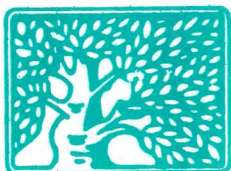


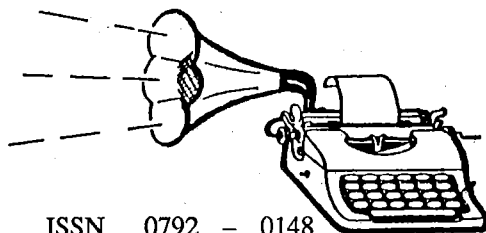
ג3

עלון למורי מתמטיקה
כרך ג, חוברת מספר 3, טבת תש"ן

מס'דים



המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות



תוכן העניינים

מאמרים:

5 אינטליגנציה מלאכותית.....
תנן לייב, ירושלים

24 משפטים במתמטיקה כמקור להפתעות
נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון

48 האלגברה שלפני האלגברה
אברהם הרכבי, אלכס פרידלנדר, רינה הרשקוביץ, מכון ויצמן למדע.

63 השימוש בדלתון
דוד רימר, מכון ויצמן למדע

68 נקודת מבט שונה למציאת חיתוך של שני ישרים.....
מייקל פריד, קיבוץ רביבים

זה רעיון:

70 כתב חידה
רונית אפלברג, רמת-גן

85 חודעות

מספרים

מקסים ברוקהיימר נורית זהבי רחל בוחדנה מיכאל קורן

הדפסה ועריכה במחשב: אחובה אביבי

גרפיקה: פולינה קרביץ

עיצוב: רחל בוקשפן

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות



כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע

נדפס בישראל 1990 - תשי"ן

קוראים יקרים ,

חוברת זו היא האחרונה בכרך ג' .

הפעם לא כללנו טופס מנוי לכרך הבא...

מסיבות שונות החלטנו לעשות הפסקה בהוצאת העלון.



שלכם בברכה ,

חסידים

מערכת מסרים



אינטליגנציה מלאכותית

מאת: חנן לייב, ירושלים.

מבוא

במאמר זה תוגדר תחילה האינטליגנציה המלאכותית ותבוא סקירה הסטורית של התחום ובה יסופר גם על שפות-תכנות של אינטליגנציה מלאכותית. לאחר מכן אנסה לערוך השוואה כללית בין האינטליגנציה האנושית לאינטליגנציה המלאכותית בנקודות שונות*.

מהי אינטליגנציה מלאכותית?

האינטליגנציה המלאכותית היא מושג שיש לו הגדרות רבות, אשר לא ניתן לאמר כמעט על אף אחת מהן כי אינה הגדרה נכונה. קיימות הגדרות ציניות כמו "אם זה עובד", זה לא אינטליגנציה מלאכותית", אך קיימות גם הגדרות יותר ענייניות כמו "מדע יצירת מכונות המחקות את האינטליגנציה האנושית". הגדרה מעין זו היא בעייתית במקצת, מפני שאף לאינטליגנציה האנושית אין עדיין הגדרה ברורה וחד משמעית. מכאן קל וחומר שקשה להגדיר באופן מדויק את האינטליגנציה המלאכותית.

מתוך מגוון ההגדרות שניתקלתי בהן, חלקן - ההגדרות שהובאו להלן, החלטתי לאמץ את ההגדרה שמופיעה בספר Artificial Intelligence של Elaine Rich, עם תיקון קל:

* המאמר מהווה חלק ראשון מעבודת גמר במדעי-המחשב שבוצעה על ידי המחבר בהיותו תלמיד בבית הספר התיכון שליד האוניברסיטה העברית בירושלים בהנחיית פרופ' דניאל להמן. העבודה זכתה בפרס ראשון בתחרות לעבודות גמר במתמטיקה ומדעי המחשב, ע"ש ש. בליימן ז"ל באוניברסיטת תל-אביב.

"אינטליגנציה מלאכותית הוא החקר שענינו כיצד לגרום למחשבים לעשות דברים שהאדם ביצעם או מבצעם, לעת עתה, טוב יותר".

מהגדרה זו ניתן להסיק מספר מסקנות והיא ראויה להבהרה.

ראשית, האינטליגנציה המלאכותית היא חקר או מדע. זאת בניגוד לאינטליגנציה האנושית שהיא מושג מופשט בלבד. בעזרת המדע שנקרא אינטליגנציה מלאכותית מוענקת למחשב, בצורה מלאכותית, היכולת להתנהג בצורה אינטליגנטית, במובנו המופשט.

המדע עצמו עוסק בנסיון למצוא תשובה לשאלה הכללית - "כיצד לגרום למחשבים ...". התשובות לשאלה זו הן שונות, הן כוללות גם הרכבה חומרית של מחשבים בצורות שונות וגם מציאת דרכי פעולה (אלגוריתמים) משוכללים לאותם המחשבים.

אותם הדברים ש"האדם ביצעם (התיקון שלי) או מבצעם, לעת עתה, טוב יותר" הם הפעולות האינטליגנטיות. כדי להבהיר את הסוגיה הזו, עלינו להתייחס דווקא לסימות.

כשאנו מציינים "טוב יותר" אנו מניחים שישנו בסיס כלשהו להשוואה בין האדם למחשב, ואכן כך. ניתן להשוות בין המחשב לאדם במספר רב של תחומים כגון זיכרון, מהירות דיוק מחד, לעומת יכולת קליטת מידע. זיהוי מידע ולמידה מאידך. בכל התחומים הללו ניתן לאמר, באופן מוחלט, מי עולה על מי - האדם על המחשב או להיפך.

מכאן ניתן ללמוד שפעולות אינטליגנטיות, כשדנים ב"יחס אדם-מחשב", הן אותן פעולות שהאדם טוב בהן מהמחשב. התיקון שהוספתי נועד להבהיר שלא ניתן לאמר שפעולה אינטליגנטית (ביחס אדם-מחשב) הופכת לפעולה שאינה מוגדרת ככזו ברגע שהמחשב הצליח לבצעה.

לסיכום, מציאת התשובות לשאלות רבות מהסוג של "כיצד לגרום למחשבים לבצע פעולה x" כש - x מוגדר כפעולה שהאדם מבצע או ביצע טוב יותר מן המחשב - היא למעשה תכלית המדע שמכונה "אינטליגנציה מלאכותית".

היסטוריה של אינטליגנציה מלאכותית.

מדע האינטליגנציה המלאכותית הממוחשב החל לפני כ-30 שנה. זהו פרק זמן קצר לכל הדעות, אך בתקופה זו חלו שינויים, תקוות, הצלחות והרבה כשלונות. ראוי לכן למצוא את שורשי תחום האינטליגנציה המלאכותית ולחקור אותם למען בדיקת התקדמות המחקר בתחום זה בפרק זמן רחב יותר.

ייצור אינטליגנציה המלאכותית שלא באמצעות מחשב החלה, לפי המיתולוגיה, עוד במאה הראשונה לפני הספירה, כאשר האמן הירו מאלכסנדריה בנה ציפורים המסוגלות לעוף ולשיר. המיתולוגיה היוונית מלאה בסיפורים, מפורטים במידה זו או אחרת, על פסלים מדברים אשר קיבלו אינטליגנציה כלשהי והחלו להשמיע דברי חכמה.

ידועות האגדות על יצירה מאגית של גולם בצלם אדם עם רוח חיים. ידוע לנו גם סיפור השחמטאי הטורקי. היתה זו קופסה גדולה בדמות אדם אשר חבש תרבוש טורקי ושיחק שחמט ברמה בין-לאומית - עד שנשרפה קופסת שחמט זו.

מסיפורים אלו ניתן ללמוד כי האדם חיפש לו, משחר ימי ההיסטוריה, דמויות בעלות אינטליגנציה אנושית אשר תוכלנה לקבל החלטות אנושיות נכונות ושקולות יותר מאשר יכול לקבל האדם (או לפחות ברמתו).

את תחילת הדיון על האינטליגנציה המלאכותית, בזמן החדש, ניתן לייחס לועידת דרטמות שהתקיימה בניו-המפשייר, בשנת 1956. בועידה זו התכנסה קבוצת מדענים נכבדים שעסקו בתחום האינטליגנציה המלאכותית - מקארתי, מינסקי, שאנון, רוציסטר, ניוואל ועוד.

בימי הוועידה ולאחריה היו תקוות גדולות לפיתוח מדע האינטליגנציה המלאכותית ותחזו תחזיות מרשימות. זאת של ניוואל וסיימון, למשל, שטענו שתוך 10 שנים, יהיה המחשב אלוף השחמט העולמי אשר מסוגל גם להלחין יצירות מוסיקליות ול"גזור" הנחות מתמטיות.

ההיסטוריה הוכיחה שלא כך היה. המתנגד הבולט והידוע ביותר לאיטליגנציה מלאכותית היה יוברט דרייפוס (Hubert Dreyfus), שתרם לא מעט בהעלאת התנגדויותיו לפיתוח האינטליגנציה המלאכותית.

מאז ועד היום מתכנסים מדי פעם קונגרסים העוסקים באינטליגנציה מלאכותית, וישנן גם ועידות הנערכות מידי פרק זמן קבוע. בנוסף לזאת, האוניברסיטאות השונות החלו לשלב קורסים שונים בנושא האינטליגנציה המלאכותית, רוב העבודה המדעית ומירב הפיתוח נעשה באוניברסיטאות, כשבתקופה האחרונה מנסים בתי תוכנה לבנות תוכנות מתוחכמות המשלבות בתוכן יישומים אינטליגנטיים.

שפות תיכנות מיוחדות לאינטליגנציה מלאכותית.

לכתיבת תוכניות מחשב מיוחדות העוסקות באינטליגנציה מלאכותית, פיתחו במשך השנים עשרות שפות תיכנות. בכל שפת תיכנות הושם דגש על דברים שונים שתיכנות באינטליגנציה מלאכותית דורש. חלק משפות התיכנות שמות דגש על הקלה באירגון הנתונים: חלקן על הקלה בכתיבת הפרוצדורות לתכנית: חלק על הקלה באירגון עצמים ועוד.

בשורות הבאות אנסה לסקור כמה משפות התיכנות בתחומים השונים. הסקירה כוללת גם שפות הנדסת מידע - Knowledge-Engineering Languages.

1. DPL (Design Procedure Language). זוהי שפת הנדסת מידע שהדגש העיקרי בה הוא היכולת לארגן נתונים בצורת מבנה (Frame-based). האיפיון המרכזי של השפה הוא היכולת לייצג כמה סוגי מידע במבנה נתונים אחד. יכולת זו חוסכת סירבול ומאפשרת איסוסן מעורב של מידע, התורם ליכולת המערכת לחסותמך על מידע רב בזמן קצר. השפה פותחה באוניברסיטת MIT, קיימברידג', כמערכת לצרכי מחקר. השפה פותחה בשלהי שנות ה-70 ויצאה לשוק בראשית שנות ה-80.

2. PROLOG (Programming in Logic). שפת תיכנות שיעדה העיקרי הוא היכולת לארגן את הנתונים בצורה לוגית. כלומר, הגדרת המידע עם היחס בתוכו, והגדרת כללי "אם - אז" שפת פרולוג, שפותחה בראשית שנות ה-70, היא אחת השפות הנפוצות ביותר מבין שפות האינטליגנציה המלאכותית, דגש רב הושם כדי שניתן יהיה לעבוד בה במגוון רחב של מחשבים. שפת פרולוג פותחה ע"י צוות מדענים באוניברסיטת אדינבורו שבסקוטלנד, שהמשיכו את עבודתו של צוות צרפתי שישב במרסיי (MARSEILLE), בראשותו של אלן קולמרור (Alain Colmerauer). הוא הגדיר את פרולוג כשפה לצרכי עיבוד שפות טבעיות (Natural Languages). באותה התקופה הצליח קוולסקי להוכיח טענות מרכזיות בלוגיקה. באדינבורו פותחה גירסת ה-DEC 10 של פרולוג, שהיתה שילוב מוצלח מאוד של גירסת קולמרור והתאוריות הלוגיות של קוולסקי. השילוב יצר שפת תיכנות חדשנית חזקה מאוד ועד היום היא משמשת למחקר בשפה טבעית, מניפולציה של סמלים אלגבריים, תיכנון מעגלים לוגיים ועוד. גירסת ה-DEC 10 הפכה לגירסה הראשונה של פרולוג שהיה בה שימוש רב.
3. SMALLTALK. שפת תיכנות זו מיוחדת ביכולתה לטפל בארגון פריטי מידע. הפריטים מאורגנים בצורה היררכית (פריט יסודי הוא חלק של פריט מורכב יותר). סמולטוק מאפשרת למתכנת גם שימוש נרחב בגראפיקה. השפה פותחה בסוף שנות ה-70 ובתחילת שנות ה-80 במרכז המחקר של XEROX.
4. LISP (List Processing Language). ליספ היא השפה הנפוצה ביותר בתחום האינטליגנציה המלאכותית. שפת ליספ מסווגת לתחום השפות המאפשרות הכנת פרוצדורות מסובכות בצורה קלה. השפה מאפשרת שימוש בפונקציות ופרוצדורות פשוטות שהיא בנויה מהן, לצורך בניית פונקציות מסובכות. ליספ מאפשרת ניהול זיכרון אוטומטי, תכונה המאפשרת למתכנת להתרכז באספקטים אחרים של התיכנות. קיימות גירסאות שונות של ליספ, ביניהן Franz Lisp ; Common Lisp ; Interlisp ; Maclisp ו- Zetalisp. ליספ פותחה בסוף שנות ה-50 באוניברסיטת MIT.

5. EXPERT אקספרט היא שפת הנדסת מידע שיתרונה העיקרי הוא היכולת לארגן את המידע בצורת חוקים (Based - Rule) . תכונה זו מאפשרת לה להיות אחת מן השפות הנפוצות לעיסוק במידע רב. השפה מאפשרת ליצור בצורה קלה מערכות לסיווג מצבים וגופים שונים. אקספרט פותחה באוניברסיטת רטג'רס (Rutgers) כפרויקט לצרכי מחקר שונים. השפה פותחה ויצאה לשוק במהלך שנות ה-70.

האינטליגנציה המלאכותית לעומת האינטליגנציה האנושית.

אנשי מחקר של אינטליגנציה מלאכותית, וביולוגים רבים מנסים להשוות בין אינטליגנציה מלאכותית לאינטליגנציה אנושית. ההשוואה בין אינטליגנציה מלאכותית לאינטליגנציה אנושית יכולה להעשות במספר תחומים, אשר ניתן לחלק אותם לשני חלקים עיקריים: החומרה (Hardware) ודרכי הפעולה המשולבות בתוכנות (Software). החומרה במחשב היא קבוצת החלקים המרכיבים את המחשב מבחינה פיזית. כלומר המוניטור, לוח המקשים, המעגלים האלקטרוניים ועוד. דרכי הפעולה במחשב הן הדרכים שבהן מופעלת החומרה. החלוקה ל"חומרה" ו"תוכנה" באדם היא חלוקה מורכבת הרבה יותר. מאחר שחקר המח של האדם נמצא עדיין בראשית דרכו, לא הצליחו המדענים לעמוד במדויק על פעולותיו השונות של המח. לכן, לא ניתן לסווג בבירור פעולות שהמח מסוגל לעשות, לפעולות "חומרה" או "תוכנה".

את ההשוואה בין האדם למחשב חילקתי לשבעה חלקים:

(א) פעולת מעבד במחשב לעומת תא-עצב באדם.

(ב) ממשקי הקלט.

(ג) אמצעי שמירת הנתונים ואופן שמירתם.

(ד) ממשקי הפלט.

(ה) למידה.

(ו) הבנת שפה טבעית.

(ז) זיהוי צורות.

ניתן להבחין בשבעת הסעיפים בחלוקה לגבי מרכיבי החומרה (ארבעת הסעיפים הראשונים) והתוכנה במחשב. במידת מה, חלוקה סכמטית זאת תקפה גם לגבי האדם, ובכל מקרה שתיוצר אי בהירות בהבחנה חומרה/תוכנה, אנסה להבהירה במהלך ההשוואה.

א) פעולת מעבד במחשב לעומת תא-עצב באדם

ההשוואה בין האדם למחשב בתחום זה היא השוואה ערכית, המתבססת על נסיון חיים של כל מי שמעורב בתחום המחשבים.

מהירות - מהירותו של מעבד במחשב הוא בסדר גודל של ננו-שניות (10^{-12}). מהירותו של תא-עצב, לעומת זאת הוא בסדר גודל של מיקרו-שניות (10^{-6}). כלומר, מהירותו של מעבד המחשב עולה לאין שיעור על מהירות פעולתו של האדם.

ציפיית פעולה - איזו מידה ניתן לצפות את פעולת תא-העצב ופעולת המעבד במחשב? את פעולת המחשב ניתן לצפות בכל פעם שנפעיל אותו, בתנאי שיהיה תקין. האדם בנה את המחשב ואת החיבורים שבין מרכיביו והוא גם זה שנותן למחשב פקודות פעולה. לכן, כל פעולה של המחשב צפויה מפני שהוא פועל בהתאם לחיבור בין מרכיביו ולפקודות אותן הוא מקבל. המחשב לא פועל בצורה עצמאית ובלתי צפויה מאחר שאין לו יישות עצמית.

פעולת האדם, לעומת זאת, היא פעולה שונה בתכלית. האדם לא יודע כיצד מורכב המח שלו ואין הוא מסוגל לשלוט על הרכב זה. בנוסף המח, בניגוד למחשב, נותן פקודות לעצמו ולשאר חלקי הגוף ועל פיהן הוא פועל. נתינת הפקודות נובעת מיישותו העצמאית של האדם. משמעותה של היישות הזאת עדיין אינה ברורה דייה.

אורך חיים - המעבד שבמחשב מורכב מחלקים מתכתיים שמחזיקים מעמד זמן רב, בתנאי הגנה סבירים. תא-עצבי, לעומת זאת, מורכב מחומרים אורגניים (בעיקר חלבונים), שעמידותם נמוכה יחסית, אף בתנאי הגנה טובים מאד (המח מוגן ע"י עצמות הגולגולת בצורה אופטימאלית). עובדה המוכיחה טענות אלה היא עובדת המוות באדם לאחר כמה עשרות שנים. לעומת אפשרות להמשך השימוש במחשב לאורך זמן רב הרבה יותר. עם זאת, תחלופת המחשבים רבה עקב התפתחות בתחום. מסיבה זו אין אנו זוכים, כמעט, לראות מחשבים "עתיקים" בפעולה.

אפשרות לתיקון עצמי - מאחר שהמחשב נבנה כולו בידי האדם, כאמור, יכולת התיקון העצמי שלו היא נמוכה מאד. בכל מקרה של תקלה במחשב תיקונו יתאפשר ע"י התערבותו של גורם חיצוני בלבד (אדם או מכונה). תא עצב של האדם, לעומת זאת, מסוגל לחפות במידה מסויימת על קלקול (או מוות) של תא עצב אחר. על קיום פעולה זו ידוע כבר זמן רב: חוש השמיעה של אדם עוור, למשל, טוב יותר מאותו החוש אצל אדם שראייתו תקינה. לעומת זאת, תיקון מח האדם "מבחוץ" הוא כמעט בלתי אפשרי.

לסיכום, נוכל לאמר כי מתוך השוואת מרכיבי המחשב הבסיסיים לאלו של האדם, עולה המחשב על האדם. מלבד פעולת החיפוי שאצל האדם היא טובה יותר, המחשב מהיר יותר, אמין יותר ועמיד יותר מן האדם. יתרון החיפוי של האדם לעומת המחשב מתאון, אם נזכור שניתן לחפות בצורה שלימה על קלקול במחשב (מבחוץ אמנם), דבר שלא ניתן לבצעו, לעת עתה באדם.

(ב) ממשקי הקלט

אצל האדם ממשקי הקלט הם חמשת החושים: ראייה, שמיעה, הריח, מישוש וטעם. בעזרת חושים אלה יוצר האדם קשר עם העולם החיצון בדרכים שונות. בראיה קולט האדם קרני אור, בשמיעה - גלי קול, בהריח - חומרים מסויימים (עדיין אין יודעים בבירור), במישוש - מגע פיסי ובטעם - מבנה חומרים מסויימים.

כך יכול האדם להיות בקשר מתמיד עם העולם הסובב אותו. תופעה נוספת שאנו מכירים היא, כאמור, תופעת ה"חיפוי". ברגע שאובדים חושים מסויימים, שאר החושים "מחפשים" באופן חלקי על האובדן שנגרם - החושים האחרים מתחדדים. כלומר, מערכת העצבים יכולה לשנות את תיפקודם של מרכיביה במיקרים מיוחדים. השינויים הללו הם, ככל הנראה, שינויים תיפקודיים בלבד (כלומר שינוי בתחום ה"תוכנה"), ואין בהם משום שינוי פיסי של תאי-עצב. מימשקי הקלט של המחשב מגוונים הרבה פחות. לרשותו עומדים במקרה הטוב, לוח מקשים, מצלמות לסוגיהן (טלוויזיה, לייזר, אינפרא אדום וכו'), ומיקרופונים.

קשה לפיכך בכלל להשוות בין ממשקי הקלט של האדם לעומת אלו של המחשב, גם בכמות וגם באיכות. לוח המקשים מאפשר קשר של המחשב עם הסביבה הפיסית שהוא חי בה, בערבון

מוגבל מאד , מפני שרק במקומות מסויימים על לוח המקשים , ובעצמה מסויימת מאד יוכל המחשב לקלוט את המגע בו.

ומה בין מצלמה לעין ? במצלמת טלוויזיה רגילה מחולק שדה התמונה לכמה מאות שורות כשבכל שורה כמה מאות נקודות. בצפיה במסך ממרחק מסויים מתקבלת תמונה ברורה אשר ניתן לזהות בה אף עצמים קטנים , אך מקרוב מבחינים שהתמונה מורכבת מנקודות . בעין האדם מספר הקולטים הנקודתיים גדול ביחס לקולטים הטלוויזיוניים , אך תכונה בולטת הרבה יותר היא כושר ההפרדה של העין לעומת המצלמה . כאשר אנו רואים משהו הוא נראה לנו כתמונה רציפה , אשר אינה מורכבת מנקודות בודדות. תכונה זו נובעת מתזוזות תמידיות של העין אשר המוח יוזם אותן (וידע גם כיצד לנטרל את השפעתן). כך אנו רואים תמונה שהתקבלה מכל נקודה שסרקה רצף של נקודות. נסיון ליישם דרך זו גם במחשבים לא הצליח.

לאחרונה , צצות תוכנות מורכבות ויקרות אשר ניתן בעזרתן לדבר אל המחשב (פקודות תיכנות או טקסט לעיבוד תמלילים) , כך שהמחשב יבין את מוצא פינו ; אך לכל אותן המערכות קיימות מספר בעיות בולטות. אוצר המלים שהמחשב מבין הוא מוגבל. המחשב יוכל לזהות מספר מוגבל של קולות. במערכות מסויימות קיימת בעיה של זמן-פיענוח הדיבור ועוד. כלומר , גם בנושא זה עולה חוש האדם לאין שיעור על חוש המחשב.

באשר לטעם וריח , עד כה , לא קיימים ממשקי קלט כאלה למחשב.

מתוך השוואה זו , ניתן להסיק בברור שממשקי הקלט באדם טובים ורבים לאין שיעור מאלו הממוחשבים , כפי שהצליחו לבנות עד כה .

ג) אמצעי שמירת הנתונים ואופי שמירתם

כפי שהצליחו הביולוגים למצוא עד היום , קיימת אצל האדם מערכת זכרון מורכבת מאד אשר בנויה ממספר חלקים: זכרון לטווח ארוך , זכרון לטווח קצר , כאשר ביניהם מקשר זיכרון אופרטיבי , כלומר זה שצריך לשלוף , מצד אחד , ולקבוע מצד שני, נתונים מהזכרונות השונים וליצור קשר עם הסביבה החיצונית.

לא ניתן להרחיב את הזכרונות, ולא ניתן למחוק מהם דבר עפ"י רצון, כדי לפנות מקום לחומר נוסף.

לעומת זכרון זה, בנוי הזכרון של המחשב באופן שונה. הנתונים אשר נקלטים בממשקי הקלט של המחשב מועברים לזכרון פנימי (אשר ניתן לכנותו זכרון לטווח קצר של המחשב), והוא מהווה חלק מיחידת העיבוד המרכזית (יע"מ - CPU). מזכרון זה נשלפים נתונים לצורך עיבוד וחישוב מתמטי בו במקום. הוא נמחק כאשר לא מסופק למחשב זרם חשמלי דרוש. זכרון זה ניתן להרחבה כמעט בלתי מוגבלת.

ה"זכרון הארוך" של המחשב הוא זיכרון חיצוני. המחשב "רושם" על חומרים שונים (סרטים מגנטיים, ניירות) סימנים מסוגים שונים (סימון מגנטי, סימון של חריצים). הסימנים הללו יהיו קריאים ע"י המחשב לאחר מכן, כל עוד הם לא ייפגעו. שיטה זו היא למעשה ה"זיכרון לטווח ארוך" של המחשב. ואין הגבלה בכמותם.

אכסון המידע בזכרון המחשב נעשה ע"י סימנים חד-ערכיים. כלומר או 0 או 1, ללא אפשרויות אחרות. זאת כדי להתאים למערכת החשמלית שעליה המחשב מבוסס (ישזרם/אין זרם). בזיכרון זה, לכל תו ישנו צופן מספרי אשר יכול להיות מיוצג בשיטה הבינארית (הכוללת 0 ו- 1). הסימנים 0 ו- 1 יסמנו אין זרם או יש זרם (בהתאמה) - דרך איכסון אשר קל למחשב להתייחס אליה. כך ניתן לשנות נתון ע"י שינוי הזרם החשמלי.

המות, לעומת זאת, אינו בנוי בצורה דומה. במוח מצוי מספר רב של תאים עצביים, המכונים נוירונים, וכל תא מורכב מגרעין וממספר הסתעפויות. ההסתעפויות היוצאות מכל תא שכזה משמשות לו לערוצי התקשורת מהם הוא מקבל מידע או מעביר מידע. כל שינוי בסביבה הנקלט ע"י אחד החושים מביא ליצירת דחף חשמלי (המכונה גם "יריה"). דחף זה, אינו הדחף החשמלי המוכר, שהאלקטרונים נושאים אותו, כי אם דחף המיוחד לגוף החי, שבו יונים של חומרים מסויימים נושאים אותו. החומרים הללו מגיעים לנקודת מעבר מיוחדת, הנקראת סינפזיה, שבה מתבצעת מלאכת תרגום הדחפים לאותות כימיים. הסינפזיה מקשרת בין הנוירונים השונים, וכך מועבר מידע בתוך המוח.

מכאן, הזכרון שבמוח הוא מספר נזירותים המכילים יונים של חומרים כימיים שונים, אשר המתח החשמלי אותו הם יוצרים, מהווה קוד של דבר שאותו הנזירון זוכר. מצב ה"שקט" ומצב ה"יריה" הם שני מצבים ראשיים בהם התא נמצא בפעילות של העברת מידע, או במצב של חוסר פעילות שכוו.

מלבד האופן בו מיוצג המידע במוח, אם באותות חד משמעיים, ואם באותות שלא ניתן להגדירם בצורה ערכית, חשובה במיוחד צורת אירגון המידע במוח.

בדבר אירגון המידע, קשה לערוך השוואה מדויקת בין המחשב לאדם: עוד לא הצליחו לגלות כיצד מארגן האדם את המידע המצוי ברשותו, ואין כל הוכחות לקיומו של ארגון שכזה. מתגליות הפסיכואנליזה אנו למדים שהאדם אינו יכול לשלוט בכל המידע האגור בו, ויש חלקי מידע שאפילו שולטים באדם, מבלי שהוא ירצה בכך (השפעות התת-מודע). עם זאת, זכרון האדם מצליח להתמודד בצורה טובה מאד עם מידע מתחומים שונים בעת ובעונה אחת.

תופעה מוכרת לכולנו היא "ציפת" המידע. אדם העוסק בהעמקה רבה בנושא מסויים יכול לעבור לעיסוק אחר, שונה בתכלית, ולהגיע לרמה טובה מאד של התמצאות. הידע "צף" באופן מסתורי בלא שנוכל לתאר את התהליך במדויק. באותה מידה של מסתוריות ניתן להגדיר את חוסר האפשרות לחזות אילו פריטים "יצופו" קודם ואילו פריטים יעלו יותר מאוחר (הישנים או הטריים).

שתי הפעולות הללו, על חסרונותיהן ויתרונותיהן הרבים הן פעולות טבעיות שאין לנו, כמעט, כל אפשרות לשלוט בהן. במחשב, לעומת זאת, אנו חייבים ליצור מנגנון כדי להשתמש בכל המידע הרב שהוכנס לתוכו, מבלי לעבור שוב ושוב על כולו.

קיימות מספר דרכים ליצור מנגנון שכזה. כל דרך שימושית למקרים שונים, ולכל אחת מן הדרכים יש את יתרונותיה וחסרונותיה השונים. מאחר שהיכולת להשתמש במידע, ושיטות ארגון המידע הן נושאים עקרוניים וחשובים מאד - הוקדש להן סעיף נפרד.

ד) ממשקי הפלט

ממשקי הפלט של האדם מגוונים כמו ממשקי הקלט. האדם יכול להביע את עצמו ע"י תנועות פיסיות (פנטומימה), דיבור, יצירת סמלים ואמצעי קשר אחרים בעזרת גפיו וחומרים נוספים (ציורים, פסלים, מוסיקה וכו').

לעומתו, המחשב פולט את תוצאות החישובים שהוא מבצע ב"שפה" שהוא מבין אותה, אשר יש לתרגמה לשפה ברורה לאדם. את הפלט שלו מוציא המחשב באמצעי דפוס (מילים וציורים גרפיים) או באמצעים חזותיים אחרים (מוניטורים, מנורות וכו') כמעט בכל מחשב ישנה אפשרות לשילוב קולות כחלק מפלט המחשב, אך לרוב, קולות אלה הם דלים למדי, ואינם יכולים, בדרך כלל, להשתוות לדיבור אדם.

ישנם רובוטים אשר משלבים את חלק או כל ממשקי הפלט שתוארו כאן, ויש להם ממשק פלט נוסף - תנועה פיסית. למשל רובוטים הקיימים במפעלים לייצור מכונות מבצעים את עבודתם הפיסית, משמיעים צלילים ומציגים תצוגת נורות (לשם בקרה), אך זוהי פעילות שניתן לכנותה אינטליגנטית בע"מ. כלומר, כדי לבצע פעולה של צביעת מכונות, תצטרך כל מכונת לעמוד במקום מדויק, אחרת היא לא תיצבע כראוי. לעומת פעולת אדם, אשר היה מכוון את עצמו אל מקום המכונת. לעומת זאת, אם יובטח כי המכונות כולן תהיינה בדיוק באותו המקום, תהיה תוצאת הרובוט טובה מן האדם (מהירה, מדויקת, חסכונית).

לסיכום ארבעת הסעיפים העוסקים בחומרה, ניתן לאמר כי בממשקי הקלט טוב האדם מן המחשב; בממשקי האכסנה, לא ידוע עדיין מספיק על האדם כדי שנוכל להשוות אותו למחשב, או לנסות לחקות אותו. באשר לממשקי הפלט, שונים התיפקודים הנדרשים מן האדם לאלו הנדרשים מן המחשב. הבעיות הנוצרות בממשקי פלט ממוחשבים (כפי שתוארו לעיל), הם בעיה של אלגוריתמים לא מספיק טובים, כלומר בעיה של Software, אשר הסעיפים הבאים יידונו בהם.

שלושת הסעיפים האחרונים הם סעיפים המוגדרים במחשב כ"סעיפי תוכנה". שלושת הסעיפים הללו (למידה, הבנת שפה טבעית וזיהוי צורות, הם הנושאים המרכזיים שאנשים העוסקים באינטליגנציה מלאכותית מנסים להקנות למחשבים).

את הלמידה ניתן להגדיר כשיפור בהישגים כתוצאה מנסיון שנצבר. ניתן לאמר, כי הלמידה מחולקת ל-2 חלקים עיקריים:

- האפשרות לרכוש מידע וליצור ממנו בסיס מידע ונתונים (Data Base) נגיש וזמין.
- היכולת ליצור מן הידע הקיים + מצב חדש, ידע נוסף (ידע נוסף = ידע ישן + נתונים חדשים), ואף ליצור ידע השערת (בדרגות ביסוס שונות), על סמך עובדות חלקיות.

בנוסף לכך, עליו לפעול, תוך כדי הסתמכות על הידע ה"ישן" והידע ה"חדש", פעולות אלמנטריות (פעולות הסתגלות). כל זה, כאמור, בהימצאות בסביבה אשר לא היתה מוגדרת קודם לכן בבסיס המידע.

עדיין לא ידוע כיצד לומד האדם. עם זאת, ידוע שהחלק הראשון, כלומר בניית מאגר הידע, נעשה בעיקר ע"י הזיכרון. כפי שכבר נכתב, האדם לא יכול להחליט באופן רצוני איזה מידע הוא יזכור ולאיזה טווח (זכרון ארוך או קצר). לכן, פעולת זכירה של חומר רב היא פעולה קשה לאדם. לאחר פעולת הבניה של בסיס המידע, בא שלב בניית הקשרים בין חלקים בידע. א ידוע כיצד מתבצע שלב זה, אך לאחר שנוצר, מצוי במוח מה שידוע כ"בסיס מידע" (Data Base).

מכאן, יוכל מוח האדם להשיב תשובות למצבים שונים שיימצא בהם (תאורטיים ומעשיים), על סמך הידע שאגר, בנוסף לנתוני המצב בו הוא נמצא.

זוהי למעשה קליטת מידע ויצירת קשרים עם בסיס הידע הקיים, אשר מתרחב בכל רגע ורגע, בקליטת מידע חדש נוסף. גם על תהליך זה לא ידועים פרטים רבים ולכן קשה להשוות בינו לבין תהליכי המחשב. לכן גם לא ניתן לחקות תהליך זה שהוא בעצם חלק הארי בלמידה עצמה. לפעמים מתעוררת בעיה, שעל המחשב לבחור בדרך מסויימת לפתרון בעיה, מתוך מגוון רחב של אפשרויות. גם אם ניתן למחשב כלים שבהם יוכל להעזר כדי לבחור דרך מסויימת, הבחירה עלולה להמשך זמן רב ויעילותו של המחשב תיפגע.

דוגמא מוכרת היא משחק השחמט, בו על המחשב לנתח מספר רב של מצבי לוח שונים
(עד ¹⁰⁰35), לצורך בחירת מהלך אופטימאלי במשחק.

באופן תאורטי ניתן לכתוב עבור כל אחד מן המצבים הללו את המהלך הטוב ביותר, אך נסיון
כזה מעלה בפנינו שתי בעיות עיקריות:

1. אף אדם לא יוכל לספק לנו את כל המצבים הנ"ל, אם הוא לא ישתגע לאחר זמן מסויים,
בדאי יפלו טעויות רבות, שתיקוןן ידרוש זמן רב נוסף.

2. אף תכנית מחשב לא תהיה מסוגלת לנהל מספר כה רב של אפשרויות, ואם יהיה
למערכת מספיק זכרון, שליפת המהלך יארך זמן כה רב, עד כי זה לא יהיה כבר
משחק שחמט אשר ניתן לשחק כנגדו (הוא לא יוכל להיות שמש מבחינה מעשית).

לכן, כדי שמחשב השחמט ישחק נגדנו, בכל משחק, ברמה טובה יותר, עליו למצוא שיטות
לחיפוש מהלכים כך שידלג על המהלכים אשר מראש ניתן להחשיבם כחסרי סיכוי סביר להוביל
אותו לקראת נצחון. מהרגע שהמחשב ידע מראש איזהו המהלך שאין להתייחס אליו (לא
להמשיך ולבנות ממנו "עץ" אפשרויות), יוכל המחשב, בזמן המוקצב לו לחיפוש המהלך הטוב,
להתעמק בנייתו המהלכים האחרים.

לפיכך, אחת השיטות הנפוצות ללמידת מחשב נקראת Rote Learning (לימוד שיגרה). בשיטה
זו אוגר המחשב את המהלכים שאותם בחר.

אם הביאו המהלכים הללו לתוצאות טובות, המחשב יחזור על המהלכים הללו כשיגיע למצב
דומה, מבלי שיצטרך לבחור בין מספר מהלכים בצורה זו, המחשב יבנה לעצמו בסיס של
מהלכים מוצלחים, וישפר את מהירות משחקו לאחר כל משחק.

שיטה נוספת ליישום למידת מחשב נקראת Parameter Adjustment Learning (לימוד קידום
הפרמטרים). בשיטה זו, המחשב בוחר מהלך מסוים כתוצאה מפונקציה כלשהי, שהפרמטרים
שבה משקפים את שיקולי הבחירה השונים. אם המהלך התגלה כמהלך טוב, השיקולים שהנחו

את בחירתו ייחשבו כשיקולים טובים, וערכם היחסי בפונקציית הבחירה יגדל.
אם, לעומת זאת, יתברר שהמהלך אינו טוב, ערכם היחסי של השיקולים שהינחו את הבחירה במהלך זה יקטנו.

קיימות עוד מספר שיטות ללימוד, אך השימוש שנעשה בהן הוא מועט ולא אעמוד עליהן. ניתן לסכם ולאמר כי הלמידה קשורה קשר הדוק לאמצעי חיפוש פתרון, והיא למעשה אמצעי עזר לצורך החיפוש, וככל שהלמידה ויישומה טובות יותר, חיפוש הפתרון הטוב, מבין הרבה מאד פתרונות אפשריים, יהיה פשוט יותר.

קשה מאד להשוות בין שיטות הלמידה של האדם לאלו של המחשב, מאחר שהשיטות שבהן משתמש האדם לא ידועות. אף על פי כן, האדם מסוגל ללמוד הרבה דברים ובהרבה תחומים, המחשב מסוגל גם הוא להגיע ליכולת למידה טובה למדי, ואם יתוכנת בהתאם יוכל גם הוא ללמוד מספר רב של תחומים. עם זאת, צורת הלימוד במחשב דורשת מאמץ תכנותי רב.

ח הבנת שפה טבעית.

הבנה, בדומה ללמידה, הוא מושג קשה להגדרה, וניתן להגדירו באופנים שונים, כאשר באף אחד מהם לא תהיה טעות. אני מגדיר הבנה כיכולת לתרגם משהו ממצבו הקיים למצב אחר, כאשר משמעותו תשאר זהה למשמעות הביטוי ההתחלתי. המבין יוכל גם ללמוד ולהסיק מסקנות נדרשות, כאשר הוא יידרש לכך, עפ"י הביטוי ההתחלתי - כתוצאה ממהלך ההבנה.

ההבנה היא תהליך קשה מאד אף לבני אדם. אם למשל נאמר: "דני רוצה ללכת לסרט עם חיים", נבין כי דני רוצה ללכת לסרט יחד עם חיים. אך אנו עלולים לטעות. אם חיים משחק באותו הסרט, מה שישתמע הוא, שדני רוצה ללכת לסרט שחיים משחק בו. כך אנו יוצרים בהרבה מאד משפטים כפלי משמעויות. אך מכיוון שאנו מניחים הנחות הגיוניות, אנו מבינים את משמעות הדברים. אך כידוע, כדי להניח הנחות הגיוניות חייב להיות לנו איזשהו בסיס מידע. למשל: דני רוצה ללכת למשחק הכדורגל עם חיים ועם גרעינים. כעת, בהנחה שאנו יודעים שחיים אינו אחד השחקנים, אנו מבינים שחיים ודני ילכו למשחק יחד, כאשר יהיו בידיהם גרעינים. למחשב, הדבר יהיה קשה הרבה יותר. אם לא נגדיר לו מה הם גרעינים (להגדרה אגיע בהמשך), הוא לא יוכל להבחין בהבדל של "עם חיים" לעומת "עם גרעינים".

מכאן אנו מגיעים למסקנה כי , לכל מילה שאנו משתמשים בשפה שלנו , חייבת להיות הגדרה בזכרוננו של זה שאמור להבין (המחשב או האדם). אך גם כאן לא יצאנו ידי חובה.

ראשית , עלינו להגדיר כל דבר בהרבה מאד מימדים שונים. למשל , במילה "גרעינים" במקרה שלנו, על המבין היה לדעת כי הגרעינים הם מאכל , המורכב מחלקים רבים וקטנים , ושנאכל בעת צפיה , בד"כ בספורט. מכאן נוכל להסיק כי הגרעינים אינם ייצור כלשהו , וניתן לקחת אותם ביד ללא כל בעיה. אך מההגדרה הנ"ל , שהיא מספיק טובה לצורך הנ"ל , לא ניתן להסיק כי דני עלול ללכלך את סביבתו מזריקת הקליפות על הריצפה וכן לא ניתן להסיק כי הגרעינים לא ישביעו את רעבונו של דני , אם יהיה כזה וכו' . כלומר עלינו להוסיף להגדרת הגרעינים את העובדות כי הם עלולים לגרום ללכלוך , כי אינם משביעים וכו' . כך שיקשה עלינו למצוא הגדרה ממצה לכל התכונות של חפצים מסויימים , ובוודאי לא לכולם.

שנית , בהגדרה עלינו לשים לב לכל המשמעויות של אותו הביטוי או החפץ. למשל המילה "שדה" יכולה להתפרש כשדה קוצים או עצים וכו' , אך יכולה גם להתפרש כשדה משחק. להבנת השדה המבוקש , לא יעזרו לנו ההגדרות הטובות ביותר , אלא נצטרך להסיק מההקשר (Context) של המשפט , של הפיסקה ולפעמים של הקובץ כולו.

על שתי בעיות עיקריות אלה מנסים להתגבר בדרכים שונות:
על בעיית ההגדרה - לא ניתן להגדיר אף עצם הגדרה אופטימאלית. לכן , לצערנו , אף פעם לא תהיה ההבנה מושלמת , אלא היא תמיד תתקרב לגבול זה , ככל שיובהרו הפריטים הבעייתיים , ובסיס המידע יהיה רחב יותר.

על כן , השיטה המקובלת היא לסווג את עולם המושגים לשלושה חלקים עיקריים :

1. אובייקט חומרי.

2. אובייקט חי.

3. אובייקט מופשט.

בתוכם חלוקות משנה שונות , שיוצרות לכל מושג תחומי הגדרה מסויימים המבדילים אותו ממושג שונה לו. (גם בדרך זו קיימת בעיה גדולה).

על בעיית המשמעות - במקרה של בעיית משמעות, המחשב ישתמש בהגדרה המצויה בידו אודות החפץ. אם קיימת יותר מהגדרה יחידה - ינסה המחשב לקשור את אחת ההגדרות למילים אחרות באותו המשפט. לצורך קשירת הקשרים בין המלים, המידע חייב להיות מאורגן בצורה מיוחדת.

ז) זיהוי צורות

בעיית זיהוי צורה היא בעיה מורכבת מאד, אשר קשה לתת לה הסבר אצל בני האדם ומכאן, קשה עוד יותר להעניקה למחשב. רוב בני האדם מסוגלים לסווג צורה מסויימת להשתייכות אחת בלא שאף אחת מן הצורות תהיינה זהות זו לזו. ניקח למשל אותיות בעיתון. בן אדם מסוגל לקרוא את הכותרות הראשיות, הכותרות המשניות ועד לכתב הקטן ביותר, באותו האופן. כלומר ישנו סיווג מהיר מאד אשר משייך כל צורה שקיימת על דף העיתון לאות מסויימת אשר ממנה נוצרת מילה. כך - אותו אדם מסוגל ליצור סיווגים שונים של אותיות (לצורך הענין סימנים), אך לשמור על גמישות באשר לצורה וגודל האות. ומכאן נובע המושג - כתב קריא או לא קריא; חלק מן הקוראים לא היו מסווגים צורה מסויימת כאות מוגדרת, ועבורם יהיה חסימן לא קריא. עד היום, לא ידוע כיצד האדם מסווג צורה מסויימת כאות מסויימת וצורה דומה לה כאות שונה.

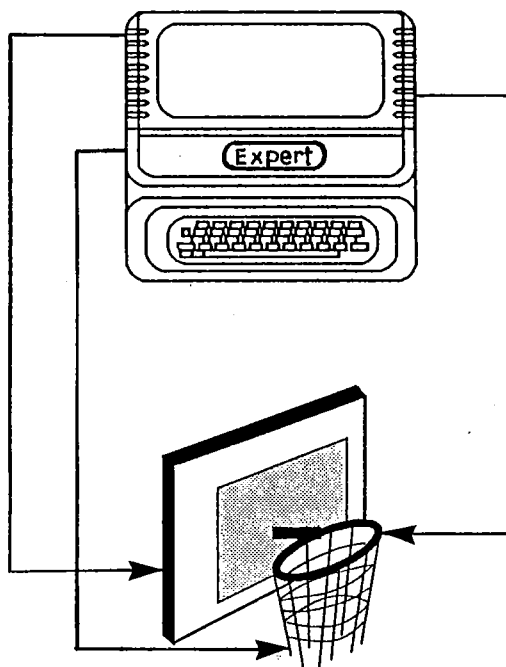
במחשב הבעיה מחמירה עוד יותר. כפי שכבר ראינו, קלט המחשב הוא קלט מאד מדוייק אשר סטייה קטנה ממנו עלולה לשבש מערך שלם, ומכאן שזיהוי צורה והכללתה (Classification) לסוג מסויים של צורות, היא בעיה קשה עוד יותר.

אחת השיטות המנסות להתגבר על הבעיה הנ"ל היא תאור הצורה של האות באופן חוקי-לוגי אשר הענות לוגית נכונה לו תזוהה בצורה מסויימת.

אקח למשל את תאור האות ר. ניתן לאמר כי ה - ר מורכבת מ"קו אופקי אשר אליו מחובר מצידו הימני קו אנכי כלפי מטה". עפ"י הגדרה זו ניתן להכליל מלבד האות ר, את האותיות ן, י, ו, ך ואפילו ז ו - ד. אך, אותה הגדרה לא תכלול את אותיות ה-ר שמרכיביהן אינם מאונכים זה לזה וכו'. מכאן, שיהיה עלינו להרחיב את ההגדרה במקום מסויים ולצמצמה במקום אחר. ניתן להגיע עד מהרה למסקנה כי לא קיימת הגדרה של 100% לאות ר (ולאף אות) ולהרבה מאד מן האותיות תהיה הגדרה אשר תוכל לכלול בתוכה מרכיבים נוספים.

שיטות מקובלות, שיש בהן גם שימוש, מכונים "פילטרים אנאלוגיים". פילטר אנאלוגי הוא מכשיר שעושים בו שימוש לתיקון עיוותים ותקלות שנוצרים בהעברת צלילים. כך, למשל, אם קיים סליל הקלטה, ואנו רוצים לשמוע מה המלים שהוקלטו בו ברגע שעבר מטוס מעל לאותו המקום והפריע להקלטה, נעשה שימוש ב"פילטר אנאלוגי" שיוכל לנטרל את רעש הרקע של המטוס.

פילטר אנאלוגי, בתחום זיהוי הצורות, יהפוך צורה שקיימת בה חריגה מהנורמה לצורה שיותר דומה לנורמה שהמחשב מסוגל להתייחס אליה. בצורה זו קיימת אפשרות בה נוכל להגדיר למחשב נורמה של סימנים, ובעזרת ה"פילטרים האנאלוגיים" ניתן יהיה להפוך כל סימן שבקלט לאחד מן הסימנים שהוגדרו קודם לכן כנורמה. המחקר והניסויים בתחום ממשיכים גם בימים אלו.



קפלן אריה , אינטליגנציה מלאכותית. משרד הבטחון , 1985.

הראל דוד , פרקי יסוד במדעי המחשב , משרד הבטחון , 1985.

Rich Elaine , Artificial Intelligence , McGraw-Hill , 1983.

Charniak Eugene and Mcdermott Drew: Introduction to Artificial Intelligence , Addison-Wesley , 1985.

Partridge Derek , Artificial Intelligence : Applications In the Future of Software Engineering , Ellis Horwood , 1986.

Uhr Leonard , Pattern Recognition , Learning and Thought Prentice-Hall , 1973.

Waterman Donald A. , A Guide to Expert Systems Addison - Wesley , 1986.

Winston Patrick Henry , Artificial Intelligence , Addison Wesley , 1984.

משפטים במתמטיקה כמקור להפתעות

מאת: נצה מובשוביץ-הדר
המחלקה להוראת המדעים והטכנולוגיה, הטכניון

ה ק ד מ ה

תוכנית הלימודים במתמטיקה בבית-הספר התיכון היא למעשה אוסף של מושגים ושל משפטים המקשרים בין המושגים. חלק מהמשפטים אנו מוכיחים בקפידה לפני שאנחנו מתירים את השימוש בתכניהם. אחרים שאותם איננו מוכיחים, אנו מדגימים, ויש גם כאלה שאותם אנחנו לא מוכיחים אף לא מדגימים, אלא פשוט מציגים ומיישמים מיד לאחר הצגתם. לעתים נקראים המשפטים בשם חוקים, לעתים בשם תכונות ולעתים בשם עובדות-יסוד, אך כולם הם הצהרות הניתנות להוכחה מתמטית.

במאמר זה אנסה לבסס את הטענה שכל המשפטים הכלולים בתוכנית הלימודים של בית הספר, להוציא אולי מספר קטן מאוד ומבוטל, טומנים בחובם הפתעה. בהמשך נראה שניצול נכון של פוטנציאל ההפתעה הזה, מאפשר להפוך את למידתם למשימה אינטלקטואלית הכרוכה בחוויה מרגשת.

מאמר זה מבוסס על מאמר מאת המחברת שהתפרסם ב -

For The Learning of Mathematics, An International Journal of Mathematics
Education Vol, 8, No. 3, Nov. 88, pp. 34-40.

המאמר הזה נכתב בעקבות הרצאה לזכרה של מרי קופר, ז"ל, שהקימה את המעבדה המתמטית באוניברסיטת חיפה, והוא מוקדש לה.

תודתי לענת אופר על עזרתה בהכנת גירסה זו.

ספרי הלימוד , תוכנית הלימודים והמורה למתמטיקה

מתמטיקה בכל הרמות היא "קופסה מלאה הפתעות". ספרים רבים כוללים שפע של פיתוחים מתמטיים מעניינים ביותר. (לדוגמא - Gardner 1956, Steinhaus 1983, Graham 1968, Radermacher and Topplitz 1970). למרות זאת, המתמטיקה של בית-הספר נתפסת, בדרך כלל, כמקצוע משעמם, רווי שגרה ומכשלות, בנושא שטוב לאותם ה"חכמים" שנהנים ממנו מסיבות לא לגמרי מובנות.

חלק מן האחריות לכך מוטל על ספרי הלימוד, שבמקרים רבים נכשלים בהעברת הטעם והעניין שבמתמטיקה. רובם מציגים קטעי תיאוריה, שאחריהם סדרות של תרגילים מבודדים ובעיות בלתי קשורות זו לזו. לעתים נדירות יש הערה היסטורית, משחק או חידה. בדרך כלל אין שום הערה לגבי משמעותו וחשיבותו של משפט, או לגבי האלגנטיות של הוכחה, ולכן נשאר על הקורא לפתח לעצמו התרשמויות אלה.

תוכנית הלימודים עצמה יש לה גם כן חלק באשמה. עבור רוב התלמידים היא עמוסת-יותר בנוסחאות אלגוריתמיות, ובדרך כלל לא מותירה זמן ומקום לחלקים המעניינים יותר בכל נושא. המועצה למדעי-המתמטיקה בארה"ב, בדונה בשאלה: "מה עדיין רלוונטי ובסיסי בתוכנית הלימודים במתמטיקה ומה לא?", קבעה שנחוצים שינויים בתוכנית כדי להביא להחייאת המתמטיקה מגן-חובה ועד לייב. (CBMS 1982, p.1). ההיעדר הכמעט מוחלט של נושאים כמו טופולוגיה, תורת הגרפים, קומבינטוריקה, גאומטריה לא-אוקלידית ואפילו חלק גדול של תורת המספרים, מתוכנית הלימודים, היא צד נוסף של אותה הבעיה. "... צריך להכליל מספר נושאים בתוכנית של בית הספר התיכון, שכולם חשובים יותר ממה שלדוגמא לומדים עכשיו בטריגונומטריה מעבר להגדרת הפונקציות הטריגונומטריות עצמן". (CBMS, p.5).

אף על פי שספרי הלימוד ותוכנית הלימודים אינם נקיים מאשמה, חלק ניכר מהאחריות לכך שהמתמטיקה הפכה עבור רוב התלמידים לגלולה המרה שצריך לבלוע בביה"ס כדי להישרד, נחה על כתפי המורים. מורה עייף ומשועמם שאינו משדר התלהבות, לא יכול לצפות לגישה שונה מצד תלמידיו. "חידוש הידע של המורים, מיומנויות ההוראה והתלהבותם לגבי עבודתם, דרוש בהחלט בכל רמות החינוך". (CBMS, 1983).

איך יכולים המורים להפוך את המתמטיקה בביה"ס לכזו שתשקף את ההתרגשות וההפתעה הגלומים במתמטיקה? אחרי הכל, המורים אינם יכולים להרשות לעצמם לבזבז את הזמן הדרוש כדי להציג רעיונות יפים שאינם כלולים במסגרת התוכנית כמו שלונג (1982) ואחרים מציעים, ויהיו אלה מעניינים ומניעים ככל שיהיו. מאמר זה מנסה לתת תשובה לשאלה זו במסגרת התיפקוד היום-יומי של המורה למתמטיקה. ננתח את גורמי ההפתעה במשפטים של המתמטיקה התיכונית ונדגים כיצד חלק ניכר משיעורי המתמטיקה בביה"ס יכול להפוך לנסיון מרגש מבחינה אינטלקטואלית, כתוצאה מגרימת הפתעה שמעוררת בדרך הטבע סקרנות המניעה ללמידה. אמת הדבר, תיכנון שיעור כזה מצריך השקעת זמן ומחשבה. במקרים מסויימים זהו אתגר של ממש להפוך, נושא שנראה שגרתי למדי, למפתיע. כאן נכנסים לתמונה מכשירי המורים ומפתחי תוכניות לימודים. פיתוח חומר הוראה שיקל על המורים את יצירת אפקט ההפתעה, ותוכניות להכשרת מורים שמעודדות בניית מערכי-שיעור במטרה ליצור אפקט זה, הם הכרחיים. עם זאת המלאכה נשארת בידי המורה לתכנן את השיעורים היומיים כך ששיעור אחד לא יהיה דומה לקודם לו. להיפך, כל שיעור צריך להיות שונה. כל יום צריך להביא איתו משהו חדש ללומד - שיטה טובה יותר לפתרון בעיה שנפתרה אתמול, דרך קצרה יותר להגיע לתוצאה שהתקבלה בשיטה מסובכת, קשר בין עובדות שנראות מנותקות ובלתי תלויות, משהו שנראה יוצא דופן בחוק מוכר, וכו'.

טבעה של ההפתעה במתמטיקה

אדם מופתע אם משהו קורה באורח בלתי צפוי, ועוד יותר אם מה שקורה הוא בניגוד למצופה. בחיים, כידוע, חלק מההפתעות הן משמחות וחלק לא. כשמדובר בלימוד מתמטיקה, מדובר כמובן בהפתעה במישור האינטלקטואלי, כמו למשל גילוייה של עובדה שקשה לחזות את קיומה. כדי להיות באמת בלתי צפויה, העובדה שמתבררת חייבת להיות לא-טרוויאלית, כלומר באופן אינטואיטיבי אי אפשר לשער שהיא אכן אמיתית, ואולי אפילו באופן אינטואיטיבי צפוי שתהיה שיקרית. טענתי היא שכל משפט מתמטי הוא עובדה כזאת. טענה זאת דורשת כמובן הוכחה. בהיותה טענה לא מתמטית, אלא טענת-על אודות המתמטיקה, השייכת יותר לפסיכולוגיה של המתמטיקה מאשר ללוגיקה מתמטית, לא ניגש להוכיחה באמצעים דדוקטיביים. במקום זה, נבסס אותה באמצעות הדגמתה על אוסף של משפטים מתמטיים מתוך תוכנית הלימודים של

בית הספר. אך פטור בלא-כלום מבחינה דדוקטיבית אי אפשר, על כן קודם לכן, ננסה לנמק את הטענה הזאת על דרך השלילה.

נחשוב על משפט כלשהו וננסה "להיכנס לנעליו" של המתמטיקאי הראשון שגילה ופירסם אותו. אף כי באופן הסטורי לא תמיד ניתן להתחקות אחר עקבותיו של אותו מתמטיקאי, ברור שאם לא היה משהו חדש ומרתק במשפט זה, המתמטיקאי הראשון שגילה אותו לא היה טורח לפרסמו, הקהילה המתמטית לא הייתה מתעניינת בו, והמשפט לא היה מוצא את דרכו לתוכנית הלימודים במתמטיקה. נחזור אם כן ונטען: כל משפט מתמטי אוצר בתוכו תגלית מפתיעה.

לפני שנפנה להדגמת ההפתעה שבמשפטים פשוטים מתוכנית הלימודים, נבהיר נקודה אחת. הפתעה אינטלקטואלית נותנת לנו בד"כ הרגשה של סיפוק. הערכת החוכמה שמאחורי העובדה המתבררת, הנאה מהפקחות שבהוכחתה ורצון ללמוד עוד עובדות מפתיעות כאלה. הפיכת משפטים מתמטיים לתגליות בלתי צפויות, ואולי אפילו לכאלה שעומדות בנגוד למשוער, זהו הרעיון הבסיסי של הוראת המתמטיקה בדרך ההפתעה. דרך הוראה כזאת איננה מטרה בפני עצמה, כמובן. לעומת זה, זהו אמצעי די מבטיח להשגת התענינות של התלמידים, שהיא כידוע גורם מכריע בהצלחה בלימודים.

כעת נעבור להדגמת טבעה של ההפתעה האינטלקטואלית החבויה במתמטיקה של בית-הספר. מדגם המשפטים נבחר כך שיכיל דוגמאות לאורך כל תוכנית הלימודים, וידגים עשרה טיפוסים שונים של הפתעה מתמטית:

1. תכונה משותפת לאוסף מקרי של עצמים מתמטיים.
2. שינוי קטן שגורם להבדל גדול.
3. קיום בלתי צפוי, או אי-קיומו של הצפוי להתקיים.
4. תכונה נדירה מסתברת כבת-הכללה (וביותר מכיוון אחד, אולי).
5. הקבלות שמתברר שאינן אנאלוגיות.
6. נימוק הגיוני שמתערער.
7. השערה שעולה מחקירה אינדוקטיבית, מופרכת על ידי דוגמא נגדית.
8. תהליך גבול הדרגתי מסתיים בגבול שהוא ממצא חדש לגמרי.
9. אלגוריתם יחיד פותר אינסוף בעיות שונות.
10. פרדוקסים מתמטיים.

פירוש סוגי ההפתעות המתמטיות

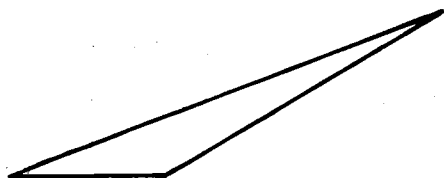
1. תכונה משותפת לאוסף מקרי של עצמים מתמטיים

אפשר להפוך כל משפט להפתעה ע"י חיפוש העניין הבלתי צפוי שהמשפט טוען להיותו נכון. לעיתים המשפט כה ידוע שקשה למצוא את הנקודה הזאת. לדוגמא, מה כה מרגש בטענה שסכום הזוויות הפנימיות במשולש הוא 180° ? כדי להגיע לפוטנציאל ההפתעה שבמשפט, עליך להעמיד פנים לרגע כאילו שמעולם לא שמעת עליו. נאמר שאיננו יודעים שסכום הזוויות הוא 180° . האם יהיה זה הגיוני לחשוד שלכל המשולשים, בכל צורה וגודל - שווי שוקיים, שווי צלעות, חדי זוויות, ישרי זווית, קהי-זווית, גדולים, קטנים, צרים ורחבים - לכולם חייב להיות אותו סכום הזוויות הפנימיות? האין זה מפתיע "לטירון" בנושא לגלות שסכום הזוויות של סוגי משולשים שונים הינו קבוע? המשימה כפי שמוצגת בשרטוט 1 תראה אולי לחלק מהקוראים, מטעה, ואולי אפילו לא הוגנת. הנסיון מלמד את ההיפך. לתלמידים שאינם יודעים דבר על המשפט הזה, זה נשמע די הגיוני לחפש את הסכום המקסימלי של הזוויות הפנימיות במגוון משולשים. לכן, התוצאות גורמות להם להרמת גבות. בהתחלה הם חוששים להודות שחבדלים הם מאד קטנים ובעצם קשה לדבר על מקסימום. מטרת המשימה היא בדיוק לעזור להם לצבור בטחון בכך שהסכום קבוע ואין מקסימום, במגבלות של טעויות המדידה, כמובן.

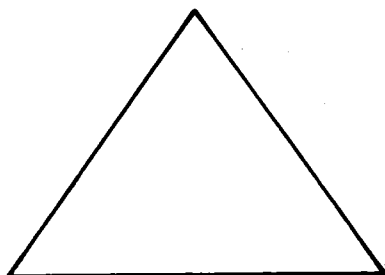
כדי להגדיל את מידת ההערכה של התלמידים כלפי הטענה החזקה הזאת, כדאי מיד אחרי המשימה המתוארת בשרטוט 1, לבקש מהם לראות אם הם יכולים לבנות או לצייר משולש שאין לו התכונה הזאת, כלומר למשל שסכום זוויותיו הוא 120° . כל עוד הם מאמינים שיש אחד כזה הם יחפשו אותו. התסכול המצטבר דרך נסיונות-שווא לבנות משולש עם יותר או פחות מ- 180° , הינו מאד חשוב להפנמת תוכן המשפט. אנו, המורים, חייבים להיות אמיצים מספיק להטיל משימות כאלה, כיון שהן מדגימות ומלמדות לא פחות ממשימות בהן ההצלחה מובטחת. יש לקח שאפשר ללמוד מהחיפוש "הלא-פור" הזה. יתכן שתלמידים אחדים יהפכו בנקודה זו נחושים בדעתם וירצו להוכיח שאין טעם לחוסף ולחפש, כי הסכום קבוע עבור כל המשולשים. זהו שינוי עצום לעומת האינטואיציה הראשונית שהיתה להם קודם לכן כשברצון נגשו למשימה של חיפוש המשולש בעל סכום זוויות מקסימלי.

שרטוט 1: האם קיים בין המשולשים הבאים משולש שסכום הזוויות הפנימיות בו הוא הגדול

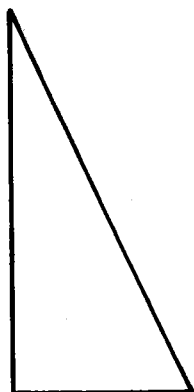
ביותר? איזהו?



משולש 2



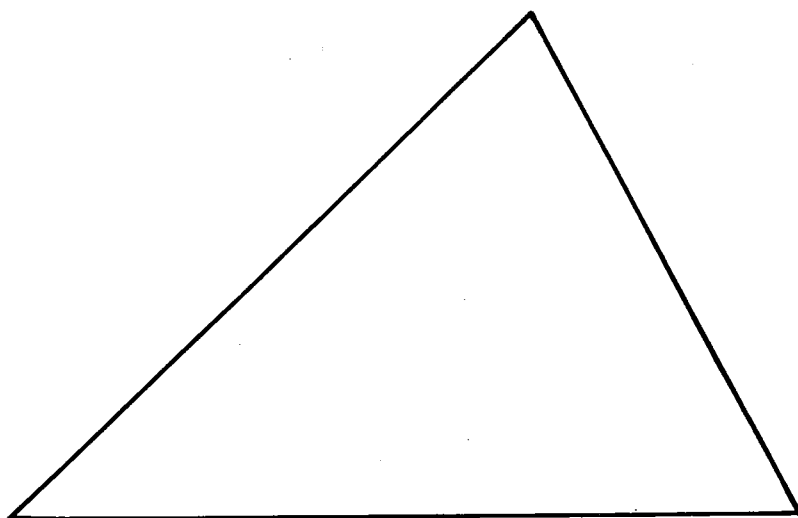
משולש 1



משולש 4



משולש 3



משולש 6



משולש 5

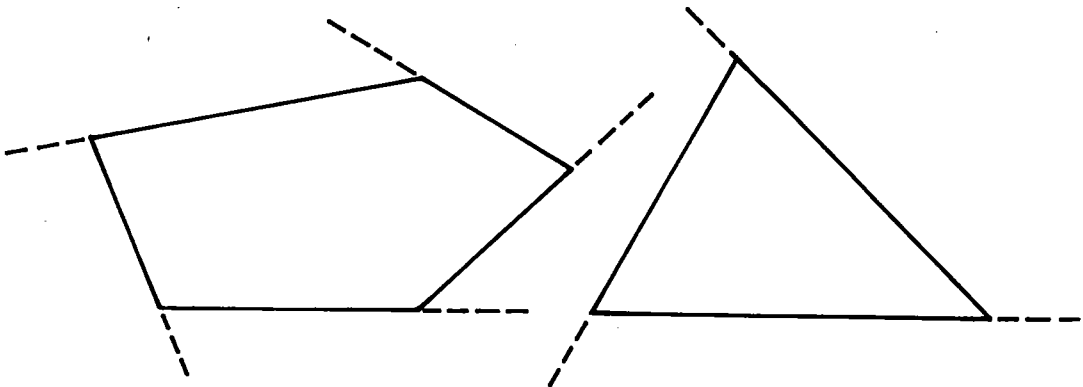
2. שינוי קטן שגורם להבדל גדול

המשפט על סכום הזוויות הפנימיות במשולש מעלה את השאלה האם סכום הזוויות הפנימיות במרובעים גם הוא 180° ? לא לוקח זמן רב להגיע לדוגמא נגדית, ולענות בבירור - לא. למשל, בריבוע יש 360° מעלות. בכל זאת נותרת השאלה - האם הסכום קבוע עבור כל סוגי המרובעים? - כאן דרושה מידה לא מבוטלת של הבנה כדי לחוש שאכן כן, ואז להוכיח שהסכום הקבוע הוא של 360° .

כך נוכל להמשיך לחקור את סכום הזוויות הפנימיות במחומשים, במשושים, וכו' עד שיתברר שיש כאן דפוס כלשהו. עבור n מצולע, סכום הזוויות הפנימיות הוא פונקציה של מספר הצלעות n ,

$$S(n) = (n - 2)180^\circ$$

ועתה, מה בקשר לסכום הזוויות החיצוניות? הדיון הקודם עלול לגרום אולי לציפיות שסכום הזוויות החיצוניות, בדומה לפנימיות, יהיה קבוע לכל מצולע ותלוי במספר הצלעות. כאן מחכה הפתעה נוספת. סכום זה אכן קבוע, אבל הוא בלתי תלוי ב- n . הסכום הוא 360° עבור כל מצולע בלי קשר במספר צלעותיו. לא ייאמן, הלא כן?



שרטוט 2: סכום הזוויות החיצוניות של כל מצולע הוא 360°

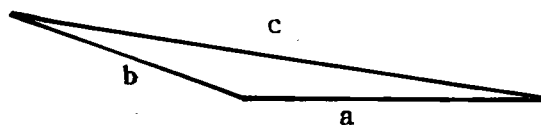
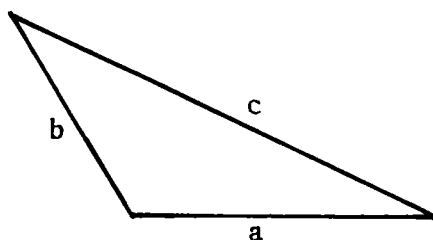
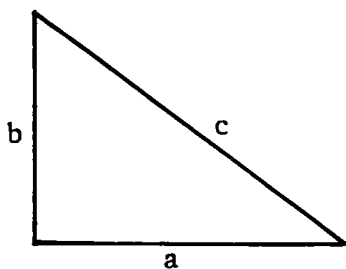
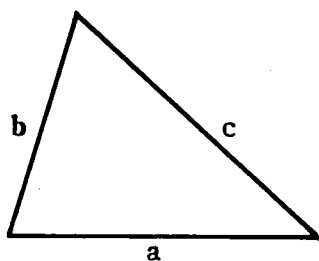
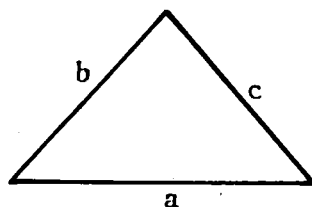
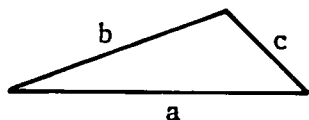
3. קיום בלתי צפוי או אי-קיומו של הצפוי להתקיים

כדי ליצור או לשמר את מתח-ההפתעה אפשר, במקרים מתאימים, להביא תלמידים לכך שיחפשו משהו שקיים, אם מניחים שהם אינם מצפים לכך שקיומו ייתכן, ואז להפתעתם מתברר שהוא קיים ולעיתים אף מסתבר שיש אינסוף כמותו בנמצא. פעמים אחרות אפשר לגרום לכך שתלמידים יחפשו משהו שהם מאמינים בקיומו ובאפשרות למצוא אותו, ולמרות שהם עורכים חיפוש יסודי - הם מעלים חרס בידם. אז מוכיחים שהדבר לא עלה בידם לא מחמת חוסר היכולת שלהם, אלא מפני שאי אפשר למצואו, כי הוא פשוט לא קיים.

ניקח לדוגמא את משפט פיתגורס. לתלמידים שלא שמעו אודותיו מימיהם, יהיה זה אתגר של ממש למצוא משולש שבו התכונה שריבוע צלע אחת, (הגדולה, באופן טבעי), שווה לסכום הריבועים של שתי הצלעות האחרות. על-סמך שרטוט משולשים אחדים כלשהם והתבוננות בדוגמאות, קשה להאמין שיש אפילו משולש אחד כזה. אין צורך להירתע מהטלת משימה כזאת על התלמידים. אדרבה, נאפשר להם להקדיש זמן לחפוש אחר משולש כזה, ע"י שמוש בכלים לשרטוט, מדידה וחישובי-שטה. אם הם יביעו תיסכול אחר זמן מה, נעודד אותם ע"י הבטחה שפיתגורס, כבר במאה ה-6 לפנה"ס, מצא שיש אינסוף משולשים בעלי התכונה הזאת. אם למרות העידוד, הם עדיין לא מוצאים משולש כזה, נציע להם דרך חיפוש יותר שיטתית של סריקת משפחה של משולשים שיש להם שתי צלעות חופפות בהתאמה, לדוגמא צלע אחת בת 3 ס"מ ואחת בת 4 ס"מ, והזווית הכלואה בין שתי הצלעות האלה משתנה, למשל בכל משולש הזווית הזאת גדולה ב- 10° מאשר בקודמו (שרטוט 3).

אפשרות אחרת היא לתת להם רמז דרך דיון בממצאים שלהם עצמם עד לאותה נקודה. למשל ככה: "אפשר לראות את המשולשים שבדקת עד כאן? (המורה מראה על משולש מסוים מבין המשולשים שמוצגים על הדף) "אני רואה שיש לך כאן משולש חד-זוויות וחישוביך מראים שסכום שני הריבועים גדול מהריבוע השלישי, והנה זה משולש קהה-זוויות והסכום שקיבלת קטן מדי. האם יש עוד סוג של משולשים שעוד לא בדקת?"

בכל המשולשים שלפניך $a = 4$ ס"מ $b = 3$ ס"מ
 עליך לסמן את המשולשים (ש) שעבורו נכון: $a^2 + b^2 = c^2$.



שרטוט 3: חיפוש שיטתי אחרי התכונה הפיתגורית.

אחרי זמן מה, שלמורה "המובטל" ייראה כנצח, תלמיד אחד ימצא משולש כזה. בתנאי, כמובן, שהמורה סבלני די הצורך ומאמין בערכו של המאבק המתמטי שאותו חווים התלמידים, בשעה שהוא, המורה, נמנע במכוון מ"להאכיל בכפית" כדי לא לגזול מהתלמידים את ההנאה מהתגלית. אחרי זמן מה, תלמיד נוסף ימצא משולש כמבוקש (ישר-זווית) ועוד אחד, ועוד אחדים. לבסוף, יעלה החשד שכל ישרי הזווית הם בעלי אותה תכונה. "כל" פרושו בלי אף יוצא דופן אחד. חלק מהתלמידים לא יהיו מוכנים עדיין "לקנות" את זה. כדי לחזק את אמונתם, אפשר להציע לספקנים לבסס את חששם על ידי כך שיחפשו משולש ישר-זווית שאין לו התכונה הזו. לא תהיה להם ברירה אלא להכיר בכך שאף אחד בכיתה לא מצא אפילו משולש ישר-זווית אחד כזה. אבל, אולי מישהו אחר עלי אדמות ימצא? כדי להיות בטוחים שלא, חייבים לחזק את שאין כזה. עכשיו התלמידים מוכנים לכך. הם חוו את ההתנסות ופיתחו תוך כדי כך את ההערכה ליחודיותה של התכונה.

4. תכונה נדירה מסתברת כבת-הכללה (וביותר מכיוון אחד, אולי)

נתקדם עוד צעד אחד עם הדיון הקודם: - האם יש משולש אחר שאינו ישר-זווית, שיהיה בעל התכונה של סכום ריבועי הצלעות הנ"ל? תלמידים שיתחילו לעבוד על זה, יתאכזבו מהר כי לא יצליחו למצוא משולש כזה. ואולי לא קיים?

אכן, יתברר שכך הדבר. בק משולשים ישרי זווית התבררו בתכונה הזאת. למסלול ההפתעות יש שני כיווני התפתחות מנקודה זאת. (באופן אישי, אני מעדיפה את השני):

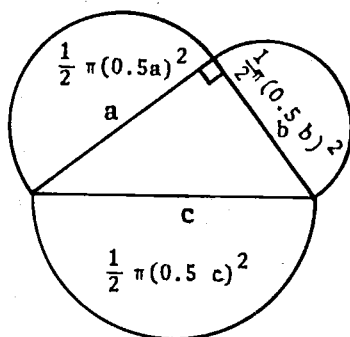
(א) מה לגבי משולשים קהי-זווית וחד-זווית? האם בהם יש קשר כלשהו בין סכום ריבועי שתי הצלעות הקטנות לבין הריבוע של השלישית? קשה להאמין, אבל יש. הריבוע של הצלע הגדולה שווה לסכום ריבועי האחרות $\pm$ "משהו". ההכללה האיכותית יכולה לבוא מהניסוי הקודם. כידוע, באופן כמותי, ה"משהו" הזה שווה לפעמיים השטח של המלבן הנוצר ע"י אחת משתי הצלעות הקטנות והיטלה של השניה עליה, (זהו משפט הקוסינוסים).

(ב) מה לגבי מצולעים אחרים, דומים זה לזה, הניבנים באורח דומה על שלוש הצלעות של משולש ישר-זווית? האם השטח שניבנה על היתר שווה לסכום השטחים שהצורות הדומות שניבנו על שתי הצלעות האחרות, או שמא התכונה הנדירה ייחודית לריבועים בלבד? מפתיע אולי ובכל

זאת נכון שאין שום דבר מאגי בריבועים בענין זה. משפט פיתגורס ניתן להכללה לצורות אחרות הבנויות על צלעותיו של משולש ישר-זווית בתנאי שהן צורות דומות (שרטוט 4).

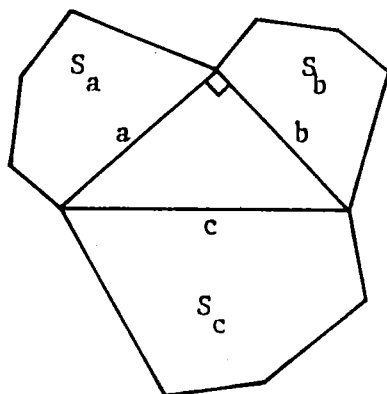
$$a^2 + b^2 = c^2 \implies \frac{1}{8} \pi a^2 + \frac{1}{8} \pi b^2 = \frac{1}{8} \pi c^2 \implies$$

$$\frac{1}{2} \pi (0.5a)^2 + \frac{1}{2} \pi (0.5b)^2 = \frac{1}{2} \pi (0.5c)^2$$



$$S_a : S_b = a^2 : b^2 ; S_b : S_c = b^2 : c^2 \implies S_c = \frac{S_b c^2}{b^2} = \frac{S_b (a^2 + b^2)}{b^2} =$$

$$= \frac{S_b a^2}{b^2} + S_b = S_a + S_b$$



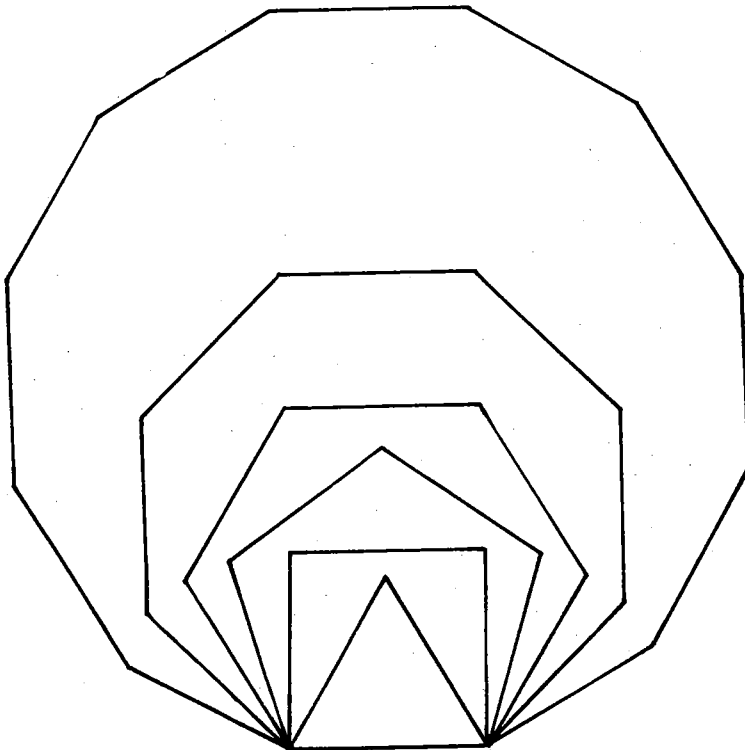
שרטוט 4: הרחבת משפט פיתגורס לחצאי עיגול ולמחומשים דומים

5. הקבלות שמתברר שאינן אנאלוגיות

ככלל, רצוי מאוד לשזור אנלוגיות תלת-ממדיות במהלך הוראת הנדסת המישור. לדוגמא: המקום ההנדסי של הנקודות במישור הנמצאות במרחק קבוע מישר נתון, הינו זוג של ישרים מקבילים לישר. במרחב זהו גליל.

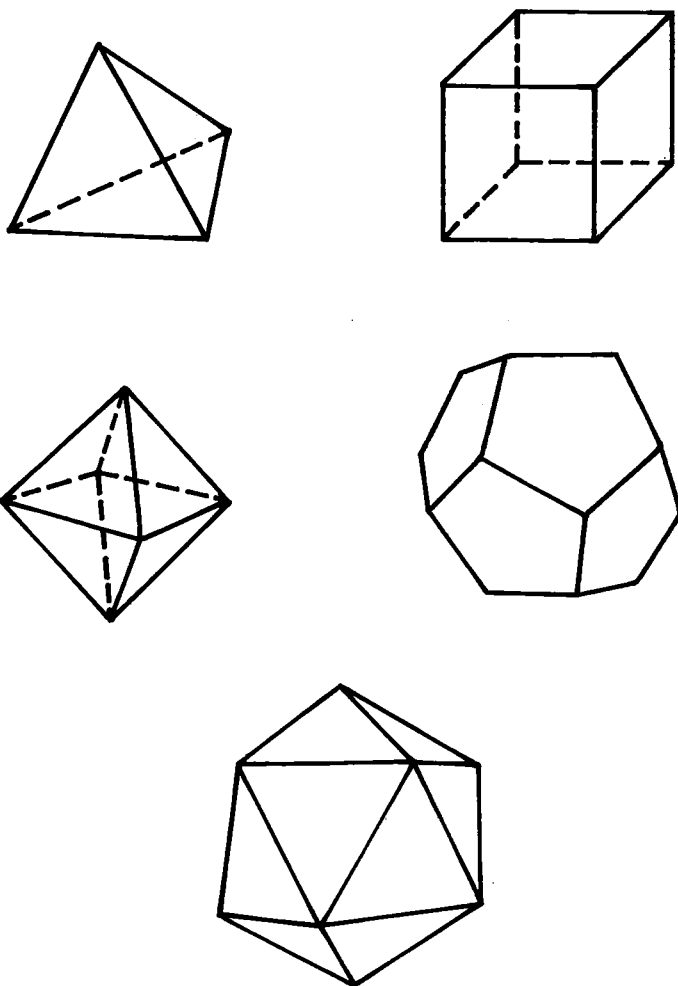
דרך נקודה נתונה, על ישר נתון, יש במישור רק ישר אחד שניצב לישר הנתון, אבל במרחב יש מספר אינסופי של ישרים, שכולם יוצרים את המישור היחידי הניצב לישר הנתון בנקודה זו. הרבה משפטים בהנדסת המישור ניתנים להכללה למרחב התלת-מימדי. דבר זה מאפשר להציג יחסים במרחב תוך כדי הוראת הנדסת המישור. יחד עם זאת, נדרשת זהירות ובדיקה מדוקדקת לפני שעושים הכללה כלשהי, כיוון שלא כולן מגשימות את הציפיות. ניקח לדוגמא, מצולעים משוכללים.

כפי שכל מי שלומד גיאומטריה יודע, עבור כל ערך של $n > 2$, יש בדיוק מצולע משוכלל אחד (עד כדי דמיון) בעל n צלעות (שרטוט 5). במלים אחרות, יש אינסוף מצולעים משוכללים שונים.



שרטוט 5: מצולעים משוכללים

מאד הגיוני לצפות שדבר זה יהיה נכון גם למקרה התלת-מימדי המתאים, כלומר לפאונים משוכללים. כמה פאונים משוכללים יש, אם כן? האם קיים פאון אחד משוכלל בעל n פאות עבור כל ערך של $n > 2$? - לא. מספרם אפילו לא מתקרב למספר סופי גדול. תלמידי תיכון יכולים להוכיח שקיימים לכל היותר חמישה פאונים משוכללים. שלושה מתוכם נוצרים ממשולשים שווי צלעות, אחד נוצר מריבועים ואחד ממחומשים משוכללים (שרטוט 6) - חמישה גופים משוכללים ולא יותר. בעצם, גם לא פחות, אבל כדי להוכיח חלק זה יש צורך במתמטיקה יותר גבוהה (Dorrie, 1965).



שרטוט 6 : פיאונים משוכללים

ועוד דוגמא:

טור חשבוני וטור גיאומטרי הינם אנלוגיים בכמה מובנים - יש הפרש/יחס קבוע (בהתאמה) בין כל שני איברים עוקבים. כל איבר הוא, הממוצע החשבוני/גיאומטרי (בהתאמה) של שני האיברים הצמודים לו.

$$a_n = \frac{(a_{n-1} + a_{n+1})}{2} \quad \text{בהתאמה .} \quad a_n = (a_{n-1} \cdot a_{n+1})^{1/2}$$

האיבר ה- n בכל אחד:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{ו-} \quad a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{בהתאמה.}$$

אחרי שלומדים את נוסחת הסכום של n האיברים הראשונים בטור החשבוני

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

סביר לשער שבטור גאומטרי הסכום, באופן אנאלוגי, יהיה:

$$S_n = (a_1 a_n)^{n/2}$$

בחינת השערה זו מביאה הפתעה. איד זה שהפעם האנאלוגיה לא עובדת?

תלמיד שמבין שהנ"ל הוא ביטוי למכפלת n האיברים הראשונים בטור ולא לסכומם, הגיע להבנה עמוקה של האנאלוגיה המתמטית.

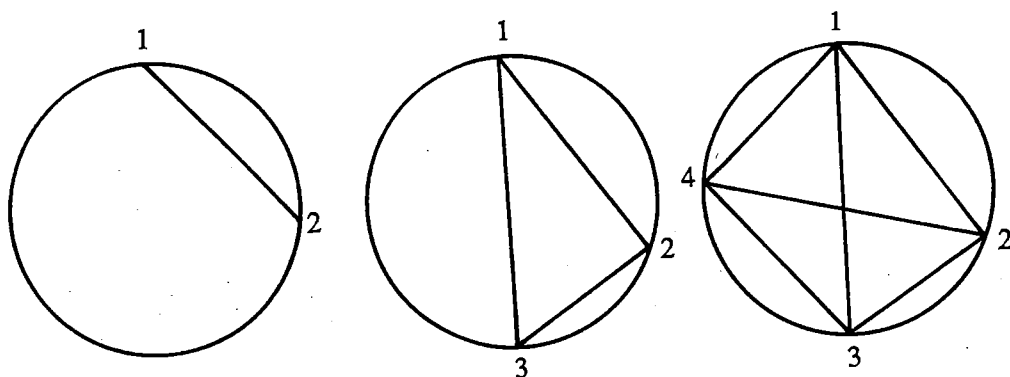
6. נימוק הגיוני שמתערער

נתבונן בעוד משפט ידוע מביה"ס התיכון. מספרים ראשוניים נעשים נדירים בהדרגה ככל שמתרחקים במעלה ציר המספרים. ככל שממשיכים לעלות בציר המספרים יש סיכוי יותר גדול שהמספר הטבעי שאליו נגיע יהיה בר-חילוק באחר קטן ממנו. בכך אין שום דבר מפתיע. לפי אותו הגיון, סביר לשער שיש מקום על ציר המספרים, שמעבר אליו כל המספרים הטבעיים כבר אינם ראשוניים. לכן זה מאד מפתיע לגלות שהעובדות הן פשוט שונות, ושמשפר המספרים הראשוניים איננו סופי. לא משנה כמה נרחיק לעלות בציר המספרים, תמיד נפגוש מספר שלא מתחלק באף אחד מהקודמים לו (חוץ מ-1). ההוכחה עצמה היא מיוחדת ומאד אלגנטית, וחבל להחמיצה בבי"ס התיכון. לירון (1985) מציע איד אפשר בדרך "רכה" לעשות זאת.

7. חשערה שעולה מחקירה אינדוקטיבית , מופרכת על ידי דוגמא נגדית יש הרבה הדמיוניות להפך את התלמידים לזהירים לגבי הכללות מדוגמאות ספציפיות . במקביל למשימה החשובה של זיהוי דפוס בר-הכללה יש ערך רב ללימוד על השערות שנכשלות במתמטיקה . דוגמא נגדית אחת ובנין שלם מתמוטט.

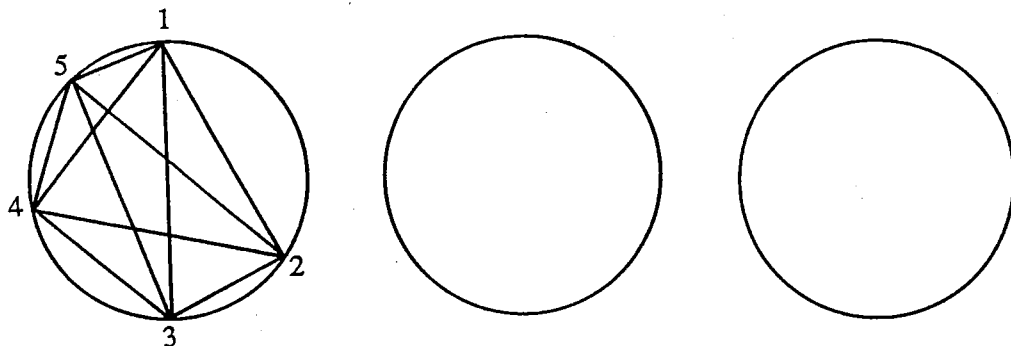
דוגמא יפה להשערה שעולה מחקירה אינדוקטיבית של שורה ארוכה של מקרים פרטיים ומופרכת ע"י דוגמא נגדית, מופיעה במאמר של א. סירי (מסרים ג-2 , 1989) . דוגמא אלמנטרית יותר היא: 60 מתחלק ב-1 , ב-2 , ב-3 , ב-4 , גם ב-5 , ואפילו ב-6 . עושה רושם שיש קרקע מספיק לחכללה , ש"המספר 60 מתחלק בכל מספר טבעי קטן ממנו" ...

דוגמא אחרת היא מספר האזורים הנוצרים בעיגול ע"י חיבור בקטע של כל שתיים מתוך n נקודות על שפת העיגול.



מספר הנקודות על המעגל	2	3	4	5	6	...	n
מספר האזורים המקסימלי	2	4	8	16		...	a_n

הקוראים מוזמנים לבדוק (בזהירות!) אם מספר האיזורים נשמע לכלל $a_n = 2^{n-1}$ גם עבור $n = 6$. ליצירת האיזורים יש לבחור את הנקודות אחת אחת ולחבר כל נקודה חדשה אל כל קודמותיה. חשוב לבחור את הנקודה הבאה כך שהקטעים המחברים אותה עם קודמותיה לא יעברו בנקודה משותפת לשני קטעים קודמים (כי אם זה קורה "מפסידים" איזור).



קל מאוד ליצור הפתעה ע"י הצגת סדרות של דוגמאות פרטיות זהות שנשענות על דפוסי הכללה שונים, כלומר סדרות שאיבריהן הראשונים מתלכדים ובכל זאת האיבר הכללי שלהן לא זהה. דבר זה מועיל מאד כדי לשכנע שאסור להכליל משורה של מקרים פרטיים. למשל, כדי ליצור סדרה ששלושת איבריה הראשונים הם 1, 2, 3 אבל $a_n \neq n$, מספיק לשים לב לכך שהביטוי $(n-1)(n-2)(n-3)$ מתאפס עבור 1, 2, 3 ומקבל ערך 6 עבור $n=4$. על כן $(n-1)(n-2)(n-3) + n$ יתן 1, 2, 3 עבור $n=1, 2, 3$ (בהתאמה), עבור $n=4, 5, \dots$ נקבל $a_n = 10, 29, \dots$ בהתאמה וכו'. באופן דומה, הסדרה $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n^2$ מתלכדת עם $a_n = n^2$ עבור $n=1, 2, 3, 4$ אבל מ $n=5$ ואילך הן שונות.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{הסידרה}$$

$$a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{עם}$$

עבור $n=1, 2, 3, 4, 5$ ואחר כך דרכיהן נפרדות.

באופן כללי לכל סדרה סופית של מספרים, קיימים ביטויים רבים ושונים שהם פונקציות של n הנותנים את איברי הסדרה הסופית כאיברים ראשונים ואחר כך איברים שונים לגמרי. לכן שאלות מהסוג "יש להמשיך את הסדרה, $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ " או "מהו האיבר הכללי של הסדרה $1, 3, 6, 10, \dots$ " או "מהו האיבר הבא בסדרה $2, 4, 6, 8, 10, \dots$ " הן שאלות שהתשובה עליהן איננה יחידה!

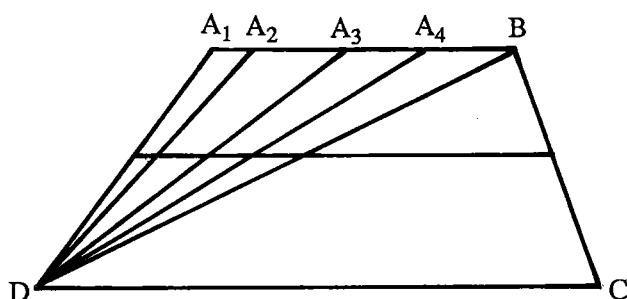
לסיום סעיף זה, נחזור ונצביע על כך שהפתרון לבעיית איזורי - המעגל שלעיל הוא

$$a_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24} \text{ שמתלכד במקרה עם } 2^{n-1} \text{ עבור } n = 2, 3, 4, 5.$$

המסקנה הדידקטית שאני ממליצה עליה, לאור קיומן של דוגמאות נגדיות להשערות אינדוקטיביות, היא שכל משימה לתלמידים שכוללת חיפוש אחרי דפוס והעלאת השערה מכלילה תסתיים בשאלה כגון: "כיצד אפשר להוכיח או להפריך את השערתך?" השאלה תשאיר את שתי האפשרויות פתוחות: להוכיח או להפריך את ההשערה. מספר דפוסים צריכים להיות ברי הפרכה, אחרת תלמידים מקבלים את הרושם המוטעה שהשערות הן תמיד בנוות הוכחה, דבר אשר מפחית את החשיבות של הוכחת השערות.

8. תחליך גבול הדרגתי מסתיים בגבול שהוא ממצא חדש לגמרי

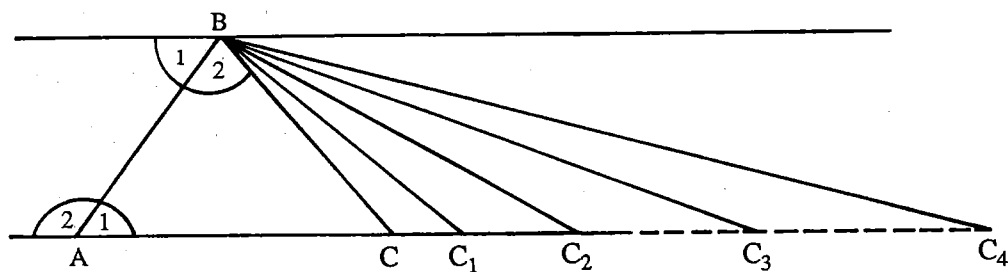
נניח שכיתה השלימה את לימוד המשפט האומר שקטע אמצעים בטרפז, מקביל לבסיסים, ואורכו שווה לחצי סכום אורכיהם. בשלב זה נתבונן בטרפז ABCD ו"נסיע" את הקודקוד A על הצלע AB, לכיוון B, כשאנו משאירים את C ו D במקומותיהם. (שרטוט 7).



שרטוט 7: קטע אמצעים במשולש כמקרה הגבול של קטע אמצעים בטרפז.

כל זמן ש- A ו- B הן שתי נקודות נפרדות, המשפט שלעיל תקף. אך מה קורה כאשר הקודקוד A מתלכד עם B? - הטרפז הופך אז למשולש, ומהמשפט על הטרפז מתקבל משפט חדש לגמרי שענינו קטע אמצעים במשולש. כמעט מעשה כשפים, לא כן?

לעתים תהליך הגבול מציג לא רק משפט חדש, אלא גם את ההוכחה שלו. נחשוב לדוגמא על המשפט שקובע כי במשולש, זווית חיצונית גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה. לדוגמא במשולש ABC $\angle A_2 > \angle B_2$. כעת, נזיז את הנקודה C לימין על פני הקו AC מבלי להזיז ממקומן את A או את B (שרטוט 8).



שרטוט 8: שיוון הזוויות המתחלפות בין מקבילים כמקרה גבול של זווית חיצונית במשולש הגדולה מזווית פנימית שאינה צמודה לה.

ככל ש- C זזה ימינה, B_2 נהיית גדולה יותר ויותר בה בשעה ש A_2 לא משתנה, אולם B_2 נשארת תמיד קטנה יותר מ- A_2 . לא חשוב כמה C תזוז ימינה, הזווית הפנימית שעל B תישאר תמיד קטנה יותר מהזווית החיצונית שעל A . יחד עם זה, מידותיהן הולכות ומתקרבות. סתירה? - לא. שתי הזוויות הופכות שוות זו לזו כאשר C "מגיעה" לאינסוף. ברגע זה בדיוק, המשולש "נפתח", הצלעות BC ו AC לא נחתכות, B_2 ו A_2 הופכות להיות זוויות מתחלפות בין שני ישרים מקבילים. ברגע זה ממש יש בידינו ספקולציה על קיומו של משפט חדש: "אם זוג זוויות מתחלפות בין שני ישרים הנחתכים ע"י ישר שלישי הינן חופפות, אז שני הישרים מקבילים". יש לנו גם אינדיקציה לגבי דרך ההוכחה. על דרך השלילה נראה שכל עוד שני הישרים אינם מקבילים, מתקבל, על ידי הישר השלישי החותך אותם, משולש שבו אחת משתי הזוויות המתחלפות היא זווית חיצונית, והשניה היא זווית פנימית לא צמודה לראשונה, ועל כן אינן יכולות להיות חופפות, בסתירה להנחה.

9. אלגוריתם יחיד פותר אינסוף בעיות שונות

כל אלגוריתם שעובד באופן כללי, צריך להיות מוצג כהישג גדול. אין לקבל את קיומו כמוכח מאליו. מתמטיקאים משקיעים הרבה מזמנם בחיפוש אחרי פתרונות כלליים כדי להימנע מסיבוכים הכרוכים בחזרה על חישובים. כך למשל חישוב של אינטגרלים, בהם פתרונות כלליים הינם נדירים, הוא מסובך. עצם הרעיון של חיפוש אחרי נוסחה כללית, צריך להיות מוצג כרעיון מבריק של חסכון זמן ואנרגיה. מציאת נוסחה כזו היא הפתעה משמחת.

נניח, למשל, שלא היתה עומדת לרשותנו נוסחה אחת לפתרון כל המשוואות הרבועיות. במקרה כזה, על התלמידים היה, להתנסות בפתרון כל משוואה לחד, בלי לחלום אפילו על פתרון שמטפל בכל המקרים האפשריים בבת אחת. אל לנו להפחית בערכה של ההפתעה הטמונה בידיעה שפתרון אחד כללי אכן קיים. זהו מעין הוקוס פוקוס של ממש. בזכותו אין צורך להשלים לריבוע כל משוואה לחד, אין צורך לפרק לגורמים כל טרינום מחדש. רק מציבים את ערכיהם של a , b ו c , ומקבלים את השורשים: שורש אחד, שניים או אף אחד ממש, לפי ערך הדיסקרימיננטה. איזו הקלה! לרוע המזל, אין נוסחה אחת לפתרון משוואות ממעלה שלישית.

משוואות פולינומיאליות מדרגות גבוהות יותר הופכות יותר ויותר מסובכות. לכן עלינו ללמד את נוסחת הפתרון של המשוואה הריבועית עם כל הכבוד הראוי לה, ולא רק באופן טכני. תלמידים צריכים לעבוד קשה על משוואות רבועיות רבות, לפני שילמדו על קיום הנוסחה. איזו הפתעה נפלאה והקלה תביא אז הנוסחה! רק כך הם יעריכו את גודל הרווח מהאלגוריתם המספק לא רק את הפתרונות, אלא אינפורמציה נוספת חשובה לגבי השורשים - מספרם, סימניהם - עוד לפני שידעו משהו לגבי ערכם המספרי. הדיסקרימיננטה מתפקדת כמעין "מודיע", "מרגל", או לחילופין "איש סודה" של המשוואה הריבועית.

10. פרדוקסים מתמטיים

ידע חדש שנראה כסותר ידע קיים קודם, מציב את האדם החושב בפני קונפליקט: "הענין אמנם מתקבל כביכול על הדעת, אבל יחד עם זאת ברור שהוא בלתי אפשרי באופן לוגי", או "הענין אמנם תקף לוגית ללא ספק, ובכל זאת קשה לי להאמין בזה". מצבים אלה הם מקור נהדר להפתעה במתמטיקה, שיש לה פוטנציאל להפוך לחוויה לימודית שאין לה תחליף. זמן רב אחרי סיום בית הספר התלמידים יזכרו את האתגרים הללו ויהנו לחשוב על הפתרון שלהם.

הבה ונראה דוגמאות אחדות.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad \text{יהי}$$

מהו ערכו של S ?

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 \quad \text{מצד אחד:}$$

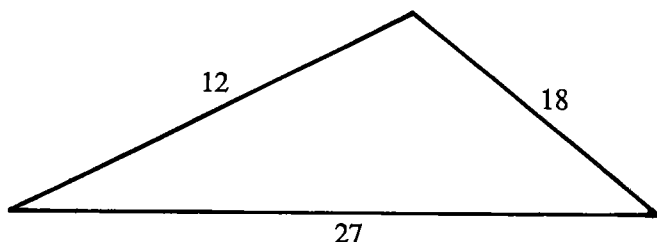
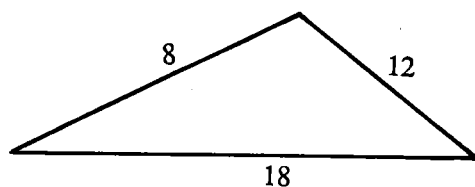
$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 \quad \text{מצד שני}$$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \quad \text{יחד עם זאת:}$$

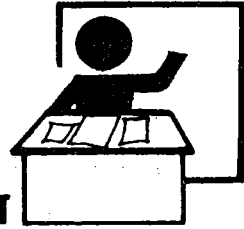
$$S = \frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad 2S = 1 \quad \text{או במלים אחרות:}$$

ובכן מהו ערכו של S ? הוא 0 או 1 או $\frac{1}{2}$? או שמא שלושת אלה שווים? האין זו דרך מדהימה להציג את האבחנה בין סדרות מתכנסות ומתבדרות? לפרדוקס הזה יש שורשים עמוקים בהסטוריה של המתמטיקה (Eves p. 135). מי שניצב בפני הפרדוקס הנובע מההנחה שהסכום מוגדר ורק צריך לקצוב את ערכו, אמור לפתח את ההבנה שלסדרה הזאת אין בכלל סכום, ולכן אין טעם לנסות ולחשב אותו. ההשפעה של הדרך הזאת הרבה יותר חזקה מהתראות חוזרות ונשנות בנוסח: "זההרו כשאתם עוסקים בסכומים אינסופיים!"

פרדוקס אחר, שמהווה כלי נפלא להדגיש את התפקיד המרכזי של ההתאמה במשפטי חפיפה ודמיון של משולשים, אהוב עלי במיוחד (Hadar & Hadass 1981). מבקשים מהתלמידים לבנות זוג משולשים לא חופפים בעלי חמישה אלמנטים חופפים. באלמנטים הכוונה לצלעות וזוויות פנימיות. רוב רובם של התלמידים ממהרים בד"כ לאמר שאי אפשר, מפני שאין כאלה. בנקודה זו נפנה אותם לדרך הבונה שבה השאלה נוסחה, ונבטיח להם שיש זוג כזה, ואפילו יותר מזוג אחד כזה. כשהם עדיין לא מאמינים, הם מתחילים לנתח את הבעיה בהיבנים שהמשולשים לא יכולים להיות בעלי שלוש צלעות ושתי זוויות חופפות. הם חייבים להיות בעלי שלוש זוויות ושתי צלעות חופפות ולכן חייבים להיות דומים. עכשיו התלמידים קרובים הרבה יותר לפתרון. (שרטוט 9). האמת היא שיש אינסוף זוגות משולשים כאלה!



שרטוט 9: שני משולשים לא חופפים בעלי חמישה אלמנטים חופפים (לא בהתאמה)



דף לתלמיד

משחק "הפוך בה" : לתבניות ומערכות במשתנה אחד או שניים.

מאת: רונית אפלברג, רמת-גן.

משחק "הפוך בה" הוא למעשה הפיכת דף עבודה שבו נדרשים להתאים בין פריטים בשתי רשימות (למשל על יד מתיחת קו), למשחק.

על כן, זהו משחק ליחיד, אך גם שניים יכולים לשחק בו ביחד.

לפעמים צורך כזה אפילו רצוי, אם אנו מעוניינים לעורר שיחה בין התלמידים.

יתרוננו הגדול של המשחק, שהוא ניתן לשילוב בקלות בכיתה. יש לו את היתרונות של דף עבודה עם בקורות. בנוסף ליתרונות שבהיותו משחק, אפשר לתת אותו לתלמיד בודד, לקבוצת תלמידים או לכיתה כולה.

המשחקים המובאים כאן מורכבים מכרטיסים שעל צידם האחד תבנית פסוק או מערכת, ועל השני הגרף המתאים. שני הצדדים מופיעים בצבעים שונים. בצבע עליו מופיעים הגרפים מוסיפים כרטיס עליו רשומה המלה "התחל". כאשר הופכים כרטיס זה מגלים תבנית פסוק (או מערכת). מתאימים לה מתוך הכרטיסים האחרים, המונחים כך שצדם עם הגרפים כלפי מעלה גרף מתאים. הופכים אותו, וכן הלאה בכל פעם מתאימים לכרטיס שעל תבנית פסוק, גרף מתאים. אם התלמיד לא שגה, הוא ימצא מצדו האחר של הכרטיס האחרון שיהפוך, את המלה "סוף". אם קיבל כרטיס זה לפני שסיים - סימן שטעה ועליו לחזור מהתחלה.

ה ע ר ה:	לנוחיות המורים נתונים משני הצדדים של כל כרטיס אחד מתחת לשני.
אם מצלמים את המשחק אפשר על ידי קפול והדבקה לקבל כרטיס מתאים.	

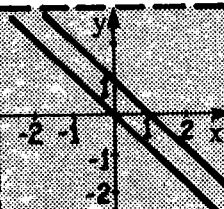
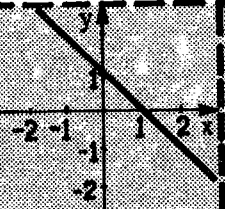
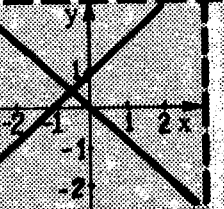
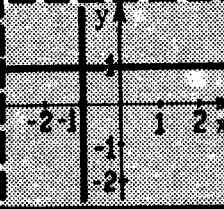
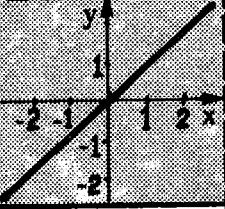
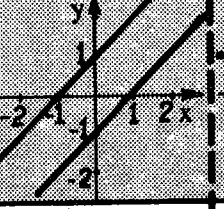
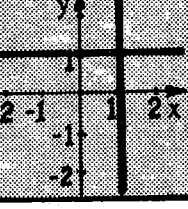
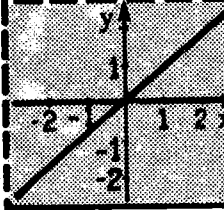
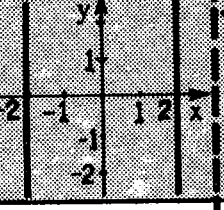
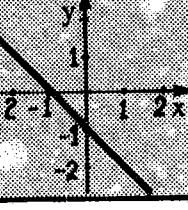
צד א'

צד ב'

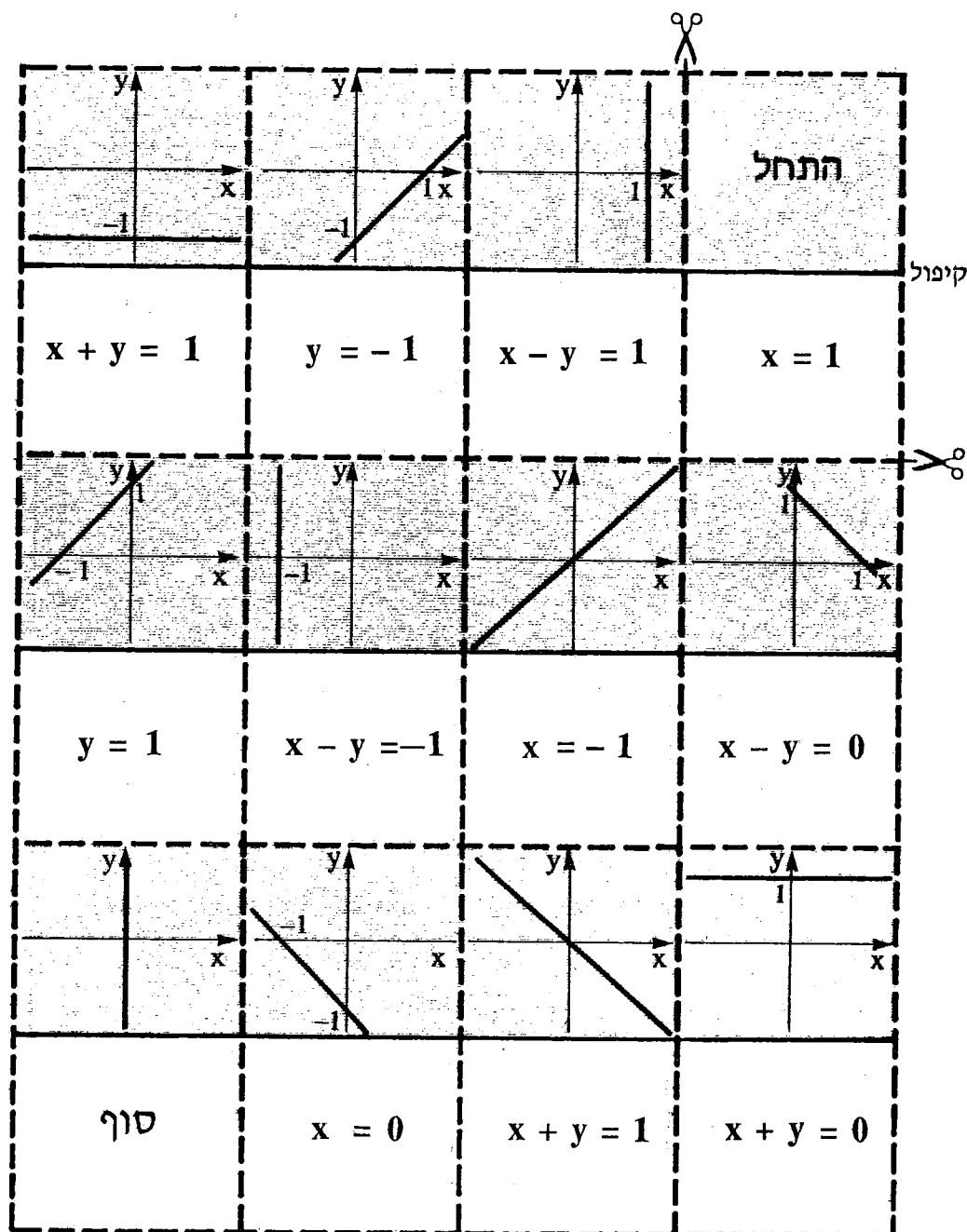
הפוך בה - ערך מוחלט

			התחל
$ m - 1 < -2$	$ m + 1 \geq 2$	$ m + 1 < 2$	$ m - 1 > 2$
			לא מסומן שום מספר
$ m + 1 > 2$	$ m - 1 < 2$	$ m + 1 = 2$	$ m + 1 \leq 2$
$ m - 1 \leq 2$	$ m - 1 \geq 2$	$ m - 1 > -2$	$ m - 1 = 2$
סוף	$ m + 1 \neq 2$	$ m - 1 \neq 2$	

הפוך בה - גרף של מערכת תבניות פסוק

			התחל	קיפול
$x = 1$ וגם $y = 1$	$x + y = 1$ וגם $x + y = 0$	$x + y = 1$ וגם $2x + 2y = 2$	$x + y = 0$ וגם $x - y = -1$	
				קיפול
$x + y = -1$ וגם $-2x - 2y = 2$	$x = -1$ וגם $y = 1$	$x - y = 0$ וגם $0.5x - 0.5y = 0$	$x - y = 1$ וגם $x - y = -1$	
				
סוף	$y = 0$ וגם $x - y = 0$	$x - y = 0$ וגם $y = 1$	$x = 2$ וגם $x = -2$	

הפוך בה (קל) - תבניות פסוק בשני משתנים.



יחד עם זאת, דרושה העמקה והתבוננות רבה כדי להשתכנע ולנטוש את ההרגשה הראשונית של חוסר אפשרות, והכל בגלל נקודה אחת עדינה - חמשת האלמנטים החופפים אינם חופפים בהתאמה כפי שנדרש במשפטי חפיפה. (דיון יותר מעמיק בתפקיד הפרדוקסים בחינוך המתמטי, ראה (Movshovitz-Hadar and Hadass 1990), דוגמאות לדפי עבודה מתעתעים - ראה בספר: הא-כיפדו (נ. מובשוביץ-הדר 1990).

דיון - הפתעה בכל משפט

המאמר הזה מציע משפט-על. שלא כמו רוב המשפטים העל-מתמטיים ששייכים ללוגיקה מתמטית, משפט-על זה שייך לתאוריה של החינוך המתמטי ש - Steiner (1985) החל בפיתוחה. משפט-העל טוען: **"כל משפט מתמטי הוא מפתיע"**. "כל" מופיע פה במובן המקובל כשמדובר בקבוצות אינסופיות, היינו "פרט אולי למספר סופי", ולעניינו, מספר סופי קטן מאוד. לביסוס משפט-העל העלינו את הנימוק על דרך השלילה: אילו משפט מתמטי היה בלתי מפתיע, כלומר אם הטענה שבו היתה טריוויאלית, לא היה שום ענין להוכיח אותו ולפרסם אותו ולהוסיפו למערכת המשפטים הקיימת. משפט מתמטי חדש, חייב לאמר משהו לא ידוע ולא טריוויאלי, אחרת לא יפורסם ותהיה לו הסתברות אפסית להיכלל בסילבוס כלשהו. בעצם מהותו, כל משפט מתמטי חדש מוכרח לכן להיות בבחינת "בשורה" לקבוצה של מתמטיקאים.

הדוגמאות המובאות במאמר זה מהוות מדגם סופי שמטרתו לתת תמיכה אינדוקטיבית אמפירית לטענה הכללית שכמו כל המשפטים המתמטיים, גם כל משפט של המתמטיקה התיכונית מציג אמת לא-טריוויאלית כלשהי. טיעון אינדוקטיבי כזה נראה לנו הולם את הטבע האמפירי של הדיסציפלינה של חינוך מתמטי. התאוריה של חינוך מתמטי קשורה למתמטיקה, פדגוגיה ופסיכולוגיה של המתמטיקה. טענות המתחסות אליה לא בהכרח מצריכות הוכחות מתמטיות דדוקטיביות.

הדוגמאות מדגימות איך אפשר לחשוף את פוטנציאל ההפתעה של משפט גם אם הוא ידוע מזה שנים. בדרך כלל יעיל ועוזר להעמיד פנים שלא יודעים את תוכנו. לעיתים עדיף להרחיק לכת ולהניח בדיוק את ההיפך, ע"י שלילת חלק אחד או יותר בטענה, ולהתייחס למידה בה הגרסה

הנשללת עשויה להיראות הגיונית לתלמידים. חשוב להרגיל את התלמידים לכך שיום-יום צפויה להם הפתעה בשיעור מתמטיקה. מוטב שיחכו להפתעה מאשר לעוד שיעור של תירגול-חזור. המורה למתמטיקה הוא האחראי לגילוי ההפתעה החבויה בכל משפט ולהעברתה לתלמידים באורח קבוע. השיטה פשוטה. נדמיין לרגע שאיננו יודעים את העובדה המסויימת שהמשפט קובע. כאן אנחנו פוגשים את תלמידינו. ניתן להם לבדוק את ציפיותיהם ונגרום להם להוכיח שהם מפקיקים תוצאות חדשות ומאד בלתי צפויות, יוצאות דופן, בכל משפט.

הצגת משפטים בדרך מעוררת, והצגת הוכחות שמגיבות להתערורות שנוצרה, היא שיטה המהווה אלטרנטיבה לגישת הגילוי המודרך (Movshovitz-Hadar, 1988). הוראת המתמטיקה כשרשרת אינסופית של משפט-הוכחה-משפט-הוכחה, עם הפרעה פה ושם ע"י תרגילים, יוצרת ניכור אצל רוב התלמידים. במקום זה, יותר טוב לגרום לתלמידים להעריך את מימצאיהם, ע"י גירוי הסקרנות האינטלקטואלית שלהם. חשוב לגרום להם להתמודד עם הציפיות שלהם, ולהביא אותם להערכה ואמונה בטענה עוד הרבה לפני שהם עוסקים בהוכחתה.

את המורה בכיתה אסור להשאיר לבד במאבק על המוטיבציה של התלמיד ללימוד מתמטיקה ועל הגישה שלו כלפיה. האתגר הוא בידי המוסדות להכשרת מורים ובמפעלים להשתלמויות מורים. כדי לתמוך בעבודה היומ-יומית הקשה העומדת בפני המורה, יש צורך בפיתוח חומר, הכולל בתוכו אמצעי-עזר בכל מקום שאפשר, כדי שחומר הלימוד יהיה בנוי לניצול פוטנציאל ההפתעה שיש בכל משפט מתמטי תיכוני.

ב י ב ל י ו ג ר פ י ה

1. א. סירי: האם כל הברבורים הם לבנים? מסרים ג/2, 1989.
2. נ. מובשוביץ-הדר: הא-ליצד? אוסף פרדוקסים ותעתועים מתמטיים, בעריכת אורית חזן, הוצאת המחלקה להוראת המדעים, הטכניון, 1990.

CBMS - The Conference Board of the Mathematical Sciences: The Mathematical Sciences Curriculum K - 12: What is Still Fundamental and What Is Not. A Report to NSB Commission on Precollege Education in Mathematics, Science, and Technology, of a meeting held in September 25-26, 1982, the headquarters of the Mathematical Association of America, Washington D.C.

- CBMS - The Conference Board of the Mathematical Sciences: New Goals for Mathematical Sciences Education. A report of a conference, Nov. 13-15, 1983, Warrenton, Virginia.
- Dorrie H.: 100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution, Dover Publications, 1965, pp. 295-301.
- Dudeney H.E.: Amusements in Mathematics, Dover Publications, 1970.
- Eves Howard: Great Moments in Mathematics (After 1650), Dolciani Mathematical Expositions No. 7, The Mathematical Association of America, 1983.
- Gardner M.: Mathematics, Magic and Mystery, Dover Publication, New York, 1956.
- Graham L.A.: The Surprise Attack in Mathematical Problems. Dover Publications, 1968.
- Hadar N. & Hadass R.: An Approach to Similar Triangles, Mathematics Teaching, 1982, No. 101, pp. 33-35.
- Leron U.: A Direct Approach to Indirect Proofs. Educational Studies in Mathematics 16, 1985, pp. 321-325.
- Long C.T.: Mathematical Excitements - The Most Effective Motivation. Mathematics Teacher, May 1982, pp. 413-415.
- Movshovitz-Hadar N.: Stimulating Presentations of Theorems Followed by Responsive Proofs. For the Learning of Mathematics, Vol. 8, 1988, No. 2, pp. 12-30.
- Movshovitz-Hadar N. and Hadass R.: Preservice Training of Mathematics Teachers Using Paradoxes. A paper presented at the 1989 AERA Convention, San-Francisco, April 1989 (Submitted for publication).
- Radermacher H., and Toeplitz O.: The Enjoyment of Mathematics, Princeton University Press, 1970.
- Steiner H.G.: Theory of Mathematics Education (TME): An Introduction. For the Learning of Mathematics, 1985, Vol. 5, No. 2, pp. 11-17.
- Steinhaus H.: Mathematical Snapshots, Oxford University Press, 1983.

האלגברה שלפני האלגברה

מאת: אברהם הרכבי, אלכס פרידלנדר, רינה הרשקוביץ
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

ה ק ד מ ה

השערת השערות והכללותיהן (ניסוח משפטים), וכן הצדקת הכללות (יצירת הוכחות), הן בחוט השדרה של הפעילות המתמטית.

בחיי היום-יום של לימוד המתמטיקה בביה"ס אנו, פעמים רבות, מקדישים את רוב הזמן ללמידה אלגוריתמית וללימוד מניפולציות בסימבולים מתמטיים, ושוכחים כי אלה הם רק הכלים ללמידה משמעותית של מתמטיקה.

בעיקר הדבר מאפיין את הוראת האלגברה: אנו מתחילים בלימוד תבניות הכתובות בשפה אלגברית ובמניפולציות עליהן, ודורשים אף שליטה בחוקי שפה זו, ואילו את היישום המשמעותי של השימוש בכל זה אנו, במקרה הטוב, דוחים לשלב מאוחר יותר. במקרה הפחות טוב, המניפולציות והשפה הופכות למטרה העיקרית של הלימוד (Booth, 1989).

בהוראה מסוג זה, תלמידים רבים אינם רואים את האלגברה ככלי לביטוי הכללות ותהליכי הצדקה מתמטיים, וזאת גם כאשר הם מצליחים להגיע לידי שליטה מלאה בטכניקות האלגבריות.

כדי לשנות את הוראת האלגברה כך שהתלמיד "יפגוש" את השפה והטכניקות הכלולות בה כמכשיר לחשיבה, יש ללמוד את דרכי החשיבה הפוטנציאליות של התלמיד בתהליכי הכללה והצדקה.

קיימים מחקרים המנסים לחשוף תהליכים אלה אצל תלמידים תוך כדי הלימוד הפורמלי של האלגברה, כאשר חלק מהשפה האלגברית מוכר כבר לתלמיד.

למשל, לי ווילר (Lee & Wheeler, 1987) חקרו את תהליך ההצדקה באלגברה אצל תלמידי בית-ספר תיכון. הם מצאו כי אף תלמידים אשר השתמשו באלגברה (כמחצית מהמדגם הנחקר) לא עשו זאת תוך ראית המשמעות של שימוש כזה. האלגברה שימשה לתלמידים כדרך מקוצרת לתאור בעיה, וביטויים אלגבריים שימשו על פי רוב כתבניות ליצירת דוגמאות מספריות. יחד עם זאת, התלמידים ייחסו לדוגמאות המספריות ערך רב יותר בהצדקה, מאשר לתבניות מהן נוצרו. המחקר הראה כי לתלמידים רבים הפעילות האלגברית נראתה אי-רלוונטית, כאשר, מסיבות מסתוריות, מורים וספרים מתעקשים להשתמש בה.

ממצאים אלה עולים בקנה אחד עם מחקרים אחרים בלמידת האלגברה. קירן (Kieran, 1989) מסכמת מספר רב של מחקרים בנושא ומסיקה כי קיימות עדויות חד-משמעיות המראות כי תלמידים מסוגלים להפעיל בהצלחה מניפולציות אלגבריות, אך לא הרבה מעבר לזה.

העבודה הנוכחית מנסה ללמוד דרכי חשיבה פוטנציאליות של הכללה והצדקה אצל תלמידים, על סף תחילת למידת האלגברה בביה"ס, בשלב שבו השפה האלגברית לא מוכרת עדיין לתלמיד.

השערת המחקר היא כי בשלב זה של חוסר בשפה אלגברית, הבנת הצורך בהכללה ובהצדקה לא תפגע על ידי בריחה אל מניפולציות אלגבריות כמטרה בפני עצמה. יתר על כן, התלמיד יצטרך למצוא או אף ליצור, כלים אחרים לביטוי תהליכי הכללה והצדקה. השערה נוספת היא כי, בסיטואציות מסויימות, קוצר-ידם של הכלים בהם ישתמש התלמיד, יבהיר לו את הצורך בכלי נוסף - הכלי האלגברי.

העבודה המוצגת להלן נעשתה בעיקרה על-ידי העברה וניתוח של ראיונות לזוגות של תלמידים מכיתות ז', לפני תחילת הלימוד הפורמלי של אלגברה. הראיונות תועדו בודאו טייפ ונמשכו כשעה וחצי לכל זוג.

לצורך הראיון פותחו שלוש בעיות מתמטיות למצבים שבהם כל זוג של תלמידים נדרש להתמודד בתהליכים של הכללה והצדקה. בספרות מכונים מצבים כאלה Problem situations, ובעקבות זה אנו נשתמש במונח "סיטואציות בעיה".

תאור סיטואציות הבעיה (Problem Situations)

שלוש המטלות של פתרון בעיות שנבחרו ופותחו לצורך המחקר הן:

1. חקירה והצדקה של החוקיות הנוצרת מחיסור שני שברי יחידה בעלי מכנים עוקבים והצדקתה.
2. חקירה והצדקה של האופן בו משתנה היקפו ושטחו של מלבן כאשר מגדילים זוג אחד של צלעותיו ביחידה ומקטינים את הזוג השני של הצלעות ביחידה.
3. חקירה והצדקה של קשרים בין מספרי התאריכים שבדף חודש כלשהו של לוח שנה.

ה ר א י ו ן

הראיון הוכן כך שיקלול את כל השלבים המתוארים בטבלה הבאה.

הצגת המשימה

הבעיה מוצגת, בעזרת מספר דוגמאות מספריות, או באופן כללי כאשר התלמיד מתבקש ליצור מספר דוגמאות רלוונטיות נוספות.

לקראת "הכללה אופרטיבית"

א. מציאת דוגמאות נוספות	ב. מציאת דוגמאות	ג. פתרון משימות
	בתחומים שונים	"הפוכות"
	של מספרים.	(הצגת התוצאה
		ושחזור חלק מן
		הנתונים)

לקראת הכללה מפורשת

יצירת הכללה מפורשת, מבוטאת בכלי כלשהו (מלים, תאור ויזואלי וכד').

לקראת הצדקה של הכללה

סדר השלבים , המתואר בטבלה הנ"ל , שונה לפי הבעיה ובהתאם לתגובות התלמידים במשך הראיון.

נבחן למשל את סיטואציה הבעיה מס' 1 לאור מבנה הראיון המתואר בטבלה.

הצגת המשימה:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \quad , \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \quad \text{מבקשים מהתלמידים לחשב:}$$

לקראת "הכללה אופרטיבית"

ב"הכללה אופרטיבית" אנו מתכוונים לתחושה האינטואיטיבית והלא מפורשת של חוקיות כללית. אפשר לעורר תחושה זו על ידי דרישה לביצוע יעיל של מטלות שונות. התלמיד בונה את ה"הכללה האופרטיבית" ומשתמש בה , גם אם אינו מנסח אותה במלים או בכל כלי אחר. כדי לעודד אצל התלמיד את בנית ה"הכללה האופרטיבית" בבעיה של בניית שברי היחידה , ניתנו המטלות הבאות:

א. יצירת דוגמאות נוספות: בשלב זה התלמידים בוחנים קווים משותפים של תרגילים שכבר ביצעו בשלב הקודם , וממשיכים ומייצרים דוגמאות מספריות נוספות.

ב. יצירת דוגמאות מתחומים מספריים נוספים:

בעזרת השאלה: "התוכל למצוא מבלי לחשב את ההפרש $\frac{1}{212} - \frac{1}{213}$?" התלמידים באים לידי עימות עם מספרים "לא נעימים" . עימות זה עשוי לדחוף אותם לעקיפת החישובים בעזרת אסטרטגיות כלליות יותר.

ג. פתירת משימות "הפוכות" :

בעזרת שאלות מהסוג: "פתור $\frac{1}{7} - \frac{1}{?} = \frac{1}{56}$; " פתור $\frac{1}{?} - \frac{1}{?} = \frac{1}{110}$ " . על התלמיד לשחזר את התרגיל. שיחזור זה הינו אמצעי נוסף המחייב את התלמיד לכוון את תשומת ליבו לקשרים הכלליים שמאחורי הדוגמאות.

לקראת הכללה מפורשת

"האם תוכל לומר משהו על החוקיות המשותפת למקרים בהם עבדתו" שאלה זו דוחפת את התלמידים לעבור מ"הכללה האופרטיבית" בה השתמשו בשלבים קודמים, להכללה מפורשת, ומגלה באיזו מידה תלמידים מסוגלים לבטא אותה בכלי כלשהו.

לקראת הצדקה

התלמידים מתבקשים "לשכנע", "להצדיק" ול"הוכיח" את הכלליות של ממצאיהם ומסקנותיהם.

מספר הערות מתמטיות אפיסטמולוגיות

המבנה המתמטי של סיטואצית הבעיה, בה עוסקים תלמידים בראיון או בכיתה, משפיע על אופי תהליכי ההכללה וההצדקה בהם נוקטים התלמידים. בעבודה זו אפשר לראות שני סוגים שונים של מבנה מתמטי בסיטואציות הבעיה המוצגות.

סוג ראשון: תהליך ההצדקה הינו אנלוגי לתהליך העבודה בדוגמא בודדת.

למשל, בסיטואציה של חיסור שברי היחידה (סיטואציה 1 לעיל) התלמיד פותר תחילה מספר דוגמאות כמו:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad ; \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \quad ; \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

לאחר מכן הוא יכול להגיע להכללה כי התוצאה היא תמיד שבר יחידה שמכנהו מכפלת המכנים של המחוסר והמחסר - בשפה אלגברית:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

בהצדקה פורמלית מלאה של כלל זה, בין אם היא נעשית מילולית ובין אם בשפה אלגברית, התלמיד עובר שלבים אנלוגיים לגמרי למה שעשה בפתרון דוגמא בודדת.

עבודה על דוגמא

הצדקת הכלל

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \quad \text{כ"י:}$$

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \quad \text{כ"י:}$$

$$\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{8}{56} - \frac{7}{56} = \frac{1}{56}$$

גם אם הצדקת הכלל, הכתובה כאן בשפה אלגברית, נעשית על-ידי התלמיד בשפה מילולית, אין היא עדיין יותר מאשר שיקופן של הפעולות בדוגמא הבודדת. במלים אחרות, הדוגמא יכולה "לשאת על כתפיה" את ההצדקה הכללית.

סוג שני: תהליך ההצדקה אינו אנלוגי לעבודה בדוגמאות בודדות.

נתבונן למשל בבעיה הבאה: "נסה למצוא תכונות כלליות של ההפרשים בין חזקות השלישית של מספר טבעי כלשהו, והמספר עצמו".

על ידי ניסוי בהצבת מספרים שונים, יכול התלמיד לגלות כי כל ההפרשים הם מספרים המתחלקים ב 6. אך כדי להוכיח זאת עליו לבטא תחילה את ההפרשים בצורה אלגברית:

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1) \quad \text{לגורמים:}$$

כך יוכל לראות כי מכפלה זו הינה הכללה של מכפלת שלושה מספרים עוקבים,

$(n+1)$, n , $(n-1)$. עתה עליו להפעיל את השיקול הבא: כל שלשה של מספרים עוקבים

חייבת להכיל מספר זוגי ומספר המתחלק ב 3, לכן המכפלה מתחלקת ב 6.

הצדקה זו מותנית איפוא ביכולת לערוך שיקולים מתמטיים כלליים ולעבוד בכלים מתמטיים - במקרה שלפנינו הכלי האלגברי.

לסיכום, במטלה מהסוג הראשון התלמיד, העובד על דוגמאות בודדות, עשוי לעשות את המעבר מן הפרט אל הכלל, אם רק ייטיב ל"התבונן"; הדוגמאות סוללות את הדרך, והמבנה הכללי של ההצדקה עשוי להתגלות מתוך העבודה על דוגמאות. במטלה מן הסוג השני המבנה הכללי של ההצדקה מותנה בגילוי מתמטי נוסף, אשר פעמים רבות דורש ידע בשימוש בכלים מתמטיים מדרגה גבוהה יותר.

החלוקה בין שני הסוגים האלה אינה חדה וחלקה. אותה בעיה אפשר, פעמים רבות, לשייך לשני הסוגים בהתאם לדרך שבה נוקטים בפתרונה.

בעבודה זו ההבחנה בין שני סוגי המטלות עליהן דברנו, תורמת הן להבנת החשיבה המתמטית של הילדים והן לתאורה.

מ מ צ א י ם

בעבודת זוגות התלמידים שרואיינו ב"סיטואציות-הבעיה" המתוארות לעיל, מצאנו מגוון ועושר רב של תהליכי הכללה והצדקה, למרות שהכלי האלגברי, כאמור לעיל, לא ניתן להם עדיין בצורה פורמלית. תהליכי הכללה והצדקה קשורים פעמים רבות קשר הדוק אחד במשנהו. למרות זאת, בסעיף זה נסכם את הממצאים לגבי ההכללה וההצדקה בנפרד, ונציין את טיב הקשר בין שני התהליכים במקומות המתאימים.

א. תהליכי הכללה

זוגות התלמידים שרואיינו לא התקשו למצוא הכללות ב"סיטואציות-הבעיה" עליהן עבדו. כל הזוגות יצרו מגוון של הכללות. הכללות אלו היו מסוגים שונים, ברמות שונות והובעו בדרכים שונות. לחלן תאור סוגים שונים של הכללות שנמצאו.

סוג ראשון - "הכללה אמפירית"

נתבונן בשתי ההכללות המילוליות הבאות שניתנו על ידי התלמידים:

- "כשיש מספרים (מכנים) עוקבים, זאת אומרת אחד זוגי ואחד אי-זוגי, זאת אומרת אחד אחרי השני, צריך להכפיל אותם .."
- "סכום הספרות (המספרים) באלכסונים (של ריבוע של 2×2 בלוח החודשי) שווים"

שתי הכללות אלה, (המתייחסות ל"סיטואציות הבעיה" 1 ו 3 בהתאמה), נוצרו בשלבים הראשונים של העבודה בסיטואציה של בעיה מסויימת, והן שיקוף פשוט ושטחי של העבודה בדוגמאות. במלים אחרות הן ביטוי מילולי של תכונה "צורנית" משותפת, המתבלטת תוך כדי התבוננות במספר מסוים של דוגמאות. הכללה מסוג זה מכונה על ידי דורפּלר (Dorfler, 1989) "הכללה אמפירית". כמובן שהכללה כזאת תלויה באפיון המסוים שצד את חושו של הפותר, וכן בסוג הבעיה. למשל, הציטוט הראשון לעיל, הינו הכללה של התוצאה של אלגוריתם ביצוע הפעולה על דוגמאות. בניסוח ישנן גם הכללות משנה של תכונות הנובעות מהתוצאה היסודית אך אינן רלוונטיות והכרחיות לקיום הכלל. למשל, "כשיש מספרים עוקבים" (תכונה הכרחית), "זאת אומרת אחד זוגי ואחד אי-זוגי", (תכונה לא הכרחית).

סוג שני - הכללת מנגנון הפעולה

הציטוט הבא לקוח מאחד הראיונות, והוא מהווה תשובה למראיין אשר דורש להיות "בטוח"

בהכללה ששמע. הציטוט מתבסס על הדוגמא $\frac{1}{8} - \frac{1}{9}$.

"אבל יש לנו כאן עובדה! כל פעם שיש לנו 72 נגיד חלקי 8, זה יהיה 9, עכשיו 9 פחות זה (8) תמיד ... הרי אם כפלנו זה בזה, אם נחלק את התוצאה ב 9, זה יצא 8, ואם נחלק את התוצאה ב 8 זה יצא 9, אז אם אנחנו מחלקים את זה בזה ... מספר פחות המספר הקודם שלו תמיד יהיה 1 ... זה ברור ...".

הכללה זו טומנת בחובה נסיון לבטא את הצדקת ההכללה, תוך כדי ראיית כלליותו של "המנגנון" כאשר הוא נישא "על כתפי הדוגמא". הכללה מסוג זה היא שונה מההכללה שתיארנו לעיל כיוון

שהושגה על ידי תפיסת המשותף שבחזרה על פעולה מסוימת. דורפּלר (Dorfler, 1989) מכנה זאת: "perception of the invariant of actions".

בדברי התלמיד בולטת גולמיותו של הכלי המתאר את ההכללה. בהעדר כלי אלגברי ובאי התאמה של כלי ויזואלי למטלה זו, הביטוי הוא מילולי. ניכרים המאמץ והקשיים לבטא תופעה כללית מעבר למה שנראה בדוגמא הפרטית, אך בצורה מגושמת וחלקית.

סוג שלישי - הכללה של הכללות

התלמיד מוצא את הכלל מן הדוגמאות שהוצגו לו. כלל זה מעורר אותו לייצור דוגמאות נוספות בהן הוא מרחיב את הכלל שנמצא לראשונה, ויוצר הכללות מ"סדר גבוה יותר".

למשל, אחרי שאלי ורוני, תארו במלים את הכלל:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{בבעית שברי היחידה, הם המשיכו ליצור דוגמאות נוספות:}$$

- אלי בחר לבדוק דוגמאות עם מונים השונים מ 1 וניסח במילים את הכלל לגבי מונה

$$\text{כלשהו: } \frac{x}{n} - \frac{x}{n+1} = \frac{x}{n(n+1)}$$

- רוני בדק דוגמאות של שברי יחידה עם מכנים שאינם מספרים עוקבים וניסח במילים

את הכלל לגבי הפרש (a) כלשהו בין מכנים:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} = \frac{a}{n(n+a)}$$

- אז רוני איחד את שני הכללים לעיל ואמר: "כאשר מחסרים שברים בעלי מונים שווים,

המונה של התוצאה הוא המונה המשותף כפול בהפרש שבין המכנים, והמכנה הוא המכנה המשותף".

במילים הנ"ל ניסח רוני את הכלל האלגברי הבא:

$$\frac{x}{n} - \frac{x}{n+a} = \frac{xa}{n(n+a)}$$

בהכללות משני הסוגים הראשונים - הכללה אמפירית והכללת מנגנון הפעולה - חומר הגלם, עליו נוצר הכלל, היה הדוגמא ומאפיניה, (מאפיינים חיצוניים או המנגנון הפועל בה). גם בהכללה של הכללות, חומר הגלם מכיל דוגמאות, אך בנוסף יש בהן מעברים מהכללות שכבר נמצאו אל דוגמאות שמטרתן מציאת הכללות "גבוהות" יותר.

הכללות "גבוהות" אלו, מרחיבות את התחום של "סיטואציות-הבעיה" בה עוסקים, והן כוללות את ההכללות הקודמות כמקרים פרטיים. מתמטיקאים רואים בהכללות מסוג זה את הגרעין של תהליכי ההכללה במתמטיקה, ראה למשל דיוויס וחרש, (Davis and Hersh, 1981).

ב. תהליכי הצדקה

בשלב מסויים בראיון, התלמידים נשאלו שאלות מהסוגים הבאים:

- "האם הנך בטוח כי החוקיות שמצאת היא תמיד נכונה?"

- "כיצד היית משכנע "אדם שלישי" כי מה שמצאת הוא נכון?"

מטרת שאלות אלה היתה לעורר את התלמידים למצוא הצדקות (הסברים, הנמקות, הוכחות) להכללות שמצאו. ואכן לכל התלמידים היה ברור, בשלבים אלה של הראיון מה הכיוון הנדרש מהם.

בחלק קטן מהמקרים התלמידים חיפשו "הצדקות חיצוניות", התלויות ב"סמכות" שמחוצה להם. למשל:

נתנ: (במקרה של שברי היחידה), "אולי קיימת נוסחה שאני לא יודע, כמו אלה שבהנדסה אני לא יודע אם נוסחה כזו קיימת בכלל."

ברוב המקרים התלמידים ניסו לגייס "כלים" מסוגים שונים כדי ליצור הצדקות כדלהלן:

(1) שימושים בדוגמאות בודדות.

(2) הצדקות מילוליות - "סיפורים".

(3) שימוש בכלים ויזואליים.

(4) שימוש בסימבולים.

להלן תיאור וניתוח מפורט של השימוש בכלים אלו.

1) שימושים בדוגמאות.

נוכל להבחין בשלושה סוגים של שימושים בדוגמאות, ככלי להצדקת הכללות:

- * הבאת הדוגמא כעדות משפטית לנכונות ההכללה.
ההוכחה נתפסת כצורך בהצגת עובדה (דוגמא) ה"מאשרת" או מפריכה את ההכללה. לכן לפי תפיסה זו מספר מצומצם של דוגמאות מאשר את ההכללה ללא צורך בהצדקה נוספת.
- * הדוגמאות הבודדות נלקחות כנציגות של מחלקות דוגמאות רחבות יותר. למשל בדוגמא של שברי היחידה, ההצדקה מתבססת על דוגמאות מתחום מספרים "קטנים", מספרים "גדולים" וכו'.
- * הצדקה כללית ניתנת באופן מילולי. הניסוח אינו ניתן באופן כללי, אלא הוא עגון ונישא על כתפי הדוגמא הבודדת, תוך כדי הדגשת המנגנון הכללי של ההצדקה.
למשל, נחזור כאן על קטע שהובא כבר לעיל:
"אבל יש לנו כאן עובדה: כל פעם שיש לנו 72 נגיד חלקי 8, זה יהיה 9. עכשיו, 9 פחות זה (8) תמיד..."
הרי אם כפלנו זה בזה, אם נחלק את התוצאה ב 9, זה יצא 8. ואם נחלק את התוצאה ב-8 זה יצא 9, אז אם אנחנו מחלקים את זה בזה ... מספר פחות המספר הקודם שלו תמיד יהיה 1 ... זה ברור" ...

2) הצדקות מילוליות - "סיפורים".

- * בסוג אחד של הצדקה מילולית, הניסוח נישא על כתפי הדוגמא הבודדת. סוג זה של הצדקה זהה איפוא לסוג השלישי של השימושים בדוגמאות שראינו לעיל.

* בסוג השני התלמידים מנסחים הצדקה כללית באופן מילולי, כאשר הניסוח "נקיי" משימוש בדוגמא. למשל במקרה שברי היחידה:
 "כאשר מחסרים שני שברים שהמונה שלהם 1 והמכנים הם מספרים עוקבים, אז כדי לחסר עלינו להרחיב את השברים למכנה המשותף. ואז במונה המספרים (העוקבים שבמכנה), מתחלפים וההפרש ביניהם הוא 1..."

יש לשים לב כי שני סוגי ההצדקות המילוליות אופייניות לסוג ראשון של הצדקה לפני הניתוח האפיסטימולוגי המובא לעיל.

(3) שימוש בכלים ויזואליים.

בסיטואציה הבעיה מס' 2, נעמי וכרמלה "מתרגמות" לדוגמאות את השאלה הכללית: "מה קורה להיקף של מלבן כאשר מאריכים זוג אחד של צלעות ביחידה ומקצרים את השני ביחידה?"

כרמלה, הזריזה מן השתיים, חישבה כבר את ההיקף של שני מלבנים שיצרה, אך טרם הגיעה למסקנה.

נעמי, איטית יותר, מזדקפת פתאום ואומרת בבטחון: "ייצא אותו דבר, בטוח". לשם הסבר, היא מצביעה על העפרון ואומרת: "אם אתה לוקח את הקו הזה ושובר אותו ועושה ממנו מלבן ישאר אותו קו. מפה אתה מקצץ הנה, ומפה אתה מקצץ הנה - אז יישאר אותו דבר. איך שלא תעשה יישאר אותו דבר."

ההארה הויזואלית שיש לנעמי מאפשרת לה להנתק כליל מהדוגמא, ו"לראות" את כלליותו של "המנגנון".

"ראיה ויזואלית" תורמת לארגון תמציתי של האינפורמציה וכך מאפשרת לתפוס בצורה גלובלית את המרכיבים הרלוונטיים של התופעה הכללית (ראה דיון מפורט בסוגיה זו אצל פישביין, 1987, Fischbein).

הערה: בדינמיקה שנוצרה בין שני התלמידים בזוג וכן בין התלמידים והמראיין, נעשה כמובן שימוש ביותר מסוג אחד של הצדקה, תוך כדי דיונים וויכוחים.

למשל, בסיטואציה הבעיה על שברי היחידה כאשר כרמלה ונעמי נשאלו מה יותר משכנע כהצדקה לכלל; הבאת דוגמאות או "סיפור" (הצדקה מילולית) התפתח הדיון הבא:

כרמלה: הייתי מספרת לו סיפור, זה יותר קל מאשר לצייר לו הרבה דוגמאות.

נעמי: הייתי מספרת לו סיפור ומראה לו כמה דוגמאות, בשביל להוכיח לו.

מראיין: אם היית רוצה לעשות רק דבר אחד, מה מבין שניהם יותר משכנע, יכול לשמש באמת כהוכחה?

נעמי: שניהם משכנעים, לאז כי ...

כרמלה: אני חושבת שהסיפור יותר משכנע.

מראיין: למה?

כרמלה: כי אם נגיד, אני מסבירה למה זה קורה, אני יכולה להסביר למה זה קורה.

נעמי: הסבר גם יותר משכנע מדוגמא, אבל זה כהוכחה צריך להוסיף לו כאילו להוכיח לו. הוא אומר עד הנה הבנתי, עכשיו אני רוצה שתוכיחי לי.

(4) שימוש בסימבולים.

למרות שהתלמידים שרואיינו, לא למדו עדיין אלגברה פורמלית, חלק מהם ניסה להשתמש בסימבולים אלגבריים, מיוזמתם או בעקבות דירבונן של המראיין.

למשל, עומרי דן מנסים להצדיק מדוע ההפרש בין מכפלת המספרים שבאלכסוני ריבועים של 2×2 בלוח החדש, הינו תמיד 7. (סיטואציה בעיה מסי 3).

מראיין: אני מציע אולי לעבוד על זה באותיות, למרות שעוד לא למדתם.

עומרי: טוב יש לנו a ... אבל אין לנו חוקיות... רגע אבל יש הבדל, אני אעשה a, b, c ...

אבל אם אני אעשה c, מה על כל אלה שכאן 1. (מטרידים אותו המספרים שבין

המספר המיוצג ע"י האות b למספר בשורה שמתחת המיוצג ע"י האות c,

לבסוף מגיעים ל a, b

c, d

כופלים באלכסון, ו"נתקעים")

מראיין : האם תוכלו לצמצם את מספר האותיות?

עומרי: אפשר לעשות a , $a+1$, b , $b+1$

(ורשם a , $a+1$

$(b$, $b+1$

עומרי: (כודק דוגמאות מספריות). אם נשים 2 במקום a ו-3 במקום b , זה לא יכול להיות נכון. אז, נעשה את אותו "הערך" (מתכוון לאות ... מדריך את חברו) תשים כאן

a כאן $a+1$... (לבסוף הם מגיעים אל a , $a+1$

$(a+7$, $a+7+1$

מראיין : האם תוכלו עכשיו להסביר מדוע ההפרש בין מכפלת האלכסונים הוא תמיד 7?

[אחרי דיון הם מגיעים למכפלות $(a+7)(a+1)$ ו- $a(a+7+1)$

דן: (בשביעות רצון), אז הנה פתרנו זאת אם נשים 3, אז כאן $[a(a+7+1)]$ זה יוצא

33, וכאן $[(a+1)(a+7)]$ זה יוצא 40.

עומרי: בסדר, זה דוגמא, אז נתנו לו דוגמא או מה? ... לא, זה רק דוגמא.

דן: לא! הראינו לו במספרים ואחר-כך באותיות...

עומרי: (בתסכול) לא! לא הראינו לו באותיות.

אנו רואים כי דן מסתפק בדוגמאות המספריות, המיוצרות בעזרת התבנית האלגברית המתארת את החוק, וכי אפשר להשתמש בתבנית ליצירת דוגמאות שכולן מקיימות את הכלל, מספקת את הצורך של דן להצדקה. לעומת זאת, עומרי חש את הצורך בהצדקה כללית באותיות, וכיון שאינו יכול לעשות זאת חש מתוסכל. העובדה והתחושה כי יצירת הכלל באה מדוגמאות, וכן האפשרות לגזור מהכלל המנוסח כבר באותיות, דוגמאות נוספות, לא עוזרות במקרה זה לעומרי לעיצוב הצדקה כללית. אנו עדים איפוא להתנהגות הנובעת ממטלה אשר בה ההצדקה אינה נשענת על דוגמאות, אלא על גילוי מתמטי נוסף, הדורש ידע בכלים מתמטיים מדרגה גבוהה יותר (ראה סוג שני של הצדקה לפי הניתוח האפיסטמולוגי המובא לעיל). עומרי

הגיע לגבול ידיעותיו באלגברה , וחש כי החוסר בידע נוסף מעכב את חשיבתו המתמטית. אין ספק , כי בשלב זה הוראת האלגבר , המשלבת סיטואציות דומות , תהיה עבור עומרי משמעותית ביותר.

סוף דבר

המימצאים שהבאנו לעיל , מאירים תהליכי הכללה והצדקה של תלמידים בכיתה ז' , לפני שהחלו בלימוד פורמלי של אלגברה.

התאורים שהובאו חושפים דרכי חשיבה וקשיים של התלמיד הבודד או של זוג התלמידים , במציאת הכללות והצדקתן.

באופן כללי ראינו כי התלמידים מסוגלים להגיע לרמות שונות של הכללה והצדקה גם ללא השימוש בשפה האלגברית. לעומת זאת , נמצאו סיטואציות בהן החוסר בכלי הסימבולי מעכב את החשיבה ואת רמת הביצוע. יתר על כן , ראינו כי סיטואציות כאלה עשויות להביא את התלמיד למודעות בצורך ברכישת הכלי האלגברי החסר. אנו סבורים כמו אחרים (למשל בל , 1988 , Bell) , כי סיטואציות כאלה נותנות משמעות ללמידת השפה האלגברית ומבליטות את הצורך בלימוד חוקי ה"תחביר" שלה.

ספרות:

Bell, A , (1989) : Algebra - Choices in curriculum design. An exploratory teaching experiment . In Borbas, A (Ed.) , *Proceedings of the 12th Conference of the International Study Group for the Psychology of Mathematics Education (PME XII)* , pp. 147-153.

Booth, L. (1989): A question of structure. In Wagner , S. and C. Kieran (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra*. NCTM: Reston, Virginia pp. 57-59.

Davis , P. and R. Hersh (1981): *The Mathematical experience*. Houghton Mifflin Co: Boston , pp. 134-136.

Dorfler , W. (1989): *Forms and means of generalization*.. [Preprint available from the author.]

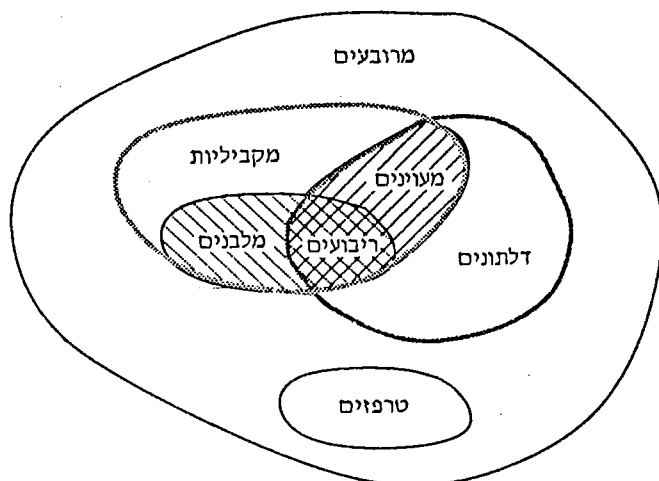
Fischbein, E. (1987): *Intuition in science and Mathematics - An educational approach* . Reidel , Dordrecht , The Netherlands.

השימוש בדלתון

מאת : דוד רימר

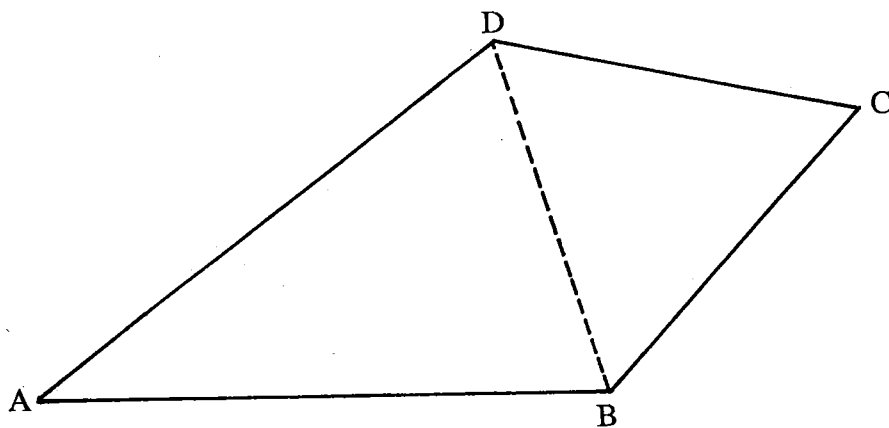
המחלקה להוראת המדעים , מכון ויצמן למדע

כידוע הדלתון מוגדר כמרובע בו שתי צלעות סמוכות שוות זו לזו וגם שתי הצלעות האחרות שוות. הדיאגרמה המתארת את קבוצות המרובעים השונות והיחסים ביניהן היא:



(איור 1)

במאמר כאן נתעסק בדלתון שאינו מעוין , כלומר במרובע ABCD בו $AB = AD \neq BC = CD$



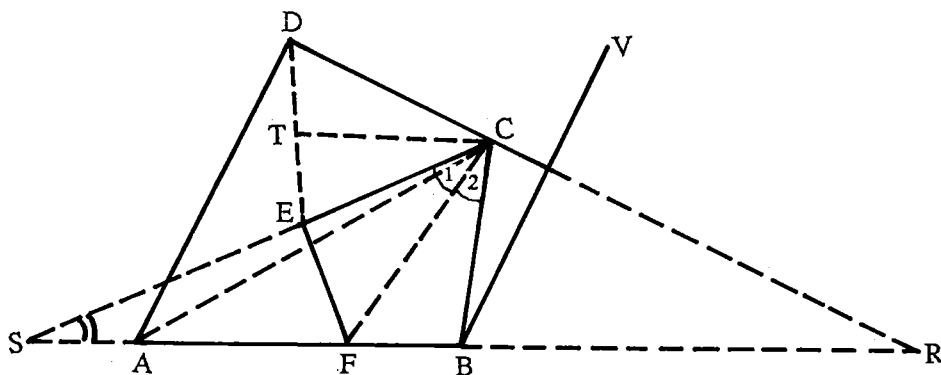
(איור 2)

$AB \parallel CD$, ז.א. ABCD מקבילית, וזו סתירה.

צלעות פרופורציוניות, שוות בהתאמה.

בגלל צורכי הטכניקה יש התעניינות רבה להעביר תנועה מעגלית לתנועה קוית ולהיפך. בין הפתרונות שניתנו, קיים גם מכשיר בנוי ע"י האנגלי A.B. Kempe.

המכשיר בנוי משני דלתונים דומים, המשולבים זה בזה (איור 3).



(איור 3)

הצגת הנושא בשיעור בו לומדים על חדלתון יכולה להגדיל את התענינות התלמידים.

להלן תאור המכשיר והסבר מתמטי עליו ועל פעולתו.

ABCD ו- BCEF זלתונים, כך ש $AB = AD$, $CB = CD = CE$, $BF = FE$ וקיים

הקשר $CB^2 = AB \cdot BF$. ב - E וב - B קבועים עטים מאונכים למישור הדלתונים.

נעביר את האלכסונים AC ו- CF. נובע מיד $\angle ADC \sim \angle CEF$ ולכן $\angle A_1 = \angle C_1$.

כמו כן $\angle ABC \sim \angle CBF$ ולכן $\angle A_2 = \angle C_2$. מכאן נובע $\angle BAD = \angle BCE$.

היות וזווית B משותפת ו $\angle D = \angle E = \angle B_1$ נובע כי כל הזוויות שוות בהתאמה. ברור כי גם הצלעות פרופורציוניות ולכן שני הדלתונים דומים.

היות והצלעות הנגדיות אינן מקבילות, מתקבלות נקודות החיתוך R ו- S. קל להוכיח כי $\angle R = \angle CSB$

$$\angle R = 180^\circ - \angle BAD - \angle D \quad (a) \quad \text{ההוכחה:}$$

$$\angle BSC = 180^\circ - \angle BCS - \angle CBS \quad (b)$$

$$\angle BAD = \angle BCS \quad (c)$$

$$\angle CBS = \angle D \quad (d)$$

נעביר עתה DE ו- CT $\parallel AB$

נובע מיד: $\angle DCT = \angle R$ (מתאימות) ו $\angle ECT = \angle CSB$ (מתחלפות).

היות ו- $\angle R = \angle BSC$, נובע $\angle DCT = \angle ECT$. יוצא כי במשולש שווה שוקיים $\triangle DCE$, $CT \parallel AB$ הוא חוצה זווית הקודקוד, לכן הוא גם גובה, ז.א. $DE \perp CT$. אבל $CT \parallel AB$, לכן $DE \perp AB$.

אם AB נע רציף מקביל לעצמו, E תנוע רציף לאורך DE, מאונך ל- AB.

כדי ליישם תנועתו של AB מקביל לעצמו, מייצבים את המכשיר על לוח, קובעים את D על הלוח, ומוסיפים מוט $BV = AB$, קבוע ב- V, מקביל ל- AD (איור 3). אז ABVD מעוין, בעל הקודקודים D, V, קבועים, אבל הזוויות $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E, \angle F$ גמישות, בגלל הברגים שמחברים את המוטות בנקודות אלה. כאשר מסובבים את VB סביב ל- V, נעה לאורך קשת של מעגל (שמרכזו ב- V), AB נע רציף מקביל לעצמו (ולישר המדומה DV) ואז העט שב- E משרטט קטע של ישר מאונך ל- AB.

רצף התמונות שלהלן מדגים את הפעולה.

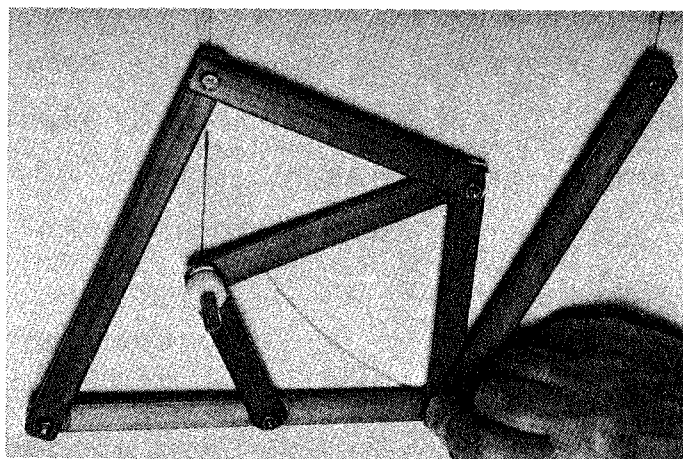
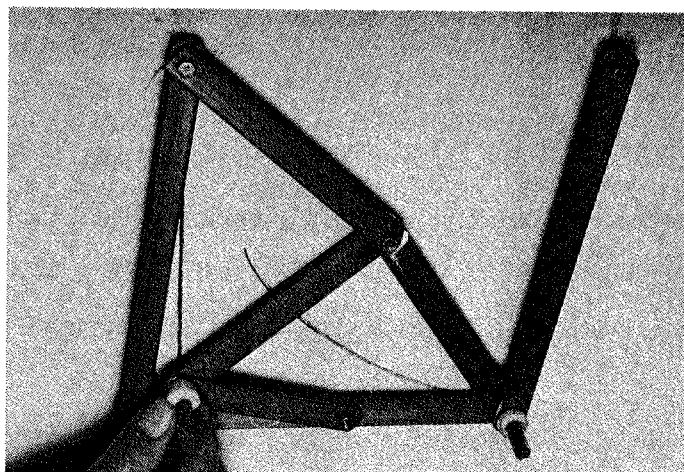
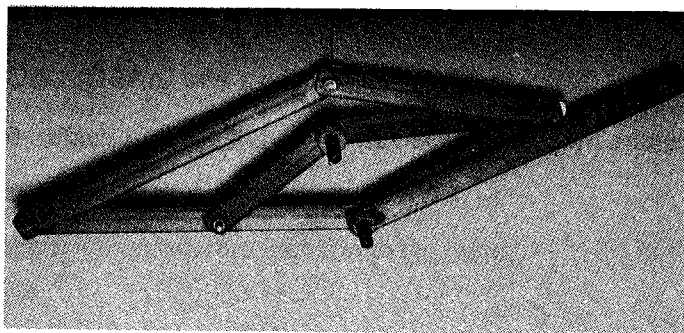
בתמונה 1: המכשיר.

בתמונה 2: כשמדריכים את העט ב E המשרטט קטע של ישר, העט השני ב B משרטט,

אוטומטית, קשת של מעגל.

בתמונה 3: כשמדריכים את העט המשרטט קשת של מעגל, העט השני משרטט, אוטומטית,

קטע של ישר.



בספרים [2] ו- [3] הקורא יוכל למצוא תאור מכשירים הבנויים בהרכבת שני מכשירים מסוג זה ותוצאותיהן הרבה יותר עשירות ומפתיעות.

1. עמנואל קרמר, גיאומטריה, מכון ויצמן למדע (1987)
2. Candy H.M. and Rollet A.P. Mathematical Models Oxford University Press (1961)
3. Kempe A.B. How to draw a Straight Line, The National Council of Teachers of Mathematics U.S.A (1977)

הבעת תודה

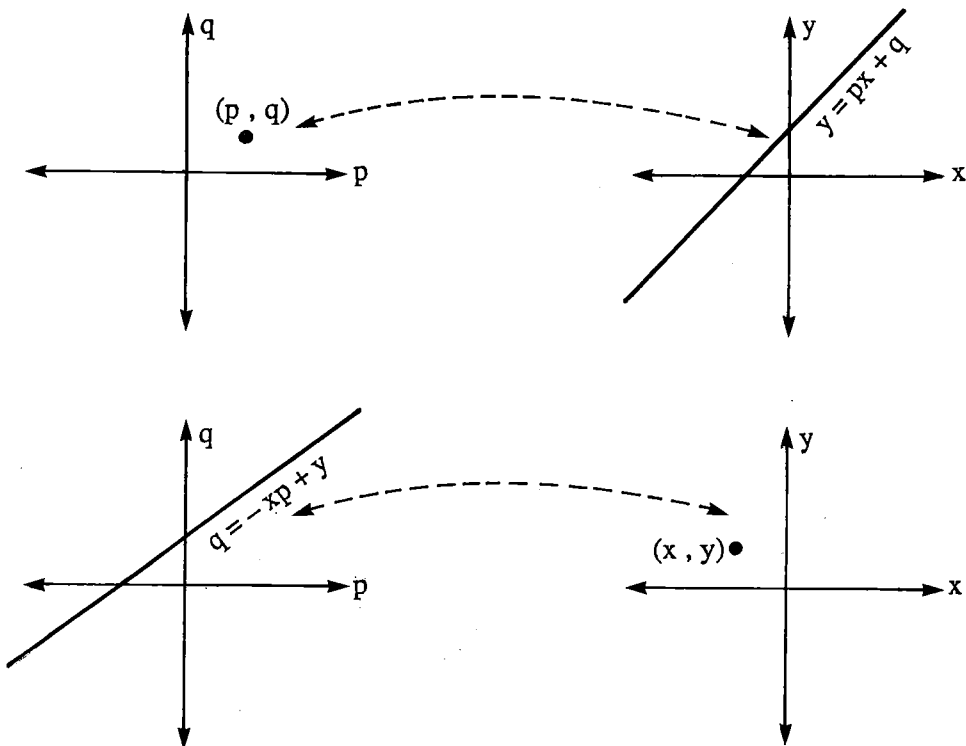
לד"ר משה רישפון, מנהל היחידה לפעולות נוער של מכון ויצמן למדע, על האישור לבנות את המכשיר בבית המלאכה של היחידה. תודה מיוחדת למר ברנט קרטנר מאותה יחידה שבנה אתה המכשיר, וכמו כן למר שמואל אנגלשטיין מנהל מעבדת הצילום של מכון ויצמן ומר שלום נדאד מאותה מעבדה, אשר ביצעו את הצילומים שנכללו במאמר.

נקודת מבט שונה למציאת נקודת חיתוך של שני ישרים

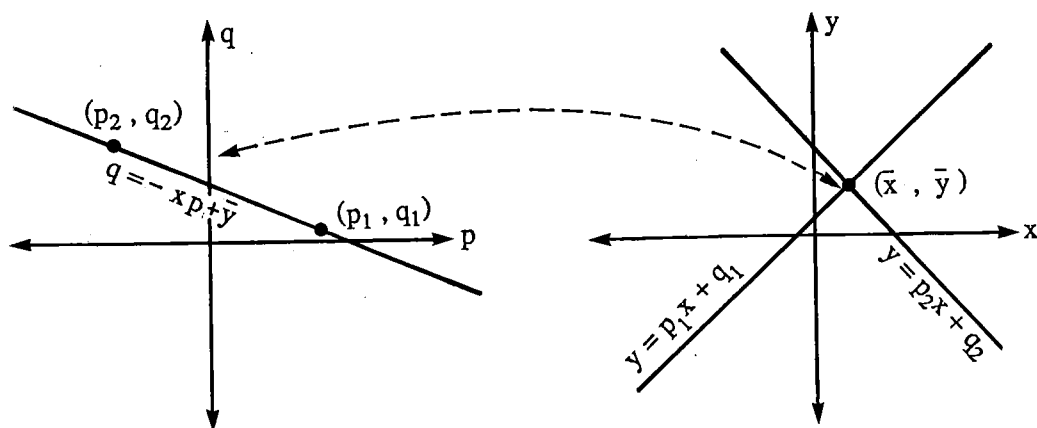
מאת: מייקל פריד, קיבוץ רביבים.

מורה למתמטיקה צריך, לא פעם, להתייחס לשאלות על פרמטרים לעומת משתנים. המורה לא טועה כאשר הוא מדגיש שיש ביניהם הבדלים, אך עליו לזכור שההבדל אינו מוחלט; מותר להתייחס לאות שקודם היתה פרמטר כמשתנה ולהיפך. יותר מזה, החלפה בתפקידה של אות-פעם כמשתנה ופעם כפרמטר - היא גם, במקרים רבים, שימושית.

להלן, אני מראה שימוש ברעיון זה לגבי מציאת נקודת החיתוך של שני ישרים. כדי להתחיל, יש לשרטט שתי מערכות צירים, אחת עם ציר x וציר y והשנייה עם ציר p וציר q . לפיכך, לישר $y = px + q$ במישור (x, y) מתאימה הנקודה (p, q) במישור (p, q) , והנקודה (x, y) במישור (x, y) מתאימה לישר $q = -xp + y$ במישור (p, q) :



עכשיו נניח שעלינו למצוא את נקודת החיתוך $(\bar{x}, \bar{y})$ של הישרים $y = p_1x + q_1$ ו $y = p_2x + q_2$.
 אנו רואים שלכל נקודה על $y = p_1x + q_1$ מתאים ישר במישור $p - q$.
 שעובר דרך (p_1, q_1) ולכל נקודה על $y = p_2x + q_2$ מתאים ישר שעובר דרך (p_2, q_2) .
 לכן הישר העובר דרך (p_1, q_1) וגם (p_2, q_2) מתאים לנקודה שגם על $y = p_1x + q_1$
 וגם על $y = p_2x + q_2$, כלומר $(\bar{x}, \bar{y})$.



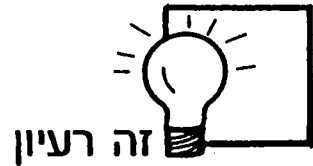
לפי ההתאמה שלנו, משוואת הישר הזה היא $q = -\bar{x}p + \bar{y}$. אבל מצד שני, מפני שהישר העובר דרך (p_1, q_1) ו (p_2, q_2) נתון על ידי המשוואה:

$$q = \left(\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} \right) p + \left(\frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{p_2 - p_1} \right)$$

$$\bar{x} = - \left(\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} \right) \quad \text{או יש לנו:}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{p_2 - p_1} \right)$$

אם כן, מלבד העשרה בדיון על משתנים ופרמטרים, יש לשיטה זאת יתרון שהתלמיד צריך לדעת רק איך לחשב את משוואת הישר העובר דרך שתי נקודות נתונות.



כתב חידה

מאת: רונית אפלברג, רמת גן

במסרים ב/3 פורסם כתב חידה שניתן בהשתלמות מורים בה השתתפתי. בעקבות השתלמות זו בניתי את כתבי החידה הבאים אשר יכולים אף הם לשמש מורים בעבודתם.

כתב חידה מיועד להעברה כעבודת סיכום. רצוי בקבוצות (של 3 עד 6 תלמידים). כתחרות ביניהן, כאשר הקבוצה הראשונה ש"מפצחת" את כתב החידה זוכה בפרס.

על ידי שינוי קל ניתן להתאים את כתבי החידה האלו לנושאים אחרים.

נשמח לשמוע הערות לגבי העברת כתבי החידה בכיתות והצעות לכתבי חידה נוספים.

הנתונים בכתב חידה 1 נלקחו מתוך ספר השיאים של גינס. אפשר לשלב כתב חידה זה לאחר הוראת הפרק סדר פעולות חשבון.

את כתב חידה 2 ניתן לשלב לאחר הוראת הפרק מספרי הזזה.

כתב חידה 1: שיאים בממלכת החיות (מתוך ספר השיאים של גינס)

א. גדול/כבד _____ ב. ארוך/גבוה _____

נקבת _____
במשקל 187 טון ובאורך
27.6 מטר. נתפסה ב 1971
ע"י הסובייטים.

אורך 55 מטר.
נמצא בסט אנדרו
סקוטלנד 1864.

ג. קטן/קל _____ ד. מחיר _____

אורך 92 מ"מ.

מהירות צלילה 350 קמ"ש.
נמצא בגרמניה 1963-1967.

ה. מאריך ימים _____ ו. נפוץ _____

חיה במשך 220 שנים לערך.
דווח מהאוקינוס האטלנטי
1982.

מספרן מוערך ב $4 \cdot 10^{25}$.
(מספרם הכולל של כל
היצורים על פני כדור
הארץ מוערך ב $3 \cdot 10^{35}$).

עליך לגלות בעזרת הרמזים הבאים מיהם בעלי השיאים מקרב כלל החיות. לכשתגלה, רשום את שמם ליד האותיות שלמעלה.

בחלק א' עליך לבחור מתוך 12 בעלי החיים את השישה הנכונים.
בחלק ב' עליך להתאים את בעלי השיאים לשיאם.

חלק א'

לפניך רשימה של 12 בעלי חיים. העזר בשאלות הבאות ובחר את ששת הנכונים מתוכם.

- | | | |
|--------------------|----------------------------|----------------------|
| א) הצב טסטודו גיקה | ב) רכיכת הקואהונג | ג) עכבר הבית |
| ד) לוויתן כחול | ה) תולעי הים מזון הנמאטורה | ו) פיתון מרושת |
| ז) רכיכה חד-צדפית | ח) בז הפרגרון | ט) תולעת שרוך ה"מגף" |
| י) סיס לבן צואר | יא) זבובי הפיה | יב) פיל אסיאתי |

1. הקף את האות ליד הביטוי חסר המשמעות.

א. $0:3$ ב. $\frac{0.2:2}{0.1}$ ג. $0:\frac{1}{2}$ ד. $\frac{5-2}{4-2\cdot2}$ ה. $\frac{10-5\cdot2}{10}$

2. א. פתור $[12\cdot4:(8-2)]:8\cdot9 =$

ב. מצא את האות המתאימה לערך בגימטריא.

3. הקף את האות ליד התרגיל בו ל ניתן לוותר על הסוגריים.

א. $8 + (9 + 5)$ ב. $20\cdot(7\cdot3)$ ג. $(70 - 7) + 4$
 ד. $(40:2)\cdot4$ ה. $(20 - 5):5$

4. הקף את האות ליד התרגיל שבו התוצאה א ינה 0.

א. $(3-3):\left(5\cdot\frac{1}{5}\right)$ ב. $(2+2):\left(\frac{1}{10}-0.1\right)$ ג. $7\cdot\frac{1}{7}\cdot0\cdot5$
 ד. $2-\left(\frac{1}{8}\cdot8\right)-\left(7\cdot\frac{1}{7}\right)$ ה. $2.5\cdot4 - 10$

5. א. הערך, ללא חישוב מדויק, מהי התוצאה הנכונה של התרגיל: $3.46 - 1.35 \cdot 0.5$

א. 0.76 ב. 4.22 ג. 1.055

ד. 2.785 ה. 10.55

ב. עגל את התוצאה שקבלת לשלמים.

ג. כתוב את המספר שקבלת בבסיס שתיים.

ד. תרגם את המספר שקבלת לגימטריא (כאותרו בסיס). דוגמא: שתיים ט"ו.

6. מהי סדרת הלחיצות המתאימה לתרגיל $30 : \frac{6}{5}$? הקף את האות המתאימה.

א.

30	:	(	6	×	5	)
----	---	---	---	---	---	---

 ב.

30	:	6	:	5
----	---	---	---	---

ג.

30	×	6	:	5
----	---	---	---	---

 ד.

30	:	(	6	:	5	)
----	---	---	---	---	---	---

ה.

(	30	:	6	)	:	5
---	----	---	---	---	---	---

הכפל את ערך האות שקבלת ב 2. מה ערך המכפלה בגימטריא?

7. ערוך רשימה של בעלי החיים שהתקבלו (לפי סדר השאלות) והתייחס לרשימה זו בלבד בחלק ב'.

א. _____ ב. _____ ג. _____

ד. _____ ה. _____ ו. _____

חלק ב'

1. מבין המספרים הבאים מצא את המספר שהצבתו ב $\frac{1}{a}$ תתן מספר שלם:

- א) $\frac{1}{5}$ ב) 0 ג) $\frac{2}{3}$ ד) 6 ה) $\frac{7}{4}$

בעל החיים זה הוא הגדול/הכבד ביותר.

2. מהו המספר החסר במסגרת הריקה בתרגיל $\frac{3}{4} \cdot \square \cdot \frac{2}{3} = 1$

- א) $\frac{4}{3}$ ב) $\frac{3}{2}$ ג) 2 ד) $\frac{6}{12}$ ה) 1

בעל החיים זה הוא הנפוץ ביותר.

3. כתוב בכתיב מתמטי: "המנה של הפרש המספרים 6 ו 3 ב 2".

א. $6 - 3 : 2$ ב. $6 - (3 : 2)$ ג. $6 : 3 - 2$

ד. $(6 - 3) : 2$ ה. $6 : (3 - 2)$

בעל חיים זה מאריך ימים.

4. המספר החסר במסגרת הריקה : $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} - 0.125 \right) = \frac{2}{3} \cdot \boxed{}$

א. 1 ב. 2 ג. 0

- אם סימנת א יהיה השני ברשימה קל/קטן ביותר.
אם סימנת ב יהיה החמישי ברשימה המהיר ביותר.
אם סימנת ג יהיה השני ברשימה הארוך/גבוה ביותר

5. השלם: נתון שם המספר $10:5 + 2$

הקף כאשר שם המספר הנתון מתאים לכתוב במלים.

- א. מספר הגדול ב 2 מהמנה של 10 ב 5.
ב. המנה של המספר 10 בסכום המספרים 5 ו 2.
ג. הסכום של 10:5 והמספר 2.
ד. המנה של המספר 10 בסכום 5 + 2.
ה. מספר הגדול ב 2 מהמנה 10:5.

אם הקפת א ג ה יהא הששי ברשימה המהיר ביותר.

אם הקפת ב ד ה יהא החמישי ברשימה המהיר ביותר.

אם הקפת כל דבר שונה מהנ"ל יהא השני ברשימה המהיר ביותר.

פתרון כתב החידה

- א. גדול/כבד לזיתן כחול
ב. ארוך/גבוה תולעת שרוד המגן
ג. קטן/קל זבובי הפיה
ד. מהיר בז הפרגון
ה. מאריך ימים רכיכת הקואהונג
ו. נפוץ תולעי ים מזון חנמאטורה

פתרון חלק א

1. ד 2. $9 = ט$ 3. ה 4. ב
5. $3 \sim 2.785$, י"א = שתיים 11 = עשר. 6. $ד \times 2 = ח$.

פתרון חלק ב

1. א 2. ג 3. ד 4. ג
5. א ג ה

כתב חידה 2: מצא את הקשר בין המקומות

לפניך רשימה של 11 מקומות. קיים קשר מסויים בין 6 מקומות 'מתוך 11 המקומות שברשימה.

עליך לגלות את ששת המקומות ולמצוא בעזרת הרמזים מהו הקשר.

- | | | | |
|------------|---------|---------------|---------|
| 1. בית צור | 2. יבנה | 3. חדשה | 4. יפו |
| 5. כפר שלם | 6. עזה | 7. אמאוס | 8. חצור |
| 9. מרשה | 10. לד | 11. בית חורון | |

שלב א

I. א. מהו המספר החסר במשבצת הריקה: $-3 \cdot \frac{5}{8} = 3$:

חלק את המספר שמצאת בנגדי שלו והוסף $-(-2)^3$

ב. פתור: $\frac{5 \cdot (-4)}{-\frac{1}{2}} + \frac{8 \cdot (-5)}{4} =$

חלק את המספר שקבלת במספר הראשוני האי זוגי הקטן ביותר והוסף למנה 1.

ג. מהו המספר החסר במשבצת הריקה : $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-5 - \square) = 1$

הוסף למספר שמצאת את הנגדי ל- (-3).

ד. פתור: $-2^2 + (-2)^2 =$

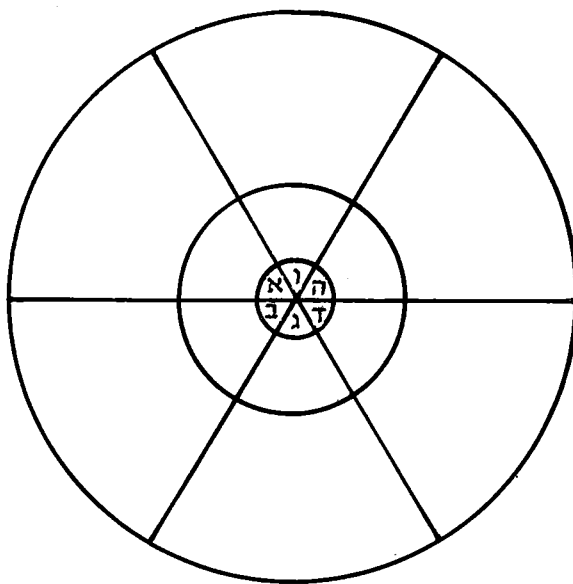
הוסף לתוצאה $(-3)^2$.

ה. פתור: $-5^2 \cdot \frac{1}{5} + (-1)^3 \cdot 5 + |2 \cdot (-7 + 2)| + |-5| =$

ו. פתור: $2 - \frac{0.2 - 2}{2 - 0.2} =$

שבץ בעיגול הגדול, לפי סדר השאלות, את ששת המקומות שמצאת. לדוגמא: את שם

המקום בשאלה א' רשום ליד משבצת א'.



II. את חמשת המקומות הנותרים, לפי סדר כתיבתם ברשימה הנ"ל, שבץ בעיגול הבא, לפי ההוראות הבאות:

השלם את המספרים החסרים במשבצות הריקות שבתרגילים הבאים, כך שיתקבלו פסוקי אמת:

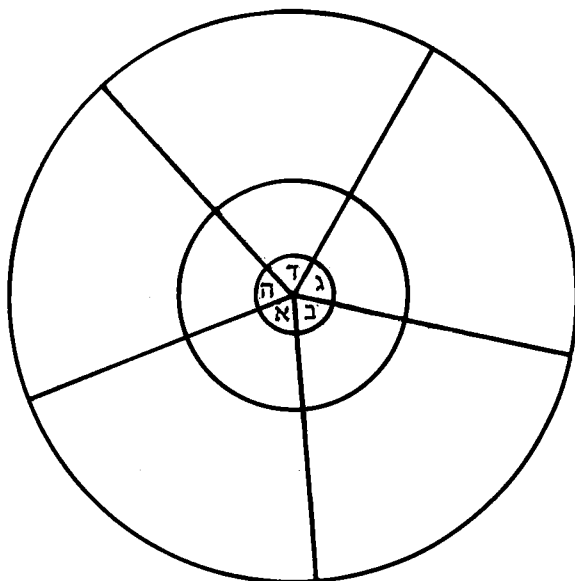
$$(-4) \left(-\frac{1}{4} \right) + \square = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \square^9 \cdot 8 = 1$$

א. אם השלמת בשני התרגילים מספרים נגדיים אז שבץ את המקומות, החל מן האות ה', בכיוון נגדי לכיוון השעון.

ב. אם קבלת מספרים הופכיים, אז שבץ את המקומות החל מן האות א' בכיוון נגדי לכיוון השעון.

ג. אם השלמת רק בתרגיל אחד את (-1) , החל לשבץ מן האות ד' עם כיוון השעון.



שלב ב' (רמז לקשר בין המקומות)

הקף את התשובה הנכונה .

מהו הביטוי המבטא את המרחק בין $5\frac{1}{4}$ ל $-3\frac{1}{2}$.

- א. $5\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}$ ב. $5\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2}$ ג. $\left| 5\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} \right|$
- ד. $-3\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4}$ ה. $\left| 3\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4} \right|$

אם הקפת א' הרמז הוא - מסעות נפוליאון בא"י.

אם הקפת ב' הרמז הוא - חג מסויים.

אם הקפת ג' הרמז הוא - יהושע וכבוש הארץ.

אם הקפת ד' הרמז הוא - פלשתיים

אם הקפת ה' הרמז הוא - העליות לא"י.

בשלים ג' ו ד' תמצא את הקשר בין המקומות.

שלב ג'

התייחס לעיגול הראשון בלבד.

מכל מילה ששבצת , עליך לבחור אות אחת לפי ההוראות הבאות. כתוב אות זו במשבצת ליד אותה מילה.

(דוגמא: אם הקפת ב' עליך להוציא את האות השניה מן המילה).

1. התייחס למקום שרשמת ליד משבצת א.

אדם תרם 13 ש"ח לאגודה למלחמה בסרטן. אם נקבע כאפס את הסכום הממוצע שתרמו

אנשים באותו בנין , יהיה הסכום שתרם אותו אדם (-5). מהו הסכום הממוצע שתרמו

באותו בנין? הקף את התשובה הנכונה.

- א. 8 ב. 18 ג. 9 ד. 4 ה. 16

2. התייחס למקום הרשום ליד משבצת ו'.

הקף את התשובה הנכונה.

מהו הנגדי ל $-(2-3)$?

- א. $2-3$ ב. $-2+3$ ג. $-(-2-3)$ ד. 1

3. התייחס למקום הרשום ליד משבצת ג'.

הקף את התשובה הנכונה.

מהו ההופכי למכפלה $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}$

- א. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ ב. $-\frac{1}{2} \cdot 4$ ג. $-4 \cdot 2$ ד. $2 \cdot 4$ ה. $\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}$

4. התייחס למקום הרשום ליד משבצת ד'.

כפול את כל המספרים השלמים מ -3 עד 3. מה קיבלת?

הוסף לתוצאה שקבלת את המספר הניטרלי בכפל.

5. התייחס למקום הרשום ליד משבצת ב'.

הקף את התשובה הנכונה.

אם מכפלת שני מספרים א' ו ב' היא 0 אז

א. שני המספרים נגדיים. ב. שני המספרים הופכיים.

ג. מספר א' וגם מספר ב' חייבים להיות 0. ד. מספר א' חייב להיות 0.

ה. מספר א' או ב' חייבים להיות 0. ו. מספר ב' חייב להיות 0.

6. התייחס למקום הרשום ליד משבצת ה'.

חבר את כל המספרים מ -3 עד 3. מה קבלת?

חבר לתוצאה שקבלת 5.

שלב ד'

התייחס לעיגול השניבלבד. גם כאן, כמו בשלב ג', בחר לפי ההוראות אות אחת מכל מילה ששיבצת וכתוב אות זו ליד אותה המילה.

1. התייחס למקום ליד משבצת א'.

כמה מספרים שלמים תוכל לרשום במשבצת הריקה כך שיתקבל פסוק אמת $-1 < \square$?

א. אינסוף מספרים. ב. אין מספר כזה. ג. 0 ד. 1

2. התייחס למקום ליד משבצת ב'.

כמה מספרים תוכל לרשום במשבצת הריקה $-\frac{1}{2} < \square < -1$

א. אינסוף מספרים ב. אין מספר כזה ג. 0 ד. 1

3. התייחס למשבצות ג', ד', ה'.

אילו מספרים תוכל להציב במשבצת הריקה כדי שיתקבל פסוק אמת?

$\square > 0$ א. חיוביים ב. שליליים ג. 0 ד. כל מספר שונה מ 0 ה. אין מספר כזה

$\square < 0$ א. חיוביים ב. שליליים ג. 0 ד. כל מספר שונה מ 0 ה. אין מספר כזה

$\square = 0$ א. חיוביים ב. שליליים ג. 0 ד. כל מספר שונה מ 0 ה. אין מספר כזה

$|\square| < 0$ א. חיוביים ב. שליליים ג. 0 ד. כל מספר שונה מ 0 ה. אין מספר כזה

$|\square| > 0$ א. חיוביים ב. שליליים ג. 0 ד. כל מספר שונה מ 0 ה. אין מספר כזה

* אם הקפת בשניים מן התרגילים את תשובה ב -

שבץ ליד משבצת ה' את האות השניה במילה, במשבצת ד' את האות הרביעית ובמשבצת ג'

את האות השלישית.

* אם הקפת בשניים מן התרגילים את תשובה א -

שבץ ליד משבצת ה' את האות הראשונה במילה, במשבצת ד' את האות הראשונה ובמשבצת ג' את האות השניה .

אם הקפת בשניים מן התרגילים את תשובה ג -

שבץ במשבצת ג' את האות הראשונה במילה , במשבצת ד' את האות השלישית ובמשבצת ה' את האות השלישית .

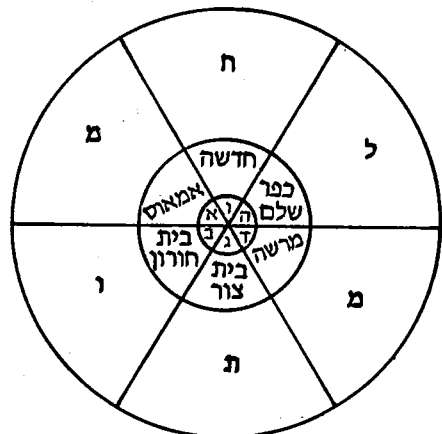
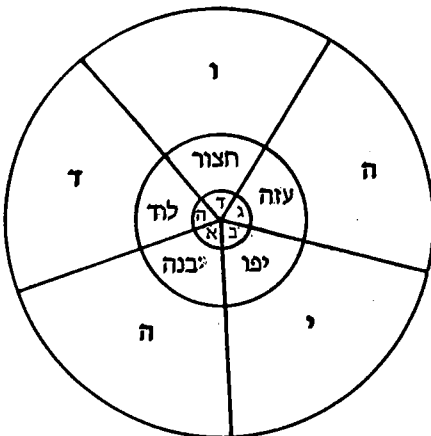
* אם הקפת בשניים מן התרגילים את תשובה ה -

שבץ במשבצת ד' את האות השלישית במילה , במשבצת ג' את האות השניה ובמשבצת ה' את האות השלישית.

* אם הקפת בכל אחת מהתשובות אות שונה , שבץ את האות השלישית בכל אחת מהמשבצות.

מהו הקשר ? ? ?

פתרון כתב היד



שלב א'

- I. א. אמאוס ב. בית חורון ג. בית צור
ד. מרשה ה. כפר שלם ו. חדשה

II. שני מספרים הופכיים, לכן יש לשבץ החל מהאות א'.

א - יבנה , ב - יפו , ג - עזה , ד - חצור , ה - לוד

שלב ב'

הרמז: חג מסויים.

שלב ג'

1. ב, האות היא מ. 2. א, האות היא ת.
3. ג, האות היא ת. 4. 1, האות היא מ.
5. ה, האות היא ו. 6. 5, האות היא ל.

שלב ד'

1. ד, האות היא ח 2. א, האות היא י
3. התשובות ד, ה, ג, ה, ד והאותיות לפי הסדר: ה, ו, ד.

מהו הקשר ?? **מלחמות יהודה - קשור לחג החנוכה.**



מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים
קבוצת המתמטיקה
המרכז הישראלי להוראת המדעים
ע"ש עמוס דה-שליט



הודעות



הנחיות

שינויים בתכנית הלימודים לרמה ג' בכיתות ח'-ט'

בסדרות הספרים של שלוש הרמות השונות בכיתה ז' מטפלים באותם נושאים, אך בגישות שונות ובדרגות העמקה וקושי שונות.

בכיתות ח' ו ט' ההקבלה בין המהלך המתמטי של תכנית רמות א' ו ב' ותכנית רמה ג' אינה נשמרת באותה מידה כמו בכיתה זו. לפי תכנית הלימודים כיום, ברמות א' - ב' לומדים בכיתה ח' פתרון משוואות ובכיתה ט' פונקציות. ואילו ברמה ג' לומדים בכיתה ט' פתרון משוואות ואינם עוסקים כלל בפונקציות.

לפיכך המעבר מרמה ג' לרמה ב' החל במחצית השניה של כיתה ח' ובכיתה ט' כמעט בלתי אפשרי.

במטרה לשמור על ההקבלה בתכנית הלימודים בין רמה ג' לרמות א' - ב', חיברנו שתי חוברות חדשות שתצאנה לאור בקיץ שנת תש"ן (לכל האוכלוסיה).

(א) "פתור משוואות" לכיתה ח'.

חוברת זו עוסקת בפתרון משוואות במשתנה אחד ומשלבת פעילויות במחשבון.

(ב) "חזקות" לכיתה ח' (במהדורת עיצוב).

בחוברת זו: טיפול במספרים עשרוניים, העלאה בריבוע, הוצאת שורש ומשפט פיתגורס.

המחשבון מלווה את כל הנושאים הנ"ל.

כמו כן התחלנו בכתיבת חוברת "פונקציות" כאשר פתרון מערכת משוואות בשני משתנים משתלב בפונקציה הקווית.

במקביל אנו משכתבים את ספר הנדסה I "ממלכן למשולש". בשלב ראשון חוברות אלו תופצנה בכיתות ניסוי בלבד.

לפיכך אנו ממליצים ללמד לפי הסדר את החוברות הבאות:

בכיתה ח'

קבוצות ותבניות

פתור משוואות

חזקות

הנדסה I ממלכן למשולש (במקביל לחוברת חזקות).

בכיתה ט'

(1) בתי ספר שהשתתפו בשנת תש"ן בניסוי ולימדו "פתור משוואות" בכיתה ח', ללמד:

גרפים

מערכת משוואות

פונקציות (חוברת ניסוי)

הנדסה II, III במקביל לאלגברה.

(2) בתי ספר שלא השתתפו בשנת תש"ן בניסוי ולא לימדו בכיתה ח' "פתור משוואות" ללמד:

פתור משוואות

גרפים

מערכת משואות

הנדסה II, III מקביל לאלגברה.

בדבר הצעות, הערות ושאלות ניתן לפנות אל תרצה הלוי או רחל בוחדנא במחלקה להוראת

המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות 76100, או בטלפון 08-343156 בימי ג'.
