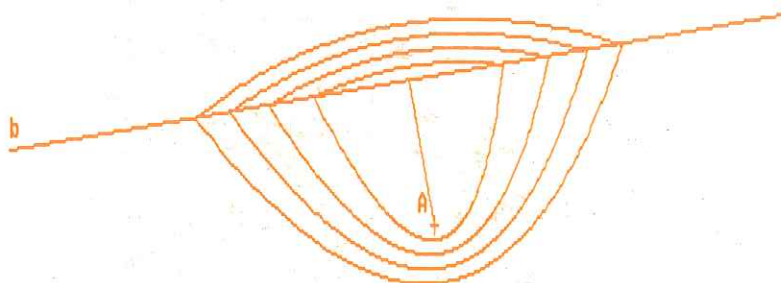


מתמטיקה במחשב

מקום הנדסי

הגדרת הבעיה בניה השערה שרשוט פעולות שונות



(הקט)

המקום שהגדרת הוא שני חלקי פרבולות

חומר לתלמיד
ולמורה

מהדורה ניסויית



מתמטיקה במחשב

מקום הנדסי

חומר לתלמיד
ולמורה

מהדורה ניסויית

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע



פיתוח: אלכס פרידלנדר

רנה הרשקוביץ

טומי דרייפוס

תכנות: מודי תאני

הדפסה ועריכה במחשב: כרמלה רוט-נוב

גרפיקה: שלומית זהרונגי



כל הזכויות שמורות

מכון ויצמן למדע

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט לתרגם
לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט
בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני
או אחר - כל חלק שהוא מהחומר בספר זה.
שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בספר זה,
אסור בהחלט, אלא, ברשות מפורשת בכתב מהמוציא

נדפס בישראל תשנ"ג 1992

תוכן העניינים

3	הוראות הפעלה.....
5	I. מבוא.....
6	II. תאור הלומדה ומטרותיה.....
11	III. תאור המקומות הגיאומטרים המתקבלים.....
15	IV. משימות להכרת הלומדה.....
	V. משימות להכרת הלומדה:
33	הערות למורה.....

הוראות הפעלה

1. הלומדה פועלת על מחשבי IBM-PC ותואמים. נחוץ כרטיס גרפי (כרטיס הרקולס אינו מתאים).

2. הכנת תקליטון הלומדה לעבודה

א. הכנס תקליטון DOS (מערכת ההפעלה) לכונן A והדלק את המחשב.
הכנס את תקליטון הלומדה שרכשת לכונן B.
הקש: A> SYS B:
הקש: A> COPY COMMAND.COM B:

ב. העתק אל התקליטון שרכשת תוכנת תמיכה בעברית HEBREW.COM.
אם ברשותך מתאם מסך מסוג EGA או VGA, עליך להעתיק גם את תוכנת התמיכה העברית המתאימה למסך EGAHE.COM.

ג. אפשר להעתיק על התקליטון תוכנת GRAPHICS.COM. כאשר תעבוד עם מחשב המחובר למדפסת, פעולה זו תאפשר הדפסת מסך, לפי רצונך, על ידי לחיצה בו זמנית על מקשי SHIFT ו-PrintSc.

3. הכנס את התקליטון שהכנת לכונן A והפעל את המחשב. אם ברצונך להפעיל את התכנית כשהמחשב פועל, לחץ בו זמנית על המקשים CTRL + ALT ובעודם לחוצים הקש על המקש DEL.

4. התקליטון אינו מיועד להעתקה.

I. מבוא

בתכנית הלימוד במתמטיקה אין דגש על המושג "מקום גיאומטרי" כמושג כללי. מזכירים אותו בדרך כלל בהוראת ההנדסה האוקלידית כאשר מלמדים כמה דוגמאות של מקום גיאומטרי כמו המעגל, האנך האמצעי, חוצה הזווית וכד'. מצד שני מושגים מתמטיים רבים, שהם בעצם מקומות גיאומטריים, כמו למשל "חתכי החרוט" (אליפסה, פרבולה, היפרבולה) מטופלים במישור האלגברי בלבד, (בדרך כלל בלימוד גיאומטריה אנליטית בכיתות י' או י"א) ותכונותיהם הגיאומטריות הן חסרות לגמרי או מטושטשות בדמויי המושגים אצל התלמידים.

כאשר לומדים על מקומות גיאומטריים בדרך אלגברית, התהליך הנדרש מהתלמיד מורכב מניתוח הבעיה (הניתנת בדרך כלל בצורה מילולית), תרגומה לתבנית אלגברית כלשהי, וביצוע מניפולציות אלגבריות על התבנית לפי חוקים אלגבריים קבועים.

בסיטואציה כזו אין מקום לתהליכים של אינטואיציה, ויזואליזציה, חקר, השערה, הגדרה, בניה והפעלה דינמית של טרנפורמציות על הבניה, שהם בלבה של פעילות מתמטית וחיוניים להבנת מושגים.

נראה לנו איפוא, כי לפני לימוד נושא המקומות הגיאומטריים בגישה אלגברית, חשוב לבנות אצל התלמידים את השלב הגיאומטרי האינטואיטיבי. מאידך, לימוד שלב זה באמצעות כלי השרטוט הרגילים כרוך בבניות ארוכות הדורשות דיוק, ולכן מייגעות.

הלומדה מקומות גיאומטריים בנויה "כעולם זוטא", בו התלמיד באינטראקציה עם המחשב ובעזרת מספר מצומצם של פקודות, יכול לבנות מגוון רחב של מקומות גיאומטריים במישור.

II. תיאור הלומדה ומטרותיה

מטרת הלומדה מקומות גיאומטריים היא לתת לתלמיד הזדמנות לפתח איכותית דימוי גיאומטרי - ויזואלי של מושג המקום הגיאומטרי, ולאפשר לתלמיד לבנות ולהכיר מקומות הנדסיים שונים ומגוונים לפני הטיפול האלגברי בנושא. הלומדה בנויה כ"עולם זוטא" בו התלמיד שולט בצורה מלאה בפעילויות אותן הוא מבצע בתוך עולם זה. בעזרת מספר מצומצם של פקודות, יכול התלמיד לבנות מבחר מגוון ומפתיע לפעמים של מקומות גיאומטריים במישור.

התלמיד יכול לבחור בתוך הלומדה באחת מתוך חמש פעולות יסודיות:

- ★ הגדרת מקום גיאומטרי
- ★ בנית נקודות השייכות למקום הגיאומטרי
- ★ העלאת השערה בדבר צורתו של המקום הגיאומטרי
- ★ שרטוט מלא של הגרף של המקום הגיאומטרי (פעולה זו מוגבלת בשלבים מוקדמים של חקירת המקום הגיאומטרי).
- ★ ביצוע טרנספורמציות על מקום גיאומטרי שנבנה כבר, על-ידי שינוי הנתונים הכלולים בהגדרתו.

נתאר בקצרה פעולות אלה:

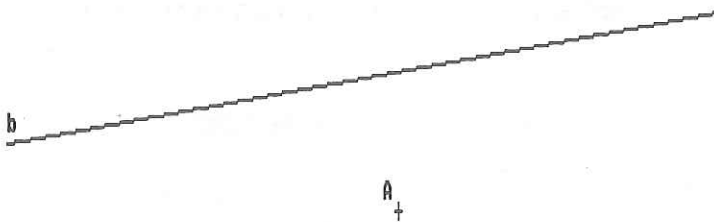
א. הגדרת מקום גיאומטרי:

במסגרת פעולה זו, התלמיד נדרש לקבוע שני אלמנטים גיאומטריים על המסך: שתי נקודות, נקודה וישר, או שני ישרים. לאחר מכן, עליו להחליט האם המקום הגיאומטרי ייקבע על-ידי סכום מרחקים משני האלמנטים, הפרש מרחקים, שוויון המרחקים או יחס כלשהו בין המרחקים. (למרות שהשוויון הוא בעצם יחס של 1 : 1 בין המרחקים או הפרש השווה ל-0, בחרנו לתת אותו כאפשרות בחירה בפני עצמה).

נדגים את תהליך ההגדרה בעזרה דוגמא:
 תלמיד בחר כשני אלמנטים בישר ונקודה מחוצה לו, ובתכונה של סכום מרחקים קבוע מן הישר ומן הנקודה. במילים אחרות, הוא הגדיר את המקום הגיאומטרי של הנקודות אשר מרחקיהן מן הנקודה ומן הישר יוצרים סכום קבוע. על-ידי קביעת מיקום האלמנטים על המסך, התלמיד קבע את המרחק בין שני האלמנטים. כמו כן, נדרש התלמיד לקבוע במהלך פעולת ההגדרה את **סכום המרחקים הקבוע** משני האלמנטים של כל נקודה השייכת למקום הגיאומטרי המוגדר.

עם סיום פעולת ההגדרה, על המסך משורטטים שני האלמנטים, ורשומה ההגדרה המילולית של המקום הגיאומטרי שיצר התלמיד (שרטוט 1).

הגדרת המצגיה בניה השערה שרטוט פעולות שונות



מצא את אוסף כל הנקודות במישור שמרחקהן מנקודה A ומישר b יוצרים סכום קבוע השווה ל 82 יחידות. המרחק בין הנקודה A והישר b הוא 46 יחידות.

שרטוט 1

כאמור כוללת ההגדרה גם את הערך המספרי של המרחק שבין האלמנטים ההנדסיים (בדוגמא 46 יחידות) וגם את הערך המספרי המתאר את הקשר הקבוע בין מרחקי הנקודות של המקום הגיאומטרי מן האלמנטים שנבחרו. (במקרה שלנו, סכום מרחקים קבוע של 82 יחידות).

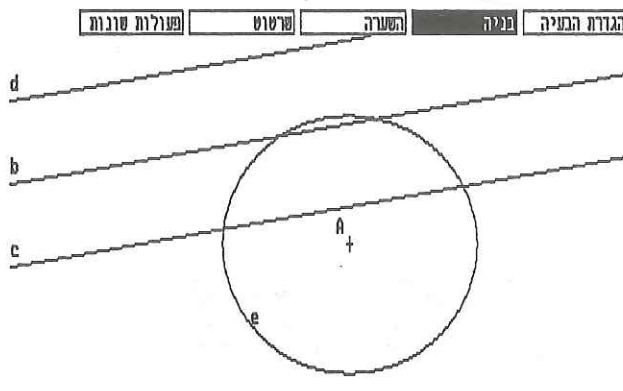
ב. בניה

אחרי הגדרת המקום הגיאומטרי בעזרת התכונות הגיאומטריות של נקודותיו, יכול התלמיד לבנות נקודות השייכות למקום המוגדר. זאת אפשר לעשות בעזרת שתי פקודות הנדסיות יסודיות:

- בנית מעגל ברדיוס נתון סביב נקודה נתונה.
- בנית ישר מקביל לישר נתון במרחק נתון.

בנוסף לכך, יכול התלמיד לסמן את נקודות החיתוך בין מעגלים ומקבילים כאלו.

בדוגמא שלפנינו, נוכל לקבל זוג נקודות השייכות למקום הגיאומטרי המוגדר על-ידי חיתוך בין מעגל ברדיוס 50 סביב הנקודה A הנתונה (אלמנט אחד), ובין ישר הנמצא במרחק 32 מן הישר b הנתון (אלמנט שני). (שרטוט 2).



מצא את אוסף כל הנקודות במישור שמרחקהן מנקודה A ומישר b יוצרים סכום קבוע השווה ל 82 יחידות. המרחק בין הנקודה A והישר b הוא 46 יחידות.

שרטוט 2

כך נבנו שתי נקודות השייכות למקום הגיאומטרי המוגדר.

לבסוף אפשר למחוק את בניית העזר, אך להשאיר את נקודות החיתוך עצמן על המסך. כך יוכל התלמיד בשלב מאוחר יותר לבדוק האם נקודות אלה אכן נמצאות על המקום הגיאומטרי הנבנה.

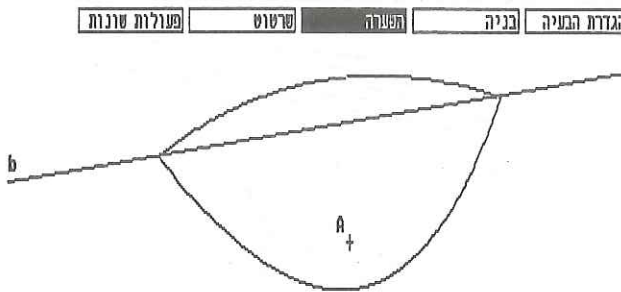
ג. השערה

בהתבססו על מספר נקודות של המקום הגיאומטרי שבנה, וכן על שיקולים גיאומטריים איכותיים, יכול התלמיד לשער את הצורה של המקום הגיאומטרי כולו.

הלומדה מציעה בחירה של השערה מתוך 22 אפשרויות נתונות: - "נקודה", "אליפסה", "קבוצה ריקה", "קטעי פרבולה" ועוד. (ראה בהמשך ציון מפורט על צורות המקומות הגיאומטריים המתקבלות במסגרת המיקרו-עולם של לומדה זאת).

אם אכן בחר התלמיד בהשערה נכונה, משרטט המחשב את המקום הגיאומטרי על המסך ואף מתאר אותו מילולית.

בדוגמא שלנו, המקום הגיאומטרי מורכב משני קטעי פרבולה (שרטוט 3)



המקום שהגדרת הוא שני חלקי פרבולות

שרטוט 3

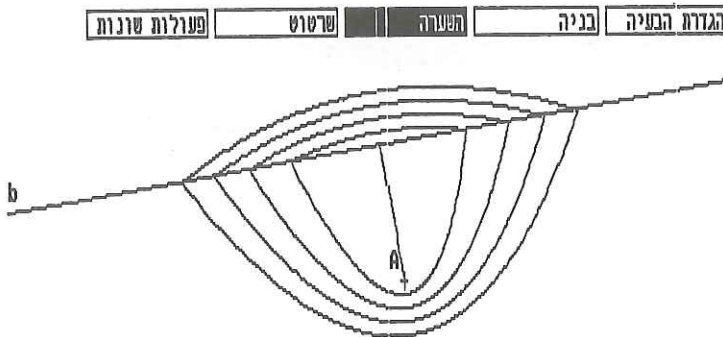
אם לא בחר התלמיד בהשערה הנכונה, הוא יכול לחזור ולבנות נקודות נוספות השייכות למקום הגיאומטרי. לאחר בניית מספר מספיק של נקודות השייכות למקום הגיאומטרי, נפתחת בפני התלמיד האפשרות לבקש מהמחשב את השרטוט של המקום הגיאומטרי כולו על המסך.

ה. טרנספורמציות דינמיות

אחרי שרטוט המקום הגיאומטרי על המסך, אפשר לשנות אותו באופן דינמי על-די שינוי של:

1. המצב ההדדי של שני האלמנטים הגיאומטריים היסודיים.
2. שינוי כמותי של התכונה אותה מקיימות הנקודות של המקום הגיאומטרי (שינוי הערך המספרי של סכום המרחקים, הפרש המרחקים או היחס בין המרחקים).

למשל, בדוגמא שלנו אפשר להקטין את הערך המספרי של סכום המרחקים מהנקודה A והישר b עד אשר הוא משתווה למרחק שבין הנקודה והישר. במצב זה, המקום הגיאומטרי "מתנוון" לקטע ש-A הוא קצהו האחד והקצה השני על הישר b (שרטוט 4).



(הקטן)

המקום שהגדרת הוא קטע

שרטוט 4

אם ממשיכים להקטין את סכום המרחקים המקום הגיאומטרי הוא כמובן מקום ריק, והמחשב יאשר זאת.

III. תאור המקומות הגיאומטריים המתקבלים

השילוב של 3 סוגים של זוגות אלמנטים ו-4 סוגים של קשרים קבועים בין מרחקי הנקודות השייכות למקום הגיאומטרי יוצר 12 אפשרויות כלליות להגדרת מקום גיאומטרי בעזרת הלומדה (ראה טבלה).

טבלה 1: הגדרת המקום הגיאומטרי

נקודה וישר	שני ישרים	שתי נקודות	אלמנטים
			תנאי
			סכום מרחקים קבוע
			הפרש מרחקים קבוע
			המרחקים שווים
			היחס (המנה) בין המרחקים קבוע

למעשה, בתוך כל תא בטבלה ניתן לקבל מספר מקומות גיאומטריים בהתאם למיקום האלמנטים הגיאומטריים או לערך המספרי הקובע את התנאי.

שלוש הטבלאות הבאות מפרטות את האפשרויות השונות. כל טבלה מפרטת את המקומות הגיאומטריים המתקבלים על-ידי בחירת זוג אלמנטים מסויים (שתי נקודות בטבלה 2, נקודה וישר בטבלה 3 ושני ישרים בטבלה 4).

טבלה 2: המקומות הגיאומטריים המוגדרים בעזרת שתי נקודות A ו-B

הנקודות מתלכדות		הנקודות אינן מתלכדות (המרחק ביניהן \overline{AB})			המצב בין שני האלמנטים
$S = 0$	$S > 0$	$S = 0$	$0 < S < \overline{AB}$	$S = \overline{AB}$	סכום המרחקים: S קבוע
נקודת ההתלכדות	מעגל	מקום ריק	מקום ריק	הקטע \overline{AB}	
$d = 0$	$d > 0$	$d = 0$	$0 < d < \overline{AB}$	$d = \overline{AB}$	הפרש מרחקים: d קבוע
כל המישור	מקום ריק	אנך אמצעי	היפרבולה	"משלים" לקטע \overline{AB}	
כל המישור		אנך אמצעי			המרחקים שווים
$0 < q < 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$	המנה בין המרחקים: q קבועה
מקום ריק	כל המישור	מעגל	אנך אמצעי	מעגל	

טבלה 3: המקומות הגיאומטריים המוגדרים בעזרת נקודה A וישר b

הנקודה A על הישר b		הנקודה A מחוץ לישר b (המרחק בין הנקודה לישר m)				המצב בין שני האלמנטים	התנאי
S = 0	S > 0	מקום ריק	מקום ריק	S = m	S > m	קבוע	סכום המרחקים: S קבוע
d = 0	d > 0	פרבולה	2 פרבולות	d = m	d > m	קבוע	הפרש המרחקים: d קבוע
אנך לישר b דרך הנקודה A		פרבולה				המרחקים שווים	
0 < q < 1	q = 1	q > 1	0 < q < 1	q = 1	q > 1	המנה בין המרחקים: q קבועה	
מקום ריק	שני ישרים (ללא נקודות חיתוך)	אלפסה	פרבולה	היפרבולה	$q = \frac{A \cdot m}{b}$		
מקום ריק	אנך לישר b דרך הנקודה A	אלפסה	פרבולה	פרבולה	מרחק מ b		

טבלה 4: המקומות הגיאומטריים המוגדרים בעזרת שני ישרים a ו- b

הישרים מתלכדים		הישרים מקבילים והמרחק ביניהם הוא m				הישרים אינם מתלכדים ואינם מקבילים		המצב בין שני האלמנטים	
$S = 0$	$S > 0$	$S = 0$	$0 < S < m$	$S = m$	$S > m$	$S = 0$	$S > 0$	סכום המרחקים: S קבוע	התנאי
הישר עצמו	שני ישרים מקבילים	מקום ריק	מקום ריק	האיזור הישרים	שני ישרים מקבילים	נקודת החיתוך בין הישרים	מלבן		
$d = 0$	$d > 0$	$d = 0$	$0 < d < m$	$d = m$	$d > m$	$d = 0$	$d > 0$	הפרש המרחקים: d קבוע	
כל המישור	מקום ריק	ב"אמצע" ישר	שני ישרים מקבילים	שימחויץ" האיזור הישרים	מקום ריק	חוצי הזוויות	שמונה קרניים	המרחקים שווים	
כל המישור		ישר ב"אמצע" - בין הישרים a ו- b				חוצי הזוויות			
$0 < q < 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q = 1$	$q > 1$	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$	המנה בין המרחקים: q קבועה
מקום ריק	מקום ריק	שני ישרים מקבילים	ישר ב"אמצע" b ל a	שני ישרים מקבילים	שני ישרים מקבילים	שני ישרים מקבילים	שני ישרים מקבילים	שני ישרים מקבילים	
הישר (ללא)	המישור ריק (ללא)	הישר (ללא)	הישר (ללא)	הישר (ללא)	הישר (ללא)	הישר (ללא)	הישר (ללא)	הישר (ללא)	(ללא נקודת חיתוך)

IV. משימות להכרת הלומדה

משימה א - מרחקים שווים משתי נקודות

1. - בחר על הסרגל העליון את האשנב **בניה** (בעזרת → או ← ואח"כ **Enter**).
- בחר בתפריט את האפשרות **נקודה** (בעזרת ↑ או ↓)
- הזז את הנקודה וקבע את מקומה על המסך.
- בנה **מעגל** (על-ידי בחירה בתפריט):
מרכז המעגל בנקודה שבנית ואורך הרדיוס 50 יחידות.

- מהי התכונה המאפיינת את כל הנקודות שעל מעגל זה? _____

מקום הנדסי הוא קבוצה של כל הנקודות המקיימות תכונה מסויימת.

- השלם: המעגל שבנית הוא מקום הנדסי של כל הנקודות שמרחקיהן _____

2. - בחר **נקודה** נוספת די קרובה להיקף המעגל.
- בנה **מעגל** שמרכזו בנקודה זאת ואורך רדיוסו גם הוא 50 יחידות.
- סמן (על-ידי בחירה בתפריט) את **נקודות החיתוך** של שני המעגלים, בעזרת **חיתוך בניית אחרונות**.

3. נקודות החיתוך הן בעלות התכונות הבאות:

- מרחקן מן הנקודה הראשונה שקבעת (מרכז המעגל הראשון) הוא _____ יחידות.
- מרחקן מן הנקודה השנייה שקבעת (מרכז המעגל השני) הוא _____ יחידות.

4. השתמש ב- מחיקת בניית עזר.

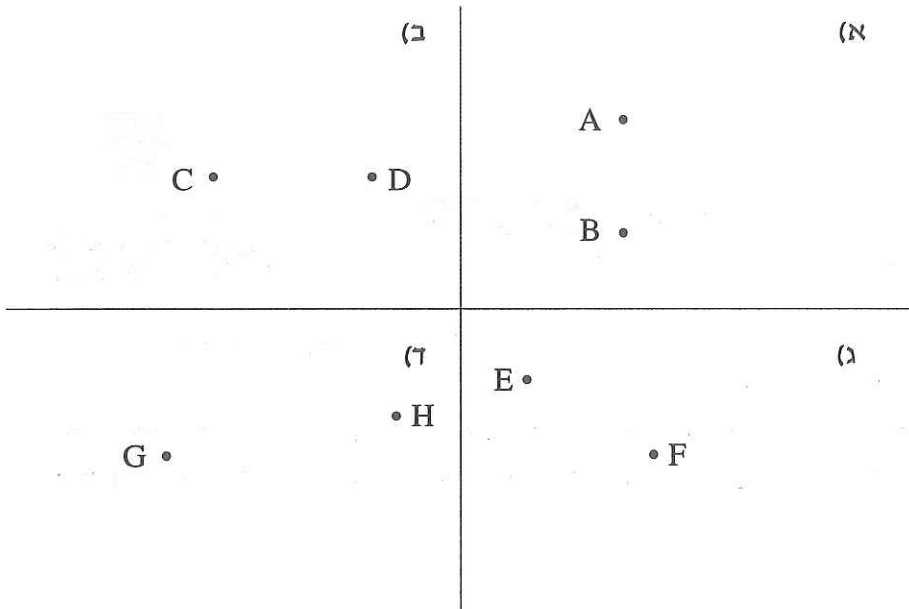
- בנה שני מעגלים בעלי רדיוס של 40 יחידות סביב אותן שתי הנקודות המקוריות.
- סמן, כמו קודם, את נקודות החיתוך של שני המעגלים.
- מה תוכל לומר על מרחקיהן של שתי נקודות החיתוך מן הנקודות המקוריות?

5. בצע שוב מחיקת בניית עזר.

- בנה על המסך (על-ידי שרטוט מעגלים וסימון נקודות החיתוך) 4 נקודות נוספות הנמצאות במרחקים שווים משתי הנקודות שקבעת בתחילת התרגיל.

6. מהי, לדעתך, צורת המקום ההנדסי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משתי הנקודות שקבעת?

7. בכל אחד מן המקרים הבאים, שרטט על הדף את המקום ההנדסי של הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משתי הנקודות הנתונות.



משימה ב - סכום מרחקים מישר ומנקודה

1. - השתמש ב- Esc כדי להגיע לסרגל העליון.
- בחר על הסרגל העליון את האשנב פעולות שונות.
- כדי שתוכל להתחיל בבעיה חדשה, נקה את המסך בעזרת בעיה חדשה.
2. - בחר על הסרגל העליון בניה ובחר בתפריט את האפשרות ישר.
- הזז את הישר וקבע את מקומו על המסך.
- השתמש ב- מקביל לשרטוט מקבילים לישר שקבעת במרחק 40 יחידות.
- השלם: המקבילים ששרטטת הם המקום ההנדסי של הנקודות שמרחקיהן מן הישר הנתון _____.
3. - קבע נקודה.
- בנה מעגל שמרכזו בנקודה זו ואורך רדיוסו הוא 60 יחידות.
- סמן נקודות חיתוך של הבניות האחרונות.
4. נקודות החיתוך שבנית הן בעלות התכונות הבאות:
- מרחקן מן הישר שקבעת הוא _____ יחידות.
- מרחקן מן הנקודה שקבעת הוא _____ יחידות.
- סכום מרחקיהן מן הישר ומן הנקודה שקבעת הוא _____ יחידות.
5. - בצע מחיקת בניות עזר.
- בנה מעגל שמרכזו בנקודה המקורית שקבעת ורדיוסו 70 יחידות.
- בנה מקבילים במרחק 30 יחידות מן הישר שקבעת בתחילת המשימה.
- סמן נקודות חיתוך.
- השלם: סכום מרחקיהן של הנקודות שבנית מן הישר ומן הנקודה שקבעת הוא _____ יחידות.
6. - בצע שוב מחיקת בניות עזר.
- בנה על המסך (על-ידי שרטוט מקבילים, מעגלים וסימון נקודות חיתוך) נקודות נוספות שמרחקיהן מן הישר ומן הנקודה שקבעת בתחילת המשימה יוצרים סכום קבוע של 100 יחידות.
7. - שרטט את השערתך לגבי צורת המקום ההנדסי שבנית על המסך.

משימה ג - סכום מרחקים משני ישרים

1. - כדי שתוכל להתחיל בבעיה חדשה, נקה את המסך (פעולות שונות ו- בעיה חדשה).
 - עבור על הסרגל העליון ל- הגדרת הבעיה והגדר מקום הנדסי של נקודות שמרחקהן מ- שני ישרים נתונים, יוצרים סכום קבוע.
 - עבור על הסרגל העליון ל- בנייה ושרטט שני ישר-ים, הנחתכים בזווית כלשהי. (כדאי לבחור זווית חדה "די גדולה").
 - המשך ב- הגדרת הבעיה:
ציין את שמות שני הישרים (לחץ **Enter** לפני ואחרי ציון שם הישר).
קבע את הסכום הקבוע ל-60 יחידות.
2. המקום ההנדסי שהגדרת ותבנה עתה הוא:
אוסף כל הנקודות במישור שסכום מרחקהן מ- _____
-
3. - בנה על-ידי שרטוט מקביל ים במרחקים מתאימים וסימון נקודות חיתוך ארבע נקודות השייכות למקום ההנדסי שהגדרת (כלומר, נקודות שמרחקהן משני הישרים שקבעת יוצרים סכום של 60 יחידות).
 - בנה לפחות 8 נקודות מתאימות נוספות.
4. - מהי לדעתך, צורת המקום ההנדסי שהגדרת? _____
- השתמש באשנב השערה כדי לשער את צורת המקום ההנדסי שהגדרת:
בחר את שם הצורה המתאימה להשערתך ולחץ **Enter**.
 - לאחר השערה נכונה או בקשת שרטוט, המחשב ישרטט את המקום ההנדסי המוגדר.
 - במקרה והשערתך שגויה, בנה נקודות נוספות השייכות למקום ההנדסי, נסה השערה אחרת או בקש שרטוט.

5. - לאחר שרטוט המקום ההנדסי, חזור על הבעיה בנתונים שונים:
כלומר, ענה כן לשאלת המחשב האם ברצונך לחזור על הבעיה בנתונים שונים
(כ/ל)?
- טובב את הישרים שקבעת בעזרת האפשרות להזיז עצמים יסודיים.
- מהם המקומות ההנדסיים המתקבלים בדרך זאת?
שם לב במיוחד למצב בו שני הישרים שקבעת (העצמים היסודיים) מאונכים
זה לזה ולמצב בו הם מתלכדים.

משימה 4 - יחס מרחקים מנקודה וישר

1. נקה את המסך ונסח הגדרת בעיה חדשה:

הגדר מקום הנדסי שבו המרחקים של כל נקודה מנקודה וישר נתונים,

יוצרים יחס קבוע והיחס הזה הוא $\frac{2}{1}$.

כלומר, כל הנקודות עבורן מתקיימת התכונה $\frac{\text{מרחק מן הנקודה}}{\text{מרחק מן הישר}} = \frac{2}{1}$

2. בנה לפחות 8 נקודות השייכות למקום ההנדסי שהגדרת.

(רמז: בכל מקרה דרושות נקודות חיתוך של מעגל ו- מקביל מתאימים).

3. מהי, לדעתך, צורת המקום ההנדסי שהגדרת? _____

- השתמש ב- השערה או שרטוט כדי לבדוק השערתך.

4. לאחר שרטוט המקום ההנדסי, חזור על הבעיה בנתונים שונים על-ידי האפשרות

לשנות את הקבוע הכלול בהגדרה.

- קבע יחסים שונים הגדולים מ-1.

כיצד משפיע שינוי ערך היחס על צורת המקום ההנדסי?

- מה צורת המקום ההנדסי בו יחס המרחקים הוא 1?

נסח מסקנתך: _____

- קבע יחסים הקטנים מ-1.

כיצד משפיע שינוי ערך היחס על צורת המקום ההנדסי?

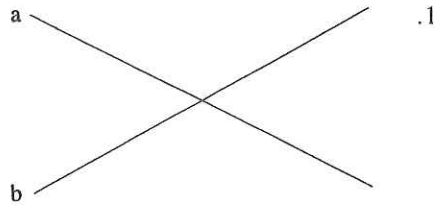
5. חזור על הבעיה בנתונים שונים על-ידי האפשרות **להזיז עצמים יסודיים**. מהו המקום ההנדסי של נקודות הנמצאות ביחס מרחקים קבוע מישר ומנקודה, כאשר הנקודה נמצאת על הישר הזה? (הבחן בין המקרים בהם יחס המרחקים הקבוע גדול, שווה או קטן מ-1).

משימה ה' - הפרש מרחקים משני ישרים

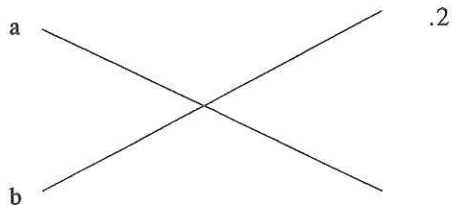
חקור מקומות הנדסיים שבהם הפרש המרחקים של כל נקודה, משני ישרים נתונים הוא קבוע.

השתמש בלומדה ובשיקולים משלך כדי לשרטט את המקום ההנדסי המתאים בכל אחד מן המקרים הבאים:

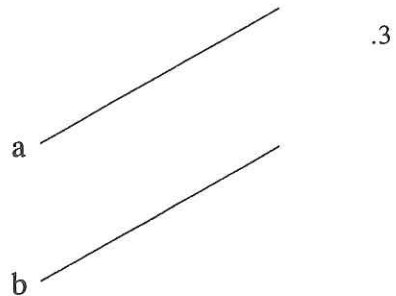
מרחקי הנקודות מן הישרים a ו-b יוצרים הפרש קבוע של 20 יחידות.



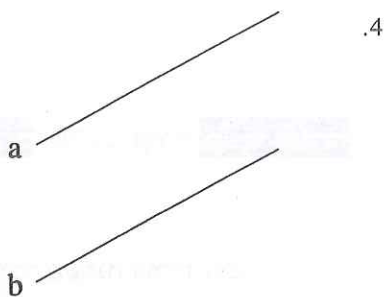
מרחקי הנקודות מן הישרים a ו-b יוצרים הפרש קבוע של 0.



מרחקי הנקודות מן המקבילים a ו-b יוצרים הפרש קבוע השווה למרחק שבין שני המקבילים.



מרחקי הנקודות מן המקבילים a ו-b יוצרים הפרש קבוע הקטן מן המרחק שבין שני המקבילים.



מרחקי הנקודות מן הישרים המתלכדים a ו-b יוצרים הפרש 0.



מרחקי הנקודות מן הישרים המתלכדים a ו-b יוצרים הפרש קבוע.



משימה ו - חקירות נוספות

1. חקור מקומות הנדסיים שבהם **סכום המרחקים** של כל נקודה **משתי נקודות** נתונות הוא **קבוע**.

לאחר בניית המקום ההנדסי הראשון, חקור כיצד משתנה צורתו אם:

א) משנים את הקבוע הכלול בהגדרה, כלומר אם משנים את הערך של סכום המרחקים הכלול בהגדרה (בחר סכומי מרחקים הגדולים, קטנים או שווים למרחק שבין שתי הנקודות הנתונות).

ב) מזיזים עצמים יסודיים, כלומר אם משנים את המרחק בין שתי הנקודות הנתונות.

2. חקור מקומות הנדסיים שבהם הפרש המרחקים של כל נקודה מ- **ישר ונקודה** נתונים הוא **קבוע**.

לאחר בניית המקום ההנדסי הראשון, חקור כיצד משתנה צורתו אם:

א) משנים את הקבוע הכלול בהגדרה (כלומר, את הערך המספרי של הפרש המרחקים).

ב) מזיזים את העצמים היסודיים (כלומר, מקרבים את הנקודה אל הישר עד למצב בו המרחק ביניהם אפס).

3. חקור מקומות הנדסיים שבהם המרחקים של כל נקודה מ- **שתי נקודות** נתונות יוצרים **יחס קבוע**.

חקור כיצד משתנה צורת המקום ההנדסי, אם יחס המרחקים הכלול בהגדרה גדול, קטן או שווה ל-1 ואם משנים את המרחק בין שתי הנקודות. בדוק גם את המקרה בו שתי הנקודות מתלכדות.

4. חקור מקומות הנדסיים שבהם המרחקים של כל נקודה מ-שני ישרים נתונים יוצרים יחס קבוע.

(א) ברוב המקרים תקבל שני ישרים. תאר בכל מקרה את תכונת הישרים האלה.

(ב) האם מצאת מקרים בהם המקום ההנדסי הוא

- ישר אחד?

- מקום ריק?

- כל המישור?

אם כן, תאר את המקרים האלה.

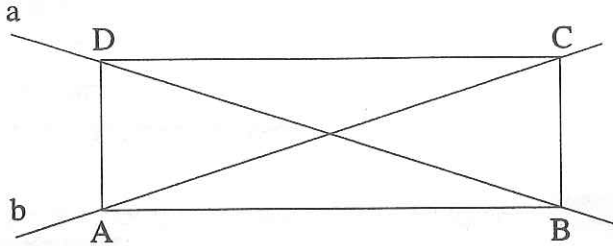
5. חקור מקומות הנדסיים שבהם המרחקים של כל נקודה מ-שתי נקודות נתונות יוצרים הפרש קבוע.

רמז: קיימים לפחות 5 מקרים שונים.

משימה ז - שאלות סיכום

ענה על השאלות הבאות מבלי להעזר במחשב:

1. נתונים הישרים a ו-b.



בחר את ההגדרה המתאימה:

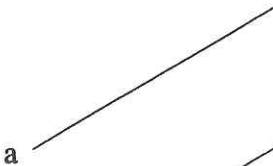
המלבן ABCD הוא המקום ההנדסי של כל הנקודות אשר סכום/הפרש/יחס מרחקיהן מהישרים הנתונים הוא קבוע.

הסבר בחירתך: _____

2. (א) שרטט 3 נקודות בשרטוט שלפניך,

אשר מרחקן מן הישר a גדול

פי 2 ממרחקן מן הישר b.

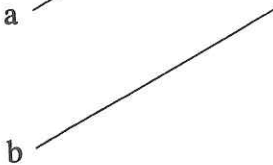


(ב) שרטט את המקום הגיאומטרי

של כל הנקודות שמרחקן מן

הישר a גדול פי 2 ממרחקן

מן הישר b.

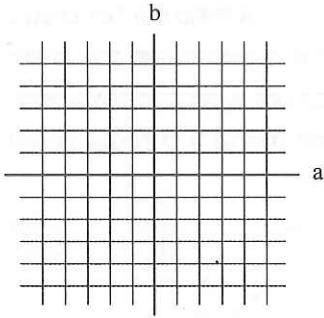


3. (א) שרטט 3 נקודות בשרטוט שלפניך,

אשר מרחקן מן הישר a

גדול פי 2 ממרחקן מן

הישר b.



(ב) שרטט את המקום הגיאומטרי

של כל הנקודות שמרחקן מן

הישר a גדול פי 2

ממרחקן מן הישר b.

שים לב! הקווים המקבילים

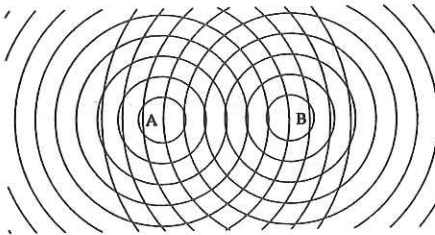
נמצאים במרחקים שווים זה מזה.

4. (א) שרטט 3 נקודות בשרטוט שלפניך,

אשר מרחקן מן הנקודה A

גדול פי 2 ממרחקן מן

הנקודה B.



(ב) שרטט את המקום הגיאומטרי

של כל הנקודות שמרחקן מן

הנקודה A גדול פי 2

ממרחקן מן הנקודה B.

שים לב! ההפרש בין רדיוס כל מעגל

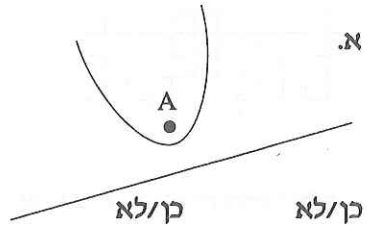
למעגל הקונצנטרי הקטן ממנו הוא

קבוע.

5. נתונים ישר b ונקודה A.

רשום בכל מקרה האם השרטוט מתאר מקום הנדסי של נקודות שמרחקיהן מן הישר b ומן הנקודה A יוצרים סכום קבוע.
(רשום מתחת לכל שרטוט את הנימוקים להחלטתך)

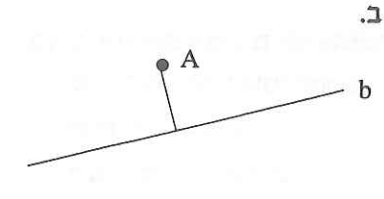
א.



ק/לא ק/לא

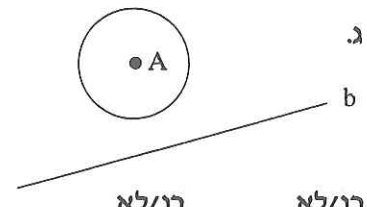
נימוק: _____

ב.



נימוק: _____

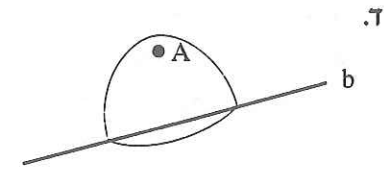
ג.



ק/לא ק/לא

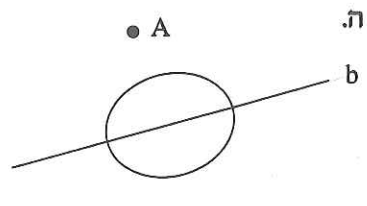
נימוק: _____

ד.



נימוק: _____

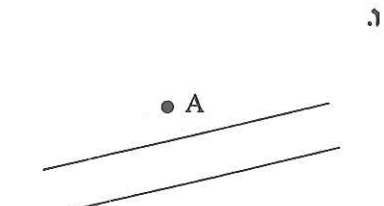
ה.



ק/לא ק/לא

נימוק: _____

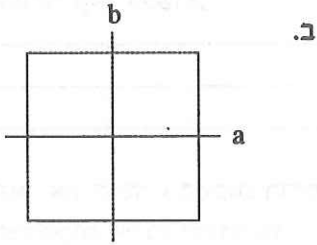
ו.



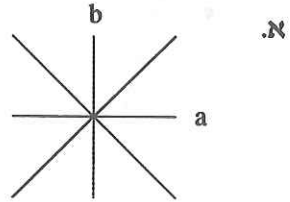
נימוק: _____

6. נתונים שני ישרים a ו-b.

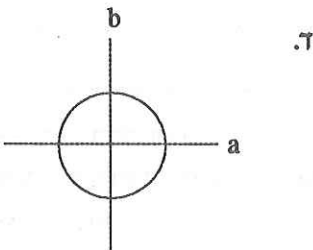
רשום בכל מקרה האם השרטוט מתאר מקום גיאומטרי של נקודות שסכום מרחקיהן מן הישרים a ו-b יוצרים סכום קבוע. נמק את החלטתך.



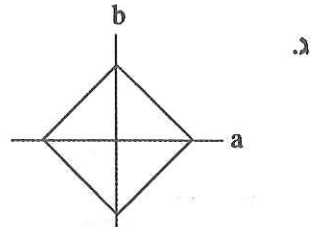
נימוק: _____



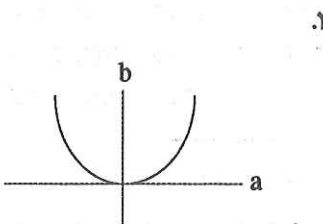
כן/לא כן/לא
נימוק: _____



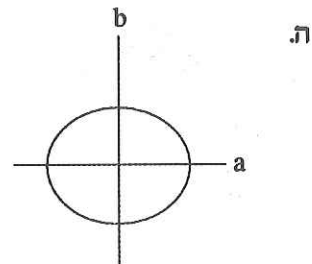
נימוק: _____



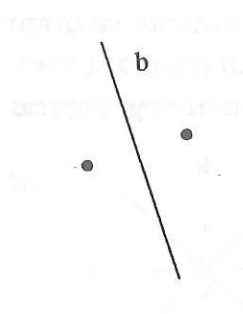
כן/לא כן/לא
נימוק: _____



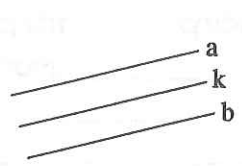
נימוק: _____



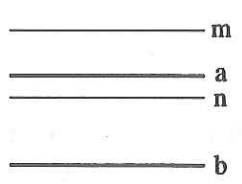
כן/לא כן/לא
נימוק: _____



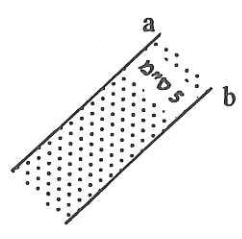
7. א. תאר את הישר b כמקום הנדסי בו המרחקים של כל נקודה עליו מן הנקודות הנתונות A ו-B, יוצרים קשר כלשהו.



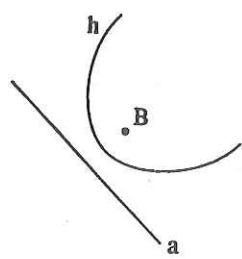
ב. תאר את הישר k כמקום הנדסי בו המרחקים של כל נקודה מן הישרים הנתונים a ו-b, יוצרים קשר כלשהו.



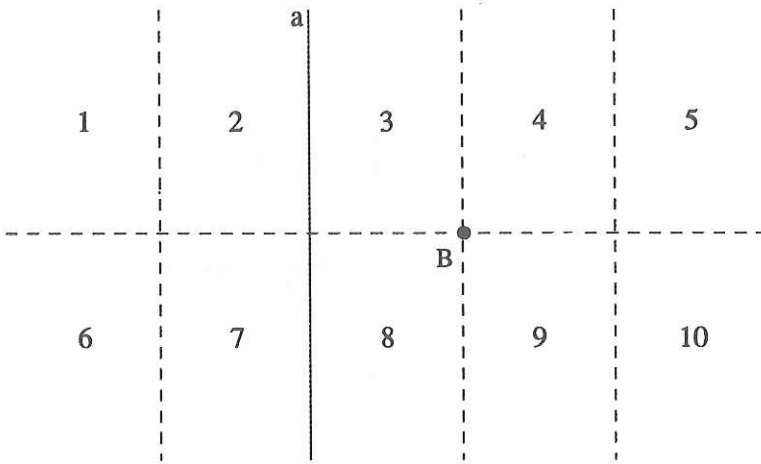
ג. תאר את הישרים m ו-n כמקום הנדסי בו המרחקים של כל נקודה מן הישרים הנתונים a ו-b, יוצרים קשר כלשהו.



ד. תאר את חלק המישור שבין הישרים a ו-b כמקום הנדסי בו המרחקים של כל נקודה מן הישרים האלה, יוצרים קשר כלשהו.

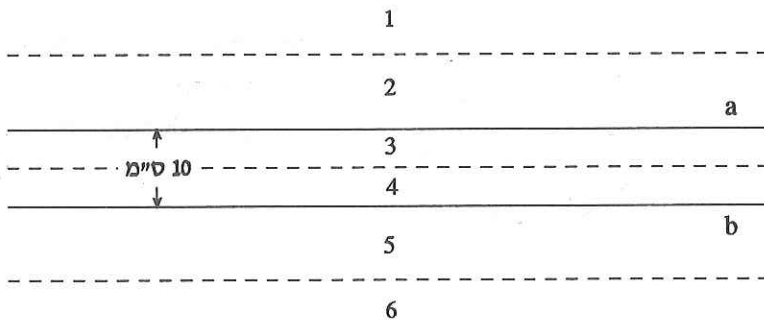


ה. תאר את הקו העקום h כמקום הנדסי שבו המרחקים של כל נקודה מן הנקודה B ומן הישר a יוצרים קשר כלשהו.



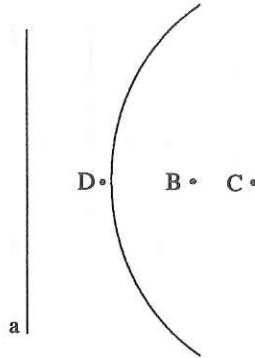
נתונים ישר a ונקודה B, במישור המחולק ל-10 איזורים. אילו איזורים מכילים נקודות הנמצאות במרחקים שווים מן הישר a ומן הנקודה B

ב)



נתונים שני מקבילים a ו-b במישור, המחולק ל-6 איזורים. המרחק בין הישרים 10 ס"מ. אילו איזורים מכילים נקודות שהפרש מרחקיהן מן הישר a ומן הישר b הוא 0 ס"מ?

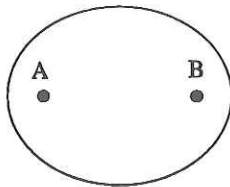
9. השרטוט שלפניך מתאר את המקום ההנדסי של כל הנקודות אשר מרחקיהן מן הנקודה B והישר a שווים.



א) שרטט בערך (באותו שרטוט) את המקום ההנדסי של כל הנקודות שמרחקיהן מן הנקודה C והישר a שווים.

ב) צייר בערך (באותו שרטוט) את המקום ההנדסי של כל הנקודות שמרחקיהן מן הנקודה D והישר a שווים.

10. השרטוט שלפניך מתאר את המקום ההנדסי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן מן הנקודות A ו-B הוא 10 יחידות.



א. שרטט בערך (באותו שרטוט) את המקום ההנדסי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן מן הנקודות A ו-B הוא 12 יחידות.

ב. שרטט בערך (באותו שרטוט) את המקום ההנדסי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן מן הנקודות A ו-B הוא 8 יחידות.

V. משימות להכרת הלומדה

הערות למורה

משימה א' - מרחקים שווים משתי נקודות

מטרות המשימה הזאת הן:

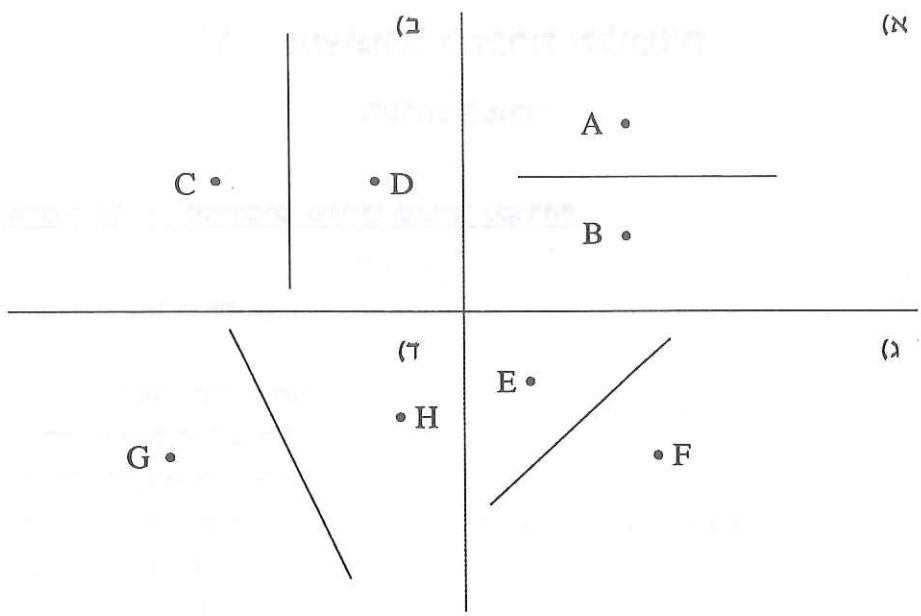
- הכרת המושג מקום הנדסי.
- הכרת המעגל כמקום הנדסי.
- הכרת חלק מפקודות הבנייה.
- בניית נקודות השייכות למקום ההנדסי של הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משתי נקודות נתונות.
- הכרת האנך האמצעי כמקום הנדסי.

בתרגיל 1, בונה התלמיד מעגל ומקשר את הגדרתו אל המושג מקום הנדסי. בתרגילים 2,4,5 מובאות פקודות הדרושות לבניית נקודות חיתוך בין מעגלים. כמו כן, על התלמיד להסיק, כי נקודת חיתוך של שני מעגלים בעלי רדיוסים שווים נמצאת במרחקים שווים ממרכזי המעגלים האלה.

בעזרת תרגילים אלה יוכל התלמיד להיווכח, כי כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משתי הנקודות שבחר בתחילת המשימה (A ו-C) מונחות על אותו ישר ולהסיק בתרגיל 6, כי הישר הוא מאונך לקטע AC וחוצה אותו (כלומר, האנך האמצעי לקטע AC).

שים לב! בשלב זה בניית המקום ההנדסי נעשית ללא שימוש בפקודת **הגדרה**, כלומר ללא ניסוח מראש של ההגדרה למקום ההנדסי. בשלב זה, לא נוכל להשתמש בינתיים בפקודות ה- **השערה** וה- **שרטוט** של המקום ההנדסי שבנינו.

בתרגיל 7, על התלמיד להשתמש במסקנות אלה ולשרטט (לאו דווקא בדיוק רב) את האנכים האמצעים של הקטעים המחברים את זוגות הנקודות הנתונים:



משימה ב' - סכום מרחקים מישר ומנקודה

מטרות המשימה הזאת הן:

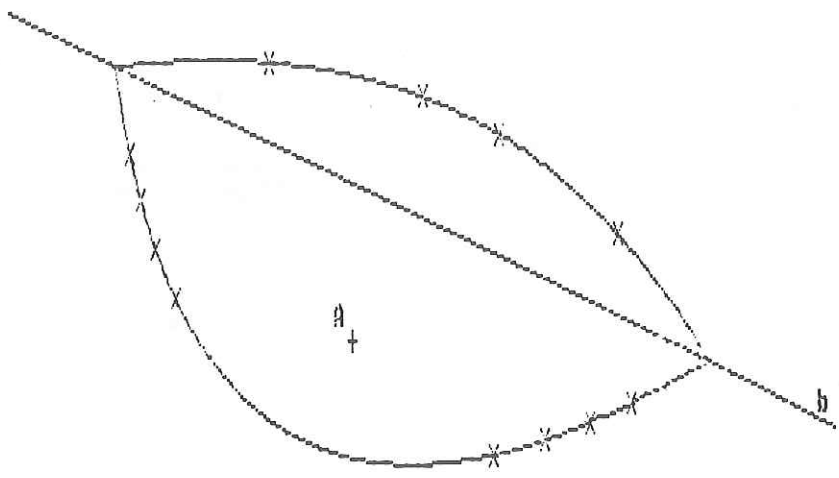
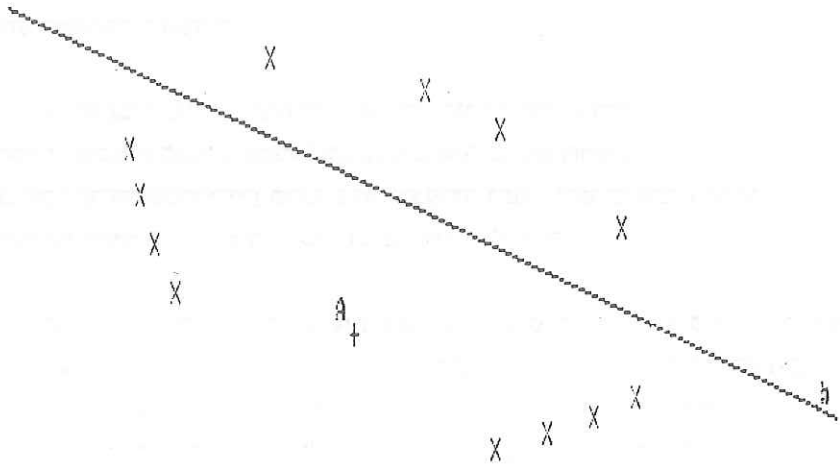
- הכרת המקבילים לישר מסויים במרחק נתון כמקום הנדסי.
- הכרת הפקודה לבניית מקביל והכנת הלומדה לבעיה חדשה.
- בניית נקודות שמרחקיהן מישר נתון ומנקודה נתונה יוצרים סכום קבוע.
- העלאת השערה לגבי צורתו של מקום הנדסי לא מוכר.

בתרגילים 3,2 ו-5 מכיר התלמיד את פקודת שרטוט המקבילים לישר נתון במרחק מסויים, ואת תכונת הנקודות הנמצאות על מקבילים אלה. בעזרתם הידע הקודם שלו אודות שרטוט מעגלים, יוכל עתה לבנות נקודות חיתוך בין מעגל ומקבילים. נקודות אלה נמצאות במרחק השווה לרדיוס המעגל ממרכזו **וגם** במרחק השווה למרחק המקבילים מן הישר שנבחר. על-ידי בניית זוגות או רביעיות של נקודות חיתוך כאלה בתרגיל 6, יוכל התלמיד להסיק בתרגיל 7 כי המקום ההנדסי הנדרש הוא צורה סגורה "מעוגלת" הדומה אולי לאליפסה.

לאמיתו של דבר, זוהי צורה המורכבת משני קטעי פרבולה (ראה שרטוט 1) אך אין צורך בשלב זה להקפיד על הגדרה מדוייקת.

שים לב! בשלב זה בניית המקום ההנדסי נעשית ללא שימוש בפקודת **הגדרה**, כלומר ללא ניסוח מראש של ההגדרה למקום ההנדסי. בשלב זה, לא נוכל להשתמש בינתיים בפקודות ה- **השערה** וה- **שרטוט** של המקום ההנדסי שבנינו.

הפקודה **בעיה חדשה** מכינה את הלומדה לפעילות חדשה על-ידי מחיקת כל הבניות והנתונים שהצטברו במהלך העבודה.



1. שרטוט המקום ההנדסי של הנקודות שמרחקיהן מן הנקודה A ומן הישר b יוצרים סכום קבוע הוא: שני קטעי פרבולות.

סיכום משימה ב':

הנקודות הבאות מהוות את הנקודות העיקריות בפעילות במשימה ב' ורצוי להעלותן בסוף הפעילות בדיון כיתתי.

- אוסף הנקודות הנמצאות כולן באותו מרחק מנקודה אחת נתונה - הוא מעגל. המרחק של כל נקודה מהנקודה הנתונה הוא רדיוס המעגל.
- אוסף הנקודות הנמצאות כולן באותו מרחק מישר אחד נתון - הוא זוג מקבילים לישר הנתון. המרחק של כל נקודה מהישר הנתון הוא המרחק של כל אחד מהמקבילים מהישר הנתון.
- התנאי הכלול בהגדרת מקום הנדסי ניתן לפירוק לשתי תכונות; למשל נקח את המקום ההנדסי המוגדר על ידי סכום מרחקים קבוע של 100 יחידות מישר נתון ומנקודה נתונה; אחת התכונות תהיה: מרחק מסויים מהישר הנתון, והשנייה תהיה: - מרחק משלים ל-100 יחידות מהנקודה הנתונה.
- מכאן אוסף הנקודות המקיימות את שתי התכונות הינו חיתוך שתי הקבוצות של הנקודות המקיימות כל אחת מהתכונות.
- לדוגמא: במשימה ב' 2 קיבלנו זוג מקבילים לישר נתון כאוסף כל הנקודות שמרחקן מהישר הנתון הוא 40; במשימה ב' 3 קבלנו מעגל כאוסף כל הנקודות שמרחקן מנקודה נתונה הוא 60; על ידי מציאת החיתוך בין שתי הקבוצות מוצאים את אוסף כל הנקודות המקיימות את שתי התכונות; מרחקן מהישרים שווה ל-40 ומרחקן מהנקודה הנתונה שווה ל-60.
- האשנב בלומדה הנקרא **בניות** תומך בבניית נקודות השייכות למקום הנדסי. כדאי, אחרי בניה כזו, למחוק את בניות העזר. פעולה זו משאירה על המסך רק את נקודות החיתוך השייכות למקום ההנדסי.

משימה ג' - סכום מרחקים משני ישרים

מטרות המשימה הזאת הן:

- הכרת הגדרה פורמלית של מקום הנדסי.
- הכרת הפקודות הקשורות להגדרת מקום הנדסי.
- בניית מקום הנדסי של הנקודות שמרחקיהן משני ישרים יוצרים סכום קבוע.
- הכרת האופציות של השערה ושרטוט מקום הנדסי.
- חקירת השינויים החלים בצורת מקום הנדסי זה כתוצאה משינוי מצב הישרים הנתונים.
- הכרת הפקודות הקשורות לשינוי המצב ההדדי של שני העצמים הקבועים הכלולים בהגדרה.

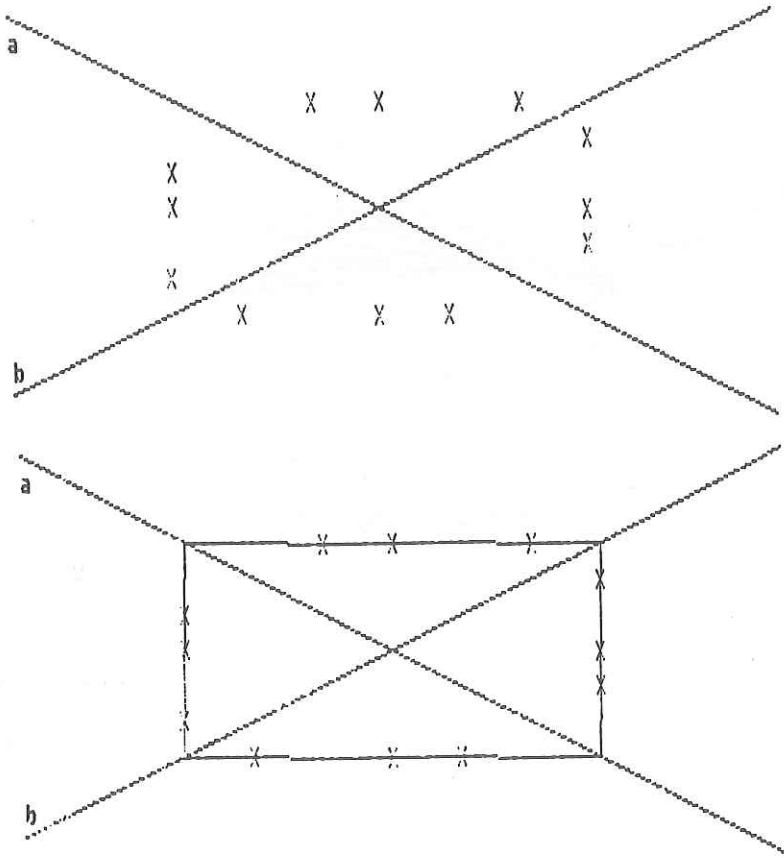
במשימה זאת משתמש התלמיד לראשונה בכלל הפעולות הקשורות למציאה וחקירה של מקום הנדסי:

- הגדרה,
- בניית נקודות השייכות למקום,
- השערה ו/או שרטוט,
- חקירה על-ידי הזזת עצמים יסודיים.

בתרגילים 1 ו-2 משתמש התלמיד לראשונה בפקודות הקשורות להגדרת מקום הנדסי (במקרה זה, הנקודות שמרחקיהן משני ישרים יוצרים סכום קבוע של 60 יחידות). בדרך כלל, במסגרת ההגדרה, על המשתמש לעבור על הסרגל העליון לאשנב הבנייה, לקבוע את העצמים היסודיים (במקרה זה, שני ישרים) ולאחר מכן לחזור לאשנב ההגדרה ולכלול את העצמים האלה בניסוח ההגדרה.

לאחר הגדרת המקום ההנדסי, על התלמיד לבנות נקודות השייכות למקום הנדסי זה (תרגיל 3). נקודות אלה מתקבלות על-ידי חיתוך שני זוגות של ישרים מקבילים (למשל, זוג אחד במרחק 20 יחידות מן הישר a וזוג שני במרחק 40 יחידות מן הישר b) ולכן כל בנייה יוצרת ארבע נקודות מתאימות. אפשר כמובן, לבנות גם את הנקודות המונחות על אחד הישרים ונמצאות במרחק 60 מן הישר השני.

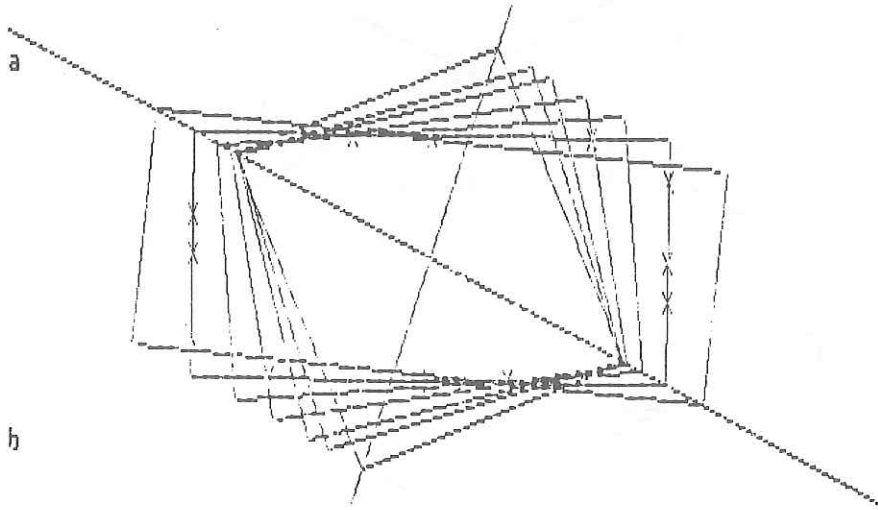
בתרגיל 4, משתמש התלמיד לראשונה באופציית ההשערה ו/או השרטוט (ראה שרטוט 2).



שרטוט 2. הנקודות שמרחקיהן מן הישר a ומן הישר b יוצרים סכום של 60 יחידות ; מלבן.

לאחר קבלת השרטוט על המסך, מתבקש התלמיד לשנות את מצבם ההדדי של שני הישרים היסודיים הכלולים בהגדרה (תרגיל 5). השרטוטים המתאימים מתקבלים ללא בניות נוספות (ראה שרטוט 3).

כדאי לעודד את התלמידים לשער מראש (כלומר, לפני קבלת השרטוט על המסך) את צורת הגרפים המתקבלים בעקבות השינויים בתכונות המקום ההנדסי. דבר זה חשוב במיוחד במקרים המיוחדים בהם חל שינוי איכותי במצבם ההדדי של העצמים היסודיים או במספר הקבוע הכלול בהגדרה. כך למשל, במקרה שלפנינו, אם שני הישרים מאונכים המקום ההנדסי יהיה ריבוע ואם שני הישרים מתלכדים המקום ההנדסי יהיה שני מקבילים לישרים הנתונים.



שרטוט 3. השינויים בצורת המלבן כתוצאה משינוי המצב ההדדי של שני הישרים היסודיים.

סיכום משימה ג':

בסוף הפעילות במשימה ג' רצוי להעלות בדיון כיתתי את הנקודות הבאות:

- במסגרת הלומדה, מקום הנדסי נתון תמיד על-ידי שני עצמים (שתי נקודות, נקודה וישר, או שני ישרים) וקשר בין המרחקים משני העצמים הנתונים (שוויון, סכום קבוע, הפרש קבוע או יחס קבוע).

בלומדה קיימות שלוש בחירות אפשריות לזוג עצמים. עבור כל זוג קיימים ארבע סוגי קשרים כנייל. כך נוצרות $12 = 4 \times 3$ קבוצות של מקומות הנדסיים. (ראה טבלה 1 בסעיף III תאור המקומות הגיאומטריים המתקבלים).

תאור הקבוצות השונות, המתקבלות עבור כל זוג עצמים - נתון בטבלאות 2, 3, ו-4 באותו סעיף.

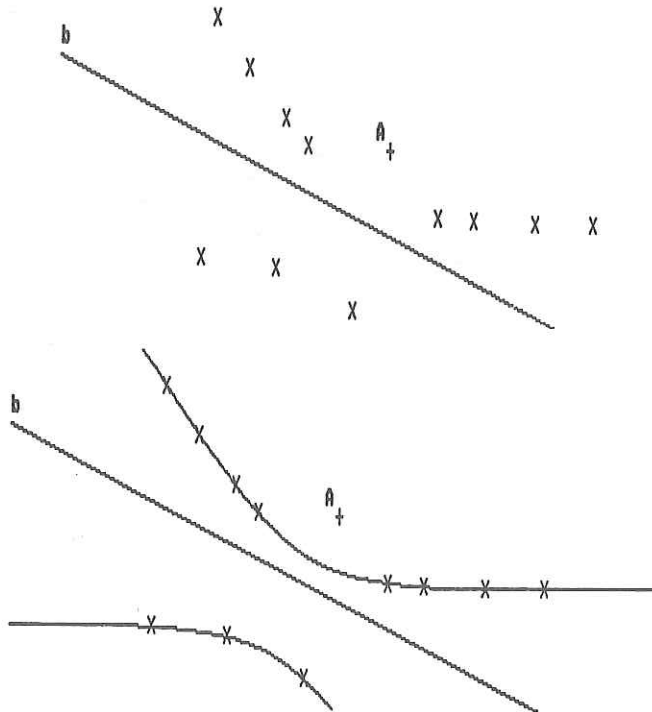
משימה ד' - יחס מרחקים מנקודה וישר

מטרות המשימה הן:

- בניית מקום הנדסי של נקודות שמרחקיהן מנקודה ומישר נתונים יוצרים יחס קבוע.
- חקירת השינויים החלים בצורת מקום הנדסי זה כתוצאה משינוי הערך המספרי של היחס.
- הכרת הפקודות הקשורות לשינוי הקבוע הכלול בהגדרת המקום ההנדסי.

בתרגילים 1-3 התלמיד בונה נקודות השייכות למקום ההנדסי של הנקודות שמרחקיהן מנקודה ומישר נתונים יוצרים יחס קבוע של $\frac{2}{1}$ (2:1). לפעמים, קשה לשער את צורת

המקום ההנדסי על-סמך הנקודות הנבנות (ראה שרטוט 4).



שרטוט 4. הנקודות שמרחקיהן מנקודה A ומישר b יוצרים יחס של 1 ל-2: אליפסה.

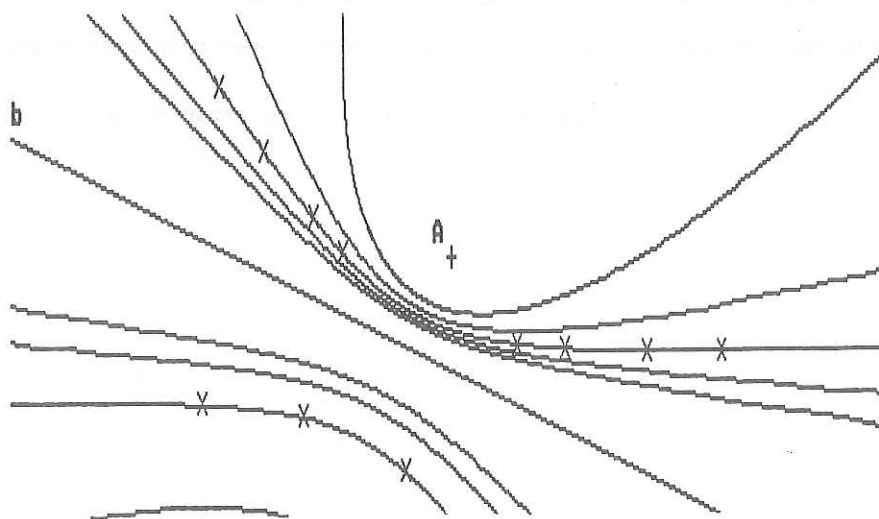
על-ידי בחירת יחסים שונים בתרגיל 4, ניתן להסיק, כי צורת המקום ההנדסי היא:

* היפרבולה - עבור ערכים גדולים מ-1 (שרטוט 5).

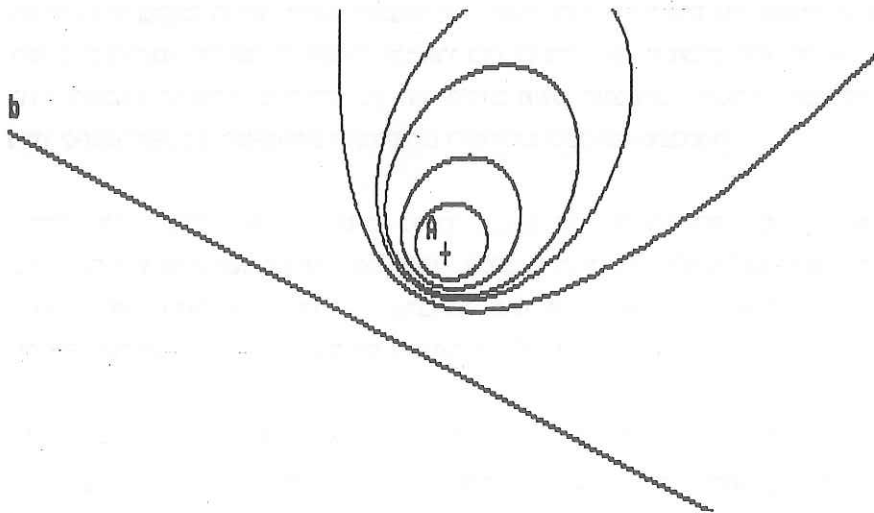
כדאי לציין, כי ההיפרבולה מורכבת תמיד משני חלקים, אך לא תמיד שניהם מופיעים על המסך.

* פרבולה - עבור יחס 1, כלומר שוויון מרחקים (ראה את העקומה הקיצונית בכל אחד מן השרטוטים 5 ו-6).

* אליפסה - עבור יחסים קטנים מ-1 (שרטוט 6).



שרטוט 5. השינויים בצורת ההיפרבולה כתוצאה משינוי הערך המספרי של היחס הקבוע בתחום המספרים הגדולים מ-1. הקו המסומן בחץ הוא פרבולה (יחס מרחקים שווה ל-1).



שרטוט 6. השינויים בצורת האליפסה כתוצאה משינוי הערך המספרי של היחס הקבוע בתחום המספרים הקטנים מ-1. הקו המסומן בחץ הוא פרבולה (יחס מרחקים שווה ל-1).

למרות העובדה שמבחינה חזותית הפרבולה דומה לקטעי ההיפרבולה או האליפסה הקרובים אליה בשרטוטים שעל המסך, היא שונה בתכונותיה משתי העקומות האלה.

גם במקרה בו הנקודה הקבועה נמצאת על הישר הקבוע (תרגיל 5) צורת המקום ההנדסי תלויה בערך היחס:

* אם היחס קטן מ-1, זוהי קבוצה ריקה.

* אם היחס הוא 1, זהו ישר המאונך לישר הנתון ועובר דרך הנקודה הנתונה. (הנקודה עצמה אינה כלולה במקום ההנדסי).

* אם היחס גדול מ-1, אלה שני ישרים הנחתכים בנקודה הנתונה (הנקודה הזאת עצמה אינה כלולה במקום ההנדסי).

סיכום משימה ד':

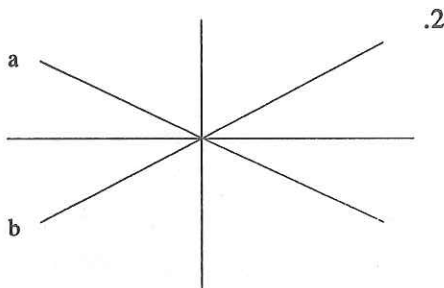
- לאחר בניית מקום הנדסי ניתנת האפשרות, לשנות בצורה דינמית את הנתונים: את המיקום היחסי של שני העצמים שנבחרו כדי להגדיר את המיקום ההנדסי או את גודל הסכום, ההפרש או היחס בין המרחקים משני העצמים. בעזרת דינמיקה זו ניתן לחקור את כל המקומות ההנדסיים השייכים לקבוצה שנבחרה.
 - בדרך כלל שינויים אלה גורמים לשינוי צורת המיקום ההנדסי, לעומת זאת, במקרים לא מעטים, משתנה גם אופי המיקום ההנדסי. למשל במשימה ד': המעבר מאליפסה לפרבולה להיפרבולה כשמשנים את גודל היחס ומעבר מהיפרבולה לשני ישרים כשהנקודה הנתונה "עולה" על הישר הנתון.
- פירוט כל המקרים האפשריים בכל אחת מ-12 הקבוצות של מקומות הנדסיים, ניתן בטבלאות 2, 3 ו-4 בסעיף III תאור המקומות הגיאומטרים המתקבלים..

משימה ה' - הפרש מרחקים משני ישרים

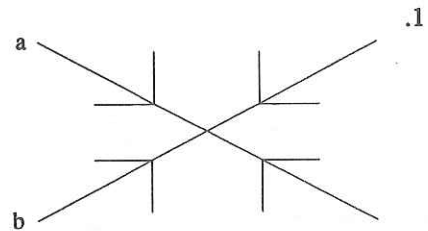
מטרות המשימה הזאת הן:

- בניית מקום הנדסי של נקודות שמרחקהן משני ישרים יוצרים הפרש קבוע.
- חקירת השינויים החלים בצורת המקום ההנדסי כתוצאה משינוי מצבם ההדדי של שני הישרים היסודיים או שינוי ערכו של הפרש הקבוע הכלולים בהגדרת הבעיה.
- שימוש בשיקולים גאומטריים למציאה ושרטוט מקומות הנדסיים.

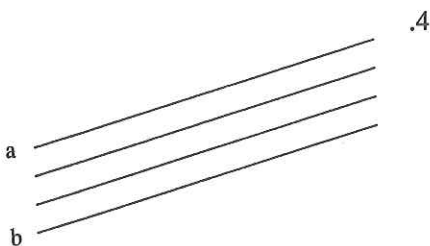
הפתרונות לשאלות המוצגות במשימה:



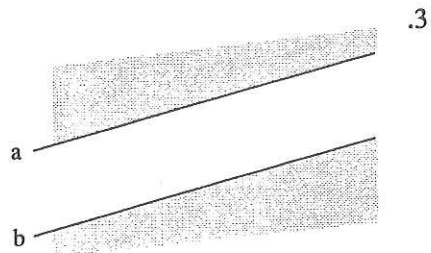
שני חוצי הזווית



8 קרניים

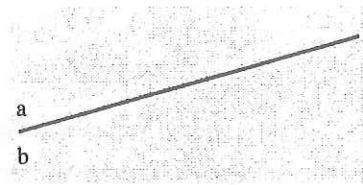


שני ישרים מקבילים



חלק המישור שמחוץ למקבילים
כולל הישרים עצמם.

5.



כל המישור

6.



מקום ריק

השימוש בלומדה נחוץ בדרך כלל למצוא את התוצאה (המפתיעה למדי) שבתרגיל 1.

בתרגילים האחרים כדאי לעודד את התלמידים להפעיל שיקולים גאומטריים ללא עזרת מחשב ובמידת הצורך להשתמש בלומדה לבדיקת השערותיהם.

אם מתעוררת הבעיה של אי-קיום חוק החילוף לגבי המרחקים, אפשר להבהיר, כי בהגדרת מקומות הנדסיים, ההפרש הוא תמיד חיובי (כלומר, ההתייחסות היא אל הערך המוחלט של ההפרש).

משימה ו' - חקירות נוספות

מטרות המשימה הזאת הן:

- בניית מקומות הנדסיים שונים.
 - חקירת השינויים החלים בצורת המקום ההנדסי כתוצאה משינוי מצבם הדדי של העצמים היסודיים או שינוי ערכו המספרי של התנאי הכלול בהגדרת הבעיה.
 - שימוש בשיקולים גאומטריים למציאה ושרטוט מקומות הנדסיים.
- בשלב זה, התלמידים מכירים את התהליכים הקשורים לבניית מקומות הנדסיים. לכן, כדאי להדגיש בפעילות זאת את תהליכי החקירה של הקשר בין שינוי מצבם ההדדי של העצמים היסודיים ו/או שינוי ערכו המספרי של התנאי הכלול בהגדרה, ובין צורת המקום ההנדסי המוגדר.

בחקירות אלה, חשוב למצות עד כמה שאפשר את המקרים השונים - כולל המקרים המיוחדים של התלכדות עצמים יסודיים, הפרש מרחקים השווה למרחק בין העצמים היסודיים הנתונים, סכום מרחקים או הפרש מרחקים השווה לאפס וכו'.

טבלאות 1-4 בסעיף: "תאור הלומדה ומטרותיה" מסכמות את כל המקרים שניתן לחקור בעזרת הלומדה.

נביא לדוגמא את החקירה הדרושה בתרגיל 2:

מקומות הנדסיים בהם מרחקי הנקודות מישר ומנקודה נתונים יוצרים הפרש קבוע. המקומות ההנדסיים המתקבלים במקרה זה מסוכמים בשורה השניה של טבלה 3 בסעיף: "תאור הלומדה ומטרותיה". נוכל למצות את סוגי המקומות ההנדסיים השונים על-ידי אבחנה בין המקרה בו הנקודה היסודית נמצאת על הישר הנתון לבין המקרה בו הנקודה אינה על הישר. בכל אחד מן המקרים האלה אפשר לשנות את ערך ההפרש קבוע יחסית למרחק בין שני העצמים היסודיים.

1. הנקודה הנתונה A נמצאת במרחק m מן הישר הנתון.

- (א) ערך ההפרש קבוע גדול מן המרחק ($d > m$).
המקום ההנדסי הוא 4 ענפי פרבולות
חלקיים הממוקמים באופן סימטרי.
הענפים יוצאים משתי נקודות על הישר
הנמצאות במרחק d מן הנקודה הנתונה A.

(ב) ערך ההפרש d שווה למרחק ($d = m$).

המקום ההנדסי המתקבל הוא

המורכב ביותר בלומדה זו:

פרבולה ושתי קרניים. מקורה של אחת

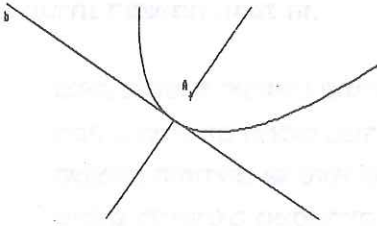
הקרניים בנקודה הנתונה A ומקורה של

הקרן השנייה בקודקוד הפרבולה.

שתי הקרניים מאונכות לישר הנתון

ומשמשות ציר לפרבולה. הנקודה

הנתונה A משמשת גם מוקד לפרבולה.

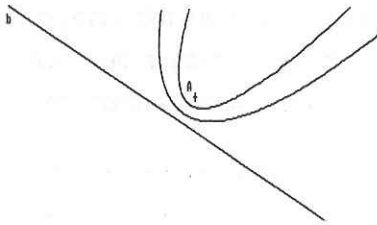


(ג) ערך ההפרש d קטן מן המרחק ($0 < d < m$).

המקום ההנדסי הוא שתי פרבולות

שקודקודיהן על האנך מן הנקודה הנתונה

אל הישר הנתון.



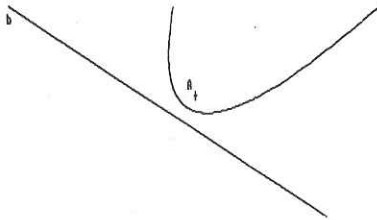
(ד) ערך ההפרש d הוא 0.

המקום ההנדסי הוא פרבולה

שמוקדה בנקודה הנתונה A .

מקרה זה שקול לשוויון המרחקים

מן הנקודה הנתונה ומן הישר הנתון.

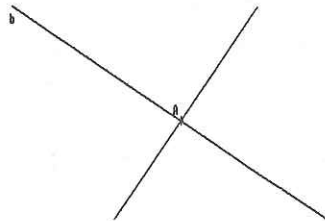


2. הנקודה הנתונה A נמצאת על הישר הנתון.

(א) ערך ההפרש d הוא חיובי.

המקום ההנדסי הוא 4 ענפי פרבולות

בדומה למקרה 1 א.



(ב) ערך ההפרש d הוא 0.

המקום ההנדסי הוא האנך דרך

הנקודה הנתונה אל הישר הנתון.

שים לב, כי הסימטריות של העקומות היא בחלק מן המקרים תוצאה של הגדרת ההפרש בין המרחקים כהפרש חיובי (כלומר כערך המוחלט של ההפרש).

משימה ז' - מקומות הנדסיים ללא מחשב

מטרות המשימה הזאת הן:

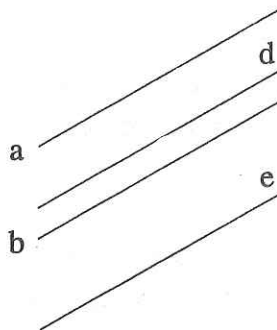
- סיכום הנושא תוך הצגת מגוון שאלות המתייחסות למקומות הנדסיים מסוגים שונים.
- שימוש בגישה הגאומטרית - אינטואיטיבית שנרכשה במהלך הפעילויות במחשב.
- מתן אפשרות לשימוש בסגנונות חשיבה מגוונים.

ניתן לענות לכל השאלות המוצגות בפעילות זאת מבלי להעזר בלומדה. כדאי להמליץ לתלמידים לעבוד תחילה ללא מחשב ולהשתמש בלומדה לבדיקת השערות או במסגרת דיון המתנהל לאחר סיום העבודה.

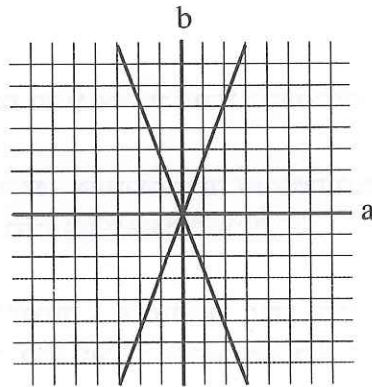
להלן נביא את הפתרונות לשאלות ודרכים אפשריות להסבר. ההסברים המובאים כאן אינם ההסברים היחידים האפשריים.

1. מרחקי הנקודות שעל המלבן יוצרים סכום קבוע (ראה משימה ג').
כשנעים לאורך צלעות המלבן, מרחק הנקודות מאחד הישרים גדל והמרחק מן הישר השני קטן באותה מידה. דבר זה אינו מאפשר יצירת יחס או הפרש מרחקים קבוע. שיקולים מסוג זה פוסלים את האפשרויות הנתונות האחרות, אך אינם מהווים הוכחה ישירה, כי ההגדרה המתאימה היא אכן קשורה בהפרש מרחקים קבוע.

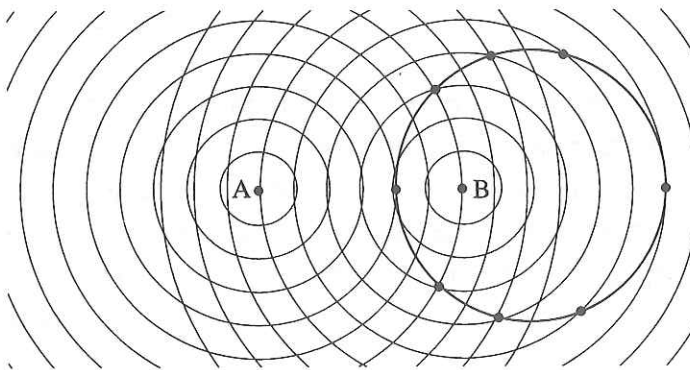
2. המקום ההנדסי הוא הנקודות שעל הישרים d ו- e . אלה ישרים מקבילים לישרים הנתונים. d נמצא בשלש המרחק בין a ל- b ; המרחק בין e ל- b שווה למרחק בין a ל- b .



3-4. הרשתות המובאות בשאלות אלה משמשות תחליף לבניות העזר הדרושות למציאת הנקודות הדרושות.



שני ישרים פרט לנקודות החיתוך



מעגל (מוכר בהנדסה אוקלידית כמעגל אפולוניוס).

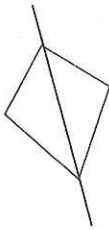
5. השרטוטים המתאימים למקום ההנדסי המוגדר הם ב', ד'. במקרה הראשון, מכיוון שהקטע מאונך לישר b, סכום המרחקים מן הישר b ומן הנקודה A של כל נקודה השייכת למקום ההנדסי שווה בדיוק לאורך הקטע עצמו.

במקרה השני, תנועה לאורך העקומה יוצרת תחושה שגידול באחד המרחקים מלווה בהקטנת המרחק השני. לכן, סביר להניח כי זהו מקום הנדסי מתאים (ראה גם משימה ב').

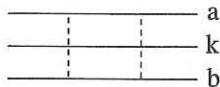
הגרף המוצג בסעיף ד' מתאים למקרים בהם ערכו של סכום המרחקים מן הישר ומן הנקודה הנתונים, גדול מן המרחק שבין הנקודה והישר.
 ככל שנקטין את ערך הסכום, קטעי הפרבולות יהיו צרים יותר.
 לכן, הגרף המובא בסעיף א' מתאים למקרה הגבולי בו ערך הסכום הקבוע שווה למרחק שבין הנקודה והישר הנתונים.
 עבור סכומים הקטנים מן המרחק שבין הנקודה והישר הנתונים, המקום ההנדסי הוא ריק (ראה טבלה 3 בסעיף "תאור הלומדה ומטרותיה").

ניתן לפסול את המקרים האחרים (א', ג', ה', ו') על-ידי בחירת שתי נקודות עבורן סכומי המרחקים אינם שווים באופן בולט או על-ידי תנועה לאורך העקומות ומעקב אחרי הקשר בין המרחק מ-A והמרחק מ-b.

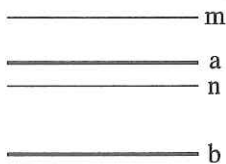
6. מתוך שיקולים הדומים לאלה שבשאלה הקודמת, ניתן להסיק, כי הריבוע מסעיף ג' עונה לדרישות ההגדרה (ראה גם משימה ג').
 את המקרים האחרים אפשר לפסול על-ידי הבאת דוגמאות נגדיות (שתי נקודות עבורן סכומי המרחקים אינם שווים) או על-ידי שיקולים גלובליים של מעקב אחרי שינוי המרחקים לאורך העקומות הנתונות.



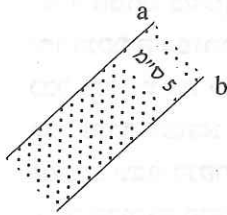
7. א. הישר b הוא האנך האמצעי של הקטע AB.
 כל נקודה שעליו נמצאת במרחקים שווים מן הנקודות A ו-B (ראה גם משימה א').



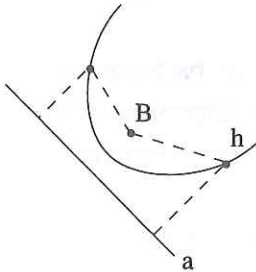
ב. הישר k הוא מקביל לישרים a ו-b ונמצא באמצע המרחק שביניהם.
 כל נקודה שעליו נמצאת במרחקים שווים מן הישרים a ו-b.



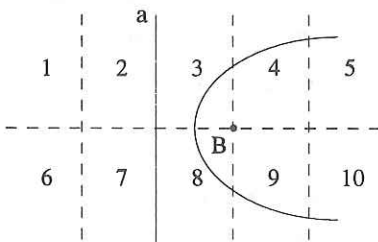
ג. מרחקי הנקודות שעל m ו-n מן הישר b גדולים פי 3 ממרחקיהן מהישר a.
 כלומר, יחס המרחקים הוא קבוע ושווה ל- $\frac{1}{3}$.
 זוהי שאלה הפוכה לשאלה 2, בה התלמיד נתבקש לשרטט מקום הנדסי בעל תכונה דומה.



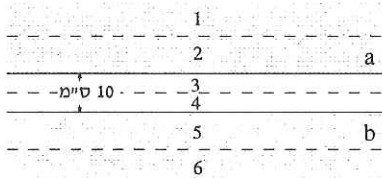
ד. סכום המרחקים מ-a ומ-b של כל נקודה השייכת לאיזור המקווקו הוא קבוע ושווה ל-5 ס"מ. (יתכן והתלמיד פגש מקרה דומה תוך כדי הזזת הישרים במשימה ג').



ה. מרחקי הנקודות שעל h מן הנקודה B ומן הישר a שווים. שוויון מרחקים מנקודה ומישר נתונים הוא ההגדרה המקובלת של פרבולה, אך ניתן להגיע למסקנה זאת גם ללא הכרה קודמת של הגדרה זאת (ראה גם את המקרה של יחס מרחקים 1 במשימה ד').



8. א. צורת המקום ההנדסי המוגדר דומה לעקומה המובאת בשאלה 7 ד' (פרבולה). לכן הנקודות השייכות למקום המוגדר ימצאו באיזורים 3, 4, 5, 8, 9 ו-10.

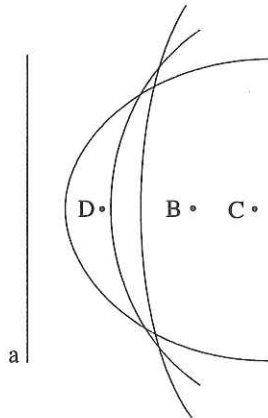


ב. כל הנקודות שמחוץ לשני המקבילים או עליהם שייכים למקום ההנדסי המוגדר (ראה גם משימה ה'). לכן הנקודות האלה ימצאו באיזורים 1, 2, 5 ו-6 ועל הישרים a ו-b.

9. אין לדרוש בשאלות אלה שרטוטים מדוייקים.

בשאלה 9, המקומות ההנדסיים הן פרבולות שקודקדיהן מונחים באמצע המרחק בין הנקודה והישר הנתונים. ככל שהנקודה קרובה יותר לישר הפרבולה תהיה "סגורה" או "צרה" יותר.

את הסקיצות של הפרבולות הדרושות ניתן לשרטט על-סמך מיקום מקורב של מספר נקודות המקיימות את תכונת שוויון המרחקים מן הישר ומן הנקודה הנתונים. בכל מקרה, מיקום הקודקוד הוא בעל החשיבות הגדולה ביותר.



10. בשאלה 10 א' המקום ההנדסי הוא אליפסה המקיפה מבחוץ את האליפסה הנתונה.

ככל שסכום המרחקים הנתון בהגדרה גדול יותר, האליפסה "רחבה" יותר (כלומר אורכי ציורה גדולים יותר).

סכום מרחקים קבוע משתי נקודות נתונות הוא ההגדרה המקובלת של אליפסה, אך ניתן לפתור שאלה זאת גם ללא הכרה קודמת של הגדרה זאת.

המקום ההנדסי המוגדר בסעיף ב' הוא ריק - לא קיימות נקודות שסכום מרחקיהן מן הנקודות A ו-B קטן מאורך הקטע AB (ראה גם משימה ו').

