

א.א.ב.

מתמטיקה ומבחן ב

מכון
היצחק
שניידר



המחלקה להוראת המדעים

חובר על-ידי:

רחל בוהדנה

ייעוץ:

**מקסים ברוקהיימר
רינה הרשקוביץ
נעמי תעזי**

עיצוב וגרפיקה:

נחמה בר

הדפסה:

רחל נמרודי



**כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע**

נדפס בישראל בשנת תשמ"א - 1981

מהדורה מתוקנת - 1987

אל המורה

החבורת "מתמטיקה ומבחן" ב היא השניה בסדרת חבורות
"מתמטיקה ומבחן", והיא מלווה את ספר ב' "אשנב לאלגברה".

בחבורת זו ימצא המורה:

(i) אוסף בעיות ותרגילים להכנת מבחנים

(ii) הדרכה בהכנת מבחנים

(iii) שאלות העשרה וחקירה עצמית

תוכן העניינים:

ה ק ד מ ה	7-12
פרק אי - תבניות מספר	13-48
פרק בי - ח ז ק ו ת	49-65
פרק גי - פטוקיט ותבניות פטוק	66-101
פרק די - קבוצות	102-132

הקדמה

חוברת זו מרכזת אוסף של שאלות בנושאים הנלמדים בספר ב'. אחת ממטרותיו של אוסף שאלות זה היא, לעזור למורה לחבר מבחנים שימשו מכשיר מדידה טוב למטרות שברצונו להשיג, כמו כן, לתת דוגמאות לשאלות העטרה או שאלות אחרות שאינן מופיעות בספר אך דורשות תהליכים שכליים וחשיבתיים גבוהים. קיימים סוגים שונים של מבחנים. בדרך כלל המבחן הניתן בכיתה הוא מבחן הישגים מסכם, לכן נדון במטרתו ואופן בנייתו של מבחן זה.

מטרת המבחן

המבחן המסכם נועד להעריך הן את הישגי התלמיד הבודד והן את הישגי הכיתה כולה בתום הוראת יחידה לימודית, בהתאם למטרות שהוצבו להוראת היחידה. כדי שנוכל להעריך נכונה את הישגי התלמידים ואת השגת המטרות, רצוי שכל פריט במבחן יהיה מבוסס על אחת מהמטרות שנקבעו עם תכנון הוראת היחידה. כמו כן, המבחן צריך לפנות אל רמות החשיבה הקוגניטיביות השונות: *

*דיון רחב על רמות החשיבה השונות ניתן למצוא בספרות שלהלן:

1. Avital, S.M. and Shettleworth, S.J., Objectives for Mathematics Learning, Some Ideas for the Teacher, Bulletin No. 3, Ontario Institute for Studies in Education, 1968.
2. Bloom, B.S. (Ed.) Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals, Handbook 1. Cognitive Domain, New York: McKay 1956.
(תורגם לעברית על-ידי הטכניון, מכון טכנולוגי חינוכי, חיפה).
3. Bloom, B.S., Hastings, T. and Madaus, G., Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning, McGraw-Hill Co. N.Y., 1971.

א. ידע - טכניקה. ציטוט חומר בצורה שבה הוצג כמו: זכירת עובדות, הגדרות, משפטים, סמלים מילוליים ובלתי מילוליים, וכן חזרה על טכניקות שנלמדו.

ב. הבנה - יישום. היכולת לתרגם, לפרש ולהשתמש נכון בכללים לשם טיפול בבעיה חדשה.

נכללות כאן גם הפעולות המתמטיות של בניית דוגמאות להגדרות ומשפטים, תרגום דו-כיווני של בעיות מתמטיות, שימוש נכון בסימנים מתמטיים וכד'.

ג. אנליזה - סינתזה. הבעיות הנכללות בקטגוריות אלו הן בעיות בהן אין אלגוריתם יסיר לפתרון. בדרך כלל בעיות אלו דורשות הפשטה, מציאת תכונה כללית והוכחתה.

דרוג השאלות לפי הרמות השונות תלוי במורה ובתלמידים הנבחנו. שאלה שניתן לדרג אותה ברמת חשיבה של טכניקה בכיתה מסוימת, עשויה להיות מדורגת ברמת חשיבה של חקר בכיתה אחרת. לפעמים שאלה שנפתרה בכיתה ומופיעה במבחן תהיה עבור כיתה זו ברמת טכניקה ואותה שאלה בכיתה אחרת בה לא נפתרה ומופיעה במבחן תדורג ברמת חשיבה שונה. לכן, אנו ממליצים לכל מורה לדרג את השאלות לפי שיקול דעתו בהתאם לרמת כיתתו. חשוב שהדרוג ייעשה סמוך מאוד לשימוש בשאלות המבחן כדי שהדרוג לרמות החשיבה יהיה אוטנטי עד כמה שאפשר.

כדי להקל על המורה בבחירת השאלות העוסקות בתת הנושאים השונים בפרק, חיברנו בראשית כל פרק טבלה המסווגת את השאלות לפי תת-נושאי הפרק, כשמספר כל שאלה מופיע תחת תת-הנושא העיקרי אותו בודקת השאלה.

בדרך כלל אין זה קשה לחבר פריטי מבחן הדורשים רמה חשיבתית נמוכה כמו: ידע-טכניקה, לעומת זאת חיבור פריטי מבחן במטרה למדוד הישגיות של כושר יישום אינו קל, זה מחייב לחבר פריטים המעמידים את הנבחן בפני מצבים חדשים או בעיות חדשות עבורו, אך עדיין בהישג

יכולתו. לכן בחוברת זו אין הרבה שאלות הדורשות רמה חשיבתית נמוכה, אף על פי שיש לכלול שאלות כאלה במבחן.

תכנון המבחן

רצוי שתכנון ההוראה ייעשה בצורת טבלה של תכנים ורמות חשיבה. כלומר, בעת תכנון הוראת יחידה לימודית קובע לו המורה אילו מטרות הוא ישיג בהוראת יחידה זו. עליו לקבוע את התכנים הלימודיים ואת הרמות הקוגניטיביות המתאימות.

לדוגמא: אם המורה קובע כי בסיום הוראת הפרק "תבניות מספר", נדרשת מן התלמיד הבנת מושג התבנית וההצבה בה, הרי שהמטרה בהוראת תת-נושא זה היא הוראתו ברמה הקוגניטיבית הבנה-יישום. אם הוא קובע כי בסיום הוראת הפרק "פסוקים ותבניות פסוק" נדרשת מן התלמיד "השגת מיומנות בהצבות וקבוצות הצבה של תבניות פסוק", הרי המטרה בהוראת תת-נושא זה היא הוראתו ברמה הקוגניטיבית של ידע-טכניקה.

רצוי שתכנון המבחן יהיה גם הוא תכנון דו-מימדי (תכנים מול רמות חשיבה).

דוגמא לטבלת תכנון אפשרית למבחן לפרק "תבניות מספר" עבור כיתה מסוימת ברמה א':

מבניה לתבנית מספר	תבניות מספר תואמות	מושג התבנית וההצבה בה, קבוצת הצבה	אחוזים	תכנים לימודיים רמות קוגניטיביות
				ידע - טכניקה
	4 שאלה מספר: 2	3 שאלה מספר: 3	5 שאלה מספר: 1	
2 שאלה מספר: 7		1 שאלות מספר: 4, 5, 6		הבנה - יישום

המספרים במשבצות נותנים את סדר העדיפויות של המשבצות השונות. סדר עדיפות זה קובע את מספר השאלות מכל משבצת שניתן במבחן ו/או את המשקל היחסי של הציון על שאלות אלו מתוך כלל השאלות במבחן.

לדוגמא: משבצת המסומנת במספר 1 נמצאת בסדר העדיפות הגבוה ביותר ומשקלן היחסי של השאלות הבודקות משבצת זו הוא הגבוה ביותר במבחן. (בדוק לפי מספרי השאלות המופיעים בטבלה. השאלות והציון מופיעים במבחן שבמוד 46).

סדר העדיפות של כל משבצת נקבע לפי מידת החשיבות שיוחסה לנושאים השונים בזמן הלמידה.

יש לזכור שאין כל צורך לבחון ולמדוד את השגתן של כל המטרות שתוכננו להוראה. על-פי שיקולים משלו, יוכל המורה לבחור את המטרות בהן הינו מעונין לבחון הישגים. בתכנון המבחן עליו לקבוע מראש גם את מספר הפריטים שיקדיש במבחן לכל מטרה. הדבר ייעשה על-פי מידת ההדגשה והחשיבות שיוחסו לענין בשעת ההוראה. כלומר, את הבקיות בנושאים שנלמדו בהרחבה יש לבדוק בעזרת פריטי מבחן רבים יותר מאשר את הבקיות בנושאים שנלמדו בצמצום. כמו כן, חשוב שהמבחן יבדוק לא רק שאלות ברמות חשיבה גבוהות אלא גם שאלות ברמות חשיבה נמוכות.

מכאן:

א. יש לקבוע את מספר פריטי המבחן. קביעה זו תלויה בהיקף המבחן והחומר. לאחר קביעת מסגרת הזמן וקביעת מספר הפריטים, יש להחליט על חלוקת פריטי המבחן בכל אחת מן המשבצות שבטבלת התכנון.

ב. יש לזכור שבתכנון המבחן אין בדרך כלל אפשרות למדוד ולהעריך את המידה בה הושגה כל מטרה ומטרה שתוכננה, לכן כדאי לבדוק במבחן את מידת השגתן של מספר מטרות חשובות מתוך כלל המטרות שתוכננו להוראה עצמה.

ג. יש לבחור מדגם של פריטים תוך קביעת סדר העדיפות, כך שהמבחן ישקף את הנושאים שנלמדו ברמות החשיבה המתאימות.

ברור שבחירת פריטי המבחן היא סובייקטיבית, כי היא לוקחת בחשבון גורמים כמו: רמת הכיתה, יכולת התלמיד, הישגים לימודיים וכד'. ד. המבחן לא נועד להכשיל תלמידים אלא לעודד אותם ו/או להעריך את הישגיהם לכן רצוי לבנות מבחן הבודק לא רק פריטים ברמות חשיבה גבוהות אלא גם ברמות חשיבה נמוכות. כמו כן, יש להמנע מניסוחים שיכשילו תלמידים בינוניים.

ז. יש להחליט על צורת המבחן: מבחן פתוח, מבחן סגור או מבחן המשלב את שניהם.

מבחן פתוח: צורת המבחן הנפוצה בבתי הספר. היא מאפשרת לתלמיד לבנות ולארגן את תשובותיו בצורה חפשית.

מבחן סגור: נזכיר שלושה סוגי שאלות הנפוצים במבחן כזה:

1. שאלות נכון/לא נכון.

2. שאלות בהן לכל שאלה ניתנות כמה אפשרויות לתשובה, מהן אחת נכונה. על הנבחן לסמן את התשובה הנכונה.

3. שאלות התאמה, בהן נתונים שני טורים ועל הנבחן לחבר פריט מטור א' עם המתאים לו מטור ב'.

יש לזכור שפריטי מבחן סגורים אינם משאירים בדרך כלל מקום לפעילות יצירתית של הנבחן.

1. לצורך עידוד כדאי להתחיל את המבחן בשאלות המבטיחות הצלחה לרוב התלמידים. תלמיד המתחיל את מבחנו בפריטים קלים יתעודד עקב הרגשת הצלחה, לכן אין צורך להקפיד על סידור הפריטים במבחן על-פי סידורם בטבלת התכנון.

מבנה החוברת

החוברת בנויה פרקים פרקים, כשלכל פרק בספר הלימוד מתאים פרק בחוברת. כל פרק מחולק לחמישה חלקים:

חלק א' - מבוא - עקרונות כלליים של הפרק ונקודות להדגשה.

חלק ב' - שאלות פתוחות - אחרי כל שאלה מופיעה התשובה לשאלה. אם אין תשובה יחידה לשאלה צוין הדבר והובאו שתי תשובות אפשריות.

לחלק מן השאלות מופיעות הערות. חלקן הערות על השאלה, חלקן מפנות את תשומת הלב לאפשרות ניסוח השאלה כשאלה סגורה. כמו כן מופיעות שאלות דומות קשות יותר או קלות יותר על אותו נושא. (יש לזכור, כי לעיתים קרובות ניסוח השאלה בצורה שונה, משנה את הרמה הקוגניטיבית של השאלה ואת דרגת הקושי שלה).

חלק ג' - שאלות סגורות - הפתרון מסומן בסוגריים סביב האות שליד התשובה הנכונה.

חלק ד' - שאלות העשרה, לדיון בכיתה, לעבודת בית או שאלות המהוות אתגר לתלמידים מצטיינים. שאלות אלו קשות מדי מכדי להכלילן במבחן והתלמידים זקוקים להדרכה כדי לפתור.

חלק ה' - דוגמאות למבחנים המלווים בשיקולים השונים של עריכתם. השתדלנו לחבר מבחנים המקיפים את החומר של כל פרק ברמות חשיבה שונות בהתאם לטבלת תכנון המבחן המצורפת לכל מבחן.

הערה: השאלות הפתוחות והשאלות הסגורות שבכל פרק מתייחסות לאותם הנושאים. המורה יוכל לבחור את השאלות הנראות לו מתאימות או לשנות את ניסוח השאלות, כך שתתאמנה לצרכיו, כמו כן ניתן לשלב במבחן גם תרגילים ו/או שאלות מפרקים קודמים.

פרק א: תבניות מספר

חלק א': מבוא

פרק זה מקנה את ראשית השימוש באותיות, את הטכניקה האלגברית ואת התרגום לשפת המתמטיקה.

פישוט התבניות, מציאת קבוצת ההצבה וכן הצבה בתבנית המספר ומציאת התשובה המספרית היא טכנית בעיקרה, בעוד שעבודת התרגום דורשת הבנה, גם אם המדובר בתרגום של הוראות ושל שאלות פשוטות.

המטרות העיקריות בפרק זה הן:

1. להכיר את:

- (א) תבנית המספר כמכשיר ליצירת שמות של מספרים.
- (ב) קבוצת ההצבה כאוסף של מספרים שהצבתם בתבנית המספר נותנת שם מספר.
- (תבנית מספר היא תבנית העשויה לתת שם של מספר, עבור הצבת מספרים במקומות הריקים, אך אינה חייבת לתת שם של מספר).

2. שיקולים בהצבות:

- (א) חקירת תבניות מספר ושם המספר המתקבל בהן בהצבות השונות.
- (ב) ניחוש המספר המוצב כאשר ידועה תוצאת ההצבה (בעיקר לרמה א').

שים לב, המשחק "המרוץ הגדול" עוסק בהצבת מספרי הזזה תוך הדגשת חקירת המספר המתקבל מההצבות השונות. והמשחק "מלא את הרשת" מתרגל הצבה וניחוש המספר המוצב, כאשר ידועה תוצאת ההצבה.

- 3. תרגום מן השפה המדוברת לשפת המתמטיקה, תרגום ממלים לשמות מספרים בעזרת פעולות חשבון ותרגום לתבניות מספר, תוך תרגול מונחים יסודיים, כמו: סכום, הפרש, מכפלה ומנה וכן הפיכה ממידה למידה, (כגון: מטרים לסנטימטרים, גרם לק"ג וכד').

חומר נוסף העוסק בתרגום הוא:

- (א) "חוברת עבודה לספר א' רמה ב'" מכילה, בין היתר, טיפול בתבניות מספר כשהמטרה היא להקדים נושא זה ברמות ב'. מושג תבנית המספר ניתן בחוברת במקביל להוראת מספרי הזזה, כהכללה לסכום, מכפלה, הופכי ונגדי. כמו כן עוסקים בהצבות, בקבוצת הצבה וגם בתרגום ממלים לתבניות מספר (תרגום בשלבים הראשונים), כולל תרגום לתבניות מספר באחוזים.
- (ב) ב"חוליות I", מופיע נושא התרגום בשלבים: הכללה, בנית תבניות מספר פשוטות, ארגון התבניות בטבלאות, שאלות מכוונות וכד'. הדפים אינם דורשים עצמאות בתרגום. המטרה היא, להקנות לתלמידים את דרך העבודה בנושא. המשך הטיפול בבנית תבניות מספר נעשה במקביל לתבניות פסוק, בפרק השני של החוברת "חוליות I" וב"חוליות II". בחלק מן הכיתות, ניתן להחליף חומר זה עם התרגום המופיע בספר.

מטרות משניות:

1. הכרת האחוזים כשמות נוספים לשברים.
2. הכרת תבניות מספר של אחוזים ותרגום בעיות הקשורות באחוזים לתבניות מספר.
3. הכרת המושג תבניות מספר תואמות והשגת שליטה טכנית בשלבים הראשונים של פישוט תבניות מספר.
4. הכרת תבניות מספר בשני משתנים (כולל פישוט) ודיון בקבוצות ההצבה שלהן, בעיקר תבניות מספר "קבועות".
כגון: $\frac{a-b}{b-a}$ תבנית מספר ל (-1) כאשר $a \neq b$.
(דיון רחב ומקיף בנושא זה, מופיע ב"חוברת המלווה לספר ג'",
לכן אין להתעכב במקום זה יתר על המידה).

מטרת הטבלה שלהלן להקל על המורה בבחירת השאלות העוסקות בתת-
 הנושאים השונים בפרק. מספר כל שאלה מופיע תחת תת-הנושא העיקרי
 אותו בודקת שאלה זו.

חלק ב': שאלות פתוחות	אחוזים	מושג התבנית וההצבה בה, קבוצת הצבה	תבניות מספר תואמות	מבעיה לתבנית מספר
	1 - 7	8 - 16	17 - 20	21 - 40
חלק ג': שאלות סגורות	1 - 6	7 - 14	15 - 16	17 - 23

להלן מספר נקודות שראוי להדגישן במהלך הוראת הפרק:

1. בעזרת תבניות מספר ניתן:
 - (א) לבצע טיפול אלגברי לתיאור תופעה כללית, כמו הפיכה ממידה למידה וכד'.
 - (ב) לתת טיפול כללי ואחיד, שיש בו להקיף בעיות רבות מאותו סוג בעת ובעונה אחת.
2. שתי תבניות הן תואמות רק אם הן מקיימות את שני התנאים:
 - (א) קבוצות ההצבה שלהן שוות.
 - (ב) כל הצבה בשתי התבניות תיתן בשתייהן אותו מספר.

במקרה שקבוצות ההצבה אינן שוות, אפשר לפעמים להקטין את קבוצת ההצבה של שתי התבניות, או רק של אחת מהן, כך שבקבוצה שנבחרה הן תהיינה כן תואמות.

ומכאן, כדי להוכיח ששתי תבניות מספר אינן תואמות, די למצוא הצבה אחת, מקבוצת ההצבה של שתיהן, שבה מתקבלים מספרים שונים.

דוגמאות:

I. התבניות $x^2 + 2x + 1$ ו $(x + 1)^2$ תואמות. קבוצת ההצבה של כל אחת מהן היא כל המספרים, ובכל הצבה מקבלים משתיהן אותו מספר.

II. התבניות $x - 1$ ו $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ תואמות רק בקבוצה $\{x | x \neq -1\}$.

3. $(-a)$ מייצג מספר שלילי עבור $a > 0$, ומייצג מספר חיובי עבור $a < 0$.
(לתרגול וביסוס מתאים המשחק "המרוץ הגדול").
4. אם משתנה מסוים מופיע יותר מפעם אחת בתבנית מספר, אסור לתת למשתנה זה שני ערכים שונים באותה הצבה.
5. בתבנית אחת, גדלים שונים חייבים להיות מיוצגים על-ידי משתנים שונים. אך משתנים שונים אינם בהכרח בעלי ערכים שונים.
6. קבוצת ההצבה של תבנית מספר במשתנה אחד היא קבוצת כל המספרים שהצבתם בתבנית המספר נותנת שמות של מספרים.
קבוצת הייעוד, היא קבוצת ההצבה המתאימה לתוכן הבעיה.
לדוגמא: קבוצת ההצבה של התבנית $3x$ היא: כל המספרים.
אם התבנית $3x$ מייצגת שטחו של מלבן, שאחת מצלעותיו מיוצגת על-ידי x , הרי קבוצת ההצבה היא: כל המספרים, ואילו קבוצת הייעוד היא קבוצת המספרים החיוביים.
- שים לב, בעוד שקבוצת ההצבה של תבנית מספר, המתייחסת לתוכן המתמטי של התבנית, היא קבוצה אחת ויחידה, הרי קבוצת הייעוד אינה בהכרח קבוצת יחידה וניתן לקבוע אותה עוד לפני כתיבת התבנית.
לדוגמא: כיתה בת 40 תלמידים יצאה לטיול. x תלמידים הביאו 16 ש"ח כל אחד והיתר 18 ש"ח כל אחד. כתוב תבנית מספר לסכום הכסף שהביאה כל הכיתה.
קבוצת הייעוד יכולה להיות:
- א) $\{\text{מספרים חיוביים}\}$
 - ב) $\{\text{מספרים טבעיים}\}$
 - ג) $\{\text{מספרים טבעיים קטנים מ } 40\}$
 - ד) $\{\text{מספרים שלמים בין } 0 \text{ ל } 40 \text{ (כולל)}\}$
- התבנית: $[16x + 18(40 - x)]$ ש"ח
- קבוצת ההצבה: כל המספרים.

חלק ב': שאלות פתוחות

1. מצא את ההפרש בין המספר הגדול ביותר לבין המספר הקטן ביותר מבין הביטויים הבאים: (נסה לגלות מהו המספר הגדול ביותר ומהו המספר הקטן ביותר ללא חישובים).

5% של 300 , 30% של 300 , 85% של 300
60% של 300 , 10% של 300 , 12.5% של 300 .

תשובה: 240. כי: 5% של 300 - המספר הקטן ביותר.

85% של 300 - המספר הגדול ביותר.

ההפרש, הוא לכן, 80% של 300, וזה החישוב היחיד של מציאת האחוז שיש לערוך.

שאלה דומה, כשמדובר על אותו אחוז והמספר משתנה. כגון:

3% של 6, 3% של 30, 3% של 100, 3% של 3, 3% של 300.

כאן אפשר לדעת מיד כי הגדול (הקטן) הוא 3% מהמספר הגדול (הקטן) ביותר. תלמידים יגיעו לכך, כי את ההפרש אפשר לחשב כ 3% מהפרש המספרים הגדול והקטן.

2. תמיסת כוהל מכילה 35% כוהל נקי והשאר מים. מהי כמות המים ב 2 ליטר תמיסה?

תשובה: 1.3 ליטר.

שאלה אחרת לאותו נושא:

גבינה לבנה שמנה מכילה 9% שומן. כמה גרם שומן אתה אוכל, כשהינך אוכל 500 גרם גבינה?

תשובה: 45 גרם.

3. 40% של 300 הם $\frac{3}{10}$ של מספר אחר. מהו המספר האחר?

תשובה: 400

4

מצרך מסוים התייקר ב 6% ממחירו ההתחלתי. כעבור שנה הוזל המצרך ב 6% ממחירו החדש. מה ניתן לומר על מחירו הסופי של המצרך בהשוואה למחירו ההתחלתי?

בדוק תשובתך במקרים הבאים:

(א) מחיר המצרך 100 ש"ח. (ב) מחיר המצרך 250 ש"ח.

תשובה: המחיר הסופי נמוך מן המחיר ההתחלתי.

מחירו ההתחלתי של המוצר היה 100%. אחרי התייקרות של 6% היה מחיר המוצר 106%. ממחיר זה ניתנה הנחה של 6%. 6% של המחיר לאחר ההתייקרות (מ 106%) גדול מ 6% של המחיר ההתחלתי (מ 100%).

הסבר מתמטי לכך:

x מייצג את המחיר ההתחלתי בש"ח.

המחיר בש"ח לאחר ההתייקרות:

$$\underbrace{x}_{\text{המחיר ההתחלתי}} + \underbrace{x \cdot \frac{6}{100}}_{\text{ההתייקרות}} = \underbrace{x \cdot \frac{106}{100}}_{\text{לאחר פישוט}}$$

המחיר בש"ח לאחר ההנחה:

$$\underbrace{x \cdot \frac{106}{100}}_{\text{המחיר ההתחלתי}} - \underbrace{\frac{x \cdot 106}{100} \cdot \frac{6}{100}}_{\text{ההנחה}}$$

$$= x \cdot \frac{106}{100} \cdot \frac{94}{100} = 0.9964x < x$$

לאחר פישוט

בדיקה: המחיר הסופי של המצרך

(א) 99.64 ש"ח (ב) 249.10 ש"ח.

5. לפועל העלו את המשכורת החודשית פעמיים במשך שנה. בכל פעם העלו ב 10% מהמשכורת הקודמת. בכמה אחוזים עלתה משכורתו של הפועל?

תשובה: ב 21%.

משכורתו ההתחלתית של הפועל היתה 100%. לאחר העלאה של 10% היתה משכורתו 110%. על משכורת זו ניתנה העלאה נוספת של 10%.
10% של השכר לאחר העלאה ראשונה (שהיא 110%) גדול מ 10% של המשכורת הראשונה (שהיתה 100%).

הסבר מתמטי לכך:

x מייצג את המשכורת הראשונה של הפועל בש"ח.
המשכורת לאחר העלאה ראשונה:

$$\underbrace{x}_{\text{משכורת התחלתית}} + \underbrace{\frac{x \cdot 10}{100}}_{\text{העלאה}} = x \cdot \frac{110}{100}$$

(לאחר פישוט)

לאחר העלאה שניה:

$$\underbrace{\frac{x \cdot 110}{100}}_{\text{משכורת התחלתית}} + \underbrace{\frac{x \cdot 110}{100} \cdot \frac{10}{100}}_{\text{העלאה}} = \frac{x \cdot 121}{100}$$

(לאחר פישוט)

שאלה אחרת לאותו נושא:

במכירת סוף העונה הוזל מצרך ב 10%. בימים האחרונים של המכירה הוזל המצרך שנית ב 10% נוספים. מצא בכמה אחוזים, בסה"כ, הוזל המצרך.

תשובה: 19%.

6. משה חסר באחת מתכניות החסכון. כמה כסף היה בקופתו, אם חשבונו לאחר תוספת של 10% מענק על הסכום שחסר, הראה סכום של 385 ש"ח?

תשובה: 350 ש"ח.

7. בבית ספר 400 תלמידים. 50% מתלמידי בית הספר הם בנים. 80% מהבנים משחקים בכדורגל. כמה בנים משחקים כדורגל?

תשובה: 160 בנים.

8. כתוב את קבוצת ההצבה של כל אחת מתבניות המספר הבאות:

$$\frac{2}{|x| + 5} \quad (\text{ג})$$

$$\frac{7}{5x} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{5x}{7} \quad (\text{א})$$

$$\frac{x}{4x + 2} \quad (\text{ו})$$

$$\frac{3}{\frac{2}{3}x - 1} \quad (\text{ה})$$

$$\frac{4}{x^2 - \frac{1}{4}} \quad (\text{ד})$$

תשובה:

- (א) כל המספרים
(ב) כל המספרים פרט ל 0
(ג) כל המספרים פרט ל $\frac{1}{2}$ ו $-\frac{1}{2}$
(ד) כל המספרים פרט ל $\frac{3}{2}$
(ה) כל המספרים פרט ל $-\frac{1}{2}$
(ו) כל המספרים פרט ל $-\frac{1}{2}$

9. הצב בתבנית $-2x^2 + 2x - 1$ את המספר (-1) ומצא את המספר המתקבל.

תשובה: (-5).

שאלה אחרת לאותו נושא:

נתונה תבנית המספר: $\frac{2a + 6}{2a}$. הצב (-5) ומצא את המספר המתקבל.

תשובה: $\frac{2}{5}$.

10. נתונה תבנית המספר $\frac{3+a}{5}$. איזה מספר תציב כדי לקבל את המספר 1?

תשובה: 2.

דוגמאות לסעיפים אחרים, לאותה שאלה:

מצא אילו מספרים נציב כדי לקבל:

- (א) מספר חיובי? (ב) מספר שלילי?
(ג) מספר הגדול מ-4? (ד) מספר קטן מ-2?

תשובה:

- (א) $a > -3$ (ב) $a < -3$ (ג) $a > -23$ (ד) $a < 7$

שאלה אחרת לאותו נושא:

נתונה התבנית $\frac{10}{a-1}$. מצא מספר שאם תציב אותו בתבנית תקבל מספר בין 5 ל-10.

תשובה: כל מספר בין 2 ל-3.

11. נתונה תבנית המספר: $\frac{1}{3}a - 3$.

מה תוכל לומר על המספר שהציבו בתבנית אם המספר שהתקבל היה מספר שלם?

תשובה: כפולה של 3.

שאלה אחרת לאותו נושא:

נתונה התבנית $5a + 1$. אילו מספרים הציבו בתבנית אם המספר שהתקבל היה מספר שלם?

תשובה: מספרים שלמים, או שברים בהם המונה הוא מספר שלם והמכנה שווה ל-5.

12. סמן נכון/לא נכון. אם סימנת לא נכון, הבא דוגמא נגדית.

- (א) $a + 3$ גדול מ a עבור כל מספר שנציב ב a .
 (ב) $3 \cdot a$ גדול מ a עבור כל מספר שנציב ב a .
 (ג) $(-a)$ מייצג תמיד מספר שלילי.

תשובה:

- (א) נכון תמיד.
 (ב) לא נכון. עבור $a \leq 0$ נקבל $3a \leq a$.
 (ג) לא נכון. עבור $a \leq 0$ נקבל $-a \geq 0$.

דוגמאות לסעיפים נוספים:

- (ד) $2 \cdot a$ הוא מספר זוגי לגבי כל מספר שלם שנציב ב a .
 (ה) $\frac{1}{a}$ קטן מ a לגבי כל מספר שנציב ב a .
 (ו) מנת החילוק של כל מספר (השונה מאפס) בעצמו שווה ל 1.

תשובה:

- (ד) נכון תמיד.
 (ה) לא נכון.

עבור $0 < a \leq 1$ ו $a \leq -1$ נקבל:

$$\frac{1}{a} \geq a \quad (a \neq 0).$$

(ו) נכון תמיד.

הערה: כדאי לקיים דיונים בכיתה, שמטרתם לבדוק "נקודות" הנראות לנו די ברורות. אבל תלמידים נוטים, לעיתים קרובות לטעות בהן.

13. x מקבל רק את הערכים 2 או 4, y מקבל רק את הערכים 1 או 3.

מצא את כל הערכים האפשריים של $x + 2y$.

תשובה:

- 4, אם $x = 2$ ו $y = 1$, 8, אם $x = 2$ ו $y = 3$.
 6, אם $x = 4$ ו $y = 1$, 10, אם $x = 4$ ו $y = 3$.

14. נתונה התבנית: $\frac{-a - 3a}{2a}$

- (א) מהי קבוצת ההצבה?
 (ב) הצב בתבנית את המספרים 1, -4, 4 וחשב בכל מקרה את התוצאות.
 מה קיבלת? נמק.

תשובה:

- (א) כל המספרים פרט ל 0 (ניתן לרשום גם $a \neq 0$).
 (ב) בכל מקרה נקבל שם למספר -2.
 (לאחר פישוט נקבל $\frac{-4a}{2a}$ בו המונה הוא מכפלה של המכנה
 ב -2).

הערות:

1. מותר לצמצם, כי הגבלנו את קבוצת ההצבה ל $\{a \mid a \neq 0\}$.
2. ניתן לקיים דיון בכיתה שבו יתבקשו התלמידים למצוא מספרים שהצבתם תתן מספר חיובי (מספר שלילי, מספר גדול מ 4 וכד'), כלומר יידרשו לבצע שיקולים בהצבות.

15. אילו מספרים נקבל מתבנית המספר $\frac{y}{x}$, כאשר $4 < x < 8$, $20 < y < 40$?

תשובה: מספרים בין $2\frac{1}{2}$ ל 10.

הערות:

1. הערך הקטן ביותר עבור התבנית $\frac{y}{x}$ מתקבל אם לוקחים את הערך הקטן ביותר עבור המונה (y) ואת הגדול ביותר עבור המכנה (x). ככל שנקטיץ את המכנה ו/או נגדיל את המונה, נקבל שבר גדול יותר עד שנגיע לערך הגדול ביותר המתקבל כאשר לוקחים את הערך הגדול ביותר עבור המונה ואת הערך הקטן ביותר עבור המכנה.
2. ניסוח השאלה כשאלה סגורה ראה בחלק ג' שאלה מספר 11.

16. נתונה תבנית המספר: $x^2 + y^2$. הצב (-2) במקום x ו $\frac{1}{2}$ במקום y ומצא את המספר המתקבל.

תשובה: $4\frac{1}{4}$.

שאלה אחרת לאותו נושא:

מצא את המספר המתקבל אם תציב 3 במקום x , ו (-2) במקום y , בתבנית המספר: $\frac{4x - 3y}{2x - 5y}$.

תשובה: $\frac{9}{8}$.

17. פשט את התבניות הבאות:

(א) $0.4(4x - 5) + (1 - 0.6x)$

(ב) $14 - (2x - 3)$

(ג) $\frac{2x - 3}{2} - \frac{2 - x}{3}$

תשובה: (א) $x - 1$ (ב) $17 - 2x$ (ג) $\frac{8x - 13}{6}$

דוגמאות לסעיפים נוספים:

(א) $\frac{4}{x}(\frac{1}{2} - 2x)$

(ב) $4(3x - y - 1) - 4(2x + y + 1)$

(ג) $\frac{a - b}{a + b} - \frac{b}{a + b}$

תשובה:

(א) $\frac{2}{x} - 8$ ($x \neq 0$) (ב) $4x - 8y - 8$

(ג) $\frac{a - 2b}{a + b}$ ($a + b \neq 0$)

הערה: שים לב להערה מספר 2 ב"נקודות להדגשה" שבראש הפרק.

18. בחרתי מספר 7, הוספתי לו 3 וכפלתי את הסכום ב 2, החסרתי מן התוצאה 6, חילקתי לבסוף ב 2 וקבלתי 7. האם רק במקרה קבלתי בסוף את המספר שבחרתי? הוכח.

תשובה: לא. נסמן ב x את המספר שבחרתי. נקבל:

$$\frac{(x + 3) \cdot 2 - 6}{2} = x$$

לאחר פישוט

שאלה אחרת לאותו נושא:

בחר מספר. כפול אותו ב 3, הוסף למכפלה 5, כפול את הסכום שקיבלת ב 2, החסר מהמכפלה שש פעמים המספר שבחרת. האם קיבלת 10? הוכח.

תשובה: המספר מיוצג על ידי x , התבנית היא:

$$(3x + 5) \cdot 2 - 6x = 10$$

לאחר פישוט

19. דן הציב בתבנית המספר $|x - 2|$ את המספרים 1, 2, 3 וחישב את התוצאות. ג'ד הציב אותם המספרים בתבנית $x^2 - 4x + 4$ וחישב את התוצאות.

כשראו דן וג'ד את תוצאות ההצבה של שניהם, אמר דן: אילו הן שתי תבניות מספר תואמות. ג'ד אמר: אילו אינן תבניות מספר תואמות. מי צדק? הוכח.

תשובה: ג'ד. כל הצבה, פרט למספרים 1, 2, 3, בשתי התבניות אינה נותנת שם לאותו מספר, ומספיק להביא דוגמא אחת כדי להוכיח כי התבניות אינן תואמות.

הערה: ראה בחלק ד' שאלה מספר 3.

20. קבע מהי קבוצת ההצבה של כל תבנית ובדוק לגבי זוגות התבניות הבאות אם הן תבניות תואמות:

$$\begin{array}{ll} \text{א)} & \begin{array}{ll} \text{I. } \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{II. } x + 3 \end{array} \\ \text{ב)} & \begin{array}{ll} \text{I. } \frac{x^2 - 2x}{x} & \text{II. } \frac{x^2 - 4}{x + 2} \end{array} \\ \text{ג)} & \begin{array}{ll} \text{I. } (x + 1)(x - 1) & \text{II. } x^2 - 1 \end{array} \end{array}$$

תשובה:

א) קבוצת ההצבה: לתבנית I היא: $\{x \mid x \neq 3\}$
לתבנית II היא: $\{x \mid x = \text{כל המספרים}\}$
התבניות אינן תואמות עבור $x = 3$.

ב) קבוצת ההצבה: לתבנית I היא: $\{x \mid x \neq 0\}$
לתבנית II היא: $\{x \mid x \neq -2\}$
התבניות אינן תואמות עבור $x = 0, -2$.

ג) קבוצת ההצבה של כל אחת מהתבניות היא $\{x \mid x = \text{כל המספרים}\}$
התבניות תואמות.

הערה: שתי תבניות הן תואמות, אם קבוצות ההצבה שלהן שוות, ואם עבור כל הצבה בשתי התבניות תתן בשתייהן שם לאותו מספר. לכן זוגות התבניות שבסעיפים א' ו ב' תהיינה תואמות רק אם ניקח כקבוצת ההצבה את קבוצת ההצבה המשותפת להן. כלומר:

לסעיף א': $\{x \mid x \neq 3\}$, לסעיף ב': $\{x \mid x \neq 0, -2\}$.

21. כתוב תבנית מספר המייצגת:

- א) מכפלת הסכום של a ו b ב 5 .
ב) חצי מההפרש בין b ו d .

תשובה: א) $5(a + b)$ ב) $\frac{1}{2}(b - d)$

22. n מייצג אורכו של חבל במטרים.

כתוב תבנית מספר המייצגת את אורכו של החבל בסנטימטרים.

תשובה: $[100n]$ סנטימטרים.

שאלה אחרת לאותו נושא: (הפיכה ממידה למידה):

כתוב תבנית מספר המייצגת את המשקל בק"ג של y תפוזים אם משקל תפוז אחד 220 גרם.

תשובה: $\left[\frac{220y}{1000}\right]$ ק"ג.

23. כתוב תבנית מספר למספר הנותן שארית 5 כש מחלקים אותו ב 6.

תשובה: $5 + 6n$ עבור n שלם ולא שלילי.

שאלות אחרות לאותו נושא:

1. כתוב תבנית מספר למספרים הזוגיים.
2. כתוב תבנית מספר למספרים האיזוגיים.
3. כתוב תבנית מספר למספרים המתחלקים ב 13 ללא שארית.
4. כתוב תבנית מספר הנותנת את המספרים הדו-ספרתיים.

תשובה:

1. $2n$, n טבעי או אפס.
2. $2n - 1$, $2n$, n טבעי (או $2n + 1$, n שלם ולא שלילי).
3. $13n$, n טבעי או אפס.
4. $10x + y$, x - מספר שלם בין 1 ל 9 (כולל).
 y - מספר שלם בין 0 ל 9 (כולל).

24. כתוב תבנית מספר המייצגת את הנגדי לסכום $(-2x + 3y)$.

תשובה: $-(-2x + 3y)$ [או: $2x - 3y$].

25. מוצר התייקר ב 30%. כתוב תבנית מספר למחירו החדש של המוצר.

תשובה: המחיר ההתחלתי x ש"ח
לאחר ההתייקרות: $\frac{130x}{100}$ ש"ח (או: $1.3x$ ש"ח).

הערה: חלק מן התלמידים יכתבו $(x + \frac{30x}{100})$ ש"ח, שהיא כמובן תשובה נכונה.

שאלות אחרות לאותו נושא:

1. מוצר הוזל ב 20% ואחר כך התייקר ב 20%. כתוב תבנית מספר למחירו הסופי של המוצר.

תשובה: המחיר ההתחלתי x ש"ח.

המחיר הסופי: $\frac{x \cdot 120 \cdot 80}{100 \cdot 100}$ ש"ח (או: $0.96x$ ש"ח)

2. מצרך התייקר פעמיים בזו אחר זו. כל פעם התייקר ב 20% מהמחיר הקודם.

k מייצג את מחירו של המצרך בהתחלה.

רשום תבנית מספר המייצגת את מחירו לאחר שתי ההתייקרויות.

תשובה: $\frac{k \cdot 120 \cdot 120}{100 \cdot 100}$ ש"ח (או: $1.44k$ ש"ח)

26. בכיתה בת 30 תלמידים, p מייצג את אחוז התלמידים שהצליחו במבחן. כתוב תבנית מספר המייצגת את מספר התלמידים שהצליחו במבחן.

תשובה: $\frac{30p}{100}$. (או: $0.3p$)

סעיף אחר לאותה שאלה:

כתוב תבנית מספר המייצגת את מספר התלמידים שנכשלו במבחן.

תשובה: $[\frac{30(100 - p)}{100}]$

הערה: חלק מן התלמידים יכתבו $(30 - \frac{30 \cdot p}{100})$, גם זו תשובה נכונה.

27. בבית ספר m כיתות, בכל כיתה y תלמידים ולכל תלמיד p מחברות. מה מייצגות כל אחת מן התבניות הבאות:

(א) $m \cdot y$ (ב) $m \cdot y \cdot p$ (ג) $y \cdot p$

תשובה:

- (א) מספר התלמידים בבית הספר.
 (ב) מספר המחברות שבידי כל התלמידים בבית הספר.
 (ג) מספר המחברות בכל כיתה.

28. בתחילת השנה היו לנער p ש"ח בקופה. כל חודש הוא מוציא מקופתו x אגורות.

כמה כסף ישאר לנער לאחר n חודשים?

תשובה: $\left[p - \frac{nx}{100} \right]$ ש"ח. (או: $[100p - nx]$ אגורות).

הערה: יש לשים לב ליחידות השונות.

29. עפרון יקר ממחברת ב 25 אגורות. כתוב תבנית מספר לעודף שאקבל מ 10 ש"ח, אם אקנה שני עפרונות ושלוש מחברות.

תשובה: x מייצג מחיר מחברת באגורות.

העודף: $\left[10 - \frac{2(x + 25) + 3x}{100} \right]$ ש"ח.

30. x מייצג מחירן של 5 חוברות בש"ח. כתוב תבנית מספר המייצגת מחיר y חוברות כאלה.

תשובה: $\left[\frac{xy}{5} \right]$ ש"ח.

31. כתוב תבנית מספר למחיר ששילמתי כשקניתי 3 ק"ג תפוחים

ו 2 ק"ג אגסים כאשר:

a מייצג מחיר ק"ג תפוחים בש"ח.

b מייצג מחיר ק"ג אגסים בש"ח.

תשובה: $[3a + 2b]$ ש"ח.

32. בשעת מנוחת צהריים הודיעו למטיילים שהם עברו כבר ב 5 ק"מ

יותר ממחצית הדרך.

x מייצג את אורך הדרך כולה (בק"מ).

כתוב תבנית מספר המייצגת את אורך הדרך (בק"מ) שעליהם עוד לעבור.

תשובה: $[x - (\frac{x}{2} + 5)]$ ק"מ. (או: $[\frac{x}{2} - 5]$ ק"מ).

33. במספר דו ספרתי, k מייצג את סיפרת העשרות ו m את סיפרת

היחידות.

אם נכתוב ו מימין למספר נקבל מספר תלת סיפרתי.

כתוב תבנית מספר המייצגת את המספר התלת סיפרתי שהתקבל.

תשובה: $[100k + 10m + 1]$.

הערה: כמו כן ניתן לשאול:

כתוב תבנית מספר המייצגת את המספר התלת סיפרתי שהתקבל אם:

1. כתבו 1 (או כל סיפרה אחרת) בין סיפרת העשרות לסיפרת

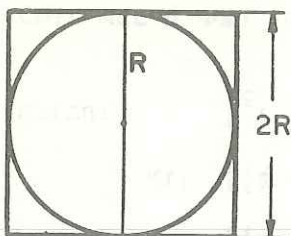
היחידות במספר הדו-סיפרתי הנתון.

2. כתבו 1 (או כל סיפרה אחרת) משמאל למספר הדו-סיפרתי הנתון.

תשובה:

1. $100k + 10 + m$. $100k + 10t + m$, אם t היא הסיפרה האחרת).

2. $100 + 10k + m$. $100t + 10k + m$, אם t היא הסיפרה האחרת).



34. מעגל בעל רדיוס R נחסם בתוך ריבוע.
כתוב תבנית מספר לשטח הריבוע.

תשובה: $[(2R)^2]$.

שים לב, צלע הריבוע שווה לקוטר המעגל.

35. מידות צלעותיו של משולש הם שלושה מספרים שלמים עוקבים.

x מייצג אורך הצלע הקטנה בסיים.

כתוב תבנית מספר המייצגת את היקף המשולש.

תשובה: $[x + (x + 1) + (x + 2)]$ סיימ. [או: $3x + 3$] סיימ.

הערה: כדי שתהיה משמעות לבעיה חייב להתקיים: $x > 0$ ו $x \neq 1$.

עבור $x = 1$ מתקבלים המספרים 1, 2, 3, ומספרים אלה

לא יכולים להיות צלעותיו של משולש.

(בכל משולש מתקיים: סכום אורכי שתי צלעות גדול

מאורך הצלע השלישית).

36. מלבן וריבוע שווים בשטחם. a מייצג את אורך צלע הריבוע (בסיים).

b מייצג את אורך אחת מצלעות המלבן (בסיים).

כתוב תבנית מספר המייצגת את אורך הצלע השנייה של המלבן (בסיים).

תשובה: $[\frac{a^2}{b}]$ סיימ (שטח הריבוע (a^2) , שווה לשטח המלבן).

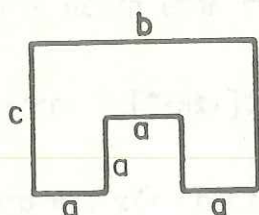
שאלה אחרת לאותו נושא:

שטחו של מלבן 33 סמ"ר. a מייצג אורך אחת מצלעות המלבן.

כתוב תבנית מספר המייצגת את היקפו (בס"מ).

תשובה: $[2(\frac{33}{a} + a)]$ ס"מ.

37. כתוב תבנית מספר המייצגת את שטח השרטוט שלפניך:

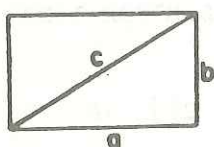


תשובה: $[bc - a^2]$.

או: $[2a^2 + b(c - a)]$

או: $[2ac + a(c - a)]$

הערה: בגלל התלות בין a ל b ($b = 3a$) ניתן להציג את השטח המבוקש במספר צורות וכולן תהיינה נכונות.

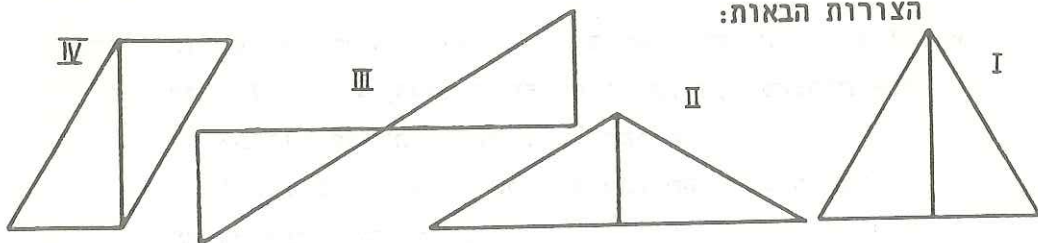


38. דן לקח מלבן, גזר אותו לאורך

האלכסון וקיבל שני משולשים.

הוא הרכיב משני המשולשים את

הצורות הבאות:



(א) כתוב תבניות מספר להיקף ולשטח כל אחת מן הצורות (כולל המלבן הנתון).

(ב) הצב $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ ומצא היקפה ושטחה של כל צורה.

תשובה:

(א) היקף המלבן: $2(a + b)$

היקף צורה II $2(a + c)$, היקף צורה III $2(a + b + c)$.

היקפי צורות I ו IV: $2(b + c)$.

שטח כל צורה: $a \cdot b$.

(ב) היקף המלבן 14 ס"מ, היקף צורה II 16 ס"מ,

היקף הצורות I ו IV 18 ס"מ, היקף צורה III 24 ס"מ.

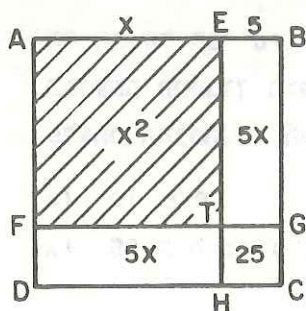
שטח כל צורה 12 סמ"ר.

39. x מייצג אורכו של ריבוע (בס"מ).

הגדילו כל אחת מצלעותיו ב 5 ס"מ ונוצר ריבוע חדש.

כתוב תבנית מספר לתוספת השטח.

תשובה: $[10x + 25]$ סמ"ר (או: $[(x + 5)^2 - x^2]$ סמ"ר).



הערה: הריבוע המקורי הוא

הריבוע AETF, (שטח המלבן FTHD) +

(שטח המלבן EBGH) +

(שטח הריבוע TGCH) שווה

לתוספת השטח המבוקשת.

40. כיתה בת 40 תלמידים יצאה לטיול. d תלמידים הביאו 18 ש"ח

כל אחד והשאר 16 ש"ח כל אחד.

כתוב תבנית מספר המייצגת את סכום הכסף שהביאו כל התלמידים.

תשובה: $[18d + 16(40 - d)]$ ש"ח.

שאלה אחרת לאותו נושא:

d מייצג את מספר התלמידים בכיתה. כל תלמיד שיצא לטיול הביא

13.5 ש"ח. שניים מתלמידי הכיתה לא יצאו לטיול.

כתוב תבנית מספר המייצגת את מספר הש"ח שאספה הכיתה לטיול.

תשובה: $[13.5(d - 2)]$ ש"ח.

חלק ג': שאלות סגורות

1. שם אחר ל 0.05 הוא:

- (א) 50% (ב) 0.05% (ג) $\frac{1}{2}\%$ (ד) 5%

2. מחירו של ספר 10 ש"ח. תלמיד קיבל הנחה של 12% מהמחיר. כשנעשה החשבון הוסיף המוכר 12% מס ערך מוסף (על המחיר שלאחר ההנחה). הקונה שילם:

- (א) 10 ש"ח (ב) יותר מ 10 ש"ח
(ג) פחות מ 10 ש"ח (ד) אי אפשר לדעת

3. לפועל העלו את המשכורת החודשית פעמיים במשך שנה, בכל פעם העלו ב 10% מהמשכורת הקודמת. במשך השנה עלתה משכורתו של הפועל:

- (א) ביותר מ 20% (ב) בפחות מ 20%
(ג) ב 20% (ד) אי אפשר לדעת

4. דן מכר שתי בובות ב 12 ש"ח כל אחת. על בובה אי הרוויח 20% ועל השניה הפסיד 20%. במכירת הצעצועים הוא:

- (א) לא הרוויח ולא הפסיד (ב) הפסיד 1 ש"ח
(ג) הרוויח 1 ש"ח (ד) הרוויח 40 אגורות

5. גידול פי 2 משמעותו גידול ב:

- (א) 100% (ב) 200% (ג) 50% (ד) 2%

שאלה אחרת לאותו נושא:

תוספת של 50% פירושה:

- (א) גידול פי $\frac{1}{2}$ (ב) גידול פי 2
(ג) גידול פי $1\frac{1}{2}$ (ד) גידול פי 50

6. כמות הגשמים בשנת תשלייה היתה גדולה ב 30% מהכמות בתשלי"ד.
כמות הגשמים בתשלייה היתה:

- (א) 30% מהכמות בתשלי"ד
(ב) 70% מהכמות בתשלי"ד
(ג) 130% מהכמות בתשלי"ד
(ד) $\frac{1}{3}$ מהכמות בתשלי"ד

7. בתבנית המספר: $\frac{2 - (-\frac{1}{2})}{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}}$ אם נציב 2 במקום a ו $-\frac{1}{2}$ במקום b נקבל:

- (א) 0
(ב) $-\frac{5}{9}$
(ג) $\frac{3}{9}$
(ד) $\frac{5}{6}$

8. אם נציב -1 בתבנית $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ נקבל:
 $\frac{(-1)^2 + 1}{(-1)^2 - 1} = 2$
(א) -2
(ב) 0
(ג) $\frac{3}{2}$
(ד) חסר משמעות

שאלה דומה לאותו נושא:

אם נציב (-8) בתבנית $\frac{9 - a}{2}$ נקבל:

- (א) $\frac{1}{2}$
(ב) $-\frac{1}{2}$
(ג) $8\frac{1}{2}$
(ד) $-8\frac{1}{2}$

9. עבור כל מספר (מתוך קבוצת ההצבה), שנציב באחת מתבניות המספר הבאות, נקבל את המספר הנגדי למספר שהצבנו. תבנית המספר היא:

- (א) $x \cdot \frac{x - 5}{x - 5}$
(ב) $x \cdot \frac{x + 5}{x - 5}$
(ג) $x \cdot \frac{x - 5}{x + 5}$
(ד) $x \cdot \frac{x - 5}{5 - x}$

10. נתונות שתי תבניות מספר:

$$4x + 4, x^2 + 8$$

סמן את המספר שהצבתו בשתי התבניות תתן אותו מספר.

- (א) 4
(ב) 5
(ג) 2
(ד) 0

11. המספרים שנקבל מתבנית המספר $\frac{y}{x}$ כאשר $4 < x < 8$ ו $20 < y < 40$, הם:

(א) בין 4 ל 10

(ב) בין 5 ל 10

(ג) בין $2\frac{1}{2}$ ל 10

(ד) בין 16 ל 32

12. לקבוצת ההצבה של תבנית המספר $\frac{a+5}{|a|-4}$ שייכים:

(א) כל המספרים

(ב) כל המספרים פרט ל 4 ו -4

(ג) כל המספרים פרט ל 4

(ד) כל המספרים פרט ל 4, -4 ו -5

שאלה אחרת לאותו נושא:

לקבוצת ההצבה של תבנית המספר $\frac{1-x}{2x+1}$ שייכים:

(א) כל המספרים

(ב) כל המספרים פרט ל $\frac{1}{2}$ ו $(-\frac{1}{2})$

(ג) כל המספרים פרט ל (-1)

(ד) כל המספרים פרט ל $(-\frac{1}{2})$

13. סמן את התבנית שקבוצת ההצבה שלה היא כל המספרים פרט ל 2 ו (-2).

(א) $\frac{x+2}{x^2+4}$

(ב) $\frac{x-2}{x^2-4}$

(ג) $\frac{x-2}{x^2-2}$

(ד) $\frac{2-x}{x+2}$

שאלה דומה לאותו נושא:

סמן את התבנית שקבוצת ההצבה שלה היא כל המספרים פרט ל 3 ו (-3).

(א) $\frac{3x}{|x|-3}$

(ב) $\frac{x+3}{|x|+3}$

(ג) $\frac{x+3}{|x|-x}$

(ד) $\frac{3+x}{x-3}$

14. סמן את התבנית שקבוצת ההצבה שלה שווה לקבוצת ההצבה של התבנית $\frac{5}{|x|-9}$.

(א) $\frac{5}{x^2-9}$

(ב) $\frac{5}{(x+9)(x-9)}$

(ג) $\frac{5}{x(x-9)}$

(ד) $\frac{5}{x(|x|-9)}$

15

נחונה תבנית המספר $a \cdot (b + c) + (a + b)$ תבנית מספר התואמת לה היא: $a \cdot b + a \cdot c + a + b$

(ב) $2a - b + c$

(א) $2a + c$

(ד) $2a + 2b + c$

(ג) $2a - c$

שאלה אחרת קלה יותר לאותו נושא:

תבנית המספר התואמת לתבנית $4 - (5a + 2) + a$ היא:

(א) $2 - 6a$ (ב) $6 - 4a$ (ג) $2 - 4a$ (ד) $21a + 8$

16

נתונות ארבע תבניות מספר:

.II $\frac{(100 + p)k}{100}$

.I $k - \frac{pk}{100}$

.IV $\frac{pk}{100}$

.III $\frac{(100 - p)k}{100}$

התבניות התואמות ביניהן הן:

(א) כולן (ב) I ו II (ג) I ו III (ד) II ו III

17

a מייצג מספר שלם וחיובי המתחלק ב 8 ללא שארית.

התבנית המייצגת מספר שיתחלק ב 8 ללא שארית היא:

(ד) $4a + 2$

(ג) $\frac{a}{4}$

(ב) $\frac{a}{2}$

(א) $a + 48$

18

תבנית המספר המייצגת סכום שני מספרים זוגיים עוקבים היא:

(ב) $2n + 2n + 1$, n טבעי

(א) $n + (n + 2)$, n טבעי

(ד) $2n + n + 2$, n טבעי

(ג) $2n + 2(n + 1)$, n טבעי

19

בקיטנה 220 ילדים. 5% מהבנים ו 10% מהבנות השתתפו בחוג

למלאכה.

x מייצג את מספר הבנות בקייטנה.

תבנית המספר $\frac{5(220 - x)}{100}$ מייצגת:

(א) אחוז הבנים בחוג למלאכה (ב) מספר הבנים בחוג למלאכה

(ג) אחוז הבנות בחוג למלאכה (ד) מספר הבנות בחוג למלאכה

20. נתונה תבנית המספר $a - 5$.

תבנית המספר שאינה מייצגת מספר נגדי לה היא:

- (א) $-(a - 5)$ (ב) $-a + 5$ (ג) $5 - a$ (ד) $a + 5$

21. k מייצג מחירו של מצרך (בש"ח).

תבנית מספר המייצגת את מחירו ש"ח לאחר שתי התייקרויות,

כל אחת של 20%, היא:

(א) $\frac{k \cdot 20 \cdot 20}{100}$ (ב) $\frac{k \cdot 120 \cdot 120}{100 \cdot 100}$

(ג) $\frac{k \cdot 20 \cdot 20}{100 \cdot 100}$ (ד) $\frac{k \cdot 120 \cdot 120}{100}$

שים לב, לאחר התייקרויות ראשונה היה מחיר המצרך $\frac{k \cdot 120}{100}$ ש"ח,

התייקרויות של 20% בפעם השניה היא מתוך המחיר שלאחר ההתייקרויות

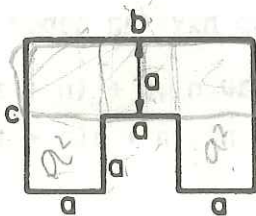
הראשונה (כלומר מתוך $\frac{k \cdot 120}{100}$), ולכן המחיר יהיה $\frac{k \cdot 120}{100} \cdot \frac{120}{100}$ ש"ח.

22. שטחו של מלבן 33 סמ"ר. a מייצג את אורך הצלע האחת של המלבן

(בס"מ). תבנית מספר המייצגת את היקפו היא:

(א) $2(\frac{33}{a} + a)$ (ב) $2(\frac{33}{2} - a)$

(ג) $\frac{33 - 2a}{2}$ (ד) $\frac{33}{a} \cdot a$



23. תבנית המספר שאינה מייצגת את

שטח הצורה שלפניך היא:

(א) $bc - a^2$ (ב) $2ac + a^2$

(ג) $ba + 2a^2$ (ד) $ac + 2a^2$

הערה: בגלל התלות בין המשתנים a , b ו c שבשרטוט

($b = 3a$ ו $c = 2a$), ניתן להציג את שטח הצורה בעזרת תבניות

מספר כשאחת האותיות, או שתיים מהן, אינה מופיעה בתבנית.

חלק ד': שאלות העשרה

1. בחר מספר בן שש ספרות כך ששלושת ספרותיו הראשונות חוזרות לפי אותו סדר בתוך המספר. לדוגמא: 528528. כל מספר כזה מתחלק בשלושת המספרים הראשונים 7, 11, 13. הסבר מדוע.

תשובה:

נסמן: x ספרות המאות, y ספרות העשרות, z ספרות היחידות. המספר בן שש הספרות יכתב כך:

$$100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z$$

$$= 100100x + 10010y + 1001z \quad \text{או:}$$

$$= 1001 \cdot (100x + 10y + z)$$

המספר 1001 מתחלק ב 7, 11 ו 13. לכן כל מספר כזה יתחלק בהם.

סעיף נוסף לאותה שאלה:

באילו מספרים יתחלק מספר שארבעת ספרותיו הראשונות חוזרות לפי אותו הסדר?

תשובה: ב 73 ו 137.

2. נתון מספר מהצורה: $k434k0$ (k מייצג סיפרה מסויימת). איזה ערך של k יתן למספר זה את האפשרות להתחלק ב 36?

תשובה: $k = 8$.

כדי שמספר יתחלק ב 36, עליו להתחלק ב 4 וב 9. מספר מתחלק ב 4, אם המספר הדו-סיפרתי שהוא שתי ספרותיו האחרונות, מתחלק ב 4.

לכן: $k = 2$, או 4, או 6, או 8.

מספר מתחלק ב 9, אם סכום ספרותיו מתחלק ב 9.

לכן: $k = 8$.

דרך אחרת להוכחה: מספר מתחלק ב 3 אם סכום ספרותיו

מתחלק ב 3 לכן: $1 + (כפולה של 3) = 2k$

מכאן 8, 5, $k = 2$ המספר היחידי שגם מתחלק ב 9

הוא זה שעבורו $k = 8$.

3. נתונות שתי תבניות מספר: I. $|x - 2|$ II. $(x - 2)^2$

(א) מצא את כל המספרים שאם נציב אותם בשתי התבניות נקבל מתבנית I אותו מספר שנקבל מתבנית II.

(ב) מצא שלושה מספרים שאם נציב אותם בשתי התבניות נקבל מתבנית I מספר גדול יותר מהמספר שיתקבל מתבנית II.

תשובה:

(א) המספרים 1, 2, 3.

המספר ששווה לריבועו הוא 0 או 1.

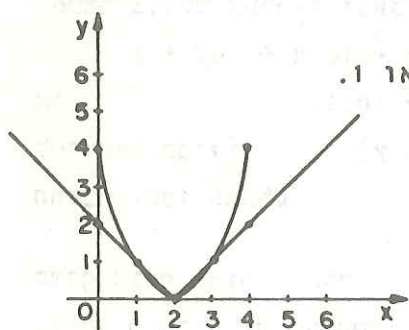
עבור $x = 2$ נקבל אפס

בשתי התבניות.

עבור $x = 1$ או $x = 3$

נקבל 1 בשתי התבניות.

ואלו הם המספרים היחידים.



הערה: הגרפים של שתי תבניות הפסוק:

$$y = |x - 2| \text{ ו } y = (x - 2)^2$$

נפגשים אך ורק בשלושת הנקודות $x = 1, 2, 3$.

שים לב, בשלב זה, רוב התלמידים לא יוכלו להיעזר בגרפים.

(ב) לדוגמא: $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, 2.6.

בצורה כללית: קבוצת כל המספרים בין 2 ל 3 $(2 < x < 3)$.

וכל המספרים בין 1 ל 2 $(1 < x < 2)$.

עבור המספרים $1 < x < 2$ ו $2 < x < 3$ הרי $0 < |x - 2| < 1$

וריבועו של כל מספר בין אפס ל 1 קטן מהמספר עצמו.

הערה: התלמידים עדיין לא יודעים למצוא את קבוצת האמת של

תבנית הפסוק $|x - 2| = (x - 2)^2$. לכן כדי להגיע לתשובות,

עליהם להציב מספרים בשתי התבניות ולחקור את המספרים המתקבלים

בהצבות השונות. תלמידים טובים יוכלו להכליל את התשובות על

סמך שיקולים וחקירה.

4. בתונות שתי תבניות מספרים: I. $x^2 - y^2$ II. $(x - y)^2$

- (א) מהי קבוצת ההצבה של כל אחת מן התבניות?
 (ב) עבור אילו זוגות של מספרים נקבל משתי התבניות שם לאותו מספר?

תשובה:

- (א) קבוצת ההצבה של כל אחת מן התבניות היא קבוצת כל הזוגות הסדורים (x, y) .
 (ב) עבור זוגות המספרים בהם $x = y$ או $y = 0$.

הערות:

1. התלמידים לא יודעים להעלות בריבוע את התבנית $(x - y)^2$ והם יגיעו לתשובה הכללית על סמך שיקולים וחקירת מספרים המתקבלים בהצבות השונות, לכך אפשר לכלול סעיף ראשון בשאלה זו בו עליהם למצוא את המספרים המתקבלים ממספר הצבות בשתי התבניות.

לדוגמא:

- (ב) חשב את המספרים המתקבלים מהצבת זוגות המספרים הבאים בכל אחת מהתבניות:

$(7, 7)$, $(-4, 6)$, $(3, 0)$, $(-5, -5)$, $(-8, 4)$, $(-6, 0)$

- (ג) עבור אילו זוגות מספרים נקבל משתי התבניות שם לאותו מספר? בדוק תשובתך.

2. תלמיד הרוצה להיות להיות משוכנע שהפתרון היחידי ל ב' הוא

$x = y$ או $y = 0$ יוכל לעבור על האפשרויות השונות ל x ו y .

(א) אם $y = 0$ מקבלים משתיהן x^2 .

(ב) אם $x = y$ מקבלים אפס בשתי התבניות.

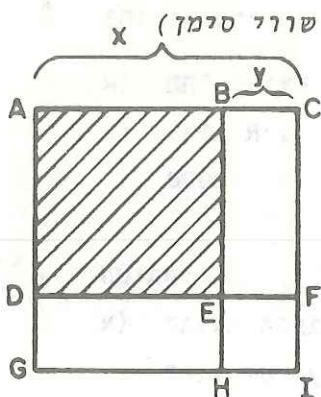
(ג) אם $(x < y$ ו $y > 0)$ או $(y > 0$ ו $x > y)$ נקבל:

$$x^2 - y^2 > (x - y)^2$$

(ד) אם $0 < y < x$ או $0 < x < y$ נקבל:

$$x^2 - y^2 < (x - y)^2$$

שים לב, כאשר המספרים שווי סימן, אם מעלים את ההפרש בריבוע, או מחשבים את הפרש הריבועים הרי הפרש הריבועים גדול יותר בגלל אפקט ההעלאה בריבוע.



דרך הוכחה מתחום הגיאומטריה: (אם x ו y שווים סימך) x
 $ACIG$ ריבוע שצלעו x ס"מ.
 $EFHI$ ריבוע שצלעו y ס"מ.
שטח הריבוע $ABED$ הוא $(x - y)^2$
שטח הצורה $ACFE$ הוא $x^2 - y^2$
המקרים היחידים בהם $x^2 - y^2 = (x - y)^2$
הם המקרים בהם $y = 0$ או $x = y$.

5.

השתמש בכל הספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (בכל סיפורה רק פעם אחת), ובפעולות חיבור (+) וכפל ($\times$), כדי לכתוב שם למספר 100.

תשובה:

- דוגמאות: (1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$
(2) $2 \cdot (3 \cdot 5 + 1 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9)$
(3) $1 + 2 + 3 + 5 + 9 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 8$
(4) $1 + 2 \cdot 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9$

6.

מצא שלושה מספרים טבעיים (לאו דווקא שונים) אשר סכום המספרים ההופכיים שלהם הוא 1.

תשובה:

- דוגמאות: 3, 3, 3, כי: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$
3, 2, 6, כי: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$
4, 4, 2, כי: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

הערה: קיימות הוכחות המראות כי אלו הן כל האפשרויות הקיימות, ראה מאמר מאת ברוקהיימר מ. "שברי היחידה בתקופת מצרים העתיקה", שבביס, תיק מס' 7, מכון ויצמן למדע.

7. (א) מצא שני מספרים שהצבתם בתבנית המספר n^2 תתן :

- | | |
|---------------------|---------------------|
| I. מספרים זוגיים | II. מספרים איזוגיים |
| III. מספרים חיוביים | IV. מספרים שליליים |
| V. אפס | |

(ב) מהי קבוצת המספרים שהצבתם בתבנית המספר $n^2 - 1$ תתן :

- | | |
|---------------------|---------------------|
| I. מספרים זוגיים | II. מספרים איזוגיים |
| III. מספרים חיוביים | IV. מספרים שליליים |
| V. אפס | |

תשובה:

- (א) I. לדוגמא: 1, 3. (בצורה כללית: כל מספר אי-זוגי).
 II. לדוגמא: 2, 4. (בצורה כללית: כל מספר זוגי).
 III. לדוגמא: 6, 4. (בצורה כללית: כל מספר גדול מ 1.
 או קטן מ 1).
 IV. לדוגמא: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. (בצורה כללית: כל המספרים בין 1 ל 1-).
 V. 1, -1.

(ב) תשובה מלאה לסעיף זה, ראה במדריך למורה של אוסף עבודות סיכום קובץ I, לעבודה "תבנית המספר n^2 ".

חלק ה': מבחן

I. השיקולים בעריכת המבחן

להוראת הפרק הוקדשו כ 25 שעות. הדגש בלימוד יחידה זו הוא על הכרת תבנית המספר כמכשיר ליצירת מספרים, על הכרת קבוצת ההצבה של תבנית מספר ועל התרגום מן השפה המדוברת לשפת המתמטיקה.

נציג להלן שני מבחנים לפרק זה, האחד לכיתה ברמה א' והשני לכיתה ברמה ב'. כיון שחשיבות הפרק רבה וכן בגלל מספרן של המטרות החשובות מתוך כלל המטרות שתוכננו להוראת פרק זה, מוצגים מבחנים בהיקף רחב יותר. לכן, הזמן המוקצב לכל אחד מן המבחנים הוא 90 דקות.

המטרות הלימודיות המוצבות להוראת היחידה הלימודית לתלמידי שתי הרמות (א ו ב) אינן שוות בדרך כלל זו לזו. ברור אם כן, שהיעדים הלימודיים אליהם מגיעים תלמידי רמה א' אינם זהים לאלו של תלמידי רמה ב'.

תכנון המבחן צריך להיות תואם את מטרות הפרק. ברמה א', דורשות המטרות בדרך כלל, רמה חשיבתית גבוהה ומורכבת יותר מאשר ברמה ב', מכאן גם שדרגת הקושי של פריטי המבחן שונה בשתי הרמות.

הבדלים אלה ניתן לראות מתוך טבלאות התכנון שלהלן:

טבלת תכנון אפשרית למבחן עבור כיתה ברמה א':

מבנה מספר	תבניות מספר תואמות	מושג התבנית וההצבה בה, קבוצת הצבה	אחוזים	תכנים לימודיים רמות קוגניטיביות
	4 שאלה מספר: 2	3 שאלה מספר: 3	5 שאלה מספר: 1	ידע - טכניקה
2 שאלה מספר: 7		1 שאלות מספר: 6, 5, 4		הבנה - יישום

טבלת תכנון אפשרית למבחן עבור כיתה ברמה ב' :

מבנה מספר	תבניות מספר תואמות	מושג התבנית וההצבה בה, קבוצת הצבה	אחוזים	תכנים לימודיים
				רמות קוגניטיביות
2 שאלה מספר: 6	3 שאלה מספר: 5	1 שאלות מספר: 4, 3, 2	4 שאלה מספר: 1	ידע - טכניקה
		5 שאלה מספר: 7		הבנה - יישום

שים לב: המספרים במשבצות נותנים את סדר העדיפויות של המשבצות השונות. סדר עדיפות זה קובע את מספר השאלות מכל משבצת שניתן במבחן ו/או את המשקל היחסי של הציון על שאלות אלו מתוך כלל השאלות במבחן. לדוגמא: משבצת המסומנת במספר 1 נמצאת בסדר העדיפות הגבוה ביותר ומשקלן היחסי של השאלות הבודקות משבצת זו הוא הגבוה ביותר במבחן. (בדוק לפי מספרי השאלות המופיעים בטבלה, השאלות והציון מופיעים במבחנים שבעמודים 46-48).

שיקולים נוספים בעריכת המבחנים:

1. נושא ההפיכה ממידה למידה חשוב, כי רבים מחברים מטרים לס"מ וכד', כאשר הם מיוצגים באותיות או בתבניות מספר.
2. אין צורך בתבניות מורכבות ובהצבת מספרים גדולים.
3. התלמידים לומדים את הנושא "תבניות מספר תואמות" ביתר הרחבה בפרק "החוברת המלווה לספר ג'". לכן, בפרק זה, מופיעות שאלות בנושא זה אך ורק ברמה הקוגניטיבית ידע-טכניקה.

II. מ.ב.ח.1 (לרמה אי')

(משך המבחן 90 דקות)

1. (10%) (א) כתוב לאחוזים הבאים שמות נוספים כשברים:

$$0.06\%, \quad 5\frac{1}{3}\%, \quad 37.5\%, \quad \frac{2}{5}\%$$

(ב) כתוב למספרים הבאים שמות נוספים כאחוזים:

$$1.01, \quad \frac{27}{40}, \quad \frac{3}{50}, \quad 0.007$$

2. (15%) פשט את תבניות המספר הבאות:

(א) $\frac{2x}{7} + \frac{4(x-1)}{3}$

(ב) $8 - \frac{12x-8}{4}$

(ג) $\frac{x(x-4)}{3} - \frac{x(x+2)}{6}$

3. (20%) (א) הצב בתבנית $-3x^2 + 1$ את המספר (-1) ומצא את המספר המתקבל.

(ב) הצב 0.8 בתבנית $\frac{6m + \frac{3m}{2}}{m-1}$ ומצא את המספר המתקבל.

4. (15%) מהי קבוצת ההצבה של כל אחת מן התבניות הבאות:

(א) $\frac{5x}{7}$ (ב) $\frac{7}{5x+1}$ (ג) $\frac{x}{|x|+2}$

(ד) $\frac{1}{(x^2-9)(|x|-9)}$ (ה) $\frac{x}{1+\frac{2}{5}x}$

5. (10%) מצא שני מספרים שהצבתם בתנית $\frac{n}{4} + 1$ תתן מספר זוגי.

6. (5%) מצא מספר שהצבתו בתבנית $\frac{2x-3}{4}$ תתן שם למספר 1.

7. (25%) כתוב תבניות מספר ל:

(א) סכום שני מספרים איזוגיים עוקבים.

- (ב) אורך החבל במטרים אם m מייצג את אורכו בסי"מ.
 (ג) אורך הדרך בק"מ שעברה מכונית שמהירותה 70 קמ"ש, אם היא נסעה 3 שעות ו 20 דקות.
 (ד) מחיר מוצר לאחר התייקרות של 12% אם x מייצג את מחירו לפני ההתייקרות.
 (ה) אורכו של חוט מתכת שחומם ב $t^{\circ}\text{C}$ אם ידוע שהוא מתארך ב 0.02% לכל תוספת טמפרטורה של 1°C ואורכו ההתחלתי היה 70 ס"מ.

מ.ב.ח.] (לרמה ב')
 (משך המבחן 90 דקות)

1. (10%) (א) כתוב לאחוזים הבאים שמות נוספים כשברים (מצומצמים):
 50% , 75% , 9% , 0.5%
 (ב) כתוב למספרים הבאים שמות נוספים כאחוזים:
 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, 0.6 , 2.5

2. (20%) מהי קבוצת ההצבה של כל אחת מתבניות המספר הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{(א)} & \frac{3x}{4} \\ \text{(ב)} & \frac{x-4}{x-6} \\ \text{(ג)} & \frac{8}{(x-1)(x+3)} \\ \text{(ד)} & \frac{5}{|x|-9} \end{array}$$

3. (10%) הצב 1, -6 בתבנית $\frac{8-a}{2}$ וחשב בכל מקרה את התוצאה.
 4. (10%) הצב -2, $\frac{1}{2}$ בתבנית $\frac{4}{a} - 2a$ וחשב בכל מקרה את התוצאה.

5. (20%) פשט את תבניות המספר הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{(א)} & 3(x+4) + 2(x-1) \\ \text{(ב)} & 10(2x+1) - 3(x-4) \\ \text{(ג)} & \frac{2x}{3} + \frac{5x}{2} \\ \text{(ד)} & \frac{3x}{4} - 5 + \frac{x}{2} + 8 \end{array}$$

25%) 6. תרגום:

(א) a מייצג אורך חבל במטרים. כתוב תבנית מספר המייצגת את אורך החבל בסנטימטרים.

(ב) b מייצג זמן בדקות. כתוב תבנית מספר המייצגת את הזמן בשעות.

(ג) x מייצג מספר. כתוב תבנית מספר המייצגת מספר הגדול ב 5 ממנו.

(ד) d מייצג מספר. כתוב תבנית מספר המייצגת מספר הקטן ב 7 ממחצית d.

(ה) y מייצג מחירה של שמלה בש"ח. השמלה התייקרה ב 15%. כתוב תבנית מספר למחיר השמלה לאחר ההתייקרות.

5%) 7. נתונה תבנית המספר x - 1.

איזה מספר תציב בה כדי לקבל שם למספר 4?

פרק ב: חזקות

חלק א': מבוא

מטרות הפרק הן:

1. לימוד פעולת ההעלאה לחזקה וחוקי החזקה.
במושג העלאה לחזקה נפגשו התלמידים בפרק על בסיסי הספירה השונים, לכן בתחילת פרק זה עובדים עם חזקות שבסיסן מספר רציונלי כלשהו ומעריכן שלם וחיובי.
 2. הרחבת מושג החזקה לשם כתיבת מספרים גדולים וקטנים בעזרת חזקות של 10, וחישובים במספרים אלה.
לכתיבת מספרים גדולים משתמשים בסידרה היסודית של בסיס עשר, לכתיבת מספרים קטנים "מרחיבים" את הסידרה היסודית של בסיס עשר, על-ידי הוספת חזקת אפס וחזקות שליליות של עשר, ומקבלים את הסידרה היסודית השלמה. כלומר, מגיעים להרחבת מושג החזקה למעריך שלם כלשהו: חיובי, שלילי או אפס.
(בהמשך הנושא ובהעמקתו יפגשו התלמידים ב"חוברת המלווה לספר ג").
 3. חישובי אומדן; חישובים אלה נעשים בעזרת סדרי גודל של מספרים - תחושה על גודלו של מספר מבלי לבצע חישובים מפורטים.
עבודה המשלבת תופעה מחיי יום עם הנושא "סדרי גודל", שנלמד בכיתה, היא העבודה "חבל על כל טיפה", מהחוברת "אוסף עבודות סיכום", קובץ III.
מטרתה של עבודה זו היא לקבל מושג של סדר גודל לגבי בזבוז המים ואין חשיבות לדיוק במקרה זה.
- מטרת הטבלה שלהלן להקל על המורה בבחירת השאלות העוסקות בתת-הנושאים השונים בפרק. מספר כל שאלה מופיע תחת הנושא העיקרי אותו בודקת שאלה זו.

ח ז ק ו ת	סדרי גודל וחישובי אומדן	
1 - 11	12 - 21	חלק ב': שאלות פתוחות
1 - 6	7 - 9	חלק ג': שאלות סגורות

הפרק מכיל שאלות הדורשות ידע ושאלות הדורשות הבנה-יישום. אין הפרק מכיל שאלות הדורשות ידע של מינוח, כלומר ידיעת ההגדרה, כגון: "נתון 2^5 , מהו בסיס החזקה?"

או: "כתוב בכתב חזקות $4 \cdot 4 \cdot 4$ ".
(יוצאים מתוך ההנחה שהתלמידים למדו זאת בעבר, למשל בסעיפים על הסידרה היסודית של הבסיסים השונים).
בכיתות חלשות מומלץ לתת במבחן שאלה אחת או שתיים כאלה.

להלן מספר נקודות שראוי להדגישן במהלך הוראת הפרק ונקודות קושי של תלמידים.

1. מתוך חוקי החזקה מגיעים למסקנה כי ההופכי של a^n הוא a^{-n} כלומר:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{לכן:}$$

2. חישובי האומדן בסדרי גודל אינם מדויקים, תיתכן בהחלט טעות בסדר גודל אחד או יותר, כשעובדים רק עם סדר הגודל של המספר ולא עם המספר עצמו.

לדוגמא: סדר הגודל של המספר $4.5 \cdot 10^8$ הוא 10^8 .
סדר הגודל של המספר $4 \cdot 10^3$ הוא 10^3 .

כשעובדים רק עם סדרי הגודל, הרי, מכפלתם נותנת מספר בסדר גודל של 10^{11} . בזמן שאילו עבדנו עם המספרים, היינו מגיעים לסדר גודל של 10^{12} . כלומר, מקבלים רק אומדן של סדר הגודל של המספר.

3. בחישובי אומדן, יתכן מאוד ששני תלמידים יגיעו לתשובות שונות ושתייהן תחשבנה כנכונות. ההדגשה היא בעיקר על דרך מציאת הפתרון.

4. רצוי מאוד להרגיל את התלמיד לחשוב לפני פתרון השאלה או התרגיל, ולהעריך את סדר גודל התשובה שיקבל.

5. בחישובים, כדאי לעודד ל"קיצורי חישובים" תוך שימוש בחוקי החזקות.

6. תלמידים רבים מתקשים בקביעה מה גדול יותר $9 \cdot 10^{-8}$ או $78 \cdot 10^{-7}$

7. פעולות כפל או חילוק הדורשות צימצום, מהוות קושי.

חלק ב': שאלות פתוחות

1. הוסף ">", "<" או "=" כך שהכתוב יהיה נכון.

$$23000 \boxed{} 2.3 \cdot 10^5 \quad (\text{ב}) \quad 95 \boxed{} 9.5 \cdot 10^3 \quad (\text{א})$$

$$102000 \boxed{} 1.02 \cdot 10^{-5} \quad (\text{ד}) \quad 60800 \boxed{} 6.08 \cdot 10^4 \quad (\text{ג})$$

$$0.000850 \boxed{} 8.5 \cdot 10^{-4} \quad (\text{ו}) \quad 0.0014 \boxed{} 1.4 \cdot 10^{-3} \quad (\text{ה})$$

$$0.32 \boxed{} 3.2 \cdot 10^2 \quad (\text{ח}) \quad 0.001060 \boxed{} 1.06 \cdot 10^{-4} \quad (\text{ז})$$

$$> (\text{ד}) \quad = (\text{ג}) \quad < (\text{ב}) \quad < (\text{א}) \quad \text{תשובה:}$$

$$< (\text{ח}) \quad > (\text{ז}) \quad = (\text{ו}) \quad = (\text{ה})$$

2. מצא את הערך של $[(5 + 2(4 - 5)^{-1})^2]$

תשובה: 9.

הערה: התרגיל הוא דוגמא של שילוב פעולות חזקה עם סדר פעולות החשבון.

3. קבע לגבי כל אחד מן המספרים הבאים אם הוא "חיובי" או "שלילי":

$$-(-3)^{17} \quad (\text{ד}) \quad -6^{12} \quad (\text{ג}) \quad 4^{-30} \quad (\text{ב}) \quad (-5)^{250} \quad (\text{א})$$

תשובה:

$$(\text{א}) \text{ חיובי} \quad (\text{ב}) \text{ חיובי} \quad (\text{ג}) \text{ שלילי} \quad (\text{ד}) \text{ חיובי}$$

4. (א) פי כמה גדול המספר $16 \cdot 3^8$ מן המספר $78 \cdot 3^4$

(ב) פי כמה קטן המספר $8 \cdot 10^{-7}$ מן המספר $74 \cdot 10^{-5}$

$$\text{תשובה:} \quad (\text{א}) \text{ פי } 2 \cdot 3^4 \quad (\text{או: פי } 162) \quad (\text{ב}) \text{ פי } 50.$$

5. חשב:

$$(א) 0.3^2 \cdot 10^2 \quad (ב) \frac{10^{-7}}{2.5 \cdot 10^{-5}}$$

$$(ג) \frac{(0.1)^8 \cdot (0.1)^6}{(0.1)^3 \cdot (0.1)^3 \cdot (0.1)^5} \quad (ד) \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$(ה) \frac{1}{2} \cdot 6^2 - \frac{1}{3} \cdot 6^3$$

תשובה:

$$(א) 9 \quad (ב) \frac{1}{250} \text{ או } 0.004 \quad (ג) 0.001 \quad (ד) 54 \quad (ה) -54$$

סעיפים אחרים לאותה שאלה:

חשב:

$$(א) 0.03 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^2 \quad (ב) \frac{3.2 \cdot 10^2}{1.6 \cdot 10^{-2}}$$

$$(ג) \frac{18^{-1}}{2 \cdot 3^{-2}} \quad (ד) \frac{7 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-5}}{2.8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}}$$

$$(ה) (-3)^4 - (-4)^3$$

$$\text{תשובה: } (א) 0.009 \quad (ב) 20000 \quad (ג) \frac{1}{4} \text{ או } 0.25$$

$$(ד) \frac{1}{100} \text{ או } 0.01 \quad (ה) 145$$

6. המרחק בין כדור הארץ והשמש הוא 150000000 ק"מ בקירוב.

בטא מרחק זה במטרים בעזרת חזקות של 10.

תשובה: $1.5 \cdot 10^{11}$ מטרים.

7. הקוטר של שביל החלב נאמד ב 100000 שנות אור. חשב את אורכו

של הקוטר בק"מ.

(מהירות האור היא 300000 ק"מ בשניה).

תשובה: $9.33 \cdot 10^{17}$ ק"מ.

8. שבלול עובר בממוצע 0.0016 מטר בשניה. מה אורך הדרך שעובר השבלול במשך 10 שעות?

תשובה: 57.6 מטרים.

שים לב: ב 10 שעות יש $3.6 \cdot 10^4$ שניות. ומהירותו הממוצעת של השבלול היא: $1.6 \cdot 10^{-3}$ מטר בשניה.
לכן השבלול יעבור דרך של: $1.6 \cdot 10^{-3} \cdot 3.6 \cdot 10^4$ מטרים.

9. אידי מים מורכבים מפרודות. נפחה של פרודה אחת הוא 0.0000000004 ממ"ק.

כמה פרודות דרושות ליצירת טיפת מים שנפחה 4 ממ"ק?

תשובה: 10^9 פרודות.

10. בשנת 1913 היה תקציבה של הסוכנות היהודית $4 \cdot 10^4$ ש"ח. תקציבה של הסוכנות לשנת 1970 היה $3.8 \cdot 10^8$ ש"ח. פי כמה גדל המספר המציין את תקציב הסוכנות במשך השנים?

תשובה: פי $9.5 \cdot 10^3$ או 10^4 בערך.

11. שטחה של אסיה הוא, בערך, 45 מליון קמ"ר. מספר תושביה נאמד ב 1500 מליון.

חשב את מספר התושבים ל 1 קמ"ר (צפיפות התושבים).

תשובה: $3.33 = \frac{1500}{45}$ תושבים לקמ"ר.

ניסוח השאלה כשאלה סגורה ראה בחלק ג' שאלה מספר 5.

12. כתוב את המספרים הבאים בכתיב חזקות וציין את סדר הגודל של כל אחד מהם:

(א) 51400000 (ב) 0.000407 (ג) 0.3

תשובה: (א) $5.14 \cdot 10^7$ סדר הגודל 10^8 .

(ב) $4.07 \cdot 10^{-4}$ סדר הגודל 10^{-4} .

(ג) $3 \cdot 10^{-1}$ סדר הגודל 10^{-1} .

סעיפים נוספים לאותה שאלה:

(א) 0.899 (ב) 0.0062 (ג) 17890000000

תשובה: (א) $8.99 \cdot 10^{-1}$ סדר הגודל 1.

(ב) $6.2 \cdot 10^{-3}$ סדר הגודל 10^{-2} .

(ג) $1.789 \cdot 10^{10}$ סדר הגודל 10^{10} .

13. חישבו ומצאו שכל הימים והאוקינוסים בעולם מכילים זהב במשקל 178500000000 ק"ג. מהו סדר הגודל של המספר?

תשובה: 10^{12} .

ניסוח השאלה כשאלה סגורה ראה בחלק ג' שאלה מספר 9.

14. שטח הימים על פני כדור הארץ הוא $3.6 \cdot 10^8$ קמ"ר. בן כמה ספרות מספר זה?

תשובה: 9 ספרות.

15. עוביה של נימת קורי עכביש הוא בערך 0.0004 מ"מ. שערת אדם עבה יותר, בערך פי 1500. מאיזה סדר גודל עובי שערת האדם?

תשובה: 10^{-1} מ"מ.

16. אמוד את מספר התפוזים בטון.

תשובה: $4 \cdot 10^5$ תפוזים בערך.

הערה: בחישובי אומדן, אין הכרח ששני תלמידים יגיעו לאותה התשובה. לדוגמא: אם נאמר, כי בק"ג תפוזים יש 4 תפוזים הרי בטון יש בערך $4 \cdot 10^5$ תפוזים, שהוא מספר מסדר גודל של 10^5 . אם נאמר כי בק"ג אחד יש 5 תפוזים הרי בטון יש בערך $5 \cdot 10^5$ תפוזים וזה מספר מסדר גודל של 10^6 .

17. אדם עולה על הר במשך 3 שעות ויורד ממנו באותה הדרך במשך שעה אחת. אמוד את גובה ההר.

תשובה: מהירותו בירידה היא פי 3 ממהירותו בעליה. אם נאמר שמהירותו בעליה $1\frac{1}{2}$ קמ"ש הרי גובה ההר $4\frac{1}{2}$ ק"מ.

18. אמוד את מספר המשבצות במחברת משובצת של 40 דף.

תשובה: נאמר כי בעמוד אחד יש כ-1100 משבצות (מימדי המחברת 14×20) לכן ב 40 דף (כלומר ב 80 עמודים) יהיו כ 88000 משבצות.

19. הערך את מספר כיכרות הלחם הנאפות בישראל במשך שנה (תן את התשובה בסדר גודל).

תשובה: יש להניח כי אדם אוכל כחצי כיכר לחם ליום. לכן יש להכפיל את סדר הגודל של חצי ממספר התושבים במדינה בסדר הגודל של מספר הימים בשנה.

20. הערך את תצרוכת החלב השנתית בישראל (תן את התשובה בסדרי גודל).

תשובה: יש להניח כי אדם שותה כ $\frac{1}{4}$ ליטר חלב ביום, לכן יש להכפיל את סדר הגודל של רבע ממספר התושבים במדינה בסדר הגודל של מספר הימים בשנה.

21. הערך את מספר התלמידים הלומדים בחטיבות הביניים בישראל (תן את התשובה בסדרי גודל).

תשובה: כאן התשובה תהיה תלויה בסביבה בה התלמיד גר.

חלק ג': שאלות סגורות

$$40 \cdot 0.002 \cdot 1000 = \quad .1$$

$$8 \cdot 10^2 \quad (\lambda) \quad 8 \cdot 10^7 \quad (\text{ב}) \quad 8 \quad (\text{א})$$

$$8 \cdot 10 \quad (\text{ה}) \quad 8 \cdot 10^3 \quad (\text{ד})$$

שאלה דומה עם חילוק:

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^3} =$$

$$7.5 \cdot 10^3 \quad (\lambda) \quad 7.5 \cdot 10^4 \quad (\text{ב}) \quad 8 \cdot 10^3 \quad (\text{א})$$

$$10^4 \quad (\text{ה}) \quad 7.5 \cdot 10^2 \quad (\text{ד})$$

$$[(-5)^2]^3 = \quad .2$$

$$(-5)^8 \quad (\lambda) \quad (-5)^5 \quad (\text{ב}) \quad (-5)^6 \quad (\text{א})$$

$$-5^6 \quad (\text{ה}) \quad (-25)^3 \quad (\text{ד})$$

שאלות דומות לאותו נושא:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \quad .1$$

$$\frac{1^6}{2^{-6}} \quad (\text{ה}) \quad \frac{1^6}{2^{-6}} \quad (\text{ד}) \quad \frac{1}{2^6} \quad (\lambda) \quad -\frac{1}{2^6} \quad (\text{ב}) \quad \frac{1}{2^{-6}} \quad (\text{א})$$

$$\frac{1}{0.2^{-1}} = \quad .2$$

$$10 \quad (\lambda) \quad \frac{2}{10} \quad (\text{ב}) \quad \frac{1}{2} \quad (\text{א})$$

$$\text{חסר משמעות} \quad (\text{ה}) \quad 5 \quad (\text{ד})$$

3.

$$= 0.000134$$

$$\begin{array}{lll} (א) & 1.34 \cdot 10^{-6} & (ב) & 1.34 \cdot 10^{-4} & (ג) & 1.34 \cdot 10^{-3} \\ (ד) & 1.34 \cdot 10^4 & (ה) & 1.34 \cdot 10^3 \end{array}$$

4.

סמן את המספר שהוא חיובי.

$$\begin{array}{lll} (א) & (-2)^{43} & (ב) & (-2)^{25} & (ג) & (-5)^{40} \\ (ד) & (-0.2)^{-15} & (ה) & (-2)^{-39} \end{array}$$

5.

שטחה של אסיה הוא בערך 45 מליון קמ"ר. מספר תושביה נאמד ב 1500 מליון. מספר התושבים ל 1 קמ"ר הוא:

$$\begin{array}{lll} (א) & 3.33 & (ב) & 3.33 \cdot 10^2 & (ג) & 6.75 \cdot 10^2 \\ (ד) & 3 \cdot 10^2 & (ה) & 3.33 \cdot 10 \end{array}$$

6.

בשנת 1965 הופקו בכווית 110 מליון טון נפט. באותה שנה הופקו בארץ 200 אלף טון נפט. כמות הנפט שהופקה בכווית היתה גדולה מכמות הנפט שהופקה בארץ פי:

$$\begin{array}{lll} (א) & 0.55 \cdot 10^{13} & (ב) & 5.5 \cdot 10^5 & (ג) & 5.5 \cdot 10^3 \\ (ד) & 5.5 \cdot 10^2 & (ה) & 2.2 \cdot 10^3 \end{array}$$

7.

בגרם אחד מימן יש 10^{23} 6.02 אטומים. מספר זה הוא בן:

$$\begin{array}{ll} (א) & \text{עשרים ושלוש ספרות} \\ (ב) & \text{עשרים וארבע ספרות} \\ (ג) & \text{עשרים ושש ספרות} \\ (ד) & \text{עשרים ספרות} \\ (ה) & \text{עשרים וחמש ספרות} \end{array}$$

8. חישבו ומצאו שכל הימים והאוקיינוסים בעולם מכילים זהב במשקל
 1785000000000 ק"ג. סדר הגודל של מספר זה הוא:

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| (א) 10^9 | (ב) 10^{11} | (ג) 10^{12} |
| (ד) 10^{13} | (ה) 10^{14} | |

9. עוביה של נימת קורי עכביש הוא בערך 0.0004 מ"מ. שערת אדם
 עבה יותר, בערך פי 1500. עובי שערת האדם היא מסדר גודל של:

- | | | |
|-------------|------------------------|-------------------------|
| (א) 1 מ"מ | (ב) $\frac{1}{10}$ מ"מ | (ג) $\frac{1}{100}$ מ"מ |
| (ד) 100 מ"מ | (ה) 10 מ"מ | |

חלק ד': שאלות העשרה

1. הוכח כי הסכום של שלוש חזקות עוקבות של 2 מתחלק ב 7.

תשובה: ניתן לגשת לתשובה ברמות שונות.

(א) בדיקת סידרה של מספרים, והסקת המסקנה הכללית.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 = 7 \quad \text{כגון:}$$

$$2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) = 14$$

$$2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^2 \cdot (1 + 2 + 2^2) = 28$$

⋮

כל אחת מן התוצאות שהתקבלה היא כפולה של 7, ולכן

הסכום מתחלק ב 7.

שים לב, יתכן שבשלב זה, עדיין אינן לחלק מן התלמידים הכלים המתאימים להוכחה המתמטית, לכן ניתן לכוון אותם להסקת מסקנה כללית על-ידי בדיקת סידרה של מספרים כבדוגמא לעיל, זה נותן גם את הרעיון לגישה הכללית (ההוכחה המתמטית).

(ב) הוכחה מתמטית:

שלוש חזקות עוקבות של 2 הן:

$$2^x, 2^{x+1}, 2^{x+2}$$

לכן סכומן יהיה:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

$$= 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2$$

$$= 2^x (1 + 2 + 2^2)$$

$$= 2^x \cdot 7$$

וזו כפולה של 7, לכן הסכום מתחלק ב 7.

סעיף נוסף לאותה שאלה:

במה יתחלק הסכום של שלוש חזקות עוקבות של:

.I ?3 .II ?4 .III ?5 .IV ?x

תשובה: .I 13 .II 21 .III 31 .IV $1 + x + x^2$

2. נתון: $y = 1 + 2^{-p}$, $x = 1 + 2^p$

אילו מבין התבניות הבאות נכונה לכל x , לכל y ולכל p ?

(א) $y = \frac{x+1}{x-1}$ (ב) $y = \frac{x+2}{x-1}$ (ג) $y = \frac{x}{x-1}$

(ד) $y = 2 - x$ (ה) $y = \frac{x-1}{x}$ (ו) $y = \frac{x^2+x}{x^2-1}$

תשובה: תבניות ג, ו.

שים לב, עד עכשיו למדו התלמידים בכיתה להציב מספרים במקום המשתנים, ואילו שאלה זו, היא דוגמא להצבת תבנית מספר במקום המשתנה. כאן יש לפשט כל אגף לחוד ולהשוות.

לדוגמא ב' א': באגף ימין:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1+2^p+1}{1+2^p-1} = \frac{2+2^p}{2^p} = 1 + \frac{2}{2^p}$$

באגף שמאל: $y = 1 + 2^{-p} = 1 + \frac{1}{2^p}$

לכן $y \neq \frac{x+1}{x-1}$

3. (א) מצא את הסיפרה האחרונה של המספר 2^{1000} . במק.
 (ב) מצא את הסיפרה האחרונה של המספר 3^{1000} . במק.
 (ג) מה יכולה להיות הסיפרה האחרונה של המספר x^{1000} , x טבעי?

תשובה:

- (א) 6, כי: $2^{1000} = (2^4)^{250}$
 $\downarrow$
 מסתיים ב 6, וכל חזקה של 6 מסתיימת ב 6.
 (ב) 1, כי: $3^{1000} = (3^4)^{250}$
 $\downarrow$
 מסתיים ב 1, וכל חזקה של 1 מסתיימת ב 1.
 (ג) 0, אם בסיס החזקה מסתיים ב 0.
 1, אם בסיס החזקה מסתיים ב 1, 3, 7, 9.
 5, אם בסיס החזקה מסתיים ב 5.
 6, אם בסיס החזקה מסתיים ב 2, 4, 6, 8.

- הערה: את מעריך החזקה x^y (x טבעי), ניתן לכתוב כ: $4n + a$.
 אם $a = 0$ נקבל 4 תוצאות אפשריות (כתשובה ב ג' שלעיל).
 אם $a = 1$ נקבל 10 תוצאות אפשריות שהם המספרים השלמים מ 0 ל 9.
 אם $a = 2$ נקבל 6 תוצאות אפשריות שהן:
 0, אם בסיס החזקה מסתיים ב 0.
 1, אם בסיס החזקה מסתיים ב 1, או 9.
 4, אם בסיס החזקה מסתיים ב 2, או 8.
 5, אם בסיס החזקה מסתיים ב 5.
 6, אם בסיס החזקה מסתיים ב 4, או 6.
 9, אם בסיס החזקה מסתיים ב 3, או 7.

אם $a = 3$ נקבל 10 תוצאות אפשריות שהם המספרים השלמים מ 0 ל 9 (לא לפי הסדר).

חלק ה': מבחן

השיקולים בעריכת המבחן

להוראת הפרק הוקדשו כ 12 שעורים.

מטרת המבחן לבדוק את מה שהושג ביחידת לימוד זו לכן תכנון המבחן תואם את המטרות שהזכרנו בראש הפרק.

טבלת תכנון אפשרית למבחן עבור כיתה ברמה א':

סדרי גודל ואומדן	חזקות	תכנים לימודיים
		רמות קוגניטיביות
4 שאלה מספר: 1	1 שאלות מספר: 2, 1	ידע - טכניקה
3 שאלות מספר: 7, 6	2 שאלות מספר: 5, 4, 3	הבנה - יישום

שים לב, המספרים במשבצות נותנים את סדר העדיפויות של המשבצות השונות. סדר עדיפות זה קובע את מספר השאלות מכל משבצת שניתן במבחן ו/או את המשקל היחסי של הציון על שאלות אלו מתוך כלל השאלות במבחן.

לדוגמא: משבצת המסומנת במספר 1 נמצאת בסדר העדיפות הגבוה ביותר, ומשקלן היחסי של השאלות הבודקות משבצת זו הוא הגבוה ביותר במבחן. (בדוק לפי מספרי השאלות המופיעים בטבלה, השאלות והציון מופיעים במבחן שבעמוד 65).

שיקולים נוספים בעריכת המבחן:

1. רצוי לכלול תרגילי חישוב בחזקות, בהתאם לרמת הכיתה, הבודקים גם ידע קודם, כגון: סדר פעולות החשבון ו/או מספרי הזזה.
2. חשוב לתת שאלות העוסקות בסדרי גודל וחישובי אומדן כדי לבדוק באיזו דרך הגיע התלמיד לתשובה.

II. ה מ ב ח נ (משר המבחן 45 דקות)

1. (20%) כתוב את המספרים הבאים בכתב חזקות וציין את סדר הגודל של כל אחד מהם:

(א) 36140000 (ב) 0.000103 (ג) 50100000000
(ד) 0.798 (ה) 0.2

2. (30%) חשב:

$$\begin{array}{ll} \text{(א)} & 0.2^3 \cdot 10^3 \\ \text{(ב)} & \frac{(0.1)^6 \cdot (0.01)^4}{(0.01)^3 \cdot (0.1)^3 \cdot (0.1)^5} \\ \text{(ג)} & \frac{2.4}{6 \cdot 10^{-2}} \\ \text{(ד)} & \frac{10^{-7}}{1.5 \cdot 10^{-5}} \\ \text{(ה)} & (-2)^3 - (-3)^2 \end{array}$$

3. (10%) הקוטר של שביל החלב נאמד ב 100000 שנות אור. חשב את אורכו של הקוטר בק"מ. (מהירות האור היא 300000 ק"מ בשניה).

4. (10%) שבלול עובר בממוצע 0.0016 מטר בשניה. כתוב בכתב חזקות את הדרך שעובר השבלול במשך 10 שעות.

5. (10%) קוטר אטום נחושת הוא $2.6 \cdot 10^{-8}$. הוכן דגם של אטום נחושת בקוטר של 5.2 ס"מ. פי כמה גדול הדגם מהאטום?

6. (10%) אמוד את מספר התלמידים הלומדים בחטיבות הביניים שבצפון, אם ישנם 40 חטיבות כאלה.

7. (10%) אמוד את מספר השניות בחיי אדם. (כתוב את התשובה בעזרת סדרי גודל).

פרק ג: כסוקים ותבניות כסוק

חלק א': מבוא

מטרות הפרק:

1. הכרת המושגים: פסוק, פסוק אמת, פסוק שקר, תבנית פסוק וקבוצת ההצבה של תבנית פסוק.
2. ביצוע פעולות על שני צדדיו של פסוק וגילוי אותן הפעולות המשאירות פסוק אמת כפסוק אמת.
3. המטרה העיקרית: "תרגום" ממלים לפסוקים ובעיקר לתבניות פסוק - בחלק מן השאלות, על התלמיד לגלות את תבניות המספר הכלולות בשאלה, את הקשרים ביניהן ולבנות את תבנית הפסוק המתאימה. יש להניח לתלמיד את הבחירה החופשית לגבי מספר המשתנים ומספר התבניות, בתנאי שלא "יאבד" חלק מן הבעיה. תרגום הדרגתי לשמות מספר, תבניות מספר, פסוקים ותבניות פסוק, ניתן כחוברת של דפי עבודה לתלמיד בחוליות I (לכיתה ז') ובחוליות II (לכיתה ח').

מטרת הטבלה שלהלן להקל על המורה בבחירת השאלות העוסקות בתת-הנושאים השונים בפרק, מספר כל שאלה מופיע תחת תת-הנושא העיקרי אותו בודקת שאלה זו.

מבטיח לתבנית פסוק	תבניות פסוק, הצבה וקבוצות הצבה	פסוקים/ מפסוק לפסוק	
16 - 31	7 - 15	1 - 6	חלק ב': שאלות פתוחות
14 - 25	6 - 13	1 - 5	חלק ג': שאלות סגורות

להלן מספר נקודות שראוי להדגישן במהלך הוראת הפרק ו/או נקודות קושי אצל תלמידים:

1. הבחנה בין שם מספר, תבנית מספר, פסוק ותבנית פסוק.
2. לאחר כתיבת תבנית פסוק של בעיה, כדאי לעודד את התלמידים לנחש את הפתרון ולבדוק אם הוא מתאים לתנאי הבעיה.
3. קבוצת הצבה של תבנית פסוק היא קבוצת המספרים שהצבתם בתבנית נותנת פסוק (אמת או שקר).
4. נושא ההפיכה ממידה למידה חשוב, כי תלמידים רבים נוטים לחבר, או להשוות מטרים לסיים, גרמים לקייג וכד', כאשר הם מיוצגים באותיות או בתבניות מספר.
5. תלמידים רבים נתקלים בקשיים במעבר מתבנית פסוק של אי-שוויון לתבנית פסוק של שוויון, אחרי הוספת אינפורמציה מסויימת. לדוגמא: "נתון אי השוויון $a > b$. כתוב תבנית פסוק חדשה אם ידוע כי a גדול ב 5 מ b ".
התשובות המתקבלות, בדרך כלל, הן: $a > b + 5$, $a + 5 > b$, $a + 5 = b$ שאינן נכונות.

חלק ב': שאלות פתוחות

1. כתוב פסוקים מתאימים בשפת המתמטיקה:

- (א) הסכום של 4 ומכפלת המספרים 2 ו 3 קטן מ 20.
 (ב) מכפלת המספרים 2 ו 7 גדולה ב 4 מ 10.

תשובה: (א) $4 + 2 \cdot 3 < 20$ (ב) $2 \cdot 7 = 10 + 4$

הערה: שים לב, סעיף ב' שבשאלה הוא דוגמא לאיזון שני צדדים של פסוק (נקודה מספר 5 ב"נקודות להדגשה").

2. שים במשבצת הריקה אחד מסימני הסדר (" $=$ ", ">", "<") כך שהפסוק יהיה פסוק אמת.

(א) $-5^4 \quad \boxed{} \quad 5^4$

(ב) $|-4 + 5| \quad \boxed{} \quad |-4| + 5$

(ג) $(-2)^3 \quad \boxed{} \quad -2^3$

(ד) $-(5 + 9) \quad \boxed{} \quad -5 - 9$

(ה) $|-7| - |-8| \quad \boxed{} \quad |(-7) - (-8)|$

(ו) $2\frac{1}{2}\% \text{ של } 15 \quad \boxed{} \quad 1$

תשובה: (א) < (ב) < (ג) = (ד) = (ה) < (ו) > .

3. ליוסי ספר ובו 120 עמודים. ביום ראשון קרא 30 עמודים וביום שני 15 עמודים. נשארו לו 75 עמודים לקריאה, כתוב פסוק מתאים.

תשובה: $75 = (30 + 15) - 120$. (או: $75 = 120 - 30 - 15$).

הערה: ניסוח השאלה כשאלה סגורה ראה בחלק ג', שאלה מספר 3.

4. סמן נכון/לא נכון. אם סימנת לא נכון הבא דוגמא נגדית.

- (א) סכום כל שני מספרים טבעיים הוא מספר טבעי.
- (ב) הפרש כל שני מספרים טבעיים הוא מספר טבעי.
- (ג) מכפלת כל שני מספרים טבעיים היא מספר טבעי.
- (ד) מנת כל שני מספרים טבעיים היא מספר טבעי.

תשובה: (א), (ג) נכונים (פסוקי אמת).

(ב) $a - b$ אינו מספר טבעי לכל a ו b טבעיים.

כלומר, הטענה אינה נכונה (פסוק שקר).

(ד) $\frac{a}{b}$ אינו מספר טבעי לכל a ו b טבעיים,

כלומר הטענה אינה נכונה (פסוק שקר).

הערות:

1. שים לב, הטענות (א) עד (ד) שבשאלה זו הן בעצם כללים או פסוקי לכל. הטענה נכונה, כלומר, הכלל נכון, (הפסוק הוא פסוק אמת), אם היא מתקיימת לכל המקרים.
הטענה אינה נכונה, כלומר, הכלל אינו נכון, (הפסוק הוא פסוק שקר), אם אפשר למצוא דוגמא אחת לפחות שאינה מקיימת את הכלל.
שים לב, על שאלה זו כדאי לדבר באופן אינטואיטיבי כטענה או ככלל, אין לתת בשלב זה את המושג הלוגי של "פסוק לכל".
2. כדאי לקיים דיון בכיתה שבו יתבקשו התלמידים לכתוב את הטענה הנכונה לפסוק ב' ואז התשובה תהיה:
לכל a ו b טבעיים, $a - b$ טבעי אם $a > b$.
 $a - b$ שלילי אם $a < b$.
 $a - b$ אפס אם $a = b$.
3. שאלות דומות ניתן לשאול ביחס ל:
(1) מספרים שלמים - ואז רק סעיף ד לא נכון, כאשר המחלק שווה לאפס או שנוצר שבר.
(2) מספרים שליליים - ואז ב, ג, ד לא נכונים.
דוגמאות נגדיות לכך: $(-5, -4)$, $(-2, -2)$.

5. יצחק קנה בחנות 24 גולות. 10 זולות והשאר יקרות. מחיר גולה זולה 8 אגורות ומחיר גולה יקרה 15 אגורות. יום אחד נתן יצחק לחברו 5 גולות יקרות וקיבל תמורתן 8 גולות זולות. כתוב פסוקים מתמטיים לטענות הבאות ובדוק אמיתותם.

- (א) יצחק שילם עבור הגולות 3 ש"ח.
 (ב) יצחק הפסיד בעסקה עם חברו.
 (ג) מחיר הגולות שבידי יצחק לאחר ההחלפה נמוך מ 2.8 ש"ח

תשובה: (א) $10 \cdot 8 + 14 \cdot 15 = 300$ - פסוק שקר.
 (ב) $5 \cdot 15 > 8 \cdot 8$ - פסוק אמת.
 (ג) $(14-5) \cdot 15 + (10+8) \cdot 8 < 280$ - פסוק אמת.

6. מחיר כסא 18 ש"ח ומחיר שולחן 60 ש"ח. לאחר התייקרות של 25% במחירי הכסאות ו 15% במחירי השולחנות, שילמנו עבור שולחן אחד וששה כסאות סכום של 2040 ש"ח. כתוב פסוק מתאים.

תשובה: $18 \cdot \frac{125}{100} \cdot 6 + 60 \cdot \frac{115}{100} = 204$

7. סמן אמת/שקר, ליד כל אחת מן הטענות שלפניך. נמקו

- (א) $5x^2 - 4 = 1$, כאשר $x = -1$.
 (ב) $|x + y| = |x| + |y|$, כאשר $x = 2$ ו $y = -2$

תשובה: (א) אמת.
 (ב) שקר. כי: $|2 + (-2)| = 0$, $|2| + |-2| = 4$

הערה: הרחבה נוספת לסעיף ב' שבשאלה, ראה בחלק ד' שאלה מס' 4.

8. כתוב כל ביטוי במקום המתאים לו בטבלה:

$$\frac{4}{|(-3)-(-6)|}, (-2, -2), 5a > 7, 7 \cdot (-2), (2, -6), \frac{x+y}{2}$$

$$2a - 2, 3 \cdot 4 \frac{1}{2} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{1}{2}, 2x - 3 = 5, -4 \cdot 2 > 1$$

שם מספר	תבנית מספר	פסוק	תבנית פסוק	זוג סדור

תשובה:

שם מספר	תבנית מספר	פסוק	תבנית פסוק	זוג סדור
$7 \cdot (-2)$	$\frac{x+y}{2}$	$3 \cdot 4 \frac{1}{2} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{1}{2}$	$5a > 7$	$(2, -6)$
$\frac{4}{ (-3)-(-6) }$	$2a - 2$	$-4 \cdot 2 > 1$	$2x - 3 = 5$	$(-2, -2)$

9. נתונה תבנית הפסוק: $\frac{a+b}{a-b} = 0$

- (א) מהי קבוצת ההצבה?
 (ב) כאשר $a = -5$, $b = 5$ נקבל פסוק אמת/פסוק שקר.
 מחק את המיותר.
 (ג) מצא שלושה זוגות מספרים שעבורם נקבל מהתבנית פסוק אמת.
 (ד) מהי קבוצת כל זוגות המספרים שעבורם נקבל פסוק אמת? נמקד

תשובה: (א) כל הזוגות הסדורים (a, b) כך ש $a \neq b$.

(ב) פסוק אמת.

(ג) $(6, -6)$, $(-3, 3)$, $(1, -1)$.

(ד) קבוצת כל הזוגות הסדורים (a, b) כך ש $a = -b \neq 0$

(או $a + b = 0$, $a, b \neq 0$)

שים לב: שבר שווה לאפס רק אם המונה שלו שווה לאפס.

10. א) לכל אחת מן התבניות הבאות, מצא שני זוגות של מספרים

שהצבתם בתבניות הפסוק תתן פסוקי אמת.

$$I. (a + b)^2 = a^2 + b^2 \quad II. a^2 - b^2 = b^2 - a^2$$

$$III. a^2 + b^2 = b^2 + a^2 \quad IV. (a - b)^2 = (b - a)^2$$

ב*) באילו מבין התבניות שלעיל, נקבל פסוק אמת, לכל הצבה של מספרים במקום a ו b ?

תשובה:

$$א) \quad I. (0, 3), (5, 0) \quad II. (3, 3), (5, -5)$$

$$III. (2, 1), (5, -7) \quad IV. (2, 1), (5, -7)$$

$$ב) \quad \text{בתבניות } a^2 + b^2 = b^2 + a^2 \text{ ו } (a - b)^2 = (b - a)^2$$

הערות:

1. רוב התלמידים אינם יודעים עדיין להעלות בריבוע תבניות

מן הצורה $(a + b)^2$, פשוט מסוג זה ילמדו בשלב מאוחר

יותר ב"חוברת מלווה לספר ג'."

2. יתכן וחלק מן התלמידים בכיתה יתקשו לענות על סעיף ב'

שבשאלה, סעיף זה מיועד יותר לתלמידים ה"טובים" שבכיתה,

היכולים להגיע להכללות, ויכולים לנמק תשובותיהם על סמך

שיקולים שונים. לדוגמא:

$$\text{בתבנית I: } (a + b)^2 = a^2 + b^2$$

אם a ו b שווי סימן הרי $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ בגלל אפקט

ההעלאה בריבוע.

אם a ו b שוני סימן ($a > 0$ ו $b < 0$ או $a < 0$ ו $b > 0$)

הרי התבנית $a + b$ מייצגת את הפרש שני המספרים, ומתקבל

מספר שערכו המספרי קטן מהערכים המספריים של a או של b ,

$$\text{ולכן } (a + b)^2 < a^2 + b^2.$$

אם $a = 0$ ו $b \neq 0$ נקבל b^2 בשני האגפים $\Leftarrow$ פסוק אמת.

אם $a \neq 0$ ו $b = 0$ נקבל a^2 בשני האגפים $\Leftarrow$ פסוק אמת.

אם $a = 0$ ו $b = 0$ נקבל אפס בשני האגפים $\Leftarrow$ פסוק אמת.

ומכאן, נקבל מן התבנית שלעיל פסוק אמת, רק עבור הזוגות

בהם $a = 0$ או $b = 0$.

$$\text{בתבנית II: } a^2 - b^2 = b^2 - a^2.$$

$$\text{לכל } a \text{ ולכל } b \text{ קיים } a^2 \geq 0 \text{ ו } b^2 \geq 0.$$

תבניות המספר $a^2 - b^2$ ו $b^2 - a^2$ מייצגות מספרים נגדיים זה לזה.

שני מספרים נגדיים שווים זה לזה רק אם הם שווים לאפס.
כלומר: $a^2 - b^2 = 0 \iff a^2 = b^2 \iff a = b \text{ או } a = -b$.
ומכאן, נקבל מן התבנית שלעיל פסוק אמת רק עבור הזוגות בהם $a = b$ או $a = -b$.

$$\text{בתבנית III: } a^2 + b^2 = b^2 + a^2$$

לכל הצבה של מספרים במקום a ו b נקבל פסוק אמת, בגלל קיום חוק החילוף בחיבור.

$$\text{בתבנית IV: } (a - b)^2 = (b - a)^2$$

תבניות המספר $a - b$ ו $b - a$ מייצגות מספרים נגדיים זה לזה, לכל a ו b .

לכל זוג מספרים נגדיים x ו $-x$ קיים: $x^2 = (-x)^2$.
לכן נקבל פסוק אמת לכל זוגות המספרים (a, b) .

11. בכל אחת מתבניות הפסוק הבאות, הצב 4 וקבע אם הפסוק שהתקבל הוא פסוק אמת או שקר.

$$\text{(א) } \frac{-3a + (-8)}{5} = a \quad \text{(ב) } \frac{a^2 - 8}{-2} = a$$

$$\text{(ג) } \frac{-5a + a}{-a} = a \quad \text{(ד) } 6a - 2a = 4a$$

$$\text{(ה) } \frac{a^2 - 3a}{a - 3} = a$$

תשובה:

(א) שקר (ב) שקר (ג) אמת (ד) אמת (ה) אמת

הערה: כדאי לבקש מן התלמידים לבדוק האם ישנם מספרים נוספים שעבורם תבניות ג, ד, ה נותנים פסוקי אמת, ואז יוכלו "לעמוד" על ההבדלים בין תבניות אלה.

למשל: בתבנית ג' מתקבל פסוק אמת רק אם מציבים 4 ואילו בתבניות ד' ו ה' בכל הצבה מקבוצת ההצבה מקבלים פסוק אמת.

12. רשום את קבוצת ההצבה של כל אחת מתבניות הפסוק הבאות:

$$(א) \quad \frac{1 + 3x}{1 - 2x} > 0 \quad (ב) \quad \frac{1}{a-1} + \frac{1}{1-a} = 2$$

$$(ג) \quad \frac{m+2}{m^2-1} > \frac{1}{3+m} \quad (ד) \quad \frac{y-4}{y(y^2-49)} = 3$$

תשובה: (א) כל המספרים פרט ל $\frac{1}{2}$.

(ב) כל המספרים פרט ל 1.

(ג) כל המספרים פרט ל 1, -1 ו -3.

(ד) כל המספרים פרט ל 0, 7 ו -7.

דוגמאות לסעיפים נוספים:

$$(א) \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} > 0 \quad (ב) \quad \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

תשובה: (א) $x \neq 0, 1$ (ב) $x \neq 0, 1, -1$

שאלה אחרת לאותו נושא:

נתונות שלוש תבניות פסוק:

$$I. \quad \frac{1}{x-1} > 0 \quad II. \quad \frac{1}{x^2-1} > 0 \quad III. \quad \frac{1}{|x|-1} > 0$$

לאילו מהן אותה קבוצת הצבה?

תשובה: לתבניות II ו III.

קבוצת ההצבה שלהן היא: כל המספרים פרט ל 1 ו -1.

13. אילו ערכים מספריים יכול לקבל a כך שתבנית הפסוק $a + b < b$, תהפוך לפסוק אמת לכל b?

תשובה: $a < 0$.

הערה: התלמיד יכול להעזר בציר המספרים, כי הגדלה של מספר כלשהו (b) פרושה שמוסיפים ל b מספר חיובי - מקביל לתנועה מימנה על ציר המספרים. הקטנה של המספר (b) פרושה שמוסיפים ל b מספר שלילי, או מחסירים ממנו מספר חיובי - מקביל לתנועה שמאלה על ציר המספרים.

14. הצב בתבנית הפסוק $\frac{2a-1}{2} > 0$ את המספרים $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, -0.4 , וקבע בכל מקרה אם קבלת פסוק אמת או פסוק שקר.

תשובה:

$$\text{פסוק שקר} \quad \frac{2 \cdot \frac{1}{3} - 1}{2} > 0$$

$$\text{פסוק אמת} \quad \frac{2 \cdot \frac{1}{4} - 1}{2} > 0$$

$$\text{פסוק שקר} \quad \frac{2(-0.4) - 1}{2} > 0$$

שאלה אחרת לאותו נושא: נתונה תבנית הפסוק: $\frac{-4x + x^2}{4 - x} > 0$.
הצב את המספר (-4) . האם קיבלת פסוק אמת או שקר?

$$\text{תשובה: פסוק אמת.} \quad \frac{-4 \cdot (-4) + (-4)^2}{4 - (-4)} = 4 > 0$$

הערה: כדאי לנסות להכליל בכל מקום שאפשר, כלומר, לבקש מן התלמידים "הטובים" בכיתה למצוא את קבוצת המספרים שעבורם נקבל פסוק אמת לכל x ואז לגבי התבנית $\frac{2a-1}{2} > 0$ נקבל פסוק אמת עבור $a > \frac{1}{2}$. כי, מנה של שני מספרים היא חיובית, אם שני המספרים חיוביים או שניהם שליליים, כיון שהמכנה חיובי ($= 2$), חייב גם המונה להיות חיובי, כלומר $2a - 1 > 0$.

וזה מתקיים רק עבור $a > \frac{1}{2}$.

$$\text{לגבי התבנית} \quad \frac{-4x + x^2}{4 - x} > 0$$

ניתן, לאחר שימוש בחוק הפילוג, לרשום אותה, בצורה

$$\frac{-x(4-x)}{4-x} > 0. \quad \text{קבוצת ההצבה היא } \{x \mid x \neq 4\}, \text{ לכן ניתן}$$

לצמצם ולקבל תבנית פסוק שקולה לה והיא $-x > 0$. מכאן,

המספרים שעבורם נקבל פסוק אמת מתבנית זו הם, המספרים השליליים,

כלומר, $x < 0$.

15. מצא מספר שלם שיהפוך את תבנית הפסוק $5 < a + 3 < 10$ לפסוק אמת.

תשובה: ישנם ארבעה מספרים כאלה והם: 3, 4, 5, 6.

הערה: מציאת המספר היא בדרך הניחוש.

אפשר גם לערוך שיקולים כלליים,

למשל: את $a + 3 < 10$ מקיימים המספרים השלמים הקטנים מ 7.

את $5 < a + 3$ מקיימים המספרים השלמים הגדולים מ 2.

ומכאן המספרים השלמים הקטנים מ 7 וגדולים מ 2 הם: 3, 4, 5, 6.

16. x מייצג מספר שלם.

(א) רשום תבנית מספר המייצגת רבע המספר העוקב.

(ב) ידוע כי שליש המספר גדול ב 1 מרבע המספר העוקב. רשום

תבנית פסוק מתאימה.

$$\text{תשובה: (א) } \frac{x+1}{4} \quad \text{(ב) } \frac{x}{3} = \frac{x+1}{4} + 1$$

הערות:

1. כדאי לעודד את התלמידים למצוא את הפתרון. אם התלמידים

לא מצליחים, כדאי להדריך אותם לצורה בה ניתן להגיע לפתרון.

במקרה זה ברור כי x צריך להיות כפולה של 3 והעוקב לו

כפולה של 4. בניסוח אחר, ההפרש בין שליש המספר לרבע

אותו מספר שווה ל $1\frac{1}{4}$.

כלומר, $\frac{1}{12}$ מהמספר שווה ל $\frac{5}{4}$ לכן התשובה היא: $x = 15$.

2. ראה בחלק ד' שאלה מספר 2.

17. ילד בחר מספר, הוסיף לו 4 וכפל את הסכום ב 2. המספר שהתקבל

גדול ב 7 מהמספר שבחר. רשום תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: x מייצג את המספר שנבחר.

התבנית: $2(x + 4) = x + 7$

(הפתרון: $x = -1$)

18. כאשר a מייצג מספר אחד ו b מייצג מספר שני יהיה סכום שני המספרים גדול ב 6 מהפרשם. רשום תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $a + b = a - b + 6$.

(הפתרון: $b = 3$, כל מספר a).

19. (א) כתוב תבנית מספר היוצרת מספרים תלת-ספרתיים.
 (ב) בין סיפרת העשרות ובין סיפרת המאות בתבנית המספר שב א', הכניסו 0 וקיבלו תבנית למספר ארבע סיפרתי. כתוב תבנית מספר זו.
 (ג) מחקו את סיפרת היחידות מתבנית המספר שב א', וקיבלו תבנית למספר דו סיפרתי. כתוב תבנית מספר זו.
 (ד) סכום שני המספרים המיוצגים על-ידי התבניות ב ב' וב ג' שווה ל 3091. כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: a - סיפרת המאות, b - סיפרת העשרות, c - סיפרת היחידות.
 a מספר שלם בין 0 ל 9 (כולל),
 b ו c מספרים שלמים בין 0 ל 9 (כולל).

(א) $100a + 10b + c$

(ב) $1000a + 10b + c$

(ג) $10a + b$

(ד) $1000a + 10b + c + 10a + b = 3091$

המספר המקיים את תנאי השאלה הוא 356 ($a = 3$, $b = 5$, $c = 6$).

20. בחדר אחד m אנשים, בחדר שני פי שניים. אם יעברו 5 אנשים מהחדר השני לראשון יהיה מספר האנשים בשני החדרים שווה. רשום תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $2m - 5 = m + 5$ (הפתרון: $m = 10$).

21. למשה ספר ובו 240 עמודים, הוא קורא 22 עמודים ביום.
 לדן ספר ובו 280 עמודים, הוא קורא 26 עמודים ביום.
 כעבור x ימים ישארו להם אותו מספר עמודים לקריאה.
 כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $240 - 22x = 280 - 26x$. (הפתרון: $x = 10$).

22. a מייצג את מספר הבולים של יוסי.
 $\frac{1}{3}$ מבוליו הם בולי ישראל, $\frac{1}{5}$ מבוליו הם בולים מאנגליה.
 מספר הבולים מישראל גדול ב 20 ממספר הבולים מאנגליה.
 כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $\frac{1}{3}a = \frac{1}{5}a + 20$ (הפתרון: $a = 150$)

23. משקל משאית ריקה x טונות ו t קייג. כשהעמיסו עליה y טונות
 היה משקלה m טונות. כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $x + \frac{t}{1000} + y = m$

הערה: יש לשים לב, לחבר רק יחידות שוות.

24. ריבוע ומשולש שווה צלעות שווים בהיקפם. צלע הריבוע קטנה
 ב 2 סיימ מצלע המשולש.

k מייצג אורך צלע המשולש בסיימ. כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $3k = 4(k - 2)$. (הפתרון: $k = 8$)

הערה: ניסוח השאלה כשאלה סגורה ראה בחלק ג' שאלה מספר 20.

25. x מייצג מחיר חוברת עבודה בש"ח.

y מייצג מחיר ספר לימוד בש"ח.

מחירים של שני ספרים גדול ב 5 ש"ח ממחירן של שלוש חוברות עבודה.

כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $2y = 3x + 5$

26. סוחר קנה סחורה ב x ש"ח, מכר אותה ב y ש"ח והרוויח בכך

יותר מ 18%.

כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $\frac{(y - x) \cdot 100}{x} > 18$

רווח הסוחר: בש"ח : $(y - x)$, באחוזים: $\frac{(y - x) \cdot 100}{x}$.

שאלות אחרות לאותו נושא:

1. מצרך שעלה 25 ש"ח התייקר ומחירו עתה 32 ש"ח. p מייצג את אחוז ההתייקרות. כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $\frac{25(100 + p)}{100} = 32$ [או: $p = \frac{7 \cdot 100}{25}$]

(הפתרון: $p = 28\%$)

2. מצרך שמחירו 60 ש"ח הוזל במכירת סוף העונה ומחירו החדש היה 48 ש"ח. p מייצג את אחוז ההוזלה, כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $\frac{60(100 - p)}{100} = 48$ [או: $p = \frac{12 \cdot 100}{60}$]

(הפתרון: $p = 20\%$)

27. נער רכב על אופניים במהירות ממוצעת של 14 קמ"ש ועבר 35 ק"מ.

מה מייצג t בתבנית הפסוק $14t = 35$?

חשובה: זמן הרכיבה של הנער בשעות. (הפתרון: $t = 2\frac{1}{2}$).

28. דן יצא רכוב על אופניו מישוב אי לכיוון ישוב בי במהירות

של 16 קמ"ש. כעבור $\frac{1}{2}$ שעה יצא יוסי מישוב בי רכוב על אופניו לכיוון ישוב אי, במהירות 14 קמ"ש.

y מייצג את זמן הרכיבה של דן.

(א) רשום תבנית מספר לזמן הרכיבה של יוסי.

(ב) רשום תבניות מספר למרחקים שעברו דן ויוסי.

(ג) המרחק בין שני הישובים 38 ק"מ. דן ויוסי נפגשו בין

הישובים. רשום תבנית פסוק מתאימה.

חשובה: (א) $(y - \frac{1}{2})$ שעות.

(ב) המרחק שעבר דן $(16y)$ ק"מ.

המרחק שעבר יוסי $[14(y - \frac{1}{2})]$ ק"מ.

(ג) $16y + 14(y - \frac{1}{2}) = 38$. (הפתרון: $y = 1\frac{1}{2}$).

29. מכונית נסעה במשך 7 שעות.

y מייצג את הזמן (בשעות) בו נסעה המכונית במהירות של

80 קמ"ש. בזמן הנותר נסעה המכונית במהירות 65 קמ"ש.

(א) כתוב תבנית מספר המייצגת את המרחק שעברה המכונית במהירות 80 קמ"ש.

(ב) כתוב תבנית מספר המייצגת את המרחק שעברה המכונית במהירות 65 קמ"ש.

(ג) המכונית עברה יותר מ 500 ק"מ. כתוב תבנית פסוק מתאימה.

חשובה: (א) $(80y)$ ק"מ.

(ב) $[65(7 - y)]$ ק"מ.

(ג) $80y + 65(7 - y) > 500$. (הפתרון: $7 \geq y > 3$).

30. מתפרה הגדילה תפוקתה וייצרה בחודש מסויים ב 15% יותר מבחודש הקודם.

בשני החודשים יחד ייצרה 645 שמלות.
 k מייצג את כמות השמלות שנתפרו בחודש הראשון.
 כתוב תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $k + \frac{15k}{100} = 645$. (הפתרון: $k = 300$).

ניסוח השאלה כשאלה סגורה ראה בחלק ג' שאלה מספר 24.

31. גילה של רותי הוא $\frac{2}{7}$ מגיל אמא ו $\frac{1}{4}$ מגיל אביה.
 ההפרש בין גיל האב לגיל האם הוא 5 שנים.
 d מייצג את גילה של רותי.
 רשום תבנית פסוק מתאימה.

תשובה: $4d - \frac{7}{2}d = 5$. (הפתרון: $d = 10$).

חלק ג': שאלות סגורות

1. אחד מבין הביטויים הבאים איננו פסוק, סמן אותו.

(א) $(-5)^2 \neq 25$ (ב) $-(-17) = 17$

(ג) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3} < 1$ (ד) $0.47 + |-120|$

(ה) $\frac{(-3 + 5) \cdot 7}{2} > 0$

2. הסכום של 4 ומכפלת המספרים 2 ב 3 קטן מ 20.

פסוק זה בשפת המתמטיקה הוא:

(א) $4 + 2 \cdot 3 > 20$ (ב) $4 + 2 \cdot 3 < 20$

(ג) $4 + 2 \cdot 3 = 20$ (ד) $4 \cdot (2 + 3) < 20$

(ה) $4 \cdot 2 \cdot 3 < 20$

3. ליוסי ספר ובו 120 עמודים. ביום הראשון קרא 30 עמודים

וביום השני 15 עמודים. נשאר לו 75 עמודים לקריאה.

הפסוק המתאים הוא:

(א) $120 - (30 + 15) = 75$ (ב) $120 - 30 + 15 = 75$

(ג) $120 + 30 + 15 = 75$ (ד) $120 + (30 - 15) = 75$

(ה) $120 + 30 - 15 = 75$

4. רק אחד מבין הפסוקים הבאים הוא פסוק אמת. סמן אותו.

(א) $7 - 4 < 4 - 7$ (ב) $|-1| + |-4| + |-3| = 4 \cdot 2$

(ג) $\frac{8 \cdot 8 - 8}{8} = 1$ (ד) $\frac{8 \cdot 8 - 8}{8} = 0$

(ה) $(-5) \cdot (8 + 10) > (-5) \cdot 8 + (-5) \cdot 10$

5. נתון פסוק אי שוויון $1 < -2$ שהוא פסוק אמת.
לאחר ביצוע אחת מהפעולות הבאות על שני הצדדים המקבל פסוק שקר. סמן פעולה זו.
- (א) חיבור 0 לשני הצדדים. (ב) כפל שני הצדדים ב 0.
(ג) חיבור 2 לשני הצדדים. (ד) כפל שני הצדדים ב 2.
(ה) חיבור -2 לשני הצדדים.

6. נתונה תבנית הפסוק $\frac{-4x + x^2}{4 - x} > 0$.
- אם תציב במקום x את המספר (-4) תקבל:
- (א) ביטוי חסר משמעות (ב) שם מספר
(ג) תבנית פסוק (ד) תבנית מספר
(ה) פסוק

7. סמן את המספר שהצבתו בתבנית הפסוק $\frac{1 + 3x}{1 - 2x} > 0$ נתן פסוק אמת.
- (א) 1 (ב) -1 (ג) $-\frac{1}{3}$ (ד) $-\frac{1}{2}$ (ה) 0

שאלה אחרת לאותו נושא:

נתונה תבנית הפסוק: $\frac{4x}{x^2 - 3} < \frac{1}{2}$

סמן את המספר שהצבתו נותנת פסוק אמת:

- (א) 1 (ב) 2 (ג) -1
(ד) $-\frac{1}{2}$ (ה) 3

8. לייקבוצת ההצבה" של תבנית פסוק בעלת משתנה אחד, שייכים כל המספרים אשר הצבתם בתבנית נותנת:

- (א) שם מספר (ב) פסוק אמת (ג) פסוק שקר
(ד) פסוק (ה) תבנית מספר

$$\frac{\boxed{}}{2x - 7} = -1$$

9.

סמן את תבנית המספר אשר, אם תכתוב אותה במשבצת הריקה, תקבל פסוק אמת, עבור כל מספר מקבוצת ההצבה.

- (א) $2x - 7$ (ב) $2x + 7$ (ג) $-2x - 7$ (ד) $7 - 2x$
(ה) $-(2x + 7)$

10. נתונה תבנית הפסוק: $\frac{m+2}{m^2-1} > \frac{1}{3+m}$

קבוצת ההצבה היא:

- (א) כל המספרים פרט ל 1.
(ב) כל המספרים פרט ל 1 ו -3.
(ג) כל המספרים פרט ל 1, -3, -2.
(ד) כל המספרים פרט ל 1, -1, -3.
(ה) כל המספרים פרט ל 1, -1, -3, -2.

11. סמן את המספר השייך לקבוצת ההצבה של שתי תבניות הפסוק הבאות:

$$\frac{3x}{x(x^2 - 9)} > 0 \quad \text{ו} \quad \frac{2 - x}{(x + 1)(x - 3)} > 0$$

- (א) 3 (ב) -3 (ג) -1 (ד) 0
(ה) 1

12. נתונה תבנית הפסוק: $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{1-a} = 0$

המספרים שהצבתם נותנת פסוק אמת הם:

- (א) 1 (ב) 1, -1 (ג) כל המספרים פרט ל 1 (ד) כל המספרים פרט ל 1
(ה) אין מספר כזה

13. לפניך חמש תבניות פסוק. הצב בכל אחת מהן במקום a ו b שני מספרים נגדיים (שונים מאפס).

רק באחת מתבניות הפסוק תקבל פסוק שקר.

סמן תבנית פסוק זו.

$$(א) \quad a^2 = b^2 \quad (ב) \quad |a| = |b|$$

$$(ג) \quad ab < 0 \quad (ד) \quad a + b = 0$$

$$(ה) \quad a - b = b - a$$

14. כופלים מספר המיוצג על-ידי y ב 3, מהמכפלה מחסרים 5.

התקבל מספר הגדול מ (-9).

תבנית הפסוק המתאימה היא:

$$(א) \quad 3y - 5 > -9 \quad (ב) \quad 5 - 3y > -9$$

$$(ג) \quad 3(y - 5) > -9 \quad (ד) \quad 3 - 5y > -9$$

$$(ה) \quad \frac{1}{3}y - 5 > -9$$

15. סכום שני מספרים גדול פי 4 מהפרשם.

תבנית הפסוק המתאימה היא:

$$(א) \quad a + b > (a - b)4 \quad (ב) \quad a + b = 4(a - b)$$

$$(ג) \quad 4(a + b) > a - b \quad (ד) \quad a + b = a - b + 4$$

$$(ה) \quad 4(a + b) = a - b$$

16. מכפלת שני מספרים גדולה פי שניים מסכומם.

תבנית הפסוק שאינה מתאימה לבעיה היא:

$$(א) \quad \frac{a \cdot b}{2} = a + b \quad (ב) \quad a \cdot b = 2(a + b)$$

$$(ג) \quad \frac{a \cdot b}{a + b} = 2 \quad (ד) \quad \frac{a + b}{a \cdot b} = \frac{1}{2}$$

$$(ה) \quad 2ab = a + b$$

17. אמנון קנה מחברות במחיר 120 אגורות כל אחת. הוא שילם יותר מ $5\frac{1}{2}$ ש"ח. ב מייצג את מספר המחברות.

תבנית הפסוק המתאימה:

$$(א) \quad 120b > 5\frac{1}{2} \quad (ב) \quad 120b < 5\frac{1}{2} \quad (ג) \quad 120b < \frac{550}{100}$$

$$(ד) \quad 120b < 550 \quad (ה) \quad 120b > 550$$

18. עט התייקר ב 10% ומחירו כעת 38.5 ש"ח. p מייצג מחירו לפני ההתייקרות. תבנית פסוק מתאימה היא:

$$(א) \quad p - 0.1p = 38.5 \quad (ב) \quad p + 0.1 = 38.5$$

$$(ג) \quad p + 0.1p = 38.5 \quad (ד) \quad p - 0.1p = 38.5$$

(ה) אף אחת מבין התשובות אינה נכונה

19. דן חסך 800 ש"ח לרכישת אופניים, למרות שהאופניים שרצה

לקנות התייקרו ב 20% הספיק לו כספו לרכישתם.

k מייצג את מחיר האופניים לפני ההתייקרות.

תבנית פסוק מתאימה היא:

$$(א) \quad k + \frac{20k}{100} \leq 800 \quad (ב) \quad \frac{20k}{100} \leq 800$$

$$(ג) \quad \frac{800 \cdot 20}{100} \leq k \quad (ד) \quad k + \frac{20}{100} \leq 800$$

$$(ה) \quad \frac{k + 20}{100} \leq 800$$

20. ריבוע ומשולש שווה צלעות שווים בהיקפם. צלע הריבוע קטנה

ב 2 ס"מ מצלע המשולש. k מייצג אורך צלע המשולש בסיים.

תבנית פסוק מתאימה היא:

$$(א) \quad 3k = 4k - 2 \quad (ב) \quad 3k = 4k + 2$$

$$(ג) \quad 3k = 4(k - 2) \quad (ד) \quad 3(k + 2) = 4k$$

$$(ה) \quad 3(k - 2) = 4k$$

21. a מייצג מספר ספרים שהזמינה כיתה,

m מייצג מחירו של ספר בש"ח,

n מייצג את ההנחה בש"ח שקבלה הכיתה על כל הספרים יחד.

t מייצג מחירו של כל ספר לאחר ההנחה.

תבנית פסוק מתאימה היא:

$$t = am - n \quad (\alpha)$$

$$t = \frac{a(m - n)}{a} \quad (\delta)$$

$$t = a(m - n) \quad (\lambda)$$

$$t = \frac{am - n}{a} \quad (\eta)$$

22. מכונית נוסעת מעיר A לעיר B במהירות ממוצעת של 60 קמ"ש.

בחזרה היא נוסעת במהירות 50 קמ"ש.

המכונית נסעה הלוך וחזור במשך $5\frac{1}{2}$ שעות.

x מייצג את המרחק בין A ל B.

תבנית פסוק מתאימה היא:

$$\frac{x}{60} + \frac{x}{50} = 5.30 \quad (\beta)$$

$$\frac{x}{60} + \frac{x}{50} = 5.50 \quad (\alpha)$$

$$\frac{60}{x} + \frac{50}{x} = 5.50 \quad (\delta)$$

$$\frac{60}{x} + \frac{50}{x} = 5.30 \quad (\lambda)$$

$$\frac{2x}{110} = 5.50 \quad (\eta)$$

23. מתפרה הגדילה תפוקתה וייצרה בחודש מסויים ב 15% יותר

מבחודש הקודם. בשני החודשים יחד ייצרה 645 שמלות.

k מייצג את כמות השמלות שנתפרו בחודש הראשון.

תבנית פסוק מתאימה היא:

$$\frac{2k \cdot 115}{100} = 645 \quad (\beta)$$

$$k + \frac{115k}{100} = 645 \quad (\alpha)$$

$$\frac{2k \cdot 15}{100} = 645 \quad (\delta)$$

$$k + \frac{15k}{100} = 645 \quad (\lambda)$$

$$2k + \frac{115k}{100} = 645 \quad (\eta)$$

24. לאחר שיחה עם מנהל העבודה הגדיל פועל את התפוקה ב 15%, ולמרות זאת לא הגיע למכסה של 50 פריטים לשעה כפי שקיווה. k מייצג את מספר הפריטים שייצר בשעה לפני הגדלת התפוקה. תבנית פסוק מתאימה היא:

$$\begin{array}{lll} \text{(א)} & \frac{15k}{100} < 50 & \text{(ב)} & \frac{115k}{100} < 50 \\ \text{(ג)} & \frac{85k}{100} < 50 & \text{(ד)} & \frac{50k}{100} < 115 \\ \text{(ה)} & \frac{15k}{50} < 100 & \end{array}$$

25. נתונה תבנית הפסוק: $\frac{80k}{100} = k - 2$

k מייצג מחיר ספר (בש"ח) לפני הנחה.

תבנית פסוק זו מתאימה ל:

- (א) מחיר הספר לאחר הנחה של 80% ירד ב 2 ש"ח
- (ב) מחיר הספר לאחר הנחה של 20% ירד ב 2 ש"ח
- (ג) מחיר הספר לאחר הנחה של 20% הוא 2 ש"ח
- (ד) מחיר הספר לאחר הנחה של 80% הוא 2 ש"ח
- (ה) אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

חלק ד': שאלות העשרה

1. מהו a אם:

- (א) $a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$
- (ב) $a^2 < a^4 < a^6 < \dots$
- (ג) $a > a^2 > a^3 > \dots$
- (ד) $\dots, a^3 < a^4, a^2 > a^3, a < a^2$
- (ה) $\dots, a^3 > a^4, a^2 < a^3, a > a^2$

- תשובה: (א) $a > 1$ (ב) $a > 1$ או $a < -1$
- (ג) $1 > a > 0$ (ד) $a < 0$
- (ה) לא קיים מספר כזה.

הערה: ניתן להגיע לתשובה בשתי צורות:
 ברמה נמוכה, רוב התלמידים יגיעו לתשובה לאחר שיבצעו שיקולים
 בהצבות מספרים שונים בתבניות.
 לדוגמא: ניתן לכוון אותם לבחירת מספרים בצורה הבאה:
 אם נחלק את המספרים על ציר המספרים לקבוצות הבאות:

- קבוצה 1: המספרים הגדולים מ 1.
- קבוצה 2: המספרים בין 0 ל 1.
- קבוצה 3: המספרים בין -1 ל 0.
- קבוצה 4: המספרים הקטנים מ -1.
- קבוצה 5: המספרים 0 ו 1.
- אם נעלה בחזקה כל אחד מהמספרים בכל קבוצה, נקבל:
- בקבוצה 1: ככל שהמעריך גדול יותר החזקה גדולה יותר -
 מתאים לסעיפים א' ו ב'.
- בקבוצה 2: ככל שהמעריך גדול יותר החזקה קטנה יותר -
 מתאים לסעיף ג'.

בקבוצה 3: לגבי מעריכים זוגיים, ככל שהמערך גדול יותר החזקה קטנה יותר.

לגבי מעריכים איזוגיים: ככל שהמערך גדול יותר החזקה גדולה יותר. מתאים לסעיף ד'.

בקבוצה 4: לגבי מעריכים זוגיים: ככל שהמערך גדול יותר החזקה גדולה יותר והיא חיובית.

לגבי מעריכים איזוגיים: ככל שהמערך גדול יותר החזקה קטנה יותר, והיא תמיד שלילית - מתאים לסעיפים ב ו ד.

בקבוצה 5: כל חזקה של אפס היא אפס וכל חזקה של 1 היא 1.
לגבי המספר -1 קיים: $(-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{אם } n \text{ איזוגי.} \\ 1, & \text{אם } n \text{ זוגי.} \end{cases}$
מתאים לסעיף ד'.

לכן התשובות תהיינה:

א) $a > 1$ ב) $a > 1$ או $a < -1$
ג) $1 > a > 0$ ד) $a < 0$
ה) לא קיים

ברמה גבוהה, ניתן לבצע את ההוכחה המתמטית.
שים לב, רוב התלמידים בשלב זה לא יכולים עדיין לבצע הוכחה כזו בעצמם.

לסעיף א': $a^3 < a^4$ וגם $a^2 < a^3$ וגם $a < a^2$

$a^3(1-a) < 0$ וגם $a^2(1-a) < 0$ וגם $a(1-a) < 0$

$1-a < 0$ וגם $(a < 1)$ וגם $(a > 1)$ או $(a < 0)$ וגם $(a > 0)$

$a > 1$ וגם $[a > 1$ או $a < 0]$

$a > 1 \Leftarrow (a > 1 \text{ או } a < 0) \Leftarrow a > 1$

לסעיף ב': $a^2 < a^4$ וגם $a^4 < a^6 \dots$

$$a^2(1 - a^2) < 0 \quad a^4(1 - a^2) < 0$$

$$a \neq 0 \text{ לכל } a^2 > 0 \quad a \neq 0 \text{ לכל } a^4 > 0$$

$$1 - a^2 < 0 \text{ לכן} \quad 1 - a^2 < 0 \text{ לכן}$$

$$(1 - a)(1 + a) < 0$$



$$a > 1 \text{ או } a < -1$$

$$a > 1 \text{ או } a < -1$$

לכן התשובה לסעיף ב' היא: $a > 1$ או $a < -1$

לסעיף ג': $a < a^2 > a^3 > a^4 \dots$

$$a > a^2 \text{ וגם } a^2 > a^3 \text{ וגם } a^3 > a^4 \dots$$

$$a(a-1) < 0 \text{ וגם } a^2(a-1) < 0 \text{ וגם } a^3(a-1) < 0$$

$$0 < a < 1 \text{ וגם } a < 1 \text{ וגם } 0 < a < 1 \dots \Leftarrow$$

$$0 < a < 1 \Leftarrow 0 < a < 1 \text{ וגם } a < 1 \Leftarrow$$

לסעיף ד': $a < a^2$ וגם $a^2 > a^3$ וגם $a^3 < a^4$ וגם $\dots$

$$a(a-1) > 0 \quad a^2(a-1) < 0 \quad a^3(a-1) > 0$$

$$a < 0 \text{ או } a > 1 \quad a < 1 \quad a < 0 \text{ או } a > 1$$

$$a < 0 \Leftarrow (a < 0 \text{ או } a > 1) \text{ וגם } a < 1 \Leftarrow$$

לסעיף ה': $a > a^2$ וגם $a^2 < a^3$ וגם $a^3 > a^4$

$$a(a-1) < 0 \text{ וגם } a^2(a-1) > 0 \text{ וגם } a^3(a-1) < 0$$

$$0 < a < 1 \quad a > 1 \text{ וגם } 0 < a < 1$$

$$a > 1 \text{ וגם } (0 < a < 1) \Leftarrow \text{ איך מספר כזה.} \Leftarrow$$

2. x מייצג מספר שלם.

- (א) רשום תבנית מספר המייצגת רבע המספר העוקב ל x .
 (ב) רשום תבנית פסוק ומצא את x אם ידוע כי, שליש המספר גדול מרבע המספר העוקב ב:

I. 1 II. 2 III. 3 IV. k (k מספר טבעי).

(ג) מהו ההפרש המתקבל בין המספרים במקרים השונים?

תשובה: (א) $\frac{x+1}{4}$

(ב) תבנית הפסוק בצורה כללית: $\frac{x}{3} = \frac{x+1}{4} + k$

I. 15 II. 27 III. 39
 IV. $3 + 12k$

(ג) ההפרש קבוע ושווה ל 12.

הערה: לפתרון ב' אפשר להגיע בצורה הבאה:

$$\frac{x}{3} = \frac{x+1}{4} + k$$

מכאן: $4x = 3x + 3 + 12k$

$$x = 3 + 12k$$

3. נתון $p = (r-t)(r+t)$, p ראשוני.

מצא ערך של t ו p אם:

(א) $r = 7$ (ב) $r = 157$ (ג) $r = 58$.

תשובה: (א) $t = 6, -6$, $p = 13$

(ב) $t = 156, -156$, $p = 313$

(ג) אין מספר כזה.

$$\left. \begin{array}{l} \text{שים לב, } p \text{ ראשוני} \\ x - t = 1 \text{ ו } x + t = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{או} \\ x - t = 1 \text{ ו } x + t = 1 \end{array}$$

הערה: ניתן למצוא x ו t כאלה לכל p ראשוני פרט ל $p = 2$.

נתונה תבנית הפסוק: $|x + y| = |x| + |y|$

(א) בדוק עבור אילו מבין הזוגות הסדורים הבאים נקבל פסוק אמת ועבור אילו פסוק שקר:

(-3, -7), (-4, 1), (5, -6), (-2, 2), (3, 4), (-5, -1), (6, 0), (-7, 0).

(ב) מצא את קבוצת כל זוגות המספרים שעבורם נקבל פסוק אמת (קבוצת האמת). נמק תשובתך.

(ג) נסה לתקן את תבנית הפסוק כך שנקבל פסוק אמת עבור כל הצבה של זוג מספרים ממשיים.

תשובה: (א) פסוק אמת: (-3, -7), (3, 4), (-5, -1), (6, 0), (-7, 0).

פסוק שקר: (-4, 1), (5, -6), (-2, 2).

(ב) $(x \geq 0 \text{ וגם } y \geq 0)$ או $(x \leq 0 \text{ וגם } y \leq 0)$

(ג) $|x + y| \leq |x| + |y|$

הערה: אם x ו y שונים סימן (ושונים מאפס) הרי:

$|x + y|$ מייצג את הפרש הערכים המספריים ואילו

$|x| + |y|$ מייצג את סכום הערכים המספריים

לכן $|x + y| < |x| + |y|$.

5. מצא את כל זוגות המספרים שהצבתם בתבנית $a^2 + b^2 > (a + b)^2$ נותנת פסוק אמת. נמק תשובתך.

תשובה: $(a > 0 \text{ וגם } b < 0)$ או $(a < 0 \text{ וגם } b > 0)$

הערה: רוב התלמידים לא יודעים עדיין להעלות בריבוע תבנית מן הצורה $(a + b)^2$ לכן יגיעו לתשובה לאחר שיקוליס. לדוגמא:

(א) אם a ו b שניהם חיוביים או שניהם שליליים הרי $a + b$

מייצג את סכום הערכים המספריים שלהם וקיים:

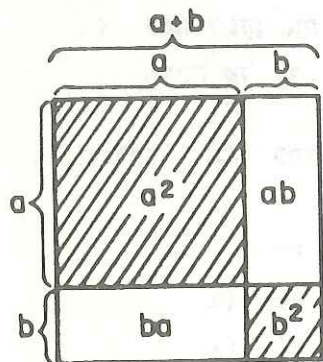
$a^2 + b^2 > (a + b)^2$, בגלל אפקט ההעלאה בריבוע.

(ב) אם $a = 0$ או $b = 0$ הרי $a^2 + b^2 = (a + b)^2$ כי מקבלים רק a^2 או רק b^2 או אפס.

(ג) אם a ו b שונים סימן הרי $a + b$ מייצג את הפרש הערכים המספריים שלהם והפרש זה קטן מ a או מ b . לכן ברור מיד כי $a^2 + b^2 > (a + b)^2$.

דרך אחרת להוכחה (מתחום הגיאומטריה):

(א) אם a ו b שניהם חיוביים או שניהם שליליים נקבל:



סכום שני השטחים המקווקים

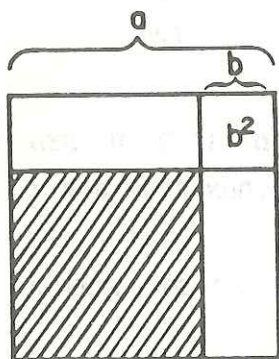
הוא $a^2 + b^2$ ואילו שטח

הריבוע כולו הוא $(a + b)^2$

ולכן $a^2 + b^2 < (a + b)^2$

(ב) אם $a = 0$ או $b = 0$ נקבל $a^2 + b^2 = (a + b)^2$

כי נשארים רק עם הריבוע ששטחו a^2 או זה ששטחו b^2 או אפס.



(ג) אם a ו b שונים סימן נקבל:

השטח המקווקי הוא $(a + b)^2$

שטח הריבוע כולו הוא a^2 .

לכן קיים $a^2 > (a + b)^2$

לכן ברור מיד כי:

$$a^2 + b^2 > (a + b)^2$$

שאלה אחרת דומה:

מצא את כל זוגות המספרים שהצבתם בתבנית $a^2 - b^2 > (a - b)^2$

נותנת פסוק אמת. נמק תשובתך.

תשובה: $a > b > 0$ או $a < b < 0$

הערה: הטיפול בתבנית פסוק זו דומה לטיפול בתבנית הפסוק הקודמת.

(א) אם a ו b שוני סימן (ושונים מאפס) הרי $a - b$ מייצג סכום

הערכים המספריים של a ו b ולכן $(a - b)^2 > a^2$.

ומכאן ברור כי $(a - b)^2 > a^2 - b^2$.

(ב) אם $a = 0$ ו $b \neq 0$ נקבל באגף שמאל $-b^2$ (שהוא תמיד שלילי)

ובאגף ימין נקבל b^2 שהוא תמיד חיובי.

לכן $a^2 - b^2 < (a - b)^2$.

(ג) אם $a \neq 0, b = 0$ נקבל בשני האגפים a^2

לכן $a^2 - b^2 = (a - b)^2$.

(ד) אם $a = b = 0$ נקבל אפס בשני האגפים. כלומר

$a^2 - b^2 = (a - b)^2$.

(ה) אם a ו b חיוביים ו $a < b$

או: a ו b שליליים ו $a > b$

תבנית המספר $a^2 - b^2$ תתן מספר שלילי ואילו התבנית

$(a - b)^2$ תתן מספר חיובי. לכן $a^2 - b^2 < (a - b)^2$.

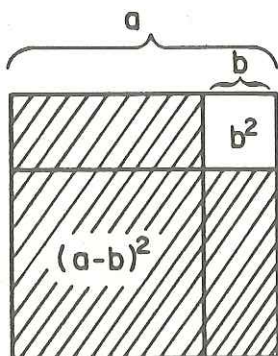
(ו) אם a ו b חיוביים ו $a > b$

או: a ו b שליליים ו $a < b$

תבנית המספר $a - b$ מייצגת הפרש הערכים המספריים של a ו b

וקיים $a^2 - b^2 > (a - b)^2$, בגלל אפקט ההעלאה בריבוע.

ניתן לראות זאת גם על ידי הוכחה מתחום הגיאומטריה:



(א) אם a ו b חיוביים ו $a > b$

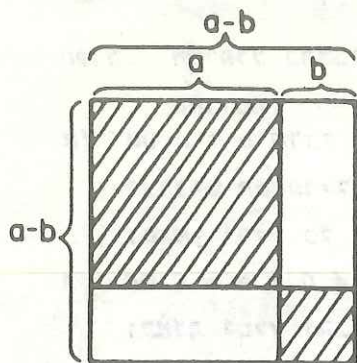
או a ו b שליליים ו $a < b$

הרי $a^2 - b^2$ הוא השטח

המקווקו שהוא גדול יותר

מן השטח המיוצג על ידי

$(a - b)^2$.



(ב) אם a ו- b שונים סימך (ושונים מאפס).

שטח כל הריבוע הוא $(a - b)^2$

הפרש שני השטחים המקווקוים

$$a^2 - b^2$$

ולכן $a^2 - b^2 < (a - b)^2$

חלק ה': מבחן

I. השיקולים בעריכת המבחן

להוראת הפרק הוקדשו כ 20 שיעורים.
להלן הצעה לבדיקת הישגי התלמידים ביחידה זו.

כיוון שחשיבות הפרק רבה, במיוחד נושא התרגום מבעיה לתבנית פסוק, כדאי לתת שני מבחנים, (שניהם לאותה כיתה), כאשר:

מבחן מספר 1 - יבדוק מיומנות התלמידים בתת הנושאים השונים, ינתן כעבור 12 שיעורים בערך.

מבחן מספר 2 - ינתן בסיום הוראת היחידה, בתרגום בעיות לתבניות פסוק, ושיקולים בהצבה לחלק מן הבעיות.

שני המבחנים יחד באים לסכם את הוראת הפרק ותיכנונם תואם את המטרות שרצינו להשיג.

להלן טבלת תכנון אפשרית לכל אחד משני המבחנים (עבור כיתה ברמה ב').

למבחן מספר 1:

מבעיה לתבנית פסוק	תבניות פסוק, הצבה, וקבוצת הצבה	פסוקים (שקר ואמת), מפסוק לפסוק	תכנים לימודיים / רמות קוגניטיביות
	1 שאלות מספר: 4, 3, 2	2 שאלה מספר: 1	ידע - טכניקה
3 שאלות מספר: 7, 6	4 שאלה מספר: 5		הבנה - יישום

מבעיה לתבנית פסוק	הצבה וקבוצת ההצבה	תכנים לימודיים
		רמות קוגניטיביות
1 שאלות מספר: 5, 'א4, 3, 2, 1	3 שאלות מספר: 'ב4, 'ב7.	ידע - טכניקה
2 שאלות מספר: 8, 'א7, 6		הבנה - יישום

המספרים במשבצות נותנים את סדר העדיפויות של המשבצות השונות, סדר עדיפות זה קובע את מספר השאלות מכל משבצת שינתן במבחן ו/או את המשקל היחסי של הציון על שאלות אלו מתוך כלל השאלות במבחן.

לדוגמא: משבצת המסומנת במספר 1 נמצאת בסדר העדיפות הגבוה ביותר ומשקלן היחסי של השאלות הבודקות משבצת זו הוא הגבוה ביותר במבחן. (בדוק לפי מספרי השאלות המופיעים בטבלה. השאלות והציון מופיעים במבחן שבעמודים 99-101). סדר העדיפות של כל משבצת נקבע לפי מידת החשיבות שיוחסה לנושאים השונים בזמן הלמידה.

שיקולים נוספים בעריכת המבחן:

- ניתן לנצל את המושגים "פסוק אמת", "פסוק שקר" וכן הצבה בתבניות פסוק על מנת לבדוק גם ידע קודם, כגון: פעולות במספרי הזזה, ערך מוחלט, חוקי פעולות החשבון וכו'.
 - רצוי לתת תרגילים קצרים עם מספרים שאינם "מסובכים" כדי שלא יגזלו מן התלמידים זמן רב.
- יש סיכוי כי פריטים רבים יותר במבחן, ישקפו יותר את הידע האמיתי של התלמיד.

II. מבחן מספר 1 (מסר המבחן - 45 דקות)

1. (25%) הוסף " $>$ ", " $<$ ", " $=$ " כך שיתקבל פסוק אמת.

(א) $-5^4 \quad \boxed{} \quad 5^4$

(ב) $(-1)^3 \quad \boxed{} \quad -1^3$

(ג) $-(7 + 8) \quad \boxed{} \quad -7 - 8$

(ד) $|-4 + 5| \quad \boxed{} \quad |-4| + |5|$

(ה) $1 \text{ מ } \boxed{} \quad 10 \text{ של } 1\frac{1}{2}\%$

2. (15%) מהי קבוצת ההצבה של כל אחת מתבניות הפסוק הבאות:

(א) $\frac{5x}{|x| + 1} > 1$ (ב) $\frac{3}{x - 4} > \frac{x + 5}{x + 7}$

(ג) $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{2}{3}$ (ד) $\frac{x + 2}{2x - 1} < 1$

(ה) $\frac{x - 1}{x(x - 2)} = 3$

3. (15%) (א) הצב $(-\frac{1}{2})$ בתבנית: $\frac{7(2x + 1)}{2} = 7$ וקבע אם קיבלת פסוק אמת או שקר.

(ב) הצב 0.2 בתבנית: $\frac{1 - 5x}{1 - 6x} < 0$ וקבע אם קיבלת פסוק אמת או שקר.

4. (15%) נתונה התבנית: $\frac{6 - 3x}{x - 2} > 3$

(א) מהי קבוצת ההצבה?

(ב) הצב את המספרים 4 , -1 . האם קיבלת פסוקי אמת?

5. (10%) בתונה התבנית $2x + 1 = 0$. איזה מספר יש להציב כדי לקבל פסוק אמת?
6. (10%) מחירו של ספר a ש"ח, מחירם של 3 ספרים כאלה גדול מ 25 ש"ח. כתוב תבנית פסוק מתאימה.

7. (10%) (א) רשום תבנית מספר למספר הקטן ב 5 מ x .
 (ב) רשום תבנית מספר למספר הגדול פי 2 מ x .
 (ג) המספר שהתקבל ב א' גדול מן המספר שהתקבל ב ב', רשום תבנית פסוק מתאימה.

מבחן מספר 2: (משך המבחן 45 דקות)

1. (10%) כתוב תבניות פסוק מתאימות:
 (א) המספר x קטן מהמספר y .
 (ב) המספר x קטן ב 3 מהמספר y .
2. (10%) ילד בחר מספר, הוסיף לו 4 וכפל את הסכום ב 2. המספר שהתקבל גדול מהמספר שבחר. כתוב תבנית פסוק מתאימה.
3. (10%) (א) כתוב תבנית מספר למספר דו סיפתי בו סיפרת העשרות היא a והיחידות היא b .
 (ב) המספר הדו סיפתי שב א' גדול מ 52. כתוב תבנית פסוק מתאימה.
4. (15%) (א) ההפרש בין a ל b גדול מהסכום של a ו b . כתוב תבנית פסוק מתאימה.
 (ב) הצב $a = 4$, $b = -6$ ובדוק אם קיבלת פסוק אמת.

5. (10%) α מייצג מחיר שמלה בשי"ח.

השמלה התייקרה ב 18% ומחירה כעת 200 ש"ח.

כתוב תבנית פסוק מתאימה.

6. (10%) על אחת מכפות המאזניים מונחות 3 חתיכות סבון השוות

במשקלן, ומשקולת של 100 גרם.

על הכף השניה מונחת משקולת של 1 ק"ג.

ידוע שהכפות מאוזנות.

כתוב תבנית פסוק מתאימה.

7. (15%) א) שכרו של פועל גדול פי $2\frac{1}{2}$ משכרו של עוזרו.

יחד קיבלו פחות מ 1000 ש"ח.

כתוב תבנית פסוק מתאימה.

ב) הצב $300 = y$ ובדוק אם קיבלת פסוק אמת.

8. (20%) במחסן 500 ארגזי תפוחים. כל יום הוציאו מן המחסן

35 ארגזים.

א) כתוב תבנית מספר למספר הארגזים שהוציאו ב n ימים.

ב) כתוב תבנית מספר למספר הארגזים שנשארו במחסן לאחר

n ימים.

ג) מספר הארגזים שנשארו במחסן אחרי n ימים היה 80.

כתוב תבנית פסוק מתאימה.

ד*) אילו מספרים ניתן להציב בתבנית הפסוק שהתקבלה,

כך שתהיה משמעות לבעיה?

פרק ד: קבוצות

חלק א': מבוא

פרק זה נועד בעיקרו להכרת מושגי יסוד, בהם ייעשה שימוש בהמשך ובכך חשיבותו.

מושגי היסוד הם: קבוצה, איבר השייך לקבוצה, קבוצות זרות, שוויון בין קבוצות, יחס ההכלה, חיתוך ואיחוד של קבוצות, הקבוצה הריקה גרף של קבוצה ודיאגרמות וון.

השימוש בהם מאוחר יותר ייעשה בלימוד הנושאים:

1. מציאת קבוצת אמת של תבנית פסוק.
2. פתרון מערכות של תבניות פסוק.
3. מציאת הקשר בין קבוצת האמת, קבוצת השקר וקבוצת ההצבה של תבנית פסוק.
4. טיפול, כולל טיפול אלגברי, בצורה גיאומטרית כקבוצה של נקודות.

הערות:

1. בפרק זה כפי שהוא מופיע בספר הלימוד, לא נכלל הסעיף "גרפים של קבוצות על ציר המספרים", רצוי ללמד סעיף זה במקביל ללימוד הכתיב המתמטי והתיאור המילולי של קבוצות, כדי שתלמידים יבינו אילו מספרים שייכים לקבוצה עליה מדובר, ולא יזהו גרף של קבוצה על ציר המספרים עם קבוצת אמת.
2. ניתן לנצל פרק זה לחזרה ורענון של מושגים שנתקלו בהם בעבר. כמו למשל מושגים בהנדסה, שהם בדרך כלל קשים לתלמידים. ביחס להנדסה; פיתוח לוגי של יחסים בין צורות הנדסיות שונות. כדאי לעשות זאת, אם לתלמידים יש בסיס וידע בהנדסה. אי אפשר לעשות זאת אם אין להם הבסיס היסודי.

אופיו של הפרק הוא הבנת המושגים הלוגיים היסודיים הקשורים בקבוצות. לכן, רוב השאלות המובאות בפרק זה, הן שאלות ברמת הבנה-יישום, חלקן שאלות ברמת חקר. אף על פי כן, חשוב לכלול בכל מבחן שאלות ברמת ידע-טכניקה.

מטרת הטבלה שלהלן להקל על המורה בבחירת השאלות העוסקות בתת הנושאים השונים בפרק. מספר כל שאלה מופיע תחת תת הנושא העיקרי אותו בודקת שאלה זו.

חיתוך ואיחוד של קבוצות, דיאגרמות וון	גרפים של קבוצות על ציר המספרים	מושג האיבר והקבוצה, קבוצות שונות, שוות, חלקיות וזרות.	
18 - 24	12 - 17	1 - 11	חלק ב': שאלות פתוחות
11 - 19	8 - 10	1 - 7	חלק ג': שאלות סגורות

להלן מספר נקודות שראוי להדגישן במהלך הוראת הפרק:

1. הקבוצה: $\{0\}$ היא קבוצה אשר אפס הוא איברה היחיד וקיים:

$$\{0\} \neq \{ \} , 0 \in \{0\} , 0 \notin \{ \}$$

2. יחס ההכלה המובא, הוא הכלה במובן הרחב. ומכאן, כל קבוצה היא קבוצה חלקית של עצמה.

3. מהגדרת הקבוצה הריקה וכן היחסים הכלה, איחוד וחיתוך, נובע כי:

$$A \cap \{ \} = \{ \} \quad (א)$$

$$A \cup \{ \} = A$$

4. קיים: $\{a\} = \{a, a, a, a\}$

5. מהגדרת קבוצת האיחוד (של שתי קבוצות או יותר) נובע, כי אין צורך למנות יותר מפעם אחת את האיברים המשותפים.

חלק ב': שאלות פתוחות

1. (א) תהי A קבוצת המספרים האיזוגיים החיוביים.
האם סכום שני איברים ב A הוא איבר השייך ל A? נמק.
(ב) אם B היא קבוצת המספרים הזוגיים החיוביים, האם סכום שני איברים ב B הוא איבר השייך ל B? נמק.
(ג) אם C היא קבוצת המספרים המתחלקים ב 3, האם סכום שני איברים ב C הוא איבר השייך ל C? נמק.

תשובות:

- (א) לא, סכום שני מספרים איזוגיים הוא תמיד מספר זוגי.
כל איבר ב A הוא מן הצורה $2x + 1$ (x שלם).
ניקח שני איברים כלשהם $2a + 1$, $2b + 1$ השייכים ל A.
נקבל: $(2a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$

הסכום הוא כפולה של 2 לכן הוא זוגי $\Leftarrow$ הסכום לא שייך ל A.

- (ב) כן, סכום שני מספרים זוגיים הוא תמיד מספר זוגי.
האיברים ב B הם מן הצורה $2x$ (x שלם),
יהיו $2a$, $2b$ שני איברים כלשהם ב B.
קיים: $2a + 2b = 2(a + b)$
הסכום הוא כפולה של 2 $\Leftarrow$ הסכום זוגי.

- (ג) כן, האיברים ב C הם מן הצורה $3x$ (x שלם).
יהיו $3a$, $3b$ שני איברים כלשהם השייכים ל C קיים:
 $3a + 3b = 3(a + b)$
סכומם הוא כפולה של 3. לכן הוא איבר השייך ל C.

2. A היא קבוצת המספרים הטבעיים המתחלקים ב 3.

כתוב "אמת", "שקר" ליד כל פסוק.

(א) $39 \in A$ (ב) $237 \in A$ (ג) $522 \in A$ (ד) $127 \in A$

תשובה: (א) אמת (ב) אמת (ג) שקר (ד) אמת

3. נתונות הקבוצות:

$$B = \{x \mid -5 \leq x < 5\} \quad A = \{x \mid x < 3\}$$

כתוב "אמת" או "שקר" ליד כל פסוק.

(א) $A \subset B$ (ב) $10 \in A$ (ג) $1 \in B$ (ד) $-6 \in B$
(ה) $\{2, 0\} \subset A$ (ו) $A \subset \{x \mid -3 < x < 3\}$

תשובה: (א) שקר (ב) שקר (ג) אמת (ד) אמת
(ה) אמת (ו) שקר

4. נגדיר קבוצה M כקבוצה של זוגות סדורים של מספרים $(x, 3)$,

כך ש: $(x, 3) \in M$ אם $\frac{x}{3}$ נותן שארית 1.

(א) כתוב שני איברים השייכים ל M.

(ב) כתוב שני איברים שאינם שייכים ל M.

תשובה:

(א) $(1, 3)$, $(4, 3)$. (בצורה כללית: $(3x + 1, 3)$, x שלם).

(ב) $(2, 3)$, $(3, 3)$. (בצורה כללית: $(3x + 2, 3)$ או $(3x, 3)$, x שלם).

הערה: השאריות שיכולות להתקבל מחלוקת מספר ב 3 הן 0, 1, 2.

לכן איברים שאינם שייכים ל M הם אלו אשר חילוקם ב 3 נותן

שארית שהיא 0 (המספרים מהצורה $3x$), או שארית שהיא 2

(המספרים מהצורה $3x + 2$).

5. כתוב "אמת" או "שקר" ליד כל פסוק. נמק.

$$(א) \quad -4 \in \{m \mid -m^3 = 64\} \quad (ב) \quad \frac{1}{2} \in \{a \mid \frac{a}{2} + \frac{2}{a} < 2\}$$

תשובה: (א) אמת. כי: $-(-4)^3 = -(-64) = 64$

$$(ב) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{2} > 2 \quad \text{כי:}$$

הערות:

1. אם חלק מן התלמידים ירצו למצוא באופן כללי את איברי הקבוצה $\{a \mid \frac{a}{2} + \frac{2}{a} < 2\}$, הרי השיקול יכול להיות כדלהלן: $\frac{a}{2}$ ו $\frac{2}{a}$ ($a \neq 0$) מייצגים מספרים הופכיים זה לזה. הסכום הקטן ביותר של שני מספרים הופכיים חיוביים הוא 2. מכאן ש a לא יכול להיות מספר חיובי. עבור $a < 0$ נקבל סכום שלילי, שבודאי קטן מ 2.

2. הקבוצה $\{m \mid -m^3 = 64\}$ היא קבוצה בעלת איבר יחיד (-4) . והקבוצה $\{a \mid \frac{a}{2} + \frac{2}{a} < 2\}$ היא קבוצה שאבריה הם $\{a \mid a < 0\}$.

6. קבע אילו מבין הקבוצות הבאות הן סופיות ואילו אינן סופיות.

כתוב את אברי הקבוצות הסופיות שמצאת.

(א) $T = \{\text{המספרים שסכום ספרותיהם } 2\}$

(ב) $R = \{\text{המספרים הדו ספרתיים שסיפרותיהם שוות}\}$

(ג) $P = \{\text{המספרים הדו ספרתיים שסיפרת היחידות שלהם } 0\}$

(ד) $S = \{\text{המספרים הטבעיים שסיפרת היחידות שלהם } 0\}$

(ה) $Q = \{\text{הספרות במספר הטלפון } 352742\}$

תשובה: (א) אינסופית. דוגמא למספר איברים בקבוצה:

$\{0.02, 1.1, 20, 1001, \dots\}$

(ב) סופית. $R = \{11, 22, \dots, 88, 99\}$

(ג) סופית. $P = \{10, 20, \dots, 80, 90\}$

(ד) אינסופית.

(ה) סופית. $Q = \{3, 5, 7, 4, 2\}$

7. משפט: אם הקבוצות A ו B זרות, והקבוצות B ו C זרות אז A ו C זרות.
האם המשפט נכון? נמק.
אם המשפט אינו נכון, הבא דוגמא נגדית.

תשובה: המשפט אינו נכון. לדוגמא בקבוצות A, B ו C שלהלן:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

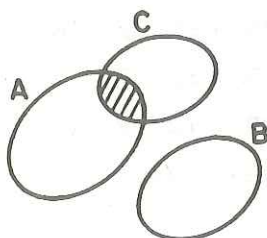
$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$C = \{1, 2, 0, -1, -2\}$$

מתקיים עבורן:

$$A \cap B = \{ \}, A \cap C = \{1, 2\} \text{ אך } B \cap C = \{ \}$$

דוגמא נוספת (בעזרת דיאגרמה):



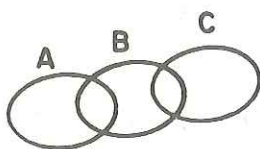
$$B \cap C = \{ \} \quad A \cap B = \{ \}$$

$$\text{אך } A \cap C = \text{השטח המקווקו}$$

שאלות אחרות לאותו נושא:

1. אם הקבוצות A ו B אינן זרות, והקבוצות B ו C אינן זרות, אז A ו C אינן זרות.
האם המשפט נכון? נמק.

אם המשפט אינו נכון, הבא דוגמא נגדית.



תשובה: לא נכון.

לדוגמא הקבוצות A, B ו C שבדיאגרמה

$$\text{מקיימות: } A \cap B \neq \{ \}, B \cap C \neq \{ \}$$

$$\text{אך } A \cap C = \{ \}$$

דוגמאות נוספות:

$$(א) \quad A = \{8, 11\} \quad B = \{1, 2, 5, 6, 8\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(ב) \quad A = \{\text{מספרים איזוגיים}\} \quad B = \{\text{מספרים שלמים}\}$$

$$C = \{\text{מספרים זוגיים}\}$$

$$(ג) \quad A = \{\text{משולשים}\} \quad B = \{\text{מצולעים}\} \quad C = \{\text{מרובעים}\}$$

2. A, B ו- C הן קבוצות המקיימות:

$$A = B \text{ ו- } B = C \text{ . האם } A = C \text{ נמק!}$$

תשובה: $A = B$, פרושו: $a \in A$ אמ"ס $a \in B$

$B = C$, פרושו: $x \in B$ אמ"ס $x \in C$

מכאן, כל איבר ב- A הוא גם איבר ב- C ולהיפך, כל איבר

$$B \text{ הוא גם איבר ב- } A \iff A = C \text{ .}$$

כסיכום ניתן לומר שיחס השוויון בין קבוצות הוא יחס

טרנסיטיבי.

8. אילו מבין התיאורים הבאים מתאר קבוצה ריקה ומדוע?

(א) קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 25 אך קטנים מ- 26.

(ב) קבוצת המספרים הטבעיים הקטנים מ- 1.

(ג) קבוצת המספרים הזוגיים שבין 23 ל- 25.

(ד) קבוצת השברים הגדולים מ- $\frac{3}{4}$ אך קטנים מ- $\frac{1}{2}$.

תשובה: (א) קבוצה ריקה. אין מספר טבעי בין 25 ל- 26.

(ב) קבוצה ריקה. המספר הטבעי הקטן ביותר הוא 1.

(ג) קבוצה לא ריקה. מכילה את המספר 24 שהוא זוגי.

(ד) קבוצה ריקה. אין מספר הגדול מ- $\frac{3}{4}$ וקטן מ- $\frac{1}{2}$.

9. סמן, לכל זוג קבוצות, אם הן שוות או לא.

$$(א) A = \{1, 8, 9, 14\} \text{ ו- } B = \{1, 9, 8, 14\}$$

$$(ב) C = \{\text{משה}\} \text{ ו- } D = \{\text{מ, ש, ה}\}$$

תשובה: (א) $A = B$, הקבוצות מכילות בדיוק אותם האיברים.

(ב) $C \neq D$, C מכילה איבר אחד שהוא המילה "משה"

ואילו D מכילה שלושה איברים שהם האותיות

מ, ש, ו ה.

10. נתון: $S = \{n^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ (מספרים טבעיים, $n = 1, 2, 3, \dots$)

$$T = \{1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, \dots\}$$

- (א) רשום חמישה איברים מ S .
 (ב) רשום שני איברים נוספים מ T .
 (ג) נסה לתאר את T במילים בשני אופנים שונים.
 (ד) כתוב "אמת" או "שקר"
- $S \cap T = \{ \}$, $S \supset T$, $S \subset T$, $S = T$, $S \neq T$

תשובה:

- (א) $S = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
 (ב) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9$.
 (ג) i ריבועיהם של המספרים הטבעיים.
 (ד) ii סכום מספרים איזוגיים עוקבים החל בראשון.
 (ד) פסוקי האמת הם: $T \subset S$, $S \subset T$, $S = T$.

11. כתוב "אמת" או "שקר" ליד כל פסוק.

- (א) $\{\text{משולשים שוי צלעות}\} \subset \{\text{משולשים שוי שוקיים}\}$
 (ב) $\{\text{מלבנים}\} \subset \{\text{ריבועים}\}$

תשובה: (א) שקר. כל משולש שווה צלעות הוא גם משולש שווה שוקיים אך לא ההיפך.
 (ב) אמת.

12. שרטט ציר מספרים וסמן עליו את הקבוצה:

$$A = \{x \mid \text{נקודות שמרחקן מ-3 עולה על 5 יחידות}\}$$



הערה: בכתיב קבוצות ניתן לרשום: $\{x \mid |x + 3| > 5\}$
 או: $\{x \mid x > 2 \text{ או } x < -8\}$

13. השלם את הטבלה לתאור קבוצות בשלוש דרכים שונות:

כתיב קבוצות	שרטוט הגרף	במילים
$\{x \mid x > 2\}$		רמספרים הקטנים או שווים ל 5
		המספרים החיוביים
$\{x \mid -3 < x \leq 3\}$		
$\{x \mid x \neq 1\}$		המספרים האי-שליליים

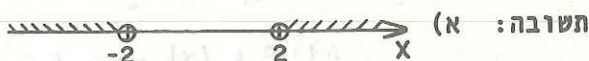
תשובה:

כתיב קבוצות	שרטוט הגרף	במילים
$\{x \mid x > -3\}$		המספרים הגדולים מ -3
$\{x \mid x \leq 5\}$		
		המספרים הגדולים מ 2
$\{x \mid x > 0\}$		
		המספרים בין 3 ל -3 כולל 3
$\{x \mid -1 \leq x = 4\}$		המספרים בין -1 ל 4 כולל -1 1 4
		כל המספרים פרט ל 1
$\{x \mid x \geq 0\}$		

14. שרטט על ציר מספרים את הקבוצות הבאות:

(א) $\{x \mid |x| > 2\}$

(ב) $\{a \mid -1 \leq a \leq 3\}$



סעיפים אחרים לאותה שאלה:

שרטט על ציר מספרים את הקבוצות הבאות:

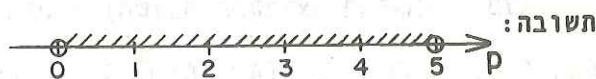
(א) $\{x \mid |x| < 3\}$ (ב) $\{x \mid x = 3 \text{ או } x \leq 0\}$



15. נתונות שתי קבוצות מספרים:

$\{p \mid p < 5\}$, $\{p \mid p > 0\}$

שרטט את גרף החיתוך של שתי קבוצות אלה.



16. נתונות שתי קבוצות מספרים:

$B = \{x \mid x < 0\}$, $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$

מצא $A \cap B$.

תשובה: $A \cap B = \{x \mid -1 < x < 0\}$



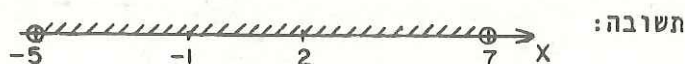
הערה: שרטוט קבוצות על ציר המספרים מקל מאוד על התלמידים

למצוא יחסים בין קבוצות, וכן למצוא את קבוצת האיחוד ו/או

את קבוצת החיתוך של מספר קבוצות.

17. נתון: $B = \{x \mid -1 < x < 7\}$, $A = \{x \mid -5 < x < 2\}$

שרטט $A \cup B$.



$$A \cup B = \{x \mid -5 < x < 7\}$$

שאלה אחרת לאותו נושא:

נתונות שתי קבוצות:

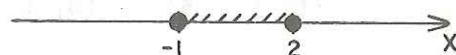
$$B = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\} , A = \{x \mid -3 < x < 5\}$$

כתוב מהן הקבוצות $A \cup B$ ו $A \cap B$ ושרטט גרף קבוצות אלה.

$$A \cup B = \{x \mid -3 < x < 5\}$$



$$A \cap B = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$$



18. א) תהי A קבוצה כלשהי (השונה מהקבוצה הריקה). מצא:

$$A \cup A , A \cap A , (A \cup A) \cap A , (A \cap A) \cup A ,$$

$$(A \cup A) \cup A , (A \cap A) \cap A , A \cup \{ \} , A \cap \{ \}$$

ב) האם תשובותיך ל א' ישתנו אם A תהיה הקבוצה הריקה?

תשובה: א) בכל המקרים התוצאה היא A פרט למקרה של

$$\{ \} = A \cap \{ \}$$

ב) בכל המקרים התוצאה תהיה הקבוצה הריקה.

19. נתון: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

הקבוצה C מקיימת את התנאים הבאים:

(א) $C \subset B$ (ב) $C \cap A = \{9\}$

כתוב את כל האפשרויות עבור הקבוצה C .

תשובה: $\{9\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}, \{9, 12\}, \{8, 9, 10\}$

$\{8, 9, 12\}, \{9, 10, 12\}$

20. תהי A קבוצת כל הנקודות במישור שהשיעור הראשון שלהן הוא -4 .

תהי B קבוצת כל הנקודות במישור שהשיעור השני שלהן הוא 2 .

מהי $A \cap B$?

תשובה: הנקודה $(-4, 2)$.

21. מצא את מספר האיברים ב $A \cup B$ אם:

(א) A ו B זרות. ב A 5 איברים ב B 6 איברים.

(ב) A ו B שוות. ב B 7 איברים.

(ג) $A \subset B$. ב A 2 איברים ב B 8 איברים.

(ד) ב A 9 איברים, ב B 10 איברים וב $A \cap B$ איבר אחד.

תשובה: (א) 11 (ב) 7 (ג) 8 (ד) 18

שאלה אחרת לאותו נושא:

מצא את מספר האיברים ב $A \cap B$ אם:

ב A 11 איברים, ב B 17 איברים, וב $A \cup B$ 20 איברים.

תשובה: 8 איברים.

22. תהיינה A , B ו- C קבוצות הנקודות הנמצאות על ישרים

a , b ו- c בהתאמה.

מהם האיברים של $A \cap B \cap C$?

תשובה: אם הישרים מתלכדים הרי $A = B = C$, לכן החיתוך הוא

שלושתם או אחד מהם.

אם הישרים נפגשים בנקודה אחת הרי החיתוך הוא נקודת המפגש.

אם הישרים מקבילים, או שזוג אחד של ישרים מקבילים, או שיש 2 או 3 נקודות מפגש ביניהם, הרי החיתוך הוא קבוצה ריקה.

שאלה דומה ניתן לשאול ביחס לשני ישרים:

תהי A קבוצת הנקודות הנמצאות על ישר כלשהו במישור.

תהי B קבוצת הנקודות הנמצאות על ישר אחר במישור.

מהם האיברים ב- $A \cap B$?

תשובה: (א) נקודת המפגש, אם הישרים נחתכים.

(ב) קבוצה ריקה, אם הישרים מקבילים.

(ג) הישר עצמו, אם הישרים מתלכדים.

שאלה אחרת לאותו נושא:

תהי A קבוצת הנקודות שעל מעגל M .

תהי B קבוצת הנקודות שעל מעגל O .

מה תהיה $A \cap B$?

תשובה: (א) קבוצה ריקה, אם המעגלים פנימיים או חיצוניים.

(ב) אחד המעגלים, אם המעגלים מתלכדים.

(ג) שתי נקודות, אם המעגלים נחתכים.

(ד) נקודה אחת, אם המעגלים משיקים זה לזה

(משיקים פנימיים או משיקים חיצוניים).

23. נתון: $A \cap B = \{5\}$, $A \cup B = \{3, 5, 7\}$

(א) כתוב שתי צורות אפשריות ל A ו B.

(ב) האם נכון לומר כי תמיד קיים $3 \in A$?

תשובה: (א) $A = \{5\}$ או $A = \{3, 5\}$

$B = \{5, 7\}$ $B = \{3, 5, 7\}$

וכן ניתן להחליף את הקבוצות A ו B.

(אילו הן האפשרויות היחידות הקיימות ל A ו B).

(ב) לא, לדוגמא: $A = \{5, 7\}$ $B = \{3, 5\}$

24. רשום את קבוצת האיחוד ואת קבוצת החיתוך של כל זוג קבוצות:

(א) $A = \{\text{מלבנים}\}$ $B = \{\text{ריבועים}\}$

(ב) $C = \{\text{משולשים שווי צלעות}\}$, $D = \{\text{משולשים שווי שוקיים}\}$

תשובה:

(א) $A \cup B = \{\text{מלבנים}\}$

$A \cap B = \{\text{ריבועים}\}$

(ב) $C \cup D = \{\text{משולשים שווי שוקיים}\}$

$C \cap D = \{\text{משולשים שווי צלעות}\}$

סעיפים אחרים לאותה שאלה:

רשום את קבוצת החיתוך:

(ג) $\{\text{משולשים שווי צלעות}\} \cap \{\text{משולשים שווי שוקיים שאורך השוק 5 יחידות}\}$

(ד) $\{\text{מעוינים}\} \cap \{\text{מלבנים}\} \cap \{\text{מקבילים}\}$

תשובה:

(ג) $\{\text{משולש שווה צלעות שאורך צלעו 5 יחידות}\}$.

(ד) $\{\text{ריבועים}\}$.

שים לב, כדי לענות על השאלה יש לבדוק את תכונות המצולעים בהם דנים. לדוגמא:
בסעיף א' שבשאלה:

1. הצלעות הוגדירות שוות. מלבן הוא מקבילית בה:
 2. כל הזוויות שוות (ישרות).
 3. האלכסונים שווים וחוצים זה את זה.
- ריבוע הוא מקבילית בה:
1. כל הצלעות שוות.
 2. כל הזוויות שוות (ישרות).
 3. האלכסונים שווים, חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה וחוצים את הזוויות.

לכן, כל מרובע המקיים את תכונות הריבוע, מקיים בודאי את תכונות המלבן, אך לא ההיפך. מכאן, כל ריבוע הוא מלבן אך לא כל מלבן הוא ריבוע ולכן $B \subset A$.

לגבי סעיף ד':

- {מלבנים} $\supset$ {מקביליות}, (מלבן הוא מקבילית שזוויותיה ישרות).
{מעוינים} $\supset$ {מקביליות}. (מעויז הוא מקבילית שצלעותיה שוות).

קבוצת החיתוך בין שלושת הקבוצות היא קבוצת המקביליות שהן גם מלבנים וגם מעוינים. כלומר, מקביליות שזוויותיהם ישרות וצלעותיהם שוות ואלו הם הריבועים.

חלק ג': שאלות סגורות

1. סמן את הקבוצה הסופית.

(א) {המספרים בין 1 ל 10}

(ב) {המספרים הזוגיים הקטנים מ 8}

(ג) {המספרים השלמים השליליים הגדולים מ -6}

(ד) {קבוצת ההצבה של תבנית הפסוק $\left\{ \frac{5}{|x| - 1} = 5 \right\}$ }

(ה) $\{(x,y) | xy = 1\}$

2. במערכת הצירים נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{ \text{שעורי הנקודות על ציר } x \}$

$B = \{ \text{שעורי הנקודות על ציר } y \}$

סמן את התשובה הנכונה:

(א) הקבוצה A חלקית לקבוצה B .

(ב) הקבוצות אינן זרות.

(ג) הקבוצות זרות.

(ד) הקבוצות שוות.

(ה) הקבוצות משלימות זו את זו לקבוצת כל הנקודות במישור.

3. נתונה הקבוצה: $\{(a,b) | a + b \neq 10\}$, הקבוצה השווה לה היא:

(א) $\{(5,6), (4,4), (0,9), (7, \frac{1}{2})\}$

(ב) $\{(0,10), (1,9), (5,5), (4,6)\}$

(ג) {המספרים השונים מ 10}

(ד) {זוגות סדורים שאחד המספרים בהם שונה מ 10}

(ה) {זוגות סדורים של מספרים שסכומם שונה מ 10}

4. הקבוצה המוכלת בקבוצה A , $A = \{x \mid -2 < x < 2\}$, היא:

- (א) $\{0, 1, 2, 3\}$ (ב) $\{-3, -2, -1, 0\}$
 (ג) $\{-2, 2\}$ (ד) $\{-1, 0, 1\}$
 (ה) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

5. בין הפסוקים הבאים יש אחד שהוא פסוק שקר. סמן אותו:

- (א) {המספרים השליליים הגדולים מ -4 } $\in -1$
 (ב) $\{\text{המספרים האיזוגיים}\} \subset \{\text{המספרים הראשוניים}\}$
 (ג) $\{2, 4, 7, 3\} = \{2, 4, 7, 3, 4, 2\}$
 (ד) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\} \subset \{\text{המספרים החיוביים}\}$
 (ה) $\{0\} \neq \{\}$

6. רק אחד מהפסוקים הבאים הוא פסוק אמת. סמן אותו:

- (א) $0 \in \{\}$ (ב) $0 \in \{0\}$ (ג) $0 \in \{(0, 0)\}$
 (ד) $0 \in \{10, 20, 30, 40\}$ (ה) $0 \in \{x \mid x = 10^n, n \text{ שלם}\}$

7. נתונה הקבוצה $\{2, 4, 6, 8\}$. סמן את הקבוצה המשלימה

אותה לקבוצה $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- (א) $\{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ (ב) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
 (ג) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (ד) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$
 (ה) $\{1, 3, 7, 5\}$

8. הגרף:



הוא גרף של אחת מהקבוצות הבאות, סמן קבוצה זו.

- (א) $\{a \mid a < -2 \text{ או } a > 3\}$ (ב) $\{a \mid -2 < a < 3\}$
 (ג) $\{\}$ (ד) $\{a \mid 3 < a < -2\}$
 (ה) {כל המספרים}

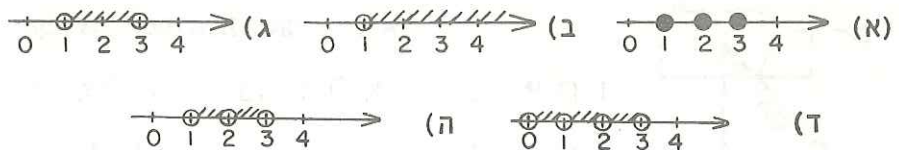
9. נתונות שתי קבוצות על ציר המספרים:



סמן את הטענה הנכונה:

- (א) $A \subset B$ (ב) $B \subset A$ (ג) $A \cap B \neq \{ \}$ (ד) $A \cap B = \{ \}$
 (ה) $A \cap B = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

10. איזה מבין הגרפים הבאים מתאר את הקבוצה $B = \{1, 2, 3\}$

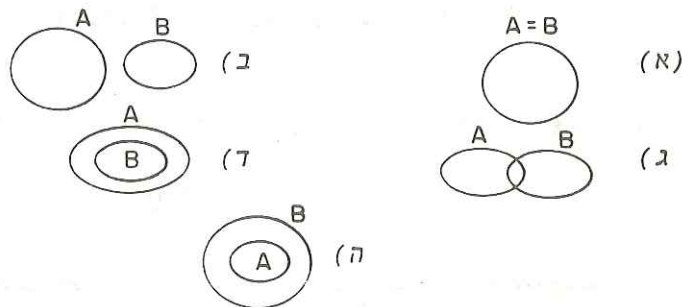


11. אם $A \cup B = A \cap B$ אז:

- (א) $A = B$ (ב) $A \neq \{ \}$, $B = \{ \}$ (ג) $A \neq B$ ו $A \subset B$ (ד) $A = \{ \}$, $B \neq \{ \}$
 (ה) A ו B זרות

ניסוח אחר לשאלה זו:

נתונות שתי קבוצות A ו B המקיימות: $A \cup B = A \cap B$
 הדיאגרמה המתאימה לתאור הקבוצות:

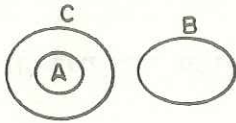


12. נתונות שתי קבוצות $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{ \text{המספרים הזוגיים בין 1 ל 9} \}$

סמן את פסוק השקר:

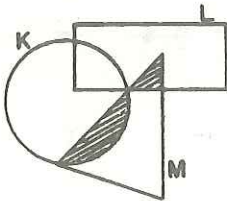
- (א) $A = B$ (ב) $A \subset B$ (ג) $B \subset A$ (ד) $A \cup B = B$
 (ה) $A \cap B = \{ \}$



13. שלוש הקבוצות המתאימות לדיאגרמה זו הן:

- (א) $A = \{\text{הראשוניים}\}$ $B = \{x \mid 7 < x < 10\}$ $C = \{\text{טבעיים}\}$
 (ב) $A = \{\text{איזוגיים}\}$ $B = \{\text{זוגיים}\}$ $C = \{\text{טבעיים}\}$
 (ג) $A = \{2\}$ $B = \{10, 11, 12\}$ $C = \{1, 2, 5, 6, 7\}$
 (ד) $A = \{a \mid a > 2\}$ $B = \{a \mid a < 6\}$ $C = \{a \mid a > 4\}$
 (ה) $A = \{a \mid a < 2\}$ $B = \{a \mid a > 5\}$ $C = \{a \mid -1 < a < 4\}$

14. L , K ו- M הן הקבוצות המפורטות בדיאגרמה:



הקבוצה המסומנת באפור היא:

- (א) $L \cap K$ (ב) $M \cap K$ (ג) $L \cap M$
 (ד) $(L \cap M) \cup (K \cap M)$ (ה) $L \cup K \cup M$

15. נתונות שלוש קבוצות:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cap B \cap C =$$

- (א) $\{3, 4\}$ (ב) $\{3, 4, 6\}$ (ג) $\{0\}$
 (ד) $\{\}$ (ה) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

16. נתונות הקבוצות: $A = \{x \mid -4 < x < 0\}$ $B = \{x \mid |x| < 6\}$

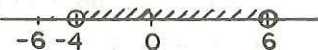
הגרף המתאים ל- $A \cap B$ הוא:



(א)



(ב)

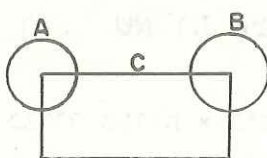


(ג)



(ד)

(ה) $\{\}$



17. A, B ו C הן הקבוצות המפורטות בדיאגרמה.

סמן את הפסוק שהוא פסוק אמת:

(א) $A \cup B = C$ (ב) $A \cap B = C$

(ג) $A \cup B = \{ \quad \}$ (ד) $A \cap B = \{ \quad \}$

(ה) $A \cap C = B \cap C$

18. לכל שתי קבוצות A ו B שאינן הקבוצה הריקה, קיים:

(א) $A \cup B \subset A$ (ב) $A \cup B \subset B$

(ג) $A \cap B \subset A \cup B$ (ד) $A \cap B \supset A$

(ה) $A \cap B \supset B$

19. נתונות הקבוצות A ו B: $A = \{(x, y) \mid y = 3\}$

$B = \{y \mid y = 3\}$

סמן את הפסוק שהוא פסוק אמת.

(א) $A = B$ (ב) $A \subset B$ (ג) $B \subset A$

(ד) $A \cap B = \{3\}$ (ה) $A \cap B = \{ \quad \}$

ההערה: B קבוצה המכילה רק את המספר 3 (על ציר המספרים).

A היא קבוצה של זוגות סדורים מהצורה $(x, 3)$,

(הישר $y = 3$ במערכת צירים).

לכן, אינן להן איברים משותפים.

חלק ד': שאלות העשרה

1.

נגדיר פעולה $\times$ בין שתי קבוצות:

לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ קיים: $(a, b) \in A \times B$

(a, b) זוג סדור של מספרים).

דוגמא: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 5\}$

$A \times B = \{(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5)\}$

ענה על השאלות:

א) $A = \{2, 0, -5, 7\}$ $B = \{-1, 0\}$

$A \times B =$ _____

ב) $A = \{10, 1\}$ $B = \{1\}$

$B = \{1\}$

$A \times B =$ _____

ג) האם קיים חוק החילוף בפעולה $\times$? כלומר, האם הקבוצה

$A \times B$ שווה לקבוצה $B \times A$, לכל שתי קבוצות A ו B ?

ד) בקבוצה A ישנם 20 איברים. בקבוצה B 10 איברים.

כמה איברים יש ב $A \times B$? ב $B \times A$?

תשובה:

א) $A \times B = \{(-5, -1), (-5, 0), (2, -1), (2, 0), (0, -1), (0, 0), (7, -1), (7, 0)\}$

ב) $A \times B = \{(2, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1)\}$

ג) לא. לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$

אברי $A \times B$ הם זוגות סדורים מן הצורה (a, b) . אברי

$B \times A$ הם זוגות סדורים מן הצורה (b, a) .

הזוג הסדור (a, b) שונה מן הזוג הסדור (b, a) , כי בזוג

סדור יש משמעות לסדר האיברים.

לכן לא קיים חוק החילוף בפעולה $\times$.

ד) גם ב $A \times B$ וגם ב $B \times A$ יש 200 איברים.

2. אילו מבין הפסוקים הבאים הם פסוקי אמת לכל שתי הקבוצות A ו B:

- I. $A \cup B \supset A$
 II. $A \cup B \subset B$
 III. $A \cap B \subset B$
 IV. $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

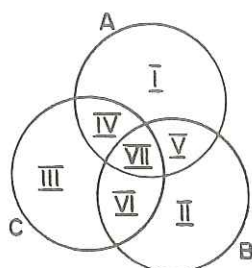
תשובה: פסוקי האמת הם: I, III, IV.

3. תהיינה A, B ו C הקבוצות:

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$C = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$$



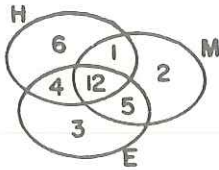
בשרטוט שלפניך, דיאגרמת וון המתארת את הקבוצות A, B ו C והיחסים ביניהן. בדיאגרמה מופיעים שבעה תחומים המסומנים I, II, ..., VII. תאר במילים, כל אחד מן התחומים המתקבלים.

תשובה:

- I: תחום המספרים הטבעיים המתחלקים ב 2 ואינם כפולות של 3
 או 5: 2, 4, 8, 14, ...
- II: תחום המספרים הטבעיים המתחלקים ב 3 ואינם כפולות של 2
 או 5: 3, 9, 21, 27, ...
- III: תחום המספרים הטבעיים המתחלקים ב 5 ואינם כפולות של 2
 או 3: 5, 25, 35, 55, ...
- IV: תחום המספרים הטבעיים המתחלקים ב 2 וב 5 אך לא ב 3:
 10, 20, 40, 50, ...
- V: תחום המספרים הטבעיים המתחלקים ב 2 וב 3 אך לא ב 5:
 6, 12, 18, 24, ...
- VI: תחום המספרים הטבעיים המתחלקים ב 3 וב 5 אך לא ב 2:
 15, 45, 75, ...
- VII: תחום המספרים הטבעיים המתחלקים גם ב 2, גם ב 3 וגם ב 5 (הכפולות של 30).
- 30, 60, 90, ...

4.

בכיתות ח-1 ו ח-2 לומדים 70 תלמידים. הדיאגרמה הבאה מתארת את מספר התלמידים בכיתות חי הלומדים עברית (H), אנגלית (E) ומתמטיקה (M) ברמה א'.



ענה על השאלות:

- כמה תלמידים מכיתות חי לומדים את שלושת המקצועות ברמה א'?
- כמה תלמידים לומדים ברמה א' רק מקצוע אחד?
- כמה תלמידים לומדים עברית ברמה א'?
- מה מתאר המספר 5 שבדיאגרמה?
- כמה תלמידים לומדים גם אנגלית וגם עברית ברמה א', אבל לא מתמטיקה?
- כמה מתלמידי כיתות ח-1 ו ח-2 לומדים לפחות אחד מן המקצועות ברמה ב' או ג'?

תשובה:

- 12 תלמידים (השטח המשותף לשלושת הקבוצות).
- 11 תלמידים $(2 + 3 + 6)$.
- 23 תלמידים $(6 + 4 + 12 + 1)$.
- מספר התלמידים הלומדים גם אנגלית וגם מתמטיקה ברמה א', אבל לא עברית.
- 4 תלמידים.
- 58 תלמידים $(70 - 12)$.

5.

נגדיר $n(A)$ מספר האיברים בקבוצה A (סופית).
תן דוגמא לשתי קבוצות A ו B המקיימות:

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B)$$

תשובה: כל שתי קבוצות זרות A ו B לדוגמא:

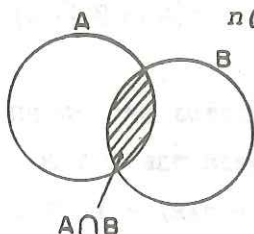
$$B = \{1, 2, 3\} \quad A = \{5, 6\}$$

לגבי $A = B = \{ \}$ התנאי מתמלא באופן ריק.

אותה שאלה בצורה כללית יותר:
 נתונות שתי קבוצות A ו- B .
 מה תוכל לומר על $n(A) + n(B)$ לעומת $n(A \cup B)$?

תשובה: לכל שתי קבוצות A ו- B

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



הערה: אם A ו- B אינן זרות, ב- $n(A) + n(B)$ סופרים פעמיים את האיברים ב- $A \cap B$, פעם ב- $n(A)$ ופעם ב- $n(B)$. לכן אם נחסר מ- $n(A) + n(B)$ את $n(A \cap B)$ נקבל $n(A \cup B)$ כאשר סופרים כל איבר פעם אחת בלבד.

אם הקבוצות A ו- B זרות הרי $A \cap B = \{ \}$ כלומר $n(A \cap B) = 0$, לכן $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

6. ערכו סקר על לפני חימום דירות בישראל ומצאו כי מתוך 1000 דירות, ב-502 דירות משתמשים בגז לחימום, ב-454 דירות משתמשים בחשמל וב-448 דירות משתמשים בנפט. ב-158 מהדירות משתמשים בגז וחשמל, ב-160 דירות בגז ובנפט וב-134 דירות בחשמל ובנפט.

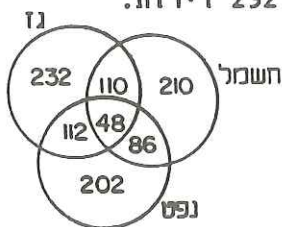
(א) בכמה דירות משתמשים בכל צורות החימום?
 (ב) בכמה דירות משתמשים רק בנפט? רק בחשמל? רק בגז?

תשובה:

(א) ב-48 דירות

(ב) רק בנפט 202, רק בחשמל 210, רק בגז 232 דירות.

הדיאגרמה:

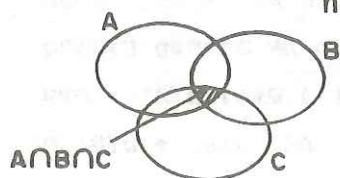


7. לכל שלוש קבוצות A, B ו C:

$$\begin{array}{ll} n(A \cup B \cup C) & \text{מצא מהו} \\ n(A) + n(B) + n(C) & \text{לעומת} \end{array}$$

תשובה:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)] + n(A \cap B \cap C)$$



הערה: אם נתייחס לקבוצות A

B ו C שבדיאגרמה הרי

ב $n(A) + n(B) + n(C)$ סופרים

פעמיים את האיברים שנמצאים ב $A \cap B$, ב $B \cap C$ וב $A \cap C$

לכן יש לחסר מ $n(A + B + C)$ את הסכום

$$n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$$

כמו כן ב $n(A) + n(B) + n(C)$ ספרנו שלוש פעמים את האיברים

שנמצאים ב $A \cap B \cap C$. וגם בסכום

$$n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$$

ספרנו שלוש פעמים את האיברים הנמצאים ב $A \cap B \cap C$

לכן בהפרש

$$n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C)]$$

לא נספרו כלל האיברים ב $A \cap B \cap C$.

אם נוסיף אותם להפרש הנ"ל פעם אחת נקבל:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + \\ &\quad n(B \cap C) + n(A \cap C)] + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

8. נתון: {שעורי הנקודות על ציר x במערכת צירים} $A =$

$$B = \{(0, 0)\}$$

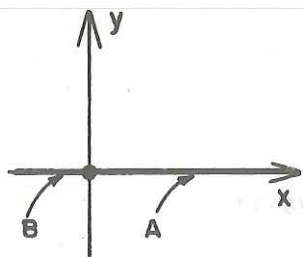
$$A \cap X = B \text{ מהו } x ?$$

תשובה: הקבוצה x אינה קבוצה יחידה.

להלן מספר דוגמאות:

$$(א) \quad x = \{(0, 0)\}$$

$$(ב) \quad x = \left\{ \begin{array}{l} \text{שעורי הנקודות} \\ \text{על ציר } y \end{array} \right\}$$



ניסוח השאלה בצורה כללית יותר:

נתונות שתי קבוצות A ו B וקבוצה x כך ש:

$$A \cap x = B$$

מהו x ?

תשובה: (א) אם $A = B = \{ \quad \}$ הרי $x =$ קבוצה כלשהי.

(ב) אם $B = \{ \quad \}$ ו $A \neq \{ \quad \}$ הרי $x = \{ \quad \}$.

(ג) אם $A \subset B$ $A \neq \{ \quad \}$ הרי x לא קיימת.

(ד) אם $B \neq \{ \quad \}$ $A = B$ הרי $x \supseteq B$.

(ה) אם $B \neq \{ \quad \}$, $B \neq A$, הרי x אינה חד-משמעית.

9. נתונות שתי קבוצות A ו B וקבוצה x כך ש: $A \cup x = B$.

מהו x ?

תשובה: (א) אם $A = \{ \quad \}$ הרי $x = B$

(ב) אם $A \subseteq B$ ו $A \neq \{ \quad \}$ יש מספר פתרונות ל x.

(ג) x לא קיימת אם:

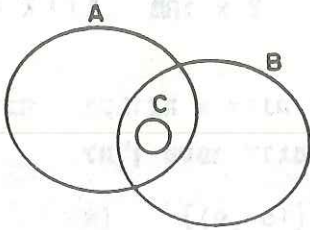
(i) $A \subseteq B$, $A \neq \{ \quad \}$

(ii) $A \cap B = \{ \quad \}$, $A \neq \{ \quad \}$, $B \neq \{ \quad \}$

(iii) $B \subset A$, $B \neq \{ \quad \}$

10. תן דוגמא לשלוש קבוצות A, B ו C המקיימות:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$



תשובה: דוגמא I.

$$A = \{x \mid x > 7\}$$

$$B = \{x \mid x < 10\}$$

$$C = \{x \mid 7 < x < 10\}$$

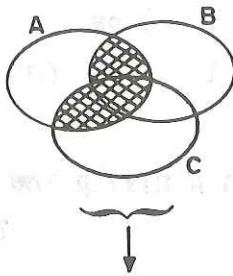
דוגמא II.

דוגמא III.

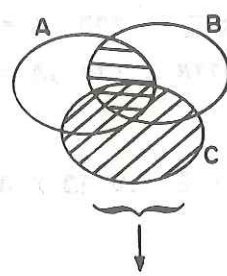
$$A = \{\text{מצולעים}\}$$

$$B = \{\text{מלבנים}\}$$

$$C = \{\text{ריבועים}\}$$



$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup C$$

לכן כדי שהקבוצות $A \cap (B \cup C)$ ו $(A \cap B) \cup C$ תהיינה שוות חייב להתקיים:

$$C \subset A \cap B \text{ ו } C \subset B \text{ ו } C \subset A$$

11. נתון: $P \cup N = E \cup N$

האם $E = P$? הוכח.

תשובה: לא, לדוגמא:

$$E = \{1, 2\}$$

$$P = \{3, 4\}$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

לכל שלוש קבוצות המקיימות $E \subset N$ וגם $P \subset N$

המשפט קיים.

סעיף אחר לאותה שאלה:

נתון: $I \cap T = R \cap T$

האם: $I = R$? הוכח.

$$I = \{1, 2, 3\}$$

תשובה: לא, לדוגמא:

$$R = \{3, 4, 5\}$$

$$T = \{3\}$$

לכל שלוש קבוצות המקיימות $T \subset I$ וגם $T \subset R$ המשפט קיים.

הערה: שאלות 7-11 לקורות מתוך הספר:

D.E. Mansfield and M. Bruckheimer, "Background to Set and Group Theory". Chatto and Windus, London, 1966.

חלק ה': מבחן

I. השיקולים בעריכת המבחן

להוראת הפרק מוקדשים כ 10 שעורים. ההדגשה היא על הבנת מושג הקבוצה ומושגים יסודיים הנגזרים ממנו. וכן, הכרה של צורות שונות לתיאור הקבוצה (צורה מילולית, צורה גרפית).

ניקח לדוגמא כיתה ברמה ב' ונערוך לה טבלת תכנון אפשרית למבחן:

חיתוך ואיחוד של קבוצות, דיאגרמות וון	גרפים של קבוצות על ציר המספרים	מושג האיבר והקבוצה, קבוצות שוות חלקיות וזרות.	תכנים לימודיים / רמות קוגניטיביות
2 שאלות מספר: 8, 5, 3	1 שאלות מספר: 9, 4, 2	4 שאלה מספר: 1	ידע - טכניקה
3 שאלות מספר: 7, 6		5 שאלה מספר: 10	הבנה - יישום

המספרים במשבצות נותנים את סדר העדיפויות של המשבצות השונות. סדר עדיפות זה קובע את מספר השאלות מכל משבצת שניתן במבחן ו/או את המשקל היחסי של הציון על שאלות אלו מתוך כלל השאלות במבחן. לדוגמא: משבצת המסומנת במספר 1 נמצאת בסדר העדיפות הגבוה ביותר, ומשקלן היחסי של השאלות הבודקות משבצת זו הוא הגבוה ביותר במבחן. (בדיוק לפי מספרי השאלות המופיעים בטבלה. השאלות והציון מופיעים במבחן שבעמודים 131-132).

שיקולים נוספים בעריכת המבחן:

- ניתן להשתמש במושג הקבוצה לבדיקת ידע קודם כגון: ערך מוחלט, מושגים שונים בהנדסה.
- במבחן, כפי שמשתקף מתוך טבלת התכנון, הושגם דגש על תת הנושא "גרפים של קבוצות על ציר המספרים", וזאת כיון שבפרקים הבאים ישנו שימוש די רחב בתת נושא זה.

II. המבחן

חלק א':

1. (10%) א) נתון: $A = \{2, 3\}$

$B = \{\text{המספרים הראשוניים הקטנים מ-5}\}$

האם $A = B$?

ב) נתון: $C = \{1, 5, 7, 9\}$

$D = \{\text{המספרים האיזוגיים הקטנים מ-10}\}$

האם $C = D$?

2. (10%) כתוב במילים ובכתיב אלגברי של קבוצות את הקבוצה

המתוארת בגרף:



3. (10%) נתונות שתי קבוצות:

$$B = \{x \mid x > -2\} \quad A = \{x \mid x < 3\}$$

שרטט את גרף החיתוך של שתי קבוצות אלה.

4. (25%) לפניך גרפים של שתי קבוצות A ו-B.



כל אחת מהקבוצות הבאות שווה לאחת משתי הקבוצות או לקבוצה הריקה. סמן ליד כל קבוצה A, B או $\{\}$.

א) $\{x \mid -2 < x < 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$

ב) $\{x \mid x > 2 \text{ או } x < -2\} = \underline{\hspace{2cm}}$

ג) $\{x \mid x > 2 \text{ וגם } x < -2\} = \underline{\hspace{2cm}}$

ד) $\{\text{המספרים בין 2 ל-2}\} = \underline{\hspace{2cm}}$

ה) $\{\text{המספרים הגדולים מ-2 וגם קטנים מ-2}\} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. (10%) תהי A קבוצת הנקודות במישור שהשיעור הראשון שלהן הוא 3.
תהי B קבוצת הנקודות במישור שהשיעור השני שלהן הוא 5.
מהי $A \cap B$?

6. (10%) מצא את מספר האיברים ב $A \cup B$ אם:

(א) A ו B זרות. ב A 5 איברים, ב B 6 איברים.

(ב) A ו B שוות. ב B 7 איברים.

7. (10%) תהי A קבוצה כלשהי.

מצא: $A \cap A$, $A \cup A$, $(A \cap A) \cup A$, $(A \cup A) \cap A$, $A \cap \{ \}$.

חלק ב': סמן את התשובה הנכונה:

8. (5%) אם: {המספרים המתחלקים ב 2} = A

{המספרים המתחלקים ב 3} = B

{המספרים המתחלקים ב 5} = C

המספר 75 הוא איבר של:

(א) $A \cap B \cap C$ (ב) $B \cap C$ (ג) $A \cap B$

(ד) $A \cap C$ (ה) A

9. (5%) הגרף  הוא הגרף של אחת מהקבוצות

הבאות. סמן קבוצה זו.

(א) $\{a \mid -2 < a < 3\}$ (ב) $\{ \}$

(ג) $\{a \mid 3 < a < -2\}$ (ד) {כל המספרים}

(ה) $\{a \mid a < -2 \text{ או } a > 3\}$

10. (5%) נתונה הקבוצה: {כל זוגות המספרים אשר מכפלתם קטנה מ 8}

אחת מבין הקבוצות הבאות שווה לה. סמן אותה:

(א) $\{a \mid a < 8\}$ (ב) $\{(a,b) \mid ab < 8\}$

(ג) $\{(a,b) \mid a + b < 8\}$ (ד) $\{(a,b) \mid a + b > 8\}$

(ה) $\{(4,1), (3,2), (1,3), (1,7)\}$