 2+ . בואי שבי. (מחכה שהכיתה תציין זאת בתרשים).

מבקר B: B(-3 , +1) אין בעיה. טור 3- שורה 1+ אחרי ....
ומוליך איתו את C(-3 , +2) D(-3 , +3) .

מבקר E לסדרן: בקשתי מהקופאי לשבת על ציר x . האם המקום הזה הוא טוב? ראה (0, 0) המקום פשוט במרכז. ממש מעולה.

מבקר F לסדרן: שלום, כרטיסי הם: F(+2,+2) , G(+3,+2) , H(+4,+2).

מבקר K: הסימון לרוחי. טור 2+ שורה 3- כרטיסי (3-, 2+).
(ניגש ל C ואומר: קום תפסת את מקומי, קום כבר.

מבקר C: הבט אדוני, היה תרבותי אל תצעק. אני יושב בדיוק במקומי.

מבקר K: סדרן ... סדרן ...

מבקר C: איך אתם מוכרים לשני אנשים אותם כרטיסים?

הסדרן: אנחנו אנשים מכובדים. כזה דבר לא יקרה אצלנו.
תן לי ואראה הכרטיסים. אינכם רואים שהם שונים (מרים הכרטיס)
אתה יושב בטור 2+ ובשורה 3-.

מבקר L: סדרן בקשתי מהקופאי לשבת ברביע השלישי. האם הסימון בכרטיס תואם זאת?

סדרן: בואי וראי (3-, 5-), זהו מקומך. מרוצה?

מבקר M: איזו צרה. שכחתי את המשקפיים. אני חייבת לשבת קרוב ובאמצע.
(הנקודה M ממוקמת בלוח (4-, 0) והילדים מגלים את הזוג הסדור).

הסדרן: מעולה. פשוט נפלא וגם באמצע וגם קרוב מאוד.

הבעלים: נו, מה העניינים? איך הסתדרת?

הסדרן: את האמת? בהתחלה פחדתי מהזוגות הסדורים האלה, אבל שמע חבוב הם מצילים את המצב.

הבעלים: מדוע רבו שני האנשים? אני מבטיח לך שעכשיו שניהם מבינים מדוע קוראים לזוג המספרים זוג סדור.

סדרן: בטח, בזוג סדור יש חשיבות רבה ביותר לסדר בו קוראים את המספרים.

או.קיי., בוא נתבונן ונראה תמונת מצב:

המורה שואל:

1. האם נמכרו כל הכרטיסים?
2. באיזה שורה יושבים הכי הרבה אנשים?
3. מי יושב ברביע השלישי?
4. רגע, מה נמצא לפני שורה 4-?
5. מיהם האנשים היושבים זה ליד זה?
6. הבעלים: סדרן, הגיעו חמישה אנשים באיחור ומעוניינים לשבת בטור אפס. עזור להם!

הקופאי: יש לי עוד בעיה קטנה: נמחקו לי כמה מספרים, אך קיימים רמזים בעזרתם נוכל לגלות את המספר החסר:

1. הכסא (, 3-) נמצא באותה שורה בה נמצא כסא (7+, 8+)
2. לכסא (7-,) אותו שיעור x כמו לכסא (5-, 0)
3. לכסא (,) אותו שיעור x כמו לכסא (5-, 0) ואותו שיעור y כמו לכסא (1-, 4+).

הבעלים: (אוסף את כולם ואומר) אמנם זהו נסיון ראשון שלי, אך אוכל לומר לכם שהשיטה פשוט לרוחי. קרוב לודאי שאעתיק את השיטה ליתר בתי הקולנוע שברשותי.

לסכום:

השחקנים הפגינו יכולת בתחום הדרמה ובקיאות מוחלטת בנושא סימון נקודות במישור.
הסיפור כשלעצמו היווה שובי וגרף את הכיתה כולה לריכוז ועבודה תוך גילוי מוטיבציה.

בביקורת שלאחר ביצוע ההצגה מיצו התלמידים את התרשמותם ואמרו:

"לא האמנו שפעם נזכה לראות הצגה במתמטיקה. - משונה - אבל, מהנה!!!

חומר חדש

ספרים —

לקראת תחילת שנת הלימודים תשמ"ח יצאו לאור ספרים באלגברה לכיתה ט' רמות א' ו-ב', העוסקים בנושא "פונקציות".

ספח להזמנת הספרים בעמוד 59.

הפרקים הם:

מבוא לפונקציות

הפונקציה הקוית

פונקציות ותבניות ריבועיות

ספרים אלה הם שיכתוב של פרקים שנוסו בשנים האחרונות במספר בתי ספר, ובהשתלמויות מורים.

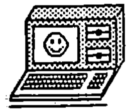
בספרים אלה, בניגוד לחומר הישן שבספר ד', החומר מוגש כך שלמורה יש אפשרות ללמד תוך עבודה עצמית וחקירה מודרכת שבסופה סיכום.

לאחר הסיכום מופיע תרגול המכיל יישום ומאפשר לתלמידים שלא הצליחו לבצע את החקירה בכוחות עצמם, להשתלב במהלך הלימודים.

תרגול הנושאים החדשים משלב בתוכו גם חזרה על נושאים שנלמדו בשנים קודמות כמו טכניקה אלגברית, מציאת קבוצות אמת ותרגום.

רמה א'

רמה ב'



יצאו לאור לומדות חדשות

מירב מעורב

לומדה זו נועדה להוביל את התלמיד בהדרגה במסלולי חקירה אלגברית וגרפית בגישה הדומה לזו של עבודות הסיכום.

היא מתאימה לתלמידים החל מסוף כיתה ח'.

הלומדה בנויה על שילוב בין הצגה אלגברית וגרפית של קשרים בין מספרים ופעולות. במהלך העבודה מתקבלת חלוקה של מישור מערכת הצירים לאזורים, בהם התוצאה המירבית בין זוגות הקואורדינטות מתקבלת על-ידי אחת מפעולות החשבון.

ניתן להזמין את הלומדה עבור מחשבי APPLE וכן עבור מחשבי COMMODORE (כונן רשת וכונן 1541).

ספח להזמנת הלומדה נמצא בעמוד 53

קדימה אל האחוזים

הלומדה עוסקת באומדן בנושא האחוזים.

הנושא הוא בבחינת "ידע קודם" בחטיבת הביניים, אלא שידע זה אינו ידוע.

גם תלמידים היודעים את האלגוריתם של חישוב תמורת האחוז והאחוז חסרים את הבסיס של הבנת המושג עצמו.

אומדן באחוזים, הן אומדן האחוז, והן אומדן התמורה, תורם רבות להבנת מושג האחוז. בפעילויות אומדן, פעמים רבות האלגוריתם אינו רלוונטי ואז ההבנה של המושג היא התורמת להצלחה.

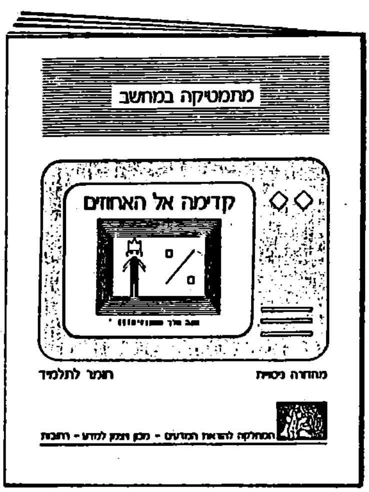
יתרונות המחשב בהיותו מהיר בחישוב, ויכולתו להגיב, ולתת משוב מידי לתלמיד, תורמים לבניית יחידת לימוד בנושא זה.

הפעילויות פותחו כמשחקים ליחיד ולשניים, ברמות קושי שונות, כדי להתאימן לתלמידים שונים בסיטואציות שונות.

הפעילויות ברמה הגבוהה יותר - משלבות אומדן באחוזים עם שקולים לוגיים. קיים בהן תהליך קירוב. התהליך מתחיל בניחוש ומתכנס למספר שהמחשב בחר בתחום. פעילות נכונה מגדילה את כמות הידע של התלמיד ומאפשרת לו להגיע לסיום מוצלח.

ניתן להזמין את הלומדה עבור מחשבי APPLE וכן עבור מחשבי COMMODORE (כונן רשת וכונן 1541).

ספח להזמנת הלומדה נמצא בעמוד 55



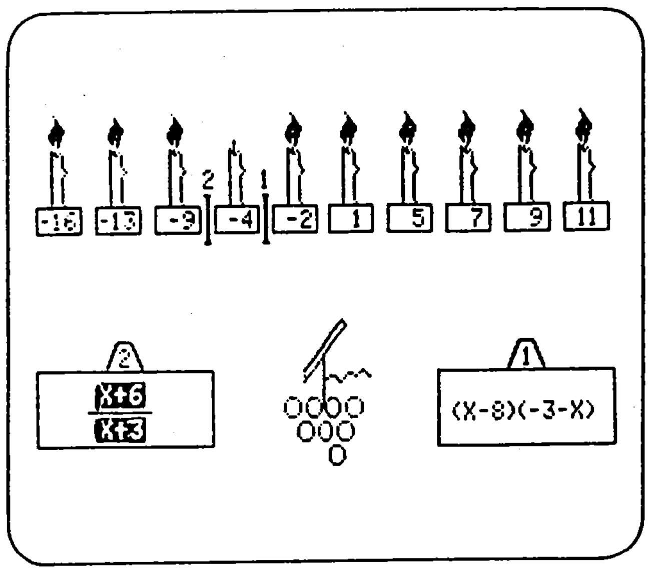
עומדות לצאת לאור

התבנית מכה שנית

הלומדה עוסקת בתוצאות הצבה בתבניות מספר והפרדת רשימת מספרים לשתי קבוצות - קבוצה הנותנת תוצאות חיוביות על-ידי הצבה בתבנית וקבוצה הנותנת תוצאות שליליות.

מטרת הלומדה, לשלב תוך כדי תרגול והצבה בתבניות מספר, שיקולים לוגיים שיעזרו להבנת התהליכים הקשורים במציאת קבוצות אמת של תבניות פסוק.

התבניות המופיעות הן מדרגות קושי שונות וגם המשימות המוצגות בפני המשתמש דורשות רמות שונות של שיקולים. הלומדה ערוכה כך שהתלמיד עובר בהדרגה מדרגת קושי אחת לשניה. הנושא מתפתח בשלבים וזורע נבטים להמשך הלימוד בצורת הכללות, הבנה וניתוח.



מועד הפצה משוער: כסלו, תשמ"ח.

מידע בטלפון 08-482212.

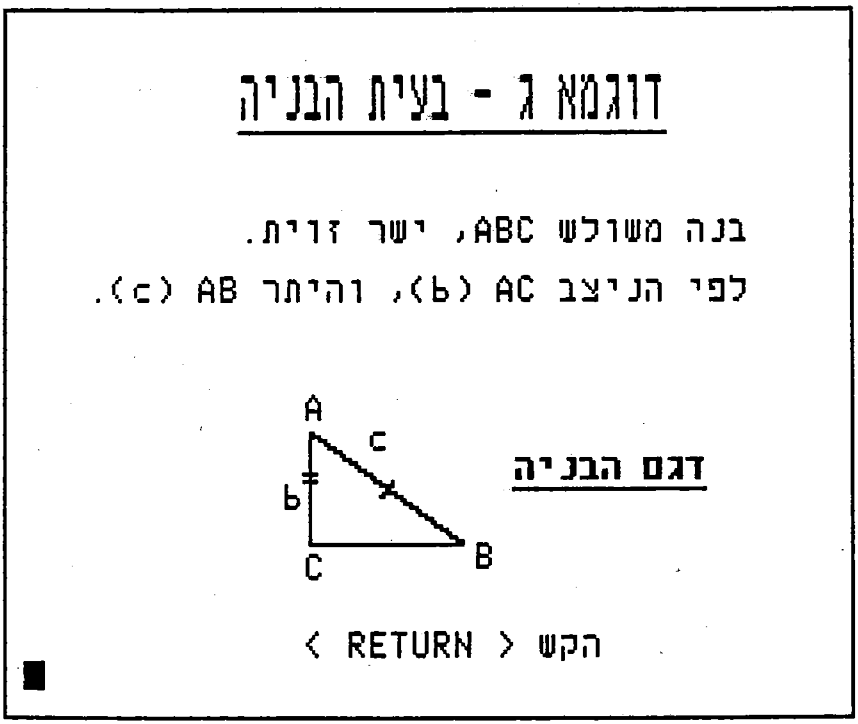
בניות הנדסיות

הלומדה עוסקת בבניות הנדסיות וכוללת דיסקט וחוברת לתלמיד.
מטרת הלומדה ללמד את "חוקי המשחק" המהווים למעשה את עולם הבניות ההנדסיות.

הבניות ההנדסיות:

הבניות ההנדסיות הן מיקרו עולם מתימטי שבו הפעולות המותרות הן "הבניות היסודיות" בלבד (העתקת קטע, העתקת זוית, חציית קטע וכו').
מאחר שהמחשב "יודע" לבצע רק פקודות יסודיות אלה ניתן ללמוד את הנושא תוך עבודה ליד המחשב עם הדרכה מתאימה בחוברת.

בשלב זה הלומדה מתאימה למחשבי APPLE ובימים אלה נעשית הסבה ל I.B.M.



מועד משוער להפצה, כסלו, תשמ"ח.
מידע בטלפון 08-482212 .

התוכנה .T.R.M

התוכנה T.R.M הינה תוכנה המאפשרת מעבר בין הצגות שונות של פונקציה: הצגה אלגברית, הצגה גרפית והצגה לפי טבלה. היא מתאימה למחשב IBM PC ולתואמיו.

התוכנה T.R.M מאפשרת:

א) הכרה של מספר גדול של פונקציות (פונקציות פולינומיאליות, רציונליות, ערך שלם, שורש, ערך מוחלט וכדי).

ב) התמודדות בנושא הפונקציות בלי "הפרעות" השייכות לנושאים מתמטיים קודמים (חישוב אלגברי, שרטוט מערכות צירים וכדי).

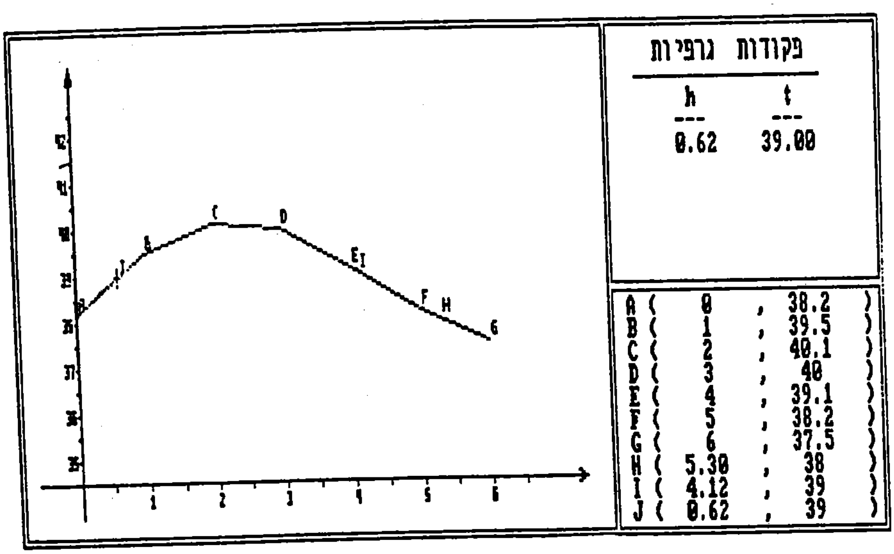
ג) הבנה דינאמית של מושג הפונקציה.

ד) גישה התפתחותית בתהליך הלמידה: ארגון נתונים בטבלאות, השערות לגבי גרף עד לגילוי ההצגה האלגברית.

ה) מעבר נוח בין ההצגות ועבודה סימולטנית ביניהן.

ו) התמודדות עם נושא הדיוק.

התוכנה T.R.M תלווה בספר ובו דוגמאות רבות לפעילות בצורה של דפי עבודה.



מועד הפצה משוער: שבט, תשמ"ח

מידע נוסף בטלפון 08-482212.

הסבת לומדות

בקרוב ניתן יהיה לרכוש את הלומדות הבאות גם עבור מחשבי IBM-PC* .

שני צדדים לאפס

קדימה אל הקודקודים

נקודות וכללים

קדימה אל התבניות

מועד הפצה משוער: חשוון, תשמ"ח.

מידע בטלפון 08-482212

*הגירסות המוסבות אינן מיועדות לתואמי IBM-PC.

הבה נשחק - לקט מתוך הערות והארות

במהלך החודש הראשון של שנת הלימודים תשמ"ח תצא לאור החוברת לעיל.
חוברת זו היא מהדורה <u>מורחבת</u> של לקט המשחקים מתוך *הערות והארות*.

חוברת זו מכילה את כל המשחקים שפורסמו בלקט המשחקים הקודם ובנוסף את
כל המשחקים שפורסמו ביתר חוברות *הערות והארות*.

הודעות

★★

המרכז לטכנולוגיה חינוכית
מיסודה של קרן רוטשילד

השתלמויות למורים בשנת שבתון בתשמ"ח

במסגרת תכנית ההשתלמויות למורים ולעובדי הוראה לשנת תשמ״ח -
אנו מציעים למורים בשנת שבתון להשתלב בעבודה במוסדנו.

צוות המתמטיקה מציע:
השתלבות בעבודת צוות המפתח חומרי למידה והדרכה להוראת החשבון
לבתי-הספר היסודיים (בתכניות: ״אחת, שתיים ו...שלוש״, ו״יועד אחת״);
פיתוח חומרי לימוד לתלמידים וחומרי הדרכה למורים, באמצעי הוראה
מגוונים, כולל תכניות מחשב.

היקף העבודה: יום בשבוע.
יום זה נחשב עבור קרן ההשתלמות כ-8 שעות לימוד.
באישור משרד החינוך תחשב העבודה כ-1/3 משרה.

מיועד למורים בעלי תואר אקדמי במתמטיקה ובעלי ניסיון בהוראה.
בדבר פרטים, נא לפנות למט״ח, לצוות המתמטיקה, טלפונים: 03-428923
או, 03-423222 קו פנימי 24.

★★

****

טכניון - מכון טכנולוגי לישראל

הנכם מוזמנים להשתתף בהשתלמויות הבאות הנערכות במרכז לוגו בחופשת החנוכה.

ההשתלמויות נערכות במחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, בנין שרמן, הטכניון, בין השעות 9:00 - 16:00 (פרטים מדוייקים כולל אישורי כניסה לרכב ומפת הטכניון, יישלחו לנרשמים על גבי הספח המצורף).

הערה: אנא הבטיחו השתתפותכם מאחר ומספר המקומות מוגבל.

השתלמות מס' 1:

הנושא - "הכרות ראשונה עם רקורסיה: אספקטים תיכנותיים ודידקטיים".

התאריך - יום ה' 17/12/87.

השתלמות מס' 2:

הנושא - "ערכים חינוכיים בתיכנות"; יידונו נושאים כמו תיכנות מבני, מסננת שגיאות, בחירת שמות למשתנים ולהליכים.

התאריך - יום ב' 21/12/87.

השתלמות מס' 3:

הנושא - "שילוב תיכנות לוגו עם נושאים מתמטיים לחטיבת הביניים".
א. משתנים ופונקציות. ב. חקירת משולשים.
התאריך - יום ג' 22/12/87.

דמי השתתפות כולל דמי הרשמה:

יום אחד - 30 ש"ח
שני ימים - 55 ש"ח
שלושה ימים - 75 ש"ח

הערה: דמי ההשתתפות כוללים 10 ש"ח דמי הרשמה אשר לא יוחזרו במקרה של ביטול ההשתתפות.

אפשרות הנחה למתקשים בתשלום עפ"י פניה אישית.

נשמח לראותכם בין המשתתפים!

ד"ר נירה קרומהולץ
מרכזת הפעילויות.

****

****

המרכז הישראלי להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית ירושלים

על"ה

על"ה דן בנושאים הקשורים לתוכנית המתמטיקה החדשה לחטיבה העליונה. מתפרסמים בו, בין השאר:

* מאמרים על היבטים תיאורטיים, דידקטיים והסטוריים של פרקי לימוד שונים
* הצעות לתרגילים נוספים ופתרונות של בעיות קשות
* דוגמאות של מבחנים (כולל בחינות בגרות)
* הצעות של מורים לשיפור ההוראה
* ממצאים של מחקרי הערכה.

מחיר של מינוי שנתי (שני גיליונות): 10.- ש"ח.*

עלון למורה המתמטיקה

* ספח להזמנת מנוי בעמ' 57

ימי עיון

במשך שנת הלימודים תשמ"ח נקיים שתי סדרות של כארבעה ימי עיון כל אחת, המשלבות בתוכן את ספרי הלימוד החדשים לכיתות ז' ו ט'.

ימי העיון יתקיימו במדרשת פיינברג, מכון ויצמן למדע, רחובות.
בין השעות 9:00 - 14:30.

טופס הרשמה לימי העיון נמצא בסוף החוברת.

ימי העיון הראשונים בכל סידרה הם:

<u>סידרה א'</u>: הוראת המתמטיקה בכיתה ז'.

(מיועד למורים שלא השתתפו בהשתלמות הקיץ תשמ"ז במסלולים א' או ז').

1. מספרי הזזה - לרמה א' ולרמה ב'.
   יום שלישי, כ"ז בתשרי תשמ"ח, 20/10/87.
2. הוראת סטטיסטיקה - לרמה א' ולרמה ב'.
   יום שלישי, כ"ה בחשון תשמ"ח, 17/11/87.

<u>סידרה ב'</u>: הוראת המתמטיקה בכיתה ט'

1. מבוא לפונקציות ופונקציה קווית - לרמה ב'.
   יום שלישי, כ"א באלול תשמ"ז, 15/9/87.
2. מבוא לפונקציות ופונקציה קוית - לרמה א'.
   יום שלישי, ו' בתשרי תשמ"ח, 29/9/87.

שני ימי עיון אלה מיועדים למורים שלא השתתפו בהשתלמות הקיץ תשמ"ז במסלולים ג' או ז'.

3. הפונקציה הריבועית.
   יום שלישי, ד' בחשון תשמ"ח, 27/10/87.

יום עיון זה מיועד למורים שהשתתפו בהשתלמות הקיץ תשמ"ז במסלול ג' ולמורים המעוניינים בנושא זה. באמצע השנה נקיים יום עיון נוסף זהה לזה.

מורים המעוניינים להשתתף בימי העיון מתבקשים למלא את הספח המתאים שבסוף החוברת, או לפנות אל הגבי וולך אתי טלפון: 08-482152.

ייעוץ, הדרכה וסדנאות זוטא

על מנת לאפשר למורים להתעדכן ולקבל ייעוץ והדרכה לבעיות שוטפות בבית ספרם, החלטנו לקיים מספר פגישות במשך שנת הלימודים תשמ"ח.

פגישות הייעוץ תתקיימנה, בין השעות 08;30-10:30, ובין השעות 13:30-15:30.

בחלק מימים אלה נקיים גם פעילויות נבחרות בצורת סדנאות זוטא.
הסדנאות תתקיימנה לאחר שעות הייעוץ של הבוקר, בין השעות 11:00-12:30.

להלן פרטים על ימי הייעוץ והסדנאות זוטא:

1. יום שלישי - י"ד באלול, תשמ"ז - 8.9.87 (ללא סדנא).
2. יום שלישי - כ"א באלול, תשמ"ז - 15.9.87 (ללא סדנא).
3. יום שלישי - י' בתשרי, תשמ"ח - 29,9.87 (ללא סדנא).
4. יום שלישי - כ"ז בתשרי, תשמ"ח - 20.10.87
   נושא הסדנא - תרגום.
5. יום שלישי - ד' בחשון, תשמ"ח - 27.10,87 (ללא סדנא).
6. יום שלישי - י"א בחשון, תשמ"ח - 3.11.87
   נושא הסדנא - הכרת לומדות במתמטיקה.
   בסדנא ניתן יהיה לסקור ולהכיר את מגוון הלומדות הקיים לפי בחירה.
7. יום שלישי - י"ח בחשון, תשמ"ח - 10.11.87 (ללא סדנא).
8. יום שלישי - כ"ה בחשון, תשמ"ח - 17.11.87
   נושא הסדנא - גילוי חוקיות במתמטיקה.
9. יום שלישי - ג' בכסלו, תשמ"ח - 24.11.87 (ללא סדנא).
10. יום שלישי - י' בכסלו, תשמ"ח - 1.12.87
    נושא הסדנא - תבניות מספר במעגל.
11. יום שלישי - י"ז בכסלו, תשמ"ח - 8.12.87 (ללא סדנא).
12. יום שלישי - ח' בכסלו, תשמ"ח - 29.12.87 (ללא סדנא).

13. יום שלישי - ט"ו בטבת, תשמ"ח - 5.1.88

נושא הסדנא - הכרת לומדות במתמטיקה.

בסדנא ניתן יהיה לסקור ולהכיר מגוון הלומדות הקיים לפי בחירה.

רצוי (אם כי לא חובה) שהמורים המבקשים לבוא לימי הייעוץ ו/או לסדנאות דוטא, יתקשרו לטלפון: 08-482817 ויודיעו על בואם.

הפעילות מתקיימת במחלקה להוראת המדעים.

מרכז: משה פינקלשטיין

לכבוד
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

הזמנת לומדה

הקף בעיגול את סוג המחשב:

COMMODORE כונן 1541	COMMODORE כונן רשת	APPLE

אנא שלחו לי את הלומדה **מירב מעורב** .

- חומר למורה. המחיר 6.50 ש' כמות: ___
- תקליטון עם חומר למורה ותקליטון גיבוי. המחיר - 75, "
- תקליטון עם חומר למורה. המחיר - 50, "
- חוברת דפי עבודה לתלמיד. המחיר 1.40 " כמות: ___
- *עותק נוסף של תקליטון עם החומר למורה. המחיר - 30. " כמות: ___

* תוך שישה חדשים מיום רכישת התקליטון המקורי.

אנא מלא באותיות דפוס את שם הרוכש או המוסד ושם היישוב
(השם יופיע במסך הפתיחה).

תנאי רכישה

א. מוסד הרוכש תקליטון רשאי להעתיקו לצרכי שימוש פנימי בלבד.

ב. אדם פרטי הרוכש תקליטון רשאי להעתיקו לצרכי גיבוי בלבד.

ג. אין למכור תקליטון או העתק שלו לאדם או מוסד אחר.

ד. אין לעשות שום שינוי בתקליטון. כל נסיון לשנות את תוכן התקליטון עלול לגרום להריסתו.

רצ"ב המחאה על סך: _____ שקלים חדשים לפקודת מכון ויצמן

שמי: ____________ כתובתי: ______________________

______________________ מיקוד: __________

שם ביה"ס וכתובתו: ______________________ טלי: ________

ת.ז. (של רוכש פרטי) ____________ טלפון: __________

החתימה שלהלן משמשת התחייבות לקיום תנאי הרכישה,

תאריך: ____________ חתימה: __________

(של הרוכש או של מורשה
החתימה במוסד).

לכבוד
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

הזמנת לומדה

הקף בעיגול את סוג המחשב:

COMMODORE כונן 1541	COMMODORE כונן רשת	APPLE

אנא שלחו לי את הלומדה **קדימה אל האחוזים**.

- חומר למורה. המחיר 4.90 ש׳ כמות: ____
- תקליטון עם חומר למורה ותקליטון גיבוי. המחיר - .50 "
- תקליטון עם חומר למורה. המחיר - .38 "
- חוברת דפי עבודה לתלמיד. המחיר 1.10 " כמות: ____
- *עותק נוסף של תקליטון עם החומר למורה. המחיר - .23 " כמות: ____

* תוך שישה חדשים מיום רכישת התקליטון המקורי.

אנא מלא באותיות דפוס את שם הרוכש או המוסד ושם היישוב (השם יופיע במסך הפתיחה).

תנאי רכישה

א. מוסד הרוכש תקליטון רשאי להעתיקו לצרכי שימוש פנימי בלבד.

ב. אדם פרטי הרוכש תקליטון רשאי להעתיקו לצרכי גיבוי בלבד.

ג. אין למכור תקליטון או העתק שלו לאדם או מוסד אחר.

ד. אין לעשות שום שינוי בתקליטון. כל נסיון לשנות את תוכן התקליטון יעלול לגרום להריסתו.

רצ״ב המחאה על סך: ______ שקלים חדשים לפקודת מכון ויצמן

שמי: ____________ כתובתי: ____________________

____________________ מיקוד: ____________

שם ביה״ס וכתובתו: ____________________ טל׳: ________

ת.ז. (של רוכש פרטי) ____________ טלפון: ____________

החתימה שלהלן משמשת התחייבות לקיום תנאי הרכישה.

תאריך: ____________ חתימה: ____________

(של הרוכש או של מורשה החתימה במוסד).

טופס הרשמה להשתלמויות חנוכה

<u>מרכז לוגו</u>

הטכניון, חיפה 32000

טלפון: 293112 - 04

שם משפחה:_______________ שם פרטי: _______________

כתובת: ____

טלפון בבית:_______________ טלפון בעבודה: ___________

מעוניין להשתתף בהשתלמויות: (הקף בעיגול)

מס' 1 מס' 2 מס' 3

רצ"ב המחאה מס' ____________ בנק ________________

ע"ס ____________ משוכה לפקודת <u>מוסד הטכניון.</u>

לכבוד

מערכת העלון למורי המתמטיקה

המרכז הישראלי להוראת המדעים

האוניברסיטה העברית, גבעת רם

<u>ירושלים 91904</u>

אבקשכם לרשום אותי כמנוי על העלון למורי המתמטיקה לשנת תשמ"ח.

שם ____________________ ביה"ס ____________________

אני מלמד(ת) לפי התוכנית החדשה: כן / לא.

מצ"ב המחאתי מס. ____________ ע"ס -.10 ש"ח למינוי השנתי.

ב ב ר כ ה,

____

חתימה

לכבוד
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

הזמנת ספרים

אנא שלחו לי את הספרים:

☐ פרקי מתמטיקה - פונקציות. המחיר: 17.50 ש"ח

☐ פרקים נבחרים במתמטיקה - פונקציות. המחיר: 14.50 ש"ח

רצ"ב המחאה על סך ______ ש"ח לפקודת מכון ויצמן.

שם: ______________ ת.ז. ____________________

כתובת: ______________________________ טלפון: __________

שם ביה"ס וכתובתו: ________________________________

____

לכבוד
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
ר ח ו ב ו ת 76100

ימי עיון

נא לרשום אותי לימי העיון במתמטיקה בנושאים:

☐ מספרי הזזה לרמה א' ולרמה ב' - בתאריך 20/10/87.

☐ הוראת סטטיסטיקה לרמה א' ולרמה ב' - בתאריך 17/11/87.

☐ מבוא לפונקציות ופונקציה קוית לרמה ב' - בתאריך 15/9/87.

☐ מבוא לפונקציות ופונקציה קוית לרמה א' - בתאריך 29/9/87.

☐ הפונקציה הריבועית - בתאריך 27/10/87.

שם: ____________________ ת.ז. ____________________

כתובת: ______________________________ טלפון: __________

שם ביה"ס וכתובתו: ________________________________