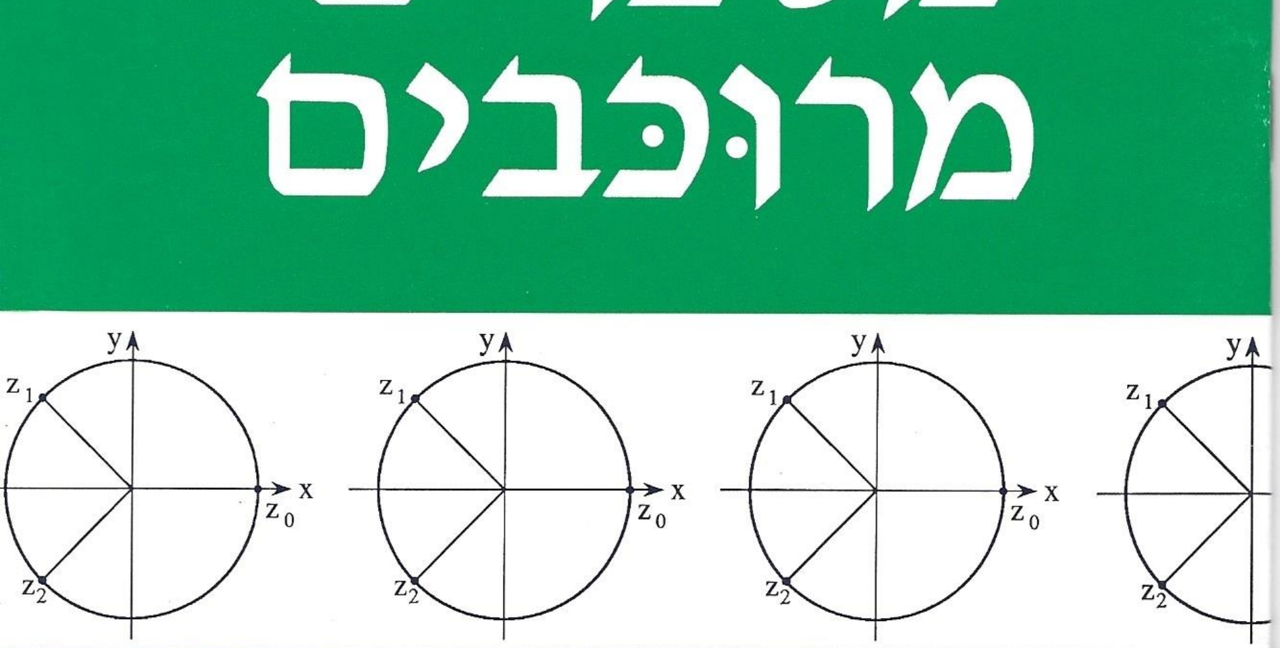
מספרים מרוכבים



מהדורה ניסויית

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

מספרים מרוכבים

מהדורה ניסויית

המחלקה להוראת המדעים מכון ויצמן למדע

יוצא לאור ביוזמתו ובפיקוחו של

המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה - שליט

מיסודם של

משרד החינוך והתרבות, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

חובר על ידי:

מקסים ברוקהיימר

רחל בוהדנה

הדפסה ועריכה במחשב:

אחובה אביבי

גרפיקה:

פולינה קרביץ

עיצוב העטיפה:

רחל בוקשפן

נדפס בישראל תש"ן - 1989

תוכן העניינים :

ל ת ל מ י ד ,

החוברת שלפניך עוסקת בהרחבת קבוצת המספרים הממשיים לקבוצת המספרים המרוכבים.

בחרנו להגיש את בניית המספרים המרוכבים מתוך גישה רחבה ככל האפשר , תוך שימוש באלמנטים מתחומים שונים של המתמטיקה. על ידי כך נעשה המעבר מן הממשיים אל המרוכבים פשוט וטבעי.

החומר המוגש לך כאן מתפתח שלב אחרי שלב כאשר בכל שלב בודקים ומבהירים תכונות ומשמעויות על סמך תכונות שהובהרו קודם.

המספרים המרוכבים

טרנספורמציות במישור

נתונה מערכת של שתי משוואות בשני משתנים x , y מהמעלה הראשונה:

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = \ell \end{cases}$$

את המערכת ניתן לתאר באמצעות מטריצות כדלקמן:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\substack{\text{מטריצת} \\ \text{המקדמים} \\ \text{מסדר } 2x2}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{\text{מטריצת} \\ \text{המשתנים} \\ \text{מסדר } 2x1}} = \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$$

משתמשים בתאור זה כדי לפתור את מערכת המשוואות (כלומר , למצוא x ו y) כאשר מטריצת המקדמים קבועה וגם k ו ℓ קבועים.
כעת נתייחס ל k ו ℓ כאל משתנים ורק מטריצת המקדמים קבועה.

נסמן ב S את קבוצת כל הנקודות $p(x,y)$ במישור.
תהי f התאמה המוגדרת מ S אל S* כך ש: $f : p(x , y) \longrightarrow p' (x' , y')$
כאשר:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

f היא פונקציה , (נמק!)
המטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מגדירה את הפונקציה f כלומר: $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

---

*במהלך הפרק נדבר על פונקציה מ S אל S ולא נציין זאת במפורש.

תרגיל 1

תהי f פונקציה המוגדרת ע"י $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

א) מצא את התמונה של כל אחת מהנקודות הבאות:

(3 , 5) (2 , 0) (1 , 2) (−2 , 3)

ב) התמונה של נקודה כלשהיא (x , y) היא: ____________

ג) תן הסבר גיאומטרי לפונקציה f .

למעשה הפונקציה f שבתרגיל 1 מגדירה טרנספורמציה שמשמעותה שיקוף בציר y , כך שאם שעוריה של נקודה p הם (x , y) הרי שיעוריה של 'p , שהיא שיקוף של p בציר y , הם: (-x , y).

שים לב! ישנן טרנספומרציות שמוגדרות בצורות שונות , אך במהלך פרק זה נדון בטרנספורמציות המוגדרות על ידי מטריצות בלבד.

תרגיל 2

רשום ערכים של d , c , b , a כך ש f תגדיר טרנספורמציה שמשמעותה שיקוף בציר x.

כלומר: $p'(x , -y) \longleftarrow p(x , y)$

תרגיל 3

תן הסבר גיאומטרי לפונקציות המוגדרות על-ידי המטריצות הבאות:

א) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ב) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ג) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ד) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

תרגיל 4

א) נתונה פונקציה המוגדרת על-ידי $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

מצא נקודת מקור שתמונתה על-ידי הפונקציה היא $(8 , 16)$.

ב) נתונה פונקציה המוגדרת על-ידי $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

מצא נקודת מקור שתמונתה על-יד הפונקציה היא $(8 , 16)$.

ג) מה ההבדל בין הסעיפים א׳ ו ב׳ ?

תרגיל 5

הגדרנו את f כפונקציה שמעבירה נקודה $p(x, y)$ לנקודה $p'(x', y')$ על-ידי:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

א) האם לכל תמונה יש מקור אחד ויחיד? נמק!

ב) מהם התנאים על a, b, c, d כדי שיהיה מקור יחיד?

תרגיל 6

תהיינה F ו G פונקציות המוגדרות על-ידי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ בהתאמה.

אפשר למצוא תמונה (x', y') של נקודה (x, y) תחת F ותמונה (x'', y'') של (x', y') תחת G.

כלומר: $(x, y) \xrightarrow{F} (x', y') \xrightarrow{G} (x'', y'')$

לפי הגדרת הפונקציה F:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(i)}$$

לפי הגדרת הפונקציה G:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

אם נציב מ (i) בתוך (ii) נקבל:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

לפי ההגדרה המקורית בתחילת הפרק אפשר לכתוב את המערכת בצורה:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

ומכאן:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eax + fcx + eby + fdy \\ \text{-------- השלם! --------} \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)}$$

א) בדוק את השורה הראשונה לפי ההגדרה והשלם את השורה השניה.

ב) השתמש בהגדרה פעם נוספת כדי לרשום את המשוואה (iii) בצורה:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

כלומר , מצא את הנוסחאות המקשרות בין α , β , γ , δ ו a , b , ... , h .

תרגיל 7

תן הסבר גיאומטרי לפונקציה המוגדרת על-ידי:

א) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

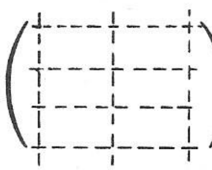
ב) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ג) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

מטריצות

<u>הגדרות</u>

1) מטריצה מסדר $k \ x \ l$ היא מערך של k שורות ו l טורים.



$k \ x \ l$

2) שתי מטריצות A ו B נקראות שוות אם האברים באותו מקום בשתי המטריצות שווים.

3) המשמעות של כפל מטריצה במספר ממשי m היא לכפול כל אחד מאבריה ב m.

4) נסמן את כל המטריצות מסדר 2x2 (כלומר מטריצות עם 2 שורות ו 2 טורים) ב M_2.

מגדירים את ה"חיבור" ב M_2 בצורה פשוטה.

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix}$$

5) את חיבור המטריצות מסדר $2x1$ נגדיר, באופן דומה, כך:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

6) הכפל ב M_2 הוגדר מתוך פעולות שנעשו, כמו לדוגמא בתרגיל 6. ז"א:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

ולכן הטרנספורמציה המוגדרת על-ידי המטריצה שבצד ימין של השוויון היא הרכבה של שתי הטרנספורמציות המוגדרות על-ידי המטריצות שבצד שמאל של השוויון, לפי הסדר.

אם נשנה את הסדר ביניהן, כלומר אם נבצע:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

נקבל טרנספומרציה אחרת. (ראה תרגיל רשות 1).

תרגיל רשות 1

הראה שאם נשנה את הסדר, כלומר נבצע:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

אזי תתקבל טרנספורמציה אחרת (כלומר טרנספורמציה המוגדרת על-ידי מטריצה שונה מזו שהתקבלה קודם).

הערות:

1. *כמו באלגברה, נוהגים להשמיט את סימן הכפל במכפלה* $a \cdot b$ *כך גם נהוג להשמיט את סימן ה"כפל" בין שתי מטריצות כש"כופלים" אותן.*

2. *ל"כפל" מטריצות אין חלק מתכונות הכפל במספרים הממשיים. מתוך תרגיל רשות 1 אנו רואים כי "כפל מטריצות" אינו קומוטטיבי. כמו כן, אם* B, C *ו* D *הן שלוש מטריצות ואם קיים* $DB = DC$*, אי אפשר להסיק מכאן ש:* $B = C$ *(ראה תרגיל רשות 2).*

תרגיל רשות 2

הראה כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

למרות שבשני צידי השוויון, המטריצות השמאליות שוות והמטריצות הימניות שונות.

תרגיל 8

תהי A תת קבוצה של M_2 (כלומר A קבוצה חלקית של M_2)

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} ; \quad a \in R \right\}$$

רשום את המשמעות הגיאומטרית של האברים ב A. (הבחן בין מקרים שונים לפי הערכים של a).

נתונות הקבוצות:

$$R = \{\text{המספרים הממשיים}\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;;\; a \in R \right\}$$

ניצור התאמה בין A ל R בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \longrightarrow a$$

התאמה זו מגדירה פונקציה חד-חד ערכית של קבוצת המטריצות ב A <u>על</u> קבוצת המספרים הממשיים R.

נוסף לכך היא מתאימה לסכום שתי מטריצות ב A את סכום המספרים הממשיים המותאמים למחוברים.

כלומר אם :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & + & b & = & a+b \end{array}$$

הרי: $(a+b) \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$

התאמה זו שהיא חד-חד ערכית ועל ו"שומרת" על פעולת החיבור ,נקראת <u>איזומורפיזם</u>..

לפיכך נכל לומר כי הקבוצה A עם "חיבור" מטריצות שנסמנה ב: $(A\ ,\ +)$ איזומורפית לקבוצת המספרים הממשיים עם חיבור $(R\ ,\ +)$. נוח יותר, אם כן, יהיה לרשום a במקום המטריצה

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

שים לב, במושג איזומורפיזם אנו מתכוונים להתאמה בין האברים ו"שמירה" על הפעולות.

תרגיל 9

בדוק אם כפל מטריצות ב A "מתאים" לכפל מספרים ב R.

תרגיל 10

א) בדוק אילו מבין הקבוצות הבאות איזומורפית ל R לגבי:

(i) כפל, (ii) חיבור:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad a \in R \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad a \in R \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad a \in R \right\}$$

ב) מהי המשמעות הגיאומטרית של האברים בכל אחת מקבוצות אלה?

חבורות

הגדרה :

קבוצה G עם פעולה בינ ארית $*$ נקראת חבורה אם מתקיימים התנאים הבאים:

א) סגירות : לכל $a, b \in G$ גם $a * b \in G$.

ב) קיבוציות: לכל $a, b, c \in G$ קיים : $(a*b) * c = a* (b*c)$

ג) קיים איבר נייטרלי e. כלומר: לכל $a \in G$ $e*a = a*e = a$

ד) לכל $a \in G$ קיים איבר הופכי $\bar{a}$. כלומר: $a*\bar{a} = \bar{a}*a = e$

תרגיל 11

בדוק לגבי כל אחת מהקבוצות הבאות אם הן חבורות. נמק!

א) קבוצת המספרים הרציונליים עם כפל $(Q, \cdot)$.

ב) קבוצת המספרים הרציונליים עם חיסור $(Q, -)$.

ג) קבוצת המספרים הרציונליים עם חיבור $(Q, +)$.

ד) קבוצת המספרים הרציונליים החיוביים , (i) עם כפל $(Q^+, \cdot)$,

(ii) עם חיבור $(Q^+, +)$.

ה) קבוצת המספרים $\{a + b\sqrt{2}\ ;\ a, b \in Q\}$, (i) עם כפל , (ii) עם חיבור.

תרגיל 12

לכל אחת מהקבוצות הבאות מצא פעולה כך שהקבוצה עם הפעולה תהווה חבורה.

א) קבוצת המספרים השלמים.

ב) $\{-1, 1\}$

ג) M_2

טרנספורמציות - הקבוצה C_2

עד כה בדקנו משמעות גיאומטרית של איברים ותת קבוצות של M_2.

כעת נתרכז בתת קבוצה מסויימת שנסמנה C_2:

$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; ; a , b \in R \right\}$$

תרגיל 13

הוכח $(C_2 , +)$ היא חבורה.

תרגיל 14

לאחר פתרון תרגיל 13 , התווכחו ביניהם מספר תלמידים האם הקבוצה $(C_2 , \cdot)$ היא חבורה?

תלמיד א' טען : $(C_2 , \cdot)$ אינה חבורה.

לעומתו טען תלמיד ב' ש $(C_2 , \cdot)$ אכן חבורה כי:

א) $(C_2 , \cdot)$ סגורה. (הוכח).

ב) בדקתי ומצאתי , הכפל ב C_2 הוא קיבוצי.

כלומר מתקיים:

$$\left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}\right]$$

(גם אתה תוכל לבדוק).

ג) קיים איבר נייטראלי.

מצא אותו. כלומר מצא את המטריצה המופיעה במקום הריק כך שיתקיים:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ד)' לכל איבר ב C_2 קיים איבר הופכי.

מצא אותו. כלומר מהי המטריצה $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ המקיימת:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{האיבר} \\ \text{הנייטרלי} \\ \text{מסעיף ג'} \end{pmatrix}$$

תלמיד אי השיב: בניגוד למה שנאמר לעיל, ישנה מטריצה אחת ויחידה ש"מפריעה".

מהי מטריצה זו ? איפה היא מפריעה ?

תרגיל 15

הראה שקיים ב C_2 חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור.

(חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור מתקיים גם ב M_2).

תרגיל 16

בעמוד 7 ראינו כי $(M_2 , \cdot)$ אינה קומוטטיבית (כלומר אינה מקיימת את חוק החילוף). הוכח כי $(C_2 , \cdot)$ קומוטטיבית.

<u>סיכום והשוואה</u>

נשווה את תכונות R עם פעולת הכפל ועם פעולת החיבור ל C_2 עם פעולת הכפל ועם פעולת החיבור.

א) $(R, +)$ היא חבורה. גם $(C_2, +)$ היא חבורה.

ב) R עם פעולת הכפל בלי אפס (שהוא האיבר הנייטראלי בחיבור) היא חבורה. אם נוציא את המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (שהיא האיבר הנייטראלי לחיבור מטריצות) מתוך C_2 נקבל חבורה עם כפל.

ג) מבחינה מבנית אפשר לומר כי התכונות של C_2 עם כפל ועם חיבור דומות לתכונות של R עם כפל ועם חיבור כולל חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור.

נמשיך עם המשמעויות הגיאומטריות של המטריצות ב C_2.

תרגיל 17

א) רשום את המשמעות הגיאומטרית של: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ב) רשום את המשמעות הגיאומטרית של: $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

שים לב: $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

תרגיל 18

א) מה המשמעות הגיאומטרית של $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

ב) מה המשמעות הגיאומטרית של $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$?
(כאשר $a > 0$)

תרגיל 19

$P(1,1)$, $R(1,2)$, $Q(2,1)$ הן שלוש נקודות במערכת צירים.
מצא את התמונה של כל אחת מנקודות אלה אחרי סיבוב ב 90° , ומתיחה פי 2.

שים לב , הגדרנו כפל מטריצה במספר ממשי כך שכל איבר במטריצה מוכפל במספר הממשי.
מתוך תרגיל 17 וכן משמירת הקשר של ההתאמה והפעולה כלומר , האיזומורפיזם של $(A,+,\cdot)$ עם $(R,+,\cdot)$, מתקבל איפוא:

$$b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן , ניתן להחליף ביטויים אלה זה בזה.

תרגיל 20

נגדיר פונקציה $f: (x , y) \longrightarrow (x' , y')$

כאשר:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

מהי המשמעות הגיאומטרית של f ?

תרגיל 21

מהי המשמעות הגיאומטרית של:
(כאשר $a > 0$)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

תרגיל 22

א) ידוע שטרנספורמציה מסויימת מעתיקה את הנקודה $(1 , 0)$ לנקודה $(-1 , 0)$.
רשום מספר אפשרויות למשמעות הגיאומטרית של טרנספורמציה זו.

ב) לגבי כל אחת מהאפשרויות שרשמת בסעיף א', רשום מה תהיה התמונה של $(0 , 1)$.

ג) ידוע שטרנספורמציה מסויימת, המוגדרת על ידי מטריצה מ M_2, מעתיקה את $(1 , 0)$ ל $(-1 , 0)$ וכן את $(0 , 1)$ ל $(0 , 1)$. מהי הטרנספורמציה הזו ? רשום את המטריצה שלה.

ד) אם ידוע שטרנספורמציה מסויימת המוגדרת ע"י המטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

מעתיקה את $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ על $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ואת $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ על $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$

כלומר: $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

מצא את המטריצה של טרנספורמציה זו.

נקודה אחת אינה מגדירה את הטרנספורמציה באופן חד ערכי ואילו שתי נקודות מגדירות אותה באופן חד ערכי. ומכאן קל למצוא את המטריצה המתאימה.
מתוך הגדרת חיבור מטריצות וכן כפל מטריצה במספר ממשי ראינו כי

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

לפיכך נוח יותר לבדוק את התמונות של הנקודות (1 , 0) ו (0 , 1). לכן אם נתונה מטריצה מסויימת ואנו מעוניינים לדעת מה השפעת הטרנספורמציה יש לבדוק את ההשפעה על הנקודות (1 , 0) ו (0 , 1) ולהגיע למסקנה.

טרנספורמציות - $A(\phi)$

תרגיל 23

תהי $A(\phi)$ קבוצת כל המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$

מה המשמעות הגיאומטרית של המטריצות $A(\phi)$?
רמז , בדוק על ידי התמונות של (1 , 0) ושל (0 , 1)

(שים לב , $A(\phi)$ היא תת קבוצה של C_2).

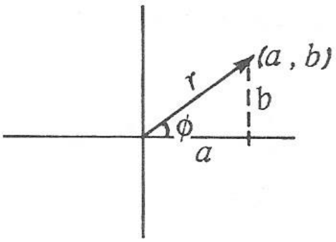
תרגיל 24

א) האם הקבוצה $A(\phi)$ יוצרת חבורה תחת כפל מטריצות ?

ב) האם הקבוצה $A(\phi)$ יוצרת חבורה תחת חיבור מטריצות ?

ג) האם $A(\phi)$ חילופית בחיבור ? חילופית בכפל?

חישובים טריגונומטריים



נתבונן בנקודה כלשהיא (a , b) במערכת צירים.
נקודה זו "מגדירה" רדיוס (r) ושיפוע (ϕ) .

לפיכך מתקבל : $a = r\cos\phi$

$b = r\sin\phi$

אם כן , ניתן לרשום את אברי הקבוצה C_2 בצורה

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

מתקבל איפוא , כי האיברים ב C_2 מגדירים סיבובים דרך הראשית ב ϕ עם "מתיחה" דרך הראשית פי r .

אם נתונים r ו ϕ אפשר למצוא את a ו b בעזרת המשוואות:

$$b = r\sin\phi \qquad\qquad a = r\cos\phi$$

ואם נתונים a ו b אפשר למצוא את r ו ϕ באמצעות המשוואות :

$$\tan\phi = \frac{b}{a} \qquad ו \qquad r^2 = a^2 + b^2$$

(שים לב , תוצאת סיבוב בזוית ϕ זהה גם לסיבוב בזוית $\phi + 2\pi k$, k שלם).

תרגיל 25

א) מצא r ו ϕ לנקודות הבאות:

i) $(3\,,4)$, ii) $(5\,,-7)$, iii) $\left(1\,,\frac{1}{2}\right)$, iv) $(-3\,,0)$

v) $(\sqrt{3},-1)$ vi) $(1\,,1)$ vii) $(-3\,,4)$

ב) מצא a ו b אם:

i) $r=\sqrt{2}$, $\phi=\frac{\pi}{4}$ ii) $r=5$, $\phi=0^{o}$

iii) $r=10$, $\phi=120^{o}$ iv) $r=2$, $\phi=-30^{o}$

תרגיל 26

א) מה המשמעות הגיאומטרית של :

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

ב) מה המשמעות הגיאומטרית של :

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi+\varphi) & -\sin(\phi+\varphi) \\ \sin(\phi+\varphi) & \cos(\phi+\varphi) \end{pmatrix}$$

ג) חשב את כפל המטריצות שבסעיף א׳ והשווה עם המטריצה שבסעיף ב׳.

ד) רשום נוסחאות בשביל $\sin(\phi+\varphi)$, $\cos(\phi+\varphi)$.

תרגיל 27

א) מצא את המטריצה הפוכה ל :

$$r\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

(העזר במשמעות הגיאומטרית).

ב) מצא את ההופכי של:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

טרנספורמציות C_2

תרגיל 28

תן הסבר גיאומטרי ל:

א) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$

ב) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$

נסמן : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

תרגיל 29

א) השלם והסבר בצורה גיאומטרית:

J ____

$J^2 = -1I$, ____

$J^3 =$ _____ ____

$J^4 =$ _____ ____

$J^5 =$ _____ ____

ב) הכללה עבור n טבעי :

$J^{4n} =$ _____ , $J^{4n+1} =$ _____ , $J^{4n+2} =$ _____ , $J^{4n+3} =$ _____

דרך נוספת לרישום האיברים C_2 היא :

(שים לב להגדרת חיבור מטריצות).

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= aI + bJ$$

$$(= r\cos\varphi I + r\sin\varphi J)$$

כעת אפשר להכפיל את האברים ב C_2 אם נרשום אותם בצורה: $aI + bJ$

רק נזכור כי : $I \cdot I = I$, $I \cdot J = J \cdot I = J$ וכן $J \cdot J = -I$.

תרגיל 30

חשב:

א) $(3I + 1J) + (6I - 2J) =$

ב) $(5I + 3J) + (8I + 2J) =$

ג) $(3I + 2J) \cdot (4I + 1J) =$

ד) $(2I + 3J) \cdot (2I - 3J) =$

תרגיל 31

חשב:

א) $(a_1I + b_1J) + (a_2I + b_2J) =$

ב) $(a_1I + b_1J) \cdot (a_2I + b_2J) =$

הקבוצה C

I בכפל מטריצות מתנהג כמו 1 בכפל ממשיים. ל J אין מספר מתאים בממשיים כי אין לנו מספר ממשי שריבועו הוא (1-) , לפיכך נגדיר קבוצה C של מספרים מהצורה $a + bi$ כאשר $a\ ,\ b \in R$ ו i סימון.
(היה טבעי להשתמש בסימן J , אך רוב ספרי הלימוד משתמשים בסימן i מלשון imaginary).

לפיכך :

$$\boxed{C = \{a + bi \ ;\ a\ ,\ b \in R\}}$$

הגדרת השוויון ב C :

$$a+bi=c+di \iff a=c \quad \text{וגם} \quad b=d$$

ניצור התאמה חד חד ערכית h בין אברי C_2 לאברי C כך ש:

$$aI + bJ \xrightarrow{h} a + bi$$

תרגיל 32:

א) הגדר חיבור ב C , כך שההתאמה h תהווה איזומורפיזם של $(C_2 \,,\, +)$ על $(C \,,\, +)$.

ב) הגדר כפל ב C , כך ש h תהווה איזומורפיזם של $(C_2 \,,\, \cdot)$ על $(C \,,\, \cdot)$
(רמז : תרגיל 31 ב'.)

ג) הוכח שקיים חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור ב C.

את אברי C אפשר לכפול כמו בעבר בעזרת חוק הפילוג . רק נזכור כי : $i^2 = -1$.

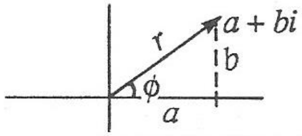
מתקבל , אם כן , כי C עם פעולת הכפל ועם פעולת החיבור איזומורפית ל C_2 עם פעולת הכפל ועם פעולת החיבור.

זאת אומרת , כל חוקי האלגברה הרגילים מתקיימים , בתוספת $i^2 = -1$.

(כדאי לזכור את המשמעות הגיאומטרית של אברי C_2 במיוחד ש i מתאים ל J ו J מגדיר סיבוב של 90° , כלומר כפל ב i מגדיר סיבוב של 90°.)

<u>C נקראת קבוצת המספרים המרוכבים</u>

כל איבר ב C (כלומר כל מספר מרוכב $a + bi$) ניתן להציגו כנקודה במערכת צירים.



$a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

אוסף כל הנקודות האלה מהצורה $a + bi$ $(a , b \in R)$ יוצרים מישור שנקרא גם <u>מישור גאוס</u>.

נהוג לסמן את המספרים שבקבוצה C ב z, כלומר $z = a + bi$.
מקובל לקרוא ל a החלק הממשי של z ול b החלק המדומה של z.

תרגיל 33

א) הצג את המספרים הבאים במערכת צירים:

$1 + 2i$, $2 - 3i$, $5i$, $-2 - 4i$, $-1 + 3i$, $1 + i$, $-1 - 2i$

ב) רשום כל אחד מן המספרים שבסעיף א' בצורה : $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

ראינו כבר כי הצגה נוספת של האברים ב C היא:

$$z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi i.$$

כאשר: $r^2 = a^2 + b^2$ ו $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$

ברור שההצגה בעזרת r ו φ אינה יחידה כי סיבוב בφ^o כמוהו כסיבוב ב $\varphi + k\,360^o$ (k שלם).

לעומת זאת לכל r ו φ קיים מספר אחד ויחיד $a + bi$.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ נקרא גם הערך המוחלט של z (או המודולו של z).

ומסומן: $r = |z| = |a + bi|$

φ^o (כאשר $0 \le \varphi^o < 360^o$) נקראת הארגומנט של z ומסומנת $\arg z$

פעולות ב C

תרגיל 34

חשב:

א) $(6+7i) + (2-i)$

ב) $(5+3i) + (4+8i)$

ג) $(2+i) + (3-2i)$

ד) $(5-3i) + (-4-3i)$

ה) $(6-i) + (-6+i)$

ו) $3(2-3i) + 5(6-3i)$

ז) $i(1+i) + 2(1-i)$

ח) $(a+bi) + 3i(2a-bi)$

תרגיל 35

השלם את החסר במסגרת הריקה:

א) $(2+i) + \boxed{} = 3-2i$

ב) $(5-3i) + \boxed{} = 4-3i$

ג) $(3+2i) + \boxed{} = -2+i$

ד) $(-4+2i) + \boxed{} = 0$

תרגיל 36

יהיו $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו $z_2 = a_2 + b_2 i$ שני מספרים מרוכבים.

תן תיאור גיאומטרי ל $(z_1 + z_2)$.

את החיסור ב C נגדיר כמו החיבור ב R כלומר חיסור שקול לחיבור הנגדי.

תרגיל 37

חשב:

א) $(5-3i)-(2-i)$

ב) $(2+3i)-(4-2i)$

ג) $(3+2i)-(7-5i)$

ד) $6(2+i)-5(3+i)$

ה) $(3-i)6-(7-2i)4$

ו) $(a+bi)-(c+di)$

הכפל ב C הוגדר: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

(ראה תרגיל 32).

תרגיל 38

חשב:

א) $(2-i)(3-5i)$

ב) $(3+i)(2+3i)$

ג) $-(4+3i)(1-i)$

ד) $2i(2-i)+(3-i)(1+i)$

ה) $(5+3i)^2$

ו) $(3a+2i)^2$

ז) $(7-2i)^2$

ח) $\left(\frac{1}{2}+i\right)^2$

ט) $(2-i)(2+i)$

י) $(1+i)(1-i)-(3+i)(2+3i)$

יא) $(2-i)^2$

יב) $\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-i\sqrt{3}\right)$

יג) $(4+3i)^2$

יד) $(x+yi)(x-yi)$

טו) $(x+yi)^2$

טז) $(x-yi)^2$

יז) $(1-i)(2-i)^2(3-i)^3$

תרגיל 39

א) חשב : $i^{21} + i^{32} + i^{55} + i^{77} + i^{101} + i^{123} =$

ב) הוכח : $i^7 + i^{18} + i^{25} + i^{35} + i^{93} + i^{100} = 0$

תרגיל 40

הוכח כי הקבוצה $\{1 , -1 , i , -i\}$ עם פעולת כפל , היא חבורה.

נגדיר את החילוק ב C כמו החילוק ב R , כלומר: חילוק שקול לכפל בהופכי כך ש :

$$(a+bi) : (c+di) = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}\, i\right)$$

(ראה תרגיל 27 ב')

שים לב !

כמו ב R החילוק באפס אינו מוגדר כך גם כאן האפס הוא $0 + 0i$, וחילוק בו לא מוגדר זאת אומרת , אין לו הופכי.

תרגיל 41

השלם וחשב:

א) $(2+3i) : (5-2i) = (2+3i) \cdot$ _____ = _____

ב) $(2+i) : (1-3i) = (2+i) \cdot$ _____ = _____

ג) $(\sqrt{3}+i) : (\sqrt{3}-2i) =$ ____________ = _____

ד) $(1+i) : (2+3i) =$ ____________ = _____

תרגיל 42

מצא את החלק הממשי ואת החלק המדומה במספרים הבאים:

א) $(3+i)\ +\ (6-2i)$ ב) $(5-3i)\ -\ (4-2i)$

ג) $(3+2i)\,(4+i)$ ד) $(2+3i)\,(2-3i)$

ה) $\dfrac{2+i}{1-3i}$ ו) $\dfrac{1}{1+i}$

ז) $\dfrac{1+i}{1+2i}$ ח) $(1-i)\,(2+3i)$

תרגיל 43

א) הצב בתבנית a^2-4a+1 את הערך $a=1-i$ וחשב.

ב) הצב בתבנית $3a^2-2a-4$ את הערך $a=2+i$ וחשב.

תרגיל 44

א) בדוק האם $2+\sqrt{2}i$ הוא אחד משורשי המשוואה:

$$z^2-4z+6=0$$

ב) אחד הפתרונות של המשוואה $(1-i)\cdot z^2+m\cdot z+2-i=0$

הוא $(1+i)$. מצא את ערך הפרמטר m .

תרגיל 45

הרכב משוואה ריבועית ששורשיה הם:

א) $(5-3i)$, $(5+3i)$

ב) $(1-i)$, $(1+i)$

ג) $(2+i\sqrt{3})$, $(2-i\sqrt{3})$

נסמן $z = a + bi$
למספר $\bar{z} = a - bi$ *אנו קוראים <u>הצמוד</u> של* z.

תרגיל 46

המשמעות הגיאומטרית של $z = a + bi$ היא סיבוב ב φ עם "מתיחה" פי r.
כאשר $a = r\cos\varphi$ ו $b = r\sin\varphi$

א) מה המשמעות הגיאומטרית של הצמוד? הראה את הצגתו הגרפית.
ב) מה המשמעות הגיאומטרית של zi? הראה את הצגתו הגרפית.

תרגיל 47

במעגל שמרכזו ראשית הצירים חסום ריבוע. אחד מקודקודיו הוא $3 + 4i$.
מהם שאר קודקודי הריבוע?

תרגיל 48

חשב $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$, $z \cdot \bar{z}$.
רשום בכל מקרה מהו החלק הממשי ומהו החלק המדומה.

תרגיל 49

רשום אמת/שקר . נמק!

א) אם הסכום $z_1 + z_2$ הוא מספר ממשי , אז z_1 ו z_2 חייבים להיות ממשיים.

ב) אם $z_1 + iz_2 = 0$ אז $z_1 = z_2 = 0$

תרגיל 50

אם $z_1 \cdot z_2$ הוא מספר ממשי , מה תוכל לומר על הקשר בין z_1 ו z_2 ? הסבר.

תרגיל 51

א) הראה כי ריבועיהם של שני מספרים צמודים , גם הם צמודים זה לזה.

ב) האם ההופכיים של מספרים צמודים , צמודים זה לזה ?

אם $z = a + bi$ ו $\bar{z} = a - bi$ *מתקבל :* $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

השימוש בצמוד של מספר מרוכב חשוב במיוחד בחישוב מנה של שני מספרים מרוכבים.

נוכל לומר כי:

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{c+di}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\, i$$

תרגיל 52

רשום כל אחד מהביטויים הבאים בצורה : $a + bi$

$$\frac{1}{-4-3i}\ ,\quad \frac{6}{2-i}\ ,\quad \frac{3i}{1+i}\ ,\quad \frac{6-2i}{1+3i}\ ,\quad 1-\frac{4+i}{2-3i}$$

.

$$\frac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\ ,\quad \frac{1}{1+2i}$$

תרגיל 53

הוכח ש: $\dfrac{(a-bi)^2}{a+bi}+\dfrac{(a+bi)^2}{a-bi}$ הוא מספר ממשי .

דרך נוספת לחישוב מנה של שני מספרים היא שימוש בהצגה בעזרת r ו φ .

אם $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ שמשמעותו "מתיחה" פי r עם סיבוב ב φ,

הרי $\frac{1}{z}$ יהיה "מתיחה" פי $\frac{1}{r}$ עם סיבוב ב $-\varphi$

כלומר , אם $z_1 = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ו $z_2 = r_2(\cos\mu + i\sin\mu)$

נקבל : $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi-\mu) + i\sin(\varphi-\mu))$$

תרגיל 54

פתור את המשוואות הבאות (מצא את z).

א) $(2+3i)z = 23+2i$

ב) $(2-i)z = -5+i$

ג) $(3+4i)z = 2+5i$

ד) $(a+bi)z = c+di$

תרגיל 55

א) מהגדרת המספרים ב C , אחד הפתרונות של $z^2 = -1$, הוא i.

מהו הפתרון השני?

ב) מהו הפתרון של $z^2 = -a$ $(a>0)$?

(שים לב , אפשר לרשום: $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$)

תרגיל 56

נתונה המשוואה : $z^2 + az + b = 0$, $a , b \in R$.

א) הראה שפתרונות המשוואה הם מספרים ממשיים או מספרים מרוכבים הצמודים זה לזה.

ב) מה יהיו הפתרונות של המשוואה אם $a , b \in c$?

תרגיל 57

פתור את המשוואות :

א) $z^2 = -4$

ב) $z^2 = 1 + 4i$

ג) $z^2 = 3 - 4i$

ד) $z^2 = \frac{3}{4} + i$

תרגיל 58

פתור את המשוואות (מצא את z).

א) $z^2 + z + 1 = 0$

ב) $z^2 - 2z + 10 = 0$

ג) $z^2 + 6z + 25 = 0$

ד) $z^2 + z + 3 = 0$

ה) $z^2 - (2 + 3i)z + 6i = 0$

ו) $z^2 + (3i - 4)z + 13 - 13i = 0$

ז) $(1 + i)z^2 + (1 + 3i)z - 2 = 0$

ח) $iz^2 + 2z + (4 + 2i) = 0$

תרגיל 59

פתור את המשוואה : $z^2 = i$

רמז : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *מגדיר סיבוב ב* 90^{o} .

תרגיל 60

ראינו כי הצגה נוספת של z היא:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

רשום באמצעות r ו φ את ההצגות של המספרים הבאים:

$$z \cdot \bar{z} \quad , \quad \frac{1}{z} \quad , \quad \frac{z}{\bar{z}} \quad , \quad z^3$$

תרגיל 61

א) נתון $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. מהם הביטויים עבור z^2 , z^3 , z^n ?

ב) הוכח את משפט דה מואבר: (לכל n טבעי).

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

תרגיל 62

חשב :

א) $[2(\cos 15^o + i \sin 15^o)]^{10}$ ב) $(1+i)^{15}$

ג) $[\cos 20^o + i \sin 20^o]^9$ ד) $\sqrt{7 + 24i}$

ה) $(-2 + 2i)^8$ ו) $\sqrt{3+4i}$

תרגיל 63

הראה כי למשוואה $z^n = 1$ (n טבעי) יש בדיוק n פתרונות בקבוצת המספרים המרוכבים.

שורשי היחידה

ראינו בתרגיל הקודם כי למשוואה $z^n = 1$ (n טבעי) יש בדיוק n פתרונות בקבוצת המספרים המרוכבים.

נציג את z בצורה $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

אם $z^n = 1$ ברור מיד כי $r = 1$

לפיכך :

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$
$$z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

כלומר: $1 = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

מכאן:

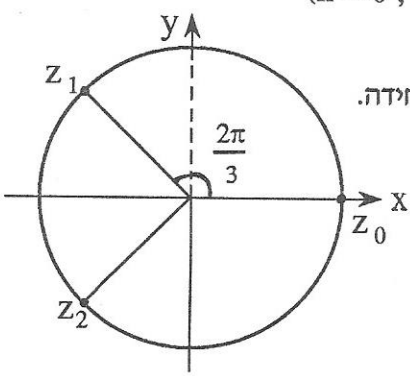
$$\begin{cases} \cos n\varphi = 1 \\ \sin n\varphi = 0 \end{cases}$$

מהפתרון מתקבל כי : $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$ כאשר : $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

עבור: $\{k \geq n$ או $k < 0$, k שלם$\}$ נקבל ערכים ל φ הנבדלים מהערכים הנ"ל בכפולות שלמות של 2π. אפשר לומר, אם כן, שיש לנו n ערכים בסיסיים ל φ וכל אחד מ n הערכים האלה מביא אותנו לערך אחר של z.

מכאן n הפתרונות הם :

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$



$r = 1$, לפיכך כל הפתרונות האלה נמצאים על מעגל היחידה.

בשרטוט שלהלן מוצגים שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3 = 1$

תרגיל 64

א) פתור את המשוואה $z^5 = 1$

ב) הוכח כי סכום שורשי המשוואה הנ"ל שווה לאפס.

ג) מהו סכום ריבועי שורשי המשוואה הנ"ל ? נמק!

תרגיל 65

א) פתור את המשוואה $z^3 = 8$.

ב) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^n = a$, $(a \neq 0)$.

תרגיל 66

ידוע כי אחד הפתרונות של המשוואה $z^3 - 9z^2 + 25z - 25 = 0$ הוא 5.
מצא את כל יתר הפתרונות.

תרגיל 67

ידוע כי למשוואה $z^3 + 3z^2 + 7z + 10 = 0$ יש פתרון שלם.

מצא את כל הפתרונות.

סדרות

> ***הגדרה:***
> *סידרה חשבונית היא סידרה של מספרים שבה ההפרש בין כל איבר (פרט לראשון), לקודמו, הוא קבוע.*

תרגיל 68

שלושת האברים הראשונים בסידרה חשבונית הם:

$$a_1 = 4 - 3i \quad , \quad a_2 = 3 - 2i \quad , \quad a_3 = 2 - i$$

מצא את a_{10}, ואת S_8 (סכום שמונת האברים הראשונים בסידרה).

תרגיל 69

בסידרה חשבונית 11 אברים. נתון כי a_1 הוא מספר מרוכב.
א) האם כל איברי הסידרה גם הם מספרים מרוכבים? נמק!
ב) הייתכן שסכום אברי הסידרה יהיה מספר ממשי? נמק!

תרגיל 70

נתונה סידרה שבה: $a_1 = 1 + i$

$$a_{n+1} - a_n = 1 - i$$

א) הוכח כי הסידרה היא חשבונית.

ב) בסידרה הנתונה ידוע כי $S_6 = a + bi$, חשב ערכי a ו b.

> ***הגדרה:***
>
> *סידרה הנדסית היא סידרה של מספרים שבה המנה בין כל איבר (פרט לראשון), לקודמו היא קבועה.*

תרגיל 71

שלושת האברים הראשונים בסידרה הנדסית הם :

$$a_1 = 2 - i \quad , \quad a_2 = 3 + i \quad , \quad a_3 = 2 + 4i$$

א) מצא את האיבר השמיני a_8

ב) מצא את סכום עשרת האברים הראשונים.

תרגיל 72

בסידרה הנדסית 10 איברים. נתון כי a_1 הוא מספר מרוכב והמנה היא מספר ממשי.

א) האם כל אברי הסידרה הם מספרים מרוכבים ? נמק !

ב) האם סכום האברים הוא מספר מרוכב? נמק!

תרגיל 73 (מבחינות הבגרות , קיץ תשמ"ה)

בסידרה הנדסית של מספרים מרוכבים נתון:

$$a_1 = 1 + i \quad , \quad a_2 = 2$$

א) הוכח כי לכל n טבעי , האיברים העומדים במקום ה $(2 + 4n)$ הם ממשיים.

ב) חשב את a_{10} .

ג) חשב את סכום עשרת האברים הראשונים בסידרה זו.

תרגיל 74 (מבחינת הבגרות , קיץ תש"מ)

כל 12 האיברים של טור הנדסי הם מספרים מרוכבים. נתון :

$$S_{12} = a + bi \quad , \quad a_2 = -2 \quad , \quad a_1 = i - 1$$

חשב את ערכם של המספרים הממשיים a ו b

תרגיל 75

סכום שני האיברים הראשונים של סידרה הנדסית הוא $11 - 7i$ וסכום שני האיברים הבאים אחריהם הוא $14 + 22i$.

מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסידרה.