ג2

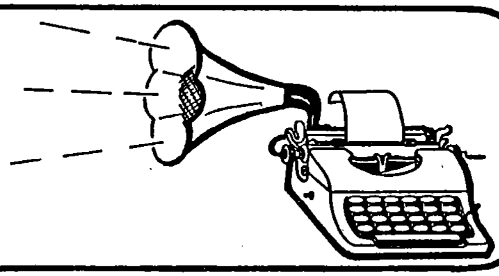
עלון למורי מתמטיקה

כרך ג, חוברת מספר 2, אלול תשמ"ט

מספרים

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

מספרים



תוכן העניינים

מאמרים:

מערכת מספרים:

מקסים ברוקהיימר נורית זהבי רחל בוהדנה מיכאל קורן

הדפסה ועריכה במחשב: רחל נמרודי
גרפיקה: פולינה קרביץ
עיצוב: רחל בוקשפן
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

מערכת מספרים מודה לד״ר דוד רימר

על עזרתו בהוצאה לאור של חוברת זו.

מאמרים

היבט גיאומטרי ופונקציונלי לבעיות על תערובות ותרכובות

מאת: דוד רימר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

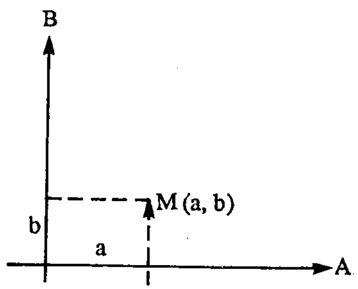
הקדמה

בתוכנית הלימודים, הן בחשבון והן באלגברה, קיימות בעיות בנושא תערובות. חלק מהמטרות בבעיות אלו הן, להביא לתודעת התלמידים משהו די חשוב ושכיח מהמציאות, וכן לתרגם מצבים מן המציאות משפה מילולית לשפה מתמטית ולפתור.
צריך לציין כי הצגת נושא זה בספרי הלימוד, כמעט שלא השתנתה במשך תקופה מאוד ארוכה.. אנו מוצאים היום כמעט אותו סוג של בעיות שהיו גם לפני מאה או מאתיים שנה, לעומת זאת איננו מוצאים, גם היום, משהו על ההיבט הגיאומטרי והפונקציונלי, אף על פי שבמדעי הטבע כמו כימיה, גיאולוגיה וכדומה, משתמשים במידה רבה בהיבטים אלה.
בסעיף א׳ של המאמר נתייחס להיבט הגיאומטרי ובסעיף ב׳ להיבט הפונקציונלי.

א) ההיבט הגיאומטרי

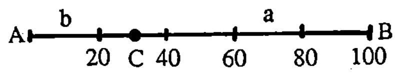
I. תערובת בת שני מרכיבים

אם תערובת M מורכבת משני חומרים A ו-B . ריכוז A הוא a% וריכוז B הוא b% , כאשר $a + b = 100$, נוכל להציג אותה כנקודה במישור, במערכת צירים כרצוננו, אורטוגונלית או לא - אין זה משנה (ראה איור 1).



איור 1

אבל נוכל להסתפק רק בקטע AB המחולק ל-100 חלקים שווים (כמו באיור 2).



איור 2

כאשר הנקודה A מייצגת את החומר A טהור (כלומר: A: 100% , B:0%), הנקודה B מייצגת את החומר B טהור (כלומר: B: 100% ,A: 0%) וכל נקודה אחרת C שעל הקטע AB מייצגת תערובת בריכוזים הבאים: B:b% ו- A:a% כאשר AC/CB = b/a.

ברור כי קיימת התאמה חד-חד ערכית בין קבוצת הנקודות שעל הקטע AB וכל התערובות האפשריות של שני חומרים A, B .

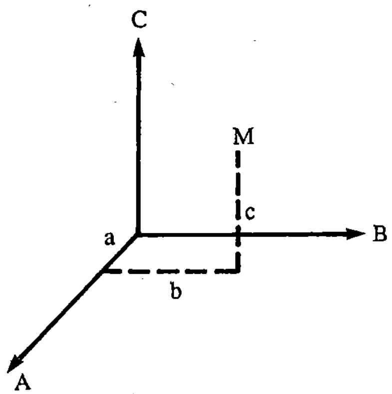
נחוץ לציין כי התלמידים מכירים, אולי, הצגה כזאת מלימודי הפיסיקה: אם בקצוות קטע AB מפעילים שני כוחות מקבילים באותו כיוון, בגדלים a ו-b בהתאמה, מרכז הכובד של מערכת זו נמצא בנקודה C על הקטע AB, כאשר AC/CB = b/a.

II. <u>תערובת בת שלושה מרכיבים</u>

חומר M הוא תערובת של החומרים A,B,C בריכוזים C: c% , B: b% , A: a%,

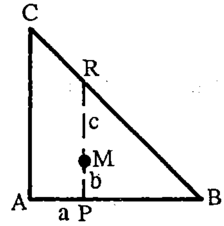
כאשר a + b + c = 100 .

נוכל להציג תערובת זו במערכת צירים מרחבית (ראה איור 3) שבה הנקודה M בעלת השיעורים a, b, c .

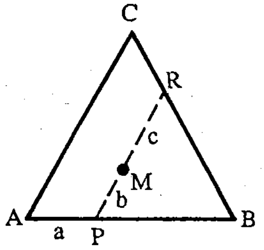


איור 3

אבל הצגה כזו אינה נוחה ועדיף להשתמש במשולש ישר זוית ושווה שוקיים (איור 4), או במשולש שווה צלעות (איור 5).



איור 4



איור 5

את AB (השווה ל-AC) מחשבים כ-100. על AB בוחרים נקודה P כך ש- $AP = a$. מ-P מעבירים מקביל ל-AC . את הקטע $PM = b$ ומאריכים אותו עד לחיתוכו ב-R עם BC.

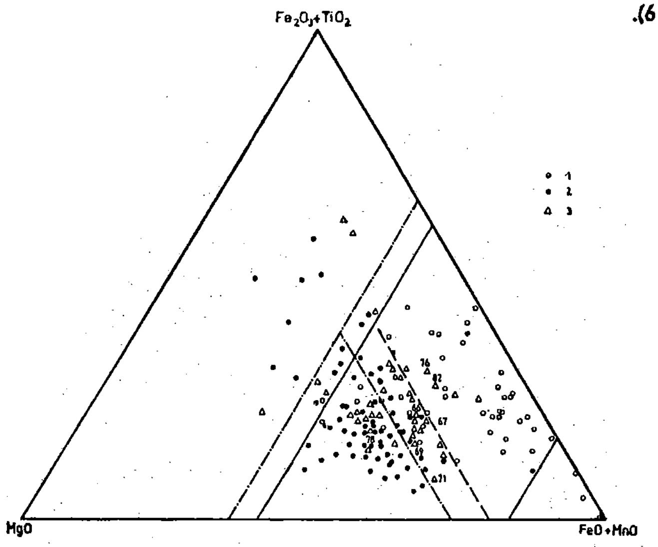
מכאן $PB = 100 - a$ וגם $PR = PB = 100 - a$.

אבל: $PM = b$, לכן $100 - a = b + MR$

נובע כי: $MR = 100 - a - b = c$

ובזה הוכח כי הנקודה M מאופיינת על ידי השלשה (a, b, c) כאשר $a + b + c = 100$.

אזי קיימת התאמה חד-חד ערכית בין קבוצת כל הנקודות שבתוך המשולש ABC ועל היקפו ובין קבוצת כל התערובות האפשריות של שלושה חומרים A, B, C, בכל הריכוזים האפשריים.
נציין כי הנקודות A, B, C מייצגות את החומרים הטהורים, הנקודות בצלע AB מייצגות תערובות של שני החומרים A ו-B וכמו כן הנקודות על הצלעות AC ו-BC. הנקודות בפנים המשולש הקרובות ל-A מייצגות תערובות עשירות ב-A ודלות ב-B ו-C. דבר דומה ביחס לנקודות שבפנים המשולש, בפינות על-יד הקודקודים B או C. הנקודות הקרובות למרכז המשולש, מייצגות תערובות שריכוזיהם די קרובים בכל אחד מהחומרים A, B, C.
במדעי הטבע משתמשים לרוב במשולש שווה צלעות ([1] עמ' 89-93 , התרכובת הכימית של biotites) (איור 6).



איור 6

יתרון הצגה זו, של תערובת בת שנים או שלושה מרכיבים הוא, שהיא ממחישה את הרכב התערובת הרבה יותר טוב מאשר טבלה של ריכוזים הנתונים ע"י אחוזים.

III. <u>תערובות בעלות יותר משלושה מרכיבים</u>

אם החומר M מורכב מארבעה חומרים A , B , C , D נוכל לייצג אותו כנקודה בטטראדר, או, עדיף לאחד שניים מהמרכיבים לתערובת, ואז יהיו רק שלושה מרכיבים (נאמר B: b% , A: a% , C+D: (c+d)%) ונשתמש במשולש שבו נציג את הנקודה M(a, b , c + d). ישנן עוד אפשרויות [2,3], אבל לא נמשיך כאן יותר בנושא זה.

<u>משימה</u>

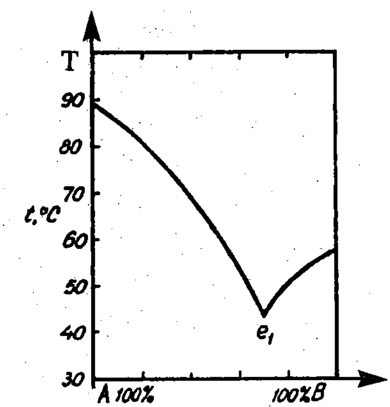
מצא נתונים על תעסוקת אוכלוסית העובדים מכמה איזורים (או יישובים) בשלושה תחומים (לדוגמא: A - תעשיה, B - חקלאות, C - שירותים).

חשב את הנתונים באחוזים מכלל מספר העובדים בשלושה תחומים אלה, בכל אחד מהאיזורים (שלושתם ביחד יחשבו כ-100%).

בנה דיאגרמה במשולש ABC. דיאגרמה זו תיתן אפשרות להשוות בין האיזורים,בנושא תעסוקת האוכלוסיה (כל איזור ייוצג ע"י מספר מ-1 עד n, כמספר האיזורים שנחקרו).

ב) <u>ההיבט הפונקציונלי</u>

בכימיה עוסקים הרבה בתערובות כאלו שעל-ידי חימום הן עוברות ממצב סולידי למצב נזיל. עבור כל חומר טהור ידועה הטמפרטורה בה החומר עובר ממצב אחד לשני, עבור התרכובות בונים עקומות והתשובה מתקבלת בעזרת הגרף. לדוגמא באיור 7 [4] נתון גרף הפונקציה המתארת על-פי הניסויים במעבדה את הטמפרטורה שבה תרכובת משני החומרים A ו-B עוברת ממצב מוצק למצב נזיל.



איור 7

גרף זה נותן תשובות לשאלות כמו:

1) באיזו טמפרטורה תהפך לנוזל תרכובת בעלת ריכוזים B:%(100-m) ו- m%:A ?

2) איזו תרכובת תהפך לנוזל בטמפרטורה של α° ?

בשני המקרים מציבים סרגל על האיור ואחד הצירים וקוראים ישירות את התשובה על הציר השני.

למעשה מדובר כאן בפונקציה מוגדרת על תחום מפוצל. נבנה גם אנחנו פונקציה כזו, בהנחה ששתי קשתות הגרף הן קשתות של פרבולות ממעלה שנייה. (זה יכול להיות תרגיל מעניין עבור התלמידים במיוחד בגלל שקיים יותר מפתרון אחד).

נניח כי חומר A טהור נהפך לנוזל בטמפרטורה של 80°C, וחומר B טהור נהפך לנוזל בטמפרטורה של 50°C. כאשר התערובת היא בריכוז 40%:A ו- 60%:B היא נהפכת לנוזל בטמפרטורה של 20°C, שהיא הטמפרטורה הנמוכה ביותר בה תערובת כזו הופכת לנוזל.

נבנה פונקציה ממעלה שנייה $f(x)$, המוגדרת על הקטע $[0, 100]$ כאשר x מייצג את הריכוז של B בתערובת, ו-f מקיימת את התנאים:

א) $f(0) = 80$ ב) $f(60) = 20$

ג) $f(100) = 50$ ד) f יורדת בתחום $[0, 60]$

ה) f עולה בתחום $[60,100]$ ו) f קעורה בכל התחום

נתרגם תנאים אלה לתבניות.

תהי הפונקציה $f(x)$ המוגדרתבצורה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & 0 \le x \le 60 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & 60 \le x \le 100 \end{cases}$$

והמקדמים a_i , b_i , c_i $(i = 1,2)$ מקיימים את התנאים

$$a_1\cdot 0 + b_1\cdot 0 + c_1 = 80 \qquad (1)$$

$$a_1\cdot 3600 + b_1\cdot 60 + c_1 = 20 \qquad (2)$$

$$a_2\cdot 3600 + b_2\cdot 60 + c_2 = 20 \qquad (3)$$

$$a_2\cdot 10{,}000 + b_2\cdot 100 + c_2 = 50 \qquad (4)$$

$$a_1 < 0 \qquad (5)$$

$$a_2 < 0 \qquad (6)$$

$$-\frac{b_1}{2a_1} \le 0 \qquad (7)$$

$$-\frac{b_2}{2a_2} \ge 100 \qquad (8)$$

קיימת כאן מערכת של 4 משוואות (1-4) עם 6 נעלמים, לכן ישנן אינסוף אפשרויות לקבוע את המקדמים, ז"א: ישנן אינסוף פונקציות שיכולות לקיים את התנאים (א-ו). אנחנו נסתפק בפונקציה אחת ונשאיר לקורא את האפשרות למצוא פונקציות אחרות בתנאים הנ"ל (1-8).
מתנאי (1) מתקבל $c_1 = 80$. נציב ערך זה ב-(2) ונקבל $3600a_1 + 60b_1 = -60$ ואחרי הצמצום ב-60, היא נעשית למשוואה:

$$60a_1 + b_1 = -1 \qquad (9)$$

בהתייחס ל-(7) ניקח $b_1 = 0$ ואז ממשוואה (9) מתקבל $a_1 = -\frac{1}{60}$.

נחסר את (3) מ-(4), נצמצם ב-10 ונקבל:

$$b_2 = (3 - 640a_2)/4 \qquad (10)$$

נציב את (10) ב-(8) ונקבל:

$$\frac{640a_2 - 3}{4} \cdot \frac{1}{2a_2} \geq 100$$

אחרי עיבוד מסויים של אי-שוויון זה, מתקבל $a_2 \geq -\frac{3}{160}$, זה, ביחד עם (6) נותן אי-שוויון

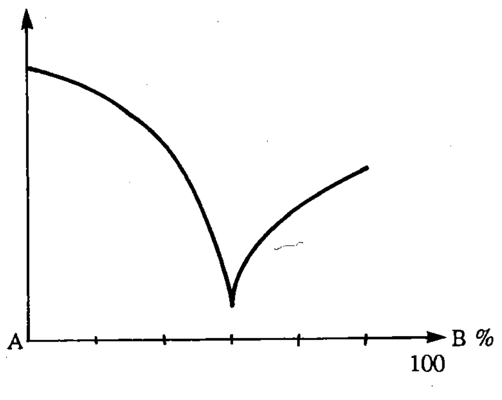
כפול $-\frac{3}{160} \leq a_2 < 0$. ביחד עם (6) ניקח $a_2 = -\frac{1}{80}$, ואז מ-(10) מתקבל $b_2 = \frac{11}{4}$.

נציב ב-(3) או ב-(4) את ערכי a_2 ו-b_2 ונקבל: $c_2 = -100$

לכן, אחת האפשרויות עבור הפונקציה הדרושה היא:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{60}x^2 + 80 & 0 \leq x \leq 60 \\ -\frac{1}{80}x^2 + \frac{11}{4}x - 100 & 60 \leq x \leq 100 \end{cases} \qquad (11)$$

גרף פונקציה זו נתון באיור 8.



איור 8

ביבליוגרפיה

1. H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, Geometry Revisited, The Math Assoc. of America (1967).

2. David Rimer, Vasile Pomârleanu, Aurelia Moldoveanu, La représentation ternaire et quaternaire de la composition chimique des biotites, Institutul de Geologie și Geofizică București (1982), vol. LVII/1 pp. 237-246.

3. David Rimer, Une meilleure utilisation du tétraèdre pour la représentation géométrique des roches à quatre composantes principales. Bulletin de la Société Française de Minéralogie et de Crystallographie, t.91 (1968), Paris, p. 513-515.

4. David Rimer, Généralisation du triangle de Gibbs pour les systèmes quaternaires et quinaires. Revue Roumaine de Chimie, t.19 (1974) p. 997-1008.

5. David Rimer et Simon Fișel. Un nouveau modèle géométrique des diagrammes de phase des systèmes quaternaires. Bulletin de la Société chimique de France (1974) No. 12, p. 2709-2714.

״חומשי״ -רוח המתמטיקה (מחזה בשתי מערכות)*

מאת: גרשון רוזן

ביה״ס התיכון האיזורי, גליל מערבי

<u>מקום ההתרחשות</u>: כיתה בבי״ס (או בסמינר)

<u>המשתתפים</u>: מורה וקבוצת תלמידים (או קבוצת מורים משתלמים)

<u>אמצעי עזר</u>: א) לכל משתתף מחשבון, מספריים, סרגל, עפרון ומספר מהדקים

ב) בכיתה נמצא מטול.

<u>מערכה ראשונה - הבה נכיר את ״חומשי״</u>

המורה (מצויד במזוודה), נכנס לכיתה ומניח את המזוודה על הרצפה, בודק שיש חשמל במטול (לא מדליק אותו), מתכופף ומוציא מהמזוודה את הפריטים הבאים:

** מחומש גזור מבריסטול (ומקופל), מניח אותו על המטול.*

** קלסר.*

** תפוח, סכין וצלחת.*

המורה מוציא גם חתיכת חוט, קושר בה קשר ואומר:

המורה: כדי לא לשכוח את התפוח.

המורה: *(פונה אל התלמידים)*: הבה ונחשוב על מקומו של המספר 5 בחיינו היומיומיים.
5 אצבעות, 5 חומשי תורה, 5 יבשות, 5 חושים.
מי רוצה להוסיף?

קריאות מתלמידים שונים בכיתה

תלמיד א׳: מלון 5 כוכבים

תלמיד ב׳: לפרחי בר יפים 5 עלי כותרת

קריאות גיחוך מהכיתה כמו: ״איפה קראת?״ תלמיד ב׳ מפנה ראשו אל החלון כנפגע.

תלמיד ג׳: סמל האולימפיאדה 5 טבעות

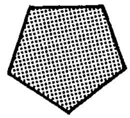
תלמיד ד׳: סמל מכונית ״קרייזלר״

שובב הכיתה: לכל מכונית תקינה 5 גלגלים אחד ב״ספאר״.

---

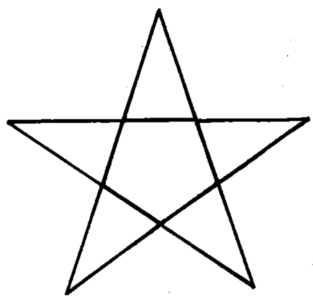
*מאמר זה מוקדש לזכרו של עמנואל קרמר ידידי אשר תמיד התלהב והלהיב אותי בהצגת ״חומשי״ בהשתלמויות מורים.

בכיתה נשמעות קריאות התפעלות הו הא .....
המורה ניגש למטול ומדליק אותו. הכיתה נרגעת קמעה. על המסך רואים את הצל של תמונה 1.



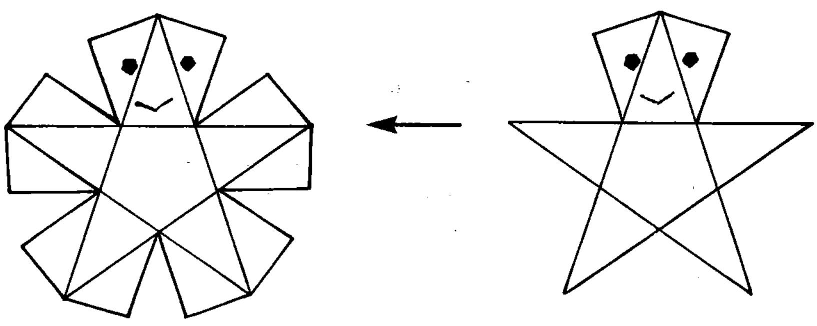
תמונה 1

שובב הכיתה *(מתפרץ):* פעם כשאדם וחווה היו בגן עדן, הגיעה רוח המתמטיקה לכדור הארץ בחללית מיוחדת בצורת מחומש.
המורה פותח את כנפי המחומש שעל המסך ורואים את תמונה 2.



תמונה 2

המורה ממשיך לפתוח את הכנפיים בזו אחר זו ורואים את תמונה 3.



תמונה 3

המורה: "חומשי - רוח המתמטיקה"

שובב הכיתה *(מתפרץ)*: הי, הוספתי עיניים וקבלתי חומשי עם חמישה ראשים.

מראה לכיתה תמונה 3 ואומר:

שובב הכיתה: ברור, כי צריך הרבה "ראשים" כדי להצליח במתמטיקה.

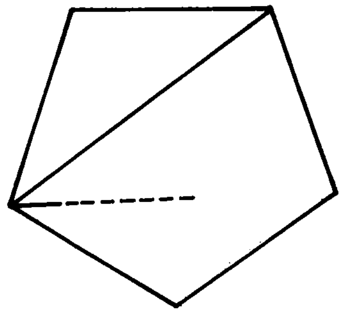
המורה מחלק דפים עם מחומשים משוכללים גדולים לכל תלמיד. (ראה בסוף המאמר).

המורה: הבה ונעביר אלכסונים במחומש.

התלמידים מעבירים אלכסונים (תמונה 4)

תלמיד ג': המורה, נוצר לי עוד מחומש.

תלמידים אחרים: גם לי, גם לי ....

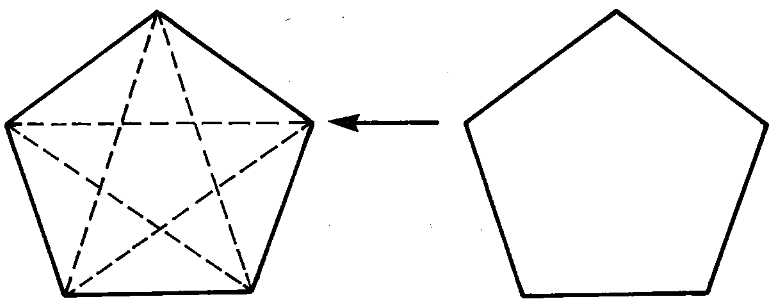


תמונה 4

התלמידים עובדים ואז מתפרץ תלמיד ד'.

תלמיד ד': תראו איזה יופי אפשר לבנות את חומשי בשתי צורות פעם אחת אם ניקח מחומש גדול ונעביר בו את האלכסונים יהיה לנו "חומשי" קטן בפנים.

מראה תמונה מספר 6 והמורה מניח שקף עם תמונה 6 על המטול. *



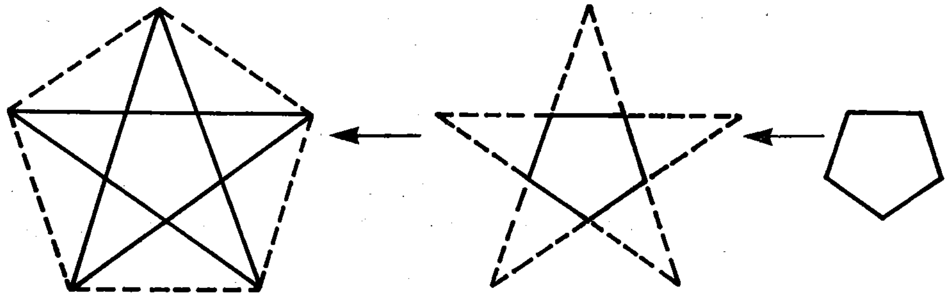
תמונה 6

תלמיד ד' *(ממשיך)*: אם ניקח מחומש קטן ונאריך את הצלעות עד שייפגשו ונחבר את נקודות המפגש נקבל "חומשי" גדול.

---

* תמונה 5 נעלמה בגלל "חומשי..."

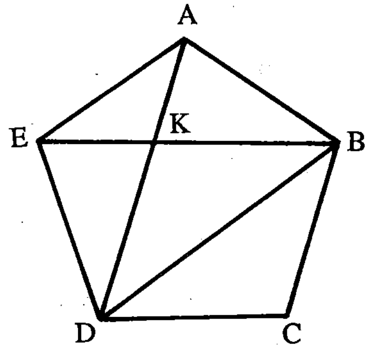
המורה מניח שקף עם תמונה 7.



תמונה 7

המורה: עכשיו נעסוק קצת במתמטיקה.

המורה מניח על המטול שקף עם ציור של מחומש משוכלל (תמונה 8).



תמונה 8

המורה: *(תוך כדי רישום על הלוח)* נניח שאורך צלע המחומש הוא 1 יחידה.

x מייצג את אורך האלכסון כלומר:

$$BD = AD = BE = x$$

תלמיד ב': המורה, יש משולשים חופפים בציור ויש גם משולשים דומים שאינם חופפים.

תלמיד ג': זו לא חוכמה. יש משולשים שווי שוקיים, טרפזים, מקביליות ועוד.

המורה: יפה. נתבונן בציור ונמצא משולשים דומים שאינם חופפים.

תלמיד א': מצאתי $\Delta AKE \sim \Delta EAB$

תלמיד ג': ואני גיליתי $\Delta AKE \sim \Delta DKB$

תלמידים נוספים: גם אני מצאתי $\Delta ABK \sim \Delta EBD$

המורה: כעת הבה ניקח את אחת האפשרויות נבטא את צלעות המשולשים באמצעות 1 ו-x .

תלמיד ב': אם המשולשים דומים אז הצלעות פרופורציוניות ואני יכול לרשום את היחסים:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \ .$$

המורה רושם על הלוח ומבקש מכל התלמידים לפשט .
התלמידים עובדים אח"כ מכתיבים למורה את שלבי הפישוט והפתרון.

המורה *(כותב);* $x^2 - x - 1 = 0$

למשוואה הריבועית שני פתרונות והם:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sim 1.61803 \ ...$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sim -0.61803 \ ...$$

השורש x_2 לא מתאים לבעיה, היות ו- x הוא אורך האלכסון.

המורה: את המספר $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ מקובל לסמן באות היוונית ϕ (פי) . לכן במחומש משוכלל ϕ מסמן את היחס הבא:

$$\phi = \frac{\text{אורך אלכסון המחומש}}{\text{אורך צלע המחומש}}$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sim 1.618$$

תלמיד ד': אני זוכר שסיפרת לנו על שני אוצרות גדולים של הגיאומטריה שהם משפט פיתגורס וחיתוך הזהב ואמרת לנו אז שלפי משפט פיתגורס אורך היתר במשולש ישר זוית שניצביו 1 ו-2 יחידות הוא $\sqrt{5}$ יחידות.

תלמיד ב': ואני קראתי שיש גם מלבן הזהב. זהו מלבן שצלעותיו הן 1 ו- ϕ ולא קשה לשרטט אותו.

המורה מראה דרך נוספת לבניית מלבן הזהב, ומשרטט על הלוח את הצורה הבאה: תמונה 9.

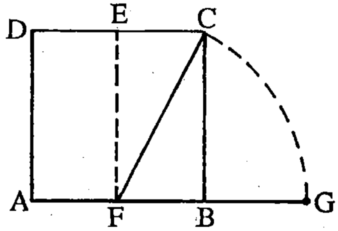
המורה: ABCD הוא ריבוע שצלעו 1.

$$AF = \frac{1}{2}$$

לכן:

$$FC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

נשרטט קשת של מעגל שמרכזה ב-F ורדיוסה FC ונקבל:



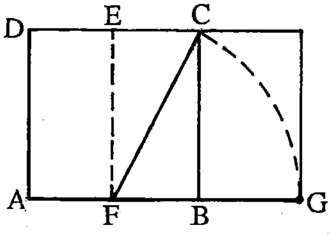
תמונה 9

$$AG = AF + FG$$
$$FG = FC$$

מכאן: $$AG = AF + FC$$

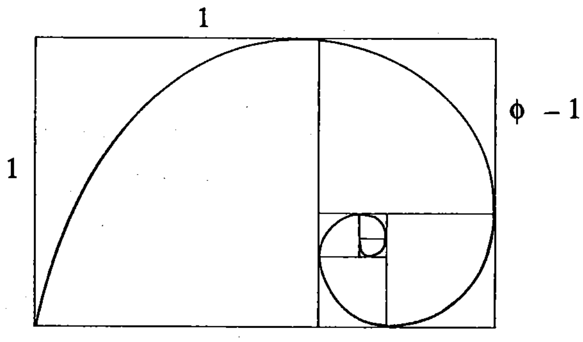
כלומר: $$AG = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \phi$$

וכעת נשלים את המלבן שצלעותיו AD ו-AG (תמונה 10) ($AD = 1$ $AG = \phi$)



תמונה 10

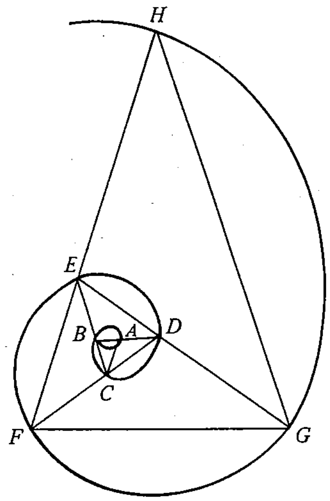
אפשר לבנות דברים נוספים ממלבן הזהב כמו קו לולייני (תמונה 11)

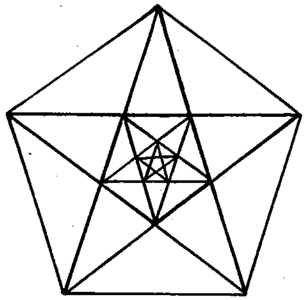


תמונה 11

כאשר מורידים ריבוע ממלבן הזהב נשאר מלבן שצלעותיו גם הן מייצגות יחס זהב.

בעזרת | ניתן לבנות -





תמונה 12

שובב הכיתה: הי, יש פה חומשי בתוך חומשי בתוך חומשי...

קריאות נוספות מהכיתה נכון, נכון ....

המורה: אפשר לעשות עוד דברים רבים ויפים בעזרת "חומשיי" ובעזרת המספר ϕ. למשל נסו לחשב את הערכים של ϕ^2, ϕ^3, ϕ^4, ϕ^5 וכן את הערכים של:

$$1+\phi \quad , \quad 1+2\phi \quad , \quad 2+3\phi \quad , \quad 3+5\phi$$

התלמידים מחשבים ואז אומר תלמיד ב':

תלמיד ב': מצאתי את השוויונים הבאים:

$$\phi^2=1+\phi \quad , \quad \phi^3=1+2\phi \quad , \quad \phi^4=2+3\phi \quad , \quad \phi^5=3+5\phi$$

המורה רושם את השוויונים על הלוח בצורה הבאה:

$$\begin{aligned}1&=1\\ \phi&=\phi\\ \phi^2&=1+\phi\\ \phi^3&=1+2\phi\\ \phi^4&=2+3\phi\\ \phi^5&=3+5\phi\end{aligned}$$

המורה: יש לנו פה מספרים בסידרת פיבונאצ'י Fibonacci: זו סידרה שבה שני האיברים הראשונים הם 1, 1 וכל איבר נוסף בסידרה שווה לסכום שני האיברים הקודמים לו.

תלמיד ב' משתעשע עם חישובים שונים מציב במקום ϕ את $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ומתגלים לו שוויונים אחרים.

תלמיד ב': אני גיליתי את השוויונים הבאים.

התלמיד אומר את השוויונים והמורה רושם על הלוח

$$\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

$$\phi^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$$

$$\phi^3 = \frac{1}{2}(4+2\sqrt{5})$$

$$\phi^4 = \frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$$

$$\phi^5 = \frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})$$

קריאת התפעלות מן התלמידים בכיתה.

תלמיד ד': המקדמים של $\sqrt{5}$ גם הם סידרת פיבונאצ'י ... 1, 1, 2, 3, 5,
המורה: גם המספרים האחרים ... 1, 3, 4, 7, 11, מבוססים על אותו כלל של סידרת פיבונאצ'י וזו נקראת סידרת לוקאס (LUCAS).
תלמיד א': מעניין מה עוד אפשר לגלות על "חומשי".

המורה לוקח את החוט ומתיר את הקשר.

תלמיד ד': יש לי חידה. אם נחזיק חוט בשני הקצוות. איך אפשר ליצור קשר בחוט מבלי לשחרר את החוט מהידיים?

התלמידים מנסים.

תלמיד ב': בודאי יש קשר בין החידה לבין חומשי.

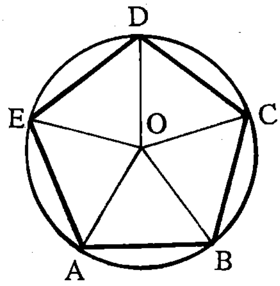
שובב הכיתה: אבל מה עם התפוח?

נשמע צלצול לסיום השעור והמורה מחלק דף לשעורי בית (תמונה 13).

עבודה

1. מחומש משוכלל ABCDE חסום במעגל O .

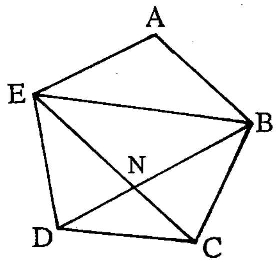
הוכח כי חמשת המשולשים שנוצרו חופפים וחשב את הזויות.



2. במחומש משוכלל ABCDE נעביר שלושה אלכסונים BD, EC, EB .

א) חשב את כל הזויות שנוצרו.

ב) מצא זוגות של משולשים חופפים והוכח שהם אכן חופפים.



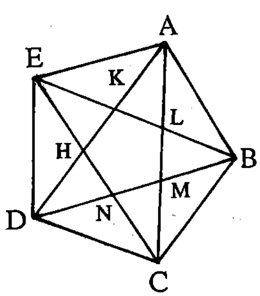
3. במחומש משוכלל ABCDE נעביר את כל האלכסונים.

א) חשב את זויות המשולשים הבאים:

ΔELA , ΔAKL , ΔACD

ב) רשום את כל זוגות המשולשים הדומים זה לזה ואת

כל זוגות המשולשים החופפים זה לזה.



<u>מערכת שניה - מ"חומשי" למרחב</u>

אותו המקום, אותם המשתתפים, אותו הציוד ואותם אמצעי העזר.

המורה מחלק לכל תלמיד מחומש משוכלל גדול.

המורה: הבה נעביר את האלכסונים.

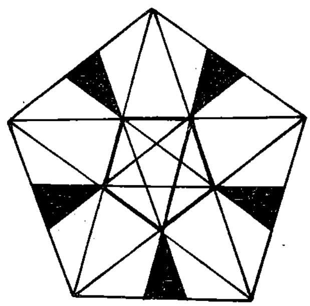
שובב הכיתה: כדי לקבל את "חומשיי" הקטן.

המורה: ב"חומשיי" הקטן, העבירו נא את האלכסונים והמשיכו אותם עד שיפגשו את צלעות המחומש הגדול.

תלמיד א': נוצרו לנו משולשים שווי שוקיים נוספים.

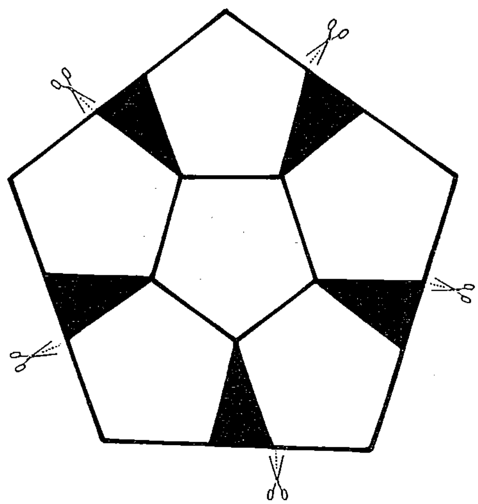
המורה: הבה נצבע משולשים אלה.

המורה מקרין שקף ובו תמונה 14.



תמונה 14

המורה: גזרו לאורך צד אחד בלבד של המשולשים הצבועים. (תמונה 15).

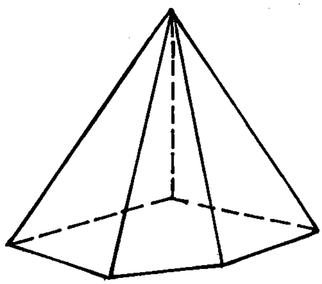


תמונה 15

תלמיד אי משתעשע עם הצורות הגזורות מקפל ומתפרץ.

תלמיד א': המורה, הצלחתי ליצור פירמידה מחומשת.

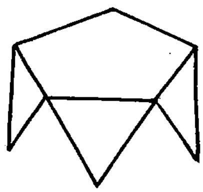
מראה את הפירמידה לכולם (תמונה 16).



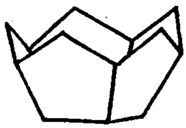
פירמידה
מחומשת

תמונה 16

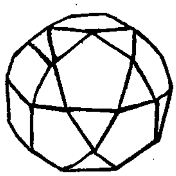
תלמידים נוספים בכיתה מנסים כוחם בקיפולים שונים כשלרשותם מחומשים נוספים (כדוגמת תמונה 15) ויוצרים את הצורות הבאות: (תמונה 17).



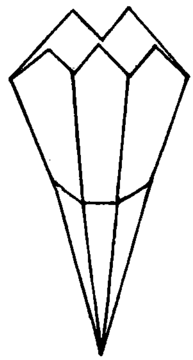
שולחן



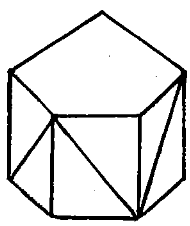
קערה



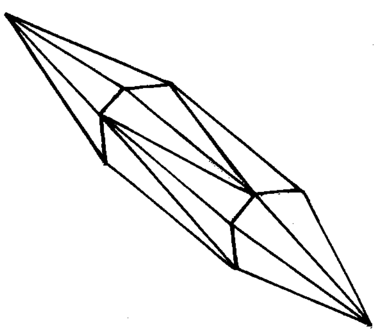
"כדורי"
בעל 12 פאות זהות



לפיד



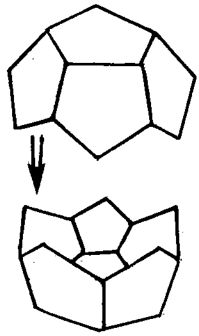
תוף



יהלום או טיל

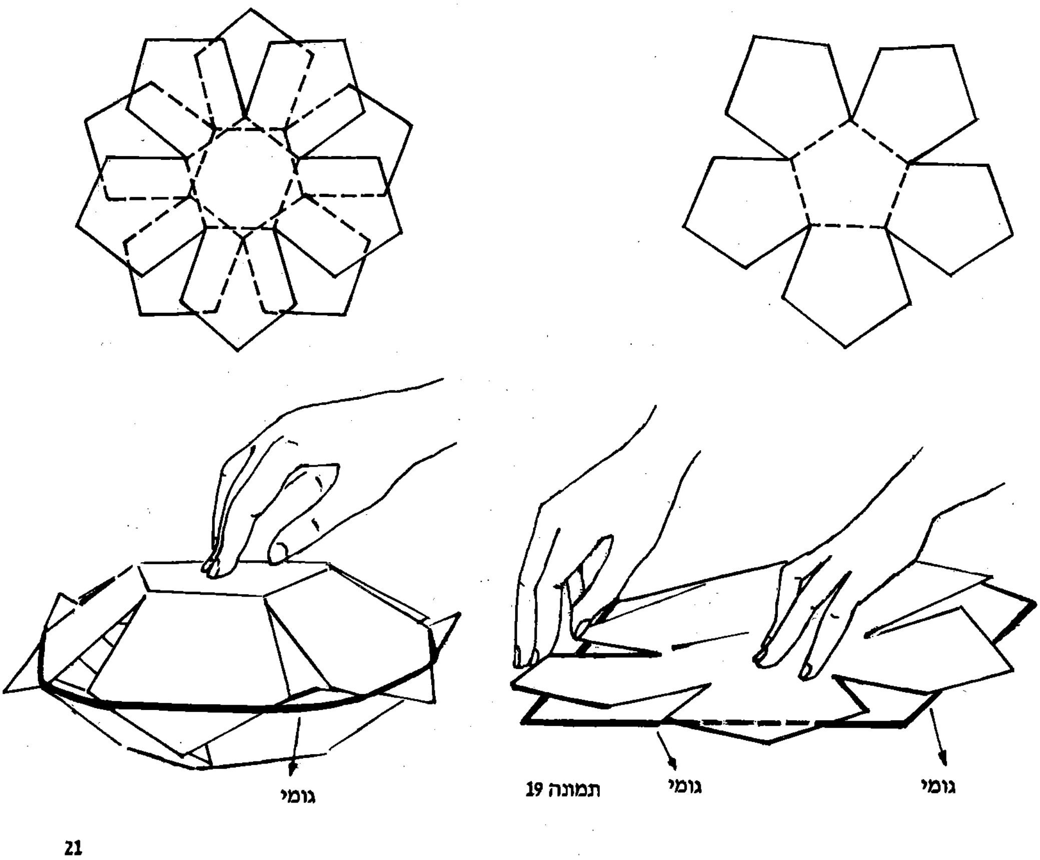
תמונה 17

תלמיד ג': חיברתי שתי קערות ותראה מה קיבלתי!
יש פה 12 מחומשים. איך נקרא גוף זה?
מראה לתלמידים את הגוף שקיבל. (תמונה 18).



תמונה 18

תלמיד ב': קראתי שהגוף הזה נקרא תריסרון משוכלל DODECAHEDRON.
המורה: יפה, אפשר לקבל את התריסרון גם בדרך הבאה.
אם נקח שתי פריסות ונניח אותן זו על זו. נשחיל גומי תחת הפאות לסרוגין *(ומראה תמונה 19 לכל התלמידים).* נשחרר את היד ונקבל תריסרון.



תמונה 19

יתר התלמידים מנסים להשתעשע בצרוף צורות שונות: המורה מוציא מהמזוודה "כדור" לתינוק העשוי מבד לבד, המורכב מ-12 מחומשים משוכללים בצבעים שונים, תפורים זה לזה עם מילוי רך.

תלמיד א׳ *(מבקש)*: תן לי לספור כמה קודקודים וכמה מקצועות יש ל"כדור".

המורה זורק אליו את ה"כדור" ובינתיים....

תלמיד ד׳: גם כדורגל אותו דבר.

המורה מוציא כדורגל מהמזוודה (תמונה 20).

שובב הכיתה: לא נכון, חוץ מהמחומשים יש שם עוד צורות.

תמונה 20

המורה: נכון, נוכל לראות 12 מחומשים צבועים בשחור, אבל הם אינם צמודים זה לזה כי יש רשת של 20 משושים צבועים בלבן המפרידים ביניהם.

תלמיד ד׳: פעם מדדתי ומצאתי שאורך כל צלע בפאה של הכדור היא מספר בין 4 ס"מ ל- $4\frac{1}{2}$ ס"מ.

תלמיד א׳ סיים את הספירה, מחזיר את הכדור למורה ואומר.

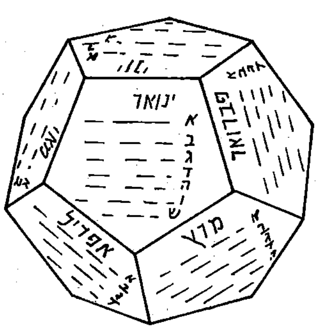
תלמיד א׳: ספרתי שבכדור (בצורת תריסרון) יש 20 קודקודים ו-30 מקצועות.

תלמיד א׳ לקח גם את הכדורגל ומתחיל לספור את הקודקודים והמקצועות.

המורה: יש גם לוח שנה בצורת תריסרון כאשר כל חודש רשום בפאה אחרת.

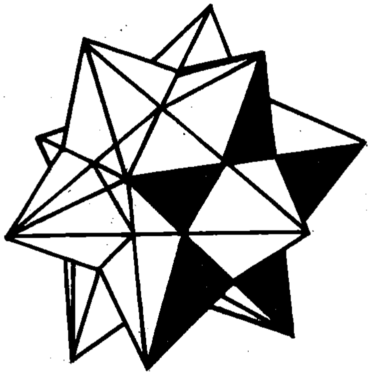
המורה מוציא מהמזוודה ומראה לתלמידים תמונה 21.

(בסוף המאמר נמצא לוח ליצירה לוח השנה לשנת 1990).



תמונה 21

תלמיד ד' המשיך בשעשועים של קיפולים, גזירה והדבקה יצר את הקערה וצרף אליה גם פירמידות (תמונה 22)
מתפרץ ואומר:



תמונה 22

תלמיד ד': תראו איזה גוף יפה הרכבתי מ-12 פירמידות.

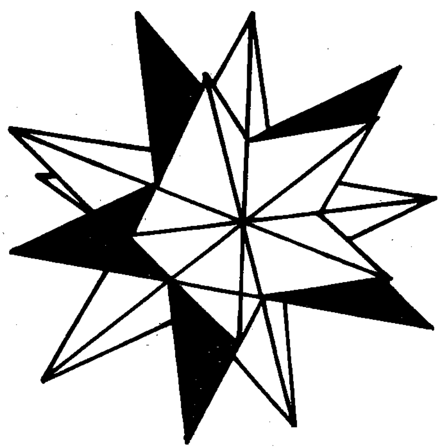
המורה מוציא גוף כזה מהמזוודה ושואל.

המורה: איך אתם מציעים לקרוא לגוף הזה?
תלמיד ב': אני יודע שלגוף הזה קוראים התרסרון המכוכב הקטן. יש בו 12 פיאות כל אחד הוא כוכב של חומשי.

נשמעות קריאות התפעלות מהכיתה והמורה רושם על הלוח את השם .

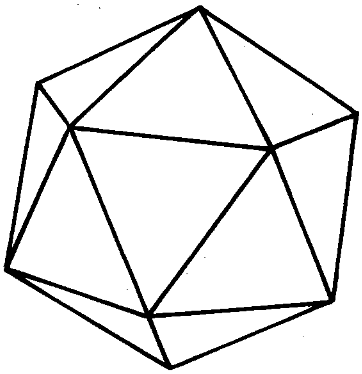
שובב הכיתה: אבל למה קוראים לו המכוכב <u>הקטן</u>?

המורה מוציא גוף נוסף מהמזוודה (תמונה 23) ואומר:



תמונה 23

המורה: קפלר (Kepler) היה הראשון שגילה את התריסרון המכוכב הקטן. הוא גם גילה כוכב נוסף שנקרא התריסרון המכוכב הגדול, גם בו יש 12 פיאות וכל אחד הוא כוכב של חומשי.



תמונה 24

המורה מראה לתלמידים את הגוף בתמונה 23 , מוציא מהמזוודה את הגוף בתמונה 24.

המורה: הגוף הזה נקרא עשירימון משוכלל.
אם נספור נגלה שיש לוו 20 פאות 12 קודקודים ו-30 מקצועות.

תלמיד א': גם לתריסרון היו 30 מקצועות.

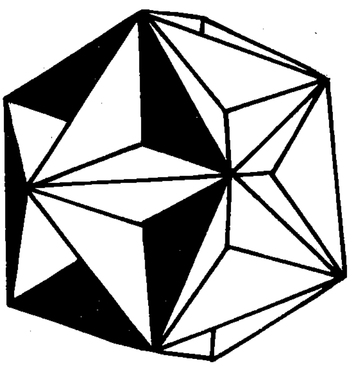
המורה: נכון, מספר הקודקודים והפאות בעשירימון הפוכים בדיוק לאלה של התריסרון. ז.א. מספר הקודקודים של האחד שווה למספר הפאות של השני ומספר המקצועות שווה.
לתופעה הזו אנו קוראים דואליות.

תלמיד ב': אני יכול להוסיף. בתריסרון נפגשים 3 מחומשים בכל קודקוד ובעשירימון 5 משולשים בכל קודקוד. אני חושב שגם זה דואליות.

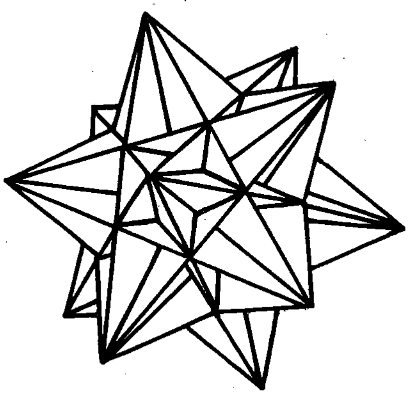
המורה: נכון. שני גופים אלה התריסרון והעשירימון הם שניים מתוך חמשת הגופים המשוכללים של אפלטון (Appolonius) . (כ-350 שנה לפני הספירה). הנוספים הם: הארבעון, התמניון והקוביה.

ראינו שני גופים של קפלר (1579-1630) התריסרון המכוכב הקטן והתריסרון המכוכב הגדול. פוינסו (Poinsot) (1777-1859) גילה שני גופים נוספים שהם דואלים לגופים של קפלר והם העשירימון הגדול והתריסרון הגדול.

המורה מוציא מהמזוודה גופים אלה (תמונה 25).



התריסרון הגדול
The Great Dodecahedron



העשירימון הגדול
The Great Icosahedron

תמונה 25

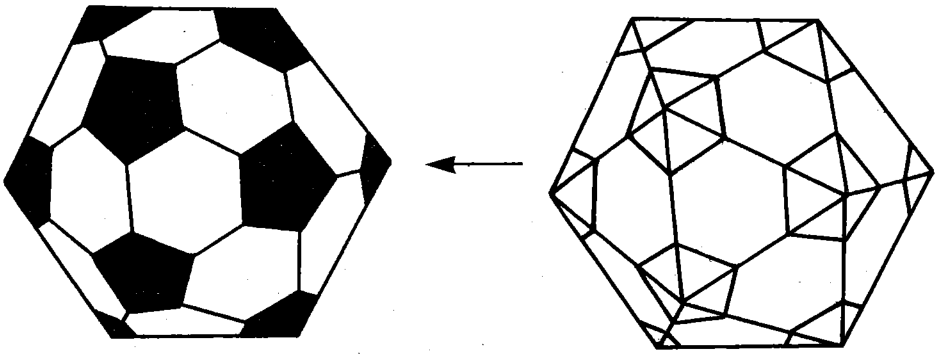
במשך כל אותו זמן תלמיד א' סופר את המקצועות והקודקודים שיש בכדורגל מתבלבל ומנסה שוב, חבריו מנסים לעזור לו ואינם מצליחים והוא כועס. המורה מבחין בכעסו.

תלמיד א': אני מנסה לספור וכל פעם אני מקבל תוצאה אחרת זה כבר מרגיז.

המורה: בואו נמצא שיטה קלה לספירה.

אם נחתוך כל קודקוד של העשירימון כדי ליצור מחומשים נקבל כדורגל.

המורה מראה לתלמידים שקף עם תמונה 26.



תמונה 26

תלמיד ב': אם אתה מציע לקטוע כל קודקוד של העשירימון הרי שכעת נקבל בכל קודקוד שני משושים ומחומש אחד. אם נחשב את הזויות נקבל

$$120^\circ + 120^\circ + 108^\circ = 348^\circ$$

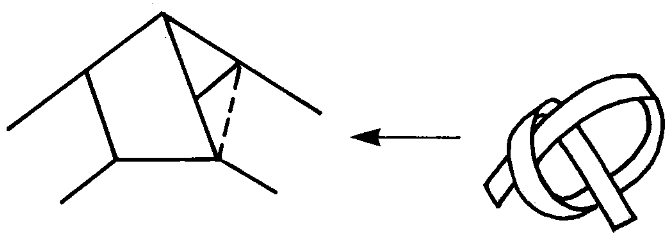
כלומר חסרות בכל קודקוד $360^\circ - 348^\circ = 12^\circ$ לכן אם נחלק $\frac{720^\circ}{12^\circ}$ נקבל 60

וזה מספר הקודקודים בכדורגל.

המורה מציע לתלמיד א' לבדוק את הדברים בבית ויחד עם זאת הוא משתעשע עם החוט והתפוח.

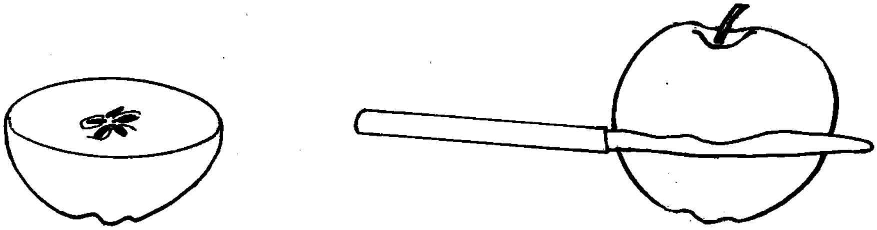
שובב הכיתה: מה הקשר בין כל מה שראינו לחוט ולתפוח?

המורה מחלק לתלמידים רצועות נייר ומבקש מהם ליצור קשר בעדינות. גם הוא עושה זאת בינתיים ורואים תמונה 27.



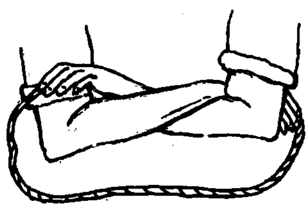
תמונה 27

המורה: עבדנו קשה הגיע הזמן לאכול.
(קריאות שמחה מהתלמידים המורה לוקח את התפוח, חותך אותו באמצע ע"י חתך אופקי ומראה לתלמידים (תמונה 28).



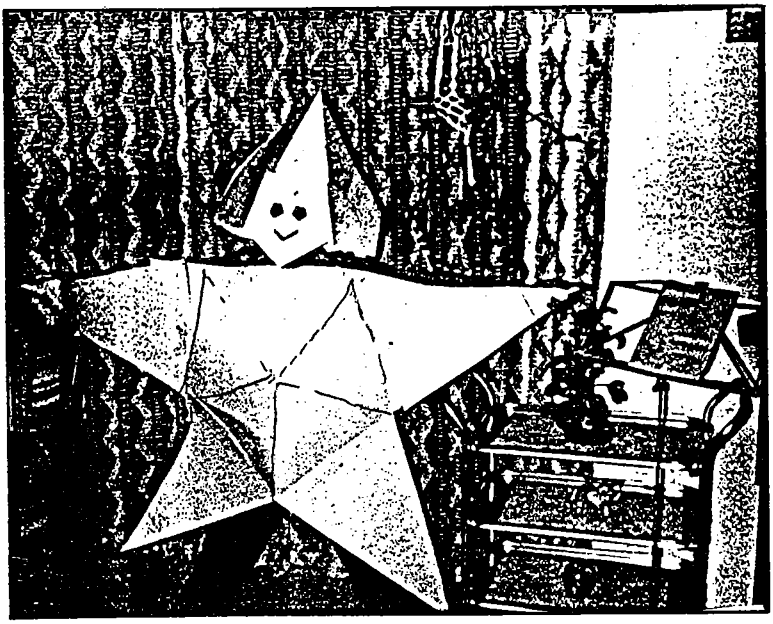
תמונה 28

שובב הכיתה: עכשיו אני רואה מה הקשר בין התפוח וחומשי הרי שהזרעים של התפוח מסודרים בצורה של חומשי.
התלמידים מתפעלים ותגובות כמו "אף פעם לא שמתי לב" ו"באמת חומשי בכל דבר".
תלמיד א': מה עם פתרון החידה?
שובב הכיתה: אני גיליתי את הפתרון. אם נשלב את הידיים ועם ידיים משולבות נתפוס את קצוות החוט, אח"כ בלי להרפות מהחוט, נשחרר את הידיים ישאר קשר.



תמונה 29

המורה: אני משאיר אתכם עם תמונה של חומשי אמיתי. בתי מחופשת כחומשי עבור מצעד פורים.



ביבליוגרפיה

1. ברגמיני דוד - מתמטיקה, הספריה המדעית של לייף, הוצאת מעריב.

2. צ׳יזיק מילכה - שאלת ϕ ויחס הזהב, לדעת, כרך י״ט, 4 עמ׳ 17-18.

3. קרמר עמנואל - מדריך לגיאומטריה, לכיתה ט׳ רמה א׳, 1989 מכון ויצמן.

4. מרי קופר, הגר זמר - נבנה גופים משוכללים, הגופים של אפלטון הוצאת תל, תשמ״א.

Beeson L.: Some History, Some Topology a Litle Proving - Mathematics Teaching 93, Dec. 1980.

Coxeter H.S.M.: Regular Polytopes MacMillan, 1948.

Critchlow K. - Islamic Patterns Thames and Hudson, 1976.

Cundy H.M. and Rolett A.P.: Mathematical Models Oxford University Press, 1960.

Euclid: Elements, Books XIII - XV.

French D.: Regular Pentagons and the Fibonacci Sequence, Mathematics in School, March 1989, pp. 40-41.

Garland T.H.: Fascinating Fibonaccis, Dale Seymour Pub., 1987.

Giffould G.: Painless Pentagons, Mathematics Teaching, 93, Dec. 1980, pp. 25-26.

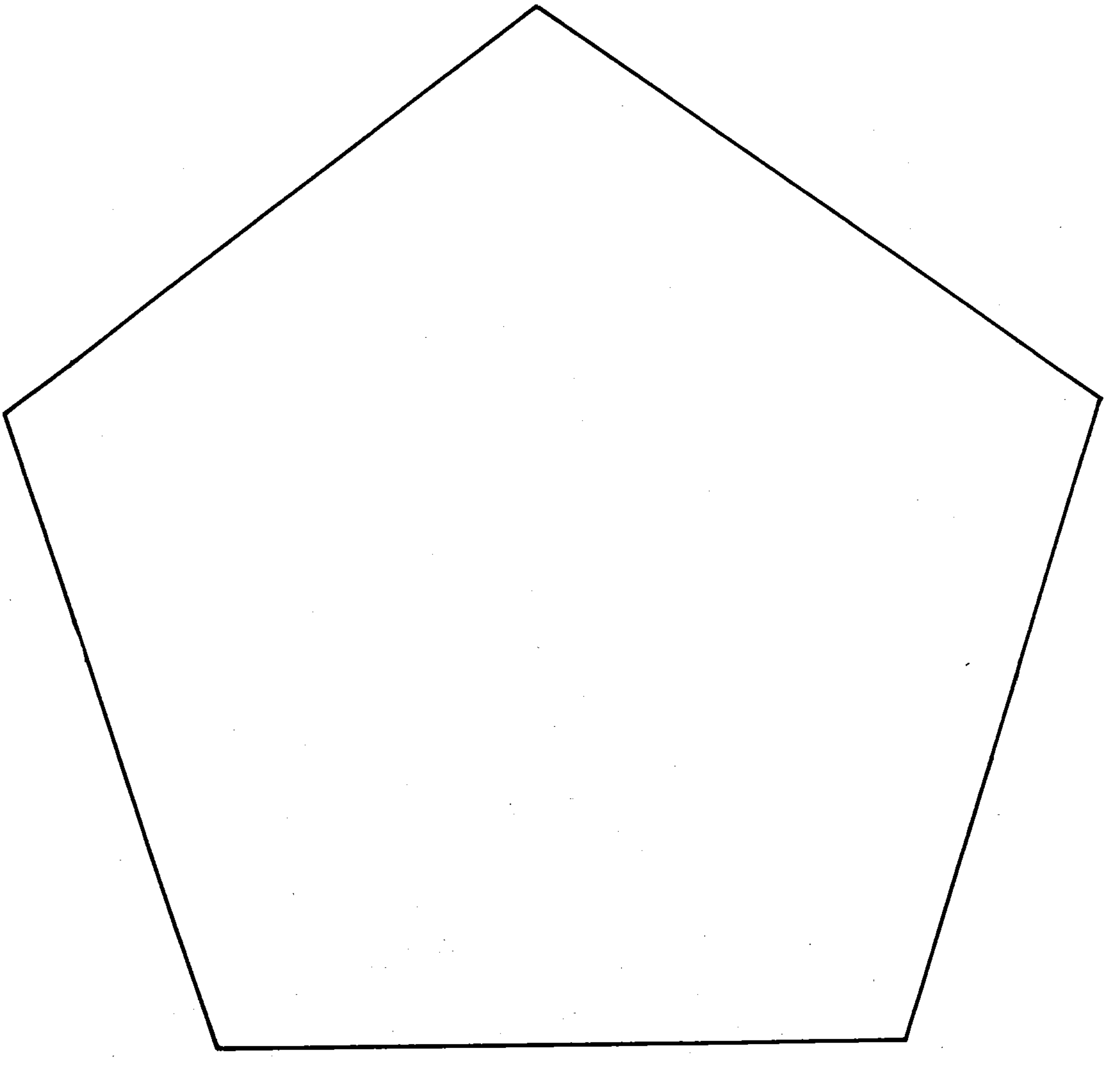
Huntley H.E.: Diving Proportion, Dover, 1970.

Steinhaus H.: Mathematical Snapshots, Oxford University Press, 1960.

Wenninger M. J.: Polyhedron Models, Oxford University Press, 1960.

הבעת תודה:

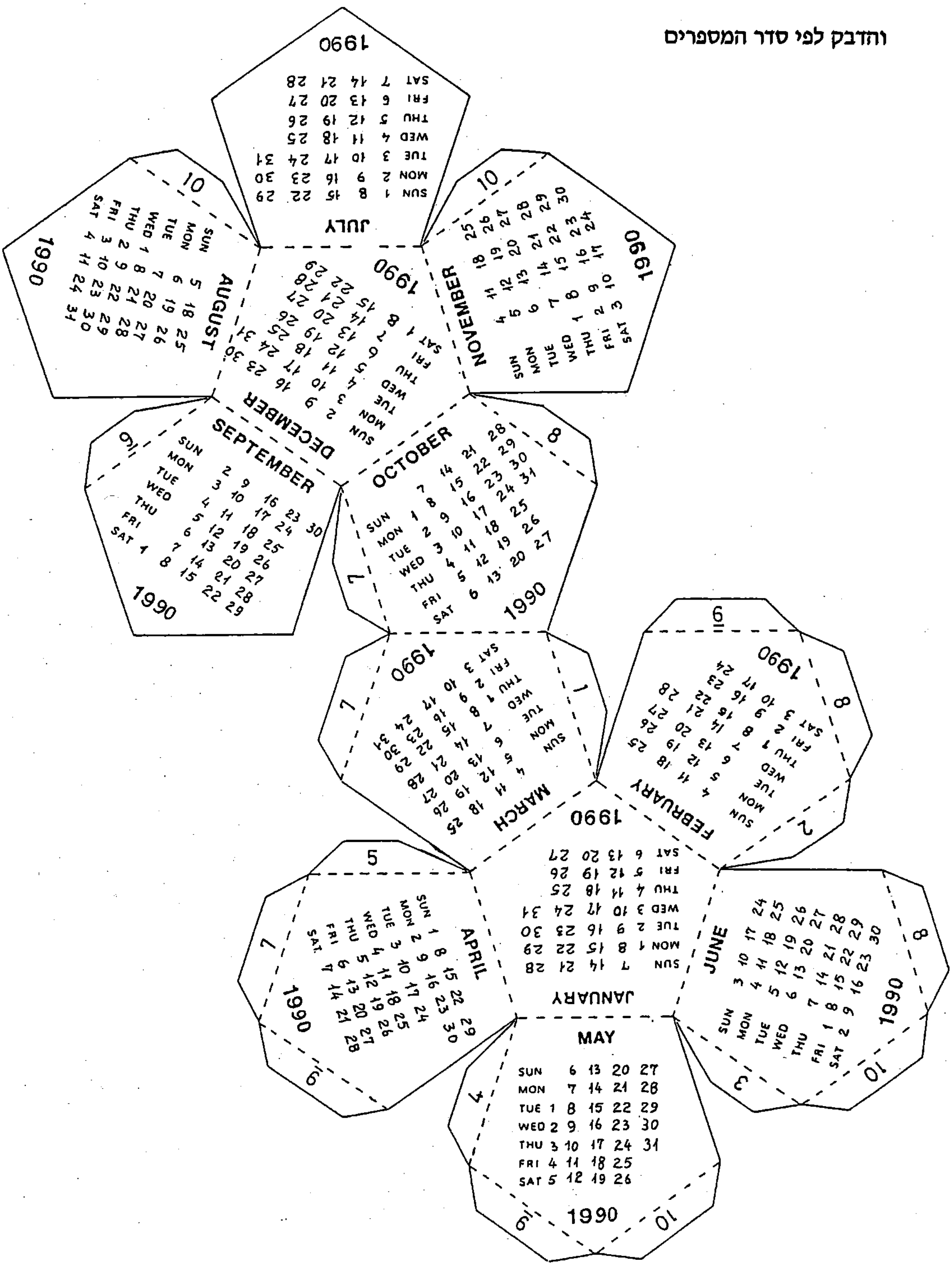
המחבר מודה לחנה תלמי שעודדה אותי לכתוב את החומר ולרחל בוהדנה על עזרתה בהמחזת ״חומשי״.

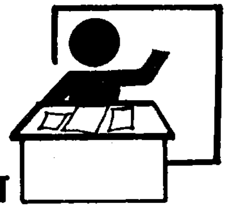


Dodecalendar
1990

גזור
קפל לאורך הקו המרוסק

והדבק לפי סדר המספרים





דף לתלמיד

דף לתלמיד

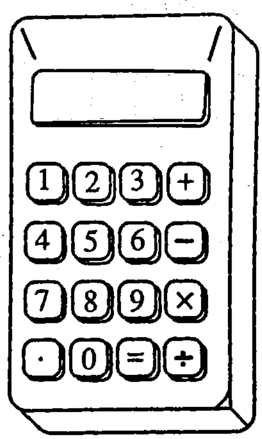
מאחורי המצג

דף העבודה המופיע כאן ניתן לשילוב בכל כיתה שבה התלמידים שמכירים את ההסכם בדבר כתיבת מספרים גדולים, יודעים לקרוא מספרים כאלה על מצג המחשבון. לצורך בדיקת הענין ניתן לתת תרגיל שתוצאתו לא עולה על מצג המחשבון בכתיב רגיל, למשל:

$$12345678 \cdot 3330 = 4.1 \cdot 10^9$$

בעזרת תרגיל כזה ניתן לבדוק אם התלמידים מבינים את הרשום על המצג ואת פרושו.

שים לב! תלמידים להם מחשבון עם מספר רב יותר של ספרות יחשבו בתרגיל 1 את המכפלה 123456^2 (במקום 12345^2).



מספרים גדולים II

<u>(מצג וזכרון, דיוק ועיגול)</u>

<u>תרגיל 1</u>

א. בצע את סדרת הלחיצות. העתק את התוצאה שהתקבלה על המצג במשבצת שמתחת לסימן השוויון הראשון, אל המשבצת החמישית בסדרה והמשך.
(אל תשתמש בזכרון של המחשבון).

12345	x	12345	=	-		

ב. מה מציין המספר שהתקבל לאחר הלחיצה האחרונה?

ג. מה מסקנתך?

ד. מה התוצאה המדויקת של 12345^2

ה. חשב בדיוק את 13579^2

<u>תרגיל 2</u>

א. נתון: $q = 470832 \;,\; p = 665857$
חשב במחשבון את $p^2 - 2q^2$

ב. בדוק אם התשובה שקיבלת הגיונית.

ג. בצע את סדרת הלחיצות הבאה, כדי למצוא את p^2 ביתר דיוק.

665857	x	665857	=	-		=

רשום את p^2 <u>ביתר דיוק</u>: $p^2 =$

ד. חשב את $2q^2$, באופן דומה לדרך בה חישבת את p^2 ורשום תשובה מדויקת ככל שניתן בעזרת המחשבון שברשותך.

$$2q^2 =$$

ה. מה המסקנה לגבי ההפרש $p^2 - 2q^2$?

ו. חשב את ההפרש במדויק.

ז. בצענו את התרגיל הקודם במחשב מסוג אחר וקבלנו ב-אי כתוצאה: -40
בסעיף ג' קבלנו:

665857	x	665857	=	-	4.4337	Exp	11	=
			4.4337 11					-4455600

בסעיף ד' קבלנו:

665857	x	665857	=	-	4.4337	Exp	11	=
			4.4337 11					-44555600

הסבר כיצד התקבלה במחשבון זה התוצאה:

$$p^2 - 2q^2 = -40$$

פתרונות

תרגיל 1

א. התוצאה תלויה במחשבון שבידי התלמיד.

12345	x	12345	=	-	1.52399	Exp	8	=
			1.52399 08		$1.52399\cdot10^{8}$			25

ב. העובדה שמתקבלת תוצאה שונה, מצביעה על כך שהמחשבון זוכר יותר ממה שיכול להופיע על המצג, במקרה זה 25. $12345^2 = 1.52399\cdot10^8 + 25 = 152{,}399{,}025$

באופן דומה במחשבון מסוג: Texas Instrument SR40 התקבל:

12345	x	12345	=	-	1.524	EE	8	=
			1.524 08		$1.524\cdot10^{8}$			-9.75 02

כלומר מחשבון זה עיגל למעלה והתוצאה כמו ב- Casio:

$$152,400{,}000 - 975 = 152,399,025$$

ה. באופן דומה: $13579^2 = 1.84389\cdot10^8 + 241 = 184{,}389{,}241$

תרגיל 2

א,ב. התוצאה המתקבלת ב-Casio fx 82 היא 0. וב- Texas Instrument SR 40 התוצאה המתקבלת היא: 40-.
בגלל חוסר מיקום בזכרון המחשבים עיגלו הספרות האחרונות ומכאן התוצאות.
התלמידים יכולים להגיע למסקנה שהתשובות אינן הגיוניות, מאחר וספרת האחדות של p^2 היא 9 וספרת האחדות של $2q^2$ היא 8.
לכן לא יתכן ש-$p^2 = 2q^2$ וההפרש איננו אפס.

בדומה לתרגיל הקודם $p^2 = 4.43365\cdot10^{11} + 544400$

$2q^2 = 4.43365\cdot10^{11} + 544400$

לכן התקבל, במחשבון זה, הפרש אפס.
מכאן מסיקים שהשגיאה בתוצאה נובעת מעיגול שתי הספרות האחרונות בלבד.
אם נחשב בנפרד את שתי הספרות האלה נקבל $p^2 = 49$ ו- $2q^2 = 48$ לכן התוצאה המדויקת היא: $p^2 - 2q^2 = 1$.

האם כל הברבורים הם לבנים?

מאת: איריס סירי
קרית חינוך יד-אליהו*

במשך מאות שנים היו בני האדם בטוחים שכל הברבורים הם לבנים , וזאת על סמך התנסותם: הם פגשו ברבורים לבנים בלבד, ולכן הסיקו בדרך אינדוקטיבית שכולם לבנים. עם גילויה של יבשת אוסטרליה, נמצאו ברבורים שחורים, והנסיון החדש הפריך את ההשערה הקודמת. שאלת ההצדקה בקביעת חוק כללי על סמך מקרים בודדים , היא אחת מן הבעיות היסודיות בחשיבה האינדוקטיבית. בעיה זו נוסחה לראשונה על ידי David Hume . הוא שאל: על סמך מה אנו מכלילים את הנסיון? (האנציקלופדיה העברית).

תקפותה של אינדוקציה זו מוטלת בספק , שהרי אף אם נאספו דוגמאות רבות לחיוב כלומר אם נמצאו ברבורים לבנים רבים - שמאפשרות את קביעת החוק , עלולה להמצא מחר דוגמא נגדית - למשל ברבור שחור - הסותרת אותה. למרות חוסר יכולתה של האינדוקציה לקבוע ולהוכיח חוקים באופן מוחלט, ערכה רב, כמובילה להעלאת השערות, וככלי אינטואיטיבי בפתרון בעיות, ואכן היא נפוצה ככלי עזר במדעי הטבע.

אינדוקציה מתמטית (שנקראת גם "אינדוקציה שלמה") שונה מזו שתוארה לעיל. באינדוקציה מתמטית מניחים תחילה את הטענה על מספר מסויים של מקרים ועל סמך הנחה זו מוכיחים כי הטענה מתקיימת גם עבור המקרה העוקב, ולכן זו היא בעצם דדוקציה. בתהליך זה מתקיימת דרישה לקשר הלוגי שבין הנחה למסקנה. ניתן להראות שקיימת תלות בין מקרה מסויים לבין מקרה ש"לפניו". ללא יחס זה של תלות בין המקרים השונים, ההכללה בדרך אינדוקטיבית תיחשב כהשערה בלבד הדורשת חקירה ואימות נוספים, מאחר במתמטיקה דוגמאות פרטיות אינן מהוות הוכחה כללית. אך יש לציין כי ידועים מקרים בהם אף מתמטיקאים דגולים השתמשו בחקירתם בשיקולי אינדוקציה (לא שלמה).

---

* איריס סירי היא מורה מילגאית במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן.

במאמר זה נציג מספר דוגמאות המיועדות לתלמידים, דרכן ניתן לפתח פעילות מתמטית עשירה הקשורה לנושא זה.

הדוגמא הראשונה ידועה לנו מההסטוריה של המתמטיקה. הביטוי $x^2 + x + 41$ הוצע במאה ה-17 כנוסחא ליצירת מספרים ראשוניים.
אם נבקש מהתלמידים בכיתה לבדוק שאכן הנוסחא מייצרת מספרים ראשוניים , קרוב לוודאי כי לאחר מספר בדיקות (אולי באמצעות מחשבון) הם יתפתו להסיק כי הנוסחא אכן מייצרת רק מספרים ראשוניים. יתכן כי תלמיד חרוץ יחשב את ערך הביטוי עבור הרבה ערכים ניתקל בעובדה ה"דרמטית" כי הטענה מופרכת עבור $x = 41$. גם ללא חישוב היה אפשר להגיע לתוצאה זאת: הרי 41 הוא גורם משותף , ואם כך , הפולינום ניתן לפירוק לגורמים באופן הבא.

נציב $x = 41$ ונקבל

$$41^2 + 41 + 41 =$$
$$= 41(41 + 1 + 1) =$$
$$= 41 \cdot 43$$

אם כן, פולינום זה , נותן לנו רשימה ארוכה של מספרים ראשוניים , אך אינו יוצר <u>תמיד</u> מספר ראשוני.

התבוננות נוספת מראה כי גם במקרה שבו $x = 40$ ההשערה מופרכת:

נציב $x = 40$ ונקבל

$$40^2 + 40 + 41 =$$
$$= 40(40 + 1) + 41 =$$
$$= 40 \cdot 41 + 41$$
$$= 41 \cdot (40 + 1) =$$
$$= 41 \cdot 41$$

במקרה זה, אסטרטגיה אלגברית סייעה לנו לראות שההנחה האינדוקטיבית תופרך בשלב מסויים. רצוי להצביע בפני תלמידים על שימוש מעין זה של איסטרטגיות אלגבריות, העדיפות לפעמים על בדיקות חישוביות. ואמנם ניתן למצוא דוגמאות נוספות. נביא בזאת דוגמא מעניינת מן הפחות ידועות.

נתבונן בביטוי : $\sqrt{66n^2+1}$ כאשר n מספר שלם.

אל יחשוב הקורא שנוסחה זו נשלפה כשפן מכובע. נתקלו בה תוך כדי עיסוק בבעיה מתמטית (ראה, Stark, 1970).

בהבאת ביטוי זה בפני כיתה, התלמידים יכולים להיעזר במחשבון להצבת מספרים, ואלו התוצאות שיתקבלו:

עבור $n = 1$: $\sqrt{66 \cdot 1^2 + 1} = 8.1853$

עבור $n = 2$: $\sqrt{66 \cdot 2^2 + 1} = 16.2788$

עבור $n = 3$: $\sqrt{66 \cdot 3^2 + 1} = 24.3926$

עבור $n = 4$: $\sqrt{66 \cdot 4^2 + 1} = 32.5115$

כבר בנסיון הראשון , התלמידים יראו כי מתקבל מספר שאינו "עגול". ואולי תעלה השאלה: האם יתקבל אי פעם מספר שלם? בדיקת מספר מקרים נוספים תראה, כי שוב מתקבלים מספרים שאינם שלמים. תלמיד חרוץ ועקשן, שלא ירצה "להכנע" בקלות, ימשיך לבדוק ויתקל במקרה של $n = 8$. וכאן תהיה הפתעה ! הפעם מתקבל מספר שלם.

כאן יכול להתערב המורה : "רגע, אולי ניתן להפריך את ההכללה בלי עבודה מייגעת במחשב כיס? "

נתבונן בביטוי שלנו ב"עיניים מתמטיות":

האפשרות לקבל מספר שלם כתוצאה מהצבה בנוסחה תיתכן, בין היתר, אם הביטוי שמופיע מתחת לשורש, $66n^2 + 1$ הוא ריבוע של מספר, למשל ריבוע של סכום או הפרש, כלומר:

$$x = 66n^2 + 1 = (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

נשווה: $b = 1$

ולכן:

$$66n^2 + 1 = a^2 \pm 2a + 1$$

$$66n^2 = a^2 \pm 2a$$

$$66n^2 = (a \pm 2)a$$

ננסה להשוות את הגורמים השונים ונחפש מספרים <u>טבעיים</u>:

נשווה $a = 66$

ואז $n^2 = a \pm 2$

ונקבל: $n^2 = 64$ או $n^2 = 68$

$n = 8$

נשווה $a \pm 2 = 66$

ואז $n^2 = a$

ונקבל: $n^2 = 68$ או $n^2 = 64$

$n = 8$

ואמנם עבור $n = 8$, תוצאת ההצבה היא - 65. אם כך, המסקנה שנטינו להסיק באינדוקציה כי אף פעם לא נקבל מספר שלם נופלת.

יש מקרים, בהם לא קל להראות שמסקנת האינדוקציה מופרכת, לא בכלים חישוביים ולא בכלים אלגבריים. דוגמא לכך היא ביטוי דומה $\sqrt{1141n^2 + 1}$

הפעם נזדקק לנקודת מוצא אחרת ל"טיפול השורש". העבודה תהיה רבה אך יהיה שכר לעמלנו.

נסביר תחילה מהו שבר משולב.

- שבר משולב אינסופי הוא למשל שבר מהצורה:

$$\alpha = a_o + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{}}}}$$

כאשר a_o , a_1 , a_2 מספרים שלמים .

לנוחות הסימון נוהגים כתוב: $\alpha = <a_o , a_1 , a_2 \dots >$

בדומה לשברים עשרוניים אינסופיים מחזוריים , קיימים שברים משולבים אינסופיים מחזוריים. וזאת כאשר ממקום מסויים , קיימת סידרה של a_i - ים החוזרת על עצמה. בעזרת "שבר משולב אינסופי מחזורי" ניתן להגיע לקירוב רציונאלי לשורש ריבועי אי-רציונלי.

לדוגמא: $\sqrt{10}$ הוא מספר אי-רציונאלי ולכן לא ניתן לכתיבה כשבר פשוט מצומצם. אך ניתן לכותבו כשבר משולב באופן הבא:

$$\sqrt{10} = 3 + x$$
$$10 = (3 + x)^2 = 9 + 6x + x^2$$
$$6x + x^2 = 1$$
$$x(6 + x) = 1$$
$$x = \frac{1}{6 + x}$$

תחבולה נציב ב- x שבמכנה את x ש"מצאנו" ונקבל

$$x = \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + x}}$$

לאחר הצבה חוזרת ונשנית נקבל:

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{}}}}$$

קיבלנו שבר משולב אינסופי $\sqrt{10} = <3 , 6 , 6 , 6 \dots > = < 3 , \bar{6} >$

נחזור לביטוי שלנו: $x = \sqrt{1141n^2 + 1}$. ביטוי זה הינו מקרה פרטי של $x^2 - mn^2 = 1$ כאשר: $m = 1141$. משוואה זאת שייכת למשפחה של משוואות "Fermat-Pell". ניתן להוכיח כי כאשר m הוא מספר חיובי שלם, שאין לו שורש שלם, למשוואה זו אינסוף פתרונות שלמים (Stark, 1970).

אם כן , מדוע במקרים שנבדקו התקבלו ערכים לא שלמים ל- x ? מדוע לא נמצא אף פתרון שלם?

העובדה כי לא נמצא פתרון שלם, בדרך של ניסוי, נובעת מכך שלעיתים הפתרונות הם מספרים מאוד גדולים שאליהם לא הגענו, אך ניתן ללמוד עליהם מספר דברים מעניינים.

למשל, גודלם של הפתרונות תלוי באורך המחזור בפיתוח ל"שבר משולב" של $\sqrt{m}$, ככל שאורך המחזור גדול יותר, הפתרונות יהיו מספרים גדולים יותר.

אחד המספרים שאורך מחזורו בפיתוח ל"שבר משולב" גדול במיוחד הוא המספר $\sqrt{1141}$, המכיל 58 מספרים.

זו הסיבה , שהפתרון הראשון למשוואה $x^2 - 1141n^2 = 1$ הינו מספר גדול מאוד , שלא נגיע אליו ע"י בדיקת מקרים בודדים.

מצאו, כי הפתרון הראשון למשוואה $x = \sqrt{1141n^2 + 1}$ מופיע במקרה שבו

$$n = 30 , 693 , 385 , 322 , 765 , 657 , 197 , 397 , 208$$

במקרה זה, התוצאה השלמה המתקבלת ל x היא :

$$x = 1 , 036 , 782 , 394 , 157 , 223 , 963 , 237 , 125 , 215$$

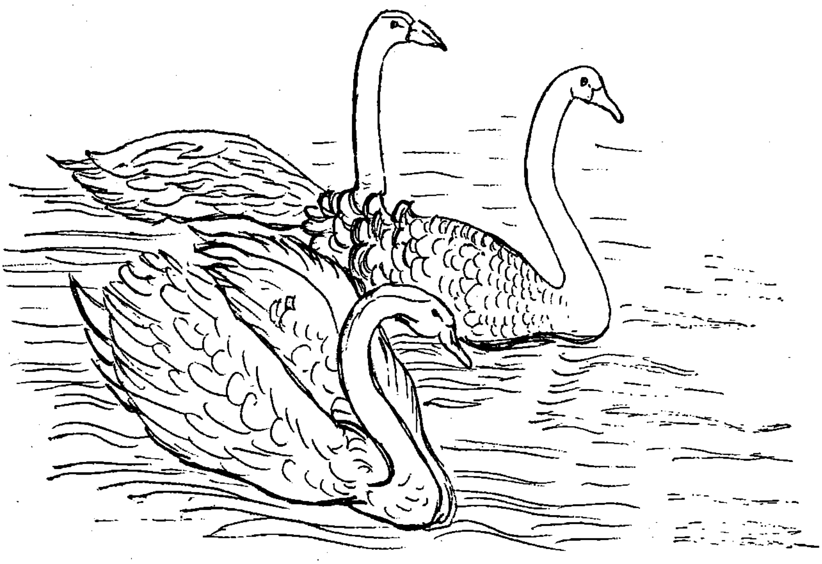
<u>מסקנה</u> : גם מספר רב מאוד של דוגמאות , עדיין אינו מאפשר להכליל לכל המקרים. אך גם הפעם נעזרנו בכלים מתמטיים כדי להפריך הכללה לא נכונה אשר היינו יכולים להשתכנע כי היא נכונה.

<u>סוף דבר</u>

הבאנו מספר דוגמאות מעניינות בהן קל להתפתות ולבצע "אינדוקציה לא שלמה", כלומר הכללה, על סמך מקרים פרטיים.
בכיתות אנו מעמידים בפני תלמידים דוגמאות נגדיות, ובכך אנו מבקשים להראות איך ההכללות ה"פזיזות" מופרכות.
במאמר זה, בחרנו בדוגמאות בהן ההתבוננות המתמטית עוזרת לנו. דוגמאות אלו מראות שבנוסף להצגת דוגמאות נגדיות, ניתן לדחות את ההכללות בעזרת כלים מתמטיים שאף עוזרים לנבא <u>מתי</u> ההכללה "נשברת".

מקורות

האנציקלופדיה העברית , כרך ב , ערך "אינדוקציה" עמ' 899-900.
Stark, H.M. An Introduction to Number Theory
Markham Chicago, 1970, pp. 239-245



משחקי אלגברה

מאת: אלכס פרידלנדר ונעמי תעיזי

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

<u>מ ב ו א</u>

אחד הקשיים בראשית הלימוד של נושא חדש הוא הבנת מושגי היסוד שלו. כך תפיסת המושגים תבנית-המספר ותבנית הפסוק מהווה מכשול לתלמידים בעלי יכולת מתמטית נמוכה. זאת למרות שניתן ל״אלף״ תלמידים אלו לעבוד על תרגילים אלגבריים. אלא ש״עבודה״ זו ״עוברת״ עליהם מבלי לעורר תחושה או הבנה לגבי משמעות הפעולות אותן הם מבצעים.

הנסיון הראה שהסברים ושיחות בנושא מופשט זה אינם מתאימים. בנוסף, השליטה לכאורה שמראים תלמידים אלו בטכניקה מתנפצת כאשר המטלות נעשות מורכבות יותר. למשל, תלמידים אלו עשויים להכשל בתאור <u>קבוצת</u> התוצאות המתקבלות מהצבת מספרים נתונים למרות שליטתם בהצבת מספר <u>בודד</u>. כמו כן, אף שיפתרו בקלות יחסית <u>משוואות</u>, יכשלו בפתרון <u>אי שוויונים</u>.

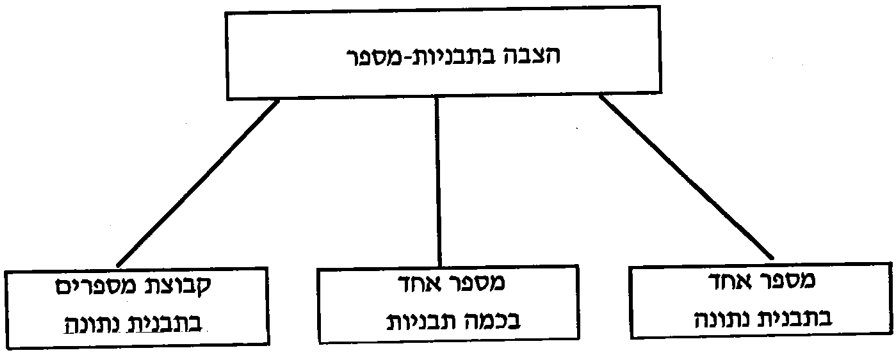
כחלק מהמענה לבעיה זו, פיתחה המחלקה להוראת המדעים של מכון ויצמן מגוון של משחקים הקשורים לשלבים הראשונים של לימוד האלגברה.

משחקים אלה משולבים בהוראת הנושא ומהווים חלק אינטגרלי מתכנית הלימודים. אחד היתרונות שבשימוש במשחקים הוא בפוטנציאל שלהם ליצירת סיטואציות ״קונקרטיות, חיצוניות״. כך למשל, במקום לשאול את השאלה המופשטת ״האם הצבתו של כל מספר - חיובי או שלילי - בתבנית 30-x תתן תוצאה חיובית?״, על התלמיד להתלבט בין בחירת כרטיס מתוך ״קופה״ של קלפים מוסתרים המכילה מספרים חיוביים או מתוך ״קופה״ של מספרים שליליים. העובדה שהקלפים מונחים לפניו באופן פיזי היא מוחשית, מאפשרת בדיקה מיידית של השערתו ומספקת היזון חוזר מתאים.

המשחקים אשר יוצגו כאן ניתנים לשילוב נוח בהוראת שני נושאים חשובים: תבניות מספר ותבניות פסוק.

משחקי תבנית-מספר

שלושת המשחקים המובאים כאן קשורים לנושא של הצבה בתבניות מספר. המשחקים מעשירים, לדעתנו, נושא טכני שאינו מלהיב ומעניקים לו מימד חדש של ענין והפעלת שיקולים מתמטיים. הדיאגרמה הבאה מתארת את סוגי הפעילויות המבוצעות על-ידי התלמיד בעת השתתפותו במשחקים אלה.

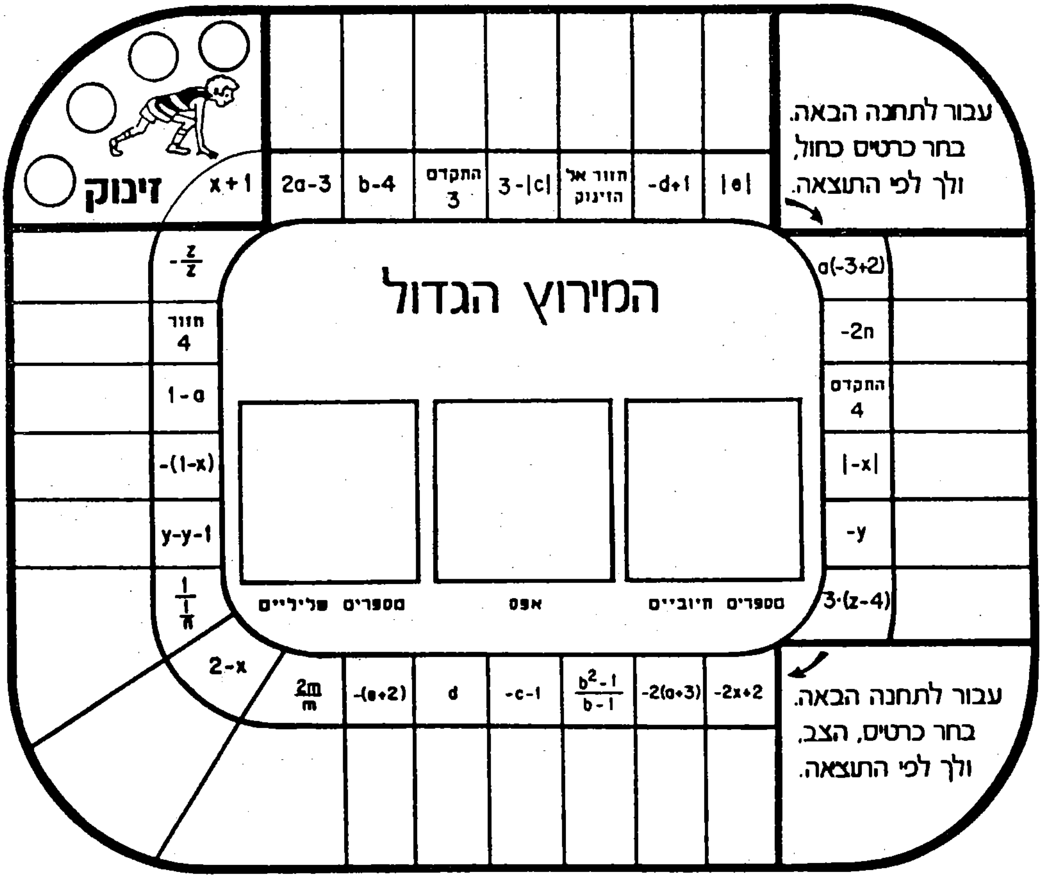


יתר על כן, במהלך המשחקים על התלמיד לבצע גם פעילות "הפוכה", כלומר מציאת המספרים שהצבתם תיתן תוצאה רצויה. שילוב כיוון זה חשוב במיוחד בשל היותו נדיר יותר ומובן פחות לתלמיד. במשחק נוצרת סיטואציה תומכת טבעית לכך בשל קלות הבדיקה הישירה של ההצבה לאחר בחירת המספר.

1. <u>המירוץ הגדול</u> (2-4 משתתפים)

זהו אחד המשחקים המוצלחים ביותר שפותחו אצלנו (ראה תאור מפורט בפרידלנדר ותעיזי, 1979).

המשחק מכיל: לוח (תמונה 1), 4 רצים וכרטיסים עליהם מספרים חיוביים, מספרים שליליים ואפס.



תמונה 1

אופן המשחק:

הכרטיסים מעורבבים ומונחים במקום המתאים בלוח.

כל משתתף בתורו לוקח כרטיס מראש ערימה, שלדעתו תקדם אותו בצורה הטובה ביותר בהתאם למקום בו עומד הרץ שלו.

את המספר הרשום על הכרטיס הוא מציב בתבנית המספר הרשומה במקום בו עומד הרץ שלו.

אם התוצאה חיובית - הוא מתקדם מספר צעדים מתאים קדימה. אם התוצאה שלילית - עליו לחזור לאחור מספר צעדים מתאים, ואם התוצאה אפס, אינו זז.

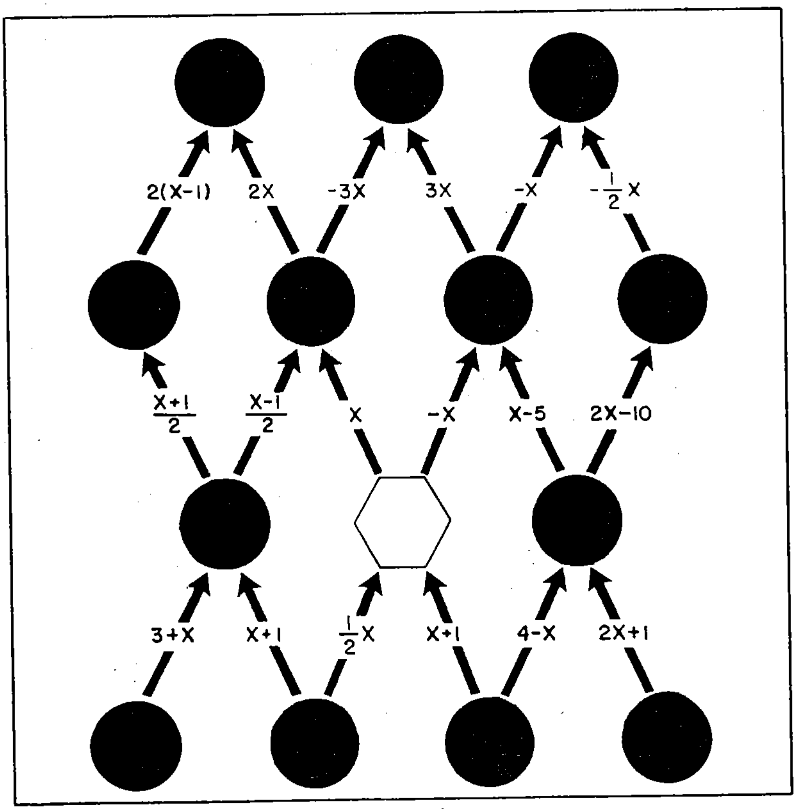
המנצח במשחק המשתתף המשלים ראשון שני סיבובים על הלוח.

ניתן לשנות את התבניות הרשומות על לוח המשחק, בהתאם לרמת הכיתה (אילני ותעיזי, 1981).

2. מלא את הרשת (2 משתתפים)

המשחק עוסק בקשר בין המספר המוצב והתוצאה.

המשחק מכיל: לוח (תמונה 2), 4 משושים ומספר רב של עיגולים עליהם רשומים מספרים.



תמונה 2

אופן המשחק:

מניחים אחד מהמשושים על הלוח במקום המתאים. מחלקים חמישה עיגולים לכל משתתף, יתר העיגולים מונחים הפוכים ומשמשים קופה.

כל משתתף בתורו צריך להניח עיגול אחד בקצה חץ (בראשו או בזנבו) בתנאי שבקצה האחר מונח מספר מתאים (המספר בראש החץ הוא תוצאת ההצבה של המספר בזנב החץ בתבנית המספר שעל החץ). אם אין לו עיגול הוא לוקח מהקופה.

מנצח במשחק: המשתתף הראשון שנשאר ללא עיגולים.

3. <u>מלחמה</u> (2 משתתפים)

<u>גירסה ראשונה</u>:

לפני כל משתתף מונחים, עם הפנים כלפי מטה, מספר שווה של קלפים, עליהם רשומות תבניות מספר.

בין שני המשתתפים מונחת ערימת קלפים הפוכים עליהם רשומים מספרים. בכל תור מגלה כל אחד מהמשתתפים את הקלף העליון בערימה שלו, ובנוסף מגלים את המספר שעל הקלף העליון בערימה האמצעית. בעל התבנית, שהצבת המספר בה נותנת את התוצאה הגדולה יותר זוכה בשלושת הקלפים.

מנצח במשחק - המשתתף שצבר את מספר הקלפים הגדול יותר.

<u>גירסה שניה</u>:

כל הקלפים עם תבניות המספר (ראה גירסה א') מונחים כשפניהם כלפי מטה. על קוביה רשומים המספרים: 3, 2, 1, -1, -2, -3.

כל משתתף מקבל שני קלפים מתוכם עליו להניח אחד. המשתתף, שתוצאת ההצבה של המספר שעל הקוביה בתבנית המספר שעליו גבוהה יותר - זוכה בשלושת הקלפים.

גירסה שלישית:

גירסה זו דומה לגירסה ראשונה, רק שהפעם לכל אחד מהמשתתפים ערימה של מספרים כשבכל תור מגלים תחילה קלף מערימה אחת של תבניות מספר.

תצפיות רבות בכיתות הראו, כי המשחקים מעוררים ענין והנאה ואף מהווים תמריץ להפעלת חשיבה מתמטית ברמה גבוהה.

כל המשחקים מטפלים בנושא ברמה הפשוטה של הצבת מספר אחד בתבנית נתונה. במקרים אלה, המשחקים מהווים אמצעי המחשה של פעולת ההצבה: כך למשל, ראינו כי בגירסה א׳ של משחק ה״מלחמה״, תלמידים חלשים יותר נוטים להניח באופן ״ממשי״ את הקוביה המציינת את המספר המוצב במקום בו רשום המשתנה על קלף התבנית. בדרך זו אנו סבורים, כי הפנמת המשמעות של פעולת ההצבה היא עמוקה יותר.

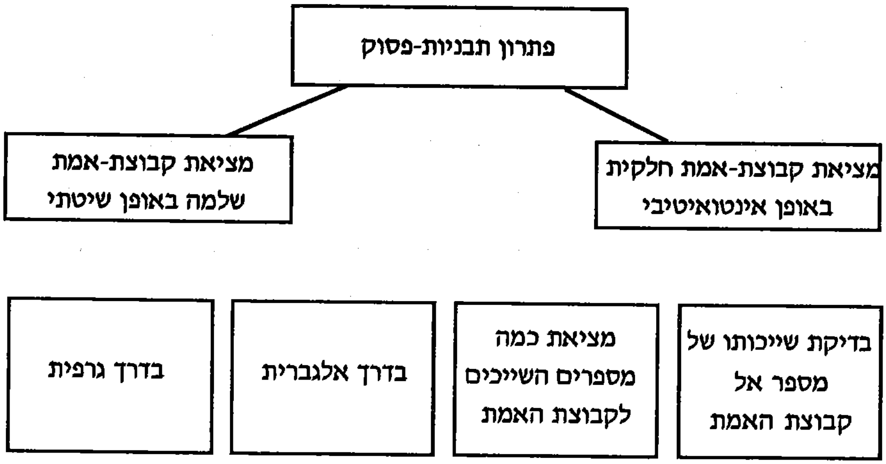
במשחק **״המרוץ הגדול״** ובגירסה ג׳ של משחק ה**״מלחמה״** על התלמיד לבחור את המספר המוצב מתוך קבוצה של מספרים. מתוך צפייה בתלמידים משחקים בהם, הגענו למסקנה כי במהלך המשחק התלמידים עושים שימוש הולך וגובר באומדן ובחיזוי תוצאות מראש ומתחילים למעט בחישובים. למשל, ב״מרוץ הגדול״ ראינו תלמידים אשר החלטתם, לגבי סוג המספר המוצב (חיובי, שלילי או אפס) היתה תחילה אקראית ובמשך הזמן הסתמכו על חוקיות והכללות (לעתים לא נכונות), אותן גילו במהלך המשחק. כך למשל, ראינו תלמידים שסברו תחילה כי עליהם לבחור מספר שלילי כדי שתבנית בה מופיע סימן המינוס (כמו למשל Z-4) תיתן תוצאת הצבה חיובית. ברוב המקרים שנצפו, התלמידים הצליחו לשכלל עם הזמן את איסטרטגיות המשחק שלהם ולתקן מסקנות מוטעות. תלמיד אחד אף העדיף לבחור במודע מערימת המספרים החיוביים שלא התאימה לאותו מהלך, משום שלא שלט בנושא החשבון במספרים שליליים. זהו מקרה מעניין בו חוסר ידע טכני הפריע להפעלת המהלך הנכון.

בעזרת המשחקים האלה הגיעו רוב התלמידים שנצפו למסקנות חשובות לגבי השפעת סימן המינוס המופיע לפני המשתנה, לגבי השפעתו של מקדם שגודלו בין 0 ל-1 ואף הסיקו מסקנות "פרטיות" מקוריות. הערות כמו "בתבנית b^2 עדיף להציב 3- ולא 1 כדי לקבל מספר גדול". או "חבל שאין לי אפס [כדי לקבל תוצאה חיובית בעזרת התבנית $3 - b^2$]", מעידות על חשיבה מתמטית ברמה גבוהה ועל הפעלה נכונה של איסטרטגיות.

התהליך "ההפוך" בפעולת ההצבה מטופל בעיקר במשחק **"מלא את הרשת"**. בצעדיהם הראשונים הולכים רוב המשתתפים בכיוון הטבעי של הצבת מספרים נתונים; אבל, בשלבים המתקדמים יותר נוצרים מצבים הפוכים בהם נתונה תוצאת ההצבה וצריך למצוא את המספר המוצב. תלמידים נוטים לבלבל את שני הכיוונים, אך השחקן היריב יכול לבדוק בקלות את נכונות ההחלטה על-ידי הצבה ישירה ולתקן טעויות. כך אנו רואים כי המשחק משמש מסגרת טבעית בה טעויות נפוצות מוצאות מן הכוח אל הפועל והן אף מתוקנות בידי התלמידים עצמם ולא על-ידי המורה.

<u>משחקי תבנית-פסוק</u>

הנושא של מציאת קבוצות אמת של תבניות-פסוק נלמד במספר שלבים:



שני המשחקים הראשונים שיוצגו בסעיף זה עוסקים בשיטות אינטואיטיביות למציאת פתרונות חלקיים (נושא הנלמד בשלבים הראשוניים), ואילו שני המשחקים האחרים דורשים מציאת קבוצת האמת כולה.

1. <u>אמת-אמת</u> (2 משתתפים)

המשחק מכיל: כרטיסים עם תבניות פסוק ושעון שעליו מספרים.

אופן המשחק: כל משתתף מקבל 3 כרטיסים והיתר מהווים קופה.

בכל תור מסובב אחד המשתתפים את מחוג השעון.

כל המשתתפים בודקים באלו מהתבניות שבידיהם יתן המספר שהתקבל פסוק אמת ומניחים את הכרטיסים האלה על השולחן..

המשתתף שהניח יותר כרטיסים מחבריו אוסף את כל הכרטיסים לערימה בצדו.

משלימים שוב את הכרטיסים שביד לשלושה, מסובבים את השעון וכו'.

מנצח במשחק - המשתתף שצבר בסוף המשחק יותר כרטיסים.

2. <u>המירוץ לאמת</u> (4-2 משתתפים)

זהו משחק התקדמות לאורך מסלול (תמונה 3) כאשר בכל משבצת רשומה תבנית פסוק . על הקוביה האחת רשומים מספרים חיוביים ואפס ועל השניה שליליים ואפס.

אופן המשחק:

בכל תור מטיל אחד המשתתפים קוביה אחת או שתיים לפי בחירתו.

ההתקדמות על הלוח מתבצעת לפי הכללים הבאים:

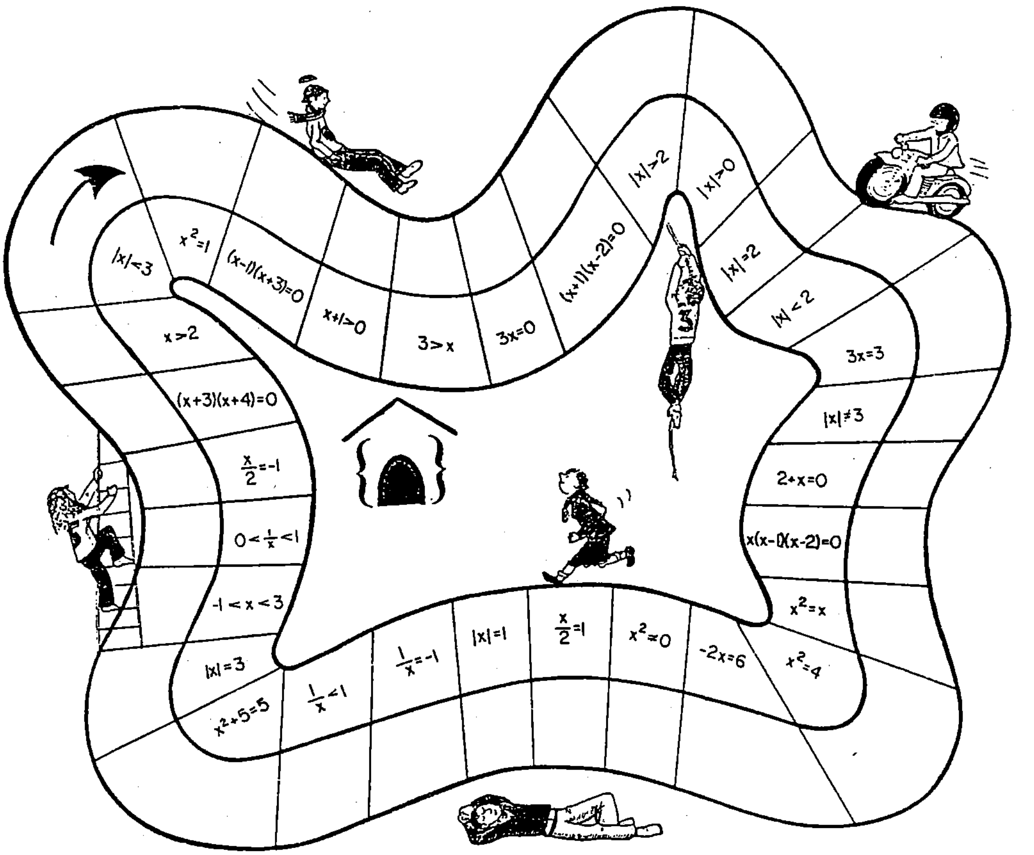
- 6 צעדים, אם המספרים שעל הקוביות (קוביה) יוצרים את קבוצת האמת השלמה.
- 4 צעדים, אם הוטלו שתי קוביות והמספרים יוצרים קבוצה חלקית לקבוצת האמת.
- צעד אחד, אם אחד המספרים שעל הקוביות (קוביה) שייך לקבוצת האעמת.
- אף צעד, אם המספרים שעל הקוביות (קוביה) אינם שייכים לקבוצת האמת.

משתתף שנשאר שלושה מהלכים באותה משבצת הולך צעד אחורה.

- אף צעד, אם המספרים שעל הקוביות (קוביה) אינם שייכים לקבוצת האמת.

משתתף שנשאר שלושה מהלכים באותה משבצת הולך צעד אחורה.

מנצח במשחק - המשתתף שמסיים ראשון סיבוב מלא.



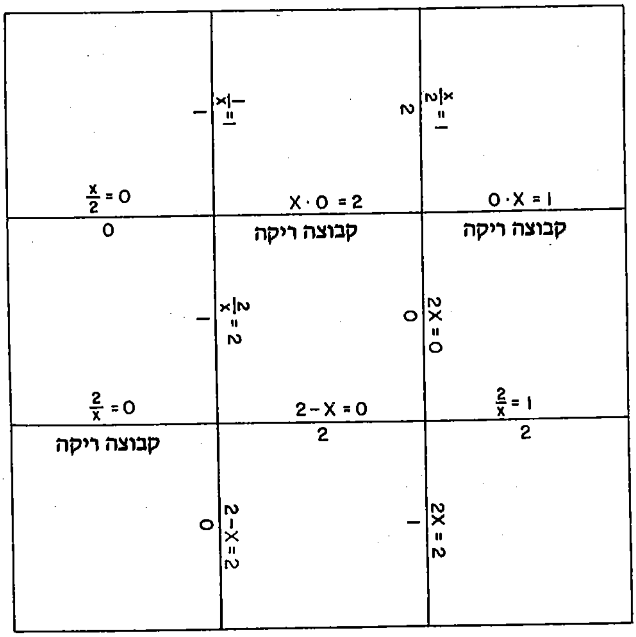
3. <u>הפוך בח</u> (משחק ליחיד)

המשחק מכיל: כתשעה כרטיסים. על כל כרטיס פרט לשניים רשומים מצד אחד תבנית פסוק ומצדו השני קבוצת אמת. על אחד מן הכרטיסים יוצאי דופן רשום "התחל" במקום קבוצת <u>אמת</u> ועל השני "סיום" במקום תבנית פסוק.

אופן המשחק: בתחילה מונחים הכרטיסים עם קבוצות האמת כלפי מעלה. הופכים את כרטיס ה"התחל", מגלים תבנית פסוק, הופכים את הכרטיס עליו רשומה קבוצת אמת מתאימה - וכך הלאה. אם לא שוגים, מתקבלת המלה "סיום" כאשר כל יתר הכרטיסים "הפוכים".

4. **פסיפס** (משחק ליחיד)

המשחק מכיל: 16 כרטיסים שצרופים זה בצד זה נותנים שטיח בגודל 4x4, כך שבכל דופן של ריבוע, הנוגעת בדופן סמוכה, מצויים תבנית פסוק וקבוצת האמת המתאימה לה (תמונה 4) . ניתן לחבר את המשחק בכמה רמות, בגירסה הקשה יותר חוזרות תבניות פסוק מסויימות מספר פעמים.



תמונה 4

שני המשחקים הראשונים (**"אמת-אמת"** ו**"המרוץ לאמת"**) מטפלים באותו שלב של לימוד הנושא, אך דרישותיהם שונות: ב**"אמת-אמת"** התלמיד חייב להפעיל שיקולים מתמטיים תוך כדי ביצוע המהלך בלבד - עליו להחליט אם המספר שבחר באקראי שייך לקבוצת האמת של תבנית פסוק שנבחרה אף היא באקראי. ה**"מרוץ לאמת"** דורש לעומת זאת שיקולים נוספים המבוצעים <u>לפני</u> המהלך: התלמיד חייב להחליט תחילה, כמה ואילו קוביות עליו להטיל ורק לאחר מכן הוא מפעיל שיקולים הדומים לאלו של המשחק הקודם.

רמות הקושי של **"הפוך-בה"** ו**"פסיפס"** שונות אף הן: במקרה הראשון, התלמיד עובר דרך

שרשרת לינארית של תבניות פסוק וקבוצות אמת אשר נקבעה מראש. הגירסות המתקדמות יותר של **"פסיפס"** דורשות לעומת זאת מעקב אחר כמה תבניות פסוק במקביל.

רוב הנקודות שהועלו בדיון אודות תגובות תלמידים ויתרונות של משחקי תבנית-מספר תקפות גם לגבי משחקי תבנית פסוק. פעולת ההצבה מומחשת גם במקרה זה בעזרת *כרטיסיות או קוביות המונחות על המקום בו רשום משתנה או קרוב למקום זה.*

תבניות הפסוק, יחסית פשוטות, רמות החשיבה הנדרשות שונות: ב**"אמת-אמת"** נדרשת הצבה פשוטה של מספר נתון בתבנית-פסוק נתונה, ב-**"הפוך-בה"** נדרש זיהוי קבוצת האמת המתאימה לתבנית פסוק נתונה, ואילו **"המרוץ לאמת"** מחייב את התלמיד להחליט לאילו קבוצות של מספרים סיכוי רב יותר להכיל פתרונות של תבנית-פסוק נתונה. ברור כי, השיקולים המופעלים במקרה האחרון הם ברמה גבוהה יותר.

תצפיות גילו גם כאן שיפור איסטרטגיות במהלך המשחק: חלקם של ההצבות והחישובים קטן בהדרגה והתלמידים נטו יותר ויותר להפעיל אומדן וחישובים מקורבים.

<u>מסקנה</u>

עלינו כמורים לראות במשחקים מתמטיים בכלל, ובמשחקי אלגברה בפרט, אמצעי הוראה חשוב המהווה חלק אינטגרלי ממהלך הלימוד ולא "פרפראות" נחמדות הניתנות רק במקרה ו"הזמן מרשה זאת". צפייה בכיתה המשחקת את אחד המשחקים שתוארו לעיל, תגלה במהרה כי המשחק מעורר עניין רב בקרב התלמידים ובנוסף לכך הוא מעודד ומפעיל תהליכים של חשיבה מתמטית ברמה גבוהה. התלמיד המשתתף במשחק מפעיל לעתים קרובות שיקולים מורכבים וחשובים הנדרשים ממנו לעתים רחוקות במסגרת התירגול הטכני הסטנדרטי.

לדעתנו, כל תלמיד חייב להתנסות במשחקים במסגרת לימודי האלגברה. חלק מן המשחקים האלה ניתנים לרכישה*, ומשחקים אחרים ניתנים להכנה מהירה. אנו ממליצים שכל מורה יבנה לעצמו "בנק" של איסטרטגיות משחקים וישתמש בו ליצירת משחקים בהתאם לנושא והכיתה אותם הוא מלמד.

<u>מקורות</u>

א. פרידלנדר, נ. תעיזי (1979). המרוץ הגדול. <u>שבבים, 13.</u>

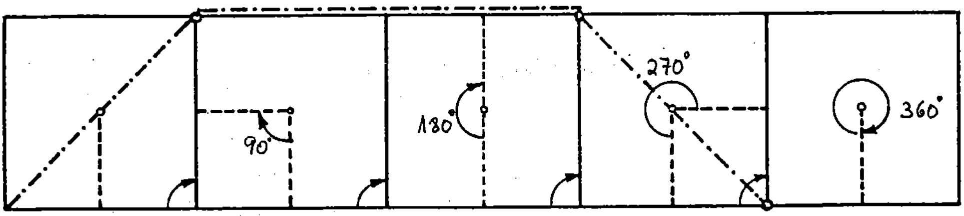
ב. אילני, נ. תעיזי (1981). "המרוץ הגדול" בגירסאות שונות. <u>שבבים, 19.</u>

* חלק מן המשחקים המתוארים כאן ומשחקי אלגברה נוספים יצאו בהוצאה מסחרית של המחלקה להוראת המדעים של מכון ויצמן למדע, רחובות, ומופצים על ידי "גסטליט".

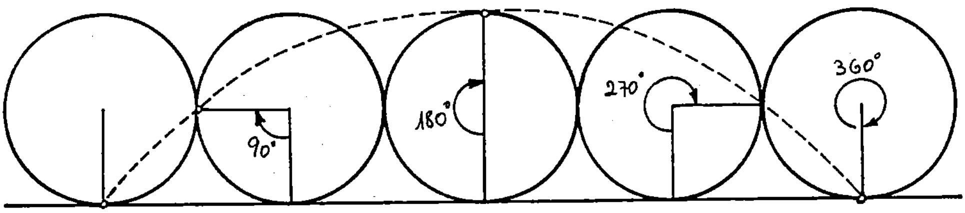
דף תיקונים

בחוברת מסרים ג1, במאמר "חקירות גיאומטריות של הציקלואידה דרך תיכנות לוגו" הושמטו המספרים והאותיות מן הציורים.

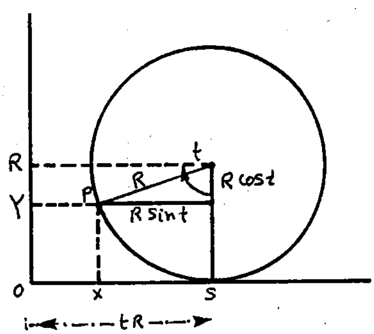
להלן הציורים המתוקנים:



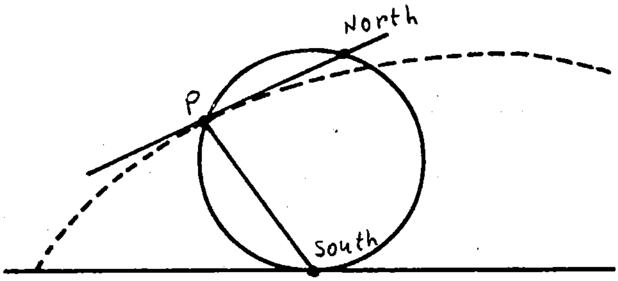
ציור 1: הטרפז הנוצר ע"י גילגול ריבוע על ישר



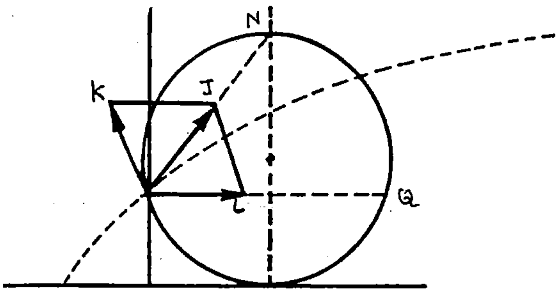
ציור 2: הציקלואידה



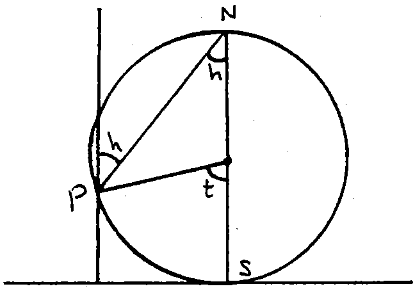
ציור 3: הסבר טריגונומטרי למשוואות הפרמטריות



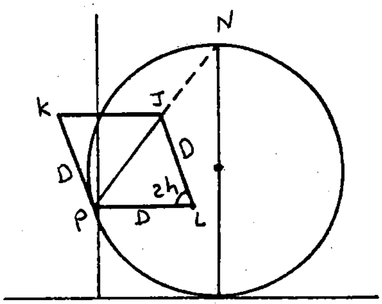
ציור 4: תכונת המשיק והנורמל לציקלואידה



ציור 5: הוכחת תכונת המשיק



ציור 6: חישוב כיוון הראש



ציור 7: חישוב אורך הצעד

יצאו לאור לומדות

השלם לשלם

למחשבי IBM-PC ותואמים

הלומדה שפעלה על מחשבי APPLE ו- COMMODORE הוסבה למחשבי IBM-PC וניתן לרכוש את הדיסקט והחוברת באמצעות הוצאת "רמות".

כמו בלומדה המקורית גם כאן מתרגלת הלומדה ידע קודם במגוון תכנים רחב:

- צבירת עשרות על ידי חיבור מספרים דו ספרתיים,
- השלמה לשלמים על ידי חיבור שברים עשרוניים,
- טיפול במספרים מכוונים באמצעות המשחקים,
- סימני התחלקות.

בגירסה למחשבי IBM-PC הוכנסו מספר שינויים, והחשוב שבהם הוא במשחק נגד המחשב. שבו מתבקש השחקן לבחור מבין שלוש רמות את הרמה בה "ישחק" המחשב:

ברמה הנמוכה, נגד מחשב "עצלן" המחשב "לוקח" 3-2 משבצות ומאפשר בכך לתלמיד לזכות בקלות יחסית. בנוסף לכך הוא רומז לתלמיד בתורו היכן כדאי לו להתחיל לסמן, כדי לצבור מספר רב ככל האפשר של משבצות.
ברמה הגבוהה, נגד מחשב "גאון" המחשב מחפש את השורות, הטורים, או האלכסונים, בהם יוכל לצבור מספר רב ככל האפשר של משבצות, ובכך משמש יריב ראוי לתלמיד הטוב.

אות - או - גרף

<u>למחשבי IBM-PC ותואמים</u>

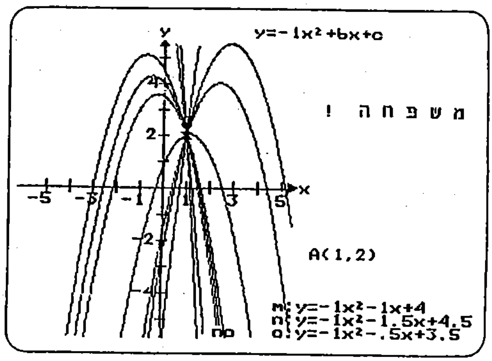
הלומדה אות - או - גרף באה לסייע לתלמיד בהפנמת הקשר בין ההצגות האלגברית והגרפית של פונקציה . הלומדה פועלת על מחשבי IBM-PC ותואמיהם. ניתן לרכוש את הדיסקט והחוברת באמצעות הוצאת "רמות".

הלומדה אמורה להשתלב בתוכנית המתימטיקה מכיתה ט' ואילך בהוראת הנושאים ישר ופרבולה, תוך שימת דגש על הקשר בין גרף לנוסחה ותפקיד הפרמטרים.
כמו כן ניתן להשתמש בלומדה לחזרה, ביסוס והעשרה.

כידוע, קשה להמחיש קשר זה בעל פה. ביצוע שרטוטים על לוח הכיתה גוזל זמן רב ומונע את האפשרות לנתינת <u>מיגוון רב</u>, בצורה מדוייקת וברורה.
כאן המקום לנסות להתגבר על קשיים אלו באמצעות המחשב.
ואכן, יתרונות המחשב במתן אפשרות לחקור ולשאול שאלות, יכולתו להגיב ולתת משוב מידי תורמים לבניית יחידת למוד בנושא זה.

הלומדה מקבלת מהמשתמש, לפי רצונו, נתונים לגבי פונקציה בצורה אלגברית או בצורה גיאומטרית. תגובת המחשב, תהיה הצגה בו זמנית של הצורה האלגברית והצורה הגרפית של הפונקציה או משפחת הפונקציות. עצם ההופעה של הצגות אלו זו לצד זו מסייעת לתלמיד בחקירת הקשר שביניהן.

והרי דוגמא של מסך שהתקבל בעקבות בקשה לשרטט פרבולה לפי פרמטר $(a = -1)$ ונקודה $A(1, 2)$.



קדימה אל הקודקודים - גירסה משופרת

למחשבי IBM-PC ותואמים

לומדה זו היא גירסה משופרת של הלומדה קדימה אל הקודקודים ופועלת על מחשבי IBM-PC ותואמים. ניתן לרכוש את הדיסקט והחוברת באמצעות הוצאת "רמות".

גירסה זו שונה מהגירסה הרגילה, אף על פי שהמשחק הבסיסי זהה.

הלומדה מתאימה לתלמידי כיתה ז' ומעלה ומתאימה גם לתלמידים מתקדמים בכיתות נמוכות יותר. הלומדה מלמדת ומתרגלת, תוך כדי משחק, את הנושא של סימון נקודות במישור והתמצאות במישור.

בגירסה המשופרת קיימת אפשרות לקבל רמז מן המחשב ורמז זה משמש קצה חוט שעשוי להדריך ולסייע בהמשך הפעילות. על ידי כך יכולים תלמידים מתקשים ל"היכנס" לפעילויות ביתר קלות ולהפיק תועלת מהלומדה.

בניות הנדסיות

למחשבי IBM-PC ותואמים

הלומדה, שהיתה מותאמת למחשב מסוג Apple, הוסבה ל IBM-PC וניתן לרכוש את הדיסקט והחוברת באמצעות הוצאת "רמות".

התפעול במחשב I.B.M פשוט יותר ומהיר יותר.
החוברת שנכתבה למחשב Apple מתאימה גם למשתמשים במחשב IBM. ההבדל הוא רק בצורת המסך ובהוראות ההפעלה. (הוראות הפעלה למחשב IBM מצורפות לחוברת).
שני המחשבים מאפשרים ביצוע של אותן פעולות בדיוק.

החוברת המיועדת לתלמיד ולמורה גם יחד, מתאימה ללימוד עצמי ומכילה מבוא והדרכה על המהות של בניה הנדסית ועל הדרך בה מתבצעת העבודה בעזרת המחשב. כמו כן נמצאות בחוברת בעיות לדוגמא (המופיעות גם על הדיסקט), בעיות עם הדרכה ובעיות בניה לפי פרקי הלימוד שבספר גיאומטריה לרמה א'. בנוסף לכך, יש בחוברת תרגילים הפותחים דיון בתנאי הגבלה ומספר פתרונות של בעיות בניה.

שני צדדים לאפס - גירסה מצעידה

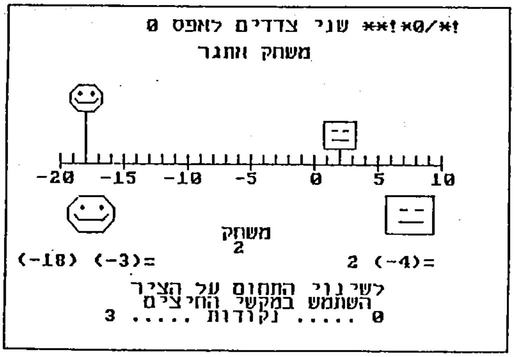
<u>למחשבי IBM-PC ותואמים</u>

גירסה זו היא פיתוח מתקדם של הלומדה המקורית (הקיימת לסוגי מחשבים שונים) ופועלת על מחשבי IBM-PC ותואמים. ניתן לרכוש את הדיסקט והחוברת באמצעות הוצאת "רמות".

לומדת מחשב זו בנויה סביב המשחק *שני צדדים לאפס*, אשר באמצעותו התלמיד מקבל "מבט כללי" על ארבע פעולות החשבון במספרים שלמים ומיקומם של מספרים אלו על ציר המספרים; וזאת תוך כדי ביצוע מספר רב של תרגילי חשבון והליכה על ציר המספרים.

במשחק הבסיסי ליחיד מול מחשב שבגירסה המצעידה, הושם דגש על מצבים "קריטיים" שבהם יש אפשרויות לדילוג בלבד וגם לדילוג ובריחה. מצבים כאלו עשויים להעלות את רמת השיקול והחשיבה של התלמידים; לפיכך תדירותם הוגברה ובמקביל לכך בונה המחשב טיפול מתקן לתלמיד שאינו שוקל נכון למרות ריבוי ההזדמנויות.
לנוחות המורה, מצטברות פעולות החשבון המתאימות למצבים הללו מצדי הכותרת: מצד ימין - אם התלמיד פעל נכון, מצד שמאל - אם התלמיד לא פעל נכון.

בגירסה זו מופיע משחק נוסף, *משחק אתגר*, בו יש לתלמיד שליטה לא רק על הפעולה הנבחרת אלא, במידה מסוימת, גם על קטע ציר המספרים שבו מתנהל המשחק. מובן שהצורך בשיקול דעת משולב דורש אנליזה וסינטזה של המצבים ועל כן משחק זה מתאים לתלמידים טובים בלבד. ביצוע נכון יביא לסימון "!" מימין לכותרת, כפי שאפשר לראות בתמונה להלן. התמונה לקוחה ממשחק אתגר של תלמיד אשר שיחק ברמה גבוהה. זאת ניתן לראות מכך שמשמאל אין סימני פעולה, אך מימין הצטברו פעולות כפל וחילוק, ופעמיים היה שימוש נכון בשינוי קטע הציר שעליו משחקים (!).



חומר חדש

יצאו לאור

ספרים

מדריך למורה לספר "גיאומטריה" ברמה א'.

בספר ובמדריך מושם דגש על שילוב של הבנת העקרונות של מדע דדוקטיבי עם הידע בגיאומטריה.
במדריך תמצא הצעות דדוקטיביות, הצעות לשקפים, פתרונות של התרגילים, דיון בקשיים של תלמידים ובלוגיקה הקשורה בגיאומטריה והצעות לתרגילים נוספים.

מדריך למורה לספר "פונקציות" ברמה ב'.

הספר פונקציות נלמד בכיתה ט' ומשלב הכנסת מושגים יסודיים הקשורים במושג הפונקציה, עם חזרה והעמקה של נושאים שנלמדו קודם בחטיבת הביניים, כמו פתרון משוואות ואי-שוויונים, פישוט תבניות מספר, קריאה ושרטוט גרפים ופתרון בעיות.

במדריך למורה תמצא הצעות דידקטיות, פתרונות נוספים על אלה המופיעים בספר, דיון בקשיים של תלמידים והצעות למבחנים.

״על מספרים״ ספר א׳ לרמה א׳ מהסדרה **פרקי מתמטיקה.**

ספר זה מחליף את החוברות: חלק א׳ וחלק ב׳ ממהדורת העיצוב, ומיועד למחצית הראשונה של כיתה ז׳. הספר מכיל חומר רב ומגוון והרבה יותר מאשר בחוברות.

מה בספר?

* שיטות שונות לכתיבת מספרים
* פעולות החשבון
* אחוזים.
* הרחבת עולם המספרים

כל פרק בספר מחולק לסעיפים וכל סעיף מורכב משיעורים.
בספר מצויים תרגילים רבים לעבודה עצמית של התלמידים ולשעורי בית. כמו כן משולבים בספר משחקים והצעות לשילוב לומדות מחשב.
בסיום חלק מהפרקים מופיע סעיף: ״עוד ועוד תרגילים״ שהוא קובץ של תרגילי רשות המהווים סיכום לפרק.

יש עדיין מלאי מצומצם של החוברות חלק א׳ וחלק ב׳ מהסדרה **פרקי מתמטיקה.** כשיאזל המלאי לא יודפסו החוברות יותר.
מחיר הספר החדש 18.00 ש״ח (ללא מע״מ).

הסתברות לרמה א' מהסדרה **פרקי מתמטיקה.**

נושא ההסתברות הוכנס בתכנית הלימודים של כיתה ח' במסגרת של כ-10 שיעורים.

מה בחוברת:

ההכרות עם הנושא נעשית מתוך גישה אינטואיטיבית ותוך התנסות אישית. האינטואיציה מובילה לעיתים למסקנות נכונות אך לעיתים קרובות התלמידים מופתעים לגלות שהניסוי והחישוב הובילו לתוצאות בלתי צפויות.

בהוראת הנושא נעשה נסיון לתת בידי התלמידים כלים שונים לחשיבה הסתברותית ולפתרון בעיות העוסקות בנושא וקרובות לעולם שלהם.

הסעיפים בחוברת הם:

השערות ותחזיות

שכיחות יחסית והסתברות

מאורעות וחישובי הסתברויות

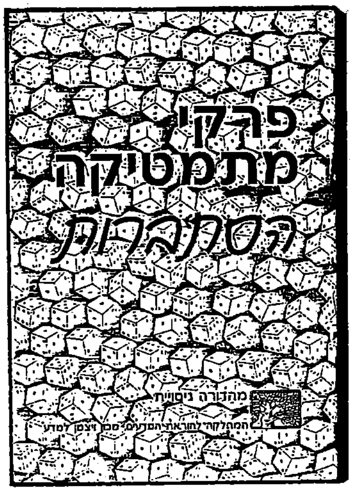
זה או זה

שני מאורעות גם יחד

עוד על ייצוג נוח לחישובי הסתברויות

ביחידה זו אין טיפול פורמלי בנושא.

במדריך למורה, שיצא בקרוב, יובאו גם הנוסחאות וההסברים הפורמליים.



מספרים מרוכבים

נושא זה שייך לתכנית הלימודים של כיתות י"א ו-י"ב ברמה של 5 יחידות.
בחוברת זו, בניית המספרים המרוכבים נעשית מתוך גישה רחבה ככל האפשר, תוך שימוש באלמנטים שונים של המתמטיקה. על ידי כך נעשה המעבר מן הממשיים אל המרוכבים פשוט וטבעי.

הסעיפים בחוברת הם:

טרנספורמציות במישור
מטריצות
חבורות
הקבוצה C_2-
טרנספורמציות $A(\phi)$
חישובים טריגונומטריים
קבוצת המספרים המרוכבים
תרגול.

במדריך למורה, שיצא בקרוב, יובאו הערות, הצעות ופתרונות לתרגילים.