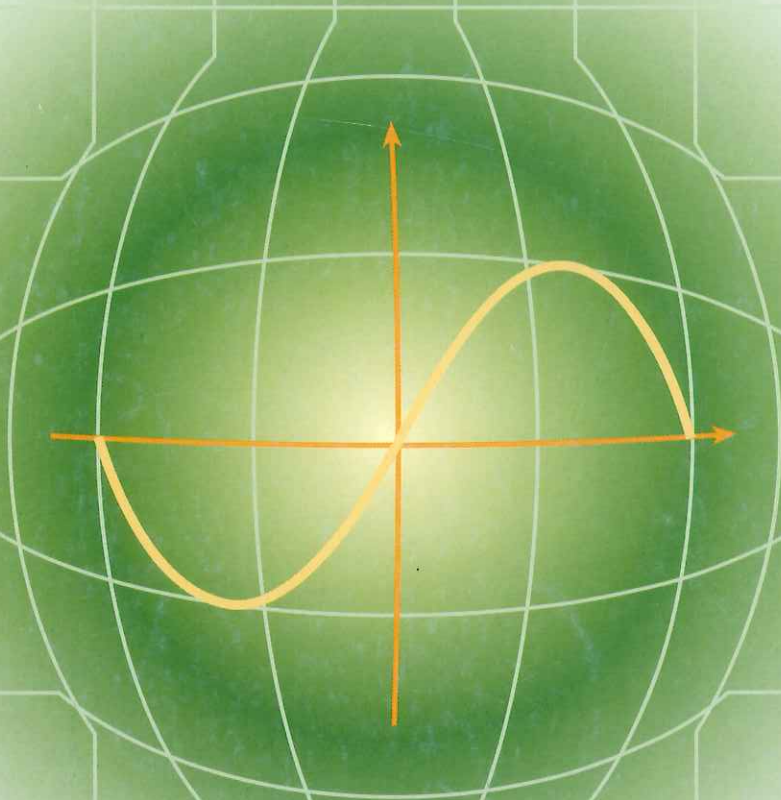


מתמטיקה לפי תכנית הצבירה

שאלון ב

שלום יחידות



מטה מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי
ע"ש עמוס דה-שליט



משרד החינוך, התרבות והספורט
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים



המחלקה להוראת המדעים



מתמטיקה לפי תכנית הצבירה

שלוש יחידות שאלון ב

נורית הדס
יוני עמיר
איטה נפתליס



משרד החינוך התרבות והספורט

7.6.2004

אישור מס'

4102/נ

אושר בתאריך

מכון ויצמן למדע



המחלקה להוראת המדעים

יוצא לאור במסגרת

מטה מל"מ – המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט



משרד החינוך, התרבות והספורט, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים



חובר על-ידי:
נורית הדס
יוני עמיר
איטה נפתליס

ייעוץ:
רחל בוהדנה

ראש הפרוייקט:
פרופ' אברהם הרכבי

הדפסה ועריכה במחשב:
אבי טל

הגהה לשונית:
יטי ורון

גרפיקה:
חנה וגה

עיצוב והפקה:
טליה מלול

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבחוברת זו. שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בחוברת זו אסור בהחלט אלא ברשות מפורשת בכתב מהמוציא לאור.



כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע ומשרד החינוך

הודפס בישראל, אדר ב' תשס"ה, מרץ 2005

אל המורים והתלמידים

ספר זה הוא שני בסדרת הספרים במתמטיקה ל- 3 יחידות (ש"י) והוא עוסק בנושאים השייכים לשאלון השני במבנה הצבירה.

עקב שינויים חוזרים בתוכנית בחינת הבגרות יש בספר סעיפים שהוצאו לאחרונה מהתוכנית הניל. בכל סעיף כזה נרשם שהנושא אינו מופיע בתוכנית הבחינה ושהוא סעיף רשות - לשיקול דעתו של המורה. בחלק מהמקרים הנושא רלוונטי ללימודים לקראת השאלון השלישי.

בספר מושם דגש על שיתוף התלמיד בבניית הנושאים השונים. אנו מאמינים כי לימוד המבוסס על מעורבות והבנה הוא לימוד משמעותי העשוי להביא הנאה ללומד. בהתאם לכך, המושגים והנושאים החדשים מבוססים על שימוש בשכל ישר, בהרבה שרטוטים, בהסקת מסקנות, ובניסיון ליצור תחושה של הבנה והזדמנויות חוזרות להצלחה. כדי לעזור בכך תמצאו בסוף הספר דפי עזר לגזירה* ודפים שקופים והנחיות לשימוש במקומות המתאימים בספר. כמו כן, ראוי לציין כי הלימוד אינו מבוסס על זכירת המושגים שנלמדו בשנים קודמות וכשיש צורך לעשות שימוש בידע כזה, התזכורת וההסבר משולבים בהוראת הנושא החדש. מנסיונו למדנו כי לימוד כזה מאפשר הצלחה גם לתלמידים שלא הצליחו בעבר בלימוד מתמטיקה וההצלחה גוררת בעקבותיה את הרצון והיכולת להמשיך ולהתקדם בנושאי הלימוד השונים.

ייתכן שבפתרון הבעיות הגיאומטריות בפרקים ג' ו- ד' תקבלו תוצאות שונות במקצת מהתשובות הרשומות ב"מבחר התשובות", דבר הנובע מעיגול המספרים המתקבלים במחשבון בשלבים השונים. אם תשובתכם קרובה לרשומה הרי שודאי פתרתם נכון.



הספר מכיל את הפרקים הבאים:

פרק א - פונקציות ומשוואות: בו תחזרו על מושגים יסודיים בפונקציות בכלל ותחקרו פונקציות ריבועיות בפרט, תקשרו בין פתרון משוואות לפונקציות ותפתרו משוואות מורכבות מאלה שפתרתם בלימודיכם הקודמים.

פרק ב - סדרות, חזקות, גידול ודעיכה: בפרק זה תחזרו מעט על מה שלמדתם בנושא הסדרות ותרחיבו נושא זה. תכירו אופנים שונים להגדרת סדרות, תעסקו בסדרה הנדסית ובעזרתה תלמדו להכיר תופעות של גידול ודעיכה ולבצע חישובים שונים הקשורים בתופעות אלה. השימוש בחזקות, בחוקי החזקות ובמשוואות מעריכיות משתלב בהוראת הנושא סדרה הנדסית.

פרק ג - הפונקציות הטריגונומטריות ויישומיהן במישור: לאחר הכרות קצרה עם המושג "פונקציה מחזורית" תכירו את הפונקציות המחזוריות $\sin x$ ו- $\cos x$ ובהמשך גם את הפונקציה $\tan x$. תלמדו את הקשרים ביניהן ותפתרו משוואות פשוטות הקשורות לפונקציות אלה. כמו כן תפתרו בעיות גיאומטריות במישור בעזרת הפונקציות הטריגונומטריות ומשפט פיתגורס.

פרק ד - יישומים טריגונומטריים במרחב: בפרק זה תכירו מושגים הקשורים בגיאומטריה מרחבית ותשתמשו בידע הטריגונומטרי כדי לפתור בעיות חישוב במרחב. הפרק משלב פעילויות התומכות בראייה המרחבית, ודרכים נוספות המאפשרות לפתור את הבעיות באמצעות עזרים פשוטים (כמו קיסמים וקלקרים).

פרק ה - תכנון לינארי: מתחילת הפרק ועד סופו משולבות בעיות של "תכנון לינארי". בתחילת הלימוד תיישמו יידע קודם של קריאת שיעורי נקודות ופעולות חשבוניות בלבד ובהמשך,

* לצורך שימוש חוזר בספר עדיף לצלם את העמודים לגזירה ולהשתמש בצילומים.

לאחר לימוד המושגים השונים, תשלבו בכל פעם יותר פעולות שהן שלבים בפתרון בעיות של תכנון לינארי (כמו שרטוט מערכות של אי שוויונים, שרטוט קווי גובה, מציאת אופטימום). לבסוף תעסקו גם בפתרון בעיות שלמות.

פרק 1 - הסתברות והתפלגות נורמלית: בפרק זה תכירו מושגים בהסתברות ותתעמתו עם שאלות בהן תצטרכו לשער הוגנות של משחקים, הצלחה בהגרלות וכיו. במהלך הלימוד תכירו דרכים שונות לייצוג התוצאות האפשריות ותיעזרו בהן כדי לבדוק את השערותיכם ולפתור בעיות בהסתברות. כמו כן, תלמדו להכיר מהי התפלגות נורמלית ולהיעזר בה לפתרון בעיות.

פרק 2 - משוואות, גרפים ופעולות אלגבריות: פרק זה עוסק במשוואות פרמטריות ובפעולות אלגבריות מורכבות מאלה שהכרתם עד כה. כמו בפרקים אי ובי גם כאן תקשרו בין תאור גרפי לפתרון משוואות.

אנו ממליצים לעסוק בכיתה בשני נושאים במקביל. להלן הצעה לשני המסלולים.

מסלול 1: פרקים א, ב, ו-ו.

מסלול 2: פרקים ג, ד, ו-ו.

הפרק האחרון, פרק ז: משוואות גרפים ופעולות אלגבריות, קשה יותר וכדאי ללמדו בסוף אחד המסלולים.

מבנה הספר:

הספר מחולק לפרקים על-פי הנושאים. כל נושא מחולק לסעיפים. בחלק הראשון של כל סעיף תכירו, תוך התנסות, את הנושא והמושגים החדשים המופיעים בו. בחלק השני תפתרו תרגילים לביסוס החומר שנלמד בסעיף עצמו ובסעיפים הקודמים. בסיום של כל פרק מובאות תשובות לחלק מהתרגילים תחת הכותרת "מבחר תשובות".

אנו מקווים שצורת לימוד תוך פעילות והתנסות תעזור לכם להפיק תועלת וליהנות מהלימוד.

באור סמלים:

תרגיל "מפתח", בו נלמד עניין חדש  תרגיל חזרה 

עבודה עצמית  תרגיל בעזרת מחשבון 

שימו לב  להנאתכם! 

אתגר, תרגיל "קצת יותר קשה"  תזכורת 

דיון  סיכום 

מורה מסביר  הגדרה 

הכנה 

תוכן עניינים

עמודים

פרק א: פונקציות ומשוואות	9-62
תכונות וסימון פונקציות	9
גרף של פונקציה ריבועית	16
נקודות חיתוך	23
גרף של פונקציה ריבועית - ימינה ושמאלה	26
על כל הפונקציות הריבועיות	29
פונקציות ריבועיות באמצעות מחשב	34
מפונקציה ריבועית למשוואה ריבועית	37
יש בכלל נקודות חיתוך?	42
נוסחאות הכפל ופתרון משוואות	51
פירוק לגורמים ופתרון משוואות	54
מבחר תשובות	59
פרק ב: סדרות, חזקות, גידול ודעיכה	63-204
סדרות: כללי נסיגה, סדרה לפי מקום וסדרה חשבונית	
מושגים	63
רישום החוק במילים	70
רישום החוק בסימנים	76
כללי נסיגה (בעזרת גליון אלקטרוני Excel)	81
כללי נסיגה וגרף במחשב (בעזרת גליון אלקטרוני Excel)	84
כללי נסיגה שונים	89
כללי נסיגה וסדרה לפי מקום	95
סדרה חשבונית - חזרה ותרגול נוסף	103
תרגול נוסף בנושאים כלל נסיגה וכלל לפי מקום	110
עוד סדרה	116
מחזקות לסדרה הנדסית ולתופעות של גידול ודעיכה	
חזקות עם מעריך טבעי	118
עוד על חוקי חזקות	123
מספרים גדולים במחשבון וכתוב מדעי של מספרים גדולים	127
סדרה הנדסית	133
סדרות חשבוניות והנדסיות בצוותא	140
בעיות של גידול ודעיכה	147
הרחבת מושג החזקה ובעיות נוספות של גידול ודעיכה	
ומה "לפני האיבר הראשון"?	150

158	 חוקי חזקות ומעריך שלם
162	 כתיב מדעי של מספרים "קטנטנים"
166	 מעריך חזקה לא שלם
176	 גידול ודעיכה וזמן מחצית החיים
180	 מה פירוש ב"חזקת חצי"?
187	 סכום של סדרה הנדסית
190	 מבחר תשובות

פרק ג: הפונקציה הטריגונומטרית ויישומיהן במישור 205-338

הפונקציות הטריגונומטריות והקשרים ביניהן

205	 פונקציות מחזוריות
212	 עוד פונקציות מחזוריות
215	 פונקציה מחזורית וטיול על ריבוע
218	 הפונקציה S
229	 הפונקציה C
235	 זוגיות ואי-זוגיות
240	 פונקציות של הזוויות α , $(180-\alpha)$
246	 שניהם גם יחד
248	 פונקציות ומשוואות
250	 פתרון כללי של משוואות בעזרת מחשבון וגרף
255	 קשרים נוספים בין הפונקציות $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$
262	 קצת "מתיחות וכיווצים"

שימושי הפונקציות הטריגונומטריות לחישובים בהנדסה

268	 יוצאים מהמעגל
272	 תרגילי חזרה
276	 ביטויים במשולש
282	 עוד על שטח משולש
285	 מרובעים מבוא
288	 הקבלה וזיהוי
293	 אלכסונים במלבן
296	 מקבילית
302	 מעוין
304	 מצולע משוכלל ומעגל חוסם וחסום

פונקציה טריגונומטרית נוספת ושימושיה

310	 הפונקציה $\tan \alpha$
316	 $\tan(\alpha)$ משוואות
322	 $\tan(\alpha)$ במשולש ישר זווית

325	זווית גובה וזווית עומק
331	מבחר תשובות

פרק ד: יישומים טריגונומטריים במרחב 339-434

339	זוויות ישרות במרחב
345	היטלים
348	זווית בין ישר למישור
354	מנסרות
362	נפח ושטח פנים של מנסרה
373	קצת על המעגל והיקפו
377	שטח עיגול
381	גליל
388	שטח מעטפת של גליל
391	פירמידות
400	על נפח של פירמידה
405	שטח פנים של פירמידה
408	זווית בין מישורים
413	גופי סיבוב ובמיוחד חרוטים
421	שטח מעטפת של חרוט
424	מבחר תשובות

פרק ה: תכנון לינארי 435-512

435	נגיעה קלה בכלכלה - מבוא
437	בין מקבילים
443	"הפרד ומשול" במישור
445	שרטוט ישרים
448	עוד על הפרדה במישור
451	"טובים השניים מן האחד"
460	קוד לחישוב הקודקוד
465	התחום האפשרי
468	"אל המטרה"
471	על הגובה
475	משוואות של קווי גובה
478	"אל הקודקוד"
485	"חלוצים ואילוצים" - שאלות לסיכום
487	מי ירוויח יותר? עוד שאלות לסיכום
490	ארגן נתונים בתכנון לינארי

495	 "הכל פתוח"
498	 ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות
500	 בעיות שלמות
503	 מבחר תשובות

פרק ו: הסתברות והתפלגות נורמלית 513-598

הסתברות

513	 השערות ותחזיות - חזרה על מושגים בהסתברות
520	 רישום תוצאות שוות הסתברות
525	 "מאורעות משולבים" - מטבלה לריבוע שטח
535	 עוד על ריבוע שטח
538	 מציאת P
539	 ריבוע שטח ושאלות מהחיים
542	 ועוד שלבים - מודל העץ
546	 בניית העץ
550	 תרגילים נוספים לסיכום וחזרה
554	 הסתברות והבינום של ניוטון
563	 הסבר נוסף למקדמי נוסחת הבינום
	השלמות בסטטיסטיקה (הכנה להתפלגות נורמלית)

566	 מדדי פיזור
	התפלגות נורמלית

575	 מגרף שכיחויות להתפלגות נורמלית
581	 ציון תקן
586	 מאחזי האוכלוסיה לציון תקן
590	 ההתפלגות הנורמלית - תרגילים נוספים
592	 מבחר תשובות

פרק ז: משוואות, גרפים ופעולות אלגבריות 599-621

599	 משוואות עם פרמטר
603	 חקירה נוספת של משוואה עם פרמטר
605	 מערכות משוואות עם פרמטר
609	 ועוד סוג של משוואות
614	 קצת על גרפים ושברים אלגבריים
617	 מבחר תשובות

נספח 623-626

דפים לגזירה 627-652

דפים שקופים 653-662

פרק א: פונקציות ומשוואות

תכונות וסימון פונקציות

1. מרחק עצירה

מרחק עצירה של מכונית הוא המרחק שעוברת המכונית מהרגע בו רואים את הסכנה ועד לעצירתה של המכונית.

א) משה נסע במהירות של 60 קמ"ש, ודן במהירות של 30 קמ"ש. למי מהם, לדעתכם, מרחק עצירה גדול יותר?

ב) ניתן לתאר מרחק עצירה באמצעות פונקציה, הקושרת את המהירות ומרחק העצירה:

אם v מהירות הנסיעה של המכונית בק"מ לשעה, ו- d מרחק העצירה במטרים, אז הפונקציה המתארת את מרחק העצירה היא:

$$d = \frac{(v + 10)^2}{25} - 4$$

חשבו את מרחק העצירה של משה (נסע במהירות 60 קמ"ש).

מהירות הנסיעה הלא חוקית של דן הייתה 120 קמ"ש. מה מרחק העצירה שלו?

ג) מהירות הנסיעה של דן הייתה גדולה פי 2 ממהירות הנסיעה של משה. פי כמה גדול מרחק העצירה של דן ממרחק העצירה של משה?

ד) נהג הנוסע במהירות 50 קמ"ש, רואה לפניו מחסום במרחק של 50 מ'. האם יספיק לעצור?

ה) באיזו מהירות על נהג לנסוע, כדי להספיק לעצור לפני שידרוס כלב, הרובץ על הכביש במרחק של 32 מטר מהנקודה בה הבחין בכלב? (רשמו משוואה מתאימה ופתרו).

ו) באיזו מהירות על נהג לנסוע, כדי להספיק לעצור לפני מכשול המונח 96 מטר לפניו?

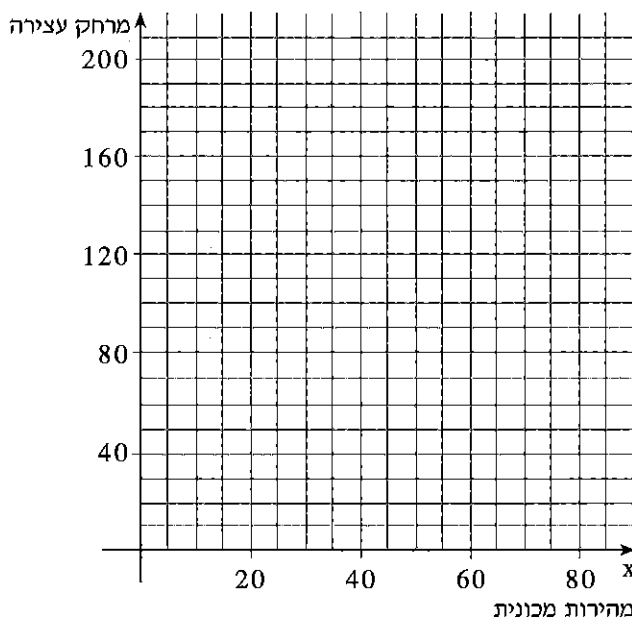
ז) באיזו מהירות על נהג לנסוע, כדי להספיק לעצור לפני רמזור הנמצא 60 מטר לפניו?

ח) באיזה מקרה מרחק העצירה הוא אפס? בידקו אם זו התשובה כשמציבים בנוסחה.

ט) סמנו, בערך, במערכת הצירים שבעמוד הבא, את הנקודות שמצאתם בסעיפים ד-ח.

המשך ←

(י) פשטו את התבנית. מה צריכה להיות צורת הגרף? השלימו את שרטוט הגרף.



(יא) הפונקציה המתארת את מרחק העצירה היא פונקציה ריבועית. כפי שלמדתם

גרף של פונקציה ריבועית הוא פרבולה.

מצד שני, ככל שהמהירות גדלה גִדֵּל מרחק העצירה, כלומר, הגרף עולה. הסבירו כיצד זה ייתכן.

(יב) היעזרו בגרף ובידקו האם ייתכנו המצבים הבאים:

— המהירות גדלה פי 2 וגם מרחק העצירה גדל פי 2.

— המהירות גדלה פי 3 ומרחק העצירה גדל ביותר מאשר פי 3.

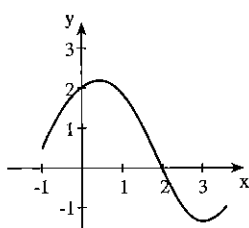
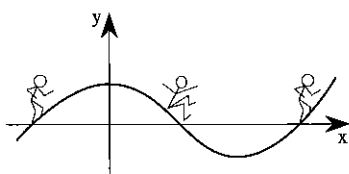
(יג) הפונקציה $m = \frac{(v + 5)^2}{20} - 6$ מתארת את מרחק העצירה של משאית במטרים.

v מהירות הנסיעה של המשאית בק"מ לשעה.

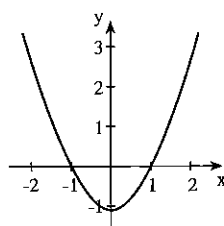
m מרחק העצירה במטרים.

המכונית והמשאית עלו משני צידיו של גשר עליו מסלול נסיעה יחיד. המרחק ביניהן 60 מטר. המכונית נוסעת במהירות 20 ק"מ לשעה, והמשאית במהירות 25 ק"מ לשעה. האם יספיקו לעצור? (חשבו את המרחק שנסעה כל סוג מכונית עד שעצרה.)

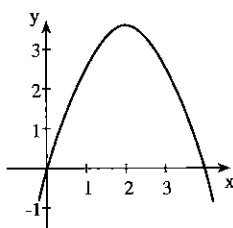
(יד) עבור איזו מהירות מרחק העצירה של המכונית שווה למרחק העצירה של המשאית?



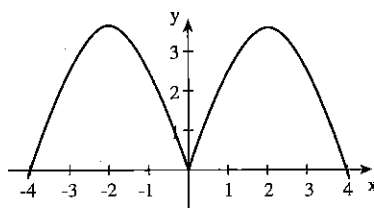
(ב



(2)



(7)

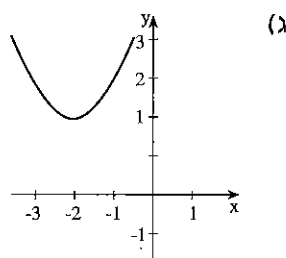
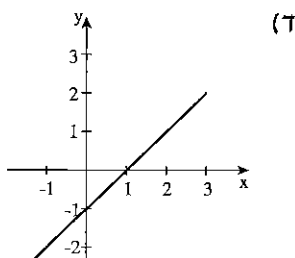
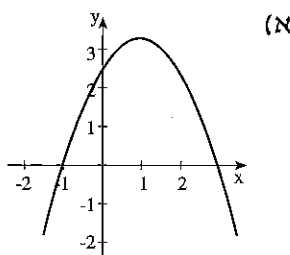
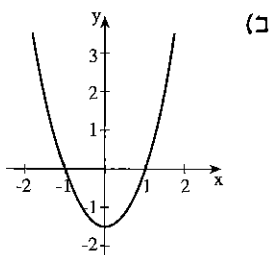


(2)

דאזעמ: פראנקציע, בילדט א, וואס באשרייבט X דאן מאכט איר א באשרייבונג X פאר א מאכט.

פרק א' פירוש ופירושים

4. רשמו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של כל פונקציה. 

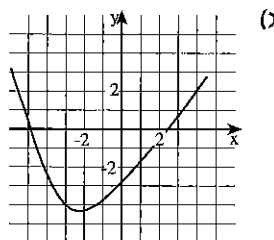
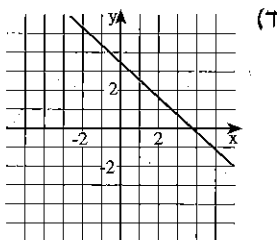
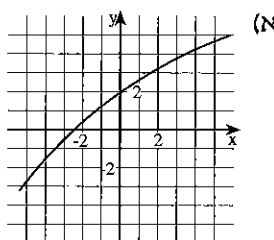
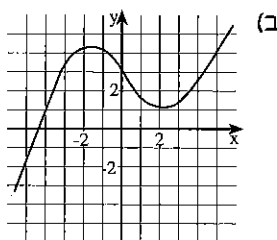


5. (i) צבעו, בכל גרף, חלקים מהגרף בהם הפונקציה עולה. 

צבעו, בצבע אחר, חלקים מהגרף בהם הפונקציה יורדת.

(ii) לאילו מן הגרפים יש נקודות מעבר מעלייה לירידה, או נקודות מעבר מירידה

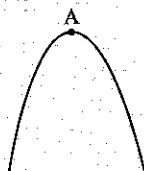
לעלייה? סמנו נקודות אלה.



(iii) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות.

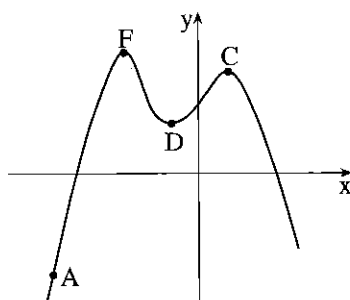


B נקודת מעבר מירידה לעלייה
נקודת מינימום (שפל).



A נקודת מעבר מעלייה לירידה
נקודת מקסימום (שיא).

נקודות מקסימום ונקודות מינימום נקראות בשם כולל **נקודות קיצון**.



6. נכון או לא נכון.

א) C אינה נקודת מקסימום כי F גבוהה ממנה.

ב) C היא נקודת מקסימום כי היא נקודת מעבר מעלייה לירידה.

ג) D אינה נקודת מינימום כי A נמוכה ממנה.

ד) תיתכן פונקציה עם שתי נקודות מקסימום.

ה) הנקודות F, C שתיהן נקודות מקסימום כי הן נקודות מעבר מעלייה לירידה.

ו) בפונקציה הזאת יש שלוש נקודות קיצון.

ז) תיתכן פונקציה עם שתי נקודות מקסימום ובלי מינימום.

נקודת מקסימום היא לא בהכרח הנקודה ה"גבוהה" ביותר על גרף הפונקציה.
נקודת מינימום היא לא בהכרח הנקודה ה"נמוכה" ביותר על גרף הפונקציה.



7. א) שרטטו (במחברתכם) גרף של פונקציה שיש לה שתי נקודות קיצון:

מקסימום בנקודה $(3, -2)$ ומינימום בנקודה $(-2, 3)$.

רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב) שרטטו גרף של פונקציה העולה כש- $x < -1$ ויורדת כש- $x > -1$.

האם יש לפונקציה נקודת קיצון? אם כן, מהי?

ג) שרטטו גרף של פונקציה היורדת בכל התחום.

ד) שרטטו גרף של פונקציה קבועה (אינה עולה ואינה יורדת). מהו חוק הפונקציה?

כדי להבחין בין פונקציות נהוג לתת לפונקציות שמות: $f, g, h, \dots$ ולהשתמש בשמות אלה כדי לרשום את חוק הפונקציה.

למשל: $f(x) = 2x^2 - 1$ (כתחליף ל: $y = 2x^2 - 1$)

קוראים זאת: f של x שווה ל...

8.  I. א $f(x) = x^2 + 4x$ הציבו וחשבו:

$$f(-3) = \quad f(0) = \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \quad f(5) = \quad f(-1) = \quad f(10) =$$

מצאו ערכי x אם $f(x) = 0$

ב) $g(x) = x^2 + 4$ הציבו וחשבו:

$$g(-3) = \quad g(0) = \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \quad g(5) = \quad g(-1) = \quad g(10) =$$

מצאו ערכי x אם $g(x) = 5$

ג) $m(x) = -2x + 5$ הציבו וחשבו:

$$m(0) = \quad m(-2) = \quad m(2) =$$

מצאו את ערכו של x אם: $m(x) = 0$ ואם: $m(x) = 7$

ד) $h(x) = -x^2 + 4x + 1$ הציבו וחשבו:

$$h(2) = \quad h(-1) = \quad h(1) =$$

מצאו את ערכי x אם: $h(x) = 1$

 שורשי המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{הם:}$$

מצאו ערכי x אם: $h(x) = -20$ ואם: $h(x) = 4$

ה) $k(x) = \frac{1}{2}x + 3$ הציבו וחשבו:

$$k(1) = \quad k(-2) = \quad k(2) =$$

מצאו את ערכו של x אם: $k(x) = 0$ ואם: $k(x) = -1$

חמשך

9 במערכות הצירים משורטטים חמשת הגרפים של הפונקציות שבשאלה הקודמת.

$$m(x) = -2x + 5$$

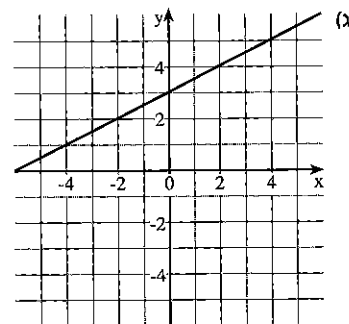
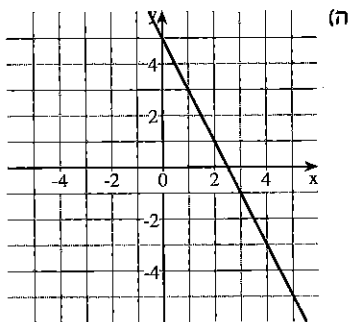
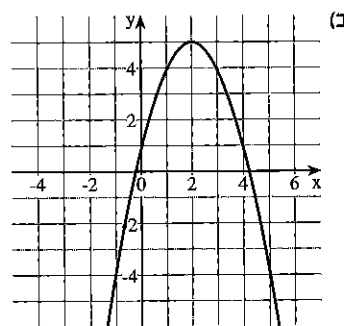
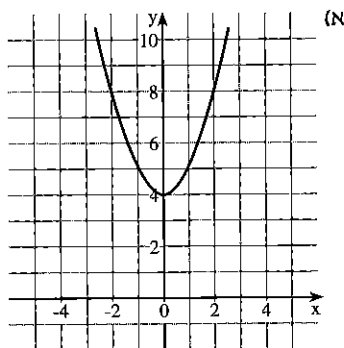
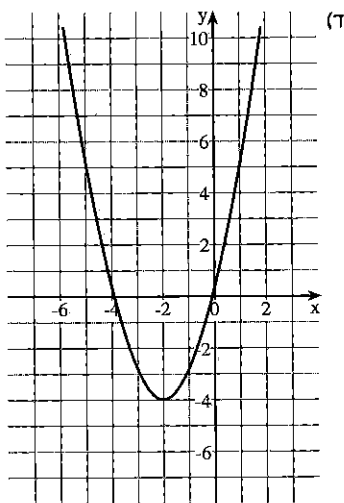
$$f(x) = x^2 + 4x$$

$$h(x) = -x^2 + 4x + 1$$

$$g(x) = x^2 + 4$$

$$k(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

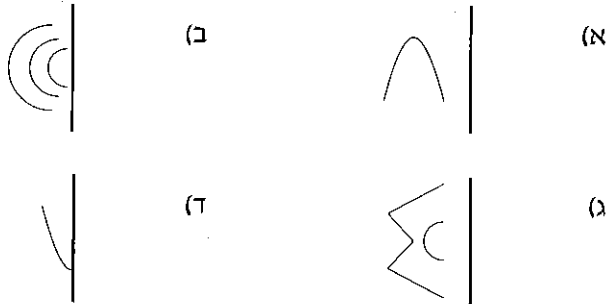
הצמידו כל גרף לפונקציה. (תוכלו להיעזר במה שלמדתם על פונקציות ריבועיות וקוויות, או בערכים שחישבתם.)



גרף של פונקציה ריבועית

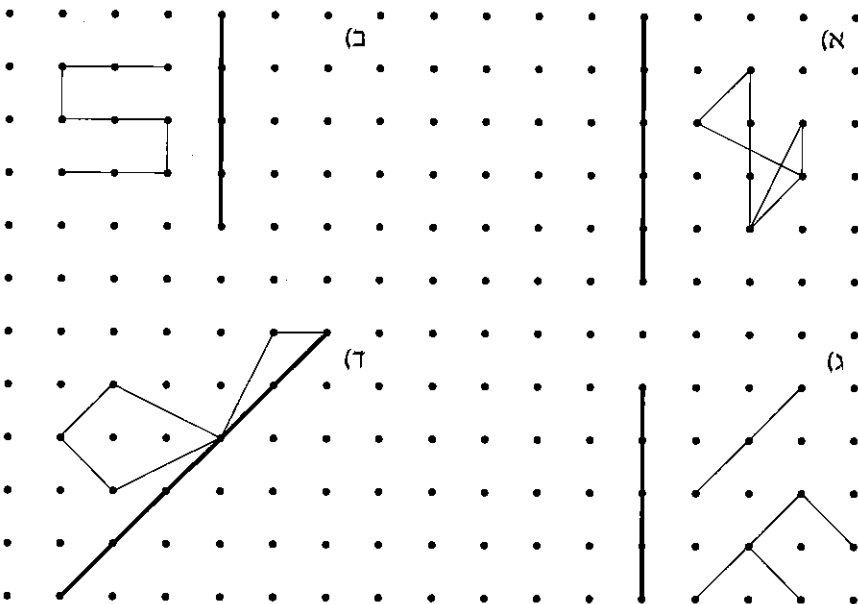
באמצעות: G | ϕ

1. הקו המודגש הוא קו מראה. שרטטו את השתקפות הצורה במראה.



צורה נקראת **סימטרית** אם אפשר לשרטט קו מראה (קו קיפול), כך שאם נקפל את הצורה לאורכו, יתלכדו שני החלקים של הצורה. הקו נקרא **ציר הסימטריה** של הצורה.

2. השלימו כל שרטוט כך שתתקבל צורה סימטרית, כשהקטע המודגש הוא ציר הסימטריה.



3.

רשמו מספר
שונה מאפס

רשמו מספרים

$$y = \square \cdot x^2 + \triangle \cdot x + \diamond$$

פונקציה שניתן להביאה לצורה זו נקראת **פונקציה ריבועית**.

באופן כללי רושמים:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

(a, b, c הם תחליף למקומות הריקים בהם רשמתם מספרים).

4. רשמו, בכל סעיף, פונקציה ריבועית מתאימה.

(א) $a = 1$ $b = -2$ $c = 6$

(ב) $a = 3$ $b = 0$ $c = -5$

(ג) $a = -1$ $b = 2\frac{1}{2}$ $c = 0$

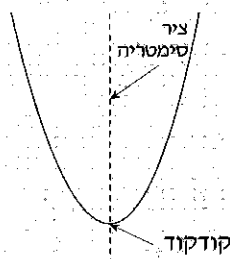
(ד) $a = -2$ $b = \frac{1}{2}$ $c = -3$

5. רשמו לכל פונקציה ריבועית את ערכם של a, b, c .

(א) $y = 2x^2 + 9x - 6$ (ד) $y = x^2 - 18 + 5x$

(ב) $y = x^2 - 3x$ (ה) $y = (x + 4)(x - 4)$

(ג) $y = 16 - x^2$ (ו) $y = x^2$



גרף כדוגמת השרטוט משמאל נקרא **פרבולה**.

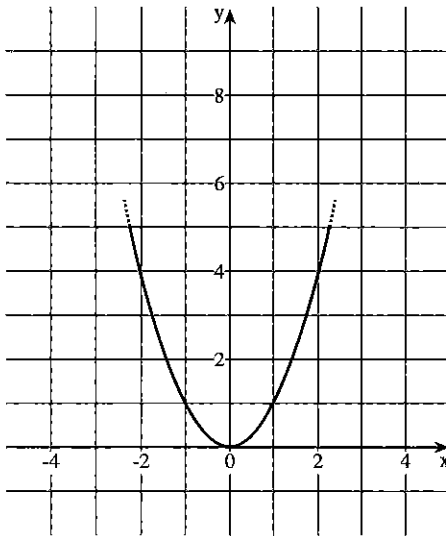
נקודת המפגש של הגרף עם ציר הסימטריה

נקראת **קודקוד**.

בסוף הספר גמלא דפיט שקופיט חזית מילוטל פרבולא

6.  הניחו את הפרבולה השקופה 1, על גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ המשורטטת.

(א) הזיזו את הפרבולה השקופה לאורך ציר y ב-4 יחידות למעלה, כך שהקודקוד יהיה בנקודה $(0, 4)$.



— מה, לדעתכם, חוק הפונקציה g שהתקבלה? $g(x) =$

— מהו ציר הסימטריה של פונקציה זו?

(ב) **בדיקה:** קראו מהגרף: $g(1) =$ (הפונקציה המוזנת)

הציבו וחשבו: $g(1) =$

7.  בכל אחד מסעיפי התרגיל, הניחו את הפרבולה השקופה 1 במערכת הצירים שבתרגיל הקודם, במצב המקורי $y = x^2$.

— הזיזו אותה לאורך ציר y על-פי ההוראה.

— רשמו את החוק המתאים.

— רשמו את שיעורי הקודקוד.

— קבעו אם קיימות נקודות חיתוך עם ציר x . אם הן קיימות רשמו, בערך, את שיעוריהן.

(א) 2 יחידות כלפי מטה.

(ב) $1\frac{1}{2}$ יחידות כלפי מעלה.

(ג) 3 יחידות כלפי מטה.

8. (P) א) הניחו את הפרבולה השקופה 1, על הפרבולה משורטטת בתרגיל 6.

הפכו אותה - כך שציר x יהיה קו מראה, בין שתי הפרבולות.

ב) שערו מהו חוק הפונקציה h שהתקבלה:

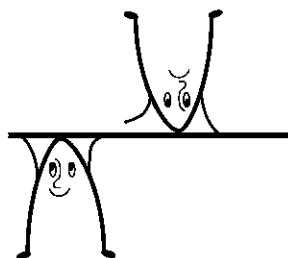
$$h(x) =$$

ג) **בדיקה:** קראו מהגרף: $h(2) =$

הציבו וחשבו: $h(2) =$

ד) רשמו מהו ציר הסימטריה, מהם שיעורי

הקודקוד ומהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.



9. (P) א) שרטטו במערכת צירים במחברתכם את הגרפים של הפונקציות.

$$k(x) = -x^2 - 1, \quad h(x) = x^2 - 2, \quad p(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = -x^2 + 1$$

בכל התרגילים עד כאן עסקתם בפונקציות מהצורה $y = \pm x^2 + c$ כאשר c מספר כלשהו.

ב) רשמו מהו ערכו של c בכל אחת מהפונקציות הנ"ל.

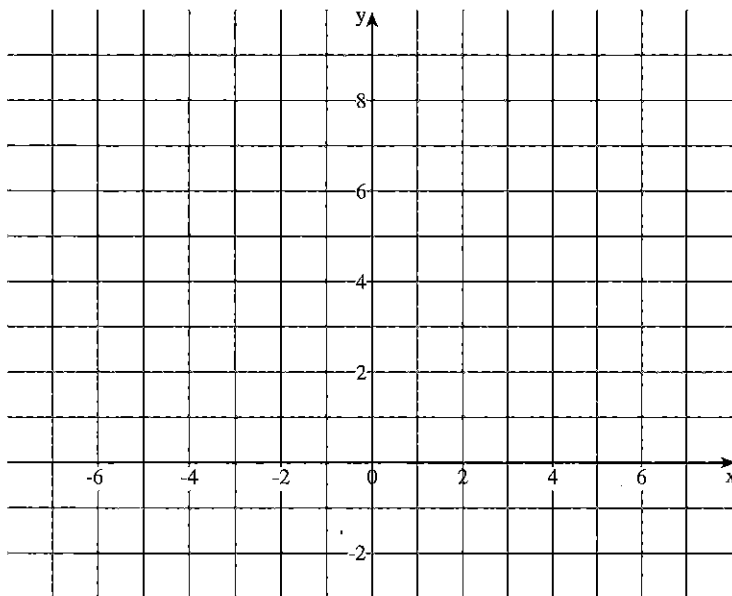
10. (P) נתונה הפונקציה $y = -2x^2 + 4$.

א) הציבו בחוק הפונקציה והשלימו את הטבלה הבאה:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -2x^2 + 4$							

ב) סמנו את הנקודות הנ"ל במערכת הצירים שבעמוד הבא.

המשך ←



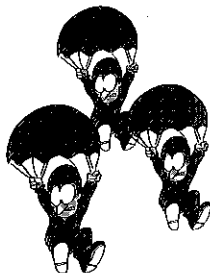
- ג) נסו להניח את הפרבולה השקופה 1 על הנקודות. האם הצלחתם?
 ד) בסוף הספר תמצאו שלוש פרבולות שקופות נוספות. בידקו אם יש פרבולה שניתן להניחה על כל הנקודות שסימנתם.
 ה) מה משוואת ציר הסימטריה של הגרף?
 ו) מה שיעורי הקודקוד?

11. הפרבולות בדפים השקופים יכולות לתאר את הפונקציות:

$$h(x) = 3x^2 \quad m(x) = 2x^2 \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad f(x) = x^2$$

- א) הניחו את כל ארבע הפרבולות השקופות במערכת הצירים שבעמוד זה, זו על גבי זו (הקודקוד בראשית הצירים).

למעשה ניתן לקבל את הפרבולות, אחת מהשניה, על-ידי "מתיחה" כלפי מעלה ו"הקטנת המרחק בין הענפים" (או להיפך).

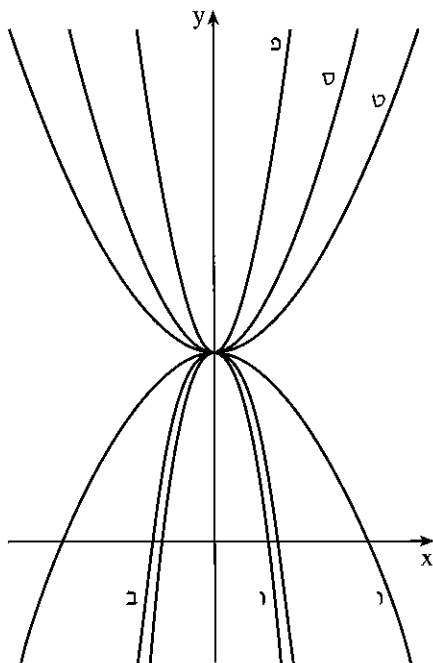


- ב) כדי להתאים בין חוק הפונקציה לגרף, חשבו:

$$\begin{array}{cc} m(1) & f(1) \\ h(1) & g(1) \end{array}$$

- ג) רשמו על הפרבולות השקופות, את ערך a המתאים.

12. התאימו לכל פרבולה את הפונקציה המתאימה לפי הסדר, ורשמו את האות שלידה.



$$y = x^2 + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$$

$$y = 4x^2 + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3$$

$$y = -4x^2 + 3$$

$$y = -3x^2 + 3$$

מה קיבלתם?

תרגילים

13. בכל התרגילים עד כאן עסקתם בפונקציות ריבועיות מהצורה $y = ax^2 + c$ (א ו- c מספרים כלשהם ו- $a \neq 0$). השלימו את הטבלה.

חוק הפונקציה	ערך a	ערך c	שיעורי הקודקוד	יש או אין נקודות חיתוך עם ציר x	תחומי עלייה	תחומי ירידה
$y = x^2 + 4$						
$y = -x^2 + 1$						
$y = 3x^2 - 2$						
$y = x^2 + 150$						
$y = -x^2 - 95$						
$y = -2x^2 + 5$						
$y = 5x^2$						

14. פתחו סוגריים, כנסו, הדגישו את האיבר המכיל את x^2 ורשמו את ערכי a, b, c בתרגילים בהם יש לבצע: $(_\ + _\)^2$, תוכלו להשתמש בנוסחה:

$$(m + p)(m + p) \text{ או } (m + p)^2 = m^2 + 2mp + p^2$$

$$y = 3(x - 5)^2 + 7 \quad (\text{ה}) \quad y = (x + 3)(x - 3) \quad (\text{א})$$

$$y = (x - 1)(2x + 1) \quad (\text{ו}) \quad y = (x + 8)^2 \quad (\text{ב})$$

$$y = x^2 + (x + 1)^2 \quad (\text{ז}) \quad y = (x + 2)^2 \quad (\text{ג})$$

$$y = 2x^2 - (x + 3)^2 \quad (\text{ח}) \quad y = x(x - 1) + x \quad (\text{ד})$$

15. שרטטו שביל יציאה מן המבוך. מותר לעבור רק דרך פתח המוביל למשבצת אשר בה רשומה פונקציה ריבועית.

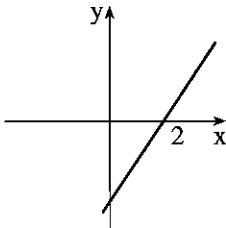
ש	מ	י	ה	כניסה
$y = 1 - 7x$	$y = x^2 - x(x + 3)$	$y = x - 2$		
$y = x(x^2 - 3)$	$y = x^2 + 2x^3$	$y = x^2 - 2x$	ז	$y = x^2 + 8$
$y = (x + 1)(x - 1)$	$y = (x + 2)^2$	$y = 2x(x^2 + x) - 2x^3$	ח	$y = x \cdot x^2$
$y = x^2 + 3x^2$	$y = \frac{x+1}{x} + x^2$	$y = \frac{1}{x^2}$	א	$y = x + x$
$y = 4x^2 - x$	$y = 4 - x^2$	$y = -(x + 1)^2$	ו	$y = x^2 + x(x - 3)$
$y = 4x + 1$	$y = 2x$	$y = 5x + x^2 + x^3$	ד	$y = x(x + 1)$

אם תרשמו את האותיות הרשומות במשבצות שעברתם לפי הסדר, תקבלו משפט בעל משמעות.

נקודות חיתוך

1. לפניהם זוגות של פונקציה והגרף המתאר אותה.

מצאו, בכל מקרה, את נקודות החיתוך של הגרף עם ציר x .
רשמו את השיעור במקום המתאים על הציר.



$$y = 4x - 8$$

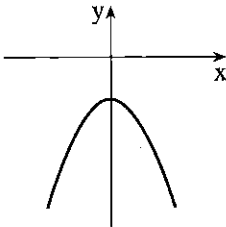
באמצע:

$$0 = 4x - 8$$

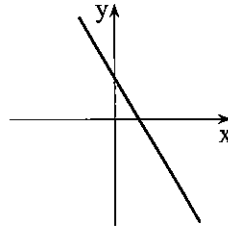
המשיכו!!

נקודת החיתוך: $(2, 0)$

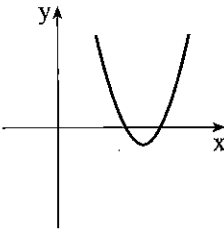
ב) $y = -x^2 - 2$



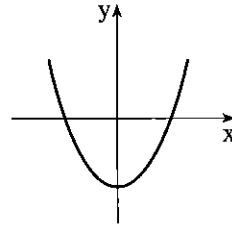
א) $y = -x + 1$



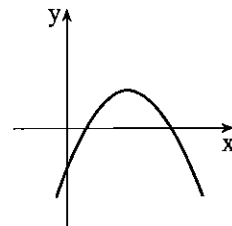
ד) $y = 2x^2 - 14x + 24$



ג) $y = x^2 - 9$



ה) $y = -x^2 + 5x - 4$



2. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x , וקבעו מה מרחקן מציר הסימטריה.

(א) $y = x^2 - 16$ (ב) $y = 9 + x^2$ (ג) $y = x^2 - 4$
 (ד) $y = -x^2 + 1$ (ה) $y = 9 - x^2$ (ו) $y = x^2 + 25$

מציאת נקודות החיתוך של גרף פונקציה עם ציר x שקולה לפתרון המשוואה המתקבלת אם נציב בחוק הפונקציה $y = 0$.
 נקודות אלה נקראות גם נקודות האפס של הפונקציה.
 אם לגרף של פונקציה ריבועית יש נקודות חיתוך עם ציר x , מרחקן מציר הסימטריה שווה.

תרגילים

3. מצאו במחשבון את הכפתור עליו רשום $\sqrt{\quad}$ וחשבו.

$\sqrt{50} =$ $\sqrt{3} =$ $\sqrt{121} =$
 $\sqrt{-4} =$ $\sqrt{300} =$ $\sqrt{72} =$

4. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y = x^2 - 5$ עם ציר x .
 5. יוסי טען כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y = x^2 + 9$ עם ציר x , הן $(3, 0)$ ו- $(-3, 0)$.
 דוד טען: לפונקציה זו אין נקודות חיתוך עם ציר x .
 מי צדק? נמקו.

6. (א) רשמו בכל "חלון" מספר, כך שהמכפלה תהיה שווה ל-0.
 $x \cdot \square = 0$ $0 \cdot \square = 0$ $\square \cdot 4 = 0$
 (ב) $m \cdot p = 0$ מה תוכלו לאמר על ערכי m ו- p ?

7. השלימו את הפירוק לגורמים.
 (א) $x^2 - 3x = x(\quad - \quad)$
 (ב) $x^2 - 3x = -x(\quad + \quad)$
 (ג) $x^2 + 3x = x(\quad + \quad)$

8. פתרו את המשוואות הבאות. (במקרים אלה אין צורך להשתמש בנוסחה).

דוגמה: $x(x-2) = 0$

$x = 0$ **א** $x - 2 = 0$

$x = 0$ **א** $x = 2$

$-x(x-1) = 0$ **ב** $x(x+5) = 0$ **א**

9. כדי לפתור את המשוואה $x^2 - 4x = 0$

יש לפרק תחילה לגורמים: $x(x+4) = 0$ המשיכו!

פתרו את המשוואות:

$4x - x^2 = 0$ **ב** $x^2 - 3x = 0$ **א**

10. בכל סעיף רשמו חוק של פונקציה ריבועית המקיימת את הנתונים.

א אין לה נקודת חיתוך עם ציר x.

ב יש לה נקודת חיתוך אחת עם ציר x.

ג יש לה שתי נקודות חיתוך עם ציר x.

11.  פתרו את המשוואות (פרקו תחילה לגורמים).

דוגמה: $3x^2 - 7x = 0$

$x(3x-7) = 0$

$x = 0$ **א** $3x - 7 = 0$ המשיכו!

$\frac{1}{2}x^2 + x = 0$ **ה** $2x^2 - 5x = 0$ **א**

$-3x^2 + 6x = 0$ **ו** $2x^2 - 8x = 0$ **ב**

$2x^2 - 7x = 0$ **ז** $-2x^2 - 5x = 0$ **ג**

$-x^2 + 9x = 0$ **ח** $3x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ **ד**

12. — חשבו את נקודות החיתוך עם ציר x.

— סמנו את הנקודות שמצאתם במערכת צירים.

— שרטטו ציר סימטריה לשתי נקודות אלה.

$y = -3x^2 - 6$ **א** $y = 2x - x^2$ **ב** $y = 2x^2 + 4x$ **א**

גרף של פונקציה ריבועית - ימינה ושמאלה

1.

רשמו מספר
שונה מאפס

רשמו מספר

$$y = \square \cdot x^2 + \triangle \cdot x + 0$$

בסלילי הקודם חסרנו בפונקציה ריבואית אפס, $y = ax^2 + c$, בסלילי זה נטל בפונקציה אפס, $y = ax^2 + bx$.

2. רשמו שתי פונקציות מהצורה $y = ax^2 + bx$.

3. רשמו פונקציות מהצורה $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, המקיימות:

$a = -1$ (ב)	$a = 3$ (א)
$b = -4$	$b = -2$
$c = 0$	$c = 0$

בסלילי זה נבדוק אם אלגוריתם של פונקציה כאלה, יש ציר סימטריה וקודקוד, והאם ציר ה- y הוא פרבולה.

4. (א) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y = x^2 - 4x$ עם ציר x , סמנו במערכת צירים, שרטטו את ציר הסימטריה של שתי נקודות אלה.

(ב) השלימו את הטבלה:

	הציר		
x			
y	0		0

(ג) העתיקו את הנקודות שמצאתם לטבלה הבאה, והשלימו אותה.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 4x$							

(ד) סמנו את הנקודות הנוספות שמצאתם במערכת הצירים.

(ה) האם הציר שמצאתם הוא ציר סימטריה של הפונקציה? מה שיעורי הקודקוד?

5. 

נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 2x$.

(א) מצאו את נקודות החיתוך של הגרף עם ציר x , סמנו אותן במערכת צירים ושרטטו את ציר הסימטריה לשתי נקודות אלה.

(ב) השלימו את הטבלה:

הציר

x			
y	0		0

(ג) העתיקו את הנקודות שמצאתם לטבלה הבאה והשלימו אותה.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3
$y = -x^2 + 2x$							

(ד) שתי נקודות, להן ערך y שווה, מחוברות בטבלה בקשת. סמנו קשת נוספת, המחברת נקודות כאלה.

(ה) האם הציר שמצאתם הוא ציר הסימטריה של הפונקציה?

6. 

(א) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y = -2x^2 - 4x$ עם ציר x , וסמנו אותן במערכת צירים.

מהי משוואת ציר הסימטריה לנקודות אלו?

(ב) השלימו את הטבלה וסמנו את הנקודות במערכת הצירים.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -2x^2 - 4x$								

(ג) כיצד אפשר לראות מהטבלה שהציר שרשמתם הוא אכן ציר הסימטריה של הפונקציה.

(ד) האם לפרבולה קודקוד מכסימום או קודקוד מינימום?

7. 

נתונה הפונקציה $y = x^2 - 48x$. תלמיד הציע את הטבלה הבאה:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

מה תוכלו לומר על ההצעה?

תרגילים

8. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 8x$.

- (א) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x .
 מהי משוואת ציר הסימטריה לנקודות אלה?
 (ב) השלימו את הטבלה:

x	1	2	3	4	5	6	7
$y = -x^2 + 8x$							

(ג) האם הציר שמצאתם הוא ציר הסימטריה של הפונקציה?

9. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 12x$.

- (א) מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x .
 (ב) רשמו את משוואת ציר הסימטריה.
 (ג) השלימו את הטבלה ושרטטו את גרף הפונקציה במחברתכם.

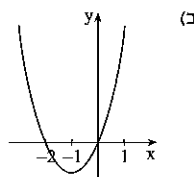
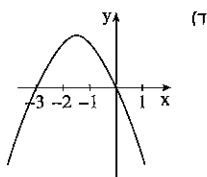
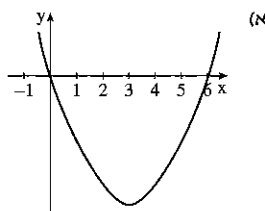
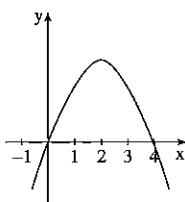
x	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3
$f(x)$							

(ד) רשמו על סמך הגרף: באיזה תחום הפונקציה עולה ובאיזה תחום היא יורדת?

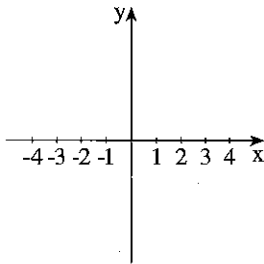
10. — שערו את חוק הפונקציה אם ידוע כי $a = \pm 1$.

(כלומר, האם החוק מהצורה $y = x^2 + bx$ או $y = -x^2 + bx$)

— בידקו על-ידי הצבה, אם יש צורך תקנו את החוק.

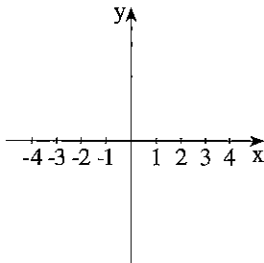


על כל הפונקציות הריבועיות



1. נתונה הפונקציה $y = -2x^2 + 8x$.

- (א) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x וסמנו אותן.
 (ב) רשמו את משוואת ציר הסימטריה.
 (ג) מצאו את שיעורי הקודקוד.
 האם הקודקוד הוא נקודת מכסימום או מינימום?



2. נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{2}x^2 - x$.

- (א) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x וסמנו אותן.
 (ב) רשמו את משוואת ציר הסימטריה.
 (ג) מצאו את שיעורי הקודקוד.
 האם הקודקוד הוא נקודת מכסימום או מינימום?

3. (א) השלימו את הטבלה הבאה:

הפונקציה	נקודות חיתוך עם ציר x	משוואת ציר הסימטריה	$-\frac{b}{2a}$
$y = -3x^2 + 9x$	$(0, 0), (3, 0)$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{-9}{2 \cdot (-3)} = \frac{3}{2}$
$y = 2x^2 + 8x$			
$y = 8x^2 - 4x$			
$y = -5x^2 + 10x$			
$y = 2x^2 - 6x$			
$y = 3x^2 + 12x$			

ד"ר א. פונקציות ומשוואות

המשך ←

Ⓕ ב) אם פתרם נכון, קיבלתם בשני הטורים האחרונים בטבלה אותם ערכים. נוכיח זאת:

נקודות חיתוך עם ציר x : $ax^2 + bx = 0$, $(a \neq 0)$

הוציאו x גורם משותף:

פתרו: $ax + b = 0$ או $x = 0$

$x = 0$ או $x = -\frac{b}{a}$

לכן נקודות החיתוך עם ציר x הן $(-\frac{b}{a}, 0)$ ו- $(0, 0)$.

ציר הסימטריה נמצא באמצע קטע זה, לכן משוואת הציר $x = -\frac{b}{2a}$.

4. לפניכם גרף הפונקציה $y = 2x^2 + 4x$.

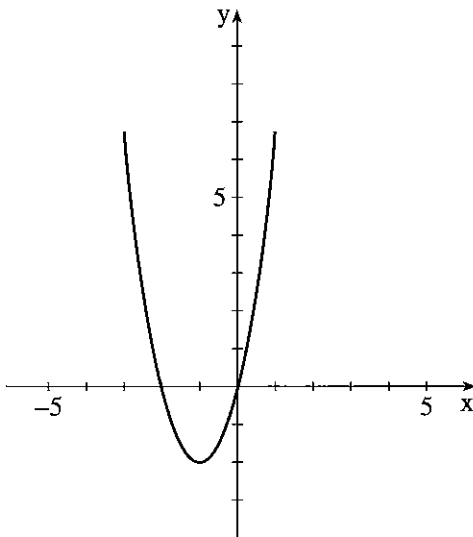
א) שרטטו "על-ידי הזזה" סקיצה של הגרפים של הפונקציות הבאות:

$f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

$g(x) = 2x^2 + 4x - 2$

$h(x) = 2x^2 + 4x + \frac{1}{2}$

ב) מהי נקודת החיתוך של כל פרבולה עם ציר y ?



הגרפים של הפונקציות ששרטטתם התקבלו על-ידי הזזה של גרף הפונקציה הנתונה לאורך ציר הסימטריה. ראיתם כי ערכו של c אינו משפיע על מקומו של ציר הסימטריה.



משוואת ציר הסימטריה של פונקציה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ הוא $x = -\frac{b}{2a}$. היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y .

5. 

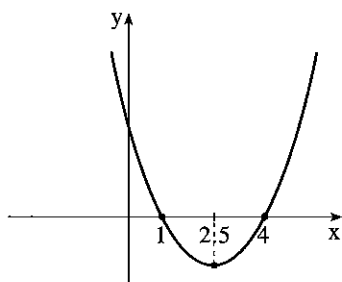
לפניכם גרף הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

(א) רשמו עבור אילו ערכים של x מתקיים: $f(x) = 0$.

(ב) רשמו עבור אילו ערכים של x ערכי הפונקציה שליליים. (תוכלו לרשום במילים).

(ג) רשמו עבור אילו ערכים של x ערכי הפונקציה חיוביים.

(ד) רשמו עבור אילו ערכים של x הפונקציה עולה.



רשמו עבור אילו ערכים של x הפונקציה יורדת.

תרגילים (פעילות המחשב בעמודים 34-36, יכולה להחליף חלק מתרגילים 10-14)

6. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות רשמו את משוואת ציר הסימטריה ואת שיעורי נקודת החיתוך עם ציר y .

(א) $y = 3x^2 + 6x + 1$ (ג) $y = 4x^2 - 12x - 3$

(ב) $y = -x^2 + 4x - 2$ (ד) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$

7. אילו מהביטויים הבאים שווים ל- $-\frac{2}{3}$.

(א) $-\frac{2}{3}$ (ב) $\frac{2}{-3}$ (ג) $-\frac{2}{3}$ (ד) $-(\frac{2}{3})$

8. אילו מהביטויים הבאים שווים ל- $-\frac{b}{2a}$.

(א) $-(\frac{b}{2a})$ (ב) $\frac{-b}{-2a}$ (ג) $-\frac{b}{2a}$ (ד) $\frac{b}{2(-a)}$ (ה) $\frac{-b}{a(-2)}$

9. קבעו, לגבי כל אחת מהטענות הבאות, אם היא נכונה או לא.

(א) לשתי הפונקציות $y = x^2 + 2x - 1$ ו- $y = 2x^2 + x - 1$ אותו ציר סימטריה.

(ב) קודקוד הפונקציה $y = x^2 - 4x + 1$ הוא בנקודה $(2, -5)$.

(ג) משוואת ציר הסימטריה של גרף הפונקציה $y = 3x^2 - 6x + 4$

היא $x = 1$, ונקודת החיתוך שלה עם ציר y היא $(0, 4)$.

10. מתחו קווים שיתאימו לכל פונקציה את ציר הסימטריה שלה.

$y = x^2 + 3x - 2$	•	$x = 1$
$y = -2x^2 - 4x$	•	
$y = 4x^2 + 12x + 3$	•	$x = 1\frac{1}{2}$
$y = -2x^2 + 4x$	•	
$y = 4x^2 + 8$	•	$x = -1$
$y = -\frac{1}{2}x^2 + x$	•	
$y = -5x^2 + 12$	•	$x = -1\frac{1}{2}$
$y = 3x^2 + 6x + 149$	•	$x = 0$
$y = x^2 - 3x$	•	

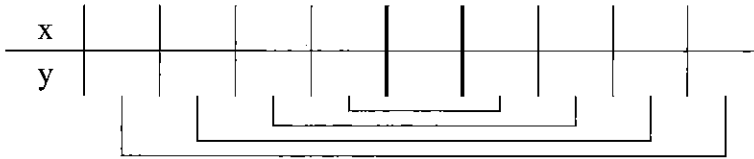
11. השלימו את הטבלה הבאה.

הפונקציה	ציר סימטריה $x = -\frac{b}{2a}$	שיעורי הקודקוד
$y = -2x^2 + 6x$		
$y = -x^2 - 2x$		
$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$		
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$		
$y = 4x^2 - 8x + 6$		
$y = 3x^2 - 9$		

12. א) שרטטו פרבולה, שמשוואת ציר הסימטריה שלה $x = 3$ וקודקודה ב- $(-1, 3)$. כמה פרבולות כאלה ניתן לשרטט?
 ב) שרטטו פרבולה, שמשוואת ציר הסימטריה שלה $x = 3$, בעלת מינימום ב- $(-1, 3)$, וידוע כי ערכו של a הוא 2. כמה פרבולות כאלה ניתן לשרטט?

13. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 + 4x - 16$.

- (א) מצאו את משוואת ציר הסימטריה.
 (ב) מצאו את הקודקוד. האם הקודקוד הוא נקודת מכסימום או מינימום?
 (ג) השלימו את הטבלה ושרטטו את גרף הפונקציה.



(ד) מצאו על-פי הגרף, דייקו ככל האפשר.

- באיזה תחום הפונקציה עולה ובאיזה תחום היא יורדת?
- עבור אילו ערכים של x ערכי הפונקציה שליליים ($y < 0$)?
- עבור אילו ערכים של x ערכי הפונקציה חיוביים ($y > 0$)?
- עבור אילו ערכים של x שווה ערך הפונקציה ל-16?
- עבור אילו ערכים של x ערכי הפונקציה קטנים מ-16?
- מהי קבוצת האמת של המשוואה $2x^2 + 4x - 16 = -10$?

14. התאימו לכל פונקציה מטור א תכונות הרשומות בטור ב.

טור א	טור ב
• $y = -2x^2 + x - 4$	• מינימום, חיתוך עם ציר y בנקודה $(0, -2)$
• $y = 3x^2 + 6x - 1$	• מכסימום בנקודה $(0, -10)$
• $y = 4x^2 + 3x - 2$	• ציר הסימטריה $x = -\frac{3}{4}$
• $y = -5x^2 - 10$	• מכסימום בנקודה $(\frac{1}{4}, -3\frac{7}{8})$
• $y = 6x^2 + 9x$	• ציר הסימטריה $x = 1$
• $y = \frac{1}{2}x^2 - x$	• מינימום בנקודה $(-1, -4)$

פונקציות ריבועיות באמצעות מחשב

הכאן אפשר למשל כן להכין פונקציה שרשום לה את חוק של פונקציה כזו מחשבון
זרשי לא משל מחשבון, אלא גבולות, Derive הוא לא פונקציה אמיתית כנספה בסוף
הספר.

1. (א) שרטטו באמצעות המחשב את הגרפים של הפונקציות הבאות:
 $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = (x-3)^2$, $y = (x-5)^2$

(ב) תארו במילים לאיזה כיוון זה הגרף של $y = x^2$ בכל פונקציה.

(ג) — שערן, להיכן יזוז גרף הפונקציה $y = (x+2)^2$?

— בידקו על-ידי שרטוט הגרף באמצעות המחשב.

— הוסיפו גם את גרף הפונקציה $y = (x+4)^2$

(ד) שרטטו את הגרפים של הפונקציות $y = -(x-2)^2$

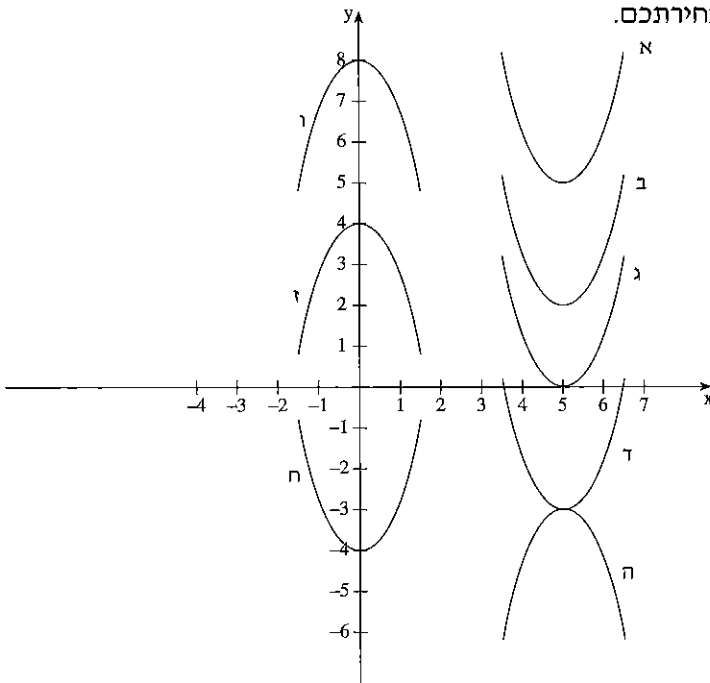
$y = -(x+3)^2$

(ה) סכמו במילים, כיצד מוזז הגרף של $y = x^2$ כאשר חוק הפונקציה

הוא מהצורה $y = (x+m)^2$ או $y = -(x+m)^2$.

2. התאימו לכל גרף את התבנית המתאימה שבעמוד הבא. הסבירו את

בחירתכם.



$$m(x) = (x - 5)^2 + 5$$

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$n(x) = -x^2 + 4$$

$$g(x) = -x^2 + 8$$

$$p(x) = (x - 5)^2 - 3$$

$$h(x) = (x - 5)^2 + 2$$

$$q(x) = (x - 5)^2$$

$$k(x) = -(x - 5)^2 - 3$$

ב) בידקו בעזרת שרטוט על מסך המחשב.

נוסחאות הכפל המקוצר



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. פתחו סוגריים, היעזרו בנוסחאות הכפל המקוצר.

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(x + 5)^2 &= -(x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) \\ &= -(x^2 + 10x + 25) \\ &= -x^2 - 10x - 25 \end{aligned}$$

$(8 + x)^2 =$	ה)	$(x - 3)^2 =$	א)
$(10 - x)^2 =$	ו)	$(x + 4)^2 =$	ב)
$(x + 4)(4 - x) =$	ז)	$(x - 7)^2 =$	ג)
$-(x + 6)^2 =$	ח)	$(x + 5)(x - 5) =$	ד)

4. פתחו סוגריים, פשטו, ורשמו בצורה $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} y &= (x + 5)^2 + 3 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 + 3 \\ y &= x^2 + 10x + 25 + 3 \\ y &= x^2 + 10x + 28 \end{aligned}$$

$y = -(x - 6)^2 - 10$	ז)	$y = (x - 4)^2 + 7$	א)
$y = (x + 1)^2 + (x - 5)^2$	ה)	$y = (x - 1)^2 - 5$	ב)
$y = (x - 9)^2 - (x + 2)^2$	ו)	$y = (x + 3)(x - 3) + 8$	ג)

מפונקציה ריבועית למשוואה ריבועית

במהלך לימודיכם הקודמים הכרתם נוסחה לפתרון משוואה ריבועית.



אם: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ אז $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

נקשר נוסחה זו עם מה שלמדתם כאן, בסעיפים הקודמים.

המרחק מהציר והנוסחה לחישוב נקודות החיתוך

1. ידוע, כי לגרף המתאר פונקציה ריבועית מסוימת, שתי נקודות חיתוך עם ציר x , ושיעוריהן $(4, 0)$ ו- $(-2, 0)$. סמנו במערכת צירים.

(א) מה משוואת ציר הסימטריה.

(ב) מה מרחק כל אחת משתי הנקודות, מציר הסימטריה?

2. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 12x + 10$.

(א) מצאו את משוואת ציר הסימטריה (שרטטו).

(ב) מרחק נקודות החיתוך עם ציר x מציר הסימטריה הוא 2 יחידות. מצאו אותן וסמנו במערכת צירים.

(ג) בידקו על-ידי הצבה בחוק הפונקציה.

3. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 4x + 1.5$.

(א) מצאו את משוואת ציר הסימטריה ורשמו בטבלה.

(ב) השלימו את הטבלה:

(ג) הציבו ובידקו.

x	$\frac{1}{2}$	ציר	
y	0		0

4. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 5x - 6$.

(א) ידוע כי אחת מנקודות החיתוך של הגרף עם ציר x היא $(6, 0)$ (רשמו בטבלה).

(ב) השלימו את הטבלה.

(ג) מהם פתרונות המשוואה $x^2 - 5x - 6 = 0$?

הציבו ובידקו.

x		ציר		6
y	0			0

5. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 + 4x - 16$.

(א) מצאו את משוואת ציר הסימטריה.

(ב) מרחק הנקודות $(_, 0)$, $(_, 0)$

מציר הסימטריה הוא 3 יחידות.

השלימו את הטבלה.

		3	ציר	3	
x					
y	0			0	

(ג) מהם פתרונות המשוואה $2x^2 + 4x - 16 = 0$? הציבו ובידקו.

6. קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה. אם לא, נמקו.

(א) יש פרבולה שמשוואת ציר הסימטריה שלה $x = 3$ ונקודות החיתוך שלה עם ציר x הן $(0, 0)$ ו- $(4, 0)$.

(ב) יש פרבולה שנקודות החיתוך שלה עם ציר x הן $(3, 0)$ ו- $(1, 0)$ ויש לה מינימום בנקודה $(1.5, 2)$.

(ג) יש פרבולה בעלת מכסימום בנקודה $(-3, 4)$ ושתי נקודות החיתוך עם ציר x הן: $(-4, 0)$ ו- $(-2, 0)$.

(ד) יש פרבולה בעלת מכסימום בנקודה $(3, 0)$ ושתי נקודות חיתוך עם ציר x .

(ה) יש פרבולה בעלת מינימום בנקודה $(1, -1)$ ונקודות החיתוך שלה עם ציר x הן $(0, 0)$ ו- $(10, 0)$.

7. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 8x + 6$.

נקודות החיתוך עם ציר x רשומות בטבלה.

(א) מהם פתרונות המשוואה $2x^2 - 8x + 6 = 0$? הציבו ובידקו.

(ב) מצאו את משוואת ציר הסימטריה, ורשמו בטבלה.

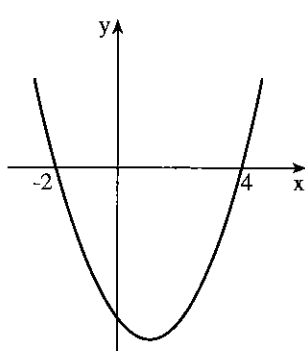
(ג) מצאו, מה מרחק נקודות החיתוך הרשומות

מציר הסימטריה, ורשמו אותו במשבצות

שמעל הטבלה.

			ציר		
x	1			3	
y	0			0	

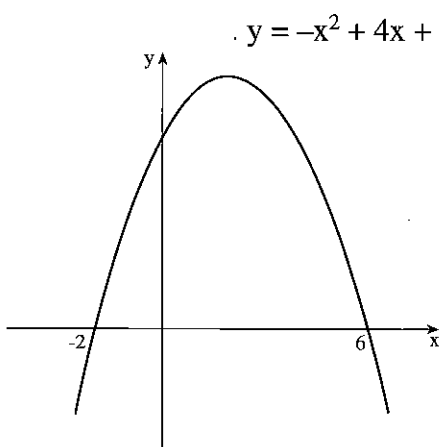
8. א) שרטטו במחברתכם את גרף הפונקציה $y = x^2 + 6x$.
 ב) איזו פונקציה תתקבל אם נזיז את הגרף 2 יחידות כלפי מעלה לאורך ציר הסימטריה?
 — האם הציר השתנה?
 — האם נקודות החיתוך עם ציר x נשארו סימטריות לאותו הציר?
 — האם **מרחקן** מהציר נשאר כפי שהיה?



9. א) לפניכם גרף הפונקציה $y = 2x^2 - 4x - 16$. השלימו: $a = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$ $c = \underline{\hspace{2cm}}$
 ב) מהי משוואת ציר הסימטריה?
 ג) מה מרחק נקודות החיתוך עם ציר x מציר הסימטריה?
 ד) מרחק זה ניתן לחישוב על-ידי

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 הצבה בתבנית

הציבו, חשבו והשוו לתשובתכם בסעיף ג'.



10. א) הגרף משמאל מתאר את הפונקציה $y = -x^2 + 4x + 12$. מה משוואת ציר הסימטריה?
 ב) מה מרחק נקודות החיתוך עם ציר x מציר הסימטריה?
 ג) הציבו בתבנית

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 לחישוב המרחק.

לאחר חישוב קיבלתם, במקרה זה, מספר שלילי (-4).
 מרחק מבוטא תמיד בעזרת מספר חיובי או אפס (במקרה זה 4).

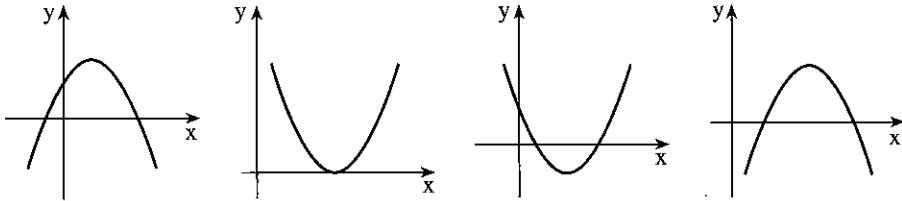
לכן התבנית המתאימה לחישוב המרחק היא:

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

לא פאנאן לאכאן לא פאנאן פאנאן, יק פדקאן פאנאן פאנאן.

11. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$.

- (א) רשמו את משוואת ציר הסימטריה.
 (ב) מצאו את מרחק נקודות החיתוך עם ציר x מציר הסימטריה.
 (ג) מצאו את נקודות החיתוך עם ציר x .
 (ד) איזה מהגרפים הבאים יכול להיות גרף הפונקציה?



(ה) מהם פתרונות המשוואה $0 = -x^2 + 6x - 5$?

12. נתונה פונקציה ריבועית שמשוואת ציר הסימטריה שלה $x = 3$.

מרחק נקודות החיתוך עם ציר x מציר הסימטריה הוא 4.
 מהם שיעורי הנקודות?

(ב) נתונה פונקציה ריבועית שמשוואת ציר הסימטריה שלה $x = 105$.

מרחק נקודות החיתוך עם ציר x מציר זה הוא 77.
 מהם שיעורי הנקודות?

במקום לבצע את השלבים למציאת נקודות חיתוך עם ציר x עבור כל פונקציה בנפרד, מבטאים את נקודות החיתוך באופן כללי:



$$a \neq 0, \quad y = ax^2 + bx + c$$

נקודות החיתוך עם ציר x הן:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{או} \quad x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ואם נמצא מכנה משותף נקבל:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{או} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{נכתוב כנוסחה אחת:}$$

תרגילים

13. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x ובידקו על-ידי הצבה.

$$y = -x^2 - 6x + 16 \quad (ד)$$

$$y = 6x^2 - 4x - 2 \quad (א)$$

$$y = x(3x + 1) + 2x \quad (ה)$$

$$y = x^2 + 10x + 25 \quad (ב)$$

$$y = 16x^2 - 8x + 1 \quad (ו)$$

$$y = 12x^2 - 48 \quad (ג)$$

14. נתונה הפונקציה $y = -x^2 - 2x + 15$.

(א) השלימו: $a = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$ $c = \underline{\hspace{2cm}}$

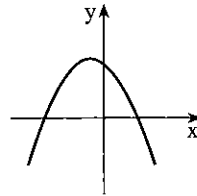
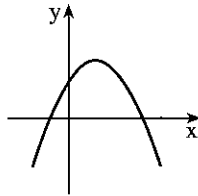
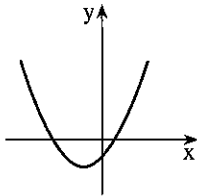
(ב) הציבו בנוסחה וחשבו: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(ג) מהם פתרונות המשוואה $-x^2 - 2x + 15 = 0$?

(ד) איזה מהגרפים הבאים יכול להיות גרף הפונקציה?

רשמו בגרף המתאים לחוק, על ציר x , את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר x .

רשמו גם את משוואת ציר הסימטריה ושרטטו אותו.



15. מתחו קווים בין המשוואות ופתרונותיהן.

פתרונות

משוואות

$$1, \frac{1}{4} \quad \bullet$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (א)$$

$$8, -4 \quad \bullet$$

$$x^2 - 4(x + 8) = 0 \quad (ב)$$

$$3 \quad \bullet$$

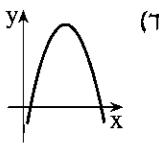
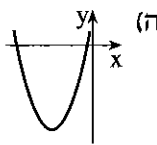
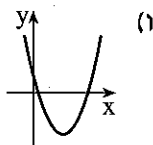
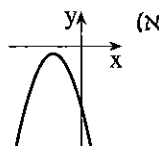
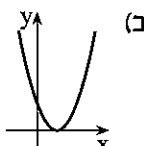
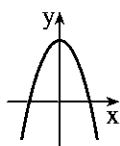
$$x(x + 2) - (x + 2) = 0 \quad (ג)$$

$$-2, 1 \quad \bullet$$

$$x(4x - 1) - 4x + 1 = 0 \quad (ד)$$

יש בכלל נקודות חיתוך?

1. (i) לפניכם גרפים של פונקציות מהצורה $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, מה מספר פתרונות המשוואה $0 = ax^2 + bx + c$ בכל אחד מהמקרים.



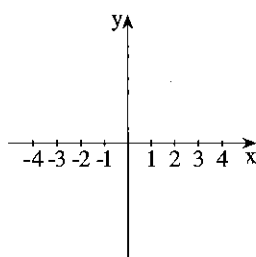
- (ii) האם בסעיפים א'-ו' משורטט גרף של פונקציה שכל ערכיה שליליים?
אם כן, באיזה סעיף?
האם בסעיפים א'-ו' משורטט גרף של פונקציה שכל ערכיה חיוביים?
אם כן, באיזה סעיף?

2. (א) נסו לחשב.

$$\sqrt{0.25} \quad \sqrt{-72} \quad \sqrt{-225} \quad \sqrt{0} \quad \sqrt{72} \quad \sqrt{225}$$

3. (א) נתונה הפונקציה $y = 2x^2 + 4x + 10$.

— נסו לחשב את מרחק נקודות החיתוך עם ציר x מציר הסימטריה.



$$\text{המרחק} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- רשמו את משוואת ציר הסימטריה ושרטטו.
— שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

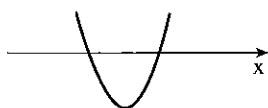
המשך ←

- (ב) נתונה הפונקציה $y = 2x^2 + 4x + 2$.
- נסו לחשב את מרחק נקודות החיתוך עם ציר x מציר הסימטריה.
 - רשמו את משוואת ציר הסימטריה.
 - שרטטו במערכת שבסעיף א', סקיצה של גרף הפונקציה.

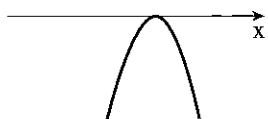
4.  בעזרת איזה חלק בנוסחה $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ תקבעו את מספר נקודות

החיתוך של הפונקציה עם ציר x ?

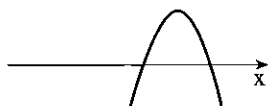
5.  (i) מתחו קווים בין כל פונקציה והסקיצה המתאימה. תוכלו לפתור משוואות מתאימות או להיעזר בשיקולים אחרים.



• • $y = -x^2 + x + 12$ (א)

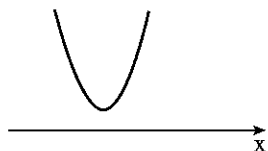


• • $y = -2x^2 + x - 4$ (ב)

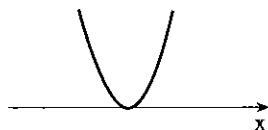


• • $y = x^2 + 3$ (ג)

• • $y = -x^2 + 8x - 16$ (ד)



• • $y = x^2 + 2x - 3$ (ה)



• • $y = -x^2 + 2x - 5$ (ו)



• • $y = 3x^2 + 7x - 12$ (ז)



• • $y = 2x^2 + 4x + 2$ (ח)

המשך ←

(ii) מצאו בעזרת הגרפים וההתאמה שיצרתם, פונקציה שכל ערכיה שליליים ופונקציה שכל ערכיה חיוביים.
הסבירו את הקשר לקיום או אי-קיום של פתרונות למשוואה.

כפי שראיתם, התבנית למציאת נקודות החיתוך עם ציר x היא:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

אם $b^2 - 4ac > 0$ לפרבולה שתי נקודות חיתוך עם ציר x ולמשוואה המתאימה שני פתרונות.
אם $b^2 - 4ac = 0$ לפרבולה נקודה משותפת אחת עם ציר x ולמשוואה המתאימה פתרון אחד.
אם $b^2 - 4ac < 0$ אין לפרבולה נקודות חיתוך עם ציר x ואין פתרונות למשוואה המתאימה.

6.  השלימו את הטבלה הבאה. a, b, c המקדמים של המשוואה הריבועית).

a	b	c	$b^2 - 4ac$	מספר פתרונות
1	5	4	9	2
2	4	2		
3	-2	-5		
-1	1	-2		
3	2	5		
-16	8	-1		
3	0	-3		
4	-8	0		

דוגמה:

תרגילים

7. קבעו לגבי כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו או שרטטו דוגמה נגדית.

א) למשוואה $-2x^2 - 9 = 0$ אין פתרונות.

ב) למשוואה $x^2 - 2x - 6 = 0$ שני פתרונות.

ג) הפונקציה $m(x) = 2x^2 + 4$ היא בעלת שתי נקודות חיתוך עם ציר x : $(-2, 0)$, $(2, 0)$.

ד) לפונקציה ריבועית בעלת מינימום ברביע ה-II, אין נקודות חיתוך עם ציר x .

8. מתחו קווים המתאימים משוואה לפתרונותיה.

א) $x(x + 4) = 3x + 12$ • $x_1 = -3$, $x_2 = -4$

ב) $(x + 5)(x + 2) = -2$ • $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

ג) $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 9$ • אין פתרונות

ד) $x(x - 1) = x - 4$ • $x_1 = -4$, $x_2 = 3$

9. קבעו לגבי כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו או שרטטו דוגמה נגדית.

א) לפונקציה $y = 2x - 1$ אין נקודה משותפת עם ציר x .

ב) לפונקציות $y = x^2 - 2x + 1$ ו- $y = -x - 1$ אותה נקודת חיתוך עם ציר x .

10.  א) נסו לפתור את המשוואה $(x - 2)^2 = 16$ ללא הנוסחה.

ב) נסו לפתור את המשוואה $(x - 2)(x + 3) = 0$ ללא הנוסחה.

11. קבעו לגבי כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא, נמקו או שרטטו דוגמה נגדית.

א) פונקציה ריבועית בה $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ אינה חותכת את ציר x .

ב) למשוואה $x^2 + 8x + 16 = 0$ יש שני פתרונות.

ג) לפונקציה ריבועית בעלת מכסימום ברביע הראשון יש תמיד שתי נקודות חיתוך עם ציר x .

12. פתרו את המשוואות הבאות: 1

באמצע:
$$(x \neq 3) \quad \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 1 \quad / \cdot (x - 3)$$

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x^2 - 4x + 3)}{\cancel{x-3}} = 1(x - 3)$$

$$x^2 - 4x + 3 = x - 3$$

המשיכו לפתור, הציבו ובידקו בתבנית המקורית.

(א) $(x \neq -5), \frac{4x^2 + 2x - 5}{x + 5} = 6$ (ב) $(x \neq 1), \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 8$

(ג) $(x \neq 0), \frac{3x^2 + 5x - 20}{x} = 1$ (ד) $(x \neq 1), \frac{(x+1)(x+3)}{x-1} = 15$

עוד משוואות ופונקציות ריבועיות

13. (א) $5x^2 + 20 = 4x^2 + 84$ (ב) $3x^2 + 8x - 14 = 0$

(ג) $x^2 = \frac{16}{25}$ (ד) $3x^2 - 2x + 10 = 0$

(ה) $5x^2 + 125x = 0$ (ו) $x^2 - 10x + 25 = 0$

(ז) $x^2 + 8x + 15 = 0$ (ח) $18 = x^2 - 18x + 90$

(ט) $2x^2 + 9x + 9 = 0$ (י) $(x+4)(x+7) = 70$

14. (א) $(x+6)(x-6) + 3x = 18$

(ב) $(4x+3)(4x-3) + 16x = 87$

(ג) $(2x-8)^2 + 3x = 12$

(ד) $4(x+1)^2 = 0$

(ה) $(x+7)^2 - 5x = 85$

(ו) $(x-3)^2 + 5 = 2$

המשך ←

$$(x \neq -2) , \quad \frac{8}{x+2} + x = 4 \quad (ז)$$

$$(x \neq 1) , \quad \frac{3}{x-1} + 3 = x \quad (ח)$$

$$(4+x)(x-6) = 13 \quad (ט)$$

$$(x \neq 0) , \quad (x-3)\left(\frac{40}{x} + 10\right) = 75 \quad (י)$$

$$(x+2)(2x-6) = 2x(x-4) \quad (יא)$$

15. בידקו אילו מהטענות הבאות נכונות ונמקו (היעזרו בשרטוט סקיצות).

(א) קיימת פונקציה ריבועית שכל ערכיה שליליים והקודקוד שלה הוא נקודת מכסימום.

(ב) קיימת פונקציה ריבועית שכל ערכיה שליליים והקודקוד שלה הוא נקודת מינימום.

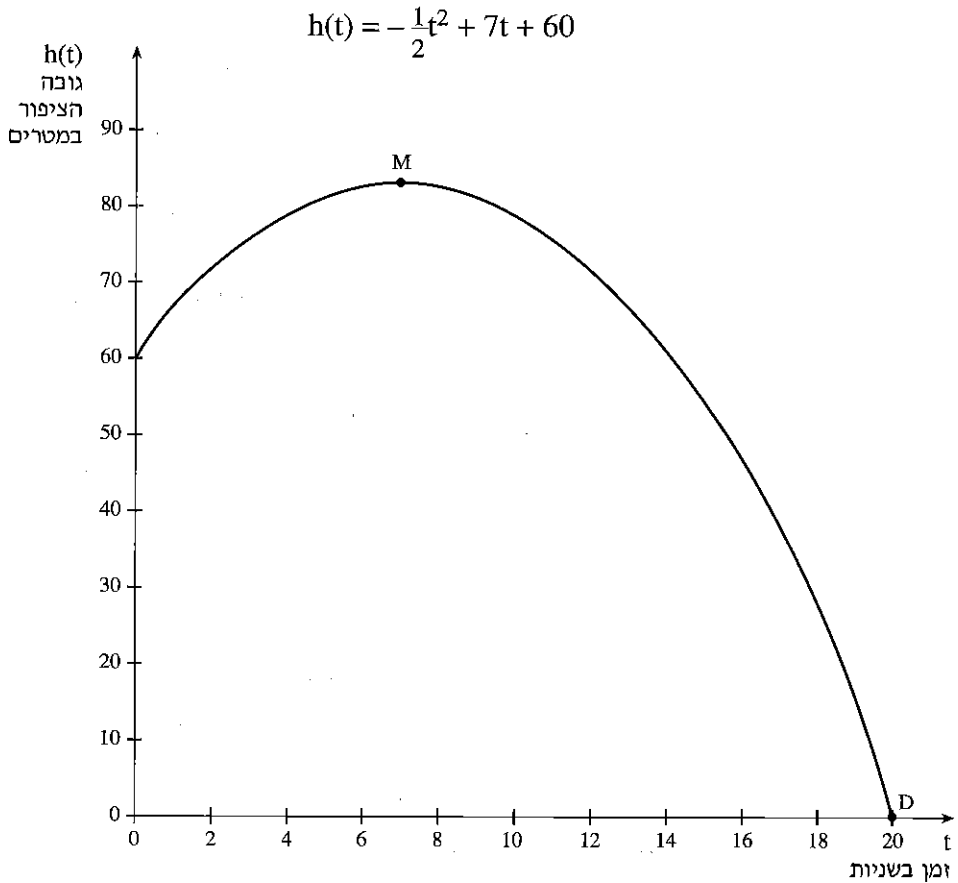
(ג) לא קיימת פונקציה ריבועית שכל ערכיה חיוביים והקודקוד שלה הוא נקודת מכסימום.

16. שרטטו גרף של פונקציה ריבועית, שיש לה נקודה משותפת אחת עם ציר x .

האם שרטטתם פרבולה עם נקודת מינימום או מכסימום?

מה תוכלו לומר על ערכי הפונקציה פרט לקודקודה?

17. הפונקציה $h(t)$ מתארת גובה ציפור מעל הקרקע (במטרים) במשך זמן המיוצג על-ידי t (בשניות).

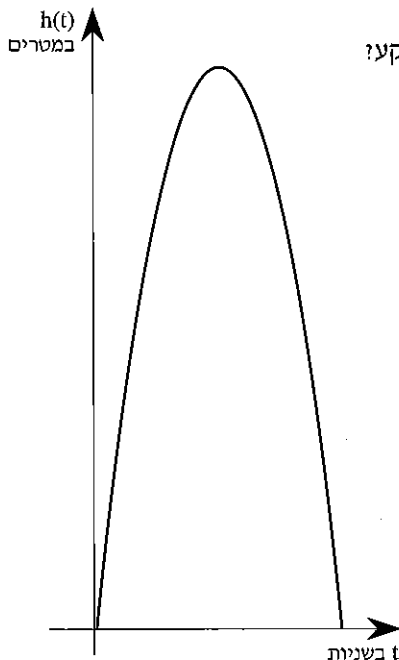


- א) הציבו $t = 0$. סמנו את הנקודה המתאימה על הגרף. מה משמעות הנקודה מבחינת הסיפור?
- ב) קראו מהגרף, לאחר כמה שניות, בערך, תהיה הציפור שוב בגובה ממנו החלה לעוף? הציבו את הערך שקבלתם בפונקציה ובדקו!
- ג) לאחר כמה שניות, בערך, תהיה הציפור בגובה 72 מטר? (הציבו ובדקו!)
- ד) לאחר כמה שניות תהיה הציפור בגובה 24 מטר? כמה פתרונות מתאימים מצאתם?
- ה) מצאו את הקודקוד לפי חוק הפונקציה והשוו עם הקודקוד על-פי הגרף. מה משמעות הקודקוד מבחינת הסיפור?
- ו) מה משמעות הנקודה D מבחינת הסיפור?

18. קליע נורה מתותח. גובהו (במטרים) יחסית לזמן (בשניות) מתואר על-ידי

$$h(t) = 15t - 5t^2$$

הפונקציה של גרף הפונקציה.



(א) לאחר כמה זמן יגיע הקליע שוב לקרקע?

רשמו ערכים מתאימים בשרטוט.

(ב) כעבור כמה זמן יגיע הקליע לגובה

המכסימלי?

(ג) מהו הגובה המכסימלי אליו מגיע

הקליע? רשמו בשרטוט.

(ד) באיזה גובה ימצא הקליע כעבור

שניה אחת?

האם הקליע יגיע שוב לגובה זה?

19. ספורטאי מתאמן בקפיצה במוט. גובהו בס"מ מרגע הקפיצה מתואר בעזרת

$$h(t) = 108t - 6t^2$$

(א) חשבו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x . הסבירו את משמעותן לגבי הספורטאי.

(ב) ציירו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ג) כעבור כמה זמן יגיע הספורטאי לגובה המכסימלי?

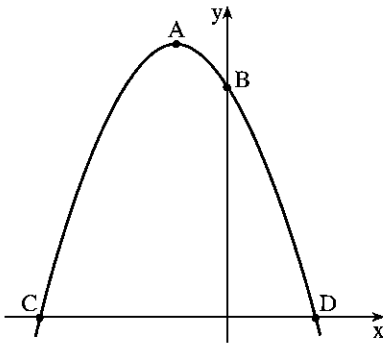
(ד) כעבור כמה זמן יחזור ויגיע לקרקע?

(ה) לאחר כמה שניות יגיע הספורטאי לגובה 270 ס"מ, וכמה פעמים יגיע לגובה

זה?

(ו) הציבו $t = 20$. מה משמעות התוצאה שקיבלתם?

20. הגרף המשוורטט הוא גרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.



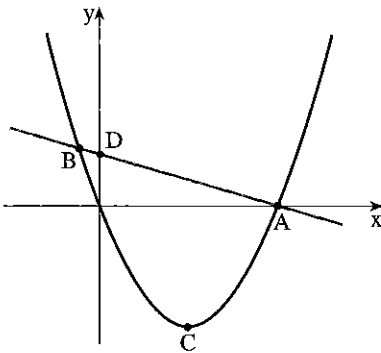
מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C, D.

21. הגרפים המשוורטטים הם גרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 5x$$

$$g(x) = -0.5x + 2.5$$

מצאו את שיעורי הנקודות המסומנות.

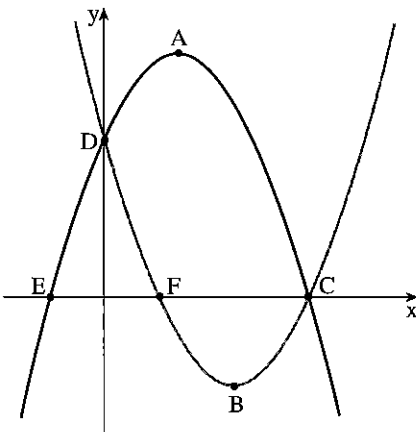


22. הגרפים המשוורטטים הם גרפים של הפונקציות:

$$y = -x^2 + 4x + 12$$

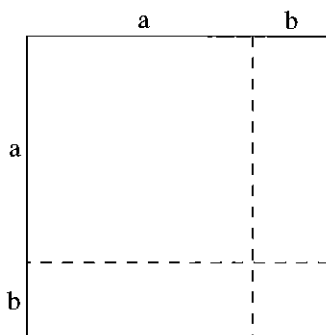
$$y = x^2 - 8x + 12$$

מצאו את שיעורי הנקודות המסומנות.



נוסחאות הכפל ופתרון משוואות

1. תזכורת נוספת לנוסחאות הכפל



א) אורך צלע הריבוע הגדול $a + b$.
רשמו את שטחו.

רשמו את שטחי ארבעת החלקים
שנוצרו בשרטוט.

$$(a + b)^2 =$$

מסקנה:

וכך בדיוק אצלנו:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$$

ב) פתחו סוגריים וכנסו:

$$(a - b)^2 = (a - b)(\quad) =$$

$$(a + b)(a - b) =$$

2. חברו בקו ביטויים זהים.

$$(x + 5)^2 \quad \bullet$$

$$\bullet \quad x^2 + 2x + 1$$

$$(x - 6)^2 \quad \bullet$$

$$\bullet \quad x^2 + 10x + 25$$

$$(x + 1)^2 \quad \bullet$$

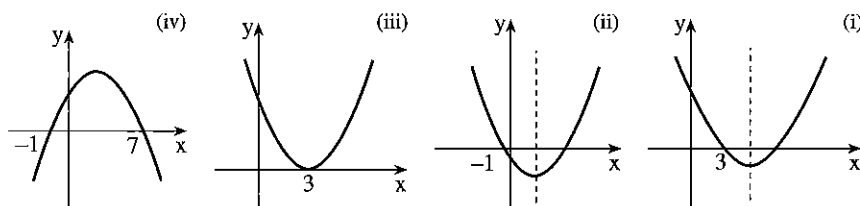
$$\bullet \quad x^2 - 9$$

$$(x + 3)(x - 3) \quad \bullet$$

$$\bullet \quad x^2 - 12x + 36$$

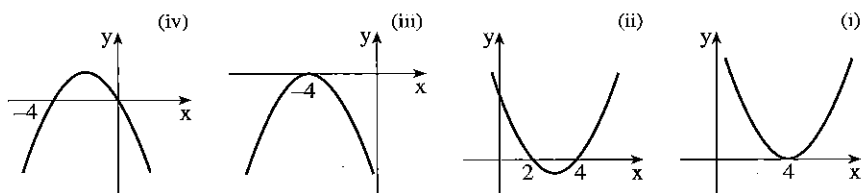
3. א) פתרו את המשוואה: $(x - 3)^2 = 16$

איזה מהגרפים הבאים יכול להיות גרף הפונקציה $y = (x - 3)^2$? נמקו.



המשך ←

(ב) פתרו את המשוואה: $2(x-4)^2 = 0$
 איזה מהגרפים הבאים יכול להיות גרף הפונקציה $y = 2(x-4)^2$? נמקו.



(ג) הסבירו, כיצד ניתן לפתור משוואה זו ללא שימוש בנוסחה לפתרון משוואה ריבועית.

תרגילים

4. כפלו.

- | | | |
|---------------------|--------------------------|--------------------|
| (א) $(3x+2)^2$ | (ו) $(2x-1)^2$ | (א) $(a+10)^2$ |
| (ב) $3(x+2)^2$ | (ז) $2(x-1)^2$ | (ב) $(a-10)^2$ |
| (ג) $(2x+1)(2x-1)$ | (ח) $(2x-\frac{1}{2})^2$ | (ג) $(10-a)^2$ |
| (ד) $2(x+1)(x-1)$ | (ט) $2(x-\frac{1}{2})^2$ | (ד) $(a+10)(a-10)$ |
| (ה) $2(2x+1)(2x-1)$ | (י) $(2-x)(2+x)$ | (ה) $(a+10)(10-a)$ |

5. חברו בקו תבניות תואמות.

- | | |
|---------------------|------------------|
| • $x \cdot x - 3^2$ | • $x^2 + 9$ |
| • $(x+3)^2$ | • $x^2 - 9$ |
| • $(x+3)(x-3)$ | • $x^2 - 6x + 9$ |
| • $x \cdot x + 3^2$ | • $x^2 + 6x + 9$ |
| • $(x-3)^2$ | |

לאיזו תבנית חיברתם שתי תבניות תואמות?

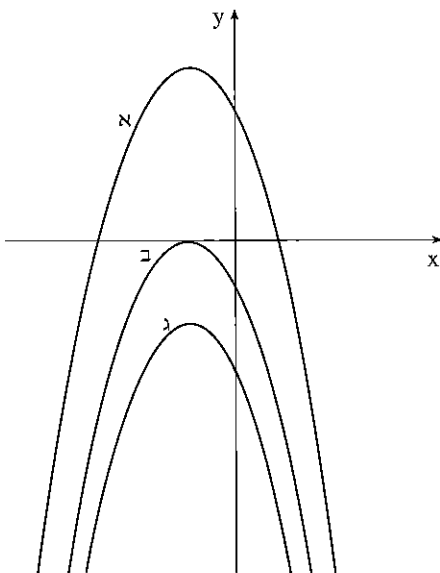
6. פתרו את המשוואות.

$$\begin{array}{ll} (x+4)^2 - (x-2)^2 = 12 & \text{ד)} \\ (x+7)^2 = (x+9)^2 & \text{א)} \\ (x-4)^2 - (x-2)^2 = 0 & \text{ה)} \\ (x+5)^2 = (x-5)^2 & \text{ב)} \\ (x-4)^2 - (x-2)^2 = 16 & \text{ו)} \\ (x+4)^2 - (x-2)^2 = 0 & \text{ג)} \end{array}$$

7. פתרו.

$$\begin{array}{ll} (2x-1)(x+2) - x(x+1) = 1 & \text{א)} \\ (2x-3)(2x+3) - (x+1)(x-1) = 5x & \text{ב)} \\ (x-3)^2 + (x+3)^2 = 36 & \text{ג)} \\ (x-5)^2 - (2x+1)^2 = 0 & \text{ד)} \\ 3(x-1)(x+1) = 2(2x+1)^2 & \text{ה)} \\ 3(x-2)^2 = 2(x+1)^2 - 45 & \text{ו)} \end{array}$$

8. א) התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים.



$$y = -x^2 - 2x - 1 \quad \text{(i)}$$

$$y = -x^2 - 2x - 3 \quad \text{(ii)}$$

$$y = -x^2 - 2x + 3 \quad \text{(iii)}$$

ב) פתרו את המשוואות:

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{(i)}$$

$$-x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{(ii)}$$

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \text{(iii)}$$

פירוק לגורמים ופתרון משוואות

1. Ⓢ1. משרטטים מלבנים

ענת ונועה משחקות: הן משרטטות מלבנים ששטחם 36 משבצות. מנצחת מי שהאורך הכולל של הקווים ששרטטה (היקף המלבן) **קטן יותר**.

(א) ענת משרטטת מלבן שאחת מצלעותיו 3 יחידות. מצאו את אורך הצלע השנייה והשלימו לשרטוט של מלבן ששטחו 36 משבצות.
נועה שרטטה מלבן שאחת מצלעותיו 4 יחידות.

מי נצחה במקרה זה? (תוכלו לשרטט במחברתכם המשובצת.)

(ב) מי מנצחת אם ענת משרטטת מלבן שאחת מצלעותיו 18 יחידות, ונועה משרטטת מלבן שאחת מצלעותיו 2 יחידות? (היעזרו בשרטוט המלבנים.)

(ג) ענת שרטטה מלבן שאחת מצלעותיו 5 יחידות. מצאו צלעות של מלבן עבור נועה שרוצה, כמובן, לנצח את ענת.

(ד) x מייצג אורך אחת מצלעות מלבן. רשמו תבנית לאורך הצלע השנייה של המלבן. רשמו תבנית להיקף המלבן.

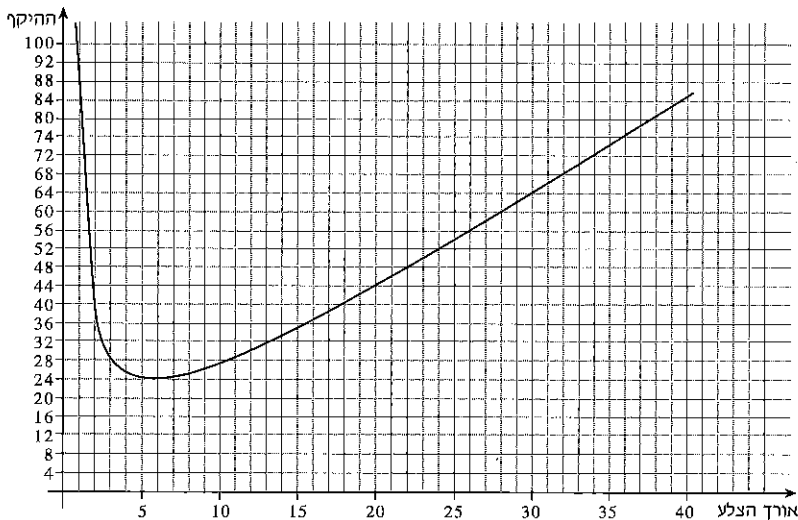
(ה) נועה שרטטה מלבן שהיקפו 25 יחידות. מה אורכי צלעותיו? (רשמו משוואה ופתרו.)

(ו) הגרף מתאר כיצד משתנה היקף המלבן (ששטחו 36 משבצות) כאשר משנים את אורך אחת מצלעותיו.

(i) הסבירו מדוע הגרף אינו חותך את הצירים.

(ii) מצאו בעזרת הגרף נקודות מתאימות להיקף 40, והסבירו אילו מלבנים מתאימים לנקודות אלה.

(iii) איזו נקודה בגרף מתארת את המלבן בעל ההיקף הקטן ביותר?



2. המשוואות בתרגיל זה דומות למשוואות שיצרתם בשאלה הקודמת. פתרו אותן ובידקו על-ידי הצבה.

$$x \neq 1 \quad \frac{12}{x-1} + x = 9 \quad (א) \quad x \neq 0 \quad x - \frac{3}{x} = 2 \quad (א)$$

$$x \neq 1 \quad \frac{12}{x-1} + x = 0 \quad (ד) \quad x \neq 0 \quad 2x - \frac{15}{x} = x - 2 \quad (ב)$$

3. (א) אבי פתר את המשוואה $\frac{2x+2}{x+1} = 1$ באופן הבא:

$$\frac{2x+2}{x+1} = 1 \quad / \cdot (x+1)$$

$$2x+2 = x+1$$

$$x = -1$$

האם -1 הוא, אכן, פתרון של המשוואה? הציבו, בידקו, והסבירו.

(ב) ענת חישה את ערכי הפונקציה $f(x) = \frac{2x+2}{x+1}$ ורשמה אותם בטבלה.

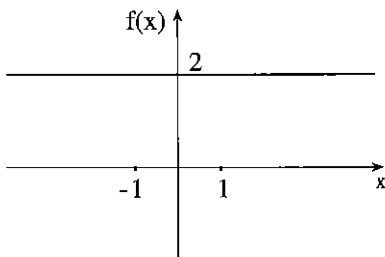
(i) בידקו.

x	0	1	2	3	4
y	2	2	2	2	2

(ii) הסבירו, מדוע ענת קיבלה 2 עבור כל הערכים שהציבה.

(iii) ענת שרטטה את גרף הפונקציה על-פי הערכים שחישה.

האם הגרף "נכון"? נמקו.



המשך ←

(iv) רשות: חשבו ערכים בסביבת $x = -1$

x	-1.5	-1.1	-1.01	-1	-0.9	-0.8
$f(x)$				לא מוגדר		

גרף הפונקציה $f(x)$ זהה לגרף הפונקציה $g(x) = 2$ בכל נקודה פרט לנקודת אי ההגדרה. כלומר, גרף הפונקציה $f(x)$ הוא ישר עם "חור".



תקנו את הגרף המשורטט על-ידי סימון "החור" במקום המתאים.

(ג) הסבירו, בעזרת הגרף, מדוע לא ייתכן $x = -1$, ולכן אין פתרון למשוואה שפתר אבי, בסעיף א'.

(ד) מהם פתרונות המשוואה: $\frac{2x+2}{x+1} = 2$? היעזרו בגרף והסבירו.

4. פתרו את המשוואות. בידקו אילו ערכים לא ניתן להציב במקום x והשוו עם הפתרון.

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \quad (\text{ב}) \qquad \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 3 \quad (\text{א})$$

$$\frac{10}{2x - 3} + \frac{5}{2x + 3} = 3 \quad / \cdot (2x - 3)(2x + 3) \qquad \text{ג) דאגה:}$$

$$\frac{10(2x + 3)(2x - 3)}{2x - 3} + \frac{5(2x + 3)(2x - 3)}{2x + 3} = 3(2x + 3)(2x - 3)$$

$$10(2x + 3) + 5(2x - 3) = 3(2x - 3)(2x + 3)$$

אכן:

פאשיכו.

$$\frac{4x}{2x + 1} + \frac{3}{x + 3} = 1 \quad (\text{ה}) \qquad \frac{6}{x + 1} + \frac{5}{x} = 2 \quad (\text{ד})$$

$$\frac{x + 3}{x + 1} - \frac{x}{x - 1} = 0 \quad (\text{ו})$$

5.  למציאת מכנים משותפים קטנים ביותר, יש צורך לעיתים לפרק מכנים אלה לגורמים, לכן נחזור על הוצאת גורם משותף ופירוק על-פי הנוסחה:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

רשמו כמכפלה ופרקו לגורמים.

$$x^3 + 5x = x(x^2 + 5) \quad (i) \quad \text{דאגמאל:}$$

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) \quad (ii)$$

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x + 3)(x - 3) \quad (iii)$$

$$x^3 - 4x^2 = \quad (ה) \quad x^2 - 25 = \quad (א)$$

$$x^3 - 4x = \quad (ו) \quad 4x^2 - 81 = \quad (ב)$$

$$x^4 - x^2 = \quad (ז) \quad 16 - x^2 = \quad (ג)$$

$$9x^4 - 16x^2 = \quad (ח) \quad 1 - 100x^2 = \quad (ד)$$

תרגילים

6. רשמו מכנים כמכפלות ופתרו. בידקו אם הפתרונות מתאימים, ואם לא, הסבירו מדוע.

$$\frac{3}{1+x} - \frac{x+2}{1-x} = \frac{9}{1-x^2} \quad (א)$$

$$\frac{3}{1+x} - \frac{x+2}{1-x} = \frac{9}{(1-x)(1+x)} \quad / \cdot (1-x)(1+x)$$

$$3(1-x) - (x+2)(1+x) = 9$$

המשיכו לפתור את המשוואה.

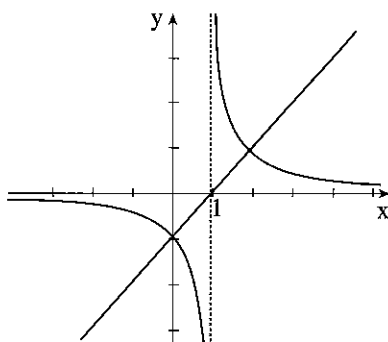
$$\frac{1}{2x-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{2} \quad (ה) \quad \frac{5}{2x-1} + \frac{3}{2x+1} = \frac{18}{4x^2-1} \quad (ב)$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{x+1}{2x+2} = -\frac{1}{2x} \quad (ו) \quad \frac{x}{3(x-5)} + \frac{1}{x+5} = \frac{2x}{x^2-25} \quad (ג)$$

$$\frac{6}{x-3} - \frac{5}{x} = \frac{32}{x^2-9} \quad (ז) \quad \frac{8}{2x-4} + \frac{5}{x+2} = 5 \quad (ד)$$

7.  אמיתי שרטט סקיצות של גרפים של שתי הפונקציות הבאות מבלי להתייחס לנקודות אי ההגדרה.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \text{ו-} \quad f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$



א) התאימו גרף לחוק הפונקציה, התייחסו לתחום של כל אחת מהפונקציות ותקנו את הגרפים.

ב) היעזרו בצמצום ובגרף כדי לפתור את המשוואה: $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

האם כל הפתרונות שמצאתם מתאימים?

8. פתרו עוד משוואות הדורשות פירוק לגורמים.

דאגה: $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$

$$x(x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{או} \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

פאשיכו אלסלר.

א) $2x^2(x - 1) = 0$

ב) $2x(x^2 - 4) = 0$

ג) $x^3 - 9x = 0$

ד) $x^3 - 16x = 0$

ה) $x^3 - 16x^2 = 0$

ו) $x^4 - x^2 = 0$

ז) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

ח) $2x^3 + x^2 - x = 0$

מבחר תשובות

תכונות וסימון פונקציות (עמודים 9-15)

1. (ב) מרחק העצירה של משה 192 מ' ושל דן 672 מ' (ג) פי 3.5 (ד) מרחק עצירה 140 מ' לא יספיק

(ה) 20 קמ"ש $v \leq 40$ קמ"ש (ז) $v \leq 30$ קמ"ש (יג) מכונית עוצרת אחרי 32 מ', המשאית

עוצרת אחרי 39 מ' - לא יספיקו לעצור (יד) 41.5 קמ"ש בקירוב.

4. (א) עליה: $x < 1$, ירידה: $x > 1$ (ב) עליה: $x > 0$, ירידה: $x < 0$

(ג) עליה: $x > -2$, ירידה: $x < -2$ (ד) עליה, עבור כל x

5. (iii) (א) עליה: עבור כל x (ב) עליה: $x < -1\frac{1}{2}$ או $x > 2\frac{1}{2}$, ירידה: $-1\frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}$

(ג) עליה $x > -2\frac{1}{2}$, ירידה $x < -2\frac{1}{2}$ (ד) ירידה עבור כל x

גרף של פונקציה ריבועית (עמודים 16-22)

12. סופ טוב

15. המשפט: "הצלחת כל הכבוד"

נקודות חיתוך (עמודים 23-25)

8. (א) $x = -5$ או $x = 0$ (ב) $x = 1$ או $x = 0$ (ג) $x = 0$ או $x = 3$ (ד) $x = 0$ או $x = 4$

11. (א) $2.5, 0$ (ב) $4, 0$ (ג) $-2.5, 0$ (ד) $-\frac{1}{6}, 0$ (ה) $-2, 0$ (ו) $2, 0$ (ז) $3.5, 0$ (ח) $9, 0$

12. (א) $(0, 0)$ $(-2, 0)$ (ב) $(0, 0)$ $(2, 0)$ (ג) אין חיתוך

גרף של פונקציה ריבועית - ימינה שמאלה (עמודים 26-28)

	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
x								
$y = -2x^2 - 4x$	-30	-16	-6	0	2	0	-6	-16

8. (א) נקודות החיתוך: $(0, 0)$, $(8, 0)$, משוואת הציר $x = 4$

	7	6	5	4	3	2	1
$y = x$							
$y = -x^2 + 8x$	7	12	15	16	15	12	7

9. א) נקודת החיתוך $(0, 0)$ $(-12, 0)$ ב) הציר $x = -6$

ג)

x	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3
y	-27	-32	-35	-36	-35	-32	-27

ד) הפונקציה עולה כאשר $x > -6$ ויורדת כאשר $x < -6$

על כל הפונקציות הריבועיות (עמודים 29-33)

5. א) עבור $x = 1$ או $x = 4$ ב) שלילית בין $x = 1$ ל- $x = 4$ ג) חיובית: כש $x < 1$ או $x > 4$

ד) עולה: כש $x > 2.5$, יורדת: כש $x < 2.5$

6. א) משוואת הציר: $x = -1$, חיתוך עם ציר y: $(0, 1)$

ב) משוואת הציר: $x = 2$, חיתוך עם ציר y: $(0, -2)$

ג) משוואת הציר: $x = 1\frac{1}{2}$, חיתוך עם ציר y: $(0, -3)$

ד) משוואת הציר: $x = 3$, חיתוך עם ציר y: $(0, -1)$

7. א) לא נכון ב) נכון ג) נכון ד) נכון

13. א) הציר: $x = -1$ ב) הקודקוד: $(-1, -18)$ מינימום.

ג)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	14	0	-10	-16	-18	-16	-10	0	14

ד) עולה: $x > -1$, יורדת: $x < -1$, שליליים: $-4 < x < 2$ חיוביים: $x > 2$ או $x < -4$

$y = -16$ כאשר $x = 0$ או $x = -2$, $x < -16$ כאשר $-2 < x < 0$, קבוצת האמת $1, -3$

פונקציות ריבועיות באמצעות מחשב (או מחשבון גרפי) (עמודים 34-36)

4. א) $y = x^2 - 8x + 23$ ב) $y = x^2 - 2x - 4$ ג) $y = x^2 - 1$ ד) $y = -x^2 + 12x - 46$

ה) $y = 2x^2 - 8x + 26$ ו) $y = -22x + 77$

6. א) $s(x) = -4x^2 + 24x$ ג) 20 מ"ר ד) $x = 2$ או $x = 4$ ה) $x = 3$ והשטח המכסימלי 36 מ"ר.

מפונקציה ריבועית למשוואה ריבועית (עמודים 37-41)

1. א) הציר: $x = 1$ ב) המרחק: 3

2. א) הציר $x = 3$ ב) הנקודות $(1, 0)$ ו- $(5, 0)$

3. ב) ציר

x	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$
y	0		0

ג) $x = -1, x = 6$

4. ציר

x	-1	2.5	6
y	0		0

5. א) הציר: $x = -1$ (ב) נקודות החיתוך: $(-4, 0)$, $(2, 0)$

6. א) לא, כי המרחק מהציר לנקודות החיתוך אינו שווה.

ב) לא, כי המרחק מהציר לנקודות החיתוך אינו שווה.

ג) כן. ד) לא, כי יש לפרבולה כזו רק נקודת חיתוך אחת עם ציר x.

ה) לא, כי המרחק מהציר לנקודות החיתוך אינו שווה.

7. א) 1, 3 (ב) הציר: $x = 2$ (ג) המרחק 1

9. (ב) הציר: $x = 1$ (ג) המרחק: 3

10. א) הציר: $x = 2$ (ב) המרחק: 4

11. א) הציר: $x = 3$ (ב) המרחק: 2 (ג) $(1, 0)$, $(5, 0)$ (ה) $x = 1$ או $x = 5$

13. א) $(1, 0)$, $(-\frac{1}{3}, 0)$ (ב) $(-5, 0)$ (ג) $(-2, 0)$, $(2, 0)$ (ד) $(-8, 0)$, $(2, 0)$

ה) $(0, 0)$, $(-1, 0)$ ו) $(0.25, 0)$

14. ג) 3, -5

15. א) 3 (ב) 8, -4 (ג) 1, -2 (ד) $1, \frac{1}{4}$

יש בכלל נקודות חיתוך? (עמודים 42-50)

5. (i) א) שתי נקודות חיתוך (מכסימום) (ב) אין נקודות חיתוך (מכסימום) (ג) אין נקודות חיתוך

(מינימום) (ד) נקודת חיתוך אחת (מכסימום) (ה) שתי נקודות חיתוך (מינימום) (ו) אין נקודת

חיתוך (מכסימום) (ז) שתי נקודות חיתוך (מינימום) (ח) נקודת חיתוך אחת (מינימום)

דוגמה

b^2-4ac	9	0	64	-7	-56	0	36	48
מספר פתרונות	2	1	2	0	0	1	2	2

7. א) נכון (ב) נכון (ג) לא נכון (ד) נכון

8. א) $(-4, 3)$ ב) $(-3, -4)$ ג) $(-3, 1)$ ד) אין פתירות
9. א) יש נקודת חיתוך. $(0.5, 0)$ ב) לא נכון: לישר $(-1, 0)$ ולפרבולה $(1, 0)$
10. א) $x = -2$ או $x = 6$ ב) $x = 2$ או $x = -3$
11. א) נכון, $b^2 - 4ac = -23$ ב) לא נכון, פתרון אחד $x = -4$ ג) נכון
12. א) 5 ב) $2, 9$ ג) $3.5, -2.5$ ד) $2, -3\frac{1}{3}$
13. א) $-8, 8$ ב) $-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}$ ג) $-25, 0$ ד) $-3, -5$ ה) $-3, -1.5$
- ו) $1.2, -3.87$ ז) אין פתרון ח) 5 ט) $12, 6$ י) $3, -14$
14. א) $-9, 6$ ב) $-3, 2$ ג) $3\frac{1}{4}, 4$ ד) -1 ה) $-12, 3$ ו) אין פתרון
- ז) $0, 2$ ח) $0, 4$ ט) $-5.16, 7.16$ י) $-1.5, 8$ יא) 2
17. א) $h(0) = 60$ ב) $(14, 60)$ ג) 2 שניות, 14 שניות ד) 18 שניות ה) $(7, 84.5)$
- ו) $(20, 0)$ - הציפור מגיעה לקרקע
18. א) 3 שניות ב) 1.5 שניות ג) 11.25 מ' ד) 10 מ', כן כעבור 2 שניות
19. א) $(0, 0)$ $(18, 0)$ ג) 9 שניות ד) 18 שניות ה) 3 שניות ו- 15 שניות
20. $A(-1, 9)$, $B(0, 8)$, $C(-4, 0)$, $D(2, 0)$
21. $A(5, 0)$, $D(0, 2.5)$, $C(2.5, -6.25)$, $B(-0.5, 2.75)$
22. $A(2, 16)$, $B(4, -4)$, $C(6, 0)$, $D(0, 12)$, $E(-2, 0)$, $F(2, 0)$

נוסחאות הכפל ופתרון משוואות (עמודים 51-53)

6. א) -8 ב) 0 ג) -1 ד) 0 ה) 3 ו) -1
7. א) $-3, 1$ ב) $2\frac{2}{3}, -1$ ג) $3, -3$ ד) $1\frac{1}{3}, -6$ ה) אין פתרון ו) $5, 11$
8. א) (i) ב) (ii) ג) (iii) א) (i) -1 (ii) אין פתרון (iii) $1, -3$

פרק לגורמים ופתרון משוואות (עמודים 54-58)

1. ד) ההיקף: $2(\frac{36}{x} + x)$ ה) $4.5, 8$ ו) (ii) $18, 2$ (iii) $(6, 24)$
2. א) $-1, 3$ ב) $-5, 3$ ג) $7, 3$ ד) אין פתרון
3. ד) כל המספרים פרט ל- -1
4. א) 5 ב) אין פתרון ג) $-1, 3.5$ ד) $5, -0.5$ ה) $0, -5.5$ ו) 3
6. א) $-2, -4$ ב) 1 ג) 3 ד) $3, -1.2$ ה) 3 ו) 2 ז) $5, 9$
7. ב) $0, 2$
8. א) $1, 0$ ב) $2, -2$ ג) $0, 3, -3$ ד) $0, 4, -4$ ה) $0, 16$ ו) $0, 1, -1$
- ז) $0, 1, 3$ ח) $0, -1, 0.5$

פרק ב: סדרות, חזקות, גידול ודעיכה

סדרות: כללי נסיגה, סדרה לפי מקום וסדרה חשבונית

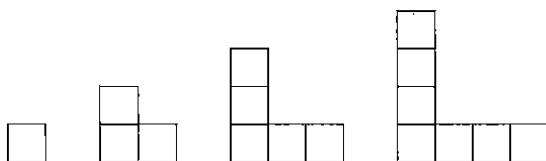
מושגים

בסעיף זה נחזיר על מושגים שאומצג במסלג אינאדיכס אקראג פסאון פראשון.

1. גלו את החוק על פיו נוצרה ה"סדרה" ורשמו, או שרטטו, שלושה איברים נוספים.

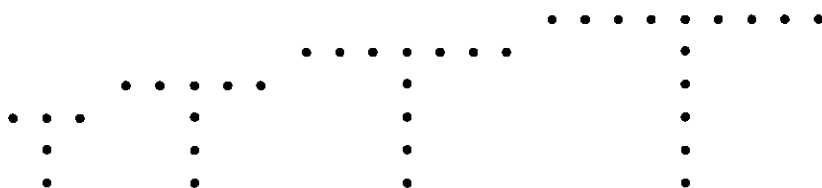
(א) $8, 5, 2, -1, -4, _, _, _$

(ב)



(ג) $32, 31, 29, 26, 22, 17, _, _, _$

(ד)



הגרליז 1 היה קליבס אלגא אל החוק כדי לפאשיק אל הסדרה, הגרליז פבא החוק
נאן.

2. (א) רשמו ארבעה איברים נוספים של סדרה, שהאיבר הראשון שלה 3 וכל איבר
מתקבל מקודמו על-ידי תוספת 4.

____ , ____ , ____ , ____ , 3

(ב) רשמו חמישה איברים ראשונים של סדרה, שהאיבר הראשון שלה 3 וכל
איבר מתקבל מקודמו על-ידי כפל ב- 4.

____ , ____ , ____ , ____ , ____

במה דומות שתי הסדרות, שרשמתם בסעיפים א' ו- ב', ובמה הן שונות?

(ג) רשמו חמישה איברים ראשונים של סדרה, שהאיבר הראשון שלה 729 וכל
איבר מתקבל מקודמו על-ידי חילוק ב- 3.

____ , ____ , ____ , ____ , ____

(ד) רשמו חמישה איברים ראשונים של סדרה, שהאיבר הראשון שלה 162 וכל
איבר מתקבל מקודמו על-ידי חילוק ב- 3.

____ , ____ , ____ , ____ , ____

במה דומות שתי הסדרות, שרשמתם בסעיפים ג' ו- ד', ובמה הן שונות?

(ה) רשמו שישה איברים ראשונים של שתי סדרות שונות זו מזו שיש להן אותו
חוק.

אחת הדרכים ליצור סדרה היא לקבוע את החוק ואת האיבר הראשון (או
איבר אחר) בסדרה.
עבור חוק מסוים אפשר ליצור סדרות רבות שונות זו מזו.



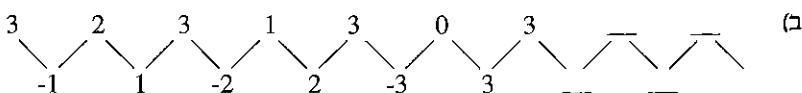
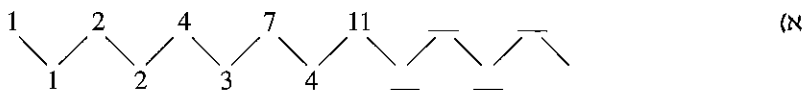


לכל איבר יש מקום בסדרה.

נהוג לסמן את איברי הסדרה בצורה $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$
המספר מציין את מקומו של האיבר בסדרה.



3. המשיכו את סדרת ההפרשים ואחר כך המשיכו את הסדרה המקורית.



4. המשיכו את הסדרה הבאה על-פי שני חוקים שונים.

1, 2, 4, _____, _____

1, 2, 4, _____, _____

(ב) תנו לחברכם לנחש את החוקים.

סדרות שונות יכולות להתחיל עם אותם איברים.



5. בסדרה נתון $a_1 = -1$, וכל איבר מתקבל מקודמו על-ידי כפל ב-2 והורדה של 1.

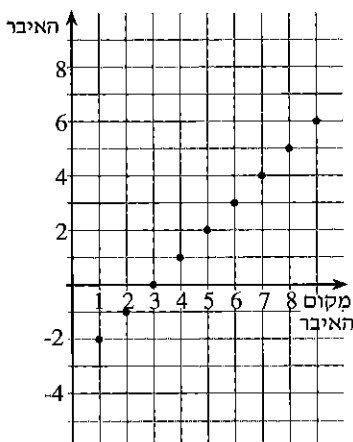
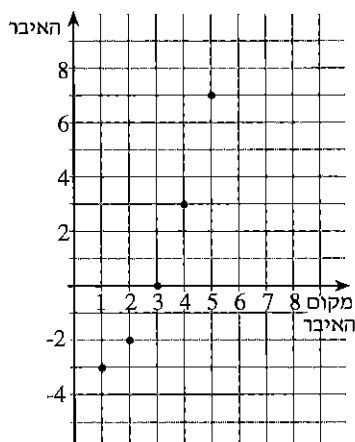
רשמו שישה איברים ראשונים של הסדרה.

השלימו: $a_{10} =$, $a_7 =$

(ב) בסדרה נתון $a_3 = 5$, וכל איבר מתקבל מקודמו על-ידי תוספת 3.

רשמו שישה איברים ראשונים של הסדרה.

6. א) רשמו שמונה איברים ראשונים של הסדרה המתוארת בכל גרף.
 רשמו גם את סדרת ההפרשים.



- ב) האם אפשר לראות, במערכת הצירים, את סדרת ההפרשים? הסבירו.
 ג) נסו למצוא קשר בין צורת הגרף לסדרת ההפרשים.
 ד) האם יש טעם לחבר את הנקודות לקו?
 ה) מהי משוואת הישר העובר דרך הנקודות של הגרף הימני. איך נקראת סדרה כזו?

7. נסו לשער, באיזו מן הסדרות הבאות, נקודות הגרף נמצאות על קו ישר?

א) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$

ב) $-5, -1, 3, 7, 11, \dots$

ג) $0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \dots$

ד) $8, 7\frac{1}{2}, 7, 6\frac{1}{2}, 6, \dots$

שרטטו, במערכת צירים, כל סדרה ובידקו את השערתכם.

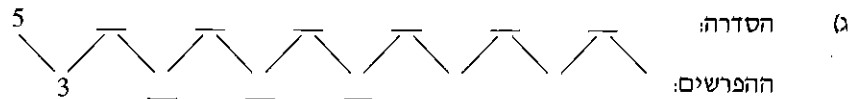
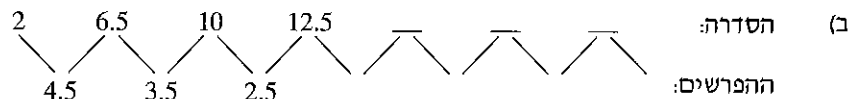
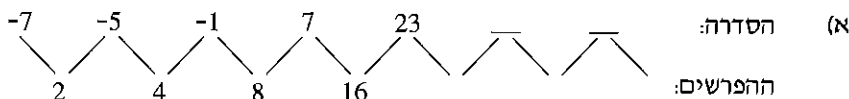
8. (א) מהי משוואת הישר העובר דרך הנקודות של הגרף בשאלה לב' ובשאלה לד'?
- (ב) מה הקשר בין שיפוע הישר להפרשים בין איבר בסדרה?
- (ג) איך נקראת סדרה מסוג זה.
- (ד) מה ערכו של a_{25} בכל אחת מסדרות אלה?

בסדרה חשבונית: $a_n = a_1 + d(n-1)$

כאשר d הוא ההפרש הקבוע בין איברי לקודמם

תרגילים

9. המשיכו את סדרת ההפרשים ואחר כך המשיכו את הסדרה המקורית. מצאו בכל סדרה את a_8 .



10. (i) השלימו ומצאו בכל סדרה את a_{10} .

(א) $1, 3, \dots, 11, \dots$

(ב) $1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, 4 \cdot 6, \dots$

(ג) $-1, 0, 2, 5, \dots, 14, \dots$

(ד) $\dots, -4, -2, 1, 5, 10, \dots$

- (ii) אילו מהסדרות הנ"ל הן סדרות חשבוניות? עבור סדרות אלה, מצאו את a_{20} .

פרק ב: סדרות חזקות וקוץ וזנב

11. א) $a_1 = 3$ וכל איבר בסדרה מתקבל מקודמו על-ידי העלאה בריבוע.
מצאו את a_3 ואת a_4 .

ב) $a_2 = 4$ וכל איבר מתקבל מקודמו על-ידי כפל ב-2.

מצאו את a_3 , את a_4 , ואת a_1 .

ג) $a_1 = 3$ וכל איבר מתקבל על-ידי חיבור האיבר הקודם עם מקומו של האיבר הקודם. מצאו את a_2 , את a_3 , ואת a_4 .

ד) $a_3 = 8$ וכל איבר מתקבל מקודמו על-ידי חילוק ב-2.

מצאו את a_5 , את a_6 , ואת a_1 .

12. שלוש הסדרות הבאות הן סדרות חשבוניות וכל איבר מתקבל מקודמו על-ידי תוספת 2.

בסדרה הראשונה האיבר הראשון -3.

בסדרה השנייה האיבר הראשון 1.

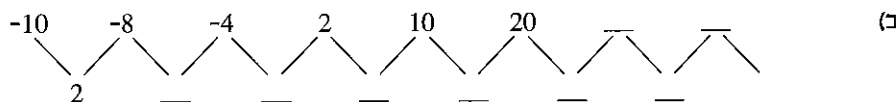
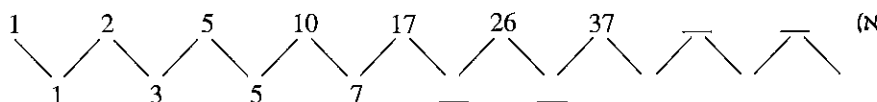
בסדרה השלישית בחרו בעצמכם את האיבר הראשון.

א) רשמו שישה איברים ראשוניים בכל סדרה.

ב) סמנו במערכת צירים את האיברים של כל סדרה בצבע משלה.

ג) מה המשותף לגרפים של שלוש הסדרות?

13. המשיכו את הסדרות (שימו לב להפרשים).



ג) 12, 9, 6, 3, 0, -3, ____, ____

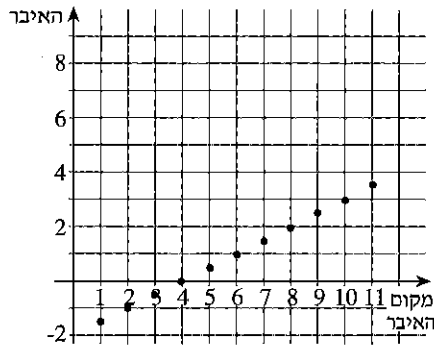
ד) 1, 3, 7, 15, 31, ____, ____

ה) 1, 4, 9, 16, 25, ____, ____

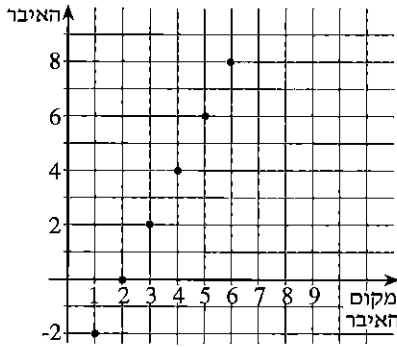
ו) -3, 0, 5, 12, 21, 32, ____, ____

14. רשמו את איברי הסדרה על-פי הגרף והוסיפו שלושה איברים.

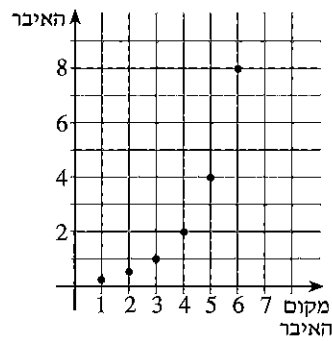
(א)



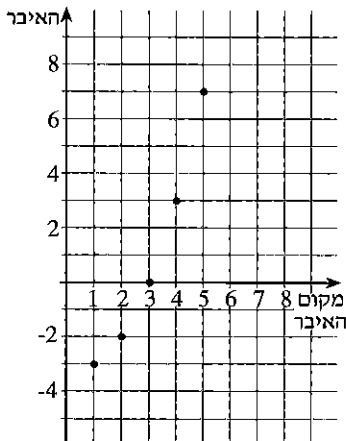
(ב)



(ג)



(ד)



רישום החוק במילים

בסעיף זה נרשום חוקים במילים אנכי אל ממשל כל נסילג.

1. במפגש שנתי של חבורת "יחי הרושם" נהוג שכל משתתף שמגיע, לוחץ את ידי כל אלה שהגיעו לפניו.

מס' הלחיצות

א) כמה לחיצות ידיים התבצעו בין 3 הראשונים? $a_3 =$ _____

כמה לחיצות נוספו, כשהגיע הרביעי?

כמה לחיצות היו בסך הכל, בין ארבעת הראשונים $a_4 =$ _____

כמה לחיצות נוספו, כשהגיע החמישי?

כמה לחיצות היו בסך הכל, בין חמשת הראשונים? $a_5 =$ _____

ב) רשמו את הסדרה של מספר לחיצות ידיים, והמשיכו.

5 אנשים 4 אנשים 3 אנשים 2 אנשים איש אחד

רשמו את סדרת ההפרשים והסבירו מה מתארים ההפרשים.

ג) רשמו את החוק במילים.

אפשר לרשום זאת בקיצור, כאשר n מתאר את מספר האנשים ו- a_n את מספר הלחיצות הידיים:



$$a_n = \boxed{\begin{array}{c} \text{האיבר} \\ \text{חקודם} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{מספר האנשים} \\ \text{שבאו לפניו} \end{array}}$$

(מספר הלחיצות שהיו)

(מספר הלחיצות שנוספו)

רשמו במילים מה המשמעות של $a_9 = 36$.

מצאו, על-פי a_9 , את a_{10} ואת a_{11} .

2. נתון: 

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 2$$

בקיצור נרשום:

$$a_n = \boxed{\begin{array}{c} \text{האיבר} \\ \text{הקודם} \end{array}} + 2$$

כאשר a_n הוא האיבר במקום n (כלשהו) בסדרה.

(א) הרישום הזה מאפיין חוק של סדרה. רשמו את החוק במילים. איך נקראת סדרה כזו?

(ב) בטאו בעזרת האיבר הקודם: $a_8 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_7 = \underline{\hspace{2cm}}$

(ג) רשמו שתי סדרות שונות שמתאימות לחוק.

3.  (א) השלימו את הסדרה
על-פי החוק:

1 , 4 , ,

$$a_n = \boxed{\begin{array}{c} \text{האיבר} \\ \text{הקודם} \end{array}} \cdot 4$$

(ב) השלימו את הסדרה
על-פי החוק:

1 , 4 , ,

$$a_n = \boxed{\begin{array}{c} \text{האיבר} \\ \text{הקודם} \end{array}} \cdot 3 + 1$$

(ג) השלימו את החוק

$$a_n = \boxed{\begin{array}{c} \text{האיבר} \\ \text{הקודם} \end{array}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

על-פי הסדרה: 1 , 4 , 7 , 10 , 13

4. השלימו את החוקים על-פי הסדרות המתאימות. 

א) $2.5, 4.5, 6.5, 8.5, 10.5, \dots$
 $a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} + \underline{\hspace{2cm}}$

ב) $1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots$
 $a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

ג) $4, 1, -2, -5, \dots$
 $a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} + \underline{\hspace{2cm}}$

5. רשמו חמישה איברים ראשונים של כל סדרה. 

א) $a_1 = 2$
 $a_n = \frac{6}{\boxed{\text{האיבר הקודם}}}$

ב) $a_1 = 34$
 $a_n = \frac{1}{2} \cdot \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 1$

ג) $a_1 = 3$
 $a_n = 10 - \boxed{\text{האיבר הקודם}}$

ד) $a_1 = 1$
 $a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}}^2$

6. רשמו את החוק של כל סדרה, באופן דומה לרשום בתרגילים הקודמים.

א) $a_n = -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

ב) $a_n = 1, 4, 16, 64, \dots$

ג) $a_n = 2, 3.5, 5, 6.5, 8, 9.5, \dots$

ד) $a_n = 81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

באילו סדרות, נקודות הגרף יהיו על קו ישר? בידקו במחשב.

7. לטאה נמצאת בגובה $2\frac{1}{2}$ מ' על עמוד חלק. בכל פעם היא מטפסת לגובה כפול

מזה שבו היא נמצאת ואז, בעת המנוחה, גולשת $1\frac{1}{2}$ מטר למטה.

א) המשיכו את סדרת הגבהים שלה. (כל איבר מתאר את מקומה לאחר העלייה והגלישה).

$2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}}$

ב) השלימו את רישום החוק המתאר כיצד מתקבל כל איבר מקודמו.

$a_n =$

תרגילים

8. רשמו את חמשת האיברים הראשונים של כל סדרה.

$$\begin{array}{ll} \text{א)} & \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot 3 \end{cases} \\ \text{ד)} & \begin{cases} a_3 = 2 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 7 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ב)} & \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} : 2 \end{cases} \\ \text{ה)} & \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot (-2) \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ג)} & \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} - 4 \end{cases} \\ \text{ו)} & \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot (-2) + 9 \end{cases} \end{array}$$

9. נתון חוק של סדרה: $a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot 17$

א) השלימו $a_4 = a_3 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

$a_2 =$ $a_{10} =$

ב) רשמו חמישה איברים ראשונים של סדרה, המקיימות את החוק.

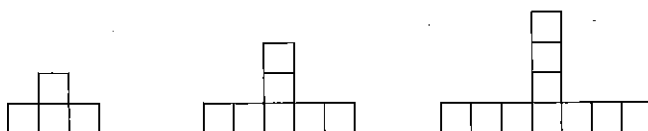
10. רשמו את חמשת האיברים הראשונים של כל סדרה.

$$\begin{array}{ll} \text{א)} & \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = \frac{1}{\boxed{\text{האיבר הקודם}}} \end{cases} \\ \text{ג)} & \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2 \cdot \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 1 \end{cases} \end{array}$$

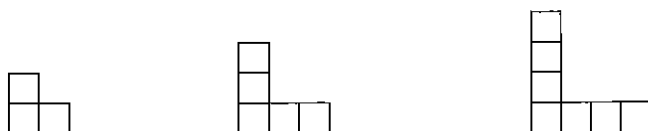
$$\begin{array}{ll} \text{ב)} & \begin{cases} a_3 = 7 \\ a_n = -\boxed{\text{האיבר הקודם}} \end{cases} \\ \text{ד)} & \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = 2 (\boxed{\text{האיבר הקודם}} + 1) \end{cases} \end{array}$$

11. איברי הסדרות הבאות הן מספר המשבצות בכל צורה.
הוסיפו איבר לכל סדרה וכתבו את החוק כיצד מתקבל כל איבר מקודמו.
נסו לעשות זאת ללא פרוט איברי הסדרה.

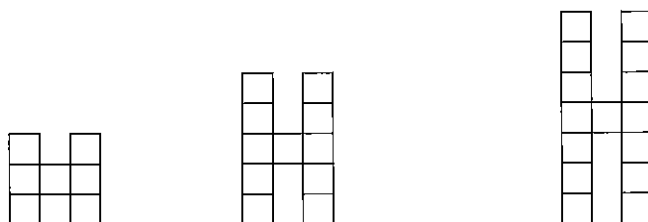
(א)



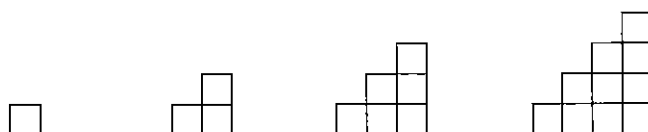
(ב)



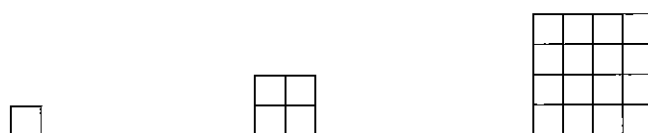
(ג)



(ד)



(ה)



רישום החוק בסימנים

1. נתונה סדרה כלשהי... $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

— איזה איבר קודם ל- a_{1000} ?

— איזה איבר עוקב ל- a_9 ? (האיבר שאחרי a_9)

— איזה איבר עוקב ל- a_{100} ?

— איזה איבר עוקב ל- a_n ?

— איזה איבר קודם ל- a_n ?

2. סדרו את האיברים בשורה, לפי מקומם הסידורי.

$a_{n-2}, a_n, a_{n+1}, a_{n-1}$

3. השלימו:

(א) a_{n+1} עוקב ל- _____ (ד) a_n קודם ל- _____

(ב) a_{n-2} עוקב ל- _____ (ה) a_{n-1} קודם ל- _____

(ג) a_n עוקב ל- _____ (ו) a_{n+2} קודם ל- _____

4. במקום לרשום חוק של סדרה בצורה: $a_n = \boxed{\begin{matrix} \text{האיבר} \\ \text{הקודם} \end{matrix}} - 4$



אפשר לרשום את החוק באמצעות הסימון של האיבר והאיבר הקודם לו,

במספר דרכים. למשל: $a_n = a_{n-1} \cdot 4$ או $a_{n+1} = a_n \cdot 4$

בספר זה נרשום ברוב המקרים בצורה $a_{n+1} = a_n \cdot 4$

(בספרים אחרים תמצאו גם שימוש בסימון $a_n = a_{n-1} \cdot 4$.)

4. רשמו בעזרת הסימון החדש.

(א) $a_{n+1} = \boxed{\begin{matrix} \text{האיבר} \\ \text{הקודם} \end{matrix}} - 4$

(ב) $a_{n+1} = \boxed{\begin{matrix} \text{האיבר} \\ \text{הקודם} \end{matrix}} \cdot 5 + \boxed{\begin{matrix} \text{מקומו הסידורי של} \\ \text{האיבר הקודם} \end{matrix}}$

(ג) $a_{n+1} = \boxed{\begin{matrix} \text{האיבר} \\ \text{הקודם} \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} \text{האיבר הקודם} \\ \text{לקודם} \end{matrix}}$

5. רשמו את החוק בעזרת האיבר הקודם ובמילים.

דוגמה: $a_{n+1} = a_n + 7$ פהוק: האיבר הקודם + 7 פירושו $a_{n+1} =$

ובמילים: כל איבר מקבל מקודמו על-ידי גספס 7.

(א) $a_{n+1} = a_n \cdot 2$ (ב) $a_{n+1} = (a_n)^2$ (ג) $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

6. רשמו בעזרת האיבר הקודם את החוק: $a_{n+1} = a_n - 3$

(ב) רשמו חמישה איברים ראשונים של סדרה המקיימת את החוק, אם $a_1 = 4$

(ג) רשמו חמישה איברים ראשונים של סדרה המקיימת את החוק, אם $a_1 = 10$

(ד) רשמו חמישה איברים ראשונים של סדרה המקיימת את החוק, אם $a_1 = 18$

7. רשמו בעזרת הסימון החדש.

דוגמה: כל איבר בסדרה מקבל מקודמו על-ידי חיסור 4: $a_{n+1} = a_n - 4$

(א) כל איבר בסדרה מתקבל מקודמו על-ידי כפל ב-2.

(ב) כל איבר בסדרה מתקבל מקודמו על-ידי הוספת מקומו של האיבר הקודם.

(ג) כל איבר הוא הנגדי לקודמו.

(ד) כל איבר בסדרה מתקבל על-ידי חיבור שני הקודמים לו.

8. בסדרה נתון:
$$\begin{cases} a_2 = 8 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n \end{cases}$$

רשמו את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

הגדרת סדרה באמצעות חוק המתאר איך מתקבל כל איבר מקודמו, וציון ערכו של a_1 , או איבר אחר בסדרה, נקראת הגדרת סדרה באמצעות כלל נסיגה.

a_1 נקרא גם תנאי התחלה.

בהמשך גרסא של חילוק יש צורך בילגד מאיבר אחד לפעלגדר סדרה פלכר כאל נסילג.

9. חשבו את חמשת האיברים הראשונים של כל סדרה.

$$\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 - 1 \\ a_1 = 2 \end{cases} \quad (א) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \\ a_1 = 10 \end{cases} \quad (ב)$$

תרגילים

10. (א) מי האיבר הקודם ל- a_{n+5} ? מי האיבר העוקב לו?

(ב) מי האיבר העוקב ל- a_{n-1} ? מי האיבר הקודם לו?

(ג) מי האיבר הקודם ל- a_{n+1} ? מי האיבר העוקב לו?

11. רשמו נכון, או לא נכון.

(א) 8 מציין את מקומו של a_8 בסדרה.

(ב) אם $a_7 = 8$, אז 8 מציין את מקומו של האיבר השביעי בסדרה.

(ג) בכל סדרה a_9 הוא איבר עוקב ל- a_8 .

(ד) לא ייתכן שמקומו של איבר יהיה שווה לערכו של האיבר.

(ה) $a_3 + a_4$ הוא סכום של שני איברים עוקבים בסדרה.

(ו) אם $a_4 = 9$, אז 9 מציין את ערכו של האיבר הרביעי בסדרה.

(ז) a_{4+1} הוא האיבר במקום החמישי בסדרה.

(ח) בכל סדרה $a_6 = a_3 + a_3$.

12. לפניכם שלוש סדרות. רשמו אותן תחילה באמצעות

האיבר הקודם

a_n ו- a_{n+1} .

(א) $4, 1, -2, -5, -8, \dots$

(ב) $10, 7, 4, 1, -2, \dots$

(ג) $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

לשתיים מהסדרות אותו חוק. האם הן אותן סדרות?

13. רשמו את החוק בכתיב סמלים.

דוגמה: כל איבר מאקראי מקודמו על-ידי כפול ב-2 ואוספם 3 אגראם.

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3$$

א) כל איבר מתקבל מקודמו על-ידי תוספת 3 והכפלת התוצאה ב-2.

ב) כל איבר מתקבל על-ידי העלאת קודמו בריבוע.

ג) כל איבר מתקבל על-ידי מכפלת שני הקודמים לו.

14. חשבו את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \\ a_1 = 10 \end{cases} \quad (\text{ד}) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 9 \\ a_1 = -3 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_1 = -3 \end{cases} \quad (\text{ה}) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3 \cdot (a_n + 2) \\ a_1 = -2 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (n + 1) \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad (\text{ו}) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 2 \\ a_1 = -2 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

15. רשמו כלל נסיגה לסדרה (רשמו גם מהו a_1).

דוגמה: $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$3\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}, 4, 4\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}, 4\frac{3}{4}, \dots \quad (\text{א})$$

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots \quad (\text{ב})$$

$$7, 4, 1, -2, -5, -8, \dots \quad (\text{ג})$$

$$81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots \quad (\text{ד})$$

16. א) חשבו את שמונה האברים הראשונים של הסדרה הבאה:

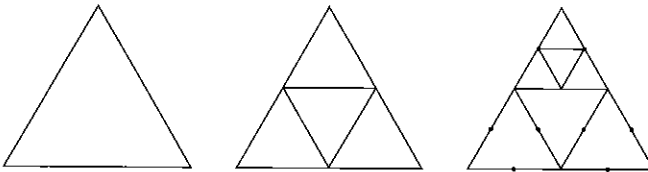
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

1, __, __, __, __, __, __, __

ב) רשמו איבר ראשון וחוק אחר, כך שתתקבל אותה סדרה.

17. כל צורה מתקבלת מהצורה הקודמת לה על-ידי חיבור אמצעי הצלעות של כל משולש, שנוצר בשלב קודם.

א) השלימו את השרטוט השלישי.



ב) המשיכו את הסדרה המתארת את מספר המשולשים החופפים בכל צורה:

1, 4, __, __, __, __, __

ג) רשמו כלל נסיגה.

18. השטח של המשולש הגדול בשאלה 17 הוא יחידה אחת.

א) המשיכו את הסדרה המתארת את שטחי המשולשים החופפים בכל צורה.

1, $\frac{1}{4}$, __, __, __

ב) רשמו כלל נסיגה.

19. אורך כל אחת מצלעות המשולש הגדול בשאלה 17 הוא יחידה אחת.

א) המשיכו את הסדרה המתארת את אורכי הצלעות של המשולשים החופפים בכל צורה.

1, __, __, __, __, __

ב) רשמו כלל נסיגה.

כללי נסיגה (בעזרת גיליון אלקטרוני Excel) – פעילות נוספת

בפעילות המחשב נשתמש בהגדרת סדרה באמצעות כלל נסיגה בצורת הכתיבה $a_n =$ ולא בצורה $a_{n+1} =$ כפי שנהגנו בסעיפים קודמים בספר.



משמאל לשאלות תמצאו את הוראות המחשב המתאימות.

1. לפני העבודה במחשב:

נתון כלל נסיגה: $a_n = a_{n-1} + 4$.

דוגמה: נבטא את a_2 כפונקציה קבועה: $a_2 = a_1 + 4$.

- בטאו את a_5 בעזרת קודמו.
- בטאו את a_6 בעזרת קודמו.
- בטאו את a_{10} בעזרת קודמו.
- נתון גם $a_1 = 5$, חשבו את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

2. התוכנה Excel מאפשרת לחשב כל איבר בעזרת קודמו.

פתחו את התוכנה Excel.

נרשום את הסדרה במחשב.

– הביאו את הסמן לתא הראשון בטור A, הקישו ורשמו 5.

– רשמו $a_1 = 5$

– רשמו בתא השני בטור A

– רשמו $a_2 = a_1 + 4$

$= A1+4$ (אל תשכחו את סימן השוויון לפני A1)

– הביאו את הסמן לקודקוד המסומן של התא השני, יסומן + לחצו וגררו למטה עד התא העשירי ושחררו.

רשמו את האיברים הבאים.

המחשב ממשיך לרשום בטור A כל איבר בעזרת קודמו על-פי הדוגמה. (יוסיף 4)

(ב) רשמו את ערכם של $a_{10} =$, $a_9 =$
(ג) חזרו לתא השלישי בטור A והקישו.

בשורת הנוסחאות, (מעל הגיליון בצד שמאל) ירשם $= A2+4$ כלומר, $a_3 = a_2 + 4$.

פעילות מחשב

פעילות מחשב

פעילות מחשב

פעילות מחשב

- עברו לתאים המתאימים והעתיקו את הרשום בשורת הנוסחאות.

$$A_6 = \quad A_5 = \quad A_4 =$$

ד) המשיכו לגרור ובידקו אם 173 איבר בסדרה, ואם 270 איבר בסדרה. אם כן, ציינו את מקומם הסידורי.

אם רשמתם איבר ראשון וביטוי לאיבר השני בעזרת קודמו, המחשב רואה בביטוי זה כלל נסיגה, כשגוררים, המחשב ממשיך לרשום את איברי הסדרה על-פי הכלל. כשמקשים על תא מסוים, נרשם בשורת הנוסחאות הביטוי של האיבר בעזרת קודמו.



3. נתונה הסדרה:

$$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_n = 3b_{n-1} + 1 \end{cases}$$

- הביאו את הסמן לתא הראשון בטור B, הקישו ורשמו 4
בתא השני רשמו $3 \cdot B1 + 1$.
- הביאו את הסמן לקצה המסומן של התא השני (יסומן ב +), לחצו וגררו למטה עד התא ה-15 ושחררו.

א) רשמו בטור B את הסדרה הנתונה עד b_{15} .

ב) מה ערכם של b_{10} , b_{12} , b_{15} ?

ג) רשמו את b_{15} בעזרת קודמו: $b_{15} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. א) רשמו בטור C את הסדרה:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_n = c_{n-2} + c_{n-1} \end{cases}$$

בתא הראשון בטור C רשמו 1.
בתא השני בטור C רשמו 2.
בתא השלישי בטור C רשמו $C1 + C2$.

המשיכו את הסדרה עד c_{30} .

ב) מה ערכם של c_{20} , c_{21} , c_{22} ?

ג) רשמו את c_{30} כסכום איברים קודמים בסדרה $c_{30} = \underline{\hspace{2cm}}$ (הקישו בחלון המתאים ובידקו).

5. רשמו בטורים הבאים את הסדרות והמשיכו את הסדרה עד האיבר ה-15.

$$\begin{array}{ll} \text{(א)} & \begin{cases} d_1 = 8 \\ d_n = 2d_{n-1} \end{cases} \\ \text{(ב)} & \begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 2 \\ e_n = e_{n-1} \cdot e_{n-2} \end{cases} \end{array}$$

מהו האיבר ה-15 בסדרה?
הסבירו מדוע החל באיבר העשירי בסעיף ב', רשומים האיברים בצורה שונה.

$$\text{(ג)} \quad \begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 2 \\ f_n = f_{n-1} / f_{n-2} \end{cases}$$

מה תוכלו לומר על סדרה זו?

החליפו את האיבר הראשון
בטור זה, למשל: $f_1 = 4$.
האם הסדרה נשארה
מחזורית?

החליפו כרצונכם את f_1 ו- f_2 . בידקו.
השלימו: $f_{80} =$ $f_{2000} =$ (נסו ללא מחשב).

$$\text{(ד)} \quad \begin{cases} g_1 = 3 \\ g_n = -g_{n-1} \end{cases}$$

תארו את הסדרה?

6. (א) רשמו כלל נסיגה כך שתקבל סדרה יורדת.

רשמו במחשב ובידקו.

(ב) רשמו כלל נסיגה כך שתקבלו סדרה מחזורית ש"אורך המחזור"
שלה גדול מ-2.
בידקו בעזרת המחשב.

כלל נסיגה וגרף במחשב (בעזרת Excel) – פעילות נוספת

1. א) נתון כלל נסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

איזו סדרה זו?

פתחו את התוכנה Excel.

– רשמו $a_1 = 1$

– רשמו $a_2 = a_1 + 1$

– הביאו את הסמן לתא הראשון בטור A, הקישו ורשמו 1.

– רשמו בתא השני בטור A

$$=A1 + 1$$

המחשב ימשיך לרשום כל איבר בעזרת קודמו על-פי הדוגמה שנתתם (יוסיף 1)

– הביאו את הסמן לקצה המסומן של התא השני, (יסומן +), לחצו וגררו למטה עד התא ה-10

ושחררו.

– הביאו את הסמן לתא הראשון בטור B ורשמו 4 –.

– רשמו בתא השני $=B1 + 3$ גררו עד התא ה-10.

– רשמו את איברי הסדרה עד a_{10} .

ב) – רשמו בטור B את הסדרה:

$$b_1 = -4$$

$$b_n = b_{n-1} + 3$$

– רשמו עד b_{10} .

ג) – רשמו בטור C את הסדרה:

$$c_1 = 1$$

$$c_n = 2 \cdot c_{n-1}$$

– רשמו עד c_{10} .

– הביאו את הסמן לתא הראשון בטור C ורשמו 1.

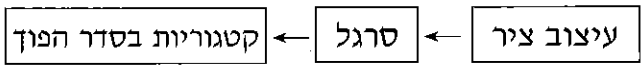
– רשמו בתא השני $=2*C1$ גררו עד התא ה-10.

המשך ←

- (ד) כעת תלמדו לשרטט גרפים של סדרות.
- שרטטו גרפים של הסדרות b_n ו- c_n על-פי ההוראות.
- על ציר x תופיע הסדרה a_n : מקום האיבר בסדרה.
- השחירו את כל הטורים (A, B, C).
 - הקישו על  בחרו סוגים רגילים, בסוג תרשים בחרו, (פיזור) xy ,
 - בחרו  והקישו סיום.
 - קבעו יחידות על ציר x .
 - הקישו הקשה כפולה על ציר x .
 - הקישו על סרגל.
 - רשמו ביחידה ראשית  ואישור.
 - הגדילו את הגרף על-ידי משיכת המסגרת.
- השוו את קצב השינוי של הגרפים שהתקבלו.

ייתכן והגרף ישורטט "מימין לשמאל" אם תרצו ותוכלו לשנות זאת באופן הבא:

עומדים על הציר ולוחצים על העכבר הימני:



2. מחקו את הגרף. - הקישו על הגרף והקישו Delete.
 מחקו את הרשום בטורים B ו- C. - השחירו את הטורים B ו- C והקישו Delete.

נתונות הסדרות:

$$\begin{aligned} & \text{(א)} \quad \begin{cases} b_1 = 320 \\ b_n = b_{n-1} - 40 \end{cases} \\ & \text{(ב)} \quad \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_n = -2 \cdot c_{n-1} \end{cases} \end{aligned}$$

איך, לדעתכם, יראו הגרפים של שתי הסדרות האלה?

- רשמו את שתי הסדרות בטורים B ו- C.

- שרטטו גרפים של שתי הסדרות. - הקישו הקשה כפולה על הצירים כדי לקבוע יחידות: הקישו על **סרגל**.
 בציר x יחידה ראשית **1**, בציר y יחידה ראשית **100** ואישור.

- מצאו זוג של איברים שווים בשתי הסדרות וקבעו את מקומם הסידורי.

3. מחקו את הגרף ואת הרשום בטורים B ו- C.
 (א) - רשמו בטור B את הסדרה:

- $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \\ b_n = b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases}$
 - בתא השלישי רשמו **=B2-B1** גררו עד b_{20} .
 - גררו גם את הסדרה הרשומה בטור A עד a_{20} .
 - איזו סדרה קיבלתם? האם זה מקרה?
 - כדי לבדוק, החליפו את האיבר הראשון בטור B.
 - הביאו את הסמן לתא ורשמו למשל, 1.

- האם הסדרה נשארת **מחזורית**?
 - החליפו כרצונכם את b_2 .
 - חזרו לערכים: $b_1 = 2$, $b_2 = 3$

המשך ←

- מה, לדעתכם, יהיה המספר הרשום בתא 37? בידקו על-ידי גרירה.
- מה, לדעתכם, יהיה המספר הרשום בתא 159? בידקו על-ידי גרירה.
- $b_{76} = -2$. מתי לראשונה יופיע -2 פעם נוספת? בידקו.

- (ב) - איך יראה הגרף של הסדרה?
- שרטטו ובידקו את השערתכם. הפעם נשרטט גרף שנקודותיו מחוברות.

- הקישו על  בחרו  והקישו סיום.

- הקישו הקשה כפולה על הצירים כדי לקבוע יחידות: בציר x יחידה ראשית , בציר y יחידה ראשית .

- (ג) נגדיר כעת כלל נסיגה דומה: $c_n = c_{n-2} - c_{n-1}$.
- חסבירו מה ההבדל בין הכלל הזה והכלל הקודם.
- בידקו אם גם סדרה זו מחזורית.
- בחרו c_1 ו- c_2 כרצונכם.
- רשמו בתא השלישי

$=C1-C2$

מחקו את הגרף ואת הרשום בטורים B ו- C.

4. חשבו מספר איברים ראשונים ונסו לקבוע אם הסדרות הבאות מחזוריות.

$\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = 3 \\ d_n = d_{n-1} * d_{n-2} \end{cases} \quad (א)$	$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \end{cases} \quad (ב)$
$\begin{cases} e_1 = 2 \\ e_2 = 4 \\ e_n = e_{n-2}/e_{n-1} \end{cases} \quad (ד)$	$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 4 \\ c_n = c_{n-1}/c_{n-2} \end{cases} \quad (ב)$

- במה שונה הסדרה בסעיף ד' מזו הרשומה בסעיף ב'?

המשך ←

$$(ה) \begin{cases} f_1 = 4 \\ f_n = -f_{n-1} \end{cases}$$

(ו) רשמו סדרה מחזורית נוספת שאורך המחזור שלה 2 ואינה סדרה של מספרים נגדיים.

הגרעין הבא גסביל, אך שימוש בפישוט ביטויים אולגבריים, מדוע הסדרה שנמצא מחזורית, פן אכן כאלה.

$$5. \text{נסמן: } \begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases}$$

נבטא את האיברים בעזרת x ו- y :

$$a_1 = x$$

$$a_2 = y$$

$$a_3 = a_2 - a_1 = y - x$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = y - x - y = \text{פשטו:}$$

$$a_5 = a_4 - a_3 =$$

המשיכו לבטא איברים עד שתגיעו למחזוריות.

6. בידקו אם הסדרות הבאות מחזוריות.

$$\begin{array}{lll} (א) \begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_n = a_{n-1}/a_{n-2} \end{cases} & (ב) \begin{cases} a_1 = x \\ a_n = -a_{n-1} \end{cases} & (ג) \begin{cases} a_1 = x \\ a_n = 1/a_{n-1} \end{cases} \end{array}$$

7. בידקו, מה קורה אם מבטאים איברים בסדרה בה כלל הנסיגה הוא:

$$a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$$

$$\text{קחו למשל: } a_1 = 2$$

$$a_2 = 3$$

כללי נסיגה שונים

1.  חוק של סדרה כלשהי הוא: $a_{n+1} = 2a_n + 1$.
בטאו על-פי החוק, (בעזרת האיבר הקודם).

ב) $a_7 = 2a_6 + 1$

(i) $a_{100} =$ (א) $a_8 =$ (ג)

(ב) $a_2 =$ (ד) $a_{\square} = 2a_3 + 1$

(ii) נתון כי $a_7 = 12$ חשבו את a_8 ואת a_6 .

2.  חוק של סדרה כלשהי הוא: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n + 4$.
השלימו. (רשמו בעזרת האיבר הקודם).

(א) $a_7 =$ (ג) $a_{11} =$

(ב) $a_2 =$ (ד) $\frac{1}{2} \cdot a_3 + \underline{\hspace{1cm}}$

3.  חשבו את חמשת האיברים הראשונים של כל סדרה.

(א) $\begin{cases} a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 \\ a_1 = 5 \end{cases}$ (ד) $\begin{cases} a_{n+1} = 2 - a_n \\ a_1 = 8 \end{cases}$

(ב) $\begin{cases} a_{n+1} = -(a_n + 2) \\ a_1 = 3 \end{cases}$ (ה) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \\ a_1 = -5 \end{cases}$

(ג) $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n \\ a_1 = 4 \end{cases}$ (ו) $\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{a_n} \\ a_1 = 2 \end{cases}$

4.  כל אדם שבא מביא מתנה לכל הנוכחים בחדר. a_n מייצג את מספר המתנות, שהצטברו עד שבא האדם ה- n .

(א) כשבא האדם השמיני: $a_8 = a_7 + \underline{\hspace{2cm}}$

כשבא האדם התשיעי: $a_9 = a_8 + \underline{\hspace{2cm}}$

$a_{10} =$

החוק: $a_{n+1} =$

(ב) חשבו. (שימו לב, הראשון שבא לא צריך להביא מתנה כלומר, $a_1 = 0$).

$a_5 =$ $a_2 = 0 + 1 = 1$

$a_6 =$ $a_3 = a_2 + \underline{\hspace{2cm}} = 1 + \underline{\hspace{2cm}} =$

$a_7 =$ $a_4 =$

5.  חשבו את תמשת האיברים הראשונים של כל סדרה.

(א) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_1 = 5 \end{cases}$ (ג) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (n + 1) \\ a_1 = 10 \end{cases}$

(ב) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - n \\ a_1 = 30 \end{cases}$ (ד) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

6.  (א) כמה מספרים שונים (בני 2 ספרות) ניתן לרשום בעזרת הספרות 1, 2:

(כל ספרה פעם אחת)? נסמן ב- a_2 .

(ב) כמה מספרים שונים (תלת ספרתיים), ניתן לרשום בעזרת הספרות

1, 2, 3 (כל ספרה פעם אחת)? נסמן ב- a_3 .

(ג) כמה מספרים שונים (ארבע ספרתיים), ניתן לרשום בעזרת הספרות

1, 2, 3, 4 (כל ספרה פעם אחת)? נסמן ב- a_4 .

(חשבו תחילה, בכמה מקומות ניתן לשלב את 4 בכל מספר שרשמתם בסעיף

ב').

(ד) כמה מספרים שונים (חמש ספרתיים) ניתן לרשום בעזרת הספרות

1, 2, 3, 4, 5 (כל ספרה פעם אחת)? $a_5 =$

(ה) רשמו את הסדרה שמצאתם (הסבירו מדוע מתאים לרשום $a_1 = 1$)

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

1 2

(ו) רשמו כלל נסיגה מתאים. $a_{n+1} =$

7. נתון: $a_1 = 2$

$a_2 = 4$

(כל איבר שווה לסכום שני האיברים שלפניו). $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$

א) השלימו: $a_3 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$

$a_6 =$

$a_4 = a_2 + a_3 =$

$a_7 =$

$a_5 =$

$a_8 =$

ב) רשמו סדרה אחרת, שמקיימת את החוק $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$

אם לא בצלגם את פקטוריון המחשב פגלו את גרליו 8 כאן, אחד כך, אלא מחשב, את גרליו 4-7 בסף פקודת (מאזנים 88-87) ואחר כך המשיכו כאן. את בצלגם את פקטוריון המחשב פגלו את גרליו 9 ואילו.

8. $a_1 = 2$

$a_2 = 3$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

חשבו את 13 האיברים הראשונים.

איזו סדרה קיבלתם?

נסו לקבוע מה יהיה ערכו של a_{18} ובידקו על-ידי המשך הסדרה. מה יהיה ערכו

של a_{30} ? ושל a_{31} ?

תרגילים

9. חשבו את חמשת האיברים הראשונים של כל סדרה.

א)
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{100}{a_n} \\ a_1 = 20 \end{cases}$$

ב)
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 7 \\ a_1 = 12 \end{cases}$$

ג)
$$\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

ד)
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 \cdot a_n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

10. חוק של סדרה הוא $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ השלימו:

$$a_7 = \underline{\hspace{1cm}} + a_5 \quad (2) \qquad a_3 = a_2 + \underline{\hspace{1cm}} \quad (N)$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = a_{11} + a_{10} \quad (7) \qquad a_{10} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (8)$$

11. חשבו את חמשת האיברים הראשונים של כל סדרה.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (n+1) & (2) \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n & (3) \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_{n-1} + a_n \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + n + 1 \\ a_1 = 4 \end{cases} \quad (2)$$

12. רשמו כלל נסיגה לכל סדרה.

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{1} \quad (\sqsupset) \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{1} \quad (\aleph)$$

$$\mathbf{a}_2 = 1 \cdot \mathbf{2} \qquad \mathbf{a}_2 = 1 + \mathbf{2}$$

$$\mathbf{a}_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \qquad \mathbf{a}_3 = 1 + 2 + 3$$

$$\mathbf{a}_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \qquad \mathbf{a}_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$a_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \qquad a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$a_{n+1} = \quad \quad \quad a_{n+1} =$$

13. א) במסגרת שבוע אימוני כושר, מבצע כל מתאמן במחלקה א', 8 כפיפות מרפקים ביום ראשון.

בכל יום עליו לבצע 2 כפיפות פחות מכפליים הכפיפות שביצע ביום הקודם? כמה כפיפות מרפקים יבצע ביום חמישי, לפני שיצא לחופשה?

ב) במחלקה אחרת קיים אותו חוק אך ביום ראשון היה עליהם לבצע מספר אחר של כפיפות מרפקים. ביום שלישי בצעו 22 כפיפות.

כמה כפיפות מרפקים בצעו ביום ה'?

כמה כפיפות מרפקים בצעו ביום א'?

ג) הגדירו את הסדרות בעזרת כלל נסיגה.
 $a_{n+1} =$
 $a_1 =$

14. א) - הוסיפו שני איברים לסדרת השרטוטים.



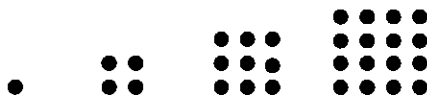
- רשמו מתחת לכל שרטוט, את מספר העיגולים בשרטוט והוסיפו עוד שני איברים לסדרת המספרים שהתקבלה.

- רשמו כלל נסיגה מתאים.

רמז: רשום תחילה כל איבר בעזרת קודמו.
 $a_2 = a_1 + \underline{\hspace{2cm}}$
 $a_3 =$

סדרה זו נקראת סדרת המספרים המשולשים.

ב) - הוסיפו שני איברים לסדרת השרטוטים.



- רשמו מתחת לכל שרטוט, את מספר העיגולים שבשרטוט והוסיפו שני איברים לסדרת המספרים שהתקבלה.

- מה יהיה, לדעתכם, מספר העיגולים באיבר העשירי בסדרה?

סדרה זו נקראת סדרת המספרים הריבועיים.

15. יוסי קיבל מכתב מדודתו העשירה ברטה.

יוסי היקר!

כעת הגעתי לגיל 65 ואני חיה בנוחות ובאושר. ברצוני לתת לך חלק מכספי.
תוכל לבחור באחת מהאפשרויות:

אפשרות 1: אתן לך השנה \$1000, בשנה הבאה \$1100 וכן הלאה, בכל שנה ב-\$100 יותר, מבשנה הקודמת.

אפשרות 2: אתן לך השנה \$2000, בשנה הבאה \$1900 וכך הלאה, בכל שנה ב-\$100 פחות, מבשנה הקודמת.

אפשרות 3: אתן לך השנה \$100, בשנה הבאה פי 1.5 מסכום זה ($100 \cdot 1.5$) וכך הלאה, בכל שנה פי 1.5 מבשנה הקודמת.

אפשרות 4: אתן לך השנה \$8, בשנה הבאה \$16, בשנה שלאחריה \$32 וכך הלאה, בכל שנה פי 2 מבשנה הקודמת.

כמובן שהסכם זה יהיה תקף כל עוד אני בחיים. הודע לי בהקדם את החלטתך.

באהבה דודה ברטה.

יוסי הוא בזבזן. כלומר, בכל שנה ודאי יוציא את כל הכסף שיקבל באותה שנה. לכן מה שמענין אותו, זו ההכנסה השנתית ולא הסכום המצטבר.

- א) רשמו את הסדרות השונות ויעצו ליוסי במה לבחור.
תוכלו לרשום אותן בטורים B עד F ב- Excel. (בטור A רשמו את הסדרה $A_1 = 1$ ו- $A_2 = A_1 + 1$)
אם רשמתם את הסדרות ב- Excel שרטטו את הגרפים ב- Excel, אם לא, המשיכו כאן.
ב) שרטטו מערכת צירים וסמנו בה נקודות המתאימות לכל אחת מהסדרות, כל סדרה בצבע אחר.
היעזרו בגרפים כדי לחשוב שנית ולנמק את עצתכם ליוסי.

כללי נסיגה וסדרה לפי מקום

1. א) חשבו את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + 4$$

מאוד לא נוח לחשב את a_{100} על-פי החוק הנתון.

איזו סדרה זו?

ב) הציבו את a_1 ו- d של הסדרה בנוסחת האיבר הכללי ופשטו.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$



$$a_n = 4 \cdot n - 3$$

חשבו את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

$$a_2 = 4 \cdot 2 - 3$$

$$a_1 = 4 \cdot 1 - 3$$

המשיכו: $a_5 =$ $a_4 =$ $a_3 =$

האם קבלתם אותם חמישה איברים ראשונים כמו בסעיף א'?

חשבו: $a_{100} =$

אפשר להוכיח, שבסעיף א' ו- ב' הוגדרה אותה סדרה. בסעיף א' בנינו כל איבר של הסדרה על-פי קודמו, בסעיף ב' יכולתם למצוא איברים בסדרה בלי קשר אם מצאתם, או לא מצאתם, איברים אחרים בה.



הגדרת סדרה המבוססת על מקומו של האיבר בסדרה כללה נקראת הגדרה על-פי מקום



בדרך כלל קשה יותר למצוא את התבנית להגדרה על-פי מקום, אך אם היא נתונה, קל יותר לחשב על פיה איברים הנמצאים בכל מקום בסדרה.



פרק 2: סדרות חזקות, גידול ודעיכה

2. הכלל לפי מקום של סדרה הוא $a_n = 3 \cdot n - 1$.

א) חשבו את ששת האיברים הראשונים.

$$a_2 = 3 \cdot \square - 1 =$$

$$a_{\square} = 3 \cdot \square - 1 =$$

ב) רשמו את האיברים בשורה והוסיפו עוד שלושה איברים.

2 , _____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____

ג) חשבו: $a_{100} =$ $a_{50} =$ $a_9 =$

ד) רשמו כלל נסיגה לסדרה הנ"ל.

$$a_1 =$$

$$a_{n+1} =$$

3. הכלל לפי מקום של סדרה הוא $a_n = 2^n$ א) חשבו את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

$$a_1 = 2^1$$

$$a_2 = 2^2$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

המשיכו

ב) רשמו את האיברים בשורה והוסיפו עוד ארבעה איברים.

2 , _____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____

ג) חשבו את a_8 ואת a_{20} .

רשמו כלל נסיגה לסדרה הנ"ל.

$$a_1 =$$

$$a_{n+1} =$$



4. הכלל לפי מקום של סדרה הוא $a_n = 20 - 2n$.

(א) חשבו את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

(ב) רשמו את האיברים בשורה והוסיפו עוד שלושה איברים.

(ג) חשבו את a_8 ואת a_{20} .

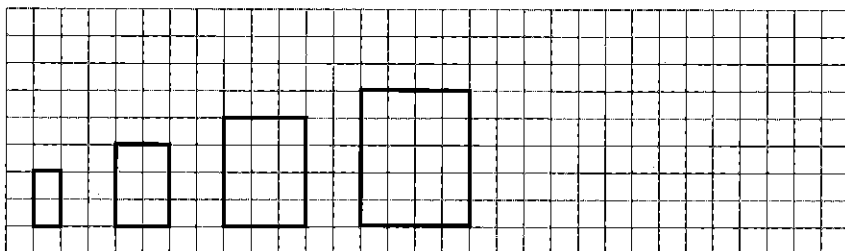
(ד) רשמו כלל נסיגה לסדרה.

(ה) האם 100- נמצא בסדרה? אם כן, באיזה מקום?

סדרה היא בעצם פונקציה שהתחום שלה הוא קבוצת מספרים הטבעיים. מציאת איבר של סדרה, המוגדרת לפי מקום, היא בעצם הצבה בפונקציה שהמשתנה שלה הוא המקום בסדרה.



5. (א) המשיכו ובנו מלבנים נוספים, רשמו על הצלעות את אורכן, ובתוך המלבן את שטחו. (יחידת המידה משבצת).



(ב) רשמו שבעה איברים ראשונים של סדרת השטחים:

1 · 2 2 · 3 _____

(ג) רשמו תבנית מתאימה לפי מקום (בעזרת ח).

(ד) רשמו את סדרת השטחים לאחר חישוב, ומצאו גם את סדרת ההפרשים.

השטחים: 2 6 _____

סדרת ההפרשים: 4 _____

(ה) תארו במילים, בעזרת ההפרשים, איך מתקבל כל איבר מקודמו בסדרה המקורית.

(ו) צבעו באיבר הרביעי את המלבן המשורטט באיבר השלישי והקיפו בסדרת ההפרשים את התוספת מהאיבר השלישי לרביעי. האם יש התאמה? חזרו עבור האיבר השישי.

בסדרה זו קל למצוא את איברי הסדרה ואולי גם לקבוע את חוק הסדרה על-פי מקום, אך קשה יותר לרשום כלל נסיגה.



תרגילים

6. (א) חשבו את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה: $a_n = 5 + 3 \cdot n$.

$$a_{[2]} = 5 + 3 \cdot \square \quad a_{[1]} = 5 + 3 \cdot \square$$

(ב) רשמו את האיברים בשורה והוסיפו עוד שלושה איברים.

(ג) רשמו איך מתקבל כל איבר מהאיבר הקודם לו.

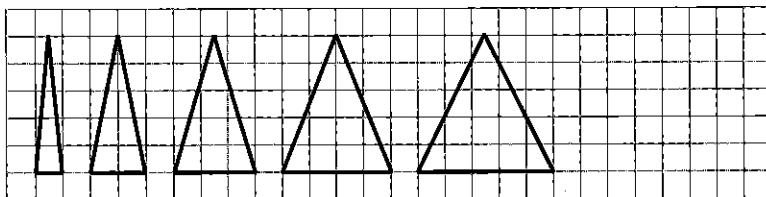
(ד) רשמו כלל נסיגה. $a_1 =$

$$a_{n+1} =$$

(ה) לפי איזו הגדרה נוח יותר לחשב את a_5 ? חשבו.

לפי איזו הגדרה נוח יותר לחשב את a_{100} ? חשבו.

7. (א) חשבו את שטחי המשולשים ורשמו כל שטח מתחת לשרטוט.



(ב) שרטטו משולש נוסף ורשמו את שטחו.

(ג) רשמו כלל לפי מקום, לסדרת השטחים של המשולשים.

(ד) הוסיפו עוד שלושה איברים לסדרת השטחים.

(ה) איך מתקבל כל איבר מקודמו?

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases} \quad \text{רשמו כלל נסיגה.}$$

8. (א) חשבו את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה $a_n = 3 \cdot 2^n$

$$a_3 = \quad a_{[1]} = 3 \cdot 2^{\square}$$

$$a_4 = \quad \text{המשיכו} \quad a_{[2]} = 3 \cdot 2^{\square}$$

$$a_5 =$$

(ב) רשמו את האיברים בשורה והוסיפו עוד שני איברים.

(ג) רשמו איך מתקבל כל איבר מקודמו.

$$(ד) \quad \begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases} \quad \text{רשמו כלל נסיגה.}$$

9. (א) חשבו את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה:

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$$

(ב) רשמו את האיברים בשורה והוסיפו עוד שני איברים.

(ג) – איך מתקבל כל איבר מקודמו?

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases} \quad \text{– רשמו כלל נסיגה}$$

(ד) רשמו תבנית **אחרת** לסדרה לפי מקום.

(ה) פרקו לגורמים את המונה של השבר, הרשום בסעיף א', צמצמו והסבירו מה קיבלתם.

10. (א) חשבו את ששת האיברים הראשונים של הסדרה:

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n + 1}$$

(ב) רשמו תבנית **אחרת** לסדרה, לפי מקום. (פרקו את המונה לגורמים וצמצמו).

(ג) רשמו כלל נסיגה לסדרה.

$$a_1 =$$

$$a_{n+1} =$$

11. בכל סעיף שתי הגדרות של סדרה. חשבו ארבעה איברים ראשונים ובידקו אם שתי ההגדרות מגדירות אותה סדרה.

לפי מקום	כלל נסיגה
(א) $a_n = 5n - 1$	$\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$
(ב) $a_n = 2n$	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 2 \end{cases}$
(ג) $a_n = 7 - 3n$	$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases}$

12. (א) החוק לפי מקום של סדרה הוא: $a_n = 4 - 3n$.
 חשבו את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.
 (ב) רשמו את האיברים בשורה והוסיפו עוד שלושה איברים.
 (ג) רשמו כלל נסיגה.
 $a_1 =$
 $a_{n+1} =$
 (ד) חשבו את a_{20} ואת a_{70}

13. החוק לפי מקום של סדרה הוא: $a_n = 2 \cdot 3^n$.
 (א) חשבו את תמשת האיברים הראשונים של הסדרה.
 (ב) רשמו את האיברים בשורה והוסיפו שלושה איברים לסדרה.
 (ג) – רשמו איך מתקבל כל איבר מקודמו.
 – רשמו כלל נסיגה.

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

 (ד) חשבו את a_{12} ואת a_{15} .

14. א) $a_n = n^2 - n$ חשבו את a_1, a_2, a_3, a_{10} .

ב) $a_n = (n+1)(n-2)$ חשבו את a_1, a_2, a_{10}, a_{15} .

ג) $a_n = n(n+2)^2$ חשבו את a_1, a_2, a_{10} .

15. א) חשבו את שמונת האיברים הראשונים של הסדרה $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$a_1 = \frac{\square(\square-1)}{2}$$

$$a_2 = \frac{\square(\square-1)}{2}$$

המשיכו.

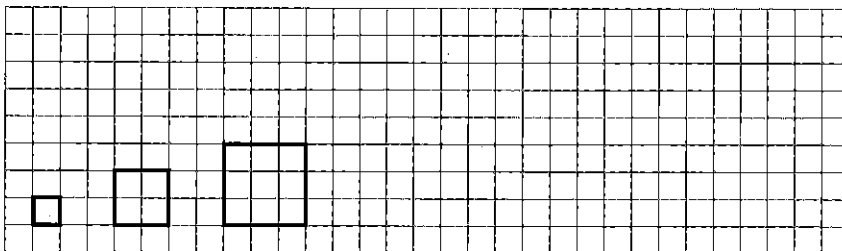
ב) רשמו את האיברים בשורה ורשמו גם את סדרת ההפרשים.

ג) באחד הסעיפים הקודמים עסקתם בשאלת לחיצות הידיים של חברות "יחי

הרושם". הסדרה המקורית כאן מתארת את מספר לחיצות הידיים (החל

מהראשון שהגיע לכנס). מה מתארת סדרת ההפרשים?

16. א) המשיכו ובנו ריבועים נוספים. רשמו על הצלעות את אורכן ובתוך הריבוע את שטחו (יחידת המידה משבצת).



ב) רשמו תבנית לסדרת השטחים (לפי n).

ג) רשמו סדרה של היקפי הריבועים.

ד) רשמו תבנית לסדרת ההיקפים.

ה) רשמו כלל נסיגה לסדרת ההיקפים

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

מספר
השורה

[illegible]

(ב) השלימו את משולש פסקל עד לשורה העשירית.

(ד) רשמו כלל נסיגה לפיו ניתן למצוא את האיברים של סדרת הסכומים.

(ו) רשמו בשורה את איברי אלכסון B. הוסיפו שלושה איברים **ונסו** לרשום כלל נסיגה לסדרה זו.

רשמו בשורה את איברי האלכסון C. נסו לחסוף שלושה איברים לסדרה זו.

סדרה חשבונית – חזרה ותרגול נוסף (רשות)

לך פי גכניג כחינה הכגלוג משנה גשסי"ה סדרה חשבאניג אופילד רך בשאלון הראשון כך שסעיף חזרה זה הוא לשיקול דעלג של האורה.

איבר כללי

בסדרה חשבונית כל איבר מתקבל מקודמו על-ידי "תוספת" קבועה. אם נסמן את התוספת הקבועה ב- d , אז הנוסחה למציאת האיבר במקום ה- n היא:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

1. לפיכך סדרות, המוגדרות באמצעות כללי נסיגה. קבעו אלו מהן חשבוניות, ועבורן מצאו את התוספת הקבועה.

$a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n + 3$ $a_1 = 7$ $a_{n+1} = 10 - a_n$	(ג)	$a_1 = 2$ $a_{n+1} = a_n \cdot 3$ $a_1 = 10$ $a_{n+1} = a_n - 3$	(א) (ב)
---	-----	---	------------------------

האם יש לדעת את ערכו של a_1 , כדי לקבוע אם סדרה היא חשבונית?

2. בטאו את איברי הסדרה החשבונית בעזרת a_1 ו- d .

$a_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$a_5 = a_1 + \underline{\hspace{2cm}}$
$a_{20} = \underline{\hspace{2cm}}$	$a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$

3. (א) איך, לדעתכם, אפשר לקבל את האיבר הראשון אם ידוע האיבר העשירי והתוספת הקבועה.

- (ב) בסדרה חשבונית $a_{10} = 30$ ו- $d = 2$ מצאו את a_1 .
- (ג) כמה "תוספות" יש להוסיף כדי להגיע מ- a_{10} ל- a_{18} ?
- (ד) בסדרה חשבונית $a_{10} = 5$ ו- $d = 2$. חשבו את a_{18} .

4. בסדרה חשבונית נתון $a_1 = 3$.

(א) בטא את a_{10} ואת a_{20} בעזרת d .

(ב) חשבו את a_{10} ואת a_{20} אם $d = 7$.

5. רשמו תבנית (בעזרת n) לכל אחת מהסדרות הבאות ופשטו אותה.

דוגמה: $d = 7$, $a_1 = 10$

פסול: $a_n = 10 + (n-1) \cdot 7 =$

(א) $d = 10$, $a_1 = 3$ (ג) $d = -3$, $a_1 = 12$

(ב) $d = 8$, $a_1 = -2$ (ד) $d = -3$, $a_1 = 17$

6. קבעו אילו מכללי הנסיגה מתאימים לסדרה חשבונית.

(א) $a_{n+1} = 10 - \frac{a_n}{2}$ (ד) $a_{n+1} = a_n - 4$

(ב) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}$ (ה) $a_{n+1} = a_n + 100$

(ג) $a_{n+1} = 2a_n + 10$ (ו) $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$

7. (א) בטאו את איברי הסדרה החשבונית בעזרת a_1 ו- d .

$a_4 =$ $a_3 =$ $a_2 =$

(ב) בטאו את הסכום של שני האיברים הראשונים של הסדרה, בעזרת a_1 ו- d .

בטאו את הסכום של האיבר השני והשלישי בעזרת a_1 ו- d .

בטאו את הסכום של האיבר השלישי והרביעי בעזרת a_1 ו- d .

בטאו את הסכום של ארבעת האיברים בעזרת a_1 ו- d .

8. סכום שני האיברים הראשונים של סדרה חשבונית הוא 9, וסכום האיברים השני והשלישי הוא 7.

(א) האם, לדעתכם, הסדרה עולה או יורדת? נמקו.

(ב) נסו לרשום את איברי הסדרה ובידקו אם הסדרה מקיימת את הנתונים.

(ג) השלימו רישום של הנתונים באופן אלגברי

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \\ \underline{\hspace{2cm}} = \end{cases}$$

- רשמו את שתי המשוואות כך ש- a_1 ו- d יהיו המשתנים היחידים ופתרו.

- רשמו את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה.

- בידקו שאכן האיברים מקיימים את הנתונים.

תרגילים

9. לפניכם סדרות המוגדרות בעזרת תבנית.
- (i) סמנו ב- n סדרות שנראות לכם חשבוניות.
- (ii) חשבו חמישה איברים ראשונים של כל סדרה וקבעו אילו מהסדרות יכולות להיות חשבוניות.

$$a_n = 2n \quad (\text{ד}) \quad a_n = n^2 \quad (\text{א})$$

$$a_n = -n + 1 \quad (\text{ה}) \quad a_n = 5 - 2n \quad (\text{ב})$$

$$a_n = 4n - 1 \quad (\text{ו}) \quad a_n = 2^n \quad (\text{ג})$$

10. בסדרה חשבונית נתון $d = 4$, $a_n = 60$.

(א) מה ערכו של a_{n-1} ? מה ערכו של $a_n - 1$?

(ב) מה ערכו של a_{n-2} ? מה ערכו של $a_n - 2$?

(ג) מה ערכו של a_{n+1} ? מה ערכו של $a_n + 1$?

(ד) מה ערכו של a_{n+2} ? מה ערכו של $a_n + 2$?

11. סכום האיברים השני והחמישי בסדרה חשבונית הוא 80.

סכום האיברים השישי והשביעי בסדרה זו הוא 122.

(א) בטאו את a_2 ואת a_5 בעזרת a_1 ו- d , ורשמו משוואה.

(ב) בטאו את a_6 ואת a_7 בעזרת a_1 ו- d , ורשמו משוואה.

(ג) פתרו את מערכת המשוואות שהתקבלו בסעיפים א' ו- ב' ומצאו את a_1 ואת d .

12. מכונית אחת עוברת 24 מ' בשניה הראשונה לבלימה, ובכל שניה ב- 3 מ' פחות מאשר בקודמת.

מכונית שנייה עוברת 28 מ' בשניה הראשונה לבלימה, ובכל שניה ב- 4 מ' פחות מאשר בקודמת.

לאיזו משתי המכוניות זמן בלימה קטן יותר?

(חשבו כמה שניות עוברות עד שכל אחת מהמכוניות נעצרת.)

17. רשמו בעזרת איברי הסדרה. 

צילאפ: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

(א) $S_4 =$ (ג) $S_1 =$

(ב) $S_9 = S_6 +$ (ד) $S_2 =$

בסדרה חשבונית בעלת n איברים אפשר לחשב את סכום איברי הסדרה בעזרת הנוסחה

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

ובמילים: סכום אברי הסדרה הוא סכום של האיבר הראשון והאחרון כפול מחצית מספר איברי הסדרה.

18. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 15$, $d = -2$. 

(א) מצאו את a_{10} ואת S_{10} .

(ב) מצאו את a_{100} ואת S_{100} .

(ג) מצאו את S_{40} .

19. ניצן מרוויחה בשבוע הראשון לעבודתה 300 ש"ח ובכל שבוע ב- 50 ש"ח יותר 

מאשר בשבוע הקודם. ניצן עבדה 12 שבועות.

(א) כמה הרוויחה בשבוע האחרון לעבודתה?

(ב) כמה הרוויחה ב- 12 השבועות האלה?

(ג) כמה הרוויחה בחודש האחרון? (4 השבועות האחרונים)?

תרגילים

20. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 3, ו- $S_{10} = 120$.

חשבו את a_{10} ואת d .

21. באולם ספורט יש 50 מקומות בשורה הראשונה, ובכל שורה יש 8 מקומות יותר מאשר בשורה הקודמת.

(א) חשבו את מספר המקומות בשורה החמישית ובשורה העשירית.

(ב) באולם 40 שורות. חשבו את a_{40} ואת S_{40} .

(ג) מה מתאר a_{40} ? מה מתאר S_{40} ?

(ד) מה מתאר a_n בסדרה זו? מה מתאר S_n ?

22. נהג של קטר רכבת רואה מרחוק חבילה מונחת על הפסים ומפעיל את הבלמים.

בשניה הראשונה של הפעלת הבלמים עוברת הרכבת 28 מ'.

בכל שניה אחר כך 4 מ' פחות מאשר בשניה הקודמת.

(א) אחרי כמה שניות נעצרה הרכבת?

(ב) מה המרחק שעברה הרכבת בכל השניות האלה (S_n)?

(ג) כשהפעיל נהג הקטר את הבלמים, היתה הרכבת במרחק 120 מ' מהחבילה.

האם הספיקה לעצור לפני החבילה? אם כן, כמה מטרים לפני?

23. רותי ואיילת הדריכו במחנה קיץ למשך 18 יום. כל אחת יכלה לבחור בתנאי תשלום.

איילת בחרה לקבל ביום הראשון 35 ש"ח ובכל יום בסכום קבוע יותר מאשר ביום הקודם לו.

רותי בחרה לקבל בכל יום 120 ש"ח.

(א) כמה הרוויחה רותי?

(ב) מה צריכה להיות התוספת הקבועה, שתקבל איילת, על מנת שתרוויח כמו רותי?

24. מצאו לאילו ערכי x הסדרה היא חשבונית, רשמו את הפרש הסדרה.

(א) x , $3x$, $4x + y$ (ג) x^2 , 5 , $x + 12$

(ב) x , $2x + 10$, $7x$ (ד) x , $x^2 - 3$, $x - 6$

25. יש לרשום שלושה איברים בין המספרים 4, ו-256 כך שחמשת האיברים יהוו סדרה חשבונית. מצאו את האיברים ואת סכום הסדרה.

26. בסדרה חשבונית $a_1 = 68$ ו- $S_{30} = 300$.

מצאו את a_{30} ואת d .

27. השלימו את הטבלה.

a_1	d	n	a_n	S_n	
20	-2	12			(א)
-18	3		0		(ב)
4	2			108	(ג)
1.5		15	8.5		(ד)
2.5			7.5	15	(ה)
	3	10	40		(ו)
	-4	8		48	(ז)
	10		62	222	(ח)
		9	-20	360	(ט)

28. a איבר של סדרה חשבונית d ה"תוספת" הקבועה.

- (א) השלימו שלושה איברים עוקבים $____, a, ____$.
 (ב) מצאו ממוצע של שלושה המספרים.
 (ג) מצאו את סכום שלושת המספרים.
 (ד) מצאו ממוצע של שני האיברים הקיצוניים.

בסדרה חשבונית, כל איבר הוא ממוצע חשבוני של שני האיברים הסמוכים לו.

29. (א) השלימו תשעה איברים של סדרה חשבונית.

- (ב) מה הממוצע של האיבר הראשון והתשיעי?
 שרטטו קשתות בין זוגות האיברים בעלי אותו ממוצע.
 (ג) מהו הממוצע של כל איברי הסדרה?

30. בסדרה חשבונית יש שבעה איברים.

- (א) מה תוכלו לומר על הממוצע של האיבר הראשון והשביעי?
 (ב) מה הקשר בין האיבר האמצעי לסכום הסדרה?

31. רשמו ארבעה איברים של סדרה חשבונית.

- (א) מצאו ממוצע של ארבעת האיברים.
 (ב) מצאו ממוצע של שני האיברים הקיצוניים a_1 ו- a_4 .
 (ג) מצאו זוג נוסף שיש לו אותו ממוצע.

תרגול נוסף בנושאים כלל נסיגה וכלל לפי מקום

1. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = 5 - 7n$ Ⓜ

(א) מצאו את a_{10} , a_{27} .

(ב) האם המספר 2 נמצא בסדרה? אם כן, מצאו את מקומו, אם לא, נמקו.

(ג) האם המספר -100 נמצא בסדרה? אם כן, מצאו את מקומו, אם לא נמקו.

(ד) האם המספר -1000 נמצא בסדרה? אם כן, מצאו את מקומו, אם לא נמקו.

2. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = -3 + 2n^2 - 5n$ Ⓜ

(א) מצאו את a_1 , a_4 , a_{10} בסדרה.

(ב) באיזה מקום בסדרה נמצא המספר 429?

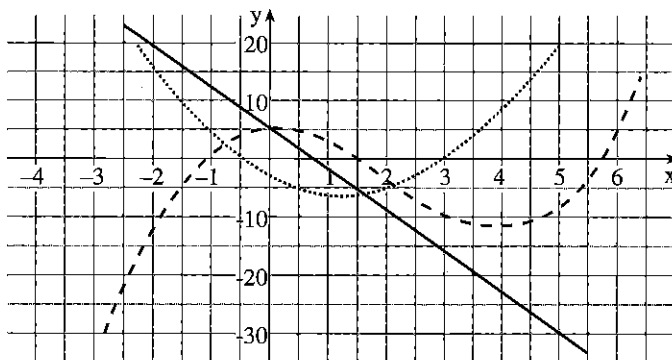
3. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = \frac{n^3}{2} - 3n^2 + 5$ Ⓜ

(א) מצאו את שלוש האיברים הראשונים בסדרה.

(ב) באיזה מקום בסדרה נמצא המספר 5?

4. לפניכם גרפים של שלוש פונקציות (תחום ההגדרה כל המספרים). Ⓜ

$$f(x) = 5 - 7x \quad , \quad g(x) = -3 + 2x^2 - 5x \quad , \quad h(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 5$$



(א) התאימו גרף לחוק. נמקו.

המשך ←

(ב) אם נקח כתחום הגדרה את המספרים הטבעיים הרי שכל פונקציה

תתאים לאחת משלוש הסדרות שהופיעו בתרגילים 1, 2, 3.

(i) סמנו בכל גרף נקודה המתאימה לאיבר החמישי בסידרה.

(ii) האם קיימים בסדרות האלה, איברים שערכם אפס?

אם כן, מה מקומו הסידורי של כל איבר כזה? היעזרו בגרף ובידקו על-ידי הצבה.

(iii) האם יש איברים משותפים לשתיים מהסדרות האלה? אם כן, רשמו

באיזה סדרות ומה המקום הסידורי של האיבר המשותף. (הציבו ובדקו).

5. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = \frac{1}{2}n - 11$

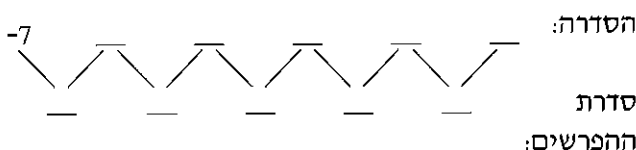
(א) האם יש איבר בסדרה ששווה לאפס? אם כן, מצאו את מיקומו, אם לא נמקו.

(ב) מצאו, החל מאיזה מקום איברי הסדרה הם חיוביים.

6. נתונה סדרה לפי כלל הנסיגה:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = -7 \end{cases}$$

(א) חשבו את ששת האיברים הראשונים בסדרה.

(ב) רשמו חמישה איברים ראשונים בסדרת ההפרשים.



מצאו את החוק לפי מקום של סדרת ההפרשים.

הסבירו את הקשר בין החוק שמצאתם לבין כלל הנסיגה הנתון.

(ג) באיזה מקום בסדרה נמצאים שני איברים עוקבים שהפרשם 106?

האם הפרש של שני איברים עוקבים בסדרה זו יכול להיות 125?

הסבירו.

7. נתונה סדרה לפי כלל הנסיגה: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n \end{cases}$

- (א) מצאו חמישה איברים ראשונים בסדרה.
 (ב) מצאו, פי כמה גדול האיבר החמישי מהאיבר הרביעי.
 (ג) מצאו, פי כמה גדול האיבר התשיעי מהאיבר השמיני.
 (ד) מצאו, באיזה מקום נמצא האיבר שגדול מקודמו פי 22.

8. רשמו בכתב מתמטי ומצאו את ארבעת האיברים הראשונים בכל סדרה.
 (א) האיבר הראשון בסדרה הוא 3 והאיבר השני -2, וכל איבר הוא מכפלת שני האיברים הקודמים לו.
 (ב) האיבר הראשון בסדרה הוא -2, וכל איבר הוא מכפלת האיבר הקודם במקומו הסידורי של האיבר הקודם.
 (ג) האיבר הראשון בסדרה הוא 10, וכל איבר הוא מכפלת מקומו הסידורי של האיבר באיבר הקודם לו.

9. לכל סדרה מטור א' מתאימה סדרה זהה בטור ב'.
 התאימו בין הסדרות.

טור ב'

טור א'

(א) $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$ (i) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$

(ב) $a_n = n^2 - n + 2$ (ii) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n \end{cases}$

(ג) $a_n = 4n - 2$ (iii) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n \end{cases}$

(ד) $a_n = n(1 + n)$ (iv) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2(n+1) \end{cases}$

10. נתונה הסדרה: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$

(א) מצאו את a_2, a_3 בסדרה.

(ב) מצאו מספר x כך שהסדרה $a_1 + x, a_2, a_3 + x$

תהיה סדרה חשבונית.

11. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = n^2 - 2n$

(א) מצאו את האיברים a_6, a_7, a_8 בסדרה.

(ב) מצאו מספר x עבורו הסדרה $a_6 + x, a_7, a_8$ תהיה סדרה חשבונית.

12. רשמו נכון או לא נכון. במקרה שהביטוי לא נכון, תקנו לביטוי נכון.

(א) $S_3 = a_1 + S_2$

(ב) $S_3 = a_4 + S_7$

(ג) $S_{10} = S_9 + a_{10}$

(ד) $S_3 = S_2 + S_1$

(ה) $a_8 = S_8 - S_7$

(ו) $a_3 = S_4 - S_3$

13. נתונה נוסחת הסכום של סדרה: $S_n = n^2 + 2n - 4$

(א) מצאו את a_1 .

(ב) מצאו את S_5, S_4 ואת a_5 .

תרגילים

14. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = 2n + 1$

(א) באיזה מקום בסדרה נמצא המספר 323?

(ב) האם המספר 588 נמצא בסדרה? אם כן, מצאו את מקומו, אם לא נמקו.

15. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 8n$

(א) חשבו את a_{10}, a_{12} .

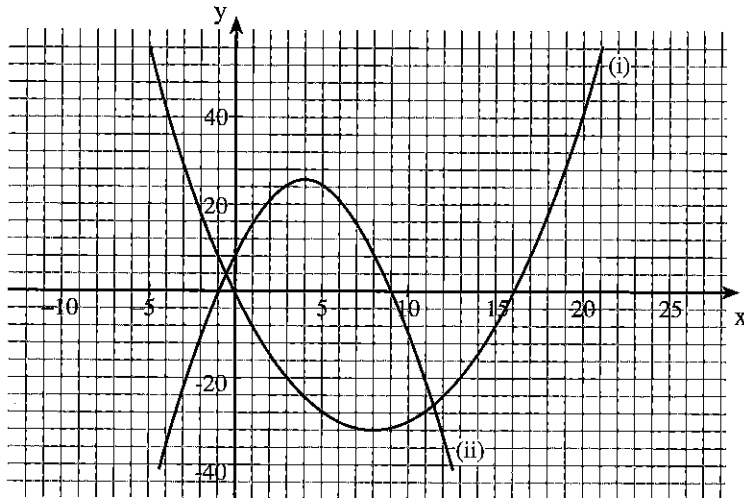
(ב) האם המספר 0 נמצא בסדרה? אם כן, מצאו את מקומו אם לא, נמקו.

(ג) באיזה מקום בסדרה נמצא המספר 40?

16. לפניכם גרפים של שתי פונקציות (תחום ההגדרה כל המספרים).

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x$$

$$g(x) = -x^2 + 8x + 9$$



(א) התאימו גרף לחוק הפונקציה, ונמקו.

(ב) אם נקח כתחום הגדרה את המספרים הטבעיים הרי שכל פונקציה תתאים לאחת משתי סדרות.

רשמו אותן: $f: a_n =$

$g: a_n =$

(ג) סמנו בכל גרף נקודה המתאימה ל- a_6 .

(ד) האם קיימים איברים שערכם אפס בסדרות האלה? אם כן, מה מקומם הסידורי? בידקו.

(ה) האם יש איבר משותף לשתי הסדרות האלה? אם כן, מה מקומו הסידורי? הציבו ובידקו.

$$17. \text{ נתון החוק לפי מקום של סדרה: } a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

(א) מצאו את ששת האיברים הראשונים בסדרה.

(ב) באיזה מקום נמצאו כל אחד מהאיברים הבאים: $\frac{1}{462}$, $\frac{1}{110}$?

$$18. \text{ נתונה סדרה לפי כלל הנסיגה: } \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n \end{cases}$$

(א) מצאו את חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(ב) מצאו מספר x עבורו סדרת המספרים a_5 , a_4 , $a_3 + x$ תהיה סדרה חשבונית. נמקו.

$$19. \text{ נתונה סדרה לפי כלל הנסיגה: } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \end{cases}$$

(א) מצאו את חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(ב) מצאו, פי כמה קטן האיבר החמישי מהאיבר הרביעי.

(ג) מצאו, באיזה מקום נמצאו איבר שקטן מקודמו פי 7.

$$20. \text{ נתונה נוסחת הסכום של סדרה: } S_n = 2(n-8)^2$$

(א) מצאו את a_1 .

(ב) מצאו את S_2 ואת a_2 של הסדרה.

(ג) מצאו את a_3 ואת a_4 של הסדרה.

(ד) כמה איברים בסדרה יש לחבר כדי ש- $S_n = 18$? הסבירו את תשובתכם.

▲ עוד סדרה (רשות – לא שייך לתכנית הלימודים)

1. לפני 800 שנה הציג פיבונצ'י את הבעיה הבאה:
- החל מחודשיים לאחר הלידה מתחיל כל זוג ארנבות ללדת. נניח שבכל חודש הם מולידים זוג חדש.
- אלה שאוזניהם מסומנות הם בעלי כושר לידה לחודש הבא.

מס' זוגות

$a_1 = 1$		זה עתה נולדו:
$a_2 = 1$		לאחר חודש:
$a_3 = 2$		לאחר חודשיים:
$a_4 = \underline{\hspace{1cm}}$		לאחר 3 חודשים:
$a_5 = \underline{\hspace{1cm}}$		לאחר 4 חודשים:
$a_6 = \underline{\hspace{1cm}}$		לאחר 5 ח':

- א) השלימו את השורה "לאחר 6 חודשים".
- ב) המשיכו את הסדרה של מספר הזוגות: רשמו את ערכיהם של a_9 , a_8 , a_7 בטור משמאל.

סדרה מסוג זה, שכבר פגשתם בעבר, נקראת **סדרת פיבונצ'י** מסתבר שיש תופעות רבות בטבע שמתאימות לסדרה כזו, למשל סידור הגרעינים על חמניה, או סידור ה"עלים" על איצטרובל.

- ג) המשיכו את סדרת פיבונצ'י עד האיבר ה-12.
- 1, 1, 2, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____

המשך ←

ד) השלימו ורשמו במילים את החוק שבסדרת פיבונצ'י.

$$a_5 = a_3 + a_4$$

$$a_8 =$$

$$a_{10} =$$

ה) רשמו כלל נסיגה מתאים: $a_{n+1} =$

2. נסו להוסיף שני איברים לכל סדרה, וקבעו אילו מהסדרות מקיימות את כלל הנסיגה של סדרת פיבונצ'י.

א) $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

ב) $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \dots$

ג) $2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, \dots$

ד) $1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$

3. סכומים של סדרות פיבונצ'י
בטאו את S_5, S_4 בעזרת a_1 ו- a_2 לפי הדוגמה של S_3 .

ואם: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + \overbrace{a_1 + a_2} = 2a_1 + 2a_2$

4. המשיכו עד שיתקבל ביטוי ל- S_{14} בעזרת $a_3, a_5, a_7, \dots$ (איברים במקומות

האי-זוגיים).
$$\overbrace{a_3} \quad \overbrace{a_5} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 +$$

5. השלימו כך שתתקבל סדרה על-פי כלל פיבונצ'י.

א) $2, _, 5, _, _, _$

ג) $3, _, 7, _, _$

ב) $_, 3, _, 7, _, _$

ד) $_, 2, 9, _, _$

מחזקות לסדרה הנדסית ולתופעות של גידול ודעיכה

חזקות עם מעריך טבעי

חזקה, עם מעריך טבעי, (1, 2, 3, ...) היא קיצור כתיבה לכפל של גורמים שווים

1. השלימו: א) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{\square}$

ב) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\square}$

ג) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^{\square}$

ד) $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{\square}$

2. היעזרו בפעולת הכפל $\times$ במחשבון, וחשבו.

א) $5^4 =$ ד) $(-2)^5 =$

ב) $0.1^2 =$ ה) $0.5^2 =$

ג) $1.5^8 =$ ו) $(-4)^6 =$

3. בידקו באיזו חזקה מדובר (בצעו במחשבון וספרו את הגורמים).

א) $4^{\square} = 16384$ ד) $10^{\square} = 1000000$

ב) $5^{\square} = 625$ ה) $2.5^{\square} = 39.0625$

ג) $7^{\square} = 16807$ ו) $1.1^{\square} = 1.4641$

4. א) בין אילו שתי חזקות של 10 נמצא המספר 725? $10^{\square} < 725 < 10^{\square}$

ב) בין אילו שתי חזקות של 5 נמצא המספר 250? $5^{\square} < 250 < 5^{\square}$

ג) בין אילו שתי חזקות של 3 נמצא המספר 250? $3^{\square} < 250 < 3^{\square}$

ד) בין אילו שתי חזקות של 10 נמצא המספר 250? $10^{\square} < 250 < 10^{\square}$

בביטוי 3^5 המספר 3 הוא בסיס החזקה ו-5 מעריך החזקה

באופן כללי: בתבנית a^n , a הוא בסיס החזקה ו- n מעריך החזקה

התבנית a^n תקרא חזקה

דוגמה: בסיס החזקה 7 ומעריך החזקה 3. הגרלין פלא: 7^3 .

5. (א) בסיס החזקה 5 ומעריך החזקה 3, מה התרגיל?
 (ב) בסיס החזקה 3 ומעריך החזקה 5, מה התרגיל?
 (ג) בסיס החזקה 10 ומעריך החזקה 2, מה התרגיל?
 (ד) בסיס החזקה 8 ומעריך החזקה 1, מה התוצאה?
 (ה) רשמו תרגיל, שאם נחליף בו את הבסיס במעריך, תתקבל אותה תוצאה?
 התוכלו לרשום תרגיל נוסף כזה?

6. במחשבון יש כפתור המאפשר חישוב חזקה באופן ישיר x^y .

(א) התרגיל: 7^3 , חשבו במחשבון:

7	x^y	3	=

בדקו כיצד מעלים בחזקה במחשבון שלכם והמשיכו לחשב.

(ב) חשבו: $11^3 = 9^{10} = (-5)^6 = (-5)^7 = 1.7^8$

7. רשמו בחזקה.

דוגמה: $2^3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ נשימו לב: $2^2 = 2^1$

- (א) $2^5 \cdot 2^2 =$ (ה) $a^{12} \cdot a^{30} =$
 (ב) $3^3 \cdot 3 =$ (ו) $a^n \cdot a^{30} =$ n טבעי
 (ג) $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3 =$ (ז) $a^3 \cdot a^k =$ k טבעי
 (ד) $a^4 \cdot a =$

(ח) נסחו במילים כלל המתאים לכפל של חזקות עם אותו בסיס.

השלמו: $a^n \cdot a^k = a^{\boxed{}}$ (ט) $\triangle$ (n ו- k טבעיים)

$2 = 2^1$ $3 = 3^1$ $a = a^1$ (י)

השלמו: $a^n \cdot a = a^{\boxed{}}$

8. רשמו בחזקה.

דוגמה: $\frac{7^5}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = 7^3$

(א) $\frac{8^3}{8} =$ (ד) $\frac{a^7}{a^2} =$, $a \neq 0$

(ב) $\frac{10^6}{10^3} =$ (ה) $\frac{b^8}{b} =$, $b \neq 0$

(ג) $\frac{3^7}{3^6} =$ (ו) $\frac{a^{30}}{a^{10}} =$, $a \neq 0$

(ז) נסחו במילים כלל לחילוק חזקות עם אותו בסיס.

(ח) השלימו $\frac{a^m}{a^k} = a^{\boxed{}}$ ($m > k$, $a \neq 0$, m ו- k טבעיים)

9. השלימו מספרים במקומות הריקים.

(א) $3^2 \cdot 3^7 \cdot 3 = 3^{\boxed{}}$ (ד) $\frac{5^3}{5^2} = 5^{\boxed{}}$

(ב) $a \cdot a^8 = a^{\boxed{}}$ (ה) $\frac{a^4}{a} = a^{\boxed{}}$, $a \neq 0$

(ג) $6^5 \cdot 6^{\boxed{}} = 6^9$ (ו) $\frac{8^6}{8^{\boxed{}}} = 8^4$

תרגילים

10. פרקו לגורמים ראשוניים ורשמו כמכפלה של חזקות.

דוגמה: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

(א) $200 =$ (ה) $675 =$

(ב) $375 =$ (ו) $2000 =$

(ג) $625 =$ (ז) $10125 =$

(ד) $648 =$ (ח) $1800 =$

11. רשמו את מעריך החזקה.

$$10^{\square} = 10,000 \quad (א) \quad (-1.5)^{\square} = 11.390625 \quad (ב) \quad 7^{\square} = 2401 \quad (ג)$$

$$10^{\square} < 1250 < 10^{\square} \quad ? \quad 1250 \text{ נמצא המספר של } 10 \quad (א)$$

$$10^{\square} < 15,200 < 10^{\square} \quad ? \quad 15,200 \text{ נמצא המספר של } 10 \quad (ב)$$

$$10^{\square} < 750 < 10^{\square} \quad ? \quad 750 \text{ נמצא המספר של } 10 \quad (ג)$$

$$150,000 \text{ נמצא המספר של } 10 \quad (ד)$$

(ה) מה הקשר בין מספר הספרות במספר, לחזקות של 10 ביניהן נמצא המספר?

13. בטאו כחזקה.

$$8^n \cdot 8^3 \cdot 8^4 = \quad (א) \quad a^7 \cdot a =$$

$$12^n \cdot 12^k = \quad (ב) \quad 2^{12} \cdot 2^2 =$$

$$6^5 \cdot 6^{\square} = 6^{12} \quad \text{השלימו:} \quad (ג) \quad 3^5 \cdot 3^7 \cdot 3^2 =$$

$$a^8 \cdot a^{\square} \cdot a^2 = a^{15} \quad \text{השלימו:} \quad (ד) \quad 7^{12} \cdot 7^5 \cdot 7^3 =$$

14. בטאו כחזקה.

$$\frac{7^5 \cdot 7}{7^2} = \quad (א) \quad \frac{5^{18}}{5^5} =$$

$$\frac{x^7 \cdot x^3}{x} = \quad (ב) \quad \frac{2^{13}}{2^2} =$$

$$\frac{7^5 \cdot 7}{7^2} = \quad (ג) \quad \frac{4^9}{4^3} =$$

$$\frac{x^2 \cdot x^3}{x^4} = \quad (ד) \quad \frac{a^{12}}{a^4} =$$

15. א) רשמו כחזקה של 3 (השלימו את המעריך).

$$729 = 3^{\square}$$

$$9 = 3^{\square}$$

$$19683 = 3^{\square}$$

$$81 = 3^{\square}$$

ב) רשמו כחזקה של 2 (השלימו את המעריך).

$$128 = 2^{\square}$$

$$64 = 2^{\square}$$

$$16384 = 2^{\square}$$

$$4 = 2^{\square}$$

$$2 = 2^{\square}$$

$$4096 = 2^{\square}$$

16. השלימו:

$$675 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$$

$$5000 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$$

(ד)

$$72 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$$

(א)

$$2025 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$$

(ה)

$$432 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$$

(ב)

$$2700 = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square}$$

(ו)

$$225 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$$

(ג)

לקו שבר יש גם תפקיד של סוגריים לכן, אפשר לחשב מונה ומכנה לחוד ואז לחלק, או להשתמש ברישום סוגריים במחשבון.



$$\frac{3^5 \cdot 2^3}{4^2 \cdot 5} = 3^5 \cdot 2^3 : (4^2 \cdot 5) \quad \text{פז'אמפ:}$$

17. חשבו (היעזרו במחשבון).

$$\frac{709}{0.3^2 + 7} = \quad (ה)$$

$$\frac{5^4 \cdot 4^3}{8^2} = \quad (ג)$$

$$\frac{5 \cdot 2^3 \cdot 4^3}{0.4 \cdot 5^2} = \quad (א)$$

$$\frac{12^3}{4 \cdot 5^2 + 2^3} = \quad (ו)$$

$$\frac{19}{0.3^2 \cdot 7} = \quad (ד)$$

$$\frac{5^4 + 4^3}{18^2} = \quad (ב)$$

עוד על חוקי חזקות

בסעיף הקודם היכרנו שני חוקי חזקות:

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k} \quad m, k \text{ טבעיים}$$

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k} \quad \text{עבור } m > k$$

כלל אכילו חוקים נוספים.

1. רשמו כמכפלה של חזקות, ואחר-כך כחזקה אחת.

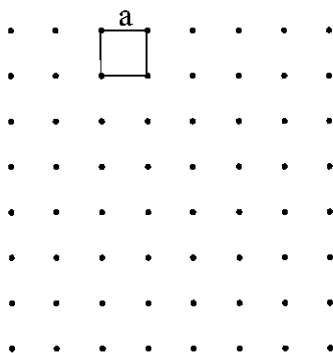
$$\begin{aligned} (a^m)^4 &= a^m \cdot \dots = a^{\boxed{}} & (2^3)^5 &= 2^3 \cdot 2^3 \cdot \dots = 2^{\boxed{}} \\ (b^n)^5 &= \dots = b^{\boxed{}} & (3^4)^3 &= \dots = 3^{\boxed{}} \\ (10^2)^7 &= 10 \cdot \dots = 10^{\boxed{}} \end{aligned}$$

הכלילו והשלימו: $(a^m)^k = a^{\boxed{}}$ m, k טבעיים

2. רשמו כחזקה.

$$\begin{aligned} (8^3)^5 &= \text{א} & (4^5)^2 &= \text{ב} & (2^3)^5 &= \text{א} \\ [(a^3)^4]^2 &= \text{ו} & (a^4)^m &= \text{ה} & (a^m)^4 &= \text{ד} \end{aligned}$$

3. א) משתנה המבטא אורך צלע של ריבוע.



רשמו ביטוי לשטח הריבוע.

רשמו ביטוי להיקף הריבוע.

ב) הגדילו את צלע הריבוע פי 3.

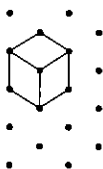
שרטטו ורשמו תבנית לשטח הריבוע

המוגדל.

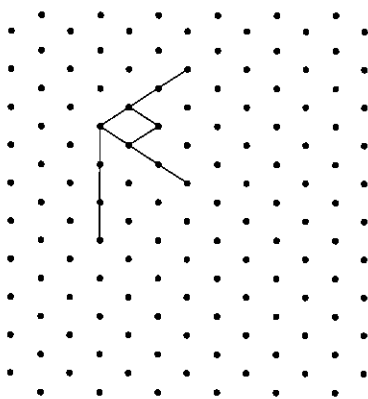
פי כמה גדל השטח?

רשמו ביטוי להיקף הריבוע המוגדל.

פי כמה גדל ההיקף?



4. $\textcircled{F}$ b משתנה המבטא אורך מקצוע של קובייה.
 (א) רשמו תבנית לנפח.
 (ב) רשמו תבנית לשטח הפנים של הקובייה.



- הגדילו את אורך המקצוע פי 3.
 (ג) שרטטו. (תוכלו לסמן את המקצועות "הנראים" של הקוביות הקטנות).
 (ד) רשמו תבנית לנפח הקובייה הגדולה.
 פי כמה גדל הנפח?
 (ה) רשמו תבנית לשטח פני הקובייה הגדולה.
 פי כמה גדל שטח הפנים?

חזקה של מנה

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^{\square}}{b^{\square}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$$

חזקה של מכפלה

$$(a \cdot b)^5 = a^{\square} \cdot b^{\square}$$

$$(a \cdot b)^n =$$

השלימו:

באופן כללי:

וחזקה של סכום (או הפרש):

$$(a + b)^2 =$$

השלימו:

חזקה גבוהה יותר של סכום $(a + b)^n$ מחשבים באמצעות הבינום של ניוטון, נושא שאינו במסגרת הלימוד של יחידה זו.



פשוט.

$$\frac{2a^2}{a^4} = \frac{2}{a^2}$$

הנה

$$\left(\frac{4x^3y^2}{x^2y^3}\right)^4 \quad (7)$$

$$(a^3b^3)^2 \quad (N$$

$$(a^2 + 3b)^2 \quad (7)$$

$$(3a^2b)^3 \quad (1)$$

$$(2x^2 + 3y^3)^2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{12ab^2}{3a^2b}\right)^3 \quad (2)$$

תרגילים

6. פשטו ורשמו כתזקה.

$$(7^2)^5 \cdot 7^4 \cdot 7 =$$

$$\frac{(15^2)^3}{15^4} =$$

$$(8^2)^4 \cdot 8^2 = \quad (7)$$

$$\frac{(8^3)^2}{(8^2)^3} = \quad (1)$$

7. רשמו $<$, $>$ או $=$ כך שיתקבל פסוק אמת.

$$\frac{5^{14} \cdot 5^2}{5^8} \square 5^8 \quad (7)$$

$$\frac{5^2 \cdot 5^{16}}{5^9} \square 5^2 \quad (N)$$

$$(10^4)^2 \cdot (10^6)^2 \boxed{} 10^{18} \quad (7)$$

$$\frac{7^3 \cdot (7^2)^6}{7^5} \square 7^3 \quad (\text{b})$$

$$\frac{8^2 \cdot 8^3 \cdot 8^4}{(8^3)^3} \square 1 \quad (1)$$

$$\frac{6^{13} \cdot 6^8}{(6^5)^4} \square 6 \quad (2)$$

8. א) כתבו את המספר 243 כחזקה של 3.

(ב) רשמו את המספר 64 כחזקות עם בסיס שונה, בדרכים שונות.

9. פשטו.

$$3a^4 \cdot 2(a^2)^3 = 3 \cdot 2 \cdot a^4 \cdot a^6 = 6 \cdot a^{10} \quad \text{באמצעות:}$$

$$\frac{4(a^2)^4 \cdot 6b^5}{8(a^6)^2} = \frac{24a^8b^5}{8a^{12}} = \frac{3b^5}{a^4}$$

$$\frac{(20^2 \cdot a^3)^2}{(a^5)^2} = \quad (\text{א}) \quad \frac{(3a^2)^2 \cdot b}{(3a)^4 \cdot b^3} = \quad (\text{ב})$$

$$\frac{(2 \cdot 3)^5 \cdot 2^4}{(6^2)^3} = \quad (\text{ג}) \quad \left(\frac{2b^3}{5b}\right)^4 = \quad (\text{ד})$$

$$(2x^3y - b)^2 = \quad (\text{ה}) \quad (a^3 + b^3)^2 = \quad (\text{ו})$$

10.  השלימו את ריבועי הקסם כך שתתקבל אותה מכפלה בכל שורה בכל טור ובשני האלכסונים.

		$\left(\frac{a}{2}\right)^2$
2a	$(2a)^2$	$(2a)^3$

(א)

$\frac{a^5}{b^7}$		$\frac{a}{b}$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^2$	
		$\frac{b^3}{a}$

(ב)

11. פשטו.

$$\frac{(a^2)^3 \cdot a^4}{a \cdot (a^3)^3} = \quad (\text{א}) \quad \frac{25^{15} \cdot 125^{10}}{5^{58}} = \quad (\text{ב})$$

$$\frac{(ab)^4 \cdot (b^3)^4}{(a^4)^2 \cdot (b^2)^{10}} = \quad (\text{ג}) \quad \frac{8^{20} \cdot 32^8}{16^{18} \cdot 4^{12}} = \quad (\text{ד})$$

$$\frac{(3a^2)^3 \cdot a^2}{(27a)^2} = \quad (\text{ה}) \quad \frac{9^{40} \cdot 8^{30}}{3^{78} \cdot 4^{45}} = \quad (\text{ו})$$

$$\frac{(a^3 \cdot 5)^4}{(a^2)^3 \cdot 25^2} = \quad (\text{ז}) \quad \frac{3^{28} \cdot 2^{29}}{6^{27}} = \quad (\text{ח})$$

מספרים גדולים במחשבון וכתיב מדעי של מספרים גדולים

1. (א) חשבו.

דוגמה: $10^2 = 100$

$10^8 =$ $10^7 =$ $10^4 =$

(ב) בצעו במחשבון ורשמו מה מופיע על הצג.

$10^{18} =$ $10^{13} =$ $10^9 =$ $10^4 =$

(ג) שער, ללא מחשבון, מה יופיע על הצג.

$10^5 =$

$10^{13} =$

בידקו בעזרת המחשבון.

(ד) בצעו במחשבון תרגיל כך שתקבלו על הצג את הרשום במסגרת ורשמו את התרגיל. (ייתכן והכתיב שונה במעט במחשבון שבידכם.)

1.	22
----	----

1.	35
----	----

(ה) האם תוכלו לקבל על הצג את 10^{123} ?

(ו) מהי חזקת העשר הגבוהה ביותר שניתן לקבל על צג המחשבון? רשמו תרגיל כך שתקבלו מספר זה, ובידקו בעזרת המחשבון.

2. (א) חשבו במחשבון.

על הצג

$10^5 \cdot 10^7 =$ $= 10^{\text{$

$10^{13} \cdot 10^8 =$ $= 10^{\text{$

$10^{23} \cdot 10^{14} =$ $= 10^{\text{$

(ב) רשמו כחזקה ושערו איזו תוצאה תתקבל על הצג.

$10^{20} \cdot 10^9 =$

$10^{13} \cdot 10^{25} =$

בידקו.

3. בידקו כמה ספרות במספר.

(א) 10^7 (ג) $1. \text{ }^{14}$

(ב) 10^{12} (ד) $1. \text{ }^{43}$

הגרדיוס הפאסי גראל כיצד אפשר בעזרת "הפסולת הקטנה" לכתוב גם מספרים גדולים
שאינם חזקה של 10.

(ה) בידקו, החל מאיזו חזקה של 10 המחשבון שלכם עובר לכתיב המיוחד.

$$\dots \quad 10^9 = \quad 10^8 = \quad 10^7 =$$

4. השלימו.

התרגיל	ללא מחשבון	על הצג
$37 \cdot 10^9$	37,000,000,000	3.7 ^{10} בלעדי:
$7 \cdot 10^{10}$		(א)
$5 \cdot 10^8$		(ב)
$32 \cdot 10^{10}$		(ג)
$3.5 \cdot 10^8$		(ד)
$0.67 \cdot 10^{11}$		(ה)

5. רשמו תרגיל כך שתקבל על הצג התוצאה הרשומה במסגרת.

(א) התוצאה 2.3 ^{12} התרגיל: בידקו.

(ב) התוצאה $1. \text{ }^{10}$ התרגיל: בידקו.

(ג) התוצאה $1. \text{ }^{10}$ התרגיל: בידקו.

(ד) רשמו תרגיל נוסף שתוצאתו כמו זו שבסעיף ג.

6. השלימו.

התרגיל שעל הצג	על הצג	התרגיל שעל הצג
$7 \cdot 10^9$	$70 \cdot 10^8$	7.09
	$700 \cdot 10^8$	
	$7000 \cdot 10^8$	
	$70,000 \cdot 10^8$	

(א)

התוצאה על הצג היא תמיד מספר בין 1 ל-10, מוכפל בחזקה של 10.

נהוג לכתוב מספרים גדולים כמכפלה של מספר בין 1 ל-10 בחזקה של 10. כתיב זה נקרא **כתיב מדעי של מספרים**.
זו הסיבה שתוצאות חישוב במספרים גדולים נרשמות על צג המחשבון בדרך שראיתם.
בהמשך תראו שמספרים חיוביים קטנים נרשמים באותו אופן.



התרגיל שעל הצג	על הצג
	$3.5 \cdot 10^8$
	$35 \cdot 10^8$
	$350 \cdot 10^8$

(ב)

"הספרות הקטנות" מציינות כמה צעדים ימינה צריכה הנקודה העשרונית ל"זוז".



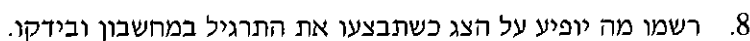
7. (א) חשבו במחשבון ורשמו את התוצאה במסגרת.

$270 \cdot 10^8$	$27 \cdot 10^{14}$	$2.7 \cdot 10^{25}$	$0.27 \cdot 10^{15}$

(ב) כתיב של איזה מספר לא "השתנה"?

(ג) כתיב של איזה מספרים לא "השתנה" כשנבצע את הפעולה במחשבון?

$3.6 \cdot 10^3$, $360 \cdot 10^{10}$, $0.36 \cdot 10^8$, $36 \cdot 10^9$



$$1952 \cdot 10^{13} \quad \square \quad \text{a)} \qquad 8000 \cdot 10^{10} \quad \square \quad \text{b)}$$

$$0.05 \cdot 10^4 = \quad (\alpha) \quad 12.56 \cdot 10^5 = \quad (\beta) \quad 2.7 \cdot 10^3 = \quad (\gamma)$$

11. מצאו את המספר השונה בכל שורה.

$2 \cdot 10^{11}$	$0.2 \cdot 10^{11}$	$200 \cdot 10^8$	$0.02 \cdot 10^{12}$	
				(א)

5,600,000	$560 \cdot 10^4$	$0.056 \cdot 10^9$	$5.6 \cdot 10^6$	
				(ב)

12. רשמו במסגרת = או $\neq$ כך שיתקבל פסוק נכון.

(א) 10^{11} $10 \cdot 10^{11}$ (ג) 2700 $2.7 \cdot 10^3$

(ב) $5.6 \cdot 10^{10}$ $560 \cdot 10^8$ (ד) $27 \cdot 10^4$ $2.7 \cdot 10^3$

13. השלימו.

על הצג	התרגיל	ללא מחשבון
(א)	$9 \cdot 10^{11}$	78,000,000
(ב)	$4.7 \cdot 10^7$	
(ג)		
(ד) 2.4^{13}		
(ה) 6.5^{09}		

14. חשבו במחשבון, רשמו מה מופיע על הצג ואת המספר בכתב חזקות.

(א) $5^{15} = \boxed{3.05}^{10} = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}}$

(ב) $3^{20} = \boxed{} =$

(ג) $7.2^{12} = \boxed{} =$

15. (i) רשמו תרגיל כך שתקבל על הצג התוצאה הרשומה במסגרת.

(א) התוצאה: $\boxed{1.5}^{12}$ (ג) התוצאה: $\boxed{7.645}^{11}$

(ב) התוצאה: $\boxed{2.53}^{10}$ (ד) התוצאה: $\boxed{8.1111}^{10}$

(ii) רשמו תרגיל נוסף שתוצאתו כמו בסעיף ד'.

16. (א) סמנו את המספרים השווים ל- $\boxed{5}^{12}$

5^{12} 5.12 $50 \cdot 10^{11}$ 12^5 $5,000,000,000,000$ $5 \cdot 10^{12}$

(ב) סמנו את המספרים השווים ל- $\boxed{3.5}^{03}$

$3.5 \cdot 10^3$ $35 \cdot 10^3$ 3.5^3 35000 3500

17. חשבו ורשמו את התוצאה בכתוב מדעי (כמכפלה של מספר בין 1 ל- 10 בחזקה של 10).

דאעמא: $(2.5 \cdot 10^3) \cdot (6 \cdot 10^6) = 2.5 \cdot 6 \cdot 10^9 = 1.5 \cdot 10^{10}$

(א) $3.2 \cdot 10^7 \cdot 8 \cdot 10^7 =$ (ה) $\frac{18 \cdot 10^7 \cdot 16 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^5} =$

(ב) $1.25 \cdot 10^8 \cdot 16 \cdot 10^3 =$ (ו) $\frac{4.2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^{12}}{7 \cdot 10^{15} \cdot 3.5 \cdot 10^2} =$

(ג) $\frac{2.5 \cdot 10^{12}}{0.5 \cdot 10^8} =$ (ז) $2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 5 =$

(ד) $\frac{1.6 \cdot 10^7 \cdot 10^5}{0.2 \cdot 10^9} =$ (ח) $\frac{10 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{12}}{5 \cdot 10^7 \cdot 50 \cdot 10^{11}} =$

18. רשמו בכתוב מדעי.

(א) מהירות האור 300,000,000 מטר בשניה.

(ב) המהירות בה סובבת הארץ את השמש 101,000 קמ"ש.

(ג) היקף כדור הארץ 41,000,000 מטר.

(ד) שטח האוקינוס השקט 180,000,000,000 דונם.

(ה) שטחה של סין 9,900,000 קמ"ר ומספר תושביה 1,000,000,000.

סדרה הנדסית

1. חוסיפו שלושה איברים לכל סדרה ורשמו כלל נסיגה.

(א) $0.01, 0.1, 1, 10, \dots$ (ג) $2, 6, 18, \dots$

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = a_n \cdot \boxed{} \end{cases}$$

(ב) $1, -2, 4, -8, \dots$ (ד) $64, 32, 16, 8, \dots$

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

בכל הסדרות בתרגיל 1, כלל הנסיגה הוא מהצורה $a_{n+1} = a_n \cdot q$. כלומר, כל איבר בסדרה (החל ב- a_2) מתקבל מקודמו על-ידי כפל באותו מספר. נסמן את הכופל הקבוע ב- q ואז: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.
סדרה כזו נקראת **סדרה הנדסית**.

2. קבעו אם הסדרה הנדסית.

אם כן, רשמו את ערכו של q (הכופל הקבוע).

(א) $2, 8, 32, 128, 512, \dots$

(ב) $1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, \dots$

(ג) $-1, 2, -4, 8, -16, 32, \dots$

(ד) $10, 100, 1000, 10,000, 100,000, \dots$

(ה) $100, 200, 300, 400, 500, 600, \dots$

(ו) $5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, \dots$

(ז) $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

פרק 13 סדרות חזקות, גדול העיפה



3. השלימו, כך שתתקבל סדרה הנדסית.

(א) $3, _, 12, _, 48, _$

(ב) $2, _, 200, _, _, _$

(ג) $_, _, 25, 250, _, _$

(ד) $3, _, 48, _, _, _$



4. (א) השלימו כך שתתקבל סדרה הנדסית.

$2, _, 8$

(ב) השלימו כך שתתקבל סדרה חשבונית.

$2, _, 8$

(ג) השלימו כך שתתקבל סדרה הנדסית.

$1, _, _, 64$

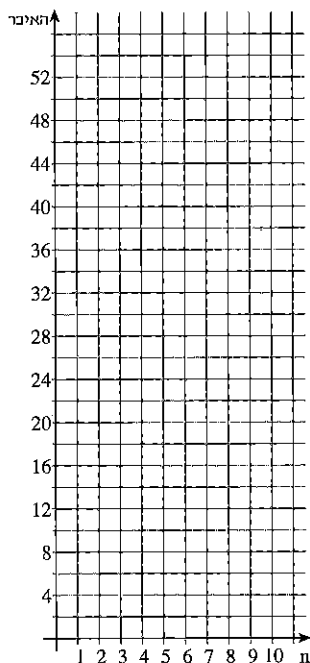
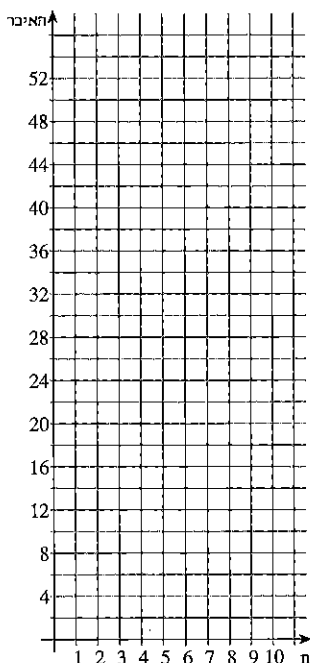
(ד) השלימו כך שתתקבל סדרה חשבונית.

$1, _, _, 64$



5. השלימו לשישה איברים בכל סדרה, קבעו אם הסדרה הנדסית. סמנו במערכת הצירים.

(א) $1, 2, 4, 8, _, _$ (ב) $48, 24, 12, 6, _, _$



6. (F) א) בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 3$, $q = 2$ (הגורם הכופל).

מצאו את: a_2 , a_3 , a_4 , a_5 .

ב) בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 3$

בטאו את האיברים בעזרת q .

דלמף: $a_2 = 3q$, $a_3 = 3 \cdot q^2$

המשיכו: $a_4 =$ $a_5 =$

ג) נתון: $a_2 = a_1 \cdot q$ $a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

השלימו: $a_4 =$ $a_5 =$ $a_6 =$ $a_{30} =$

ד) – כמה פעמים מופיע הגורם q בתבנית של a_8 ?

– כמה פעמים מופיע הגורם q בתבנית של a_{50} ?

באופן כללי: בסדרה הנדסית $a_n = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$ $n-1$ פעמים

7. (F) חשבו את a_6 של הסדרה ההנדסית, וחשבו גם את S_6 .

א) $a_1 = 1$, $q = 3$ ג) $a_1 = 0.5$, $q = 4$

ב) $a_1 = 2$, $q = -3$ ד) $a_2 = 10$, $q = 3$

8. (F) לסדרה חשבונית ולסדרה הנדסית אותו איבר ראשון: $a_1 = 6$.

א) בטאו את a_5 של הסדרה ההנדסית בעזרת q .

בטאו את a_5 של הסדרה החשבונית בעזרת d .

ב) חשבו את a_8 של הסדרה ההנדסית אם $q = 2$.

חשבו את a_8 של הסדרה החשבונית אם $d = 2$.

ג) חשבו את a_5 של הסדרה ההנדסית אם $q = 3$.

מצאו, מה צריך להיות ערכו של d בסדרה החשבונית כדי ש- a_5 בסדרה

החשבונית יהיה זהה ל- a_5 שמצאתם (של הסדרה ההנדסית).

9. בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 8 \\ a_3 + a_4 = 72 \end{cases}$$

- (א) רשמו את הנתונים בעזרת a_1 ו- q .
 (ב) הוציאו גורם משותף (גדול ביותר) מאגף שמאל של כל משוואה.
 (ג) חלקו אגפי שמאל ואגפי ימין של שתי המשוואות:

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

- מצאו את q ואת a_1 (שימו לב! יש שתי תשובות אפשריות).
 (ד) רשמו את ארבעת האיברים של הסדרה. (שתי אפשרויות).
 מצאו, בכל מקרה, את S_4 .

10. האיבר השלישי בסדרה הנדסית הוא 8, וההפרש בין האיבר הרביעי לאיבר השלישי הוא 24. חשבו את q ואת a_1 .

11. סכום האיברים השני והשלישי של סדרה הנדסית הוא 24. אם נחלק את האיבר השלישי בשני נקבל 3.
 (א) מהם שלושת האיברים הראשונים של הסדרה?
 (ב) מצאו את S_3 ואת S_5 .

12. סכום שני האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 216.
 סכום האיברים הרביעי והחמישי 8.
 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.
 (היעזרו בהדרכה לתרגיל 9).

13. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 3$, $q = 2$.
 (א) מצאו את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה ואת סכומם.
 (ב) מצאו את סכום ששת האיברים הראשונים של הסדרה.

סליף פלוסק בנוסחה הסכום של סדרה הנדסית מופיע כנספח בסוף הפרק.
 בלבד המקרים אין צורך לפתחם בנוסחה זו כפי שנראה כאן.

תרגילים

14. רשמו ה ליד כל סדרה הנדסית.
 רשמו ח ליד כל סדרה חשבונית.
 רשמו א ליד כל סדרה אחרת (שאינה חשבונית או הנדסית).

(א) $0.2, 2, 20, 200, 2000, 20000 \dots$

(ב) $2, 12, 22, 32, 42, 52 \dots$

(ג) $2, -20, 200, -2000, 20000 \dots$

(ד) $2, 10, 12, 20, 22, 30, 32 \dots$

(ה) $2, -2, 2, -2, 2, -2, 2 \dots$

15. (א) השלימו כך שתתקבל סדרה הנדסית.

(i) $2, _, 50$

(ii) $-2, _, -50$

(iii) $3, _, _, 81$

(iv) $1, _, _, 1000$

- (ב) השלימו כך שתתקבל סדרה חשבונית.

(i) $2, _, 50$

(ii) $-2, _, -50$

(iii) $3, _, _, 81$

(iv) $1, _, _, 1000$

- את התרגילים הבאים תוכלו לפתור בשני אופנים:
 (א) לרשום ולסמן את האיברים שאינם ידועים בקו ____ (האיברים הנתונים שובצו במקומות המתאימים).
 (ב) תוכלו להיעזר בחוק לפי מקום ($a_n = a_1 q^{n-1}$).



16. א) בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ q = 4 \end{cases}$$

חשבו את a_8 ואת a_9 .

ב) בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_3 = 9 \\ a_4 = 27 \end{cases}$$

השלימו את שורת האיברים עד ל- a_8 : $\dots, _, 27, 9, _, _$

17. בסדרה הנדסית נתון $a_3 = 50$, $a_5 = 1250$.

רשמו בצורה: $_, 1250, _, 50, _, _$
מצאו את q , את a_4 ואת a_1 .

18. בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}$$

באיזה מקום בסדרה נמצא איבר שערכו 4374?

19. בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ q = 7 \end{cases}$$

א) באיזה מקום בסדרה נמצא איבר שערכו 4802-?

ב) האם יש בסדרה איבר שהוא מספר אי-זוגי? נמקו.

20. בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_4 = 2.5 \end{cases}$$

א) מצאו את ערכו של q , a_2 ו- a_3 .

ב) באיזה מקום נמצא איבר שערכו 0.625?

21. גודלו של כתם שמן כיום הוא 2304 מ"ר. בשל טיפול להכחדתו, גודל הכתם קטן בכל שנה פי 0.75.

א) השלימו את סדרת גדלי הכתם מדי שנה.

כיום

____, ____ , 2304 , ____ , ____ ,

ב) מה יהיה גודלו של כתם השמן כעבור שנה? כעבור 4 שנים?

ג) מה היה גודל הכתם לפני שנה?

ד) מה היה גודל הכתם לפני שנתיים?

ה) האם, לדעתכם, הכתם יכחד אי פעם?

22. סכום האיברים השלישי והחמישי בסדרה הנדסית הוא 20, וההפרש בין האיבר השלישי לחמישי הוא 12.

מצאו את חמשת איברי הסדרה. (שימו לב! יש שתי תשובות אפשריות.)

23. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 384$, $q = -\frac{1}{2}$

מצאו את S_3 ואת S_6 .

24. סכום שני האיברים הראשונים של סדרה הנדסית הוא 12.

מכפלת האיבר הראשון באיבר השלישי היא 64.

חשבו את מנת הסדרה ואת שלושת האיברים הראשונים שלה (מצאו שתי אפשרויות).

25. בכל סדרה הנדסית נתונים שלושה איברים באמצעות המשתנה x . מצאו אותם.

(שימו לב להגדרה של סדרה הנדסית: המנה של כל שני איברים סמוכים קבועה).

א) x , x^2 , $6x^2$ ג) x , $6x$, $2x + 17$

ב) x , $x + 6$, $x + 30$ ד) $x + 1$, $x^2 - 1$, $2x^2 - 2$

(בידקו את תשובותיכם).

סדרות חשבוניות והנדסיות בצוותא – רשות

השלב זה בנושא אינו מופיע בגאנרל, הוצאות של שאלון זה, אך מאפשר גישה נוספת בנושא סדרות הנדסיות, אפוא, בין סוגים שונים של סדרות.

1. (א) המשיכו ורשמו חמישה איברים כך שתתקבל סדרה הנדסית.

3, 6, __, __,

שרטטו אותה במערכת צירים. (ציר x מ-0 ועד 10, ציר y מ-0 ועד 52).

(ב) המשיכו ורשמו חמישה איברים כך שתתקבל סדרה חשבונית.

3, 6, __, __,

שרטטו באותה מערכת צירים.

2. (א) השלימו כך שתתקבל סדרה הנדסית ורשמו לכל סדרה כלל נסיגה.

(א) 10, __, 160, __

(ב) 12, __, 3, __

(ג) 2, -3, __, -6.75

(ד) 6, __, __, 1296

בידקו אם תתכן תשובה נוספת באחד או יותר מהסעיפים א' - ד'.

3. (א) השלימו כך שתתקבל סדרה חשבונית, ורשמו לכל סדרה כלל נסיגה.

(א) 2, __, 8, __

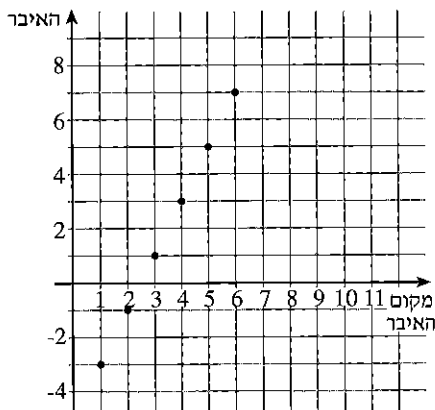
(ב) 12, __, 2, __

(ג) 4, __, __, 13

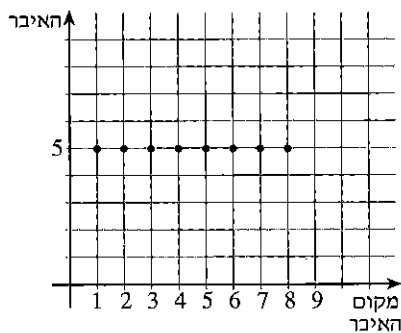


4. — רשמו את איברי הסדרה על-פי הגרף, והוסיפו שלושה איברים.
— רשמו ה ליד כל סדרה הנדסית.
— רשמו ח ליד כל סדרה חשבונית.
— רשמו כלל נסיגה או חוק לפי מקום לכל סדרה.

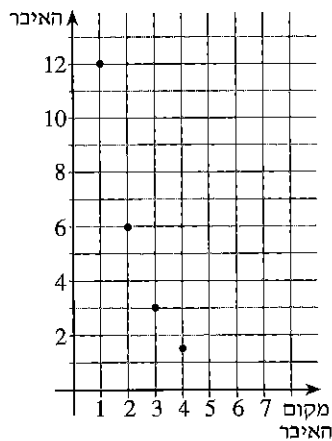
(א)



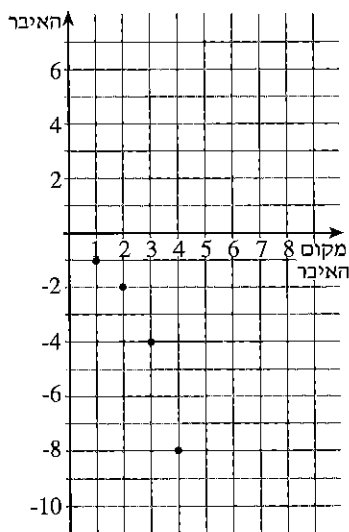
(ב)



(ג)



(ד)



5. (א) שרטטו גרף שיתאר סדרה הנדסית.

(ב) שרטטו גרף שיתאר סדרה חשבונית.

(ג) שרטטו גרף שיתאר סדרה שאינה הנדסית ואינה חשבונית.

6. (א) בטאו את האיבר המבוקש של הסדרה ההנדסית בעזרת הכופל q והאיבר הראשון a_1 .

דלמט: $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$a_{100} =$ $a_7 =$

$a_{10} =$ $a_{51} =$

(ב) נתון כלל נסיגה: $a_{n+1} = a_n \cdot 7$

– מה ערכו של q ?

– השלימו: $a_5 = a_1 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$ $a_{100} = a_1 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

7. (א) בטאו את האיבר המבוקש של הסדרה החשבונית בעזרת התוספת הקבועה d והאיבר הראשון.

דלמט: $a_4 = a_1 + 3d$

$a_{72} =$ $a_{10} =$ $a_7 =$

8. (א) רשמו איזה איבר מיוצג בכל סדרה הנדסית, מהו a_1 ומהו הכופל הקבוע.

(כל איבר רשום בצורה: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.)

(א) $a_{\square} = 3 \cdot 5^8$ (ג) $a_{\square} = 5 \cdot 2^{11}$

(ב) $a_{\square} = 2 \cdot (-3)^7$ (ד) $a_{\square} = 7^{10}$

9. (א) רשמו איזה איבר מיוצג בכל סדרה הנדסית.

$a_{\square} = a_1 \cdot q^8$ $a_{\square} = a_1 \cdot q^{12}$

(ב) רשמו איזה איבר מיוצג בכל סדרה חשבונית.

$a_{\square} = a_1 + 100d$ $a_{\square} = a_1 + 4d$

10. (א) האיבר הראשון של סדרה הנדסית הוא 3 והכופל הקבוע הוא 4. חשבו את a_5 .

(ב) האיבר הראשון של סדרה חשבונית הוא 3 והתוספת הקבועה 4. חשבו את a_5 .

11. (א) בסדרה הנדסית נתון:
$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$$

באיזה מקום נמצא איבר שערכו 160?

(ב) בסדרה חשבונית נתון:
$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ d = 2 \end{cases}$$

באיזה מקום נמצא איבר שערכו 160?

12. (א) צמח מטפס גדל בגיוגל. בכל שבוע גובהו הוא פי 1.2 מגובהו בשבוע הקודם. בסוף השבוע הראשון, מאז הנביטה, היה גובהו 4 ס"מ. מה יהיה גובהו בסוף השבוע העשירי? מה יהיה גובהו בסוף השבוע העשרים?

13. (א) צמח מטפס בגן ציבורי גדל בכל שבוע ב- 2 ס"מ. גובהו בסוף השבוע הראשון (לאחר השתילה) 4 ס"מ. מה יהיה גובהו בסוף השבוע העשירי? מה יהיה גובהו בסוף השבוע העשרים?

14. (א) הכניסו בין המספרים 2 ו- 32 שלושה מספרים כך שחמשת המספרים יהיו חמישה איברים עוקבים של סדרה חשבונית.
(ב) הכניסו בין המספרים 2 ו- 32 שלושה מספרים כך שחמשת המספרים יהיו חמישה איברים עוקבים של סדרה הנדסית.

15. נתונה סדרה חשבונית בת שלושה איברים.
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 6 \end{cases}$$

איזה מספר יש להוסיף/להוריד מהאיבר השני כדי שתתקבל סדרה הנדסית? רשמו את שלושת איברי הסדרה ההנדסית.

16.  המספרים $x, y, 12$ מהווים שלושה איברים של סדרה הנדסית.
(א) השלימו משוואה (המנה) של כל שני איברים סמוכים (קבועה):

$$\frac{12}{y} =$$

- (ב) המספרים $x, y, 9$ מהווים שלושה איברים של סדרה חשבונית.
רשמו משוואה (שימו לב! ההפרש של כל שני איברים סמוכים קבוע).
(ג) פתרו את מערכת המשוואות (מצאו את x ו- y) שימו לב, יש שני פתרונות.
רשמו בכל מקרה את איברי הסדרות המתקבלות.

תרגילים

17. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 4$, $a_5 = 44$.
(א) חשבו את d ואת a_{10} .
(ב) רשמו כלל נסיגה לסדרה זו.
18. בסדרה הנדסית נתון $a_1 = 3$ וסכום שני האיברים הראשונים 15.
(א) מצאו את q (מצאו תחילה את a_2).
(ב) רשמו ארבעה איברים ראשונים של סדרה זו.
19. שלוש סדרות מוגדרות בעזרת כללי נסיגה.

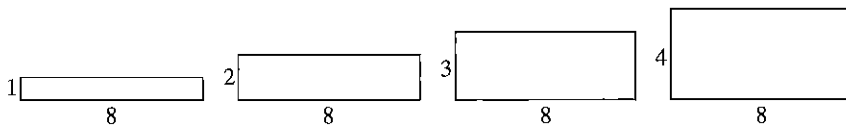
$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases} & \text{(ii)} & \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 4 \end{cases} & \text{(iii)} & \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases} \end{array}$$

- (א) מצאו בכל סדרה את a_5 .
(ב) אחת מהסדרות הנדסית מצאו בסדרה זו את a_6 .
(ג) אחת מהסדרות חשבונית מצאו בסדרה זו את a_{20} .

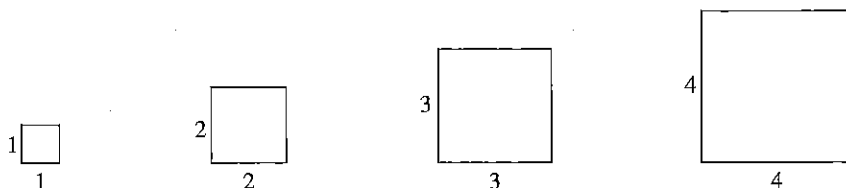
20. נתון $a_{n+1} = a_n \cdot 4$.
האיבר השני בסדרה הוא 12.
מצאו את a_1 ואת a_{10} .

21. א) רשמו סדרת מספרים המתארת את שטחי המלבנים, מהמלבן הראשון ועד לשמיני, בכל אחת מהסדרות המפורטות.

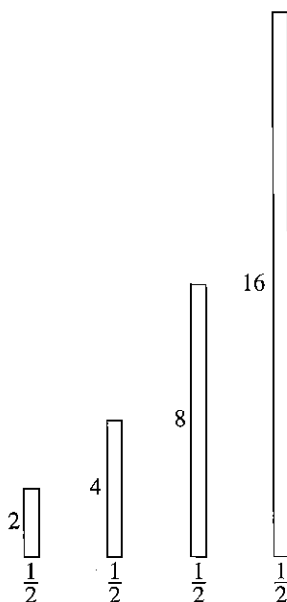
(i) אורך אחת הצלעות גדל ביחידה.



(ii) אורך כל צלע גדל ביחידה.



(iii) אורך אחת הצלעות גדל פי 2.



ב) איזו מהסדרות חשבונית ואיזו הנדסית?

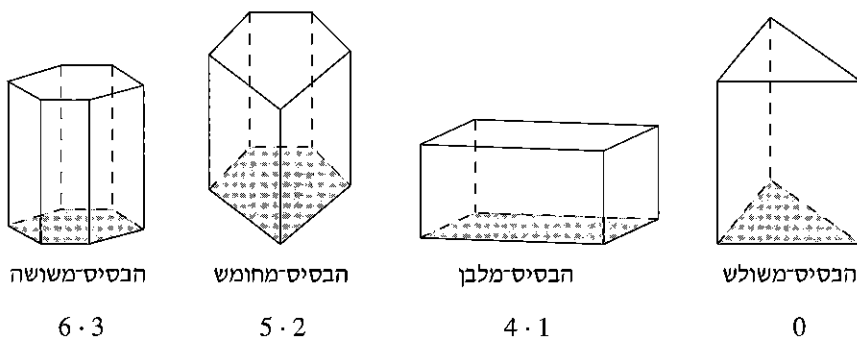
ג) — האיברים של איזו סדרה גדלים "מהר ביותר"?

— החל מאיזה מקום השטחים המתוארים על-ידי סדרה זו, גדולים

מהשטחים המתוארים על-ידי הסדרות האחרות?

המשך ←

- (ד) רשמו חוק לפי מקום לכל סדרה.
- (ה) - רשמו סדרת מספרים שתתאר את היקפי המלבנים בכל סדרה.
(עד למלבן השמיני).
- נסו לרשום חוק לכל סדרה.
22. (א) a_1, a_2, a_3 מהווים שלושה איברים של סדרה הנדסית, רשמו משוואה.
(ב) $a_1 - 1, a_2 + 3, a_3$ מהווים שלושה איברים של סדרה חשבונית, רשמו משוואה נוספת.
(ג) פתרו את מערכת המשוואות ומצאו את איברי הסדרה ההנדסית.
23. שלושה מספרים שהראשון בהם 2 מהווים סדרה חשבונית. אם נחסיר מהמספר השני 1 ולמספר השלישי נוסיף 6 נקבל סדרה הנדסית.
רשמו ומצאו את איברי הסדרה החשבונית וההנדסית.
24. בפרק הנדסת המרחב, ספרתם את מספר האלכסונים במנסרות עם בסיסים שונים. (או תספרו כשתלמדו את הפרק).
איילת ספרה בדרך מסוימת ורשמה מתחת לכל מנסרה את מספר אלכסוניה.



- (א) נסו לחסביר את דרך הספירה שלה.
- (ב) כמה אלכסונים במנסרה שבסיסה מצולע בעל:
7 צלעות? 8 צלעות? 9 צלעות? 10 צלעות?

בעיות של גידול ודעיכה

1.  תכנית חסכון "המטמון" פרסמה דו"ח. הדו"ח קובע שבשנים האחרונות כל סכום שמושקע בתכנית גדל פי 1.2 בכל שנה.
בשנה הראשונה היו לאסף 1000 ש"ח.
מה הסכום שיש לו כעת, בשנה העשירית?
(הצעה: רשמו את שורת איברי הסדרה).

2.  סכום כסף המושקע בבנק גדל ב- 10% במשך שנה.
(א) סכום של 200 הושקע בבנק. מה יהיה ערכו אחרי שנה?
(ב) **פי כמה** גדל הסכום של 200 ש"ח במשך השנה?
(ג) **פי כמה** יגדל **כל** סכום במשך שנה?
(ד) מה יהיה ערכו של הסכום שהושקע לאחר 5 שנים?

כשנתון אחוז הגידול מוצאים תחילה פי כמה גדל הערך המקורי בכל שנה, כלומר, מוצאים את q.



- בתחילת** השנה הראשונה היה הסכום של משקיע אחר 12,000 ש"ח.
(ה) מה יהיה הסכום שברשותו **בסוף** השנה הראשונה? **ובסוף** השנה השניה?
(ו) מה יהיה הסכום שברשותו **בסוף** השנה העשירית?
(רשמו את איברי הסדרה בשורה.)

3.  (א) אחוז הריבוי הטבעי במדינה מסוימת הוא 10%.
במדינה זו כיום 3,200,000 תושבים.
— פי כמה גדלה האוכלוסיה בכל שנה?
— מה מספר התושבים הצפוי לאחר שנה?
— מה מספר התושבים הצפוי לאחר שנתיים?
— מה מספר התושבים הצפוי לאחר 7 שנים?
(ב) אחוז הריבוי הטבעי במדינה אחרת הוא 15%.
 a_0 מייצג את מספר התושבים במדינה זו כיום.
— פי כמה גדלה האוכלוסיה בכל שנה?
— רשמו ביטוי למספר התושבים לאחר שנה.
— רשמו ביטוי למספר התושבים לאחר שנתיים.
— רשמו ביטוי למספר התושבים לאחר 7 שנים.
— רשמו ביטוי למספר התושבים לאחר 10 שנים.

באופן כללי: אם a_0 מייצג כמות מסוימת בתחילת התהליך של גידול מעריכי (בו בכל פעם נכפלת הכמות בגורם קבוע), q הוא גורם הגידול ו- a_n הכמות לאחר n פרקי זמן, נקבל כי $a_n = a_0 q^n$

תהליך החישוב והנוסחה שקיבלתם כאן (ובתרגילים הקודמים) דומה לתהליך החישוב ולנוסחת האיבר הכללי בסדרה הנדסית. אך יש לשים לב, שכאן כל איברי הסדרה פרט לנתון עצמו, מתייחסים למספר התושבים **בסוף השנה** בה מדובר, ואילו הנתון מתייחס **לתחילת השנה** הראשונה. בנוסחה מופיעה a_0 הכמות בתחילת השנה ($a_1 = a_0 q$ בסוף השנה הראשונה) לכן בנוסחה מופיע q^n . הבחנה בין a_0 ל- a_1 חיונית גם במקרים רבים אחרים.



4. (P) א) מספר המעטפות שממין עובד מתחיל בשעה, בבית דפוס, גדל בכל יום פי 1.5. ביום הראשון מיון 64 מעטפות בשעה. כמה ימיו החמישי?

ב) כתם נפט אובחן בגודל 64 מ"ר. הכתם גדל פי 1.5 בכל שעה.

— מה יהיה גודל כתם השמן **בסוף** השעה הראשונה?

— מה יהיה גודל כתם השמן **בסוף** השעה השנייה?

— מה יהיה גודל כתם השמן **בסוף** השעה החמישית?

ג) במה דומות השאלות בשני הסעיפים ובמה הן שונות?

5. (P) ערכה של מכונת יורד בכל שנה ב- 8%. מחיר מכונת חדשה הוא 90,000 ש"ח.

א) מה יהיה ערך המכונת אחרי שנה?

ב) פי כמה קטן ערך המכונת במשך השנה?

ג) פי כמה יקטן ערך המכונת בכל שנה?

ד) מה יהיה ערך המכונת אחרי 6 שנים?

תרגילים

6. מכל חיידק קטגוס בודד מתקבלים במשך דקה אחת 2 חיידקים.

בתחילת התהליך היו בצלוחית 1000 חיידקים.

א) כמה חיידקים יהיו לאחר 5 דקות?

ב) כמה חיידקים יהיו לאחר 10 דקות?

ג) כמה חיידקים יהיו לאחר שעה?

7. צמח מתפשט ושטחו גדל פי 1.5 במשך חודש.
 בסוף החודש השלישי היה שטחו 18 מ"ר.
 (א) השלימו: ____, 18, ____, ____
 (ב) מה היה שטחו בסוף החודש הראשון?
 (ג) מה היה שטחו בתחילת החודש הראשון?
 (ד) מה יהיה שטחו בסוף החודש ה-12?
8. אדם לקח הלוואה ובכל שנה הקטין את חובו ב-10%. בתחילת השנה הראשונה היה חובו 20,000 ש"ח.
 (א) מה יהיה חובו בסוף השנה הראשונה?
 (ב) פי כמה קטן החוב במשך שנה?
 (ג) כפי שמצאתם בסעיף א', היה חובו בסוף השנה הראשונה 18,000 ש"ח.
 מה יהיה גודל החוב בסוף השנה השלישית.
 (ד) מה יהיה החוב בסוף השנה העשירית.
 (ה) בידקו לאחר כמה שנים יהיה החוב לראשונה קטן מ-10,000 ש"ח.
9. כדי לנקות מי שתייה מוסיפים כלור למים. ככל שהחידקים נמצאים זמן רב יותר במגע עם הכלור נותרים פחות חיידקים.
 במשך דקה נכחדים 26% מהחיידקים שהיו.
 a מייצגת את כמות החיידקים ברגע הזרמת הכלור.
 (א) רשמו ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר דקה.
 (ב) — רשמו ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר 5 דקות.
 — האם, לאחר 5 דקות נותרו יותר או פחות מ-10% מהחיידקים שהיו בתחילה?
 (ג) — רשמו ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר רבע שעה.
 — האם, לאחר רבע שעה, נותרו יותר או פחות מ-1% מהחיידקים שהיו בתחילה?
 (ד) כעבור כמה דקות ישארו לראשונה פחות מחצי אחוז ממספר החיידקים שהיו בתחילה?

הרחבת מושג החזקה ובעיות נוספות של גידול ודעיכה

ומה "לפני האיבר הראשון"?



1. (א) השלימו איברים בסדרה.

3, 9, 27, __, __, __, __, __,

(ב) באיזה מקום נמצא 6561?

(ג) השלימו: $a_{\square} = 729$.

(ד) איזה מספר נמצא במקום העשירי?

(ה) השלימו: $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(ו) האם המספרים הבאים נמצאים בסדרה? אם כן, רשמו באיזה מקום.

אם לא, נמקו.

729, 297, -81, 1, 324522, 81



2. השלימו איברים בכל סדרה.

(א) __, __, __, __, 8, 16, 32, 64, __, __,

(ב) __, __, __, __, 625, 125, 25, 5, __, __,



3. (א) הוסיפו שני איברים לסדרה.

7, 49, 343, __, __

(ב) אם תמשיכו את הסדרה שמאלה, מה יהיה האיבר **לפני 7**?

(ג) מהו האיבר הקודם לזה שרשמתם בסעיף ב'?

אם קבענו שבסדרה מסוימת $a_1 = 7$, קבענו שאין בסדרה זו איברים לפני

7. יחד עם זאת, ניתן להמשיך את הסדרה שמאלה, כפי שוודאי עשיתם

בתרגילים הקודמים. בתרגילים הבאים ננסה לתת משמעות ל"מקום" של

איברים אלה.

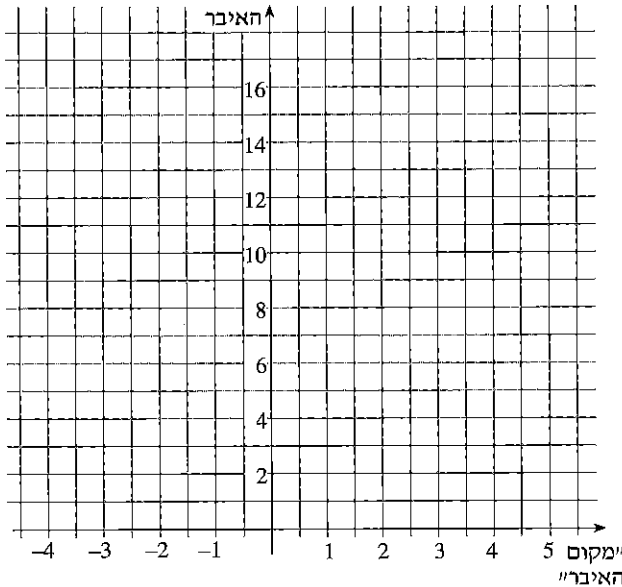


4. א) השלימו איברים בסדרה.

מקומו של האיבר: 1 2 3 4 5 6

האיבר בסדרה: 2, 4, 8, __, __, __

ב) סמנו במערכת הצירים את ארבעת האיברים הראשונים.



ג) — המשיכו את הסדרה **שמאלה** ואת "מקומם" של האיברים האלה.

המקום: 1, 2, 3, 4, 5, 6

האיברים: 2, 4, 8, 16, 32, 64

— רשמו את ה"מקומות" גם על ציר x. (משמאל לאפס).

— הוסיפו נקודות מתאימות במערכת הצירים.

עד לתרגיל זה ראיתם גרף של סדרה רק עבור ערכי x שלמים וחיוביים, וזאת מאחר ומקומו של איבר בסדרה נרשם בעזרת מספרים שלמים חיוביים.



ד) — מה הוא האיבר ב"מקום 3"?

— מה הוא ה"מקום" המתאים ל- $\frac{1}{16}$?

— מה הוא האיבר ב"מקום 0"?

(א) מקום האיבר: -4 -3 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\underline{\hspace{1cm}}$

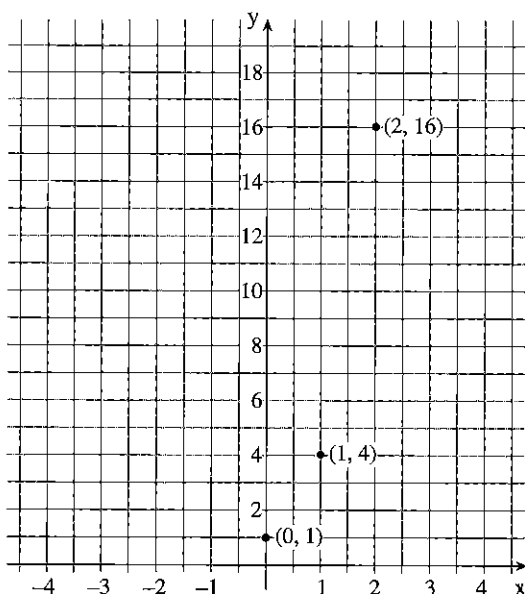
—, —, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 האיבר:

(ב) מקום האיבר: _____ -2 _____ 0 _____

____, ____, ____, 10^{-1} , ____, ____, ____, ____: האיבר בחזקה:

—, —, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000 האיבר:

6. במערכת הצירים שלפניכם מסומנות שלוש נקודות.



(א) ציינו איזה מהחוקים
הבאים מתאים

לנקודות המסומנות

$$y = 8^x$$

$$y = 4^x$$

$$y = 2^x$$

(ב) מהו האיבר ב"מקום 4"?

מהו האיבר ב"מקום 1–?"

מהו האיבר ב"מקום 2–?"

מהו האיבר ב"מקום 3—?"

(ג) האם, לדעתכם, יכול להיות

בסדרה זו איבר שלישי?

הסבירו.

(ד) האם, לדעתכם, יכול להיות בסדרה זו איבר שערכו 0? הסבירו.

האיבר כחזקה: _____, _____, _____, _____, _____, 5^{-2} , _____

האיבר: _____, _____, _____, 1, 5, 25, 125

8. בבריקה לגידול דגים יש היום 1 טון של דגי קרפיון. בכל שנה גִדְלָה כמות הדגים בבריקה פי 2.

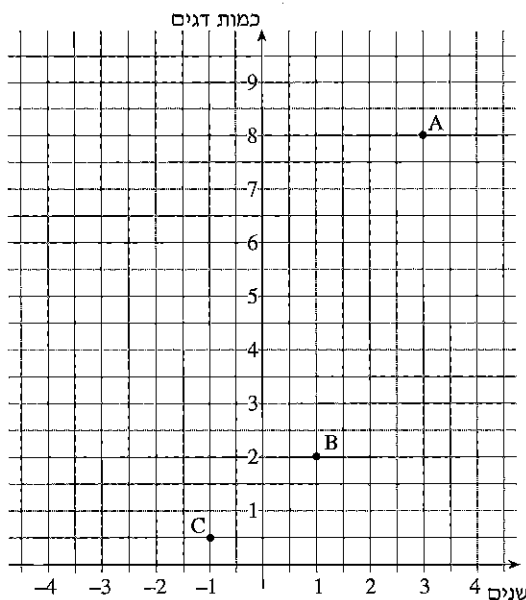
הנקודות בגרף מתארות את תהליך הגידול של הדגים בבריקה.

(א) השלימו: משמעות הנקודה A היא, שלאחר 3 שנים כמות הדגים בבריקה

תהיה _____ טון.

מה המשמעות של

הנקודות B ו-C?



(ב) השלימו את הטבלה:

		-1	0	1			כעבור/לפני ... שנים
		1/2					משקל הדגים בבריקה (בטונות)

(ג) כתבו אמת או שקר.

- בעוד שנתיים תהיה כמות הדגים פי 2 מהכמות כיום.
- לפני שנה הייתה מחצית מכמות הדגים כיום.
- בעוד שלוש שנים תהיה כמות הדגים פי 8 מהכמות כיום.

9. רשמו כשבר וחשבו את ערך המכנה.

דוגמה: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(א) $4^{-2} =$ (ד) $8^{-1} =$

(ב) $7^{-1} =$ (ה) $12^{-2} =$

(ג) $10^{-2} =$ (ו) $4^{-3} =$

10. (א) נתונה סדרה הנדסית: $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \dots$

רשמו שני איברים נוספים בכתב חזקות.

רשמו את איברי החזקה ב"כתיב שברים".

(ב) נתונה סדרה הנדסית: $5^3, 5, 5^{-1}, \dots$

רשמו שני איברים נוספים בכתב חזקות ו"בכתיב שברים".

בסעיף זה ראינו כיצד ניתן להרחיב את פעולת החזקה למעריך אפס ולמעריך שלילי.

עבור כל a חיובי $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

תרגילים

11. חוק של סדרה הוא 3^x .

(א) השלימו.

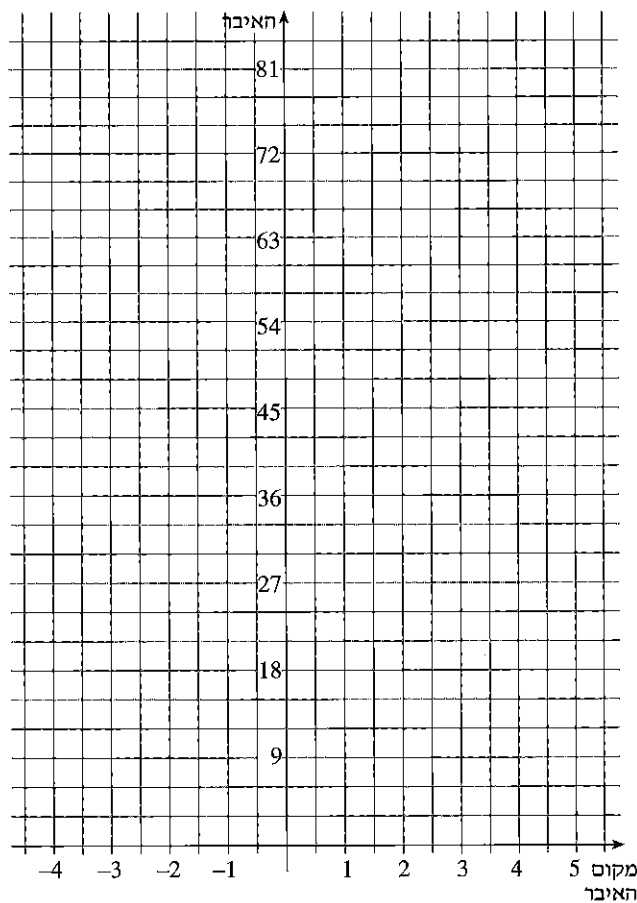
מקום האיבר: $1, 2, 3, 4, 5, 6$

האיבר כחזקה: $3, 9, _, _, _, _$

האיבר: $3^{-2}, _, _, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, _, _$

המשך ←

ב) סמנו במערכת הצירים את איברי הסדרה ואת מקומם על הציר האופקי.



12. רשמו כשבר וחשבו.

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \quad \text{זלמא:}$$

$$3^{-2} = \quad \text{(ה)} \quad 5^{-2} = \quad \text{(ג)} \quad 6^{-1} = \quad \text{(א)}$$

$$3^{-1} = \quad \text{(ו)} \quad 5^{-3} = \quad \text{(ד)} \quad 10^{-2} = \quad \text{(ב)}$$

13. רשמו כחזקה עם מעריך שלם (חיובי או שלילי).

$$\frac{1}{10^5} = \quad \quad \quad (ד) \quad \quad \quad 125 = \quad \quad \quad (א)$$

$$\frac{1}{216} = \quad \quad \quad (ה) \quad \quad \quad 10,000 = \quad \quad \quad (ב)$$

$$\frac{1}{81} = \quad \quad \quad (ו) \quad \quad \quad \frac{1}{5^3} = \quad \quad \quad (ג)$$

14. השלימו. (פרקו תחילה את המונה והמכנה לגורמים הרשומים מימין לסימן השוויון).

$$\frac{1}{2025} = 3^{\square} \cdot 5^{\square} \quad (ה) \quad \quad \quad 144 = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \quad (א)$$

$$\frac{81}{128} = \frac{3^{\square}}{2^{\square}} \quad (ו) \quad \quad \quad \frac{1}{144} = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \quad (ב)$$

$$\frac{10125}{64} = \frac{3^{\square} \cdot 5^{\square}}{2^{\square}} \quad (ז) \quad \quad \quad 500 = 2^{\square} \cdot 5^{\square} \quad (ג)$$

$$1 = 5^{\square} \quad (ח) \quad \quad \quad \frac{1}{5000} = 2^{\square} \cdot 5^{\square} \quad (ד)$$

15. פתרו. (מצאו את x).

$$2^x = \frac{1}{16} \quad \text{דאגמא:}$$

$$2^x = 2^{-4} \quad x = -4$$

$$3^x = \frac{1}{243} \quad (ו) \quad \quad \quad 2^x = 64 \quad (א)$$

$$6^x = 1 \quad (ז) \quad \quad \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad (ב)$$

$$7^x = \frac{1}{343} \quad (ח) \quad \quad \quad 3^x = 81 \quad (ג)$$

$$10^x = 0.0001 \quad (ט) \quad \quad \quad 4^x = \frac{1}{4} \quad (ד)$$

$$8^x = 1 \quad (י) \quad \quad \quad 5^x = \frac{1}{625} \quad (ה)$$

16. א) $2^{2x} = 16$ מצאו את 2^{-x} .

ב) $3^{2x} = \frac{1}{9}$ מצאו את 3^x ואת 3^{-x} .

ג) $5^{-2x} = 25$ מצאו את 5^{-x} ואת 5^x .

17. א) $3^x = 9$ למה שווה 3^{-x} ? ג) $3^x = \frac{1}{9}$ למה שווה 3^{-x} ?

למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^x$?

למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$?

ב) $3^x = 2$ למה שווה 3^{-x} ? ד) $3^x = a$ בטאו את 3^{-x} בעזרת a.

למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^x$?

למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$?

18. א) כדי לחשב באמצעות מחשבון את 5^{-2} הקישו

5	x^y	2	+/-	=

התאימו למחשבון שלכם.

ב) שער, מה תהיה התוצאה ובידקו בעזרת המחשבון.

(i) $2^{-2} =$ (iv) $0.5^{-1} =$

(ii) $5^{-1} =$ (v) $0.1^{-1} =$

(iii) $\frac{1}{8^{-1}} =$ (vi) $0.2^{-1} =$

ג) פתרו.

(i) $0.1^x = 0.0001$ (iii) $5^x = 0.2$

(ii) $10^x = 0.0001$ (iv) $2^x = 0.5$

חוקי חזקות ומעריך שלם

1. בסעיפים קודמים למדתם את הכלל:

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k} \quad \text{כאשר } m \text{ גדול מ- } k.$$

$$a \neq 0, \quad k, m \text{ שלמים חיוביים.}$$

רשמו כחזקה.

$$\begin{array}{ll} \text{(א)} & \frac{5^{12}}{5^7} = \\ \text{(ב)} & \frac{10^{12}}{10^6} = \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(ג)} & \frac{a^m}{a^3} = \quad (m > 3) \\ \text{(ד)} & \frac{a^{13}}{a^k} = \quad (k < 13) \end{array}$$

2. נבדוק כעת אם החוק מתקיים עבור m קטן מ- k . השלימו. $a \neq 0$

$$\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} = a^{\boxed{}} \quad \text{(i) (א)}$$

$$\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{\boxed{}} \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{} = \quad \text{(i) (ב)}$$

$$\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} = \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{a^5}{a^5} = 1 \quad \text{(i) (ג)}$$

$$\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^{\boxed{}} \quad \text{(ii)}$$

חזקה עם מעריך שלילי או אפס מוגדרת כך שחוקי החזקות עבור מעריך טבעי חלים גם עליה. כלומר, עבור כל m ו- k שלמים מתקיים:

$$a \neq 0 \quad \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}, \quad a^0 = 1$$

אפשר להראות שגם חוקי החזקות האחרים שהכרתם נכונים עבור כל מעריך שלם.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad a^m \cdot a^k = a^{m+k}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (a^m)^k = a^{m \cdot k}$$

3. רשמו כחזקה של 2 ו/או 3 ואחר כך כשבר.

$$2^5 \cdot 2^{-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{תלמיד:}$$

$$\frac{2}{2^{-3}} = \quad (\text{א}) \quad \frac{2^3 \cdot 2^{-1}}{2^8} = \quad (\text{ב})$$

$$\frac{2^3 \cdot 3^{-2}}{3^2 \cdot 2} = \quad (\text{ד}) \quad \frac{3^4 \cdot 3^{-2}}{3^2} = \quad (\text{ה})$$

תרגילים

4. בטאו כמכפלת חזקות של 3 ושל 5.

$$\frac{225 \cdot 3^6}{3^7 \cdot 81} = \quad (\text{ב}) \quad \frac{75 \cdot 125}{27 \cdot 45} = \quad (\text{א})$$

5. רשמו במשבצת סימן מתאים: = או $\neq$.

$$\frac{2^{-3} \cdot 2^6}{2^3} \square 1 \quad (\text{ד}) \quad \frac{2^{-3}}{2^3} \square 1 \quad (\text{א})$$

$$6^{-3} \square -6^3 \quad (\text{ה}) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \frac{1}{2^3} \square 2^{-3} \quad (\text{ב})$$

$$2^{-4} \square \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \quad (\text{ו}) \quad \frac{1}{3^4} \square 3^{-4} \quad (\text{ג})$$

6. פשוטו. ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$)

$$\frac{(a^2)^{-3}}{a^5} = \quad (\text{א}) \quad \frac{a^5}{a^5} = \quad (\text{ב}) \quad \frac{a^{-3} \cdot a^8}{a^2} = \quad (\text{ג})$$

$$\frac{(ab)^{-2} \cdot a^3}{(b^2)^{-2}} = \quad (\text{ד}) \quad \frac{a^3}{a^{-7}} = \quad (\text{ה}) \quad \frac{a^4 \cdot b^3 \cdot a^{-2}}{a^3 \cdot b^{-2}} = \quad (\text{ו})$$

$$\frac{(ab^2)^{-1} \cdot a^4}{(b^{-1})^2} = \quad (\text{ז}) \quad \frac{a^7}{a^{-7}} = \quad (\text{ח}) \quad \frac{a^2 \cdot c^5 \cdot a^{-3}}{a \cdot c^{-4}} = \quad (\text{ט})$$

7. פתרו את המשוואות.

$$10^x = \frac{1}{10000} \quad (\text{א}) \quad 2^x = \frac{1}{4} \quad (\text{ב})$$

$$10^x = 0.000001 \quad (\text{ג}) \quad 5^x = \frac{1}{125} \quad (\text{ד})$$

$$2^x = \frac{1}{64} \quad (\text{ה}) \quad 3^x = 1 \quad (\text{ו})$$

8. בטאו כמכפלה או כמנה בה אחד הגורמים הוא 2^x .

$$2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x, \quad 2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = \frac{2^x}{4}$$

$$2^{1-x} = \quad (\text{א}) \quad 2^{x-5} = \quad (\text{ב})$$

$$2^{-x+1} = \quad (\text{ג}) \quad 2^{x-3} = \quad (\text{ד})$$

$$4 \cdot 2^{x-2} = \quad (\text{ה}) \quad 2^{x+1} = \quad (\text{ו})$$

6. השלימו.

התרגיל שעל הצג	על הצג	זאלימ:
$7 \cdot 10^9$	$70 \cdot 10^8$	7.09
	$700 \cdot 10^8$	
	$7000 \cdot 10^8$	
	$70,000 \cdot 10^8$	

(א)

התוצאה על הצג היא תמיד מספר בין 1 ל-10, מוכפל בחזקה של 10.

נהוג לכתוב מספרים גדולים כמכפלה של מספר בין 1 ל-10 בחזקה של 10. כתיב זה נקרא **כתיב מדעי של מספרים**.
זו הסיבה שתוצאות חישוב במספרים גדולים נרשמות על צג המחשבון בדרך שראיתם.
בהמשך תראו שמספרים חיוביים קטנים נרשמים באותו אופן.



התרגיל שעל הצג	על הצג	
	$3.5 \cdot 10^8$	
	$35 \cdot 10^8$	
	$350 \cdot 10^8$	

(ב)

"הספרות הקטנות" מציינות כמה צעדים ימינה צריכה הנקודה העשרונית ל"זוז".

7. (א) חשבו במחשבון ורשמו את התוצאה במסגרת.

$270 \cdot 10^8$	$27 \cdot 10^{14}$	$2.7 \cdot 10^{25}$	$0.27 \cdot 10^{15}$

(ב) כתיב של איזה מספר לא "השתנה"?

(ג) כתיב של איזה מספרים לא "ישתנה" כשנבצע את הפעולה במחשבון?

$36 \cdot 10^9$, $0.36 \cdot 10^8$, $360 \cdot 10^{10}$, $3.6 \cdot 10^3$



$7.2 \cdot 10^{12}$		(ד)	$30 \cdot 10^{12}$		(א)
$720 \cdot 10^{15}$		(ה)	$500 \cdot 10^{15}$		(ב)
$1952 \cdot 10^{13}$		(ו)	$8000 \cdot 10^{10}$		(ג)

תרגילים

9. רשמו את התוצאה כחזקה של 10, ורשמו איך תראה התוצאה במחשבון (לא תמיד תופיע התוצאה במחשבון בכתוב חזקות).

$$10^5 \cdot 10^7 = 10^{\boxed{}} = \boxed{} \quad (N)$$

$$10^{15} \cdot 10^3 = 10^{\boxed{}} = \boxed{} \quad (\text{ב})$$

$$100 \cdot 10^{17} = 10^{\boxed{}} = \boxed{} \quad (\text{a})$$

$$10^{31} \cdot 10 = 10^{\boxed{}} = \boxed{} \quad (7)$$

$$10^5 \cdot 10^4 \cdot 10^7 = 10^{\boxed{}} = \boxed{} \quad (n)$$

$$\frac{10^7}{10^2} = 10^{\boxed{}} = \boxed{} \quad (1)$$

$$\frac{10^{12}}{10^4} = 10^{\boxed{}} = \boxed{} \quad (1)$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

10. כתבו את המספר ללא כתיב חזקות.

$$3.65 \cdot 10^3 = 3650 \quad \text{:מחצית}$$

$$0.05 \cdot 10^4 = \quad (\alpha) \quad 12.56 \cdot 10^5 = \quad (\beta) \quad 2.7 \cdot 10^3 = \quad (\gamma)$$

11. מצאו את המספר השונה בכל שורה.

$2 \cdot 10^{11}$	$0.2 \cdot 10^{11}$	$200 \cdot 10^8$	$0.02 \cdot 10^{12}$	
				(א)

5,600,000	$560 \cdot 10^4$	$0.056 \cdot 10^9$	$5.6 \cdot 10^6$	
				(ב)

12. רשמו במסגרת = או $\neq$ כך שיתקבל פסוק נכון.

$2.7 \cdot 10^3$		2700	(ג)	$10 \cdot 10^{11}$		10^{11}	(א)
------------------	----------------------	------	-----	--------------------	----------------------	-----------	-----

$2.7 \cdot 10^3$		$27 \cdot 10^4$	(ד)	$560 \cdot 10^8$		$5.6 \cdot 10^{10}$	(ב)
------------------	----------------------	-----------------	-----	------------------	----------------------	---------------------	-----

13. השלימו.

ללא מחשבון	התרגיל	על הצג	
78,000,000	$9 \cdot 10^{11}$		(א)
	$4.7 \cdot 10^7$		(ב)
			(ג)
		2.4	(ד) ¹³
		6.5	(ה) ⁰⁹

14. חשבו במחשבון, רשמו מה מופיע על הצג ואת המספר בכתב חזקות.

$5^{15} = \boxed{3.05}^{10} = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}}$ (א)

$3^{20} = \boxed{} =$ (ב)

$7.2^{12} = \boxed{} =$ (ג)

15. (i) רשמו תרגיל כך שתתקבל על הצג התוצאה הרשומה במסגרת.

11	7.645	א) התוצאה:	12	1.5	ב) התוצאה:
10	8.1111	ד) התוצאה:	10	2.53	ב) התוצאה:

(ii) רשמו תרגיל נוסף שתוצאתו כמו בסעיף ד.

16. א) סמנו את המספרים השווים ל- $5 \cdot 10^{12}$

$5 \cdot 10^{12}$ 5.12 $50 \cdot 10^{11}$ 12^5 $5,000,000,000,000$

ב) סמנו את המספרים השווים ל- $3.5 \cdot 10^3$

$3.5 \cdot 10^3$ $35 \cdot 10^3$ 3.5^3 35000 3500

17. חשבו ורשמו את התוצאה בכתוב מדעי (כמכפלה של מספר בין 1 ל- 10 בחזקה של 10).

דוגמה: $(2.5 \cdot 10^3) \cdot (6 \cdot 10^6) = 2.5 \cdot 6 \cdot 10^9 = 1.5 \cdot 10^{10}$

א) $3.2 \cdot 10^7 \cdot 8 \cdot 10^7 =$ ה) $\frac{18 \cdot 10^7 \cdot 16 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^5} =$

ב) $1.25 \cdot 10^8 \cdot 16 \cdot 10^3 =$ ו) $\frac{4.2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^{12}}{7 \cdot 10^{15} \cdot 3.5 \cdot 10^2} =$

ג) $\frac{2.5 \cdot 10^{12}}{0.5 \cdot 10^8} =$ ז) $2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 5 =$

ד) $\frac{1.6 \cdot 10^7 \cdot 10^5}{0.2 \cdot 10^9} =$ ח) $\frac{10 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{12}}{5 \cdot 10^7 \cdot 50 \cdot 10^{11}} =$

18. רשמו בכתוב מדעי.

- א) מהירות האור $300,000,000$ מטר בשניה.
 ב) המהירות בה סובבת הארץ את השמש $101,000$ קמ"ש.
 ג) היקף כדור הארץ $41,000,000$ מטר.
 ד) שטח האוקינוס השקט $180,000,000,000$ דונם.
 ה) שטחה של סין $9,900,000$ קמ"ר ומספר תושביה $1,000,000,000$.

סדרה הנדסית

1. הוסיפו שלושה איברים לכל סדרה ורשמו כלל נסיגה.

(א) $0.01, 0.1, 1, 10, \dots$ (ג) $2, 6, 18, \dots$

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = a_n \cdot \boxed{} \end{cases}$$

(ב) $1, -2, 4, -8, \dots$ (ד) $64, 32, 16, 8, \dots$

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

בכל הסדרות בתרגיל 1, כלל הנסיגה הוא מהצורה $a_{n+1} = a_n \cdot \boxed{}$ כלומר, כל איבר בסדרה (החל ב- a_2) מתקבל מקודמו על-ידי כפל באותו מספר. נסמן את הכופל הקבוע ב- q ואז: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

סדרה כזו נקראת **סדרה הנדסית**

2. קבעו אם הסדרה הנדסית.

אם כן, רשמו את ערכו של q (הכופל הקבוע).

(א) $2, 8, 32, 128, 512, \dots$

(ב) $1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, \dots$

(ג) $-1, 2, -4, 8, -16, 32, \dots$

(ד) $10, 100, 1000, 10,000, 100,000, \dots$

(ה) $100, 200, 300, 400, 500, 600, \dots$

(ו) $5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, \dots$

(ז) $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$



3. השלימו, כך שתתקבל סדרה הנדסית.

(א) $3, _, 12, _, 48, _$

(ב) $2, _, 200, _, _, _$

(ג) $_, _, 25, 250, _, _$

(ד) $3, _, 48, _, _, _$



4. (א) השלימו כך שתתקבל סדרה הנדסית.

$2, _, 8$

(ב) השלימו כך שתתקבל סדרה חשבונית.

$2, _, 8$

(ג) השלימו כך שתתקבל סדרה הנדסית.

$1, _, _, 64$

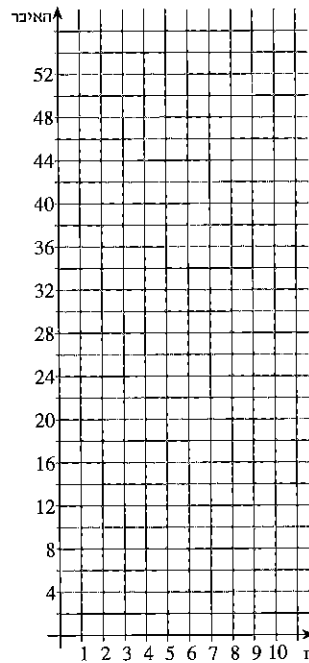
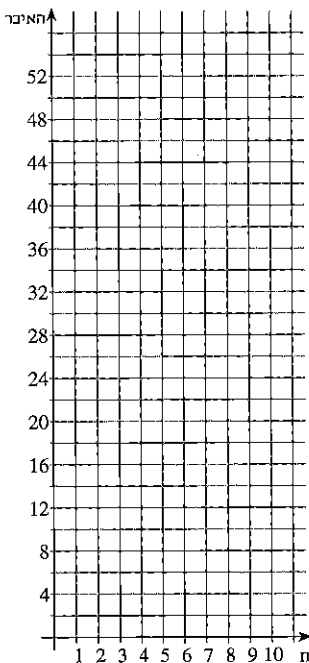
(ד) השלימו כך שתתקבל סדרה חשבונית.

$1, _, _, 64$



5. השלימו לשישה איברים בכל סדרה, קבעו אם הסדרה הנדסית. סמנו במערכת הצירים.

(א) $1, 2, 4, 8, _, _$ (ב) $48, 24, 12, 6, _, _$



6. א) בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 3$, $q = 2$ (הגורם הכופל).

מצאו את: a_2 , a_3 , a_4 , a_5 .

ב) בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 3$

בטאו את האיברים בעזרת q .

דוגמה: $a_2 = 3q$, $a_3 = 3 \cdot q^2$

המשיכו: $a_4 =$ $a_5 =$

ג) נתון: $a_2 = a_1 \cdot q$ $a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

השלימו: $a_4 =$ $a_5 =$ $a_6 =$ $a_{30} =$

ד) – כמה פעמים מופיע הגורם q בתבנית של a_8 ?

– כמה פעמים מופיע הגורם q בתבנית של a_{50} ?

$n - 1$ פעמים

באופן כללי: בסדרה הנדסית $a_n = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$

7. חשבו את a_6 של הסדרה ההנדסית, וחשבו גם את S_6 .

א) $a_1 = 1$, $q = 3$ ג) $a_1 = 0.5$, $q = 4$

ב) $a_1 = 2$, $q = -3$ ד) $a_2 = 10$, $q = 3$

8. לסדרה חשבונית ולסדרה הנדסית אותו איבר ראשון: $a_1 = 6$.

א) בטאו את a_5 של הסדרה **ההנדסית** בעזרת q .

בטאו את a_5 של הסדרה **החשבונית** בעזרת d .

ב) חשבו את a_8 של הסדרה **ההנדסית** אם $q = 2$.

חשבו את a_8 של הסדרה **החשבונית** אם $d = 2$.

ג) חשבו את a_5 של הסדרה **ההנדסית** אם $q = 3$.

מצאו, מה צריך להיות ערכו של d בסדרה החשבונית כדי ש- a_5 בסדרה

החשבונית יהיה זהה ל- a_5 שמצאתם (של הסדרה ההנדסית).

9. בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 8 \\ a_3 + a_4 = 72 \end{cases}$$

- (א) רשמו את הנתונים בעזרת a_1 ו- q .
 (ב) הוציאו גורם משותף (גדול ביותר) מאגף שמאל של כל משוואה.
 (ג) חלקו אגפי שמאל ואגפי ימין של שתי המשוואות:

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

- מצאו את q ואת a_1 (שימו לב! יש שתי תשובות אפשריות).
 (ד) רשמו את ארבעת האיברים של הסדרה. (שתי אפשרויות).
 מצאו, בכל מקרה, את S_4 .

10. האיבר השלישי בסדרה הנדסית הוא 8, והפרש בין האיבר הרביעי לאיבר השלישי הוא 24. חשבו את q ואת a_1 .

11. סכום האיברים השני והשלישי של סדרה הנדסית הוא 24. אם נחלק את האיבר השלישי בשני נקבל 3.
 (א) מהם שלושת האיברים הראשונים של הסדרה?
 (ב) מצאו את S_3 ואת S_5 .

12. סכום שני האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 216.
 סכום האיברים הרביעי והחמישי 8.
 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.
 (היעזרו בהדרכה לתרגיל 9).

13. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 3$, $q = 2$.
 (א) מצאו את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה ואת סכומם.
 (ב) מצאו את סכום ששת האיברים הראשונים של הסדרה.

סלף פלסק בנאסח הסכום של סדרה הנדסית מופיע כנספח בסוף הפרק.
 בלוח המקרים אין צורך אפלטון בנאסח 15 כפי שנראה כאן.

תרגילים

14. רשמו ה ליד כל סדרה הנדסית.
 רשמו ח ליד כל סדרה חשבונית.
 רשמו א ליד כל סדרה אחרת (שאינה חשבונית או הנדסית).

(א) $0.2, 2, 20, 200, 2000, 20000 \dots$

(ב) $2, 12, 22, 32, 42, 52 \dots$

(ג) $2, -20, 200, -2000, 20000 \dots$

(ד) $2, 10, 12, 20, 22, 30, 32 \dots$

(ה) $2, -2, 2, -2, 2, -2, 2 \dots$

15. (א) השלימו כך שתתקבל סדרה הנדסית.

(i) $2, _, 50$

(ii) $-2, _, -50$

(iii) $3, _, _, 81$

(iv) $1, _, _, 1000$

- (ב) השלימו כך שתתקבל סדרה חשבונית.

(i) $2, _, 50$

(ii) $-2, _, -50$

(iii) $3, _, _, 81$

(iv) $1, _, _, 1000$

- את התרגילים הבאים תוכלו לפתור בשני אופנים:
 (א) לרשום ולסמן את האיברים שאינם ידועים בקו $_$ (האיברים הנתונים שובצו במקומות המתאימים).
 (ב) תוכלו להיעזר בחוק לפי מקום $(a_n = a_1 q^{n-1})$.



16. א) בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ q = 4 \end{cases}$$

חשבו את a_8 ואת a_9 .

ב) בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_3 = 9 \\ a_4 = 27 \end{cases}$$

השלימו את שורת האיברים עד ל- a_8 , 27 , 9 , , ,

17. בסדרה הנדסית נתון $a_5 = 1250$, $a_3 = 50$.

רשמו בצורה: 1250 , 50 , , ,
מצאו את q , את a_4 ואת a_1 .

18. בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}$$

באיזה מקום בסדרה נמצא איבר שערכו 4374?

19. בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ q = 7 \end{cases}$$

א) באיזה מקום בסדרה נמצא איבר שערכו 4802 -?

ב) האם יש בסדרה איבר שהוא מספר אי-זוגי? נמקו.

20. בסדרה הנדסית נתון:

$$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_4 = 2.5 \end{cases}$$

א) מצאו את ערכו של q , a_2 ו- a_3 .

ב) באיזה מקום נמצא איבר שערכו 0.625?

21. גודלו של כתם שמן כיום הוא 2304 מ"ר. בשל טיפול להכחדתו, גודל הכתם קטן בכל שנה פי 0.75.

א) השלימו את סדרת גדלי הכתם מדי שנה.

כיום

____ , ____ , 2304 , ____ , ____ ,

ב) מה יהיה גודלו של כתם השמן כעבור שנה? כעבור 4 שנים?

ג) מה היה גודל הכתם לפני שנה?

ד) מה היה גודל הכתם לפני שנתיים?

ה) האם, לדעתכם, הכתם יכחד אי פעם?

22. סכום האיברים השלישי והחמישי בסדרה הנדסית הוא 20, וההפרש בין האיבר השלישי לחמישי הוא 12.

מצאו את חמשת איברי הסדרה. (שימו לב! יש שתי תשובות אפשריות).

23. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 384$, $q = -\frac{1}{2}$

מצאו את S_3 ואת S_6 .

24. סכום שני האיברים הראשונים של סדרה הנדסית הוא 12.

מכפלת האיבר הראשון באיבר השלישי היא 64.

חשבו את מנת הסדרה ואת שלושת האיברים הראשונים שלה (מצאו שתי אפשרויות).

25. בכל סדרה הנדסית נתונים שלושה איברים באמצעות המשתנה x . מצאו אותם.

(שימו לב להגדרה של סדרה הנדסית: המנה של כל שני איברים סמוכים קבועה).

א) x , x^2 , $6x^2$ ג) x , $6x$, $2x + 17$

ב) x , $x + 6$, $x + 30$ ד) $x + 1$, $x^2 - 1$, $2x^2 - 2$

(בידקו את תשובותיכם).

סדרות חשבוניות והנדסיות בצוותא – רשות

בשלב זה פנושא אינו מופיע בגאניק האינדוס של שאלון זה, אך מאפשר גרעון נוסף פנושא סדרה הנדסית ופכחנה בין סלים שונים של סדרה.

1. א) המשיכו ורשמו חמישה איברים כך שתתקבל סדרה הנדסית.

3 , 6 , _ , _ ,

שרטטו אותה במערכת צירים. (ציר x מ-0 ועד 10, ציר y מ-0 ועד 52).

ב) המשיכו ורשמו חמישה איברים כך שתתקבל סדרה חשבונית.

3 , 6 , _ , _ ,

שרטטו באותה מערכת צירים.

2. השלימו כך שתתקבל סדרה הנדסית ורשמו לכל סדרה כלל נסיגה.

א) 10 , _ , 160 , _

ב) 12 , _ , 3 , _

ג) 2 , -3 , _ , -6.75

ד) 6 , _ , _ , 1296

בידקו אם תתכן תשובה נוספת באחד או יותר מהסעיפים א' - ד'.

3. השלימו כך שתתקבל סדרה חשבונית, ורשמו לכל סדרה כלל נסיגה.

א) 2 , _ , 8 , _

ב) 12 , _ , 2 , _

ג) 4 , _ , _ , 13



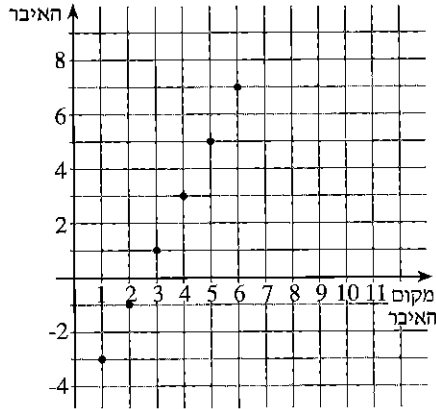
4. — רשמו את איברי הסדרה על-פי הגרף, והוסיפו שלושה איברים.

— רשמו ה ליד כל סדרה הנדסית.

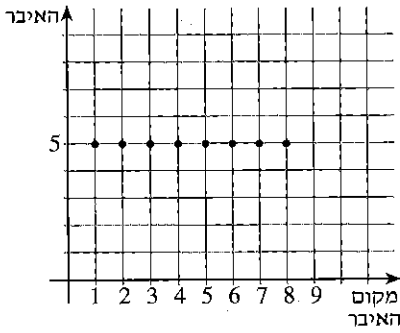
— רשמו ח ליד כל סדרה חשבונית.

— רשמו כלל נסיגה או חוק לפי מקום לכל סדרה.

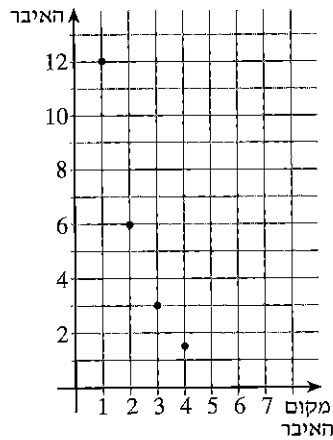
(א)



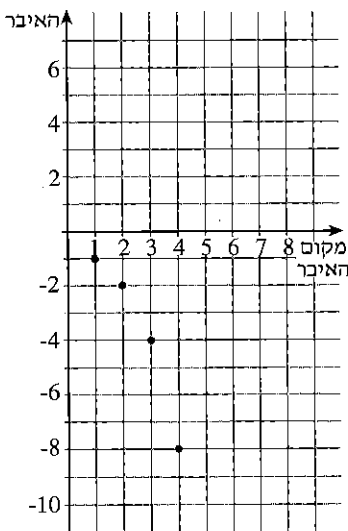
(ב)



(ג)



(ד)



5. (א) שרטטו גרף שיתאר סדרה הנדסית.
 (ב) שרטטו גרף שיתאר סדרה חשבונית.
 (ג) שרטטו גרף שיתאר סדרה שאינה הנדסית ואינה חשבונית.

6. (א) בטאו את האיבר המבוקש של הסדרה ההנדסית בעזרת הכופל q והאיבר הראשון a_1 .

באמצעות: $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$a_{100} =$ $a_7 =$

$a_{10} =$ $a_{51} =$

(ב) נתון כלל נסיגה: $a_{n+1} = a_n \cdot 7$

– מה ערכו של q ?

– השלימו: $a_{100} = a_1 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$ $a_5 = a_1 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

7. בטאו את האיבר המבוקש של הסדרה החשבונית בעזרת התוספת הקבועה d והאיבר הראשון.

באמצעות: $a_4 = a_1 + 3d$

$a_{72} =$ $a_{10} =$ $a_7 =$

8. רשמו איזה איבר מיוצג בכל סדרה הנדסית, מהו a_1 ומהו הכופל הקבוע.
 (כל איבר רשום בצורה: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$)

(א) $a_{\square} = 3 \cdot 5^8$ (ג) $a_{\square} = 5 \cdot 2^{11}$

(ב) $a_{\square} = 2 \cdot (-3)^7$ (ד) $a_{\square} = 7^{10}$

9. (א) רשמו איזה איבר מיוצג בכל סדרה הנדסית.

$a_{\square} = a_1 \cdot q^8$ $a_{\square} = a_1 \cdot q^{12}$

- (ב) רשמו איזה איבר מיוצג בכל סדרה חשבונית.

$a_{\square} = a_1 + 100d$ $a_{\square} = a_1 + 4d$

10. (א) האיבר הראשון של סדרה הנדסית הוא 3 והכופל הקבוע הוא 4. חשבו את a_5 .

(ב) האיבר הראשון של סדרה חשבונית הוא 3 והתוספת הקבועה 4. חשבו את a_5 .

11. (א) בסדרה הנדסית נתון:
$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$$

באיזה מקום נמצא איבר שערכו 160?

(ב) בסדרה חשבונית נתון:
$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ d = 2 \end{cases}$$

באיזה מקום נמצא איבר שערכו 160?

12. (פ) צמח מטפס גדל בגיונגל. בכל שבוע גובהו הוא פי 1.2 מגובהו בשבוע הקודם.

בסוף השבוע הראשון, מאז הנביטה, היה גובהו 4 ס"מ.

מה יהיה גובהו בס"מ בסוף השבוע העשירי?

מה יהיה גובהו בס"מ בסוף השבוע העשרים?

13. (פ) צמח מטפס בגן ציבורי גדל בכל שבוע ב- 2 ס"מ.

גובהו בסוף השבוע הראשון (לאחר השתילה) 4 ס"מ.

מה יהיה גובהו בס"מ בסוף השבוע העשירי?

מה יהיה גובהו בס"מ בסוף השבוע העשרים?

14. (א) הכניסו בין המספרים 2 ו- 32 שלושה מספרים כך שחמשת המספרים יהיו חמישה איברים עוקבים של סדרה חשבונית.

(ב) הכניסו בין המספרים 2 ו- 32 שלושה מספרים כך שחמשת המספרים יהיו חמישה איברים עוקבים של סדרה הנדסית.

15. (פ) נתונה סדרה חשבונית בת שלושה איברים.
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 6 \end{cases}$$

איזה מספר יש להוסיף/להוריד מהאיבר השני כדי שתתקבל סדרה הנדסית?

רשמו את שלושת האיברי הסדרה ההנדסית.

16.  המספרים $x, y, 12$ מהווים שלושה איברים של סדרה הנדסית.
(א) השלימו משוואה (המנה של כל שני איברים סמוכים קבועה):

$$\frac{12}{y} =$$

- (ב) המספרים $x, y, 9$ מהווים שלושה איברים של סדרה חשבונית.
רשמו משוואה (שימו לב! ההפרש של כל שני איברים סמוכים קבוע).
(ג) פתרו את מערכת המשוואות (מצאו את x ו- y) שימו לב, יש שני פתרונות.
רשמו בכל מקרה את איברי הסדרות המתקבלות.

תרגילים

17. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 4$, $a_5 = 44$.
(א) חשבו את d ואת a_{10} .
(ב) רשמו כלל נסיגה לסדרה זו.
18. בסדרה הנדסית נתון $a_1 = 3$ וסכום שני האיברים הראשונים 15.
(א) מצאו את q (מצאו תחילה את a_2).
(ב) רשמו ארבעה איברים ראשונים של סדרה זו.

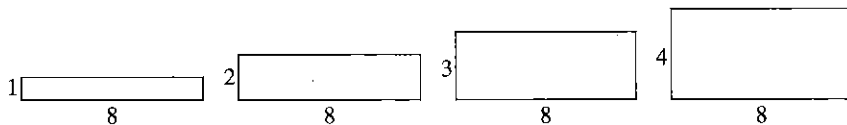
19. שלוש סדרות מוגדרות בעזרת כללי נסיגה.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases} & \text{(ii)} & \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 4 \end{cases} & \text{(iii)} & \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases} \end{array}$$

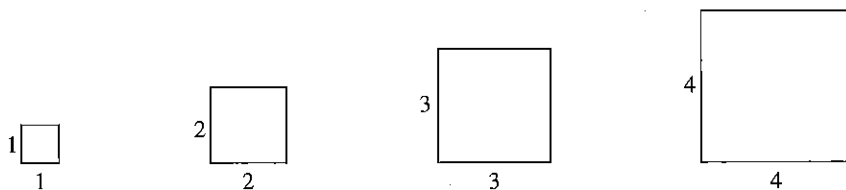
- (א) מצאו בכל סדרה את a_5 .
(ב) אחת מהסדרות הנדסית מצאו בסדרה זו את a_6 .
(ג) אחת מהסדרות חשבונית מצאו בסדרה זו את a_{20} .

20. נתון $a_{n+1} = a_n \cdot 4$.
האיבר השני בסדרה הוא 12.
מצאו את a_1 ואת a_{10} .

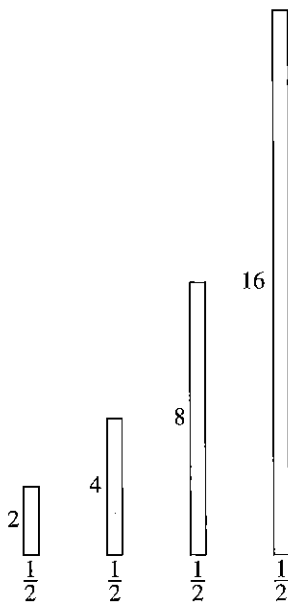
21. א) רשמו סדרת מספרים המתארת את שטחי המלבנים, מהמלבן הראשון ועד לשמיני, בכל אחת מהסדרות המשורטטות.
(i) אורך אחת הצלעות גדל ביחידה.



(ii) אורך כל צלע גדל ביחידה.



(iii) אורך אחת הצלעות גדל פי 2.

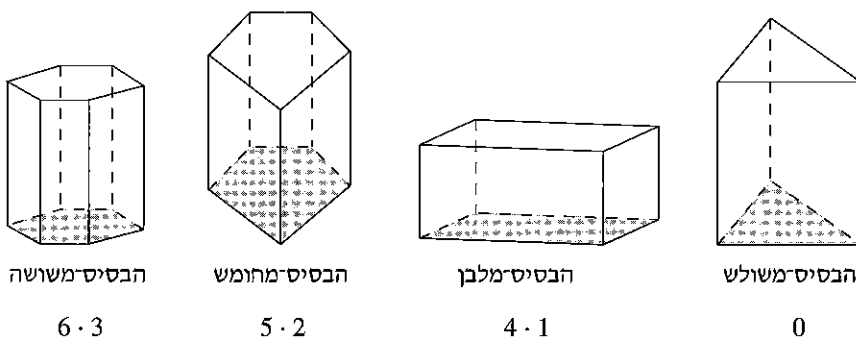


ב) איזו מהסדרות חשבונית ואיזו הנדסית?

- ג) — האיברים של איזו סדרה גדלים "מהר ביותר"?
— החל מאיזה מקום השטחים המתוארים על-ידי סדרה זו, גדולים מהשטחים המתוארים על-ידי הסדרות האחרות?

המשך ←

- (ד) רשמו חוק לפי מקום לכל סדרה.
- (ה) – רשמו סדרת מספרים שתתאר את היקפי המלבנים בכל סדרה.
(עד למלבן השמיני).
- נסו לרשום חוק לכל סדרה.
22. (א) a_1, a_2, a_3 מהווים שלושה איברים של סדרה הנדסית, רשמו משוואה.
(ב) $a_1 - 1, a_2 + 3, a_3$ מהווים שלושה איברים של סדרה חשבונית, רשמו משוואה נוספת.
(ג) פתרו את מערכת המשוואות ומצאו את איברי הסדרה ההנדסית.
23. שלושה מספרים שהראשון בהם 2 מהווים סדרה חשבונית. אם נחסיר מהמספר השני 1 ולמספר השלישי נוסיף 6 נקבל סדרה הנדסית.
רשמו ומצאו את איברי הסדרה החשבונית וההנדסית.
24. בפרק הנדסת המרחב, ספרתם את מספר האלכסונים במנסרות עם בסיסים שונים. (או תספרו כשתלמדו את הפרק).
איילת ספרה בדרך מסוימת ורשמה מתחת לכל מנסרה את מספר אלכסוניה.



- (א) נסו להסביר את דרך הספירה שלה.
- (ב) כמה אלכסונים במנסרה שבסיסה מצולע בעל:
7 צלעות? 8 צלעות? 9 צלעות? 10 צלעות?

בעיות של גידול ודעיכה

1.  תכנית חסכון "המטמון" פרסמה דו"ח. הדו"ח קובע שבשנים האחרונות כל סכום שמושקע בתכנית גדל פי 1.2 בכל שנה. בשנה הראשונה היו לאסף 1000 ש"ח. מה הסכום שיש לו כעת, בשנה העשירית? (הצעה: רשמו את שורת איברי הסדרה).

2.  סכום כסף המושקע בבנק גדל ב- 10% במשך שנה.
 א) סכום של 200 הושקע בבנק. מה יהיה ערכו אחרי שנה?
 ב) **פי כמה** גדל הסכום של 200 ש"ח במשך השנה?
 ג) **פי כמה** יגדל **כל** סכום במשך שנה?
 ד) מה יהיה ערכו של הסכום שהושקע לאחר 5 שנים?

כשנתון אחוז הגידול מוצאים תחילה פי כמה גדל הערך המקורי בכל שנה, כלומר, מוצאים את q .



- בתחילת** השנה הראשונה היה הסכום של משקיע אחר 12,000 ש"ח.
 ה) מה יהיה הסכום שברשותו **בסוף** השנה הראשונה? **ובסוף** השנה השניה?
 ו) מה יהיה הסכום שברשותו **בסוף** השנה העשירית?
 (רשמו את איברי הסדרה בשורה).

3.  א) אחוז הריבוי הטבעי במדינה מסוימת הוא 10%. במדינה זו כיום 3,200,000 תושבים.
 — פי כמה גדלה האוכלוסיה בכל שנה?
 — מה מספר התושבים הצפוי לאחר שנה?
 — מה מספר התושבים הצפוי לאחר שנתיים?
 — מה מספר התושבים הצפוי לאחר 7 שנים?
 ב) אחוז הריבוי הטבעי במדינה אחרת הוא 15%.
 a_0 מייצג את מספר התושבים במדינה זו כיום.
 — פי כמה גדלה האוכלוסיה בכל שנה?
 — רשמו ביטוי למספר התושבים לאחר שנה.
 — רשמו ביטוי למספר התושבים לאחר שנתיים.
 — רשמו ביטוי למספר התושבים לאחר 7 שנים.
 — רשמו ביטוי למספר התושבים לאחר n שנים.

באופן כללי: אם a_0 מייצג כמות מסוימת **בתחילת** התהליך של גידול מעריכי (בו בכל פעם נכפלת הכמות בגורם קבוע), q הוא גורם הגידול ו- a_n הכמות לאחר n פרקי זמן, נקבל כי $a_n = a_0 q^n$

תהליך החישוב והנוסחה שקיבלתם כאן (ובתרגילים הקודמים) דומה לתהליך החישוב ולנוסחת האיבר הכללי בסדרה הנדסית. אך יש לשים לב, שכאן כל איברי הסדרה פרט לנתון עצמו, מתייחסים למספר התושבים **בסוף השנה** בה מדובר, ואילו הנתון מתייחס **לתחילת השנה** הראשונה. בנוסחה מופיעה a_0 הכמות בתחילת השנה ($a_1 = a_0 q$ בסוף השנה הראשונה) לכן בנוסחה מופיע q^n . הבחנה בין a_0 ל- a_1 חיונית גם במקרים רבים אחרים.



4. (Ⓢ) א) מספר המעטפות שממין עובד מתחיל בשעה, בבית דפוס, גדל בכל יום פי 1.5. ביום הראשון מין 64 מעטפות בשעה. כמה ימין ביום החמישי?

ב) כתם נפט אובחן בגודל 64 מ"ר. הכתם גדל פי 1.5 בכל שעה.

— מה יהיה גודל כתם השמן **בסוף** השעה הראשונה?

— מה יהיה גודל כתם השמן **בסוף** השעה השניה?

— מה יהיה גודל כתם השמן **בסוף** השעה החמישית?

ג) במה דומות השאלות בשני הסעיפים ובמה הן שונות?

5. (Ⓢ) ערכה של מכונית יורד בכל שנה ב- 8%. מחיר מכונית חדשה הוא 90,000 ש"ח.

א) מה יהיה ערך המכונית אחרי שנה?

ב) פי כמה קטן ערך המכונית במשך השנה?

ג) פי כמה יקטן ערך המכונית בכל שנה?

ד) מה יהיה ערך המכונית אחרי 6 שנים?

תרגילים

6. מכל חיידק פטגנוס בודד מתקבלים במשך דקה אחת 2 חיידקים.

בתחילת התהליך היו בצלוחית 1000 חיידקים.

א) כמה חיידקים יהיו לאחר 5 דקות?

ב) כמה חיידקים יהיו לאחר 10 דקות?

ג) כמה חיידקים יהיו לאחר שעה?

7. צמח מתפשט ושטחו גדל פי 1.5 במשך חודש.
 בסוף החודש השלישי היה שטחו 18 מ"ר.
 (א) השלימו: ____, 18, ____, ____
 (ב) מה היה שטחו בסוף החודש הראשון?
 (ג) מה היה שטחו בתחילת החודש הראשון?
 (ד) מה יהיה שטחו בסוף החודש ה-12?
8. אדם לקח הלוואה ובכל שנה הקטין את חובו ב-10%. בתחילת השנה הראשונה היה חובו 20,000 ש"ח.
 (א) מה יהיה חובו בסוף השנה הראשונה?
 (ב) פי כמה קטן החוב במשך שנה?
 (ג) כפי שמצאתם בסעיף א', היה חובו בסוף השנה הראשונה 18,000 ש"ח.
 מה יהיה גודל החוב בסוף השנה השלישית.
 (ד) מה יהיה החוב בסוף השנה העשירית.
 (ה) בידקו לאחר כמה שנים יהיה החוב לראשונה קטן מ-10,000 ש"ח.
9. כדי לנקות מי שתייה מוסיפים כלור למים. ככל שהחידקים נמצאים זמן רב יותר במגע עם הכלור נותרים פחות חיידקים.
 במשך דקה נכחדים 26% מהחיידקים שהיו.
 a מייצגת את כמות החיידקים ברגע הזרמת הכלור.
 (א) רשמו ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר דקה.
 (ב) — רשמו ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר 5 דקות.
 — האם, לאחר 5 דקות נותרו יותר או פחות מ-10% מהחיידקים שהיו בתחילה?
 (ג) — רשמו ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר רבע שעה.
 — האם, לאחר רבע שעה, נותרו יותר או פחות מ-1% מהחיידקים שהיו בתחילה?
 (ד) כעבור כמה דקות ישארו לראשונה פחות מחצי אחוז ממספר החיידקים שהיו בתחילה?

הרחבת מושג החזקה ובעיות נוספות של גידול ודעיכה

ומה "לפני האיבר הראשון"?



1. (א) השלימו איברים בסדרה.

3, 9, 27, __, __, __, __, __,

(ב) באיזה מקום נמצא 6561?

(ג) השלימו: $a_{\square} = 729$.

(ד) איזה מספר נמצא במקום העשירי?

(ה) השלימו: $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(ו) האם המספרים הבאים נמצאים בסדרה? אם כן, רשמו באיזה מקום.

אם לא, נמקו.

81, 324522, 1, -81, 297, 729



2. השלימו איברים בכל סדרה.

(א) __, __, __, __, 8, 16, 32, 64, __, __,

(ב) __, __, __, __, 625, 125, 25, 5, __, __,



3. (א) הוסיפו שני איברים לסדרה.

7, 49, 343, __, __

(ב) אם תמשיכו את הסדרה שמאלה, מה יהיה האיבר לפני 7?

(ג) מהו האיבר הקודם לזה שרשמתם בסעיף ב'?

אם קבענו שבסדרה מסוימת $a_1 = 7$, קבענו שאין בסדרה זו איברים לפני 7. יחד עם זאת, ניתן להמשיך את הסדרה שמאלה, כפי שוודאי עשיתם בתרגילים הקודמים. בתרגילים הבאים ננסה לתת משמעות ל"מקום" של איברים אלה.

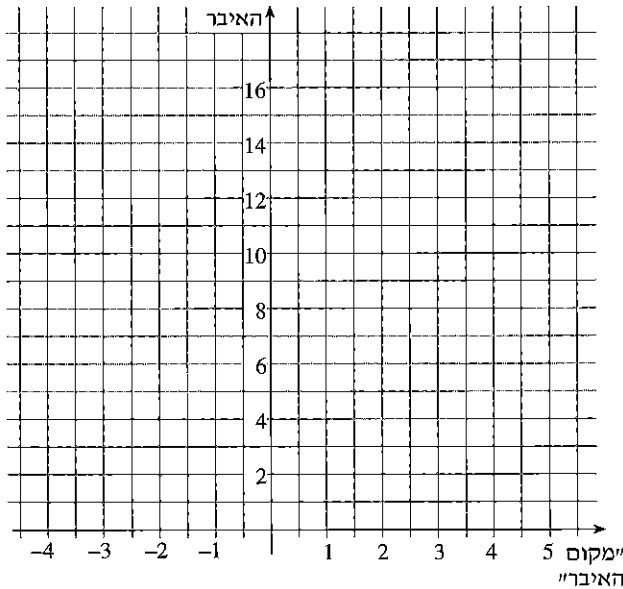


4. (א) השלימו איברים בסדרה.

מקומו של האיבר: 1 2 3 4 5 6

האיבר בסדרה: 2, 4, 8, __, __, __

(ב) סמנו במערכת הצירים את ארבעת האיברים הראשונים.



(ג) — המשיכו את הסדרה שמאלה ואת "מקומם" של האיברים האלה.

המקום: 1, 2, 3, 4, 5, 6, __, __, __, __

האיברים: 2, 4, 8, 16, 32, 64, __, __, __, __

— רשמו את ה"מקומות" גם על ציר x. (משמאל לאפס).

— הוסיפו נקודות מתאימות במערכת הצירים.

עד לתרגיל זה ראיתם גרף של סדרה רק עבור ערכי x שלמים וחיוביים, וזאת מאחר ומקומו של איבר בסדרה נרשם בעזרת מספרים שלמים חיוביים.



(ד) — מה הוא האיבר ב"מקום -3"?

— מה הוא ה"מקום" המתאים ל- $\frac{1}{16}$?

— מה הוא האיבר ב"מקום 0"?

החוק המתאים לסדרה בתרגיל הקודם הוא 2^x . עד כה הכרתם את הגדרת החזקה ככפל של אותו גורם ולכן x בביטוי 2^x היה תמיד שלם וחיובי. מגדירים חזקה גם עבור מעריך שלילי, או אפס, באופן שמתאים להמשך הסדרה שמאלה ולגרף הנקודות ששרטטתם.



5. השלימו.

(א) מקום האיבר: _____ 0 _____ -3 -4

האיבר כחזקה: _____, 2^3 , 2^2 , 2^1 , _____, _____, 2^{-3} , 2^{-4}

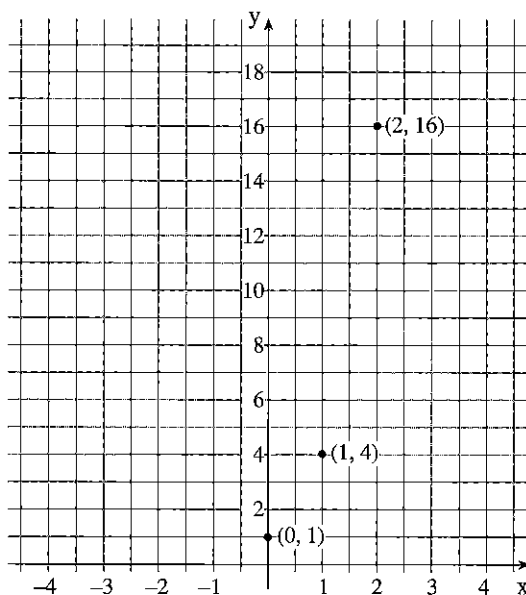
האיבר: _____, _____, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16

(ב) מקום האיבר: _____ 0 _____ -2 _____

האיבר כחזקה: _____, _____, _____, 10^{-1} , _____, _____, _____

האיבר: _____, _____, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000

6. במערכת הצירים שלפניכם מסומנות שלוש נקודות.



(א) ציינו איזה מהחוקים הבאים מתאים לנקודות המסומנות

$$y = 8^x$$

$$y = 4^x$$

$$y = 2^x$$

(ב) מהו האיבר ב"מקום 4"?

מהו האיבר ב"מקום 1"?

מהו האיבר ב"מקום 2"?

מהו האיבר ב"מקום 3"?

(ג) האם, לדעתכם, יכול להיות

בסדרה זו איבר שלילי?

הסבירו.

(ד) האם, לדעתכם, יכול להיות בסדרה זו איבר שערכו 0? הסבירו.

האיבר כחזקה: 5^{-2} , 5^{-1} , 5^0 , 5^1 , 5^2 , 5^3 , 5^4

____, ____, ____, 1, 5, 25, 125 האיבר:

8. בברכה לגידול דגים יש היום 1 טון של דגי קרפיון. בכל שנה גִּדְּלָה כמות הדגים בברכה פי 2.

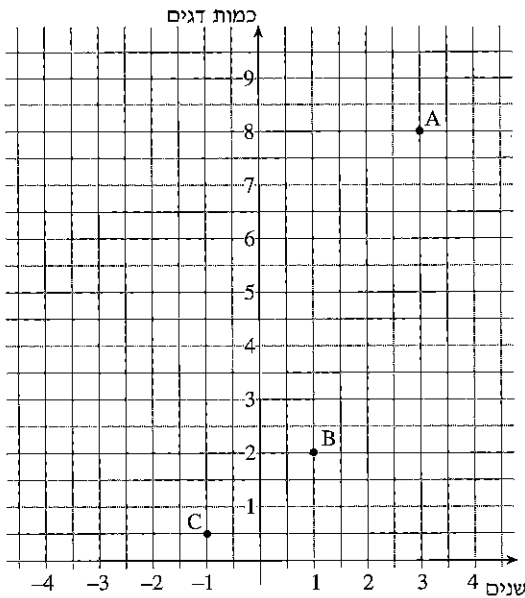
הנקודות בגרף מתארות את תהליך הגידול של הדגים בבריכה.

(א) השלימו: משמעות הנקודה A היא, שלאחר 3 שנים כמות הדגים בבריכה

תהיה _____ טון.

מה המשמעות של

הנקודות B ו-C?



(ב) השלימו את הטבלה:

		-1	0	1			כעבור/ לפני ... שנים
		1/2					משקל הדגים בבריכה (בטונות)

(ג) כתבו אמת או שקר.

- בעוד שנתיים תהיה כמות הדגים פי 2 מהכמות כיום.
- לפני שנה הייתה מחצית מכמות הדגים כיום.
- בעוד שלוש שנים תהיה כמות הדגים פי 8 מהכמות כיום.

9. רשמו כשבר וחשבו את ערך המכנה.

דוגמה: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(א) $4^{-2} =$ (ד) $8^{-1} =$

(ב) $7^{-1} =$ (ה) $12^{-2} =$

(ג) $10^{-2} =$ (ו) $4^{-3} =$

10. (א) נתונה סדרה הנדסית: $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, \dots$

רשמו שני איברים נוספים בכתיב חזקות.

רשמו את איברי החזקה ב"כתיב שברים".

(ב) נתונה סדרה הנדסית: $5^3, 5, 5^{-1}, \dots$

רשמו שני איברים נוספים בכתיב חזקות ו"כתיב שברים".

בסעיף זה ראינו כיצד ניתן להרחיב את פעולת החזקה למעריך אפס ולמעריך שלילי.

עבור כל a חיובי $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

תרגילים

11. חוק של סדרה הוא 3^x .

(א) השלימו.

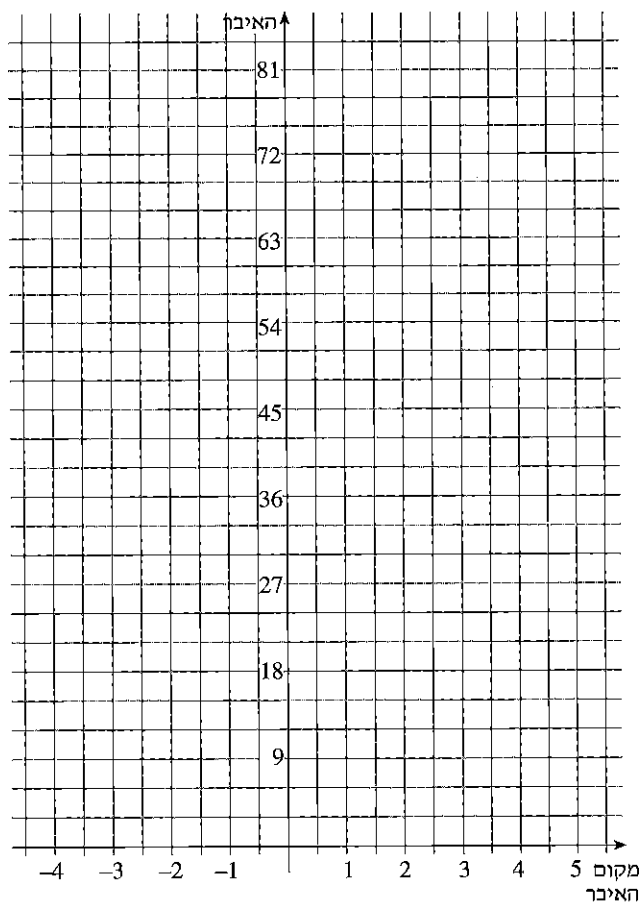
מקום האיבר: $6, 5, 4, 3, 2, 1$ _____

האיבר כחזקה: _____, _____, _____, _____, 9, 3, _____, _____, _____

האיבר: _____, _____, 3^4 , 3^3 , 3^2 , 3^1 , _____, _____, 3^{-2}

המשך ←

ב) סמנו במערכת הצירים את איברי הסדרה ואת מקומם על הציר האופקי.



12. רשמו כשבר וחשבו.

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \quad \text{דוגמה:}$$

$$3^{-2} = \quad (\text{ה}) \qquad 5^{-2} = \quad (\text{ג}) \qquad 6^{-1} = \quad (\text{א})$$

$$3^{-1} = \quad (\text{ו}) \qquad 5^{-3} = \quad (\text{ד}) \qquad 10^{-2} = \quad (\text{ב})$$

13. רשמו כחזקה עם מעריך שלם (חיובי או שלילי).

$$\frac{1}{10^5} = \quad \quad \quad (ד) \quad \quad \quad 125 = \quad \quad \quad (א)$$

$$\frac{1}{216} = \quad \quad \quad (ה) \quad \quad \quad 10,000 = \quad \quad \quad (ב)$$

$$\frac{1}{81} = \quad \quad \quad (ו) \quad \quad \quad \frac{1}{5^3} = \quad \quad \quad (ג)$$

14. השלימו. (פרקו תחילה את המונה והמכנה לגורמים הרשומים מימין לסימן השוויון).

$$\frac{1}{2025} = 3^{\square} \cdot 5^{\square} \quad (ה) \quad \quad \quad 144 = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \quad (א)$$

$$\frac{81}{128} = \frac{3^{\square}}{2^{\square}} \quad (ו) \quad \quad \quad \frac{1}{144} = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \quad (ב)$$

$$\frac{10125}{64} = \frac{3^{\square} \cdot 5^{\square}}{2^{\square}} \quad (ז) \quad \quad \quad 500 = 2^{\square} \cdot 5^{\square} \quad (ג)$$

$$1 = 5^{\square} \quad (ח) \quad \quad \quad \frac{1}{5000} = 2^{\square} \cdot 5^{\square} \quad (ד)$$

15. פתרו. (מצאו את x).

$$2^x = \frac{1}{16} \quad \text{באמצעות:}$$

$$2^x = 2^{-4} \quad x = -4$$

$$3^x = \frac{1}{243} \quad (ו) \quad \quad \quad 2^x = 64 \quad (א)$$

$$6^x = 1 \quad (ז) \quad \quad \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad (ב)$$

$$7^x = \frac{1}{343} \quad (ח) \quad \quad \quad 3^x = 81 \quad (ג)$$

$$10^x = 0.0001 \quad (ט) \quad \quad \quad 4^x = \frac{1}{4} \quad (ד)$$

$$8^x = 1 \quad (י) \quad \quad \quad 5^x = \frac{1}{625} \quad (ה)$$

16. א) $2^{2x} = 16$ מצאו את 2^{-x} .

ב) $3^{2x} = \frac{1}{9}$ מצאו את 3^x ואת 3^{-x} .

ג) $5^{-2x} = 25$ מצאו את 5^{-x} ואת 5^x .

17. א) $3^x = 9$ למה שווה 3^{-x} ? ג) $3^x = \frac{1}{9}$ למה שווה 3^{-x} ?

למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^x$? למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^x$?

למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$? למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$?

ב) $3^x = 2$ למה שווה 3^{-x} ? ד) $3^x = a$ בטאו את 3^{-x} בעזרת a.

למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^x$? בטאו את $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ בעזרת a.

למה שווה $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$? בטאו את $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ בעזרת a.

18. א) כדי לחשב באמצעות מחשבון את 5^{-2} הקישו

5	x^y	2	+/-	=

התאימו למחשבון שלכם.

ב) שער, מה תהיה התוצאה ובידקו בעזרת המחשבון.

(i) $2^{-2} =$ (iv) $0.5^{-1} =$

(ii) $5^{-1} =$ (v) $0.1^{-1} =$

(iii) $\frac{1}{8^{-1}} =$ (vi) $0.2^{-1} =$

ג) פתרו.

(i) $0.1^x = 0.0001$ (iii) $5^x = 0.2$

(ii) $10^x = 0.0001$ (iv) $2^x = 0.5$

חוקי חזקות ומעריך שלם

1. בסעיפים קודמים למדתם את הכלל:

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k} \quad \text{כאשר } m \text{ גדול מ- } k.$$

$$k, m, a \neq 0 \text{ שלמים חיוביים.}$$

רשמו כחזקה.

(א) $\frac{5^{12}}{5^7} =$ (ג) $\frac{a^m}{a^3} =$ ($m > 3$)

(ב) $\frac{10^{12}}{10^6} =$ (ד) $\frac{a^{13}}{a^k} =$ ($k < 13$)

2. נבדוק כעת אם החוק מתקיים עבור m קטן מ- k . השלימו. $a \neq 0$

(א) (i) $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} = a^{\boxed{}}$

(ii) $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{\boxed{}}$

(ב) (i) $\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{} =$

(ii) $\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} =$

(ג) (i) $\frac{a^5}{a^5} = 1$

(ii) $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^{\boxed{}}$

חזקה עם מעריך שלילי או אפס מוגדרת כך שחוקי החזקות עבור מעריך טבעי חלים גם עליה. כלומר, עבור כל m ו- k שלמים מתקיים:

$$a \neq 0 \quad \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}, \quad a^0 = 1$$

אפשר להראות שגם חוקי החזקות האחרים שהכרתם נכונים עבור כל מעריך שלם.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad a^m \cdot a^k = a^{m+k}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (a^m)^k = a^{m \cdot k}$$

3. רשמו כחזקה של 2 או 3 ואחר כך כשבר. 

$$2^5 \cdot 2^{-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{זלזל!}$$

$$\frac{2}{2^{-3}} = \quad (\text{א}) \quad \frac{2^3 \cdot 2^{-1}}{2^8} =$$

$$\frac{2^3 \cdot 3^{-2}}{3^2 \cdot 2} = \quad (\text{ב}) \quad \frac{3^4 \cdot 3^{-2}}{3^2} =$$

תרגילים

4. בטאו כמכפלת חזקות של 3 ושל 5.

$$\frac{225 \cdot 3^6}{3^7 \cdot 81} = \quad (\text{א}) \quad \frac{75 \cdot 125}{27 \cdot 45} =$$

5. רשמו במשבצת סימן מתאים: = או $\neq$.

$$\frac{2^{-3} \cdot 2^6}{2^3} \square 1 \quad (\text{א}) \quad \frac{2^{-3}}{2^3} \square 1$$

$$6^{-3} \square -6^3 \quad (\text{ב}) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \frac{1}{2^3} \square 2^{-3}$$

$$2^{-4} \square \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \quad (\text{ג}) \quad \frac{1}{3^4} \square 3^{-4}$$

6. פשטו. ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$)

$$\frac{(a^2)^{-3}}{a^5} = \quad (\text{א}) \quad \frac{a^5}{a^5} = \quad (\text{ב}) \quad \frac{a^{-3} \cdot a^8}{a^2} = \quad (\text{ג})$$

$$\frac{(ab)^{-2} \cdot a^3}{(b^2)^{-2}} = \quad (\text{ד}) \quad \frac{a^3}{a^{-7}} = \quad (\text{ה}) \quad \frac{a^4 \cdot b^3 \cdot a^{-2}}{a^3 \cdot b^{-2}} = \quad (\text{ו})$$

$$\frac{(ab^2)^{-1} \cdot a^4}{(b^{-1})^2} = \quad (\text{ז}) \quad \frac{a^7}{a^{-7}} = \quad (\text{ח}) \quad \frac{a^2 \cdot c^5 \cdot a^{-3}}{a \cdot c^{-4}} = \quad (\text{ט})$$

7. פתרו את המשוואות.

$$10^x = \frac{1}{10000} \quad (\text{א}) \quad 2^x = \frac{1}{4} \quad (\text{ב})$$

$$10^x = 0.000001 \quad (\text{ג}) \quad 5^x = \frac{1}{125} \quad (\text{ד})$$

$$2^x = \frac{1}{64} \quad (\text{ה}) \quad 3^x = 1 \quad (\text{ו})$$

8. בטאו כמכפלה או כמנה בה אחד הגורמים הוא 2^x .

$$2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x, \quad 2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = \frac{2^x}{4}$$

$$2^{1-x} = \quad (\text{א}) \quad 2^{x-5} = \quad (\text{ב})$$

$$2^{-x+1} = \quad (\text{ג}) \quad 2^{x-3} = \quad (\text{ד})$$

$$4 \cdot 2^{x-2} = \quad (\text{ה}) \quad 2^{x+1} = \quad (\text{ו})$$

11. א) 1, 2, 3, 5, 8 (ב) 0, 2, 5, 9, 14 (ג) 4, 6, 9, 13, 18 (ד) 7, 9, 13, 19, 27
 א) $a_{n+1} = a_n \cdot (n+1)$ (ב) $a_{n+1} = a_n + n + 1$ (ג) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 2$ (ד) $a_1 = 7, a_5 = 82$
 13. א) 98 (ב) 100 (ג) 101 (ד) 102
 14. א) $a_n = a_{n-1} + n$ (ב) $a_n = a_{n-1} - n$ (ג) $a_n = a_{n-1} \cdot n$ (ד) $a_n = a_{n-1} / n$

כללי נסיגה וסדרה לפי מקום (עמודים 95-102)

3. א) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$ (ב) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$
 א) $a_{n+1} = a_n \cdot 2$, $a_1 = 2$ כלל נסיגה: $a_{20} = 1,048,576, a_8 = 256$
 4. א) 18, 16, 14, 12 (ב) 10, 8, 6 (ג) $a_8 = 4, a_{20} = -20$ (ד) $a_{n+1} = a_n - 2$ (ה) $n = 60$
 5. א) 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 (ב) $a_n = n(n+1)$ (ג) $a_n = n(n-1)$ (ד) $a_n = n(n+2)$
 6. א) $a_1 = 8, a_2 = 11, a_3 = 14, a_4 = 17, a_5 = 20$ (ב) $a_1 = 8, a_2 = 11, a_3 = 14, a_4 = 17, a_5 = 20$
 א) תוספת של 3 (ב) $a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 8$ (ג) $a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 8$
 7. א) $a_n = 2.5n$ (ב) $a_n = 2.5n$ (ג) $a_n = 2.5n$ (ד) $a_n = 2.5n$
 8. א) $a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = 24, a_4 = 48, a_5 = 96$ (ב) $a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = 24, a_4 = 48, a_5 = 96$
 א) כפול 2 (ב) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n, a_1 = 6$ (ג) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n, a_1 = 6$
 9. א) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4$ (ב) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4$
 א) $a_n = n - 1$ (ב) $a_{n+1} = a_n + 1, a_1 = 0$ (ג) $a_n = n - 1, a_{n+1} = a_n + 1, a_1 = 0$
 10. א) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 6$ (ב) $a_n = n$ (ג) $a_n = n$
 א) $a_{n+1} = a_n + 1, a_1 = 1$ (ב) $a_{n+1} = a_n + 1, a_1 = 1$

כלל הנסיגה

לפי המקום

- א) 9, 14, 19 (ב) 4, 9, 14, 19
 ב) 2, 4, 8, 16 (ג) 2, 4, 6, 8
 ג) 4, 1, -2, -5 (ד) 4, 1, -2, -5
 12. א) $a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = -5, a_4 = -8, a_5 = -11$ (ב) $a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = -5, a_4 = -8, a_5 = -11$
 א) $a_{n+1} = a_n - 3, a_1 = 1$ (ב) $a_{n+1} = a_n - 3, a_1 = 1$
 13. א) $a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = 18, a_4 = 24, a_5 = 30$ (ב) $a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = 18, a_4 = 24, a_5 = 30$
 א) $a_{n+1} = a_n + 6, a_1 = 6$ (ב) $a_{n+1} = a_n + 6, a_1 = 6$
 14. א) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 6, a_{10} = 90$ (ב) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 6, a_{10} = 90$
 א) $a_{15} = 208, a_{10} = 88, a_2 = 0, a_1 = -2$ (ב) $a_{15} = 208, a_{10} = 88, a_2 = 0, a_1 = -2$
 א) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 6, a_5 = 10, a_6 = 15, a_7 = 21, a_8 = 28$ (ב) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 6, a_5 = 10, a_6 = 15, a_7 = 21, a_8 = 28$
 א) $a_n = n^2$ (ב) $a_n = n^2$ (ג) $a_n = n^2$ (ד) $a_n = n^2$

סדרה חשבונית חזרה ותרגול נוסף (עמודים 103-109)

4. א) $a_{20} = 136, a_{10} = 66$ ב) $a_{20} = 3 + d \cdot 19, a_{10} = 3 + d \cdot 9$ ג) $a_n = 12 - 3(n - 1)$ ד) $a_n = -3n + 15$
5. א) $a_n = 3 + 10(n - 1)$ ב) $a_n = -2 + 8(n - 1)$ ג) $a_n = 8n - 10$ ד) $a_n = 10n - 7$
6. הכללים בסעיפים ב, ד, ה, מתאימים לסדרות חשבוניות
7. א) $a_4 = a_1 + 3d, a_3 = a_1 + 2d, a_2 = a_1 + d$ ב) $a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d, a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d, a_1 + a_2 = 2a_1 + d$ ג) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 + 6d$
8. א) סדרה יורדת ב) 5, 4, 3 ג) $a_1 + a_2 = 2a_1 + d = 9$ ד) 2, 4, 6, 8, 10
9. (ii) א) 1, 4, 9, 16, 25 ב) 3, 1, -1, -3, -5 ג) 2, 4, 8, 16, 32 ד) 2, 4, 6, 8, 10
- ה) 0, -1, -2, -3 ו) 3, 7, 11, 15, 19
10. א) $a_{n+1} = 61, a_n = 64$ ב) $a_{n+1} = 59, a_n = 56$ ג) $a_{n+1} = 62, a_n = 68$ ד) $a_{n+1} = 64, a_n = 61$
11. א) $a_2 + a_5 = 2a_1 + 5d = 80, a_5 = a_1 + 4d, a_2 = a_1 + d$ ב) $d = 7, a_1 = 22.5$ ג) $a_6 + a_7 = 2a_1 + 11d = 122, a_7 = a_1 + 6d, a_6 = a_1 + 5d$
12. לראשונה זמן בלימה של 9 שניות, לשנייה זמן בלימה של 8 שניות.
13. א) -2 ב) 13 ג) 2
16. א) a_4 ב) a_5 ג) $a_4 + a_5$ ד) a_5 ה) S_9 ו) a_{13}
17. א) $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ב) $S_9 = S_6 + a_7 + a_8 + a_9$ ג) $S_1 = a_1$ ד) $S_2 = a_1 + a_2$
18. א) $S_{10} = 60, a_{10} = -3$ ב) $S_{100} = -8400, a_{100} = -183$ ג) $S_{40} = -960$
19. א) 850 ש"ח ב) 6900 ש"ח ג) 3100 ש"ח
20. $d = 2, a_{10} = 21$
21. א) בשורה חמישית 82 מקומות, בשורה עשירית 122 מקומות ב) $a_{40} = 362, S_{40} = 8240$
- ד) a_n - מס' מקומות בשורה n, S_n - מס' מקומות עד שורה n (כולל)
22. א) 8 שניות ב) 112 מ' ג) כן, 8 מ'
23. א) 2160 ש"ח ב) 10 ש"ח
24. א) $x = y$ ב) $x = 5$ ג) אין x כזה ד) $x = 1, x = 0$
25. 4, 67, 130, 193, 256 הסכום 650
26. $a_{30} = -48, d = -4$

a_1	d	n	a_n	S_n	27.
20	-2	12	-2	108	(א)
-18	3	7	0	-63	(ב)
4	2	9	20	108	(ג)
1.5	0.5	15	8.5	75	(ד)
2.5	2.5	3	7.5	15	(ה)
13	3	10	40	265	(ו)
20	-4	8	-8	48	(ז)
12	10	6	62	222	(ח)
100	-15	9	-20	360	(ט)

28. (א) $a, a+d$, (ב) $a-d$, (ג) $3a$, (ד) a

29. (ג) האיבר האמצעי (החמישי)

30. (א) האיבר האמצעי (הרביעי) (ב) נסמן את האיבר האמצעי ב- x : אז: סכום הסדרה $= 3.5x$

31. (א) $\frac{S_4}{4}$ (ג) $a_2 + a_3$

תרגול נוסף בנושאים כלל נסיגה וכלל לפי מקום (עמודים 110-115)

1. $a_{27} = -184$, $a_{10} = -65$ (ב) לא, כל איברי הסדרה הם מספרים שליליים (ג) $n = 15$

(ד) לא, כי 1005 לא מתחלק ב-7

2. $a_{10} = 147$, $a_4 = 9$, $a_1 = -6$ (ב) $n = 16$

3. (א) -8.5 , -3 , 2.5 (ב) $n = 6$

4. $f(x)$ - הישר, $g(x)$ - הפרבולה, $h(x)$ - הגרף המקווקו (ב) (ii) בסדרה השנייה: $a_3 = 0$

5. (א) $n = 22$ (ב) מ-23 n

6. (א) $-7, -5, -1, 5, 13, 23$ (ב) הפרשים $d_1 = 2$, $d_{n+1} = 2(n+1)$

(ג) במקום ה-53 ובמקום ה-54 (ד) לא. ההפרש: 2, 4, 6, 8, 10 הוא תמיד זוגי

7. (א) $3, 6, 18, 72, 360$ (ב) 5 (ג) 9 (ד) $n = 22$

8. (א) $a_1 = 3$, $a_2 = -2$, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}$ (ב) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = a_n \cdot n$

(ג) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$

9. (א) - (ii) (ב) - (iii) (ג) - (i) (ד) - (iv)

10. (א) $a_3 = 18$, $a_2 = 6$ (ב) $x = -4$

11. (א) $a_8 = 48$, $a_7 = 35$, $a_6 = 24$ (ב) $x = -2$

12. (א) $S_3 = a_3 + S_2$ (ב) $S_3 = S_4 - a_4$ (ג) נכון (ד) $S_3 = S_2 + a_3$ (ה) נכון (ו) $a_4 = S_4 - S_3$

13. (א) $a_1 = -1$ (ב) $S_4 = 20$ (ג) $S_5 = 31$, $a_5 = 11$

14. (א) $n = 161$ (ב) לא, בסדרה רק מספרים אי-זוגיים

15. א) $a_{10} = -30$, $a_{12} = -24$ ב) $n = 16$ ג) $n = 20$
 16. $f(x) - g(x)$ (ii) ג) $f(6) = a_6 = g(6) = 21$, $a_6 = g(6) = 21$ ו) $g(9) = 0$ וז) $n = 9$
 ה) אין איבר משותף (נקודת החיתוך אינה מתקבלת עבור מספר שלם)

17. א) $\frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ ב) $a_{10} = \frac{1}{110}$, $a_{21} = \frac{1}{462}$

18. א) 2, 4, 12, 28 ב) $x = -28$

19. א) $\frac{1}{120}, \frac{1}{24}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 1$ ב) פי 5 ג) $n = 7$

20. א) $a_1 = 98$ ב) $S_2 = 72$, $a_2 = -26$ ג) $a_3 = -22$, $a_4 = -18$ ד) $S_5 = 18$

מחזקות לסדרה הנדסית ולתופעות של גידול ודעיכה

חזקות עם מעריך טבעי (עמודים 118-122)

3. א) 4^7 ב) 5^4 ג) 7^5 ד) 10^6 ה) 2.5^4 ו) 1.1^4
 4. א) $10^2 < 725 < 10^3$ ב) $5^4 < 250 < 5^5$ ג) $3^6 < 250 < 3^5$ ד) $10^3 < 250 < 10^2$
 5. א) 5^3 ב) 3^5 ג) 10^2 ד) 8^1 ה) למשל: $4^2 = 2^4$
 9. א) $3^{10} = 3 \cdot 3^7 \cdot 3^2$ ב) $a \cdot a^8 = a^9$ ג) $6^9 = 6^4 \cdot 6^5$ ד) $\frac{5^3}{5^2} = 5^1$ ה) $\frac{a^4}{a} = a^3$

$$\frac{8^6}{8^2} = 8^4$$

10. א) $2^3 \cdot 5^2$ ב) $3 \cdot 5^3$ ג) 5^4 ד) $2^3 \cdot 3^4$ ה) $3^3 \cdot 5^2$ ו) $2^4 \cdot 5^3$ ז) $3^4 \cdot 5^3$

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

11. א) 4 ב) 6 ג) 4

12. א) $10^4 < 1250 < 10^3$ ב) $10^4 < 15,200 < 10^5$ ג) $10^2 < 750 < 10^3$

ד) $10^5 < 150,000 < 10^6$

13. א) a^8 ב) 2^{14} ג) 3^{14} ד) 7^{20} ה) 8^{n+7} ו) 12^{n+k} ז) $6^{12} = 6^7 \cdot 6^5$ ח) $a^{15} = a^2 \cdot a^5 \cdot a^8$

14. א) 5^{13} ב) 2^{11} ג) 4^6 ד) a^8 ה) 6^6 ו) x^9 ז) 7^4 ח) x

15. א) $9 = 3^2$, $81 = 3^4$, $729 = 3^6$, $19683 = 3^9$

ב) $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $16 = 2^4$, $64 = 2^6$, $4096 = 2^{12}$, $128 = 2^7$, $16384 = 2^{14}$

16. א) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ב) $432 = 2^4 \cdot 3^3$ ג) $225 = 3^2 \cdot 5^2$ ד) $5000 = 2^3 \cdot 5^4$

ה) $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ ו) $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

17. א) 256 ב) 2.13 ג) 625 ד) 30.16 ה) 100 ו) 16

עוד על חוקי חזקות (עמודים 123-126)

2. א) 2^{15} ב) 4^{10} ג) 8^{15} ד) a^{4m} ה) a^{4m} ו) a^{24}

3. א) היקף הריבוע: $4a$, שטח הריבוע: a^2

ב) שטח הריבוע המוגדל: $9a^2$, היקף הריבוע המוגדל: $12a$

5. א) a^6b^6 ב) $27a^6b^3$ ג) $\frac{64b^3}{a^3}$ ד) $\frac{256x^4}{y^4}$ ה) $a^4 + 6a^2b + 9b^2$

ו) $4x^4 + 12x^2y^3 + 9y^6$

6. א) 15^2 ב) 1 ג) 7^{15} ד) 8^{10}

7. א) $\frac{5^2 \cdot 5^{16}}{5^9} > 5^2$ ב) $\frac{7^3 \cdot (7^2)^6}{7^5} > 7^3$ ג) $\frac{6^{13} \cdot 6^8}{(6^5)^4} = 6$ ד) $\frac{5^{14} \cdot 5^2}{5^8} = 5^8$

ה) $\frac{8^2 \cdot 8^3 \cdot 8^4}{(8^3)^3} = 1$ ו) $(10^4)^2 \cdot (10^6)^2 > 10^{18}$

8. א) 3^5 ב) 2^6 ג) 4^3 ד) 8^2 $64 = 8^2 = 4^3 = 2^6$

9. א) $\frac{1}{9b^2}$ ב) $\frac{16b^8}{625}$ ג) $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$ ד) $\frac{20^4}{a^4}$ ה) $\frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$ ו) $4x^6y^2 - 4x^3yb + b^2$

10. א) ב)

$\frac{a^3}{2}$	$512a$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2$
$2a$	$(2a)^2$	$(2a)^3$
$64a^2$	$\frac{a^3}{32}$	$32a$

$\frac{a^5}{b^7}$	b^2	$\frac{a}{b}$
$\frac{b^4}{a^2}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^2$	$\frac{a^6}{b^8}$
$\frac{a^3}{b^3}$	$\frac{a^4}{b^6}$	$\frac{b^3}{a}$

מספרים גדולים במחשבון וכתוב מדעי של מספרים גדולים (עמודים 127-132)

9. א) $10^{12} = 1.12$ ב) $10^{18} = 1.18$ ג) $10^{19} = 1.19$ ד) $10^{32} = 1.32$ ה) $10^{16} = 1.16$

ו) $10^5 = 100,000$ ז) $10^8 = 100,000,000$ ח) $10^{10} = 1.10$ ט) $10^{16} = 1.16$

י) $10^{17} = 1.17$

10. א) 2700 ב) 1,256,000 ג) 500

11. א) $2 \cdot 10^{11}$ ב) $0.056 \cdot 10^9$

12. א) לא שווה ב) שווה ג) שווה ד) לא שווה

17. א) $2.56 \cdot 10^{15}$ ב) $2 \cdot 10^{12}$ ג) $5 \cdot 10^4$ ד) $8 \cdot 10^3$ ה) $3.2 \cdot 10^{11}$ ו) 6 ז) $1.2 \cdot 10^{13}$

ח) $4 \cdot 10^2 = 400$

18. א) $3 \cdot 10^8$ ב) $1.01 \cdot 10^5$ ג) $4.1 \cdot 10^7$ ד) $1.8 \cdot 10^{11}$

ה) שטח: $9.9 \cdot 10^6$, מספר התושבים: $1 \cdot 10^9$

סדרה הנדסית (עמודים 133-139)

2. (א) סדרה הנדסית, $q = 4$ (ב) לא הנדסית (ג) סדרה הנדסית, $q = -2$
- (ד) סדרה הנדסית, $q = 10$ (ה) לא הנדסית (ו) סדרה הנדסית, $q = 5$ (ז) סדרה הנדסית, $q = \frac{1}{2}$
3. (א) 2, 20, 200, 2000, 20000, 200000 (ב) 3, 6, 12, 24, 48, 96
- (ג) 0.25, 2.5, 25, 250, 2500, 25000 (ד) 3, 12, 48, 192, 768, 3072
4. (א) 2, 4, 8 (ב) 2, 5, 8 (ג) 1, 4, 16, 64 (ד) 1, 22, 43, 64
5. (א) 1, 2, 4, 8, 16, 32 (ב) $1\frac{1}{2}$, 3, 6, 12, 24, 48
7. (א) $S_6 = 364$, $a_6 = 243$ (ב) $S_6 = -364$, $a_6 = -486$ (ג) $S_6 = 682.5$, $a_6 = 512$
- (ד) $S_6 = 1213\frac{1}{3}$, $a_6 = 810$
10. $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$
11. (א) $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 18$ (ב) $S_3 = 26$, $S_5 = 242$
12. $a_1 = 162$, $a_2 = 54$, $a_3 = 18$, $a_4 = 6$
13. (א) $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$, $a_4 = 21$ (ב) $S_6 = 189$
14. (א) הנדסית (ב) חשבונית (ג) הנדסית (ד) אחרת (ה) הנדסית
15. (א) (i) 2, 10, 50 (ii) -2, 10, -50 (iii) 3, 9, 27, 81 (iv) 1, 10, 100, 1000
- (ב) (i) 2, 26, 50 (ii) -2, -26, -50 (iii) 3, 29, 55, 81 (iv) 1, 334, 667, 1000
16. (א) $a_8 = -32,768$, $a_9 = -131,072$ (ב) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187
17. $a_1 = 2$, $a_4 = 250$, $q = 5$
18. במקום השמיני
19. (א) $a_5 = -4802$ (ב) לא
20. (א) $q = \frac{1}{2}$, $a_2 = 10$, $a_3 = 5$ (ב) במקום השישי
21. (א) 1296, 1728, 2304, 3072, 4096 (ב) כעבור שנה: 1728 מ"ר, כעבור 4 שנים: 729 מ"ר
- (ג) 3072 מ"ר (ד) 4096 מ"ר (ה) לא
22. 64, 32, 16, 8, 4, ... או 64, -32, 16, -8, 4, ...
23. $S_6 = 252$, $S_3 = 288$
24. $q = 2$, הסדרה: 4, 8, 16, ... או $q = -0.4$, הסדרה: 20, -8, 3.2, ...
25. (א) 6, 36, 216 (ב) 2, 8, 32 (ג) $\frac{1}{2}$, 3, 18, (ד) 4, 8, 16

סדרות חשבוניות והנדסיות בצורת (עמודים 140-146)

2. א) $a_{n+1} = a_n \cdot 4$, $a_1 = 10$ כלל הנסיגה: 10, 40, 160, 640, ...
 או $a_{n+1} = a_n \cdot (-4)$, $a_1 = 10$ כלל הנסיגה: 10, -40, 160, -640, ...

ב) $a_{n+1} = a_n \cdot 0.5$, $a_1 = 12$ כלל הנסיגה: 12, 6, 3, 1.5, ...

או $a_{n+1} = a_n \cdot (-1.5)$, $a_1 = 12$ כלל הנסיגה: 12, -6, 3, -1.5, ...

ג) $a_{n+1} = a_n \cdot (-1.5)$, $a_1 = 2$ כלל הנסיגה: 2, -3, 4.5, -6.75, ...

ד) $a_{n+1} = a_n \cdot 6$, $a_1 = 6$ כלל הנסיגה: 6, 36, 216, 1296, ...

3. א) $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = 2$ כלל הנסיגה: 2, 5, 8, 11, ...

ב) $a_{n+1} = a_n - 5$, $a_1 = 12$ כלל הנסיגה: 12, 7, 2, -3, ...

ג) $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = 4$ כלל הנסיגה: 4, 7, 10, 13, ...

6. א) $a_{10} = a_1 \cdot q^9$, $a_{100} = a_1 \cdot q^{99}$, $a_{51} = a_1 \cdot q^{50}$, $a_7 = a_1 \cdot q^6$

ב) $q = 7$, $a_{100} = a_1 \cdot 7^{99}$, $a_5 = a_1 \cdot 7^4$

7. $a_{72} = a_1 + 71d$, $a_{10} = a_1 + 9d$, $a_7 = a_1 + 6d$

9. א) $a_{101} = a_1 + 100d$, $a_5 = a_1 + 4d$ ב) $a_9 = a_1 \cdot q^8$, $a_{13} = a_1 \cdot q^{12}$

10. א) $a_5 = 768$ ב) $a_5 = 19$

11. א) במקום החמישי ב) במקום ה-76

15. יש להוריד 2, האיברים: 4, 8, 16

16. א) $\frac{12}{y} = \frac{y}{x}$ ב) $x - y = y - 9$ ג) הסדרה ההנדסית: 3, 6, 12 והחשבונית: 3, 6, 9

או: הסדרה ההנדסית: 12, 18, 27 והחשבונית: 12, 18, 27

17. א) $a_{n+1} = a_n + 10$ $a_1 = 4$ ב) $a_{10} = 94$, $d = 10$

18. א) $q = 4$ ב) 3, 12, 48, 192, ...

19. א) $a_5 = 13$ (i), $a_5 = 768$ (ii), $a_5 = 19$ (iii) ב) סדרה (ii) הנדסית, $a_6 = 3072$

ג) סדרה (iii) חשבונית, $a_{20} = 79$

20. $a_{10} = 3 \cdot 4^9$, $a_1 = 3$

21. א) (i) 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ... (ii) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

(iii) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

ה) (i) $a_n = 8 \cdot n$ (ii) $a_n = n^2$ (iii) $a_n = 2^{n-1}$

(i) $a_n = 16 + 2n$ החוק: 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, ...

(ii) $a_n = 4 \cdot n$ החוק: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...

(iii) $a_n = 2^{n+1} + 1$ החוק: 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513, ...

22. א) $\frac{a_2}{7} = \frac{a_3}{a_2}$ ב) $a_2 + 3 - 7 = a_3 - 1 - (a_2 + 3)$ ג) 7, 14, 28

23. אפשרות א': הסדרה החשבונית: 2, 7, 12, הסדרה ההנדסית: 2, 6, 18
אפשרות ב': הסדרה החשבונית: -4, -1, 2, הסדרה ההנדסית: 2, -2, 2

בעיות של גידול ודעיכה (עמודים 147-149)

6. א) 32,000 חיידקים ב) 1,024,000 חיידקים ג) $1000 \cdot 2^{60}$
7. א) 8, 12, 18, 27 ב) 8 מ"ר ג) $5\frac{1}{3}$ מ"ר ד) $5\frac{1}{3} \cdot 1.5^{12}$
8. א) 18,000 ש"ח ב) פי 0.9 ג) 14,580 ש"ח ד) $20,000 \cdot 0.9^{10}$ ה) לאחר 7 שנים
9. א) $a \cdot 0.74$ ב) לאחר 5 דקות נותרו $a \cdot 0.74^5$ חיידקים, יותר מ-10% ג) $a \cdot 0.74^{15}$ קצר יותר מ-1% ד) כעבור 18 דקות

הרחבת מושג החזקה ובעיות נסופות של גידול ודעיכה

ומה "לפני האיבר הראשון"? (עמודים 150-157)

1. א) $a_5 = 729$ ב) במקום השמיני ג) $a_5 = 729$ ד) $a_{10} = 59049$ ה) $a_5 = 243$ ו) האיברים בסדרה: 729 במקום השישי, 81 במקום הרביעי

2. א) $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$

ב) $390625, 78125, 15625, 3125, 625, 125, 25, 5, 1, \frac{1}{5}$

6. א) $y = 4^x$ ב) במקום הרביעי: 4^4 , במקום $-1 = 4^{-1} = \frac{1}{4}$, במקום $-2 = 4^{-2} = \frac{1}{16}$,

במקום $-3 = 4^{-3} = \frac{1}{64}$ ג) לא ד) לא

9. א) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ ב) $7^{-1} = \frac{1}{7}$ ג) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ ד) $8^{-1} = \frac{1}{8}$

ה) $12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$ ו) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

10. א) $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}$ ב) $5^3, 5^1, 5^{-1}, 5^{-3}, 5^{-5}, \dots$

12. א) $6^{-1} = \frac{1}{6}$ ב) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ ג) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ ד) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

ה) $3^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ ו) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

13. א) 5^3 ב) 10^4 ג) 5^{-3} ד) 10^{-5} ה) 6^{-3} ו) 3^{-4} (או 9^{-2})

$$\frac{1}{5000} = 2^{-3} \cdot 5^{-4} \quad (\tau) \quad 500 = 2^2 \cdot 5^3 \quad (\lambda) \quad \frac{1}{144} = 2^{-4} \cdot 3^{-2} \quad (\beta) \quad 144 = 2^4 \cdot 3^2 \quad (\alpha) \quad 14$$

$$1 = 5^0 \quad (\eta) \quad \frac{10125}{64} = \frac{3^4 \cdot 5^3}{2^6} \quad (\iota) \quad \frac{81}{128} = \frac{3^4}{2^7} \quad (\omicron) \quad \frac{1}{2025} = 3^{-4} \cdot 5^{-2} \quad (\kappa)$$

$$x = -3 \quad (\eta) \quad x = 0 \quad (\iota) \quad x = -5 \quad (\iota) \quad x = -4 \quad (\eta) \quad x = -1 \quad (\tau) \quad x = 4 \quad (\lambda) \quad x = -1 \quad (\beta) \quad x = 6 \quad (\alpha) \quad 15$$

$$x = 0 \quad (\iota) \quad x = -4 \quad (\beta)$$

$$5^x = \frac{1}{5}, \quad 5^{-x} = 5 \quad (\lambda) \quad 3^{-x} = 3, \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad (\beta) \quad 2^{-x} = \frac{1}{4} \quad (\alpha) \quad 16$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 2, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{2}, \quad 3^{-x} = \frac{1}{2} \quad (\beta) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 9, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}, \quad 3^{-x} = \frac{1}{9} \quad (\alpha) \quad 17$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = a, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{a}, \quad 3^{-x} = \frac{1}{a} \quad (\tau) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9, \quad 3^{-x} = 9 \quad (\lambda)$$

$$x = -1 \quad (\text{iv}) \quad x = -1 \quad (\text{iii}) \quad x = -4 \quad (\text{ii}) \quad x = 4 \quad (\text{i}) \quad \lambda \quad 18$$

חוקי חזקות ומעריך שלם (עמודים 158-161)

$$\frac{2^2}{3^4} = \frac{4}{81} \quad (\tau) \quad 2^4 = 16 \quad (\lambda) \quad 3^0 = 1 \quad (\beta) \quad \frac{1}{2^6} = 2^{-6} \quad (\alpha) \quad 3$$

$$\frac{5^2}{3^3} \quad (\beta) \quad \frac{5^4}{3^4} \quad (\alpha) \quad 4$$

$$5 \quad (\alpha) \quad \text{לא שווה} \quad (\beta) \quad \text{שווה, שווה} \quad (\gamma) \quad \text{שווה} \quad (\delta) \quad \text{שווה} \quad (\epsilon) \quad \text{לא שווה} \quad (\zeta) \quad \text{שווה}$$

$$a^3 \quad (\beta) \quad ab^2 \quad (\eta) \quad \frac{1}{a^{11}} \quad (\iota) \quad a^{14} \quad (\iota) \quad a^{10} \quad (\eta) \quad 1 \quad (\tau) \quad \frac{c^9}{a^2} \quad (\lambda) \quad \frac{b^5}{a} \quad (\beta) \quad a^3 \quad (\alpha) \quad 6$$

$$x = -6 \quad (\iota) \quad x = -6 \quad (\eta) \quad x = -4 \quad (\tau) \quad x = 0 \quad (\lambda) \quad x = -3 \quad (\beta) \quad x = -2 \quad (\alpha) \quad 7$$

$$\frac{4 \cdot 2^x}{4} = 2^x \quad (\iota) \quad \frac{2}{2^x} \quad (\eta) \quad \frac{2}{2^x} \quad (\tau) \quad 2^x \cdot 2 \quad (\lambda) \quad \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} \quad (\beta) \quad \frac{2^x}{2^5} = \frac{2^x}{32} \quad (\alpha) \quad 8$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad (\iota) \quad x = 1 \quad (\eta) \quad x = 2 \quad (\tau) \quad x = 3 \quad (\lambda) \quad x = 1 \quad (\beta) \quad x = 5 \quad (\alpha) \quad 9$$

$$x = 0 \quad (\iota) \quad x = -1 \quad (\eta) \quad x = 2 \quad (\tau) \quad x = 4.5 \quad (\lambda) \quad x = 1 \quad (\beta) \quad x = 2.5 \quad (\alpha) \quad 10$$

$$5^{3x} = \frac{1}{8}, \quad 5^x = \frac{1}{2} \quad (\beta) \quad 4^{-2x} = \frac{1}{49} \quad 4^{2x} = 49 \quad (\alpha) \quad 11$$

$$4^{2x} = b^4, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{b^2}, \quad 2^{-x} = \frac{1}{b} \quad 4^x = b^2 \quad (\lambda)$$

כתיב מדעי של מספרים "קטנטנים" (עמודים 162-165)

12. (i) א שווה ב) > ג) < (ii) א) < ב) < ג) >

מעריך חזקה לא שלם (עמודים 166-175)

2 א) (0, 1), לפונקציה אין נקודת קיצון, הפונקציה עולה בכל התחום

$$4^{-4.5} = 0.001953125, 4^{-4} = 0.00390625, 4^{-3} = 0.015625$$

8 א) לפונקציה $y = 10^x$ מתאים גרף (א), לפונקציה $y = 0.1^x$ מתאים גרף (ב).

ב) (0, 1) ג) A(1, 10), B(-1, 10) ד) שיקוף בציר y

$$11. \text{א) } \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 \quad \text{ב) } \left(\frac{1}{3}\right)^1 \neq 3 \quad \text{ג) } \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \neq 5^{-2} \quad \text{ד) } 5^{-2} \neq (-5)^2 \quad \text{ה) } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2$$

$$\text{ו) } 5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

12. א) x = 4 ב) x = -5 ג) x = 1 ד) x = -0.5 ה) x = 0 ו) x = -5 ז) x = 2 ח) x = 2

גידול ודעיכה וזמן מחצית החיים (עמודים 176-179)

1. א) 48,000 שיח ב) 30,720 שיח ג) 27,477 שיח ד) 11,900 שיח בקירוב

3. א) q = 1.1 ב) q = 1.93 ג) q = 2.08

5. א) פי 1.05 ב) $10,000,000 \cdot 1.05^n = 2,500,000$ ג) n = 28.4 בקירוב

6 א) 400 מ"ג ב) פי 0.8 ג) $500 \cdot 0.8^n$ ד) כעבור 8 שעות ה) A(0, 500) בנקודות C, B

ו) D- החולה מקבל מנה נוספת של תרופה, המספרים על ציר האופקי: 8, 16, 24

7. א) 40 גרם ב) פי 0.8 ג) 32 גרם ד) 5.37 גרם בקירוב ה) לאחר 3 שנים

8. א) 34 שנים ב) 68 שנים ג) 23 שנים ד) של חומר א' - 34 שנים, של חומר ב' - 23 שנים

9. א) פי 0.955 ב) ב- 4.5% בערך ג) 63.1 גרם בערך

10. א) פי 0.917 ב) ב- 8.3% בערך

11. אחרי 28 חודשים שהם 2 שנים ו- 4 חודשים

12. א) פי 0.966 ב) 20 שעות

13. אחרי 5 שעות (כל שעה הכמות קטנה פי 0.76)

מה פירוש ב"חזקת חצי" (עמודים 180-186)

3. א) 8 ב) 0.5 ג) 31.6 בקירוב ד) 2.86 בקירוב

$$4 \quad 3^1 = 9^{0.5} \quad 27^{0.5} = \sqrt{27} \quad 3^2 = \sqrt{3} \quad \frac{1}{9} = \sqrt{81}$$

$$x^{0.5} \quad \text{א) } 1000^{0.5} \quad \text{ב) } 121^{0.5} \quad \text{ג) } 256^{0.5} \quad \text{ד) } x^{0.5}$$

$$5 \quad \text{א) } 5 \quad \text{ב) } 6 \quad \text{ג) } 5$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{א) } x = \frac{1}{2} \quad \text{ב) } x = -\frac{1}{2} \quad \text{ג) } x = -\frac{1}{2} \quad \text{ד) } x = \frac{1}{2}$$

$$12 \quad \text{א) } 8 \quad \text{ב) } 13 \quad \text{ג) } 12 \quad \text{ד) } 2.5 \quad \text{ה) } 13 \quad \text{ו) } 12$$

$$11. \quad \text{א) שווה ב) שווה ג) שווה ד) לא שווה ה) שווה ו) לא שווה ז) שווה ח) שווה ט) שווה}$$

$$12. \quad \text{א) } 16 \quad \text{ב) } 9 \quad \text{ג) } 256 \quad \text{ד) } 4 \quad \text{ה) } 2 \quad \text{ו) } 81$$

$$13. \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{א) } \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ב) } \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ג) } 2^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ד) } 2^1 \quad \text{ה) } \frac{1}{2} \quad \text{ו) } \frac{1}{3^2} \quad \text{ז) } 3^{-2} \quad \text{ח) } \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ט) } 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$14. \quad -\frac{1}{2} \quad \text{א) } \frac{1}{2} \quad \text{ב) } -\frac{1}{2} \quad \text{ג) } \frac{1}{2} \quad \text{ד) } -\frac{1}{2} \quad \text{ה) } \frac{1}{2} \quad \text{ו) } -\frac{1}{2}$$

$$15. \quad \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{256} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16} \quad \sqrt{2^x} = 4 \quad 2^{-x} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{3^2}^x = \sqrt{a} \quad \sqrt{3^x} = \sqrt{a} \quad 3^{-x} = \frac{1}{a}$$

$$2^x = \sqrt{a} \quad 4^{-x} = \frac{1}{a} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{a}$$

$$16. \quad 5^x \cdot 5^{\frac{1}{2}} \quad \text{א) } 5^x \cdot \sqrt{5} \quad \text{ב) } \frac{\sqrt{5}}{5^x} \quad \text{ג) } \frac{5^x}{\sqrt{5}} \quad \text{ד) } \frac{5^2}{5^x} \quad \text{ה) } 5^x \cdot 5^2$$

$$17. \quad x = 2 \quad \text{א) } x = 1 \quad \text{ב) } x = 2 \quad \text{ג) } x = 0 \quad \text{ד) } x = 1 \quad \text{ה) } x = -1 \quad \text{ו) } x = 2$$

$$19. \quad 8^{-x} = \frac{1}{a^3} = a^{-3}, \quad \sqrt{2^x} = \sqrt{a} \quad \text{א) } 3^{-1.5x} = \frac{1}{64}, \quad \frac{1}{\sqrt{3^x}} = \frac{1}{4}$$

$$625^x = \frac{1}{a^4} = a^{-4}, \quad 125^{-x} = a^3$$

$$20. \quad x = 5 \quad \text{א) } x = 4 \quad \text{ב) } x = -0.5 \quad \text{ג) } x = 1 \quad \text{ד) } x = 2 \quad \text{ה) } x = 0 \quad \text{ו) } x = -1 \quad \text{ז) } x = 5$$

סכום של סדרה הנדסית (עמודים 187-189)

$$3. \quad \text{א) } 4092 \quad \text{ב) } 147,620 \quad \text{ג) } 2,441,406 \quad \text{ד) } 59,048$$

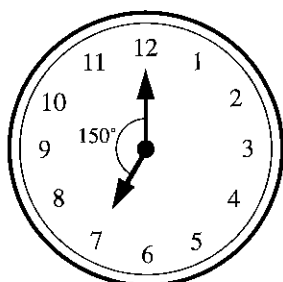
$$4. \quad \text{א) } 189 \quad \text{ב) } 3069 \quad \text{ג) } 15.75 \quad \text{ד) } 5$$

6. א) 1036.8 ש"ח ב) 3720.8 ש"ח
 7. א) 0.512 מטר (512 ס"מ) ב) 3904 מ"
 8 א) 21,845 ב) 1640 ג) 3280 ד) 2040
 9. 15,624 א) $S_6 = 105$, $S_7 = -215$
 11. א) 156 ב) 97,656 12. 62 מ"ק 13. מנת הסדרה: 3

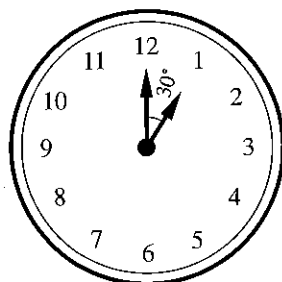
פרק ג: הפונקציות הטריגונומטריות ויישומיהן במישור

הפונקציות הטריגונומטריות והקשרים ביניהן פונקציות מחזוריות

1. מתחת לשני השעונים רשומה הזווית שנוצרה בין המחוגים (בשעה שלמה).

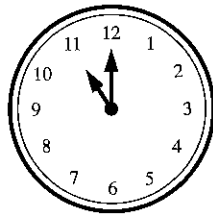
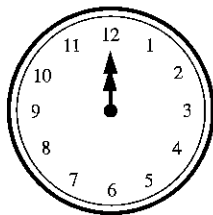
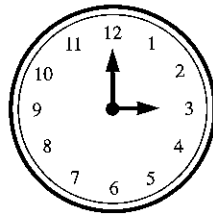
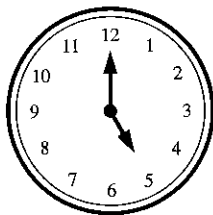
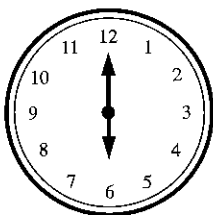


השעה 7:00
הזווית 150°



השעה 1:00
הזווית 30°

א) רשמו את גודל הזווית בין המחוגים בכל אחד מהשעונים (הזווית בין 0° ל- 180°).

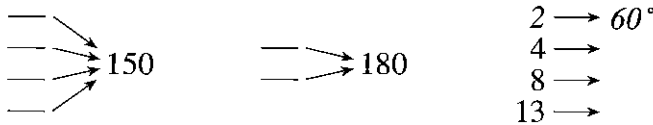


(ב) בטבלה שלהלן, t מסמנת את השעה ו- α היא הזווית שנוצרה בין המחוגים בכל שעה שלמה (מ- 0° ועד ל- 180°). השלימו את הטבלה לכל שעה שלמה.

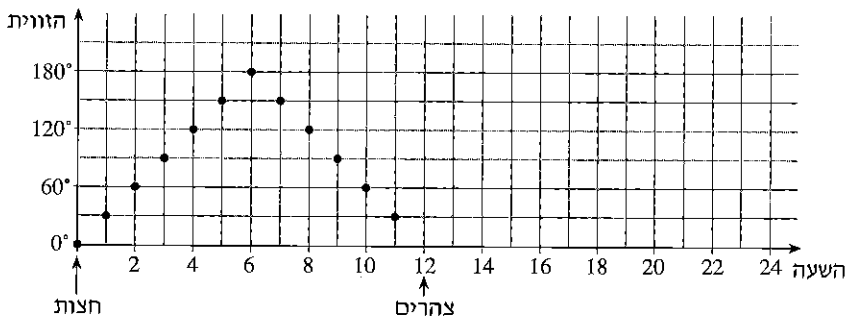
	צהריים												חצות											
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
α	0°																							60°

(ג) רשמו את כל השעות השלמות המתאימות ל- $\alpha = 30^\circ$.
(ד) השלימו:

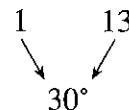
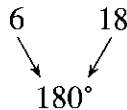
בזמן: פלוניג פוגאיומף אשקה 2.00 היא 60° .



(ה) במערכת הצירים משורטט חלק מגרף הפונקציה המתארת את הזווית בין המחוגים בכל שעה שלמה. המשיכו לסמן נקודות על-פי הטבלה.



ראינו כי מ-12:00 בצהריים עד 23:00, צורת הגרף חוזרת על זו שהתקבלה מ-0:00 בחצות עד 11:00.



המשך ←

פונקציה כזו נקראת פונקציה מחזורית.

ו) האם שעה 11:00 היא במחזור הראשון או השני?

ז) האם הזווית 30° מופיעה פעם אחת בכל מחזור?

ח) האם הזווית 180° מופיעה פעם אחת בכל מחזור?

ט) (i) לשעה 2:00 מתאימה הזווית 60° ($60^\circ \rightarrow 2$).

השלימו את הווג המתאים במחזור השני $60^\circ \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$.

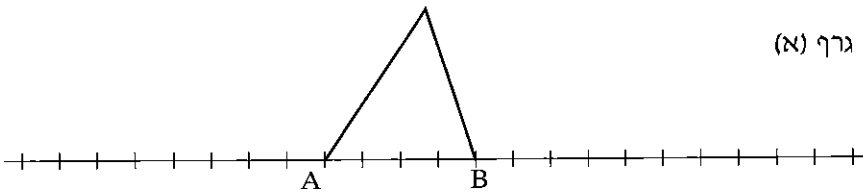
מה מראה השעון בשני המקרים?

(ii) לשעה 15:00 מתאימה הזווית 90° ($90^\circ \rightarrow 15$).

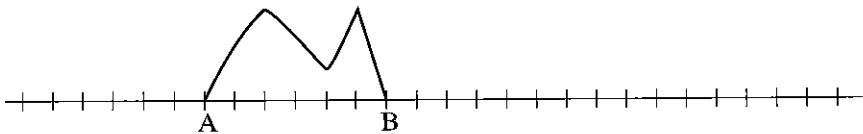
השלימו את הווג המתאים במחזור הראשון $90^\circ \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (i) תלשו מסוף הספר, את הדף השקוף המתאים לעמוד זה, ובצעו את ההוראות הרשומות בו.

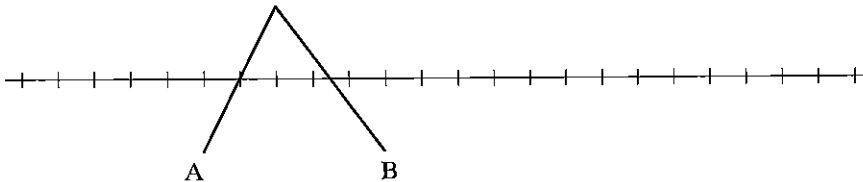
גרף (א)



גרף (ב)



גרף (ג)



(ii) שרטטתם על הדף השקוף גרפים של פונקציות מחזוריות.

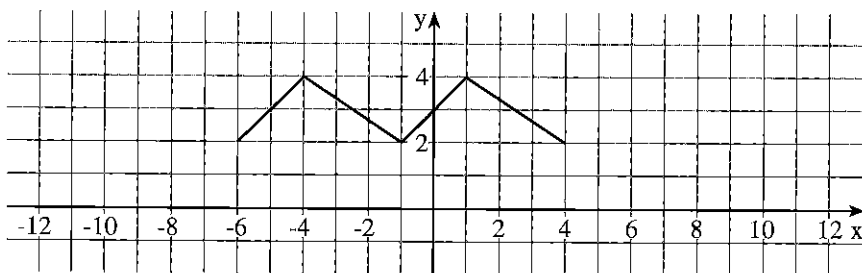
אורך המחזור של גרף (א) הוא ארבע יחידות.

— מהו אורך המחזור של גרף (ב)?

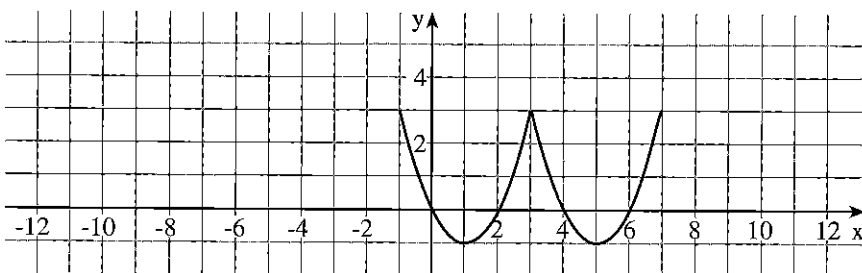
— מהו אורך המחזור של גרף (ג)?

3. בכל סעיף משורטטים שני מחזורים של פונקציה מחזורית.

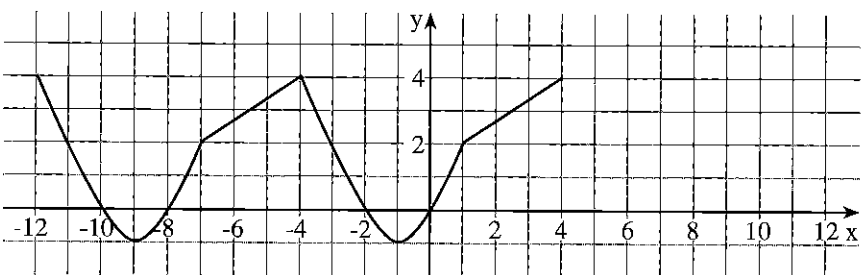
(א) שרטטו שני מחזורים נוספים. מהו אורך המחזור?



(ב) שרטטו שלושה מחזורים נוספים. מהו אורך המחזור?

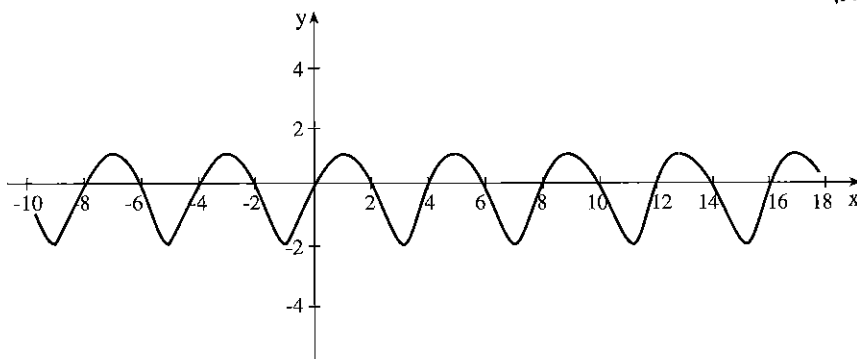


(ג) שרטטו מחזור אחד נוסף. מהו אורך המחזור?

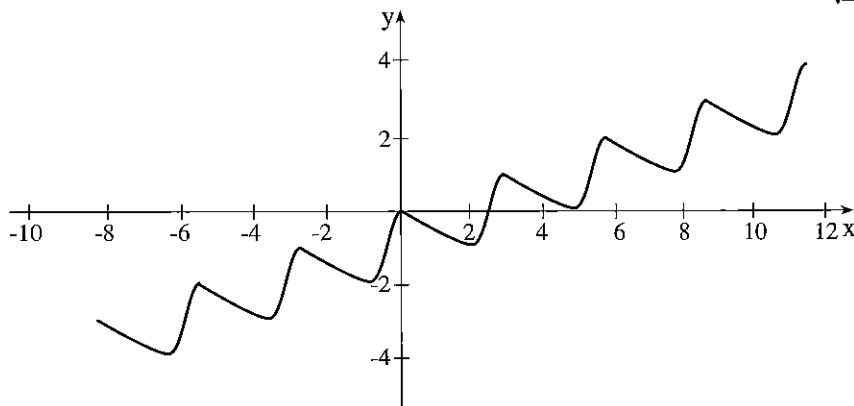


4.  רשמו לגבי כל אחת מהפונקציות המשוורטטות, אם היא מחזורית. אם כן, רשמו את אורך המחזור.

(א)



(ב)

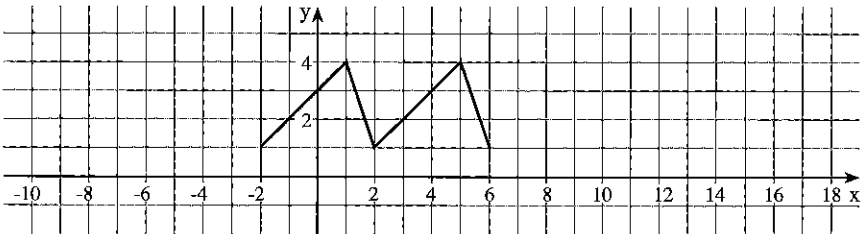


5.  (א) שרטטו פונקציה מחזורית כלשהי. (שרטטו לפחות ארבעה מחזורים).
 (ב) שרטטו פונקציה מחזורית, שאורך המחזור שלה חמש יחידות. (שרטטו לפחות שלושה מחזורים).
 (ג) שרטטו פונקציה מחזורית, שאורך המחזור שלה ארבע יחידות, וגרף הפונקציה עובר דרך הנקודה $(-4, 2)$. (שרטטו לפחות שלושה מחזורים).
 (ד) שרטטו פונקציה מחזורית, שאורך המחזור שלה ארבע יחידות, וגרף הפונקציה עובר דרך הנקודות $(5, 3)$, $(7, 0)$. (שרטטו לפחות שלושה מחזורים).
 רשמו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה ששרטטתם.

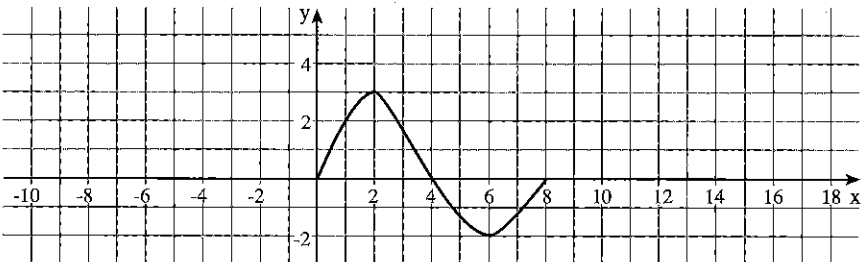
תרגילים

6. בכל סעיף משורטטים מחזור אחד או שניים של פונקציה מחזורית.
 קשמו את אורך המחזור והוסיפו לכל גרף מחזור מימין ומחזור משמאל.

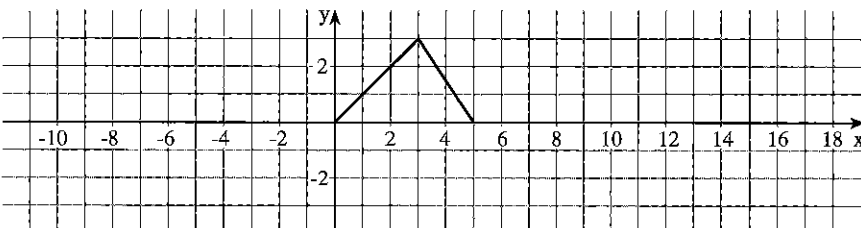
(א)



(ב)

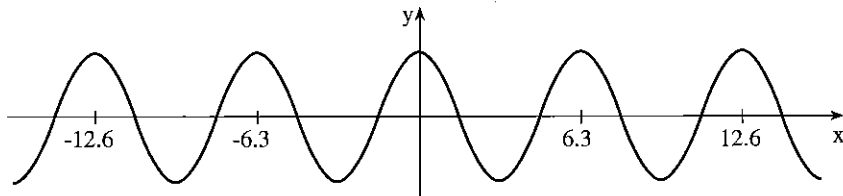


(ג)

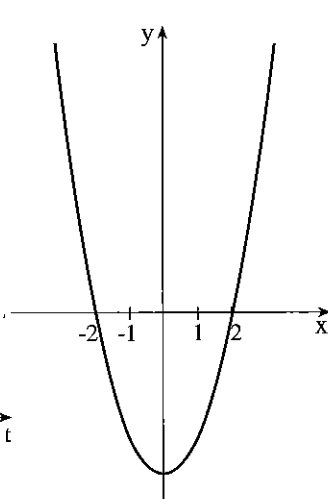


7. רשמו לגבי כל אחת מהפונקציות המפורטות, אם היא מחזורית. אם כן, רשמו את אורך המחזור.

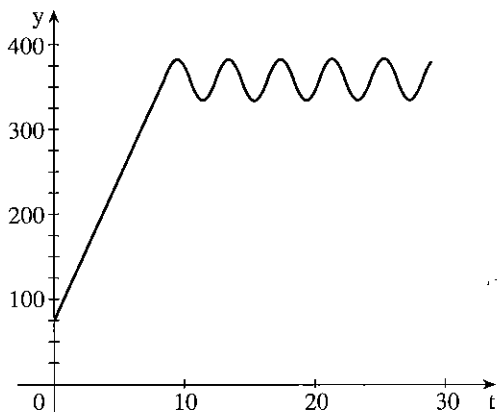
(א)



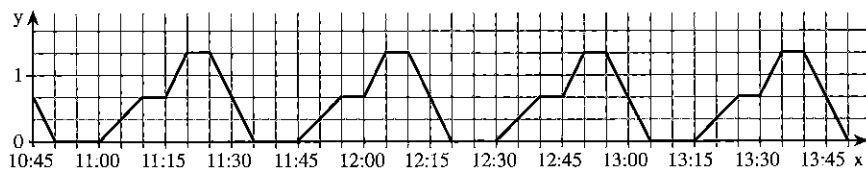
(ב)



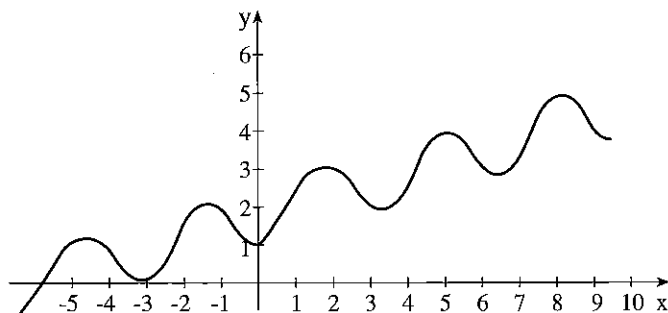
(ג)



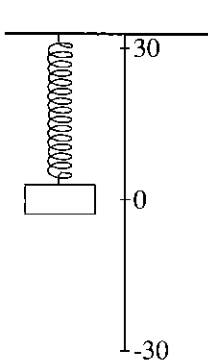
(ד)



(ה)



עוד פונקציות מחזוריות – רשות



1. במעבדה לפיסיקה, בדקו תנועה של גוף תלוי על קפיץ. לשם כך, משכו את הגוף התלוי על הקפיץ כלפי מטה ועזבו אותו. הגוף נע מלמטה למעלה ובחזרה, במשך כל זמן הניסוי.
(הניסוי נעשה כך שתנועת הגוף לא הופרעה על-ידי התנגדות האוויר או גורמים אחרים.)

חלק מתוצאות הניסוי נרשמו בטבלה הבאה. (הניסוי נמשך דקה, זמן התנועה נמדד בשניות, וגובה הגוף נמדד בס"מ.)

זמן	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
גובה	-30	-21	0	21	30	21	0	-21	-30	-21	0	21	30	21	0	-21	-30	-21

(א) השלימו:

0 →
8 →
16 →

2 →
10 →

1 →
9 →

- (ב) נסמן את הזמן ב- t ואת הגובה ב- h .
 $h(t)$ היא הפונקציה המתאימה לזמן את הגובה.

השלימו:

$$h(5) =$$

$$h(\quad) = -21 \quad (\text{בחרו מקור אחד})$$

$$h(\quad) = 21 \quad (\text{בחרו מקור אחד})$$

$$h(20) =$$

- (ג) סמנו בטבלה, היכן מתחילים מחזורים נוספים, וקבעו מהו אורך המחזור.

המשך ←

ד) השלימו כך שהמקורות יהיו בהפרש של מחזור אחד בדיוק.

$\rightarrow -30$

$\rightarrow -21$

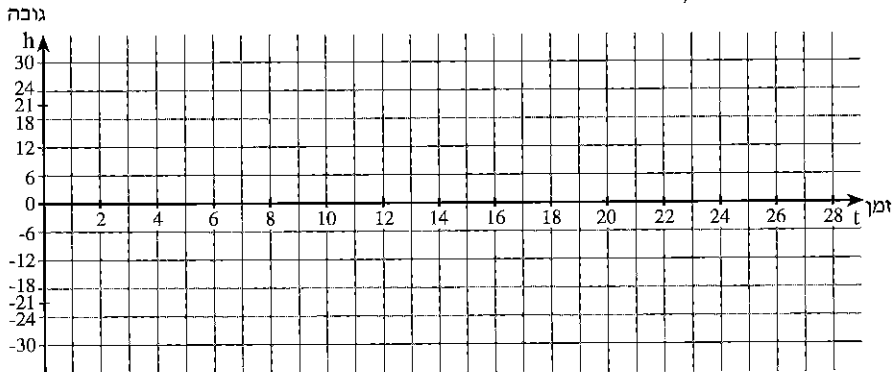
$\rightarrow 21$

קיימות שתי אפשרויות

$\rightarrow 21$

ה) האם $t = 1$ ו- $t = 7$ שייכים לאותו מחזור?

ו) שרטטו גרף מתאים לשלושה מחזורים.



2. בכל סעיף נתון חלק מטבלת ערכים של מחזור אחד של פונקציה.

א) רשמו את אורך המחזור, והוסיפו שני מחזורים.

	מחזור תחילת						מחזור חדש												
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	0	-1	3	-3	-2	-1													

ב) רשמו את אורך המחזור, והוסיפו מחזור מימין ומחזור משמאל.

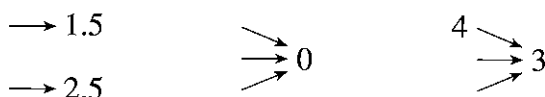
						מחזור תחילת						מחזור חדש											
x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8							
y					2	5	-2	4															

3. (א) קבעו מהו אורך מחזור הפונקציה והוסיפו שני מחזורים.

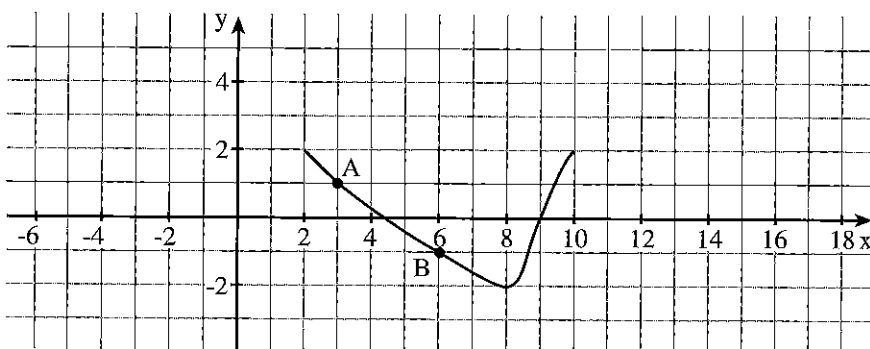
	מחזור תחילת							מחזור חדש																
x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
y	-2	0	2	4	4	3	2	1																

(ב) סמנו את הנקודות, המופיעות בטבלה, במערכת צירים משובצת וחברו אותן כך שיתקבל קו רצוף. (ציר x: $-2 \leq x \leq 22$ ציר y: $-3 \leq y \leq 6$)

(ג) השלימו, היעזרו בגרף.



4. (א) הגרף מתאר מחזור אחד של פונקציה מחזורית.



(א) מהו אורך המחזור?

(ב) סמנו שלוש נקודות ששיעור y שלהן 2, והן על גרף הפונקציה.

(ג) סמנו נקודה, הנמצאת בדיוק מחזור אחד אחרי A, ונקודה הנמצאת מחזור אחד אחרי B.

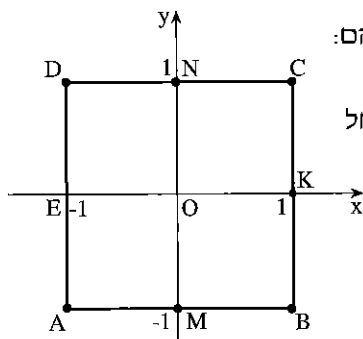
(ד) רשמו שיעורי שלוש נקודות מינימום, הנמצאות על גרף הפונקציה.

(ה) סמנו ארבע נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.

(ו) שרטטו שני מחזורים נוספים.

(ז) רשמו שיעורים של שתי נקודות מכסימום.

פונקציה מחזורית וטיול על ריבוע - רשות



1. במערכת צירים שרטטו ריבוע כך שקודקדיו הם:

$A(-1, -1)$ $B(1, -1)$ $C(1, 1)$ $D(-1, 1)$

גוף נע על היקף הריבוע, נגד כיוון השעון, החל

מנקודה M . הגוף נע יותר מסיבוב אחד.

נתאים לאורך הדרך s שעובר הגוף,

את שיעור ה- y של הנקודה שאליה הגיע.

דאטא:

נקודה N 4 $\rightarrow$ 1
נקודה D 5 $\rightarrow$ 1
נקודה E 6 $\rightarrow$ 0
נקודה A 7 $\rightarrow$ -1

נקודה M 0 $\rightarrow$ -1
נקודה B 1 $\rightarrow$ -1
נקודה K 2 $\rightarrow$ 0
נקודה C 3 $\rightarrow$ 1

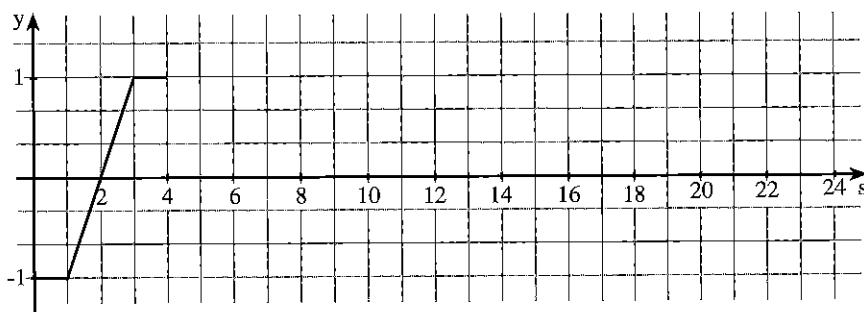
השלימו: $8 \rightarrow$ (הנקודה)

א) השלימו את הטבלה.

	M	B	K	C	N														
s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
y																			

ב) במערכת הצירים שלפניכם משורטט חלק מהפונקציה.

סמנו את הנקודות על-פי הטבלה והשלימו את הגרף עד $s = 16$.



ג) האם הפונקציה מחזורית? אם כן, מהו אורך המחזור?

ד) השלימו:

$$\begin{array}{lcl} & & 6 \rightarrow \\ & \nearrow & \\ & -1 & \\ & \nwarrow & \\ & & 3.5 \rightarrow \end{array}$$

ה) האם קיימת נקודה על הגרף ששיעור y שלה 1.5?

ו) בין אורכי הדרך 3 ו-4 שיעור y הוא 1. מצאו תחום נוסף (קטע על

ציר s) בו שיעור y הוא 1.

ז) רשמו שני תחומים שונים, בהם הפונקציה עולה.

ח) רשמו שני תחומים שונים, בהם הפונקציה יורדת.

ט) הוסיפו לגרף הפונקציה, שבסעיף ב', עוד מחזור אחד.

י) השלימו, כך שהמקורות יהיו בהפרש של מחזור אחד בדיוק.

דוגמה:

$$\begin{array}{lcl} 2 & \nearrow & \\ & 0 & \\ 10 & \nwarrow & \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{lcl} & & 1 \\ & \nearrow & \\ & & \end{array}$$

(i)

$$\begin{array}{lcl} 6 & \nearrow & \\ & 0 & \\ & \nwarrow & \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{lcl} & & -1 \\ & \nearrow & \\ 9 & \rightarrow & \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{lcl} 0.5 & \nearrow & \\ & -1 & \\ & \nwarrow & \end{array}$$

2. א) שרטטו גרף של פונקציה מחזורית, שאורך המחזור שלה ארבע יחידות, ויש לה מכסימום ב- $(0, 3)$. (שרטטו לפחות ארבעה מחזורים.)

ב) רשמו שיעורי נקודת מכסימום במחזור אחר.

3. א) שרטטו גרף של פונקציה מחזורית, שיש לה מכסימום ב- $(0, 1)$, מינימום ב- $(3, -1)$, ואורך המחזור שלה ארבע יחידות. (שרטטו לפחות שלושה מחזורים.)

4. א) שרטטו גרף של פונקציה מחזורית, שאורך המחזור שלה חמש יחידות, ונקודת החיתוך שלה עם ציר y היא $(0, 2)$. (שרטטו לפחות שלושה מחזורים.)

ב) שרטטו, על-פי אותם הנתונים, גרף שונה מזה ששרטטתם.

5. 

נתונה פונקציה מחזורית, שאורך המחזור שלה שלוש יחידות.
 $(-2, 4)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

קבעו, לגבי כל נקודה, מה ניתן להסיק: הנקודה על גרף הפונקציה, הנקודה אינה על גרף הפונקציה, אי אפשר לדעת.

(א) $(1, 4)$ (ב) $(3, 3)$

(ג) $(-2, 1)$ (ד) $(-8, 4)$

(ה) $(4, 4)$ (ו) $(0, 4)$

6.  (א) האם ניתן לשרטט גרף של פונקציה מחזורית רציפה, שיש לה נקודות מכסימום ואין לה נקודות מינימום?

(ב) נסו לשרטט גרף של פונקציה מחזורית, שיש לה נקודות מכסימום ואין לה נקודות מינימום, היעזרו באסימפטוטות מקבילות לציר y .

תרגילים

7. (א) שרטטו גרף של פונקציה מחזורית, שאורך המחזור שלה שש יחידות, על-פי הנתונים הבאים:

מחזור אחד מתחיל בנקודה $(-5, -4)$.

נקודת החיתוך היחידה של מחזור זה עם ציר x , היא $(-2, 0)$.

(ב) כמה נקודות חיתוך עם ציר x , קיבלתם במחזור השני?
 רשמו את שעוריהן.

8. שרטטו גרף של פונקציה מחזורית, שהיא קבועה בין -1 ל- 0 , יורדת בין 0 ל- 1 , עולה בין 1 ל- 2 , ואורך המחזור שלה שלוש יחידות.

9. נתונה פונקציה מחזורית, שאורך המחזור שלה חמש יחידות.
 $A(1, -3)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

קבעו, לגבי כל נקודה, מה ניתן להסיק: הנקודה על גרף הפונקציה, הנקודה אינה על גרף הפונקציה, אי אפשר לקבוע.

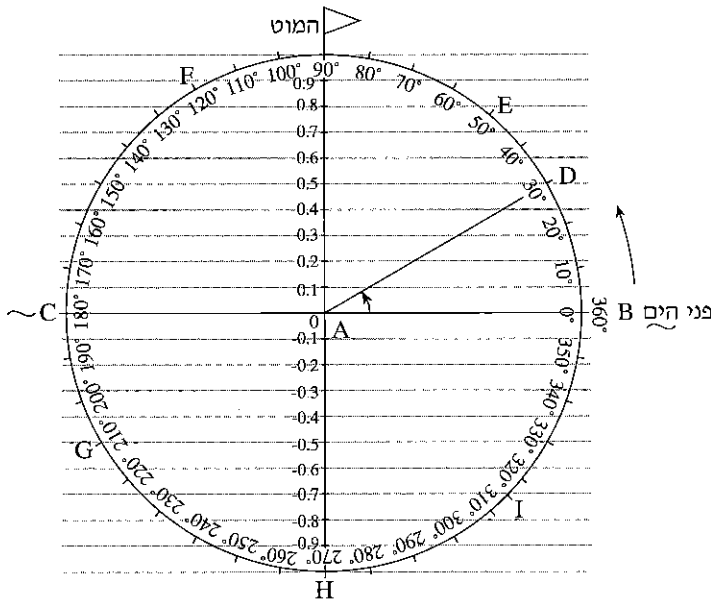
(א) $(6, -3)$ (ב) $(7, -3)$

(ג) $(-4, -2)$ (ד) $(-9, -3)$

(ה) $(1, -5)$ (ו) $(11, 5)$

הפונקציה S

1. בשרטוט שלפניכם הקו המאוזן (CB) הוא קו פני הים.
 A מרכז מעגל שאורך הרדיוס שלו יחידה אחת. בנקודה A העמידו מוט הניצב לקו פני הים. על המוט מסומנות שנתות למדידה. נקודה נעה על המעגל מנקודה B נגד כיוון השעון. נניח שהנקודה הגיעה ל- D . $\angle DAB = 30^\circ$.
 גובה D מעל פני הים הוא 0.5 יחידות.



(א) השלימו את החסר לפי הדוגמה.

הנקודה הגיעה ל-	הזווית שנוצרה	הגובה מעל או מתחת פני הים (בקירוב)	
D	30°	$\rightarrow 0.5$	דוגמה:
E	50°	$\rightarrow$ _____	חברו את A עם E
F	120°	$\rightarrow 0.85$	חברו את A עם F
C	180°	$\rightarrow$ _____	
G	210°	$\rightarrow -0.5$	הערך שלילי (מתחת לפני הים) ⚠
H	270°	$\rightarrow$ _____	
I	315°	$\rightarrow$ _____	

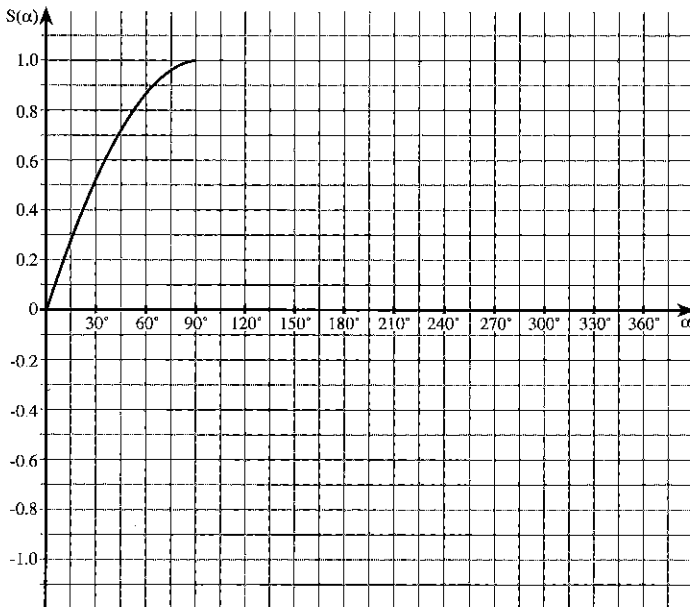
(ב) סמנו את הזווית ב- α ואת הגובה ב- s .
היעזרו בשרטוט והשלימו את הטבלה.

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$s(\alpha)$													

(ג) $s(\alpha)$ היא הפונקציה המתאימה לזווית α את הגובה s מעל או מתחת פני הים.
השלימו:

$$\begin{aligned} s(120^\circ) &= & s(60^\circ) &= \\ s(330^\circ) &= & s(210^\circ) &= \\ s() &= s() = 0.5 \\ s() &= s() = -0.5 \end{aligned}$$

(א) 2. סמנו במערכת הצירים את הנקודות, על-פי הטבלה בתרגיל הקודם, והשלימו את גרף הפונקציה $s(\alpha)$ בין 0° ל- 360° .

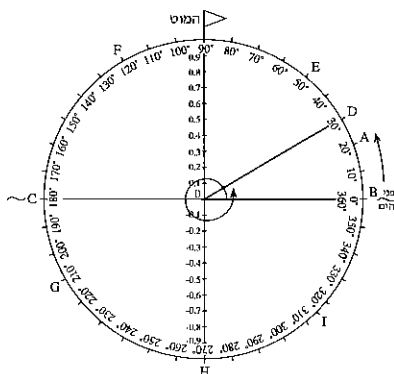


(ב) השלימו (בקירוב) על-פי הגרף.

$$\begin{aligned} s(225^\circ) &= \underline{\hspace{2cm}} & s(45^\circ) &= \underline{\hspace{2cm}} \\ s(315^\circ) &= \underline{\hspace{2cm}} & s(135^\circ) &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

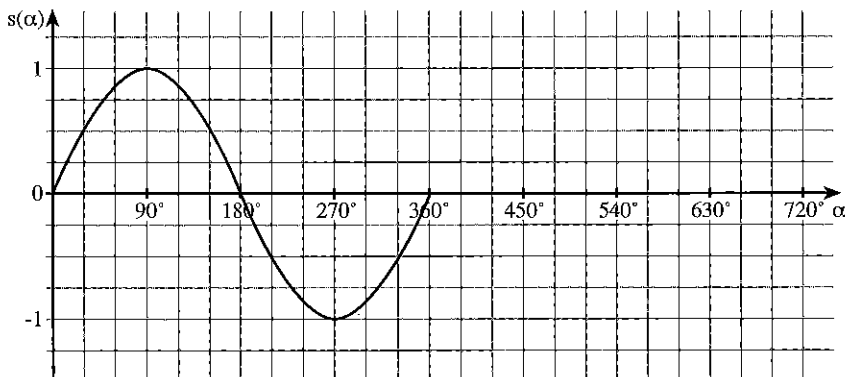


היעזרו במעגל המשורטט והשלימו בקירוב.



הנקודה אליה מגיעים	α	$s(\alpha)$
D	$390^\circ \rightarrow$	_____
_____	$480^\circ \rightarrow$	_____
_____	$570^\circ \rightarrow$	_____

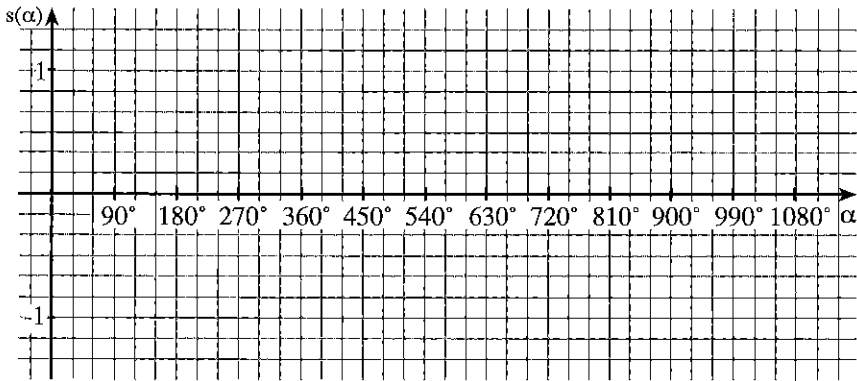
(ב) אם ממשיכים להסתובב על המעגל, הגרף חוזר על עצמו ומתקבלת פונקציה מחזורית. שרטטו מחזור נוסף.



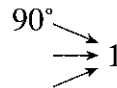
- (i) מהן נקודות החיתוך של הגרף המשורטט עם ציר α ?
- (ii) הפונקציה חיובית בין 0° ל- 180° .
רשמו תחום נוסף (קטע על ציר α), בו הפונקציה חיובית.
- (iii) הפונקציה עולה בין 270° ל- 450° .
רשמו שני תחומים נוספים בגרף המשורטט (קטעים על ציר α), בהם הפונקציה עולה.
- (iv) מהו הערך הגדול ביותר של הפונקציה? מהו הערך הקטן ביותר שלה?

(ג) מהו אורך מחזור הפונקציה?

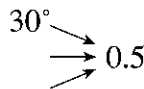
4. א) שרטטו שלושה מחזורים של הפונקציה s .



ב) השלימו:

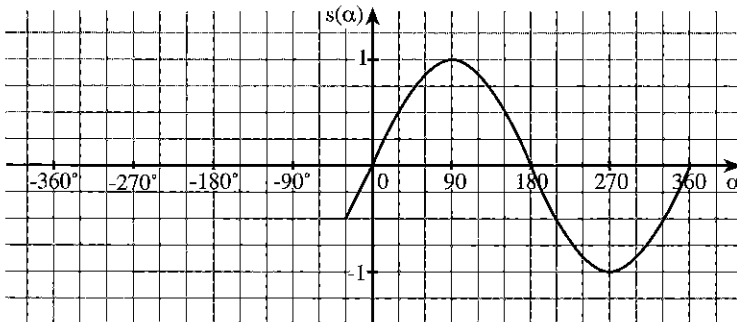


ג) השלימו בהבדל של מחזור.



ד) האם הנקודות $(180^\circ, 0)$ ו- $(0^\circ, 0)$ נמצאות באותו מחזור?

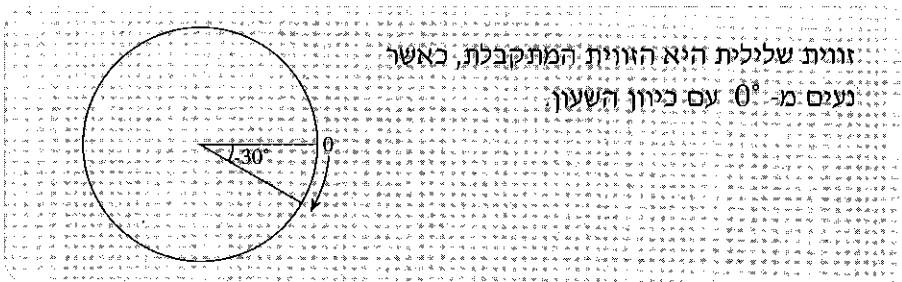
5. א) בשרטוט שלפניכם, התחלה של מחזור אחד מהגרף של s בכיוון השלילי. השלימו את הגרף המתאים למחזור זה.



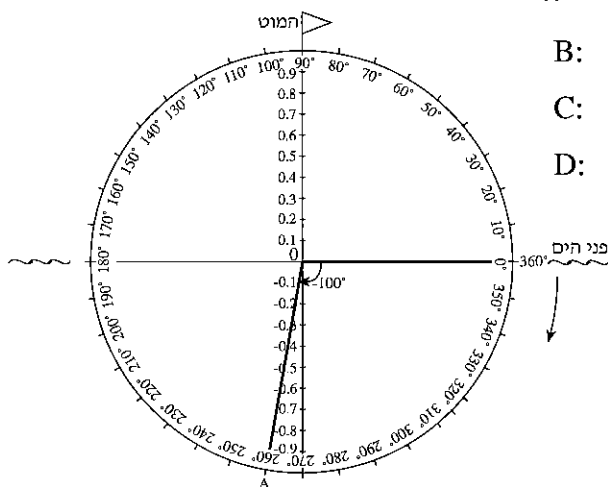
ב) השלימו את הטבלה:

α	-90°	-180°	-270°	-360°
$s(\alpha)$				

המשך ←



ג) סמנו במעגל נקודות המתאימות לזוויות.
 באלמה: $\alpha = -100^\circ$ (נקודה פאגאיומה CA).



B: $\alpha = -40^\circ$ (i)

C: $\alpha = -200^\circ$ (ii)

D: $\alpha = -270^\circ$ (iii)

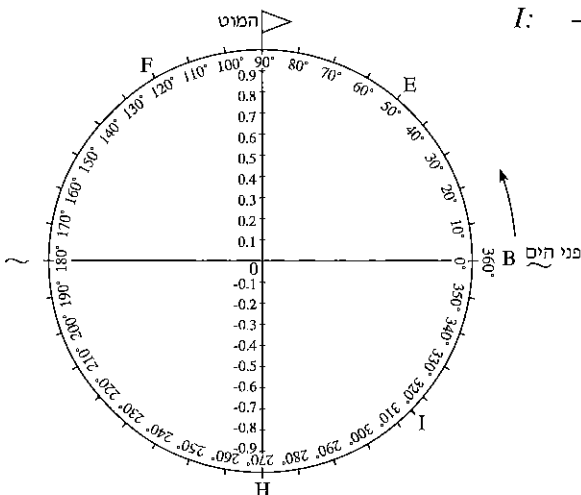
6. רשמו ארבע זוויות המתאימות לנקודה הרשומה.

באלמה: $-405^\circ, -45^\circ, 315^\circ, 675^\circ$

H:

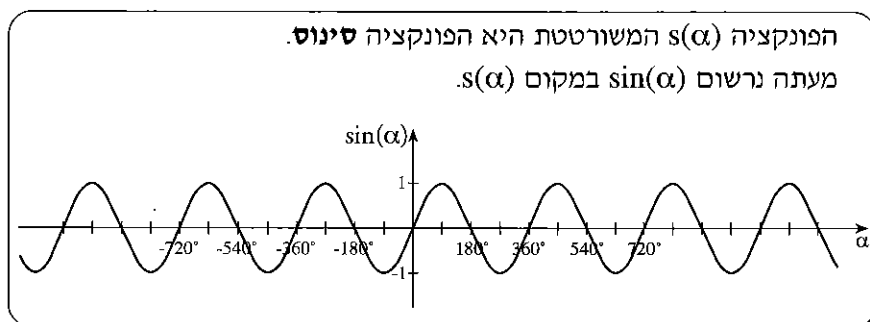
F:

E:



ניאןסארי גילאים 12, 13, 14.

בלימודיכם בספר הראשון, השתמשתם ב- $\sin(\alpha)$ עבור α שבין 0° ל- 90° , לצורך חישוב זוויות וצלעות במשולשים. כעת הגדרנו פונקציה מחזורית $s(\alpha)$, שהיא הפונקציה $\sin(\alpha)$, והיא מוגדרת בתחום רחב הרבה יותר (עבור כל המספרים).



במשך נדון בקשר בין ההגדרה הריחבה הזו לשימושי הפונקציה במשולש.

7. (פ) א) מהו אורך המחזור של הפונקציה $\sin(\alpha)$?
- ב) הנקודה $(90^\circ, 1)$ נמצאת על גרף הפונקציה $\sin(\alpha)$.
רשמו שיעורי נקודה מתאימה במחזור הבא.
רשמו שיעורי נקודה מתאימה במחזור הקודם.
- ג) הנקודה $(390^\circ, 0.5)$ נמצאת על גרף הפונקציה $\sin(\alpha)$.
רשמו שיעורי נקודה מתאימה במחזור הבא.
רשמו שיעורי נקודה מתאימה במחזור הקודם.
- ד) הפונקציה שלילית בין 180° ל- 360° .
רשמו תחום נוסף (קטע על ציר α), השייך למחזור הבא, בו הפונקציה שלילית.
רשמו תחום נוסף (קטע על ציר α), השייך למחזור הקודם, בו הפונקציה שלילית.

אורך מחזור הפונקציה $\sin(\alpha)$ הוא 360° . לכן, ערכי $\sin(\alpha)$, עבור זוויות הנבדלות זו מזו ב- 360° , שווים.
בכתיב מתמטי נרשום כך: $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 360^\circ)$

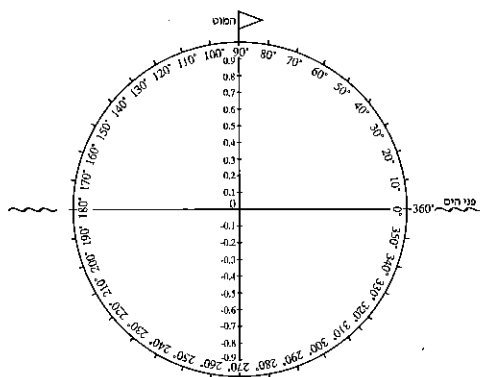
המשך ←

(i) ה) קבעו, האם הטענות הבאות נכונות, נמקו כל קביעה בעזרת המעגל או הגרף.

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha - 360^\circ) \quad -$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 720^\circ) \quad -$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha - 180^\circ) \quad -$$



(ii) רשמו טענה נכונה נוספת.

(i) מהו הערך הגדול ביותר, שיכולה הפונקציה $\sin(\alpha)$ לקבל?

כמה פעמים, בכל מחזור, מקבלים ערך זה?

מהו הערך הקטן ביותר, שיכולה הפונקציה $\sin(\alpha)$ לקבל?

כמה פעמים, בכל מחזור מקבלים ערך זה?

כמה פעמים, בכל מחזור, מתקבל הערך $\sin(\alpha) = 0.5$?

כמה פעמים, בכל מחזור, מתקבל הערך $\sin(\alpha) = 0$?

כמה פעמים, בכל מחזור, מתקבל הערך $\sin(\alpha) = -0.2$?

כמה פעמים, בכל מחזור, מתקבל הערך $\sin(\alpha) = 2$?

(ii) אילו ערכים יכולה לקבל הפונקציה $\sin(\alpha)$?

8. השלימו, בקירוב, לפי הגרף או לפי המעגל.

$$\sin(53^\circ) = \quad (ג) \quad \sin(30^\circ) = \quad (א)$$

$$\sin(160^\circ) = \quad (ד) \quad \sin(60^\circ) = \quad (ב)$$

9. (דיון) א) דני אמר $\sin(90^\circ) = 1$, לכן אם אחבר $\sin(30^\circ) + \sin(60^\circ)$ אקבל 1. בידקו את טענתו.

ב) חפשו שתי זוויות שונות כך שאם תחברו תתקברו ככל האפשר ל-1.

$$\sin(\text{---}) + \sin(\text{---}) = 1$$

קישו בסוגריים את הזוויות שבחרתם.

ג) חפשו שלוש זוויות שונות כך שאם תחברו תתקברו ככל האפשר ל-1.

$$\sin(\text{---}) + \sin(\text{---}) + \sin(\text{---}) = 1$$

קישו בסוגריים את הזוויות שבחרתם.

תרגילים

10. השלימו (מהגרף או מהמעגל) ובידקו במחשבון.

קשה לדייק בקביעת ערך הסינוס על-פי המעגל או על-פי הגרף. כדי לדייק יותר ניתן להיעזר במחשבון.

חשבו באמצעות מחשבון:



דוגמה: כדי לחשב $\sin(70^\circ)$:
 במחשבון בלן שורה אחת בקיול:

70	sin

 במחשבון בן אפשר לחשב גרף בקיול:

sin	70

דאגו שהאותיות DEG יופיעו על צג מחשבון. DEG היא תחילת המלה DEGREE, שפירושה מעלה. יש יחידות שונות למדידת זוויות. כאן נמדוד זוויות בעזרת מעלות בלבד.

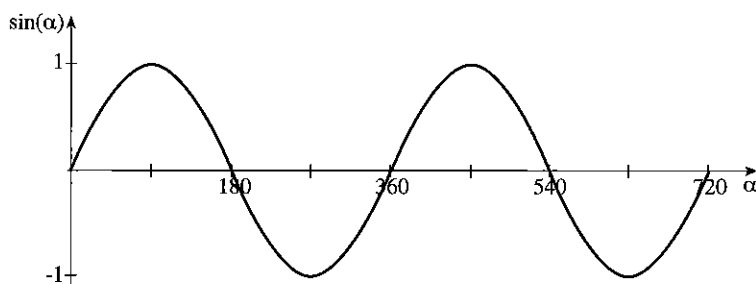


$\sin(220^\circ) =$ (ד)	$\sin(20^\circ) =$ (א)
$\sin(310^\circ) =$ (ה)	$\sin(45^\circ) =$ (ב)
$\sin(360^\circ) =$ (ו)	$\sin(180^\circ) =$ (ג)

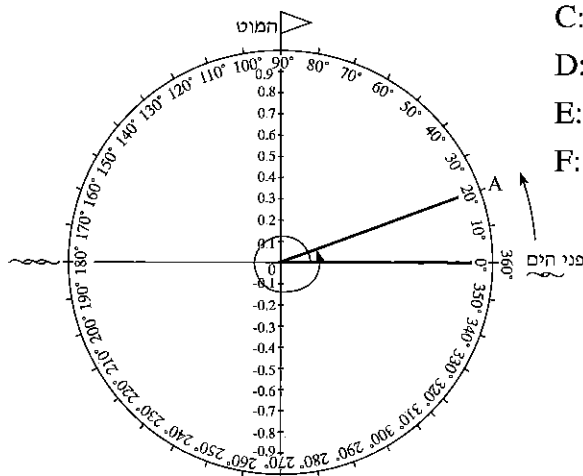
11. קישו אחד מהסימנים $<$, $=$, $>$, כך שתקבל טענה נכונה.

$\sin(60^\circ)$ _____ $\sin(120^\circ)$ (ד)	$\sin(50^\circ)$ _____ 0 (א)
$\sin(300^\circ)$ _____ 0 (ה)	$\sin(70^\circ)$ _____ $\sin(10^\circ)$ (ב)
$\sin(50^\circ)$ _____ $\sin(30^\circ)$ (ו)	$\sin(130^\circ)$ _____ 2 (ג)

12. א) צבעו חלק מהגרף אשר בו $\sin(\alpha)$ שלילית.
 ב) צבעו שני תחומים (קטעים על ציר α), שבהם $\sin(\alpha)$ שלילית.
 רשמו תחומים אלה במילים או בכתב מתמטי.



13. א) סמנו על המעגל את הנקודות המתאימות לזוויות.
 ב) רשמו: $\alpha = 380^\circ$ A) פני הנקודה המאוימת.



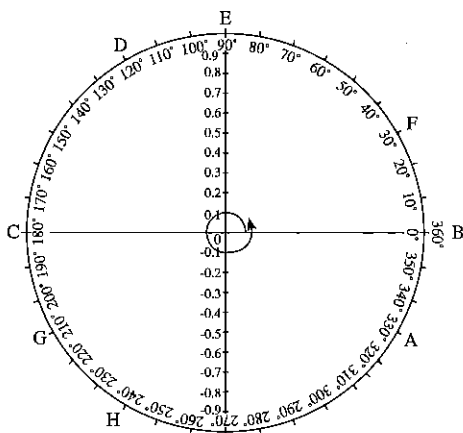
- B: $\alpha = 400^\circ$ (i)
 C: $\alpha = 420^\circ$ (ii)
 D: $\alpha = 450^\circ$ (iii)
 E: $\alpha = 600^\circ$ (iv)
 F: $\alpha = 540^\circ$ (v)

- ב) רשמו אחד מהסימנים $=$, $>$, $<$, כך שתקבל טענה נכונה.

- (i) $\sin(380^\circ)$ _____ $\sin(20^\circ)$ (iv) $\sin(600^\circ)$ _____ -1
 (ii) $\sin(420^\circ)$ _____ 0.5 (v) $\sin(540^\circ)$ _____ 0
 (iii) $\sin(450^\circ)$ _____ 1 (vi) $\sin(360^\circ)$ _____ $\sin(0^\circ)$

14. א) לכל אחת מהנקודות המסומנות על המעגל (A עד H), רשמו שתי זוויות מתאימות.

דוגמה: $A: -30^\circ, 330^\circ$



ב) השלימו על-פי הדוגמה (מהגרף או מהמעגל).

דוגמה: $\sin(-30^\circ) = \sin(330^\circ) = -0.5$

$\sin(-270^\circ) = \sin(\quad) = \quad$ $\sin(-120^\circ) = \sin(\quad) = \quad$

$\sin(-330^\circ) = \sin(\quad) = \quad$ $\sin(-180^\circ) = \sin(\quad) = \quad$

$\sin(-240^\circ) = \sin(\quad) = \quad$

15. השלימו, בהבדל של מחזור אחד.

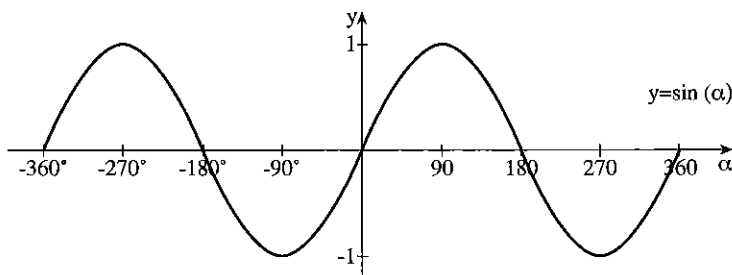
דוגמה: $\sin(90^\circ) = \sin(450^\circ)$

א) $\sin(180^\circ) = \sin(\quad)$ ד) $\sin(240^\circ) = \sin(\quad)$

ב) $\sin(-30^\circ) = \sin(\quad)$ ה) $\sin(270^\circ) = \sin(\quad)$

ג) $\sin(150^\circ) = \sin(\quad)$ ו) $\sin(-90^\circ) = \sin(\quad)$

16. א) צבעו חלקים מהגרף אשר בהם $\sin(\alpha)$ יורדת.



ב) רשמו עבור אילו ערכים של α , $\sin(\alpha)$ יורדת (התייחסו רק לחלק המשורטט).

17. א) מצאו שבעה מקורות עבורם $\sin(\alpha) = 0$.

ב) מצאו ארבעה מקורות עבורם $\sin(\alpha) = 1$.

18. השלימו, בהבדל של מחזור אחד.

$$\sin(-490^\circ) = \sin(\quad) = \sin(\quad) = \sin(\quad) = \sin(\quad)$$

19. השלימו בהבדל של מחזור אחד.

ב) $270^\circ \rightarrow -1$

א) $-330^\circ \rightarrow 0.5$

20. חשבו באמצעות מחשבון.

$$\sin(342^\circ) = \quad \text{ג)}$$

$$\sin(-18^\circ) = \quad \text{א)}$$

$$\sin(-47^\circ) = \quad \text{ד)}$$

$$\sin(673^\circ) = \quad \text{ב)}$$

21. ידוע כי $\sin(30^\circ) = 0.5$. מצאו שישה מקורות נוספים של 0.5, ובידקו במחשבון.

22. ידוע כי $\sin(-60^\circ) = -0.866$. מצאו שישה מקורות נוספים של -0.866.

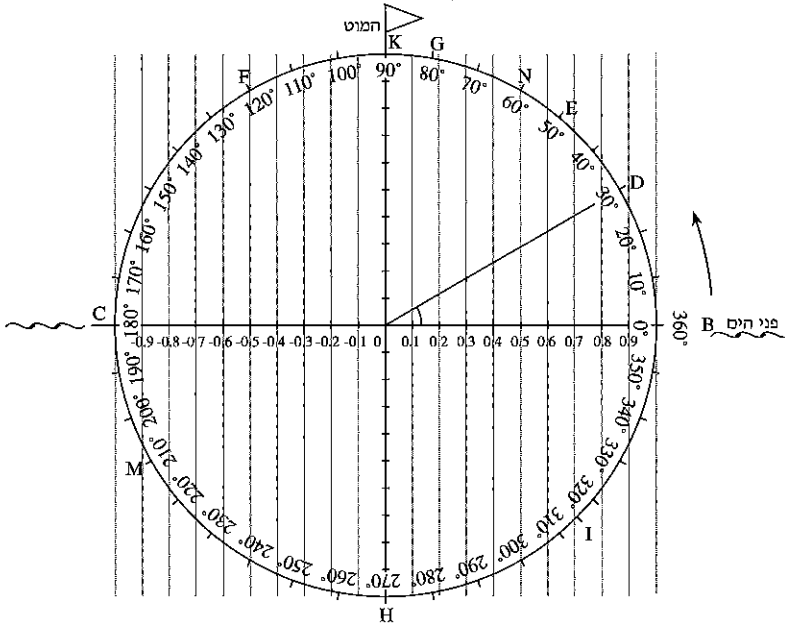
23. אילו מהמספרים הבאים יכולים להיות ערכים של $\sin(\alpha)$?

1.1 , 0.72 , 1.5 , 0.58 , -2.1 , -0.9 , 101

הפונקציה C

1. $\sin(\alpha)$ מתאימה לנקודה D את הגובה מעל פני הים. נתאים כעת לנקודה D את מרחקה מהמוט.

תוכלו להיעזר בישר או בסרגלון לקריאת המרחק של D מהמוט. (הסרגלון נמצא בדף שקוף בסוף הספר.)



(א) השלימו את החסר בעזרת המעגל.

הנקודה מגיעה ל:	הזווית	המרחק מהמוט (בקירוב)
D	30°	→ 0.85
E	50°	→ _____
N	_____	→ _____
G	_____	→ _____
K	90°	→ _____

⚠ הנקודה F נמצאת בצד שמאל של המוט

F	120°	→ _____
---	------	---------

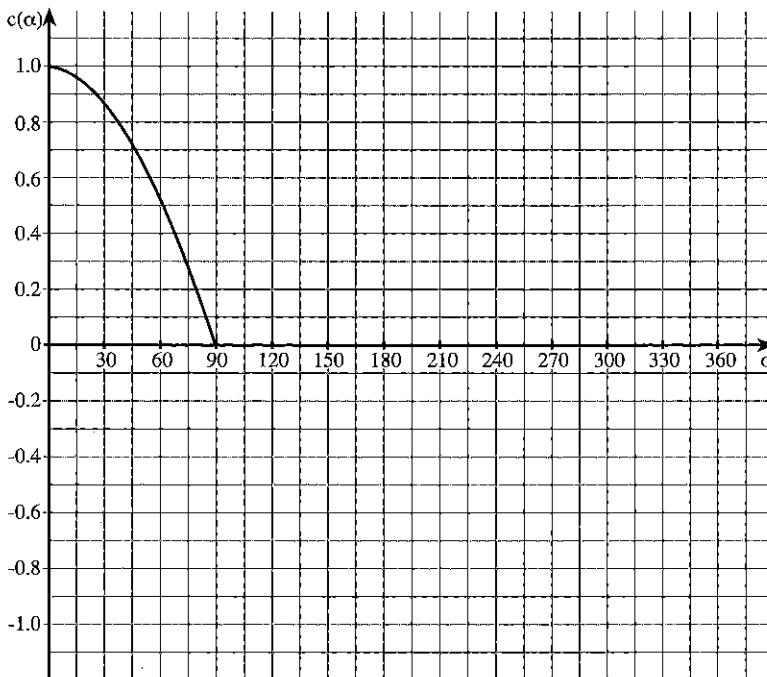
המשך ←

המשיכו לרשום במחברתכם, את הזווית ואת המרחק מהמוט, לגבי הנקודות I, H, M, C, ו-B.

ב) נסמן את הזווית ב- α ואת המרחק ב- $c(\alpha)$. השלימו את הטבלה.

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$c(\alpha)$													

2. א) סמנו במערכת הצירים את הנקודות לפי הטבלה, והשלימו את גרף הפונקציה $c(\alpha)$ בין 0° ל- 360° .



ב) השלימו (בקירוב) לפי הגרף.

$$c(15^\circ) =$$

$$c(255^\circ) =$$

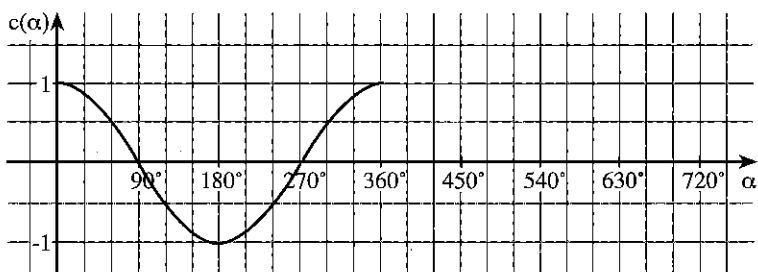
$$c(135^\circ) =$$

$$c(345^\circ) =$$

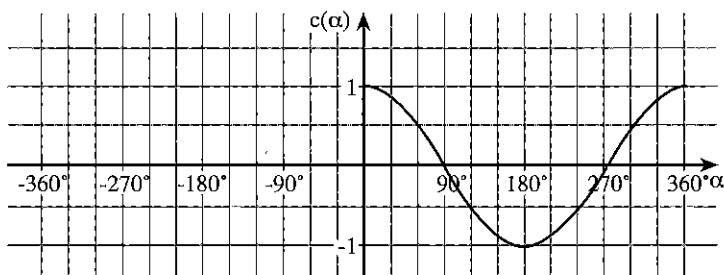
3. א) היעזרו במעגל שבתחילת הסעיף (עמ' 218) והשלימו.

הנקודה	α	$c(\alpha)$
K	$450^\circ \rightarrow$	_____
_____	$540^\circ \rightarrow$	_____
_____	$720^\circ \rightarrow$	_____

ב) שרטטו מחזור נוסף בין 360° ל- 720° .

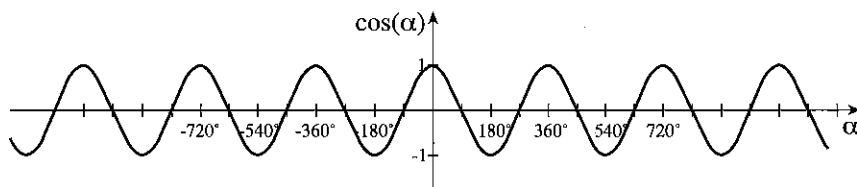


ג) שרטטו מחזור נוסף בין -360° ל- 0° .



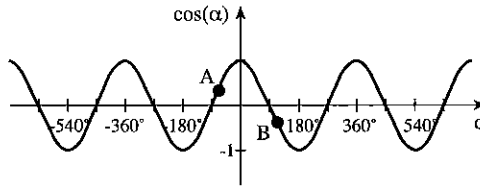
הפונקציה $c(\alpha)$ המשורטטת נקראת בשם **קוסינוס**.

מעתה נרשום $\cos(\alpha)$ במקום $c(\alpha)$.



ניגן אלפג'ו ג'וליאני 8, 9, 10, 11, 12.

4. לפניכם ארבעה מחזורים של גרף הפונקציה $\cos(\alpha)$.



- א) סמנו, בכל מחזור, נקודה מתאימה ל- A, שהיא במרחק של מחזורים שלמים מ- A.
 ב) סמנו, בכל מחזור, נקודה מתאימה ל- B, שהיא במרחק של מחזורים שלמים מ- B.

מחזור הפונקציה $\cos(\alpha)$ (כמו מחזור הפונקציה $\sin(\alpha)$) הוא 360° . לכן ערכי $\cos(\alpha)$, עבור זוויות הנבדלות זו מזו ב- 360° שווים.
 בכתוב מתמטי $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 360^\circ)$.

5. א) הסבירו בעזרת מעגל היחידה, מדוע המחזור של $\sin(\alpha)$, וגם המחזור של $\cos(\alpha)$ הוא 360° .

היעזרו במעגל היחידה או בגרף וענו על השאלות הבאות:

- ב) הנקודה $(0, 1)$ נמצאת על גרף הפונקציה $\cos(\alpha)$.
 רשמו שיעורי נקודה מתאימה **במחזור הבא**.
 רשמו שיעורי נקודה מתאימה **במחזור הקודם**.
 ג) הנקודה $(90^\circ, 0)$ נמצאת על גרף הפונקציה $\cos(\alpha)$.
 רשמו שיעורי נקודה מתאימה **במחזור הבא**.
 רשמו שיעורי נקודה מתאימה **במחזור הקודם**.
 ד) כמה פעמים, בכל מחזור, מתקבל הערך $\cos(\alpha) = 0.5$?
 כמה פעמים, בכל מחזור מתקבל הערך $\cos(\alpha) = -1$?
 כמה פעמים, בכל מחזור, מתקבל הערך $\cos(\alpha) = -1.1$?
 ה) מהו הערך הגדול ביותר של הפונקציה $\cos(\alpha)$?
 ו) מהו הערך הקטן ביותר של הפונקציה $\cos(\alpha)$?
 ז) אילו ערכים יכולה לקבל הפונקציה $\cos(\alpha)$?

תרגילים

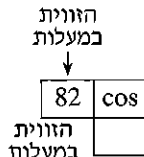
6. היעזרו במעגל או בגרף והשלימו, בקירוב.

$$\cos(12^\circ) = \text{א} \quad \cos(30^\circ) = \text{ב} \quad \cos(60^\circ) = \text{ג}$$

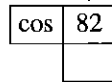
7. חשבו באמצעות מחשבון:

$$\cos(82^\circ)$$

במחשבון בקוטר שורה אחת, פקיד:



במחשבון שאפשר ארשם בו גרף, פקיד:



⚠ דאגו שהאותיות DEG יופיעו על צג מחשבון.

$$\cos(261.8^\circ) = \text{א} \quad \cos(57^\circ) = \text{ב}$$

$$\cos(123^\circ) = \text{ג} \quad \cos(-32^\circ) = \text{ד}$$

8. רשמו אחד מהסימנים $<$, $>$, $=$, כך שתתקבל טענה נכונה.

$$\cos(120^\circ) \quad \text{א} \quad \cos(50^\circ) \quad \text{ב} \quad \cos(10^\circ)$$

$$\cos(300^\circ) \quad \text{ג} \quad \cos(70^\circ) \quad \text{ד} \quad \cos(130^\circ)$$

$$\cos(120^\circ) \quad \text{ה} \quad \cos(60^\circ) \quad \text{ו} \quad \cos(540^\circ)$$

$$\cos(180^\circ) \quad \text{ז} \quad \cos(420^\circ) \quad \text{ח} \quad \cos(230^\circ)$$

9. א) סמנו במעגל את הזוויות 50° ו- -50° , והשלימו $\cos(50^\circ) \quad \text{א} \quad \cos(-50^\circ)$

$$\cos(50^\circ) \quad \text{ב} \quad \cos(-50^\circ)$$

ב) סמנו את הזוויות הבאות במעגל, והשלימו $\cos(50^\circ) \quad \text{ג} \quad \cos(-50^\circ)$

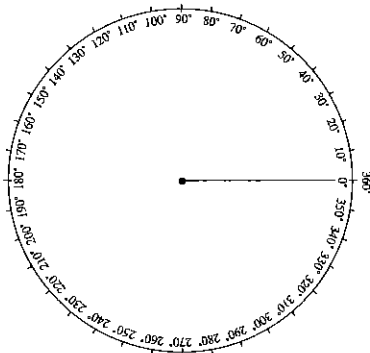
$$\cos(50^\circ) \quad \text{ד} \quad \cos(-50^\circ)$$

$$\cos(-120^\circ) \quad \text{ה} \quad \cos(120^\circ)$$

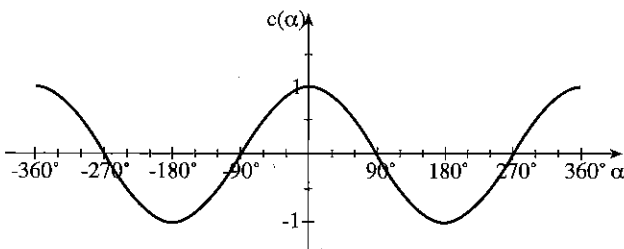
$$\cos(-230^\circ) \quad \text{ו} \quad \cos(230^\circ)$$

$$\cos(500^\circ) \quad \text{ז} \quad \cos(-500^\circ)$$

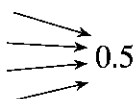
$$\cos(\alpha) \quad \text{ח} \quad \cos(-\alpha)$$



10. א) צבעו חלק מהגרף אשר בו $\cos(\alpha)$ עולה.



- ב) רשמו שני תחומים (קטעים על ציר α), בהם $\cos(\alpha)$ עולה.
 ג) רשמו שני תחומים (קטעים על ציר α), בהם $\cos(\alpha)$ יורדת.
 ד) רשמו ארבע זוויות, במרחק של מחזור זו מזו, המקיימות: $\cos \alpha = 0.5$



11. א) רשמו שני תחומים (קטעים על ציר α), בהם $\cos(\alpha)$ חיובית.
 ב) רשמו שני תחומים (קטעים על ציר α), בהם $\cos(\alpha)$ שלילית.

12. השלימו בהבדל של מחזור אחד.

א) $\cos(-100^\circ) = \cos(\quad) = \cos(\quad) = \cos(\quad)$
 ב) $\cos(25^\circ) = \cos(\quad) = \cos(\quad) = \cos(\quad)$

13. השלימו $=$ או $\neq$, כך שתקבל טענה נכונה.

א) $\cos(50^\circ) \quad \cos(50^\circ + 180^\circ)$ ד) $\cos(50^\circ) \quad \cos(50^\circ + 720^\circ)$
 ב) $\cos(50^\circ) \quad \cos(50^\circ + 360^\circ)$ ה) $\cos(50^\circ) \quad \cos(50^\circ + 90^\circ)$
 ג) $\cos(50^\circ) \quad \cos(50^\circ - 360^\circ)$ ו) $\cos(50^\circ) \quad \cos(270^\circ)$

14. רשמו $=$ או $\neq$, כך שתקבל טענה נכונה.

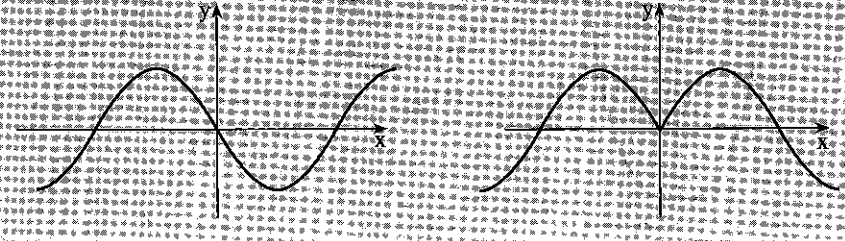
א) $\sin(50^\circ) \quad \cos(80^\circ)$ ד) $\cos(225^\circ) \quad \sin(225^\circ)$
 ב) $\sin(45^\circ) \quad \cos(45^\circ)$ ה) $\cos(50^\circ) \quad \sin(90^\circ - 50^\circ)$
 ג) $\sin(180^\circ) \quad \cos(180^\circ)$ ו) $\sin(90^\circ + 50^\circ) \quad \cos(50^\circ)$

זוגיות ואי-זוגיות – רשות

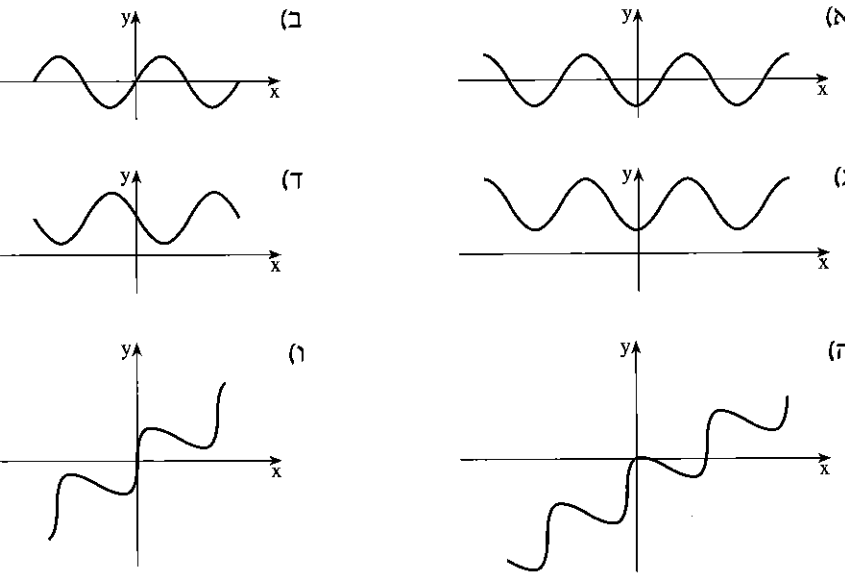
פונקציה אשר הגרף שלה סימטרי לגבי ציר ה- y , נקראת פונקציה זוגית. פונקציה אשר הגרף שלה סימטרי לגבי ציר ה- x , נקראת פונקציה אי-זוגית.

אמלך

הכרזת



אילו מהפונקציות הבאות זוגיות, אילו אי-זוגיות, אילו אינן זוגיות ואינן אי-זוגיות?



האם כל הפונקציות המשורטטות מחזוריות?

2. (א) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 40$

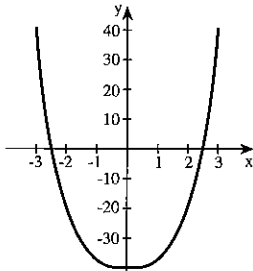
חשבו את:

$f(3)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(1)$

הדגישו את הנקודות המתאימות בגרף המשוורטט, בקירוב.

(ב) האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית?

(ג) השלימו = או $\neq$



$f(1) \underline{\hspace{1cm}} f(-1)$

$f(2) \underline{\hspace{1cm}} f(-2)$

$f(x) \underline{\hspace{1cm}} f(-x)$

כשמציבים בפונקציה **זוגית** מספרים נגדיים, מתקבלת אותה תוצאה.

בכתיב מתמטי $f(x) = f(-x)$

3. (א) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$

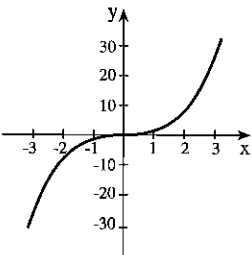
חשבו את:

$f(3)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(1)$

והדגישו את הנקודות המתאימות בגרף המשוורטט, בקירוב.

(ב) האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית?

(ג) השלימו את החסר, כך שיווצרו שוויונים.



$f(1) = -f(-1)$

דוגמה:

$f(2) = -f(\quad)$

$f(-3) = -f(\quad)$

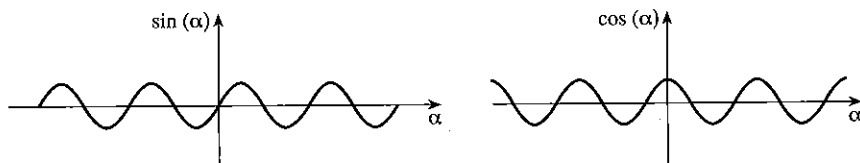
$f(-x) = -f(\quad)$

כשמציבים בפונקציה **אי-זוגית** מספרים נגדיים, מתקבלות תוצאות נגדיות.

בכתיב אלגברי $f(-x) = -f(x)$, ולכן פונקציה המוגדרת עבור $x=0$, מקיימת

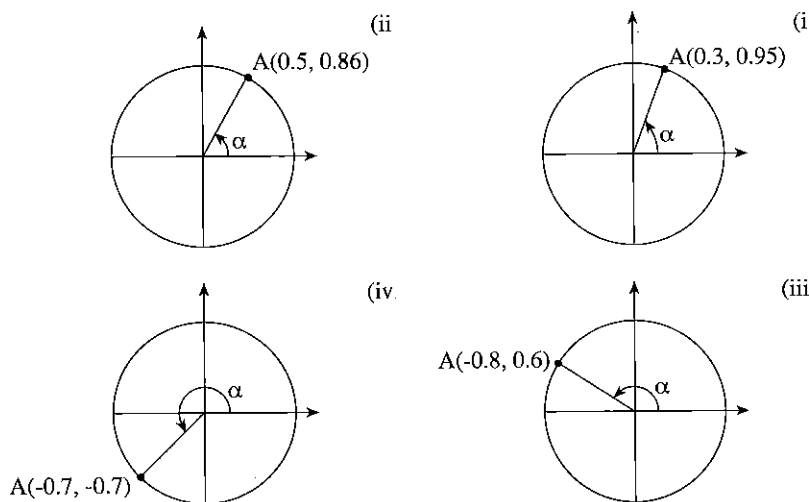
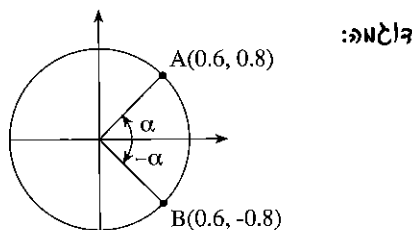
$f(0) = 0$

4.  לפניכם הגרפים של הפונקציות $\sin(\alpha)$ ו- $\cos(\alpha)$. איזו פונקציה זוגית ואיזו אי-זוגית?



5.  בתרגיל זה נראה ונסביר את תכונות הזוגיות והאי-זוגיות של שתי הפונקציות, $\sin(\alpha)$ ו- $\cos(\alpha)$ בעזרת המעגל.

א) בכל מעגל מסומנת נקודה A המתאימה ל- α . סמנו בכל מעגל, נקודה B המתאימה ל- $-\alpha$, העבירו רדיוס לנקודה זו ורשמו את שיעורי הנקודה.

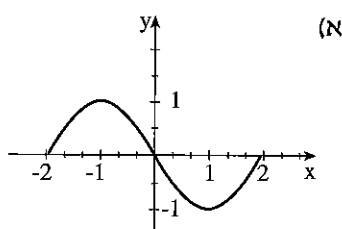
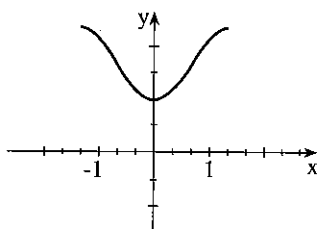


- ב) — מה תוכלו לומר על הערכים של $\sin(-\alpha)$ ו- $\sin(\alpha)$?
 — מה תוכלו לומר על הערכים של $\cos(-\alpha)$ ו- $\cos(\alpha)$?
 — הסבירו, על סמך המעגל, מדוע הפונקציה $\cos(\alpha)$ זוגית, והפונקציה $\sin(\alpha)$ אי-זוגית.

הפונקציה $y = \cos(\alpha)$ היא זוגית. כלומר, עבור ערכים נגדיים של α , מתקבל אותו ערך של הפונקציה.
בכתיב מתמטי $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

הפונקציה $y = \sin(\alpha)$ היא אי-זוגית. כלומר, עבור ערכים נגדיים של α , מתקבלים ערכים נגדיים של הפונקציה.
בכתיב מתמטי $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

6.  בכל גרף משורטט מחזור אחד של פונקציה. קבעו איזו משתי הפונקציות זוגית ואיזו אי-זוגית.



7.  השלימו $=$, $\neq$, כך שתקבל טענה נכונה.

(א) $-\sin(30^\circ) \underline{\hspace{1cm}} \sin(-30^\circ)$

(ב) $\sin(60^\circ) \underline{\hspace{1cm}} -\sin(-60^\circ)$

(ג) $\sin(45^\circ) \underline{\hspace{1cm}} \sin(-45^\circ)$

(ד) $\cos(45^\circ) \underline{\hspace{1cm}} \cos(-45^\circ)$

(ה) $-\cos(120^\circ) \underline{\hspace{1cm}} \cos(-120^\circ)$

(ו) $\cos(180^\circ) \underline{\hspace{1cm}} -\cos(-180^\circ)$

(ז) $\sin(230^\circ) \underline{\hspace{1cm}} \sin(-230^\circ)$

(ח) $\cos(310^\circ) \underline{\hspace{1cm}} \cos(-310^\circ)$

8.  נתון: $\sin(50^\circ) = 0.766$ א)

השלימו, בעזרת נתון זה בלבד, את ערכי הפונקציות עבור הזוויות הנתונות.

$$\sin(-50^\circ) \quad \sin(410^\circ) \quad \sin(310^\circ)$$

בידקו באמצעות מחשבון.

ב) נתון: $\cos(200^\circ) = -0.94$

השלימו, בעזרת נתון זה בלבד, את ערכי הפונקציה עבור הזוויות הנתונות.

$$\cos(-200^\circ) \quad \cos(160^\circ) \quad \cos(520^\circ)$$

ג) נתון: $\cos(\alpha) = a$. בטאו בעזרת הנתון:

$$\cos(-\alpha) =$$

$$\cos(-\alpha + 360^\circ) =$$

$$\cos(720^\circ + \alpha) =$$

ד) נתון: $\sin(\alpha) = b$. בטאו בעזרת הנתון:

$$\sin(-\alpha) =$$

$$\sin(-\alpha + 360^\circ) =$$

$$\sin(-\alpha - 360^\circ) =$$

תרגילים

9.  נתון: $\cos(\alpha) = 0.4$. השלימו, מבלי למצוא את α .

$$-\cos(\alpha) \quad \cos(-\alpha) \quad \cos(360^\circ + \alpha) \quad \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$360^\circ - \alpha = (-\alpha) + 360^\circ \quad \triangle$$

10. נתון: $\sin(\alpha) = 0.2$. השלימו, מבלי למצוא את α .

$$\sin(-\alpha) \quad \sin(360^\circ + \alpha) \quad \sin[360^\circ + (-\alpha)] \quad -\sin(\alpha)$$

11. נתון: $\cos(\alpha) = k$, $\sin(\alpha) = m$. השלימו (כתבו ביטוי מתאים).

$$\sin(-\alpha) \quad \cos(-\alpha)$$

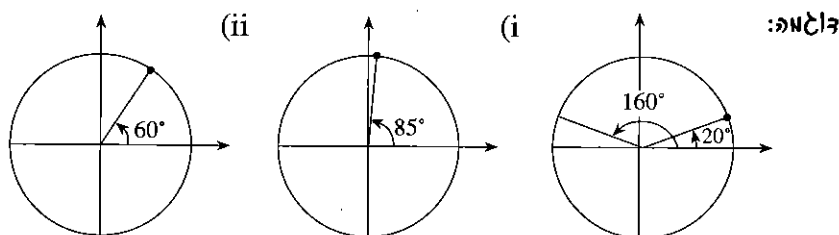
$$\sin(360^\circ - \alpha) \quad \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$\sin(360^\circ + \alpha) \quad \cos(360^\circ + \alpha)$$

⚠️ החומר המופיע בקטלוגים 267-268 אינו כאלו בג'אניק בחינה, פהלולג מלגלג גלס"ה.

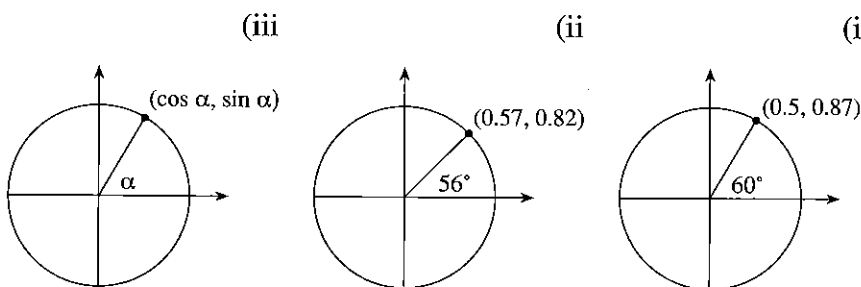
פונקציות של הזוויות α , $(180^\circ - \alpha)$ – רשות

1. Ⓜ (א) – סמנו, בכל אחד מהמעגלים, נקודה ברביע השני וזווית α , כך שערך $\sin \alpha$ יהיה שווה לערך הסינוס של הזווית הנתונה.
- רשמו את גודל הזוויות שסימנתם.



- מה תוכלו לומר על ערכי ה- $\cos$ של הזוויות שסימנתם בהשוואה לערכי ה- $\cos$ של הזוויות המסומנות.

- (ב) – סמנו, בכל אחד מהמעגלים שלמטה, זווית α ברביע השני, כך שערך $\sin \alpha$ יהיה שווה לערך הסינוס של הזוויות הנתונה.
- רשמו את שיעורי הנקודה המסומנת ברביע השני.
- השלימו, מתחת לכל מעגל, את הערכים המתאימים לזווית ברביע השני.



$$\sin(180^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(120^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(120^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. רשמו נכון/לא נכון, לגבי כל אחד מהשוויונים.

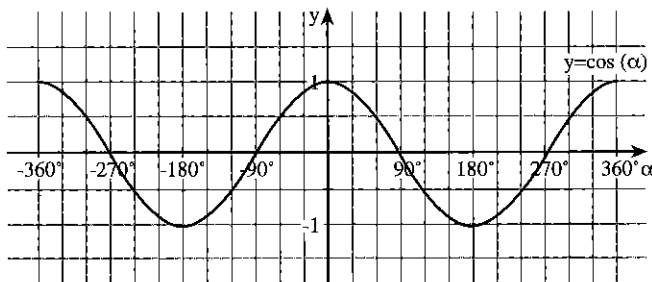
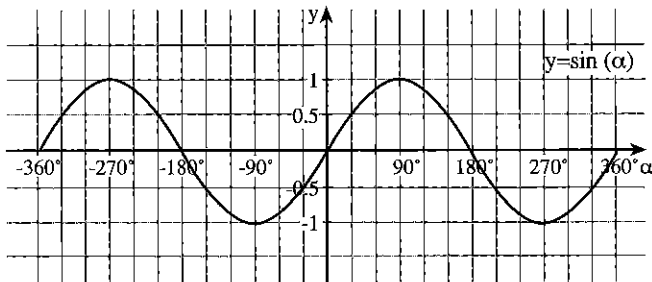
- | | | | |
|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|-----|
| $\cos(40^\circ) = -\cos(140^\circ)$ | (ה) | $\sin(55^\circ) = \sin(125^\circ)$ | (א) |
| $\cos(25^\circ) = -\cos(125^\circ)$ | (ו) | $\sin(120^\circ) = \sin(60^\circ)$ | (ב) |
| $\cos(40^\circ) = -\cos(60^\circ)$ | (ז) | $\sin(40^\circ) = \sin(60^\circ)$ | (ג) |
| $\cos(95^\circ) = -\cos(85^\circ)$ | (ח) | $\sin(170^\circ) = -\sin(10^\circ)$ | (ד) |

כאשר שתי זוויות משלימות ל- 180° (כלומר הזוויות הן α ו- $(180^\circ - \alpha)$), אז ערכי הסינוס שווים וערכי הקוסינוס הם מספרים נגדיים.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

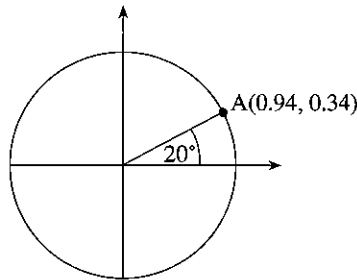
3. (א) איזו זווית משלימה את 30° ל- 180° ?
- (ב) סמנו בכל גרף שתי נקודות אחת שמתאימה ל- 30° והשנייה המתאימה לזווית המשלימה את 30° ל- 180° .



- (ג) הסבירו איך מתבטא, בכל גרף, החוק הרשום במסגרת שלמעלה.

תרגילים

4. א) על סמך הנקודה A המסומנת על המעגל, השלימו את הערכים החסרים.



$$\sin(160^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{v}) \qquad \sin(-20^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{i})$$

$$\cos(160^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{vi}) \qquad \cos(-20^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{ii})$$

$$\sin(340^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{vii}) \qquad \sin(380^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{iii})$$

$$\cos(340^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{viii}) \qquad \cos(380^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{iv})$$

ב) רשמו בסוגריים זוויות שונות כך שיישמר השוויון.

$$\sin(\quad) = \sin(\quad) = \sin(\quad) = \sin(\quad) = 0.34 \quad (\text{i})$$

$$\cos(\quad) = \cos(\quad) = \cos(\quad) = \cos(\quad) = 0.94 \quad (\text{ii})$$

$$\sin(\quad) = \sin(\quad) = \sin(\quad) = \sin(\quad) = -0.34 \quad (\text{iii})$$

$$\cos(\quad) = \cos(\quad) = \cos(\quad) = \cos(\quad) = -0.94 \quad (\text{iv})$$

5. רשמו נכון/לא נכון, ותקנו את הטענות שאינן נכונות.

$$\sin(\alpha) + \sin(-\alpha) = 0 \quad (\text{ח}) \qquad \cos(-30^\circ) = \cos(30^\circ) \quad (\text{א})$$

$$\sin(\alpha) - \sin(-\alpha) = 0 \quad (\text{ט}) \qquad \cos(-30^\circ) = \cos(330^\circ) \quad (\text{ב})$$

$$\cos(\alpha) + \cos(-\alpha) = 0 \quad (\text{י}) \qquad \cos(520^\circ) = -\cos(520^\circ) \quad (\text{ג})$$

$$\cos(\alpha) - \cos(-\alpha) = 0 \quad (\text{יא}) \qquad \sin(-40^\circ) = -\sin(40^\circ) \quad (\text{ד})$$

$$\sin(30^\circ) = \sin(150^\circ) \quad (\text{יב}) \qquad \sin(-40^\circ) = -\sin(320^\circ) \quad (\text{ה})$$

$$\sin(-40^\circ) = \sin(220^\circ) \quad (\text{יג}) \qquad -\sin(100^\circ) = \sin(-260^\circ) \quad (\text{ו})$$

$$\cos(60^\circ) = \cos(480^\circ) \quad (\text{יד}) \qquad \sin(-200^\circ) = \sin(200^\circ) \quad (\text{ז})$$

6. נתון: $\sin(\alpha) = 0.6$, $\cos(\alpha) = 0.8$.

מבלי למצוא את α , מצאו את:

$$\sin(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{א})$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{ב})$$

$$\cos(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{ג})$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{ד})$$

7. נתון: $\cos(\alpha) = m$.

הביעו באמצעות m את:

$$\cos(180^\circ - \alpha) \quad (\text{א})$$

$$\cos(-\alpha) \quad (\text{ב})$$

8. פעילות מחשב

הוא לא אפסדה בלדנה גאננה שוננה, המאפשר לה להילך על פונקציה, גאננה בנסנה בסוף הסנה.

1. (א) שרטטו גרף של הפונקציה $y = \sin(x)$, בתחום $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

(ב) שרטטו את הישר $y = 0.3$.

(ג) "הלכו" על הגרף ומצאו את פתרונות המשוואה $\sin(x) = 0.3$, בתחום המשוורט.

(ד) נקו את המסך.

2. (א) שרטטו, באותה מערכת צירים, את הגרפים של שתי הפונקציות $\sin(x)$ ו- $\sin(-x)$, בתחום $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

(ב) השלימו את הטבלה הבאה.

$\sin(x)$	$\sin(-x)$
$\sin(20^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\sin(-20^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
$\sin(45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\sin(-45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
$\sin(160^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\sin(-160^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
$\sin(310^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\sin(-310^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ג) השוו בין שני הגרפים והסבירו את התוצאות שהתקבלו בטבלה.

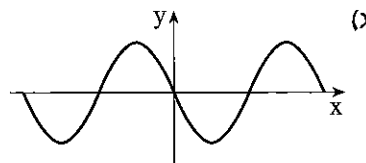
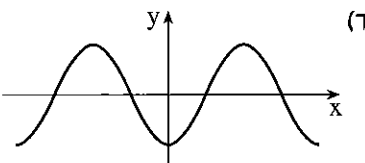
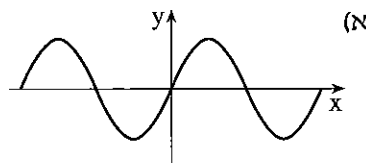
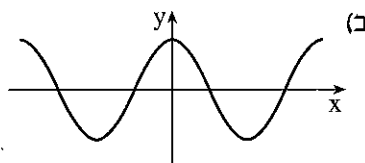
(ד) נקו את המסך.

3. (א) שרטטו באותה מערכת צירים את הגרפים של הפונקציות $\sin(-x)$ ו- $-\sin(x)$.

(ב) הסבירו מה קיבלתם.

(ג) נקו את המסך.

4. לפניכם חמש פונקציות של x .
 רשמו שלושה קשרים (שוויונים) בין הפונקציות.
 $\sin(x)$, $\sin(360^\circ + x)$, $\sin(-x)$, $-\sin(x)$, $\sin(x - 360^\circ)$.
 תוכלו לבדוק בעזרת המחשב:
 שרטטו בכל פעם את זוג הפונקציות ביניהן רשמתם שוויון, ובידקו אם מתקבל אותו גרף.
5. (א) שרטטו במחשב את גרף הפונקציה $\cos(x)$ בתחום $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
 (ב) רשמו את פתרונות המשוואה $\cos(x) = 0.85$, בתחום המשוורטט.
 (ג) שרטטו במחברתכם גרף משוער של הפונקציה $y = \cos(-x)$, ובידקו באמצעות המחשב.
 (ד) נקו את המסך.
6. (א) שרטטו באמצעות מחשב, באותה מערכת צירים, את הגרפים של הפונקציות $\sin(x)$ ו- $\sin(180^\circ - x)$, והסבירו את השרטוט שהתקבל.
 (ב) האם, לדעתכם, תתקבל תוצאה דומה כשתשרטטו את הגרפים של הפונקציות $\cos(x)$ ו- $\cos(180^\circ - x)$? בידקו והסבירו.
7. כתבו חוקים שיכולים להתאים לגרפים המשוורטטים. שרטטו באמצעות המחשב, ובידקו אם אכן קיבלתם שרטוט דומה.
 נסו לכתוב לכל גרף חוק נוסף.



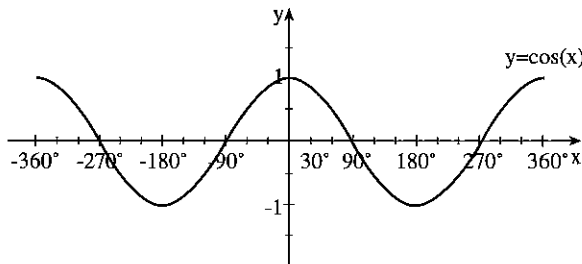
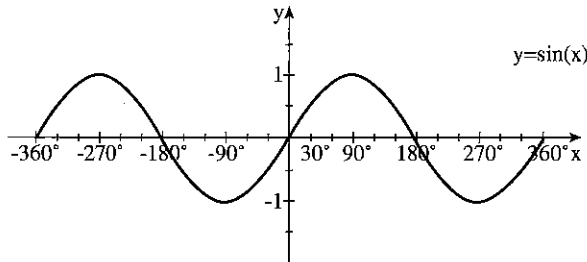
שניהם גם יחד – רשות

1. (i) היעזרו בגרפים של הפונקציות $\sin(x)$ ו- $\cos(x)$, וקיבעו אילו מהטענות

הבאות מתאימות לשתי הפונקציות, אילו מתאימות לאחת מהן (רשמו לאיזו),

ואילו לאף אחת מהן.

- (א) הגרף חותך את ציר y .
- (ב) הפונקציה סימטרית לגבי ציר y .
- (ג) $(90^\circ, 0)$ היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x .
- (ד) יש נקודת חיתוך עם ציר x כל 180° .
- (ה) אורך המחזור של הפונקציה 360° .
- (ו) $(0^\circ, 1)$ היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y .
- (ז) נקודת מכסימום. $(90^\circ, 1)$
- (ח) נקודת מינימום. $(90^\circ, -1)$
- (ט) הגרף עובר דרך $(0^\circ, 0)$.



(ii) ציינו שלוש תכונות שיעזרו לכם לקבוע אם הגרף מתאים ל- $y = \sin(x)$ או

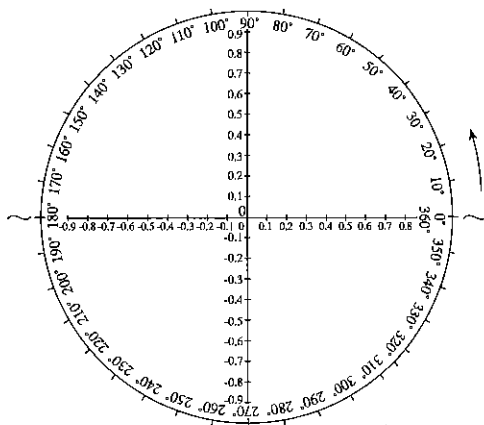
ל- $y = \cos(x)$.

(iii) האם ניתן להיזו את גרף הפונקציה $y = \sin(x)$ כדי לקבל את גרף הפונקציה

$y = \cos(x)$?

אם כן, לאיזה כיוון ובכמה יחידות?

2. (י) א. בתרגיל הקודם ראיתם שהנקודה $(1, 90^\circ)$ היא נקודת מכסימום של גרף הפונקציה $y = \sin(x)$. נסו להסביר זאת בעזרת המעגל.



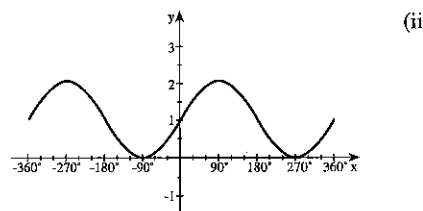
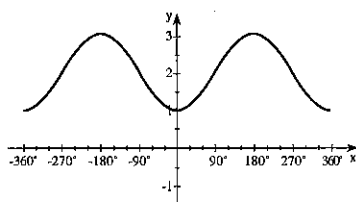
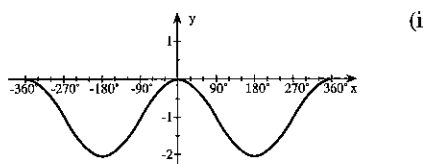
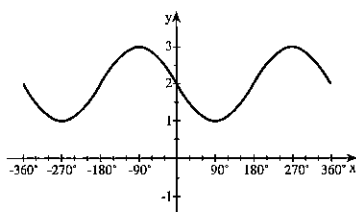
- ב. כמו כן, ראיתם שהנקודה $(-1, 180^\circ)$ היא נקודת מינימום של גרף הפונקציה $y = \cos(x)$. נסו להסביר זאת בעזרת המעגל.

3. (י) הגרפים מתארים ארבע פונקציות.

א. $y = \sin(x) + 1$ ג. $y = -\sin(x) + 2$

ב. $y = \cos(x) - 1$ ד. $y = -\cos(x) + 2$

התאימו גרף לכל אחת מהפונקציות וקבעו אם היא זוגית, אי-זוגית, או אחרת.



פונקציות ומשוואות – רשות

בדפים אלה נראה שבסוף הספר מצאנו דף אולי המעלה פטריאנומטרי אלרפים של $y = \sin(x)$
 ו- $y = \cos(x)$. עזרנו דף זה והעזרנו בו בסוף זה.

1. הניחו את הגרף השקוף המתאים ל- $y = \cos(x)$ במערכת הצירים על גרף הפונקציה $y = \sin(x)$, כך שהצירים יתלכדו.

(א) רשמו את שיעורי נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.

(בתחום מ- -360° עד 360°).

(, 0.7) , (, -0.7) , (, -0.7) , (, 0.7)

(ב) רשמו ארבעה פתרונות למשוואה $\sin(x) = \cos(x)$.

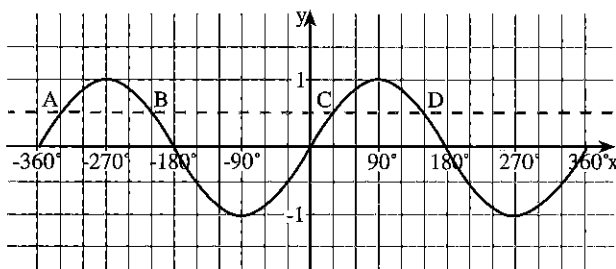
(ג) סמנו בעיפרון על המעגל שבדף הנפרד, את שתי הזוויות החיוביות שקיבלתם

והסבירו בעזרת המעגל מדוע $\sin(x) = \cos(x)$ עבור זוויות אלה.

(ד) מחקו את הסימונים.

2. (א) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של $y = \sin(x)$ והישר $y = 0.5$ (הנקודות A, B, C, D).

A(, 0.5) B(,) C(,) D(,)



(ב) רשמו את פתרונות המשוואה $\sin(x) = 0.5$ בתחום המשורטט.

פתרונות המשוואה הם שיעורי x של נקודות החיתוך של שני הגרפים (שיעורי x של הנקודות A, B, C, D).



(ג) סמנו בעיפרון על המעגל שבדף הנפרד, את הזוויות המתאימות לפתרונות שקיבלתם.

מחקו את הסימונים.

3.  א) הניחו על גרף הפונקציה $y = \cos(x)$ שבדף הנפרד ישר מתאים למשוואה $y = -0.5$.

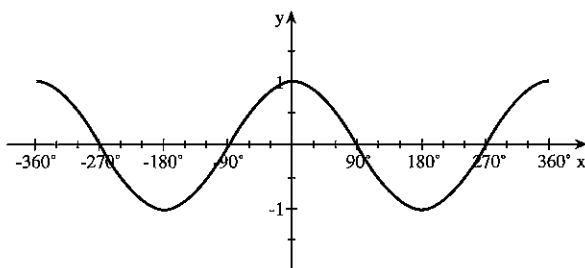
ב) סמנו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
רשמו את שיעורי נקודות החיתוך בתחום המשורטט.
(,) (,) (,) (,)

ג) רשמו את פתרונות המשוואה $\cos(x) = -0.5$.

ד) סמנו בעיפרון על המעגל שבדף הנפרד שתי זוויות המתאימות לפתרונות שקיבלתם.

ה) מחקו את הסימונים.

4.  לפניכם גרף הפונקציה $y = \cos(x)$.
א) איזה ישר הוא הגרף שהמשוואה שלו היא $y = 0$?



ב) פתרו את המשוואה $\cos(x) = 0$.

ג) שרטטו ישר מתאים ופתרו את המשוואה $\cos(x) = 1$.

תרגילים

5. היעזרו בגרף המתאים, שרטטו ישר (אם יש צורך), ופתרו את המשוואות.
רשמו את הפתרונות בתחום מ- -360° עד 360° .

א) $\sin(x) = 0$ ג) $\sin(x) = -0.5$

ב) $\cos(x) = 0.5$ ד) $\cos(x) = -1$

פתרון כללי של משוואות בעזרת מחשבון וגרף - רשות

היעזרו בלוחים שלח הדף הנפרד ושלצידם מסוף הספר, ואישר מהדף השקוף אפגיון פאטולאל.

1. (א) רשמו את כל פתרונות המשוואה $\sin(x) = 0$ בתחום המשוורטט.
 (ב) רשמו ארבעה פתרונות לכל משוואה.
 $\sin(x) = 1$ (i)
 $\sin(x) = -1$ (ii)
 (ג) רשמו, בקירוב, את כל פתרונות המשוואה $\sin(x) = 0.86$, בתחום המשוורטט.
 (ד) פתרו את המשוואה: $\sin(x) = 1.5$.

2. (א) השלימו את פתרון המשוואה: $5\sin(x) = 5$ /:5
 $\sin(x) = 1$

רשמו שני פתרונות.

(ב) השלימו את פתרון המשוואה:

$$2\sin(x) - 3 = -5 \quad /+3$$

$$2\sin(x) = -5 + 3$$

$$2\sin(x) = -2 \quad /:2$$

$$\sin(x) =$$

רשמו שני פתרונות.

3. (א) היעזרו בגרף של $y = \cos(x)$, וקבעו, כמה פתרונות לכל משוואה בתחום המשוורטט.

$$\cos(x) = 0 \quad (i) \quad \cos(x) = -0.85 \quad (iii)$$

$$\cos(x) = -1 \quad (ii) \quad \cos(x) = 0.7 \quad (iv)$$

עד כה נעזרנו בגרף או במעגל למציאת פתרונות למשוואות $\sin(x) = a$ או $\cos(x) = a$. ניתן להשתמש גם במחשבון לצורך הפתרון, בעיקר, אם ברצוננו לקבל דיוק טוב יותר.

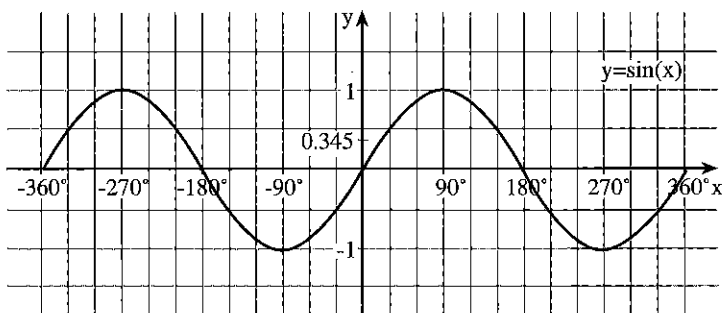


4. א) היעזרו במחשבון למציאת פתרון אחד למשוואה $\sin(x) = 0.345$

או $\boxed{\text{Shift}} \boxed{\sin} \boxed{0.345}$ או $\boxed{\text{Shift}} \boxed{\sin} \boxed{0.345}$ בהתאם למחשבון.

השלימו $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (עגלו למספר מעלות שלם).

סמנו את x_1 על ציר x במערכת הצירים.



מצאתם פתרון אחד של המשוואה.

ב) העבירו ישר מתאים וסמנו עוד פתרון בין 0° ל- 180° . בידקו בעזרת המחשבון.

ג) סמנו שני פתרונות נוספים, רשמו ובידקו בעזרת המחשבון.

5. א) היעזרו במחשבון למציאת פתרון אחד למשוואה: $\sin(x) = -0.26$

(עגלו למספר מעלות שלם). סמנו את הפתרון על ציר x בגרף הנפרד

של $y = \sin x$.

ב) רשמו עוד שלושה פתרונות למשוואה: $\sin(x) = -0.26$.

בידקו בעזרת המחשבון.

6. א) היעזרו במחשבון למציאת פתרון אחד (x_1) למשוואה $\cos(x) = 0.766$

(עגלו למספר מעלות שלם).

ב) סמנו את x_1 על ציר x , בגרף הנפרד של $y = \cos(x)$, היעזרו בו לסימון שאר

הפתרונות הנמצאים בשרטוט ורשמו אותם.

ג) רשמו שני פתרונות שאינם בתחום המשרטט.

ד) מחקו את הסימונים.



7. (א) היעזרו במחשבון למציאת פתרון אחד למשוואה $\cos(x) = -0.94$.

(עגלו למספר מעלות שלם.)

סמנו את הפתרון שמצאתם על ציר x (בשרטוט הקודם). היעזרו בו לסימון שלושה פתרונות נוספים והשלימו.

$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$

(ב) רשמו שני פתרונות שאינם בתחום המשורטט.

8. (פ) $\sin(x) = 0.5$.

(א) - רשמו שני פתרונות בין 0° ל- 360° .

$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$

- רשמו שני פתרונות נוספים, בתחום אחר.

מאחר והפונקציה $y = \sin(x)$ היא פונקציה מחזורית, למשוואה כזו יש אינסוף פתרונות. רשמים את אוסף כל הפתרונות באופן הבא:



$$x_2 = \underline{150^\circ} + 360^\circ k$$

$$x_1 = \underline{30^\circ} + 360^\circ k$$

כאשר k הוא מספר שלם כלשהו.

(ב) - הציבו $k = 1$ בפתרון הראשון $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$.

האם קיבלתם פתרון נוסף מתאים?

- הציבו $k = 1$ בפתרון השני $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$, ובידקו גם אותו.

(ג) הסבירו, מדוע צורת רישום כזו מתאימה לאוסף כל הפתרונות.

(ד) (i) רשמו את הפתרונות של המשוואה $\sin(x) = 1$, בתחום של מחזור אחד.

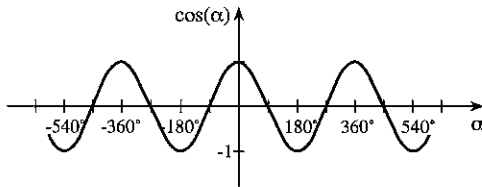
(ii) רשמו פתרון כללי למשוואה זו (בעזרת k).

9. $\cos(x) = 0.8$ (א)

רשמו את הפתרונות של המשוואה בתחום של מחזור אחד (למשל בין 0° ל- 360°), היעזרו במחשבון.

(ב) רשמו פתרון כללי למשוואה זו.

(ג) הציבו את ערכי k הבאים, רשמו לכל מקרה את הפתרונות המתקבלים ואם אפשר, סמנו אותם בגרף.



$k = -1$

$k = 0$

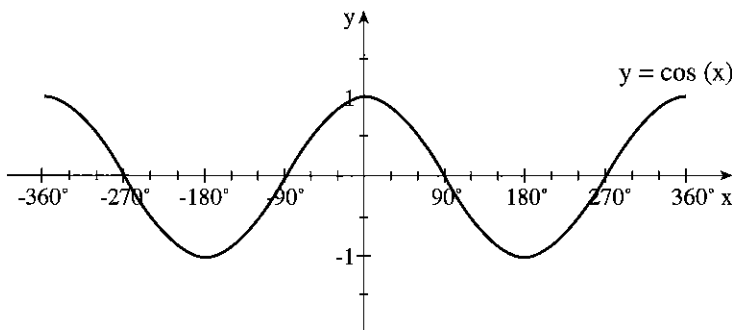
$k = 1$

$k = 2$

תרגילים

10. פתרו את המשוואות בתחום המשוורטט.

(אם יש צורך בודדו תחילה את $\cos(x)$).



(ג) $3\cos(x) + 4 = 4$

(א) $\cos(x) = 1$

(ד) $\cos(x) = 2$

(ב) $6\cos(x) = 3$

11. הניחו את הגרף השקוף המתאים ל- $y = \sin(x)$ על הגרף של $y = \cos(x)$, כך שהצירים יתלכדו.

(א) פתרו את המשוואה $\sin(x) = \cos(x)$ בתחום של מחזור אחד.

(ב) רשמו פתרון כללי למשוואה זו.

12. (i) היעזרו בגרף המתאים (שבדף הנפרד) ובמחשבון, ורשמו פתרונות לכל משוואה בתחום של מחזור אחד (עגלו למספר מעלות שלם).

$$\sin(x) = 0.573 \quad (\text{ג}) \quad \sin(x) = -0.866 \quad (\text{א})$$

$$\sin(x) = -0.906 \quad (\text{ד}) \quad \sin(x) = 0.174 \quad (\text{ב})$$

(ii) היעזרו בגרף ורשמו עוד שני פתרונות פרטיים למשוואה ד'. בידקו בעזרת המחשבון.

(iii) רשמו פתרון פרטי נוסף למשוואה ד' שאינו מופיע בשרטוט.
רשמו פתרונות כלליים למשוואה ד'.

13. (i) היעזרו בגרף המתאים (בדף הנפרד) ובמחשבון, ופתרו את המשוואות בתחום של מחזור אחד. (עגלו למספר מעלות שלם).

$$\cos(x) = 0.34 \quad (\text{ג}) \quad \cos(x) = 0.984 \quad (\text{א})$$

$$\cos(x) = -0.34 \quad (\text{ד}) \quad \cos(x) = -0.984 \quad (\text{ב})$$

(ii) רשמו פתרונות כלליים לכל משוואה.

14. (i) היעזרו במחשבון ובגרף, ורשמו פתרונות בתחום של מחזור אחד, לכל אחת מהמשוואות הבאות (עגלו למספר מעלות שלם).

(אם יש צורך "בודדו" תחילה את $\sin(x)$ או $\cos(x)$.)

(ii) רשמו את הפתרונות הכלליים.

$$\frac{\sin(x)}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{ד}) \quad \sin(x) + 2 = 1.6 \quad (\text{א})$$

$$\sin(x) = 0.85 \quad (\text{ה}) \quad 2\cos(x) = -2 \quad (\text{ב})$$

$$2\cos(x) = 1.7 \quad (\text{ו}) \quad 2\sin(x) + 3 = 4 \quad (\text{ג})$$

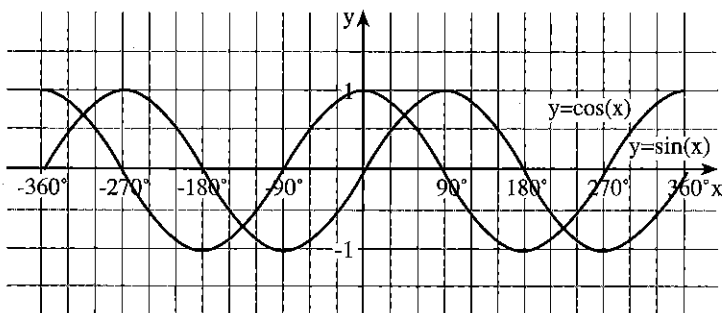
15. (א) רשמו פתרון כללי למשוואה $2\sin(x) = 0.8$.

(ב) רשמו שני פתרונות בתחום בין 720° ל- 980° .

קשרים נוספים בין הפונקציות $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ – רשות

1. בסעיף הקודם פתרנו את המשוואה $\sin(x) = \cos(x)$. 

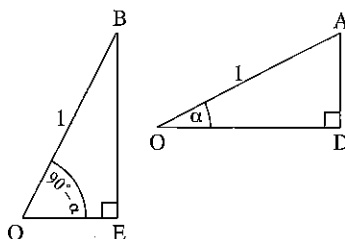
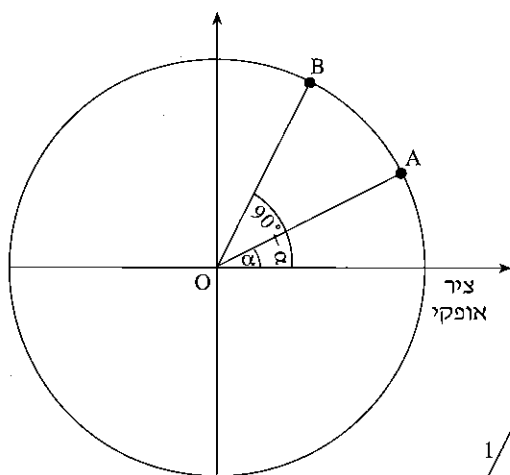
- (א) תזרו ופתרו משוואה זו.
 (ב) רשמו פתרון כללי.
 (ג) רשמו שישה פתרונות פרטיים של המשוואה.



בסעיף זה אבדל קשרים נוספים בין שני הפונקציות $y = \sin(x)$ ו- $y = \cos(x)$.

2.  (א) רשמו את שיעורי הנקודות A ו- B בעזרת הפונקציות $\sin$ ו- $\cos$ של הזוויות המתאימות.

- (ב) העבירו אנכים לישר האופקי מ- A (AD) ומ- B (BE). התקבלו שני המשולשים ADO ו- BEO.



המשך ←

- חשבו את זוויות המשולשים אם $\alpha = 42^\circ$.
 - חשבו את זוויות המשולשים אם $\alpha = 57^\circ$.
 - האם המשולשים חופפים תמיד? נמקו.
 - סמנו את הניצבים השווים בשני המשולשים באותו הסימן.
- ג) $AD = \sin(\alpha)$. הסבירו.
- $OE = \cos(90^\circ - \alpha)$. הסבירו.
- מסקנה $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$
- ד) בטאו, בדרך דומה, את OD ואת BE, והסבירו מדוע $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$.

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

ה) בידקו את הקשרים על-ידי הצבה, עבור זווית חדה בת 72° .

3. א) — שרטטו במחשב, את גרף הפונקציה $y = \sin(90^\circ - x)$.
 — מה קיבלתם? הסבירו.
- ב) — שרטטו במחשב את גרף הפונקציה $y = \cos(90^\circ - x)$.
 — מה קיבלתם? הסבירו.

פְּתוּרָא וְחֶשֶׁב

4. התאימו בין ערכים שווים בשני הטורים.

$\sin(30^\circ)$	•	•	$\cos(45^\circ)$
$\sin(45^\circ)$	•	•	$\cos(10^\circ)$
$\sin(10^\circ)$	•	•	$\cos(65^\circ)$
$\sin(25^\circ)$	•	•	$\cos(60^\circ)$
$\sin(80^\circ)$	•	•	$\cos(80^\circ)$

5. ידוע כי $\sin(35^\circ) = 0.57$, בעזרת נתון זה בלבד השלימו את החסר.

א) $\cos(55^\circ) = \sin \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

ב) $\cos(415^\circ) = \cos \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

ג) $\cos(-55^\circ) = \cos \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

6. (F) (i) הביאו כל משוואה לצורה $\sin(x) =$ או $\cos(x) =$.

מצאו פתרונות לכל משוואה בתחום של מחזור אחד, ואחר כך רשמו פתרון כללי.

דוגמה: $\sin(90^\circ - x) = 0.7$

$\cos(x) = 0.7$

שגלון במחלק מחזור אחד: $x_1 = 45.57^\circ$ $x_2 = -45.57^\circ$

שגלון כללי: $x_2 = 45.57^\circ + 360^\circ k$ $x_2 = -45.57^\circ + 360^\circ k$

(א) $\sin(90^\circ - x) = 0$ (ב) $3\cos(90^\circ - x) = 2$

(ii) - כמה פתרונות למשוואה $\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$?

- כמה פתרונות למשוואה $\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$?

7. (F) נתון $\sin(x) = a$ ו- $\cos(x) = b$. בטאו בעזרת a ו- b, כל אחד מהביטויים הבאים.

(א) $\sin(180^\circ - x) =$ (ה) $\cos(360^\circ - x) =$

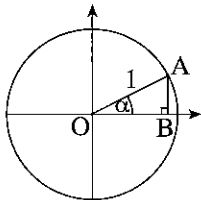
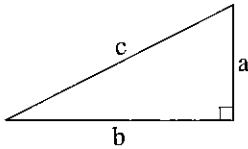
(ב) $\sin(360^\circ + x) =$ (ו) $\sin(90^\circ - x) =$

(ג) $\sin(-x) =$ (ז) $\cos(90^\circ - x) =$

(ד) $\cos(-x) =$ (ח) $\cos(180^\circ - x) =$

ניגן אפלטון אל גרליז 12, II.

8. (F) (א) רשמו את משפט פיתגורס באמצעות אורכי הצלעות a, b ו- c.



המשך ←

(ב) בטאו את אורכי הניצבים של המשולש המשורטט

במעגל בעזרת $\sin(\alpha)$ ו- $\cos(\alpha)$.

(ג) רשמו את משפט פיתגורס באמצעות $\sin(\alpha)$

ו- $\cos(\alpha)$ שרשמתם על צלעות משולש AOB.

ד) בידקו את הזהות, שרשמתם בסעיף ג', עבור זוויות מרביעים אחרים:

i) הציבו $\alpha = 110^\circ$, ובידקו אם $(\sin 110^\circ)^2 + \cos^2(110^\circ) = 1$.

ii) בידקו גם עבור $\alpha = 230^\circ$.

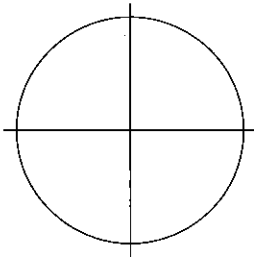
iii) בחרו זווית ברביע הרביעי, הציבו ובידקו.

עבור כל ערך של α מתקיים: $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

9. א) $\sin \alpha = 0.4$ (α בתחום בין 0° ל- 360°).

סמנו את הנקודות המתאימות לערך זה על היקף מעגל היחידה המשוורט.

מעגל יחידה



ב) מצאו את ערכו של $\cos \alpha$ מבלי למצוא את α .

הדרכה:

הציבו בנוסחה $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$, פתרו

את המשוואה ומצאו את $\cos \alpha$.

יש שני פתרונות.

ג) $\cos \alpha = 0.7$ (α בתחום בין 0° ל- 360°).

מצאו את $\sin \alpha$ (מבלי למצוא את גודל הזווית α).

יש שני פתרונות.

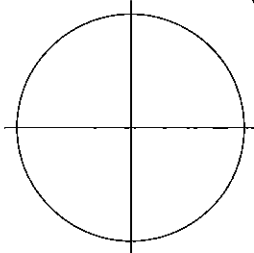
ד) $\sin \alpha = -0.2$ (α בתחום בין 0° ל- 360°).

מצאו את $\cos \alpha$ (מבלי למצוא את גודל הזווית α).

סמנו על מעגל היחידה המשוורט, נקודות (בקירוב)

לחן מתאימים ערכי ה- $\sin$ וה- $\cos$ שמצאתם.

מעגל יחידה



ה) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. מצאו את $\sin \alpha$ (מבלי למצוא את גודל הזווית α).

(α בתחום בין 0° ל- 360°).

10. נתון $\sin \alpha = m$ 

(א) בטאו את $\cos \alpha$ בעזרת m .

(ב) השלימו את החסר (בטאו באמצעות m).

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{iv}) \quad \sin(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{i})$$

$$\cos(360^\circ + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{v}) \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{ii})$$

$$\cos(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{vi}) \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{iii})$$

תרגילים

11. (א) ידוע כי $\sin(40^\circ) = 0.64$

$\cos(\quad) = 0.64$ השלימו:

$$\sin(\quad) = -0.64$$

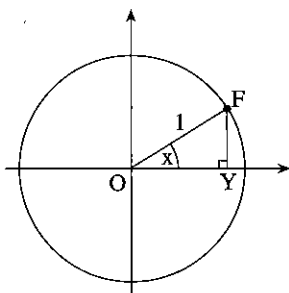
(ב) מצאו ערך נוסף עבורו $\sin(\quad) = 0.64$

12. מתחו קווים בין ערכים שווים בשני הטורים.

$\sin(35^\circ)$	•	•	$\cos(395^\circ)$
$\cos(35^\circ)$	•	•	$\cos(-25^\circ)$
$\sin(115^\circ)$	•	•	$\cos(45^\circ)$
$\cos(64^\circ)$	•	•	$\sin(52^\circ)$
$\sin(45^\circ)$	•	•	$\cos(55^\circ)$
$\cos(38^\circ)$	•	•	$\sin(26^\circ)$

13. ידוע כי $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ (α בין 0° ל- 360°). חשבו את $\cos \alpha$, מבלי לחשב את α תחילה.

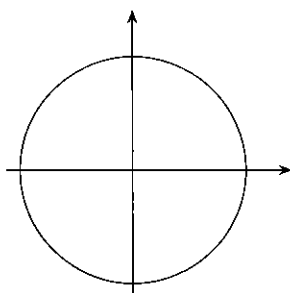
(שימו לב, יש שני פתרונות).



14. נתון: $\sin(x) = 0.3$.
חשבו את אורך הקטע OY.

15. ידוע כי $\sin \alpha = 0.6$ (α בתחום בין 0° ל- 360°).
מבלי לחשב את α , חשבו:

(א) $\cos \alpha$ (ב) $\cos(-\alpha)$ (ג) $\cos(360^\circ + \alpha)$



16. נתון $\cos \alpha = 0.8$ (α בתחום בין 0° ל- 360°).
(א) חשבו את $\sin \alpha$ (מבלי לחשב את α תחילה).
(ב) בפתרון המשוואה מתקבלים שני ערכי $\sin \alpha$
האחד חיובי והשני שלילי.
סמנו, בקירוב, את הנקודות המתאימות
לפתרונות שקיבלתם.

17. ידוע כי $\cos(x) = a$.

בטאו באמצעות a את הגדלים הבאים:

(א) $\cos(180^\circ - x)$ (ד) $\sin(90^\circ - x)$
(ב) $\cos(360^\circ + x)$ (ה) $\cos(-x)$
(ג) $\cos(360^\circ - x)$

18. ידוע כי $\sin(x) = m$.

בטאו באמצעות m את הגדלים הבאים:

(א) $\cos(90^\circ - x)$ (ד) $\sin(180^\circ - x)$
(ב) $\sin(360^\circ + x)$ (ה) $\sin(360^\circ - x)$
(ג) $\sin(-x)$

19. ידוע כי $\cos(x) = k$.

בטאו באמצעות k את הגדלים הבאים:

(א) $\sin(x)$ (ב) $\sin(180^\circ - x)$ (ג) $\cos(90^\circ - x)$

20. פעילות מחשב

הורא את הפעולה הבאה של המחשב, המאפשרת לך לראות את הפונקציה, המצאה הנכונה
שבסוף הספר.

1. (א) שרטטו גרף של הפונקציה $y = \sin x$, בתחום $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
 (ב) – שרטטו, באותה מערכת צירים, את גרף הפונקציה $y = \sin(90^\circ - x)$.
 – מה קיבלתם?
 – איזו הווה בוצעה על גרף הפונקציה $y = \sin x$, כדי לקבל את גרף הפונקציה $y = \sin(90^\circ - x)$?
 (ג) מה יתקבל, לפי דעתכם, אם תשרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $y = \cos(90^\circ - x)$?
 בידקו, באמצעות מחשב.
 (ד) נקו את המסך.
2. (א) שרטטו את גרף הפונקציה $y = [\sin(x)]^2$.
 רשמו שתי תכונות לפונקציה.
 (ב) רשמו את פתרונות המשוואה $[\sin(x)]^2 = 0.8$ בתחום המשוורט.
 (ג) רשמו פתרון כללי למשוואה $[\sin(x)]^2 = 0.8$.
3. רשמו שתי תכונות של הפונקציה $[\cos(x)]^2 = 0.8$.
 שרטטו על המסך, ובידקו.
4. – כיצד, לפי דעתכם, יראה גרף הפונקציה $y = [\sin(x)]^2 + [\cos(x)]^2$?
 – בידקו על-ידי שרטוט גרף הפונקציה במחשב.

פעילות מחשב

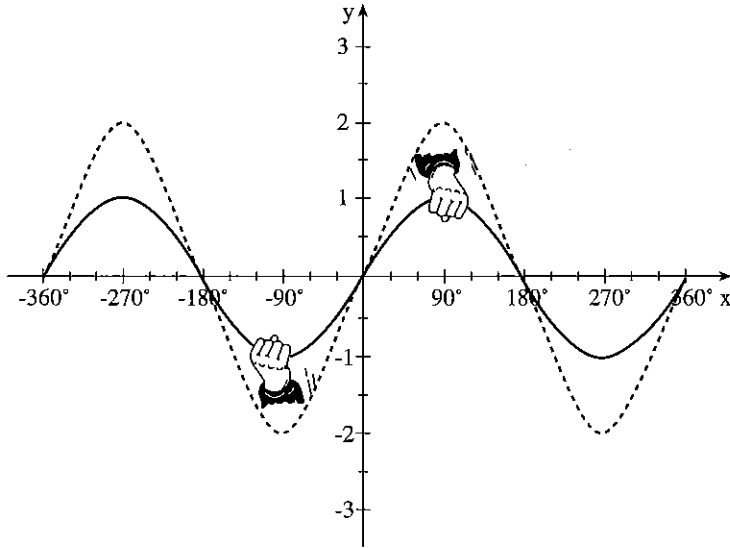
פעילות מחשב

פעילות מחשב

פעילות מחשב

קצת "מתיחות וכיווצים" – רשות

1. מתחו את גרף הפונקציה $y = \sin(x)$ כך שהתקבל הגרף המקוקו.



- (א) מהו, לדעתכם, חוק הפונקציה שהתקבלה?
 (ב) כפלו את ערכי השורה השנייה בטבלה ב-2, ורשמו בשורה השלישית.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
sin(x)	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0

- רשמו במלבן את החוק המתאים לשורת המספרים שרשמתם.
 – האם זו אותה פונקציה שרשמתם בסעיף א?
 – השלימו, על-פי השורה השלישית בטבלה (30°,) האם הנקודה נמצאת על הגרף המקוקו?
 (ג) מהן נקודות המכסימום והמינימום של הגרף המקוקו, בתחום מ-360° עד 360°?
 (ד) מהן נקודות החיתוך של הגרף המקוקו עם ציר x?
 מהי נקודת החיתוך של הגרף המקוקו עם ציר y?

2. א) שרטטו גרף של הפונקציה $y = 3\sin(x)$ במערכת הצירים של תרגיל 1. הציבו בחוק הפונקציה $x = 30^\circ$ ובידקו אם הנקודה $(30^\circ, \quad)$ על גרף הפונקציה ששרטטתם.

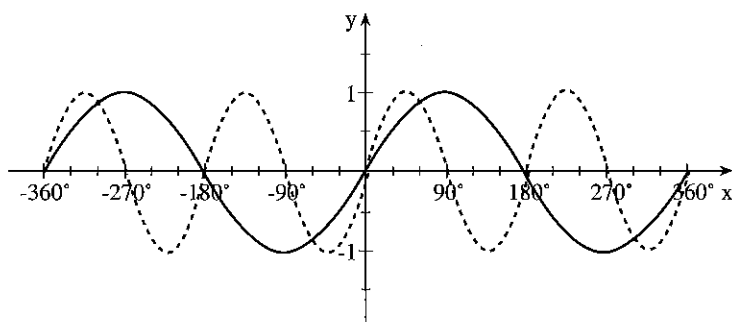
ב) מהם שיעורי נקודות המכסימום של הפונקציה?

ג) מהם שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה?

ד) מהם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים?

ה) מהו אורך המחזור של הפונקציה?

3.  לפניהם הגרפים של הפונקציות $y = \sin(x)$ ו- $y = \sin(2x)$ (מקווקו). א) היעזרו במחשבון או בגרפים, ורשמו לגבי כל אחת מהנקודות על איזה גרף היא נמצאת $(45^\circ, 1)$, $(60^\circ, 0.87)$, $(55^\circ, 0.94)$, $(-90^\circ, 0)$



ב) ענו על השאלות לגבי הפונקציה $y = \sin(2x)$.

מהו אורך המחזור של הפונקציה?

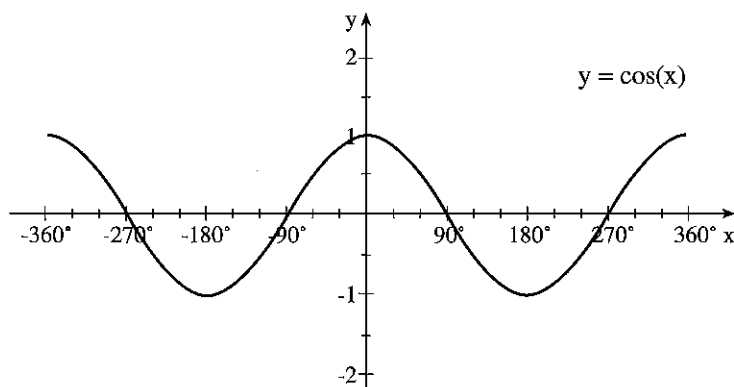
מהם שיעורי נקודות המכסימום של הפונקציה?

מהם שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה?

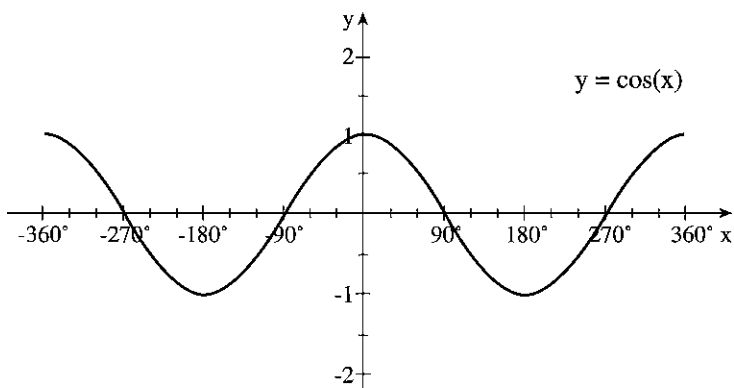
מהם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים?

ג) מהם שיעורי נקודות החיתוך של שני הגרפים $y = \sin(x)$ ו- $y = \sin(2x)$ בתחום $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$?

4. נסו לשרטט, במערכת הצירים, את הגרף של הפונקציה $y = 2\cos(x)$.



5. נסו לשרטט, במערכת הצירים, את הגרף של הפונקציה $y = \cos(2x)$.



6. פעילות מחשב

הוראג אפפלה בלזגא אכנאג שונאג האאפאשלאג שראט גרף ש פונקציה גאזאלא בנספח בסוף הספר.

1. (א) שרטטו גרף של הפונקציה $y = \sin(x)$ בתחום $0^\circ \leq x \leq 720^\circ$.
(ב) "הלכו" על הגרף, קראו את שיעורי הנקודות והשלימו.

$\sin(120^\circ) =$ _____	$\sin(50^\circ) =$ _____
$\sin(220^\circ) =$ _____	$\sin(180^\circ) =$ _____
$\sin(27^\circ) =$ _____	$\sin(90^\circ) =$ _____
$\sin(65^\circ) =$ _____	$\sin(150^\circ) =$ _____
$\sin(360^\circ) =$ _____	$\sin(270^\circ) =$ _____

- (ב) "הלכו" על הגרף וענו על השאלות:

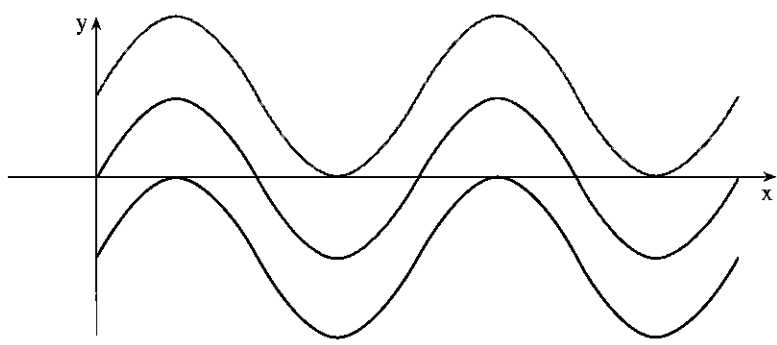
- מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x ? ועם ציר y ?
- מהו הערך הגדול ביותר של הפונקציה?
- מהו הערך הקטן ביותר של הפונקציה?
- מהו אורך המחזור?

2. (א) שרטטו גרף של הפונקציה $y = \sin(x) + 1$ בתחום $0^\circ \leq x \leq 720^\circ$.
(ב) "הלכו" על הגרף וענו על השאלות.

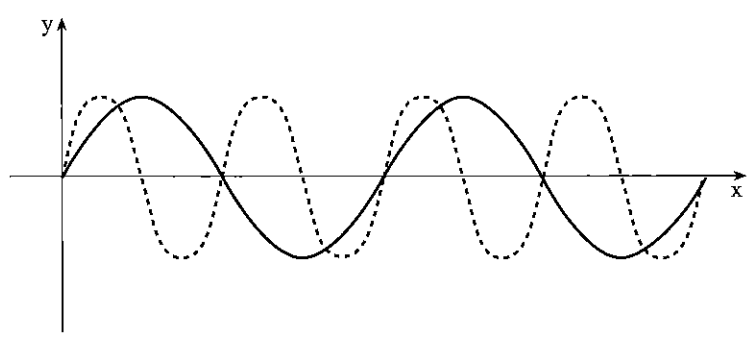
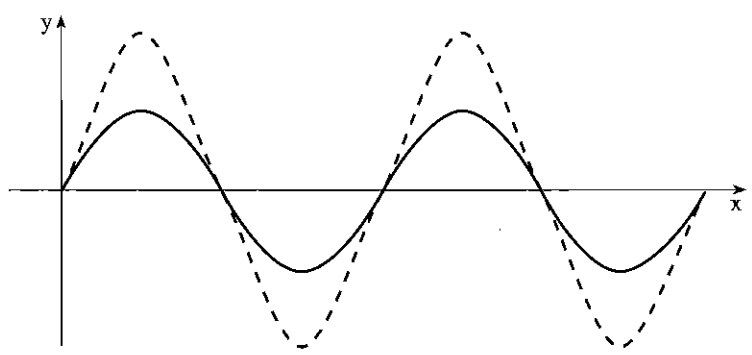
- מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x ? ועם ציר y ?
- מהו הערך הגדול ביותר של הפונקציה?
- מהו הערך הקטן ביותר של הפונקציה?
- מהו אורך המחזור?

פעילות מחשב
פעילות מחשב
פעילות מחשב
פעילות מחשב

3. על המסך מופיעים הגרפים של שתי הפונקציות מתרגילים קודמים. שרטטו פונקציה נוספת כך שיתקבל על המסך השרטוט הבא.

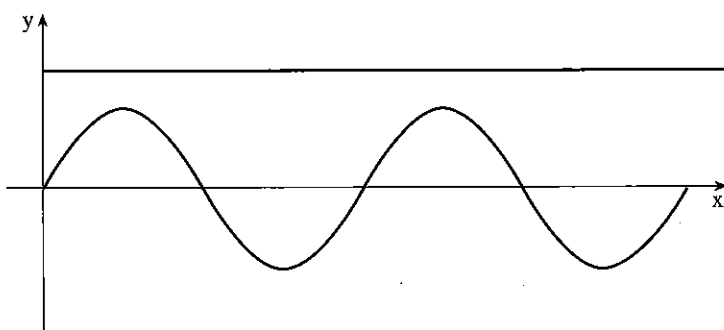


4. רשמו פונקציות ושרטטו כך שיתקבלו על המסך השרטוטים הבאים.

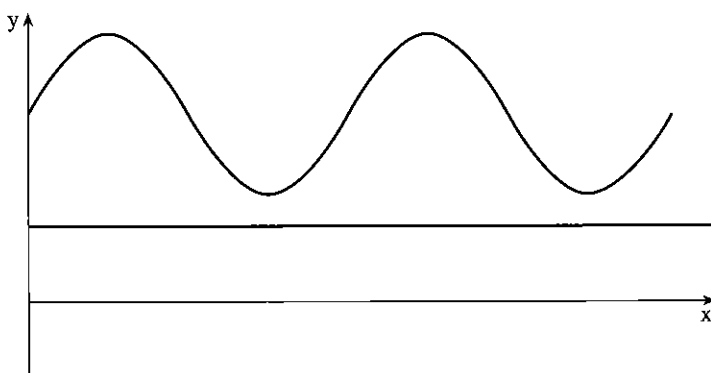


5. (א) נקו את המסך.
 (ב) שרטטו גרף של הפונקציה $y = \sin(x)$ בתחום $0^\circ \leq x \leq 720^\circ$.
 (ג) שרטטו, באותה מערכת צירים, את הישר $y = 0.3$.
 ד "הלכו" על הגרף של פונקציית הסינוס, מצאו פתרונות למשוואה $\sin(x) = 0.3$ בתחום המשוורט.
 (ה) שרטטו, באותה מערכת צירים, את הישר $y = -0.5$.
 "הלכו" על הגרף של פונקציית הסינוס ומצאו פתרונות למשוואה $\sin(x) = -0.5$ בתחום המשוורט.

6. (א) נקו את המסך.
 (ב) רשמו פונקציות ושרטטו כך שיתקבל על המסך השרטוט הבא.



- (ג) נקו את המסך.
 (ד) רשמו פונקציות ושרטטו כך שיתקבל על המסך השרטוט הבא.



שימושי הפונקציות הטריגונומטריות לחישובים בהנדסה

יוצאים מהמעגל

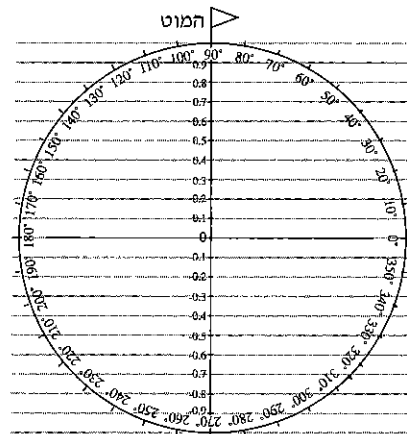
בגרדיוס הפאסים גקשלו בין הפונקציה המחזורית $\sin \alpha$ לבין השימושים אחישוה זאווה וקטעים במשולש גאלהס הכרגס באיגודיכס אקרגלס השלולון הראשולן.

1. בכל מעגל שרטוט את הזווית α הנתונה.

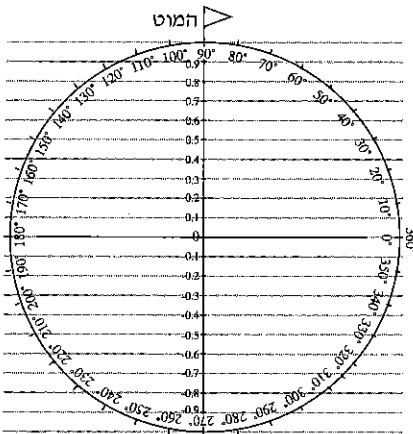
קראו ורשמו את $\sin(\alpha)$.

(העבירו אנך לציר האנכי ורשמו בשרטוט את אורכו.)

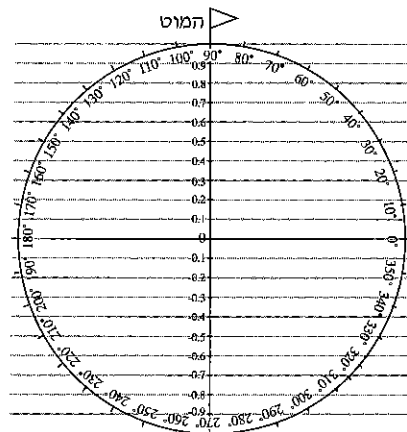
א) $\alpha = 40^\circ$



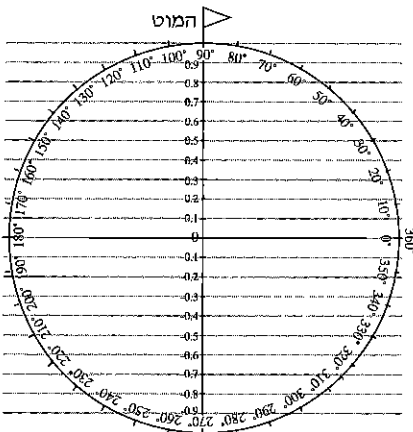
ב) $\alpha = 70^\circ$



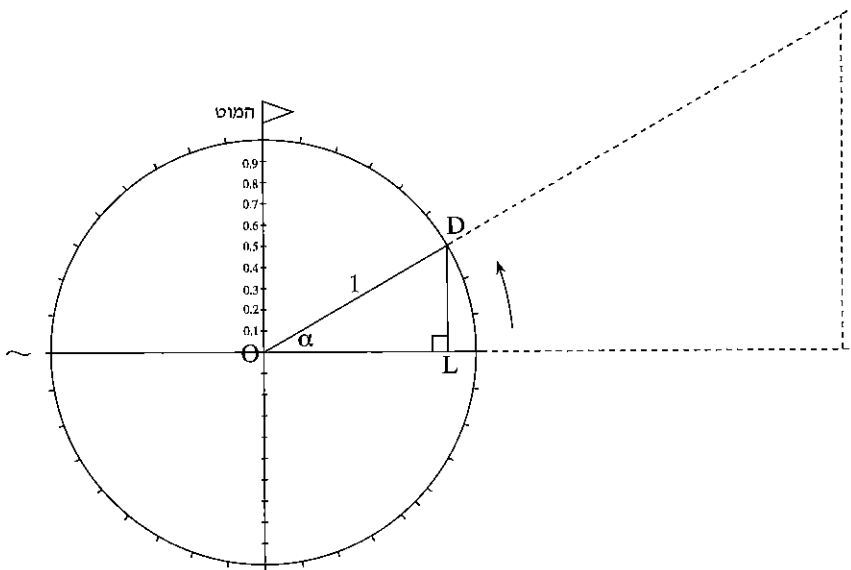
ג) $\alpha = 20^\circ$



ד) $\alpha = 60^\circ$



2. (Ⓜ) א) השלימו לפי המעגל: $\sin(\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$



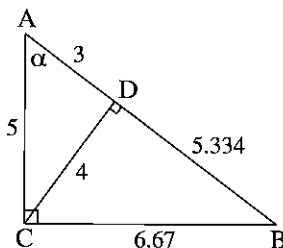
- ב) הגדילו, בשרטוט, את משולש ODL פי 3.
 - חשבו במשולש המוגדל, את אורך הניצב מול α , ואת אורך היתר. רשמו בשרטוט.
 - חשבו את היחס בין אורך הניצב הנ"ל לאורך היתר, והשוו עם הערך של $\sin(\alpha)$.
 ג) הקטינו בשרטוט את משולש ODL פי 2. חשבו את אורך הניצב מול α ואת אורך היתר במשולש המוקטן. רשמו בשרטוט.
 חשבו את היחס בין אורך הניצב לאורך היתר, והשוו עם הערך של $\sin(\alpha)$.

$$\frac{\text{אורך הניצב מול זווית } \alpha}{\text{אורך היתר}} = \text{השלימו:}$$

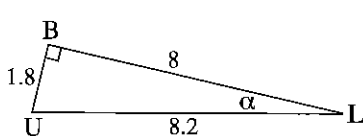
במשולש ישר זווית ABC:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{אורך הניצב מול זווית } \alpha}{\text{אורך היתר}}$$

3.  (א) חשבו את $\sin \alpha$ (במשולש ACD).
 (ב) בטאו את הזוויות האחרות, וקבעו האם המשולשים CBD ו-ACD דומים.

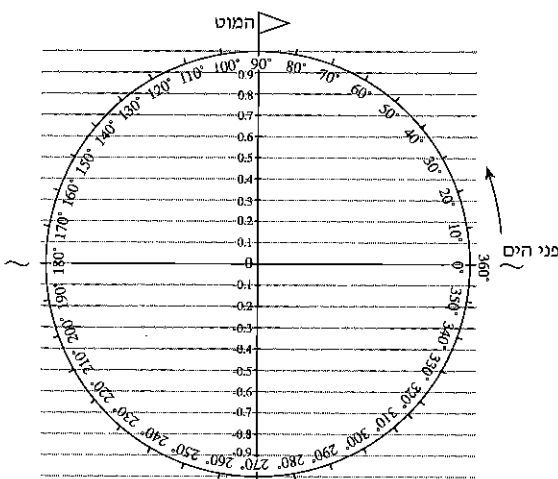


- (ג) בידקו אם מתקבל ערך שווה ל- $\sin \alpha$ לפי נתוני ACBD.
 (ד) האם גם למשולש ABC אותן זוויות כמו ל- $\triangle ACD$: נמקו.



4.  (א) חשבו את $\sin \alpha$ במשולש BUL.

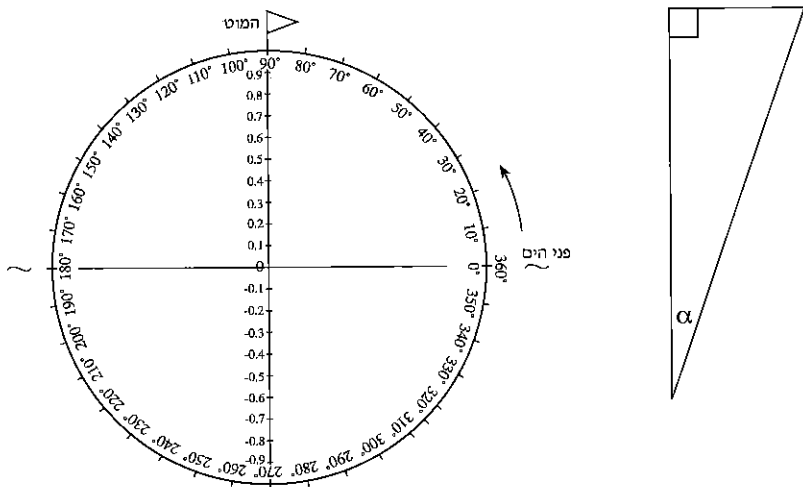
- (ב) סמנו את הערך של $\sin \alpha$, שקיבלתם בסעיף א', במעגל, ומצאו בקירוב, את הזווית המתאימה.



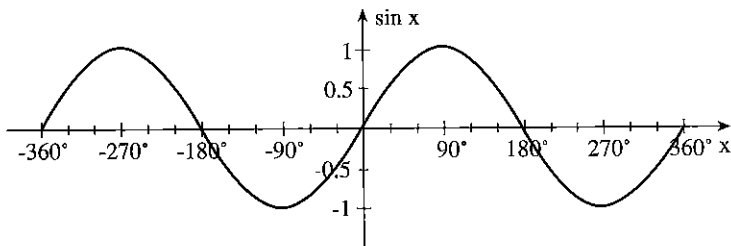
- (ג) בידקו בעזרת המחשבון.

5. α זווית במשולש ישר-זווית.

(א) הדגישו את חלק המעגל עליו נמצאים ערכי α שיכולים להתאים למשולש.



(ב) הדגישו את חלק הגרף המתאים לערכי α במשולש הנ"ל.

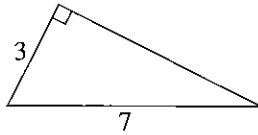


ג) כמה פתרונות של המשוואה $\sin(x) = 0.4$ ניתן למצוא בגרף המשוורטט כאן?

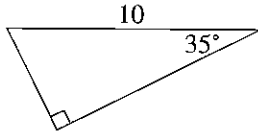
(ד) כמה פתרונות מתאימים לזווית α במשולש ישר זווית?

תרגילי חזרה

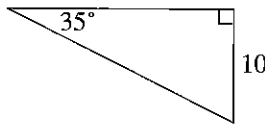
1. (א) חשבו את הזוויות במשולש.



(ב) חשבו את צלעות המשולש.



(ג) חשבו את צלעות המשולש.

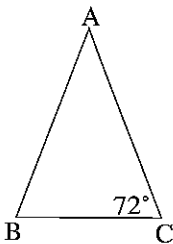


2. אורך השוק של משולש שווה-שוקיים 16 יחידות, ואורך הבסיס 8 יחידות.

(א) שרטטו ורשמו את הנתונים בשרטוט.

(ב) חשבו את זוויות המשולש.

(ג) חשבו את שטח המשולש.

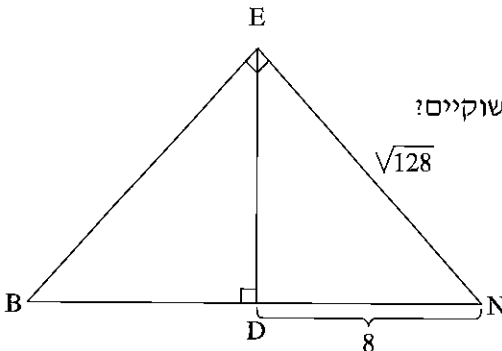


3. המשולש ABC הוא שווה שוקיים. BD גובה לשוק AC,

ואורכו 5 ס"מ.

(א) שרטטו וחשבו את צלעות המשולש ואת שטחו.

(ב) שרטטו את חוצה הזווית B וחשבו את אורכו.



4. (א) חשבו את אורך ED.

(ב) חשבו את זוויות ABEN.

(ג) האם המשולש BEN שווה שוקיים?

הסבירו.

5. במשולש SOD אורך הצלע SO 7 יחידות.

אורך הצלע DO הוא 15 יחידות.

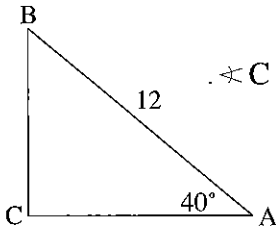
אורך הגובה המורד אל OD (SI) הוא 5 יחידות.

(א) שרטטו ורשמו את הנתונים בשרטוט.

(ב) חשבו את הזוויות והצלעות במשולש SIO.

(ג) חשבו את צלעות המשולש SID.

(ד) חשבו את זוויות המשולש SOD.



6. (א) חשבו את אורך הגובה לצלע AC אם נתון $\angle C = 90^\circ$.

(ב) שרטטו את חוצה הזווית B וחשבו את אורכו.

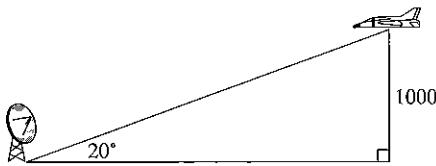
(ג) שרטטו את התיכון לצלע AC וחשבו את אורכו.

7. תחנת רדאר, העוקבת אחרי המטוסים, מזהה מטוס בזווית גובה של 20° .

(ראו שרטוט)

גובה המטוס מעל הקרקע 1000 מ'.

מה מרחקו מתחנת הרדאר?



8. סולם, הנשען על הקיר, יוצר זווית של 50° עם הריצפה.

הקצה העליון של הסולם נוגע בקיר בגובה 1.5 מ'.

מה אורך הסולם? (שרטטו ורשמו את הנתונים).

9. מטעמי בטיחות ניתן להשעין סולם שאורכו 5 מ' בזווית שגודלה לכל היותר 65°

לקרקע.

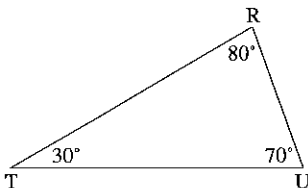
האם ניתן בעזרת הסולם הזה להגיע לחלון שגובהו 4.5 מ' מעל הקרקע?

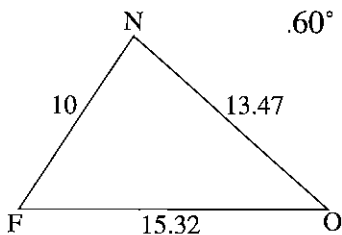
10. במשולש RUT אורכי הצלעות, בקירוב, הם: 15.72 יחידות, 7.98 יחידות,

ו- 15 יחידות.

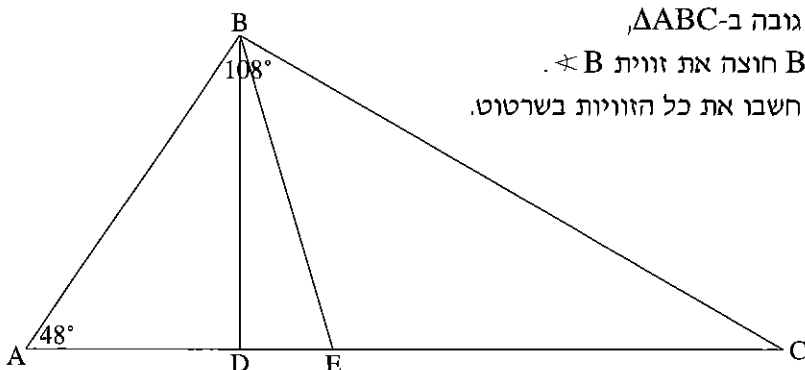
רשמו את אורכי הצלעות המתאימות בשרטוט.

נמקו.





11. הגדלים של הזוויות ב- ΔNOF הם: 60° , 40° , 80° .
רשמו כל זווית במקום המתאים בשרטוט.
נמקו.



12. BD גובה ב- ΔABC ,

ו- BE חוצה את זווית B.

א) חשבו את כל הזוויות בשרטוט.

- ב) לפניכם אורכים של ארבעה קטעים: 32.9 , 25.4 , 13.7 , 13.4
התאימו אורכים אלה לקטעים AC, BC, BD ו- BE.
נסו להתאים באמצעות שיקולים, ללא חישובים טריגונומטריים (אורכי הקטעים וגודל הזוויות אינם על-פי הנתונים).

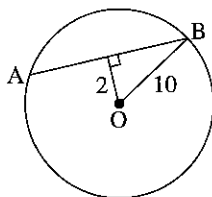
13. אי אפשר לבנות משולש על-פי אף אחת מסדרות הנתונים שבטבלה.
נמקו, בכל מקרה, מדוע.

להמחשה, שרטטו ורשמו את הנתונים בשרטוט.

$\sphericalangle A$	$\sphericalangle B$	$\sphericalangle C$	AB	AC	BC	
40°	30°	125°	30	22	35	א)
50°	30°	100°	14	18	30	ב)
40°	40°	100°	25	30	25	ג)
110°	40°	30°	30	18	18	ד)
90°	60°	30°	5	4	3	ה)

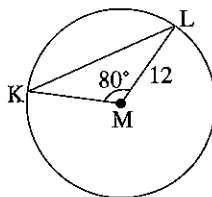
14. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), מרחק הקודקוד A מהבסיס 8 ס"מ. גודל זווית הבסיס 40° .

- א) שרטטו שרטוט מדגים.
- ב) חשבו את שאר הזוויות במשולש.
- ג) חשבו את אורכי צלעות המשולש ABC .
- ד) חשבו את שטח המשולש ABC .



15. במעגל, שמרכזו בנקודה O , העבירו מיתר AB . אורך רדיוס המעגל 10 ס"מ. מרחק הנקודה O מהמיתר 2 ס"מ.
- א) מאיזה סוג המשולש OAB ?
 - ב) חשבו את גודל הזווית O במשולש OAB (הזווית המרכזית המתאימה למיתר AB).

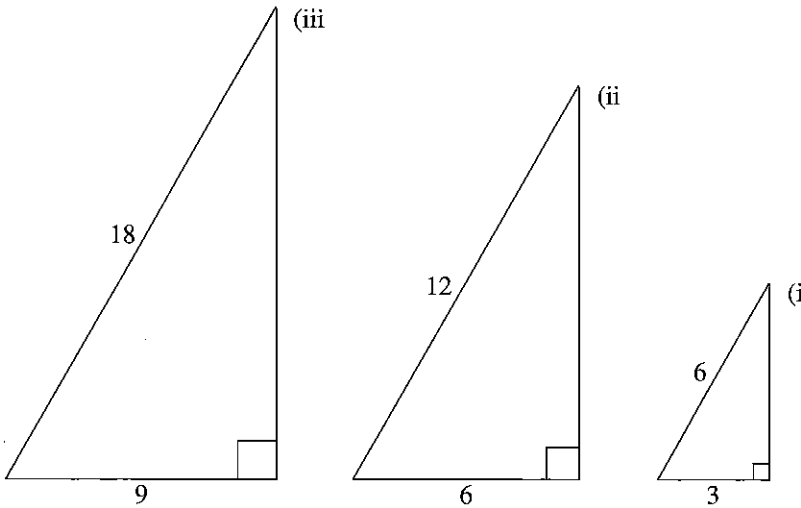
16. הזווית KML (80°) היא זווית מרכזית במעגל שמרכזו בנקודה M . אורך רדיוס המעגל 12 ס"מ.



- א) חשבו את שטח המשולש KML .
- ב) חשבו את היקף המשולש KML .

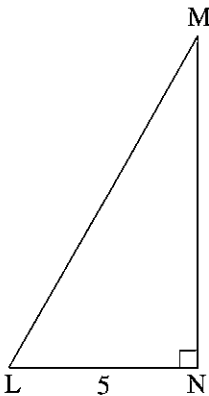
ביטויים במשולש

1. א) חשבו את הזוויות בכל אחד מהמשולשים (רשמו בשרטוט את גודלן).



ב) הסבירו, מדוע שלושת המשולשים דומים.

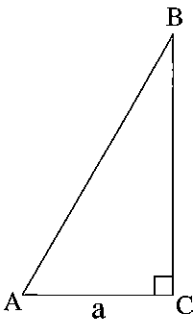
ג) משולש LMN דומה לשלושת המשולשים מסעיף א'. רשמו בשרטוט את אורך היתר.



ד) משולש ABC דומה לכל המשולשים המשורטטים בסעיפים הקודמים.

נסמן את צלע AC ב- a , בטאו את AB בעזרת a .

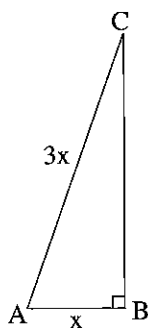
מהו היחס בין AC ל- AB?



2. במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$)

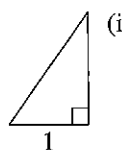
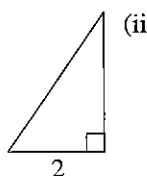
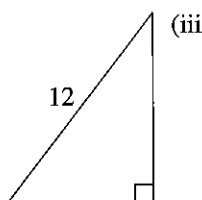
$AC = 3x$, $AB = x$ (ראו שרטוט).

(א) מה היחס בין הצלעות AB ו- AC ?



(ב) כל המשולשים (iii, ii, i) דומים למשולש ABC .

רשמו את אורכי צלעותיהם וגודל זוויותיהם.



במשולשים דומים, כל הזוויות שוות, בהתאמה.

במשולשים ישרי זווית דומים, היחס בין אורך ניצב (מול זווית שווה) לאורך היתר, שווה.

3. במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$)

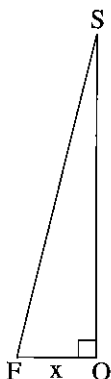
אורך היתר AC גדול פי 4 מאורך הניצב AB .

(א) שרטטו שני משולשים מדגמים, המקיימים את הנתונים, ורשמו בשרטוטים את אורכי הצלעות.

(ב) חשבו את הזוויות בכל משולש.

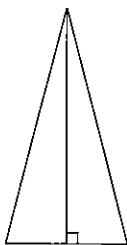
(ג) הסבירו מדוע בכל המשולשים, התקבלו אותן זוויות.

4. במשולש ישר זווית $\angle O = 90^\circ$, אורך היתר SF , גדול פי 6 מאורך הניצב FO .



- (א) נתון $FO = x$.
 בטאו את SF באמצעות x , ורשמו בשרטוט.
 (ב) שרטטו שני משולשים מדגמים, המקיימים את הנתונים, ורשמו בשרטוט את אורכי הצלעות.
 (ג) חשבו את הזוויות בכל אחד מהמשולשים.
 (ד) אם נבחר משולש שבו אורך היתר 252 יחידות ואורך הניצב 42 יחידות. מה יהיה גודל זוויתו? בידקו.

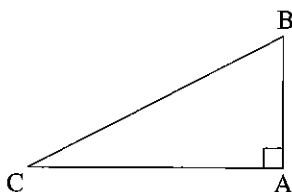
5. במשולש ישר-זווית, אורך היתר גדול פי 5 מאורך אחד הניצבים. חשבו את זוויות המשולש.



6. במשולש שווה שוקיים אורך השוק גדול פי 2 מאורך הבסיס.
 (א) רשמו נתונים מתאימים במשולש המשוטט.
 (ב) שרטטו משולש מדגים נוסף, ורשמו גם בו נתונים מתאימים.
 (ג) חשבו את זוויות שני המשולשים.
 מה הקשר בין הזוויות בשני המשולשים? נמקו.

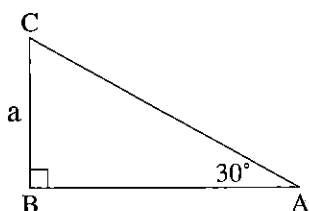
7. שרטטו שלושה משולשים ישרי זווית מדגמים.
 רשמו בכל משולש נתונים כך שאורך היתר גדול ב-3 ס"מ מאורך אחד הניצבים.

- (א) חשבו את הזוויות בכל משולש.
 (ב) הסבירו, מדוע לא קיבלתם אותם גדלים של זוויות.
 (ד) סמנו את אורך BA ב- a , בטאו את אורך היתר CB בעזרת a .
 (CB גדול ב-3 ס"מ מ- BA)



- (ה) – בטאו את סינוס הזווית C באמצעות a .
 – חשבו את $\angle C$ אם $a = 3$.
 – חשבו את $\angle C$ אם $a = 4$.

ראינו כי בשני משולשים ישרי זווית, אם צלע אחת גדולה/קטנה פי אותו מספר, מצלע אחרת בהתאמה - אז המשולשים דומים וזוויותיהם שוות. לכן, ניתן להשתמש בדוגמה פרטית לחישוב הזוויות. אך כאשר צלע אחת גדולה/קטנה באותו מספר מצלע אחרת בהתאמה המשולשים לא דומים, ועל כן הזוויות לא בהכרח שוות, ולא ניתן להשתמש בדוגמה פרטית לחישוב הזוויות.



8. במשולש המשורטט $CB = a$.

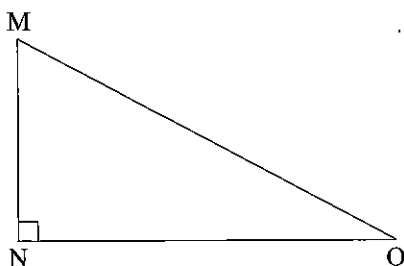
אורך היתר גדול ב-4 ס"מ מאורך הניצב CB .

(א) בטאו את היתר בעזרת a .

(ב) כדי לחשב את אורך CB (a), בטאו את

$\sin 30^\circ$ בעזרת a .

(ג) כדי לקבל משוואה, חשבו את $\sin 30^\circ$, פתרו, ומצאו את a .

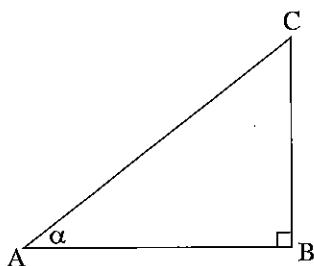


9. במשולש ישר זווית MNO ($\angle N = 90^\circ$).

נתון: $MO = 20$ ס"מ, $\angle O = \alpha$.

(א) השלימו: $\sin \alpha =$

(ב) בטאו את MN באמצעות α .



10. במשולש ABC ($\angle B = 90^\circ$).

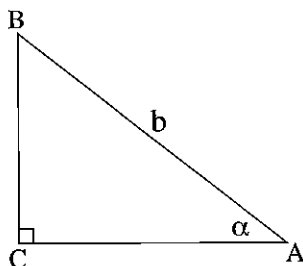
(א) נתון: $AC = 12$ ס"מ, $\angle A = \alpha$.

בטאו את CB בעזרת α .

(ב) נתון $AC = a$, $\angle A = \alpha$.

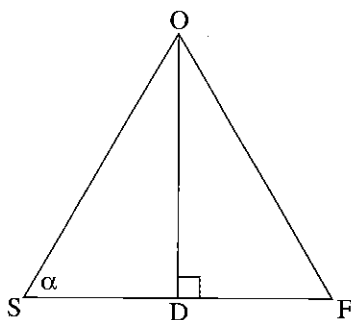
השלימו: $\sin \alpha =$

בטאו את BC באמצעות a ו- α .



11. במשולש המשורטט $BA = b$, $\angle A = \alpha$.

בטאו את CB בעזרת α ו- b .



12. משולש SOF שווה שוקיים ($SO = OF$)
 זווית הבסיס היא α ואורך השוק $SO = m$.
 (א) בטאו את OD באמצעות m ו- α .

(ב) נתון כי אורך הבסיס 30 ס"מ $SF =$.
 בטאו את שטח המשולש SOF
 באמצעות m ו- α .

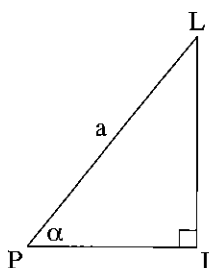
(ג) חשבו את שטח המשולש אם:

(i) $\alpha = 40^\circ$ ו- $m = 19.58$ ס"מ

(ii) $\alpha = 60^\circ$ ו- $m = 30$ ס"מ

(iii) $\alpha = 80^\circ$ ו- $m = 86.38$ ס"מ

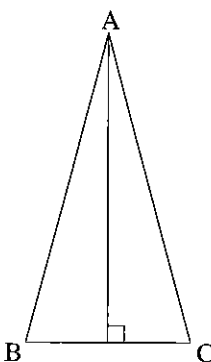
(ד) שערנו מתי יתקבל השטח הגדול ביותר. אם יש באפשרותכם לשרטט גרפים בעזרת מחשב, תוכלו לבדוק את השערתכם על-ידי שרטוט גרף מתאים.



13. משולש PIL ישר זווית ($\angle I = 90^\circ$).
 נתון: $\angle P = \alpha$, $PL = a$.
 בטאו את LI, $\angle L$, ו- PI באמצעות a ו- α .

תרגילים

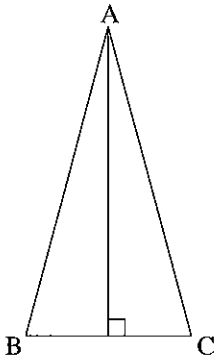
14. ABC משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). אורך השוק, גדול פי 3 מאורך הבסיס.



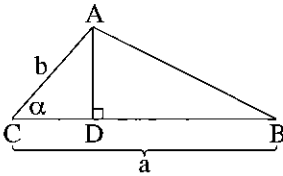
(א) בחרו גדלים מתאימים, וחשבו את זוויות משולש ABC.

(ב) בחרו גדלים אחרים, מתאימים לנתונים, וחשבו את גודלי הזוויות.

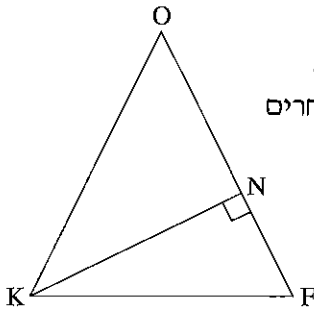
(ג) האם קבלתם אותן תוצאות בסעיפים א' ו- ב'?
 הסבירו.



15. $\triangle ABC$ משולש שווה שוקיים ($AB = AC$),
 אורך השוק גדול ב-2 יחידות מאורך הבסיס.
 (א) שרטטו משולש, בחרו נתונים מתאימים, וחשבו את זוויות המשולש ABC .
 (ב) מה תוכלו לומר על גודל הזוויות, אם תבחרו גדלים אחרים לצלעות, בהתאם לנתונים? נמקו.



16. במשולש $\triangle ABC$, $AC = b$, $CB = a$, $\angle C = \alpha$.
 (א) בטאו את הגובה (AD) באמצעות α ו- b .
 (ב) בטאו את שטח המשולש ABC , באמצעות a , b ו- α .
 (ג) חשבו את שטח המשולש ABC , אם $\alpha = 40^\circ$, $b = 5$ ס"מ, $a = 12$ ס"מ.



17. משולש KOF שווה שוקיים ($KO = OF$),
 אורך השוק הוא פי 1.5 מאורך הגובה לשוק.
 (א) — בחרו גדלים מתאימים וחשבו את $\angle O$.
 — מה יהיו גודל $\angle O$, אם תבחרו נתונים אחרים (לפי אותם תנאים)? נמקו.
 (ב) חשבו את שאר זוויות משולש KOF .
 (ג) סמנו $KN = a$.
 — בטאו את OF בעזרת a .
 — בטאו את שטח משולש KOF בעזרת a .

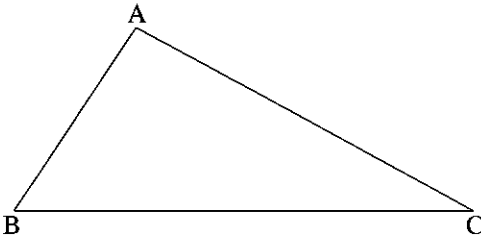
18. (א) שרטטו שלושה משולשים שווי צלעות, ורשמו בשרטוטים אורכי צלעות וגודלי הזוויות.
 (ב) חשבו את אורך הגובה לאחת הצלעות, בכל משולש.
 (ג) חשבו פי כמה גדול אורך הצלע, מאורך הגובה אליה, בכל משולש.

עוד על שטח משולש

במשולש ABC נתון:

$$.BC = m'' \cap 12, AB = m'' \cap 10$$

$$\angle B = 70^\circ$$

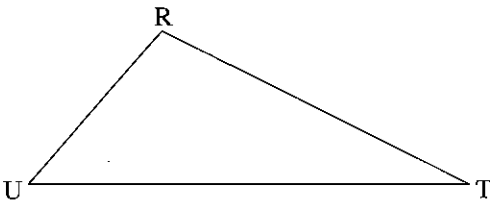


(א) העבירו גובה AD לצלע BC, וחשבו את אורכו.

(ב) חשבו את שטח המשולש ABC.

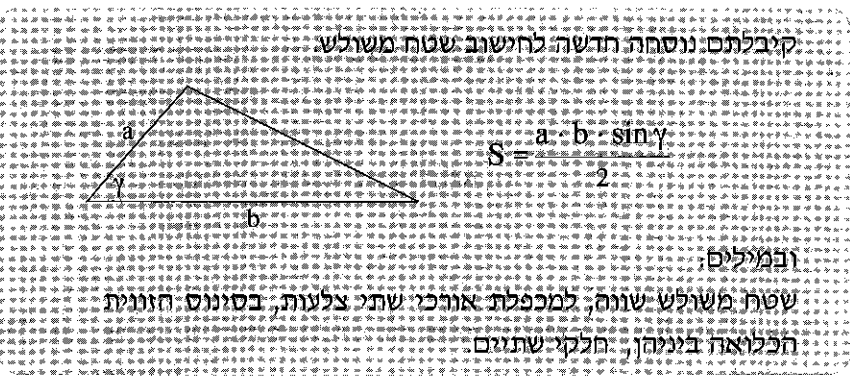
במשולש RUT נתון:

$$. \nless U = \gamma \text{ , } UT = b \text{ , } RU = a$$



(א) העבירו גובה RM, לצלע UT, ובטאו אותו באמצעות a ו-γ.

(ב) בטאו את שטח המשולש RUT באמצעות a, b ו-γ.

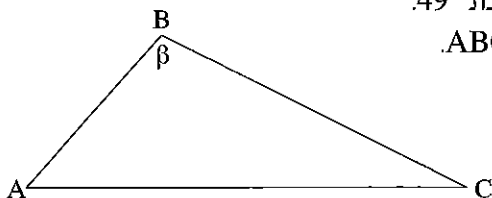


במגדליים, במחילי הקדש, כבוד העלמא אבטא זי.

3. במשולש ABC נתונים אורכי הצלעות: $AB = 7$ ס"מ, $AC = 17$ ס"מ.

הזווית בין צלעות אלו ($\angle A$) בת 49° .

א) חשבו את שטח המשולש ABC.



ב) חישבו ומצאו כי אורך BC הוא 13.49 ס"מ.

– רשמו ביטוי, בעזרת β , לשטח המשולש.

– היעזרו בשטח שמצאתם בסעיף א', וחשבו את גודל הזווית β .

– חשבו את גודל הזווית C.

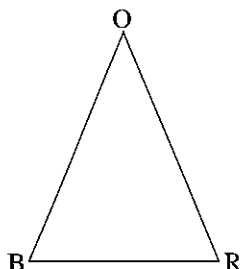
4. במשולש שווה שוקיים BOR ($BO = OR$), אורך השוק

12 ס"מ, וזווית הראש בת 20° .

א) חשבו את שטח המשולש.

ב) חשבו את שטח המשולש אם זווית הראש 30° .

(אורך השוק נשאר 12 ס"מ).



ג) רשמו את התוצאות שקיבלתם בסעיפים א' ו- ב' בטבלה, והשלימו את הטבלה.

זווית הראש	20°	30°	40°	60°	80°	120°	150°
השטח							

ד) שער, עבור איזו זווית ראש, יתקבל שטח מכסימלי.

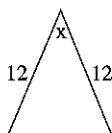
הציבו ובידקו, אם השטח עבור הזווית המשווערת, גדול מכל השטחים שמצאתם.

ה) רשמו ביטוי לשטח המשולש, בעזרת x (זווית הראש).

כדי לבדוק אם אכן השטח עבור הזווית המשווערת,

מכסימלי, שרטטו את הגרף באמצעות מחשב או מחשבון

גרפי, ובידקו מהי נקודת המכסימום.



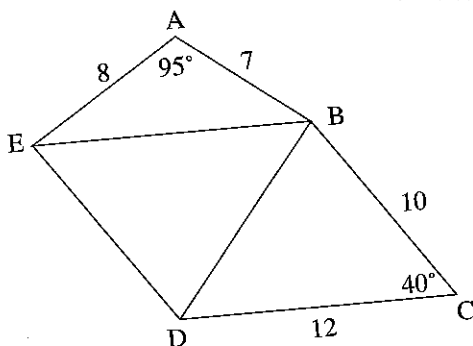
כאן נמצא את הפתרון

5. במשולש שווה שוקיים KLM ($KL = KM$) זווית הראש בת 44° , ואורך השוק 8 ס"מ.

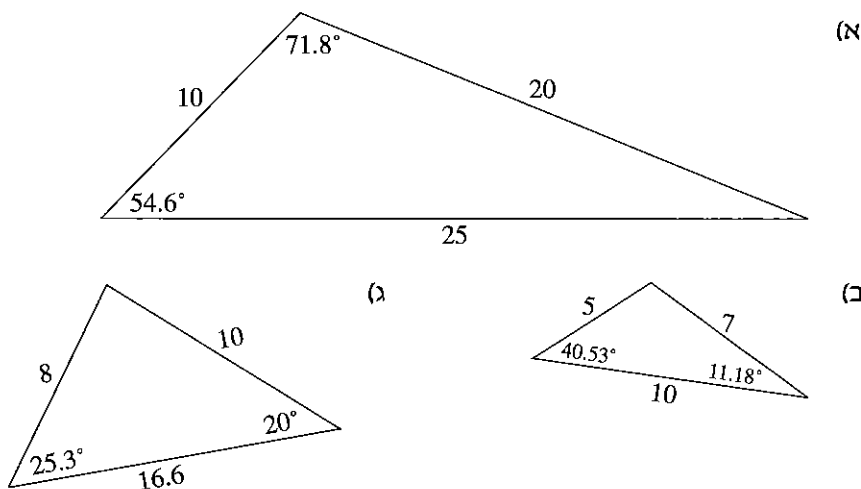
- (א) שרטטו שרטוט מדגים.
 (ב) חשבו את שטח המשולש.
 (ג) חשבו את זוויות הבסיס.
 (ד) איזה מהערכים הבאים, מתאים להיות אורך בסיס המשולש (LM):
 8, 6, 5, 4 ? נמקו.

תרגילים

6. שטח המוחמש ABCDE הוא 80 סמ"ר.
 חשבו את שטח המשולש BED.



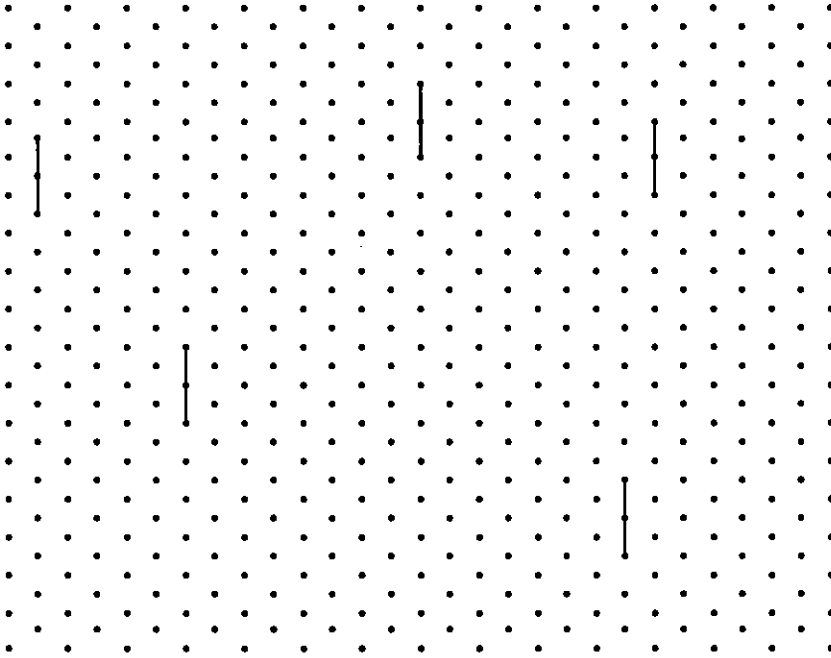
7. רק באחד משלושת המשולשים הבאים, הנתונים אכן מתאימים להיות צלעות וזווית של אותו משולש. מצאו באיזה מהם. נמקו.



מרובעים – מבוא

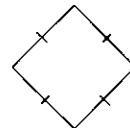
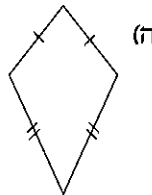
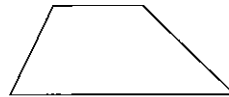
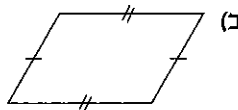
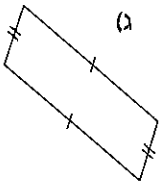
1. (i) שרטטו את המרובעים כך שהקודקודים יהיו בנקודות, ואחד הקטעים המשורטטים יהיה צלע במרובע.

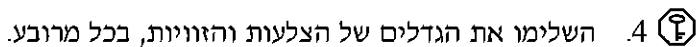
(א) מעוין (ב) דלתון שאינו מעוין (ג) מלבן (ד) טרפז (ה) מקבילית שאינה מעוין או מלבן



(ii) האם ניתן לשרטט, באופן זה, ריבוע?

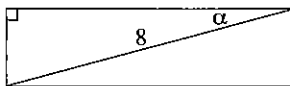
2. (i) סמנו את המרובעים שהם מקביליות.





(ג) שערו, עבור איזו זווית יתקבל שטח מכסימלי.

286 פירוש חזקוני לפרשת ויקרא



(ד) הביטוי המתאים לשטח המלבן הוא:

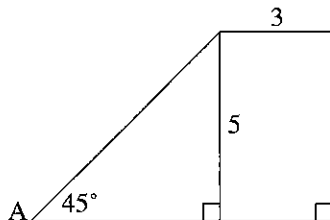
$$S = 64 \cdot \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$(S = 64 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$

שרטטו, באמצעות מחשב או מחשבון גרפי, את גרף הפונקציה המתאימה ל- α את השטח, בתחום בין 0° ל- 90° , ובידקו את השערתכם.

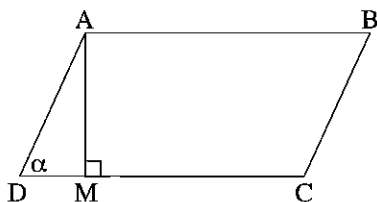
6. (א)

חשבו את היקף הטרפז על-פי הנתונים הרשומים בשרטוט.



(ב) חשבו את ההיקף אם $A = 35^\circ$.

7. במקבילית ABCD, נתון: $AB = 12$ יחידות, $AD = 9$ יחידות.



(א) מה שטח המקבילית, אם $\alpha = 30^\circ$?

(ב) מה שטח המקבילית, אם $\alpha = 50^\circ$?

(ג) שערו, מה צריך להיות גודל הזווית

α , כדי שהשטח יהיה מכסימלי.

(ד) כתבו ביטוי, באמצעות α , לאורך

הגובה (AM).

(ה) בטאו את שטח המקבילית,

באמצעות α .

(ו) אם יש לכם אפשרות, השתמשו במחשב או במחשבון גרפי, ושרטטו

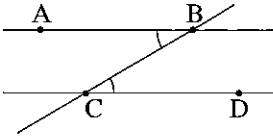
פונקציה המתארת את השטח כפונקציה של הזווית (בתחום בין

0° ל- 90°).

– בידקו את השערתכם מסעיף ג'.

הקבלה וזיהוי

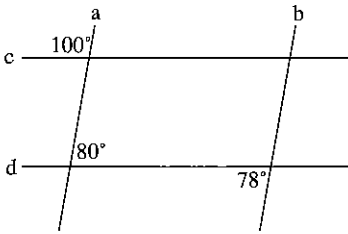
אם $AB \parallel CD$, אז הזוויות המסומנות שוות. הן נקראות זוויות מתחלפות בין מקבילים.



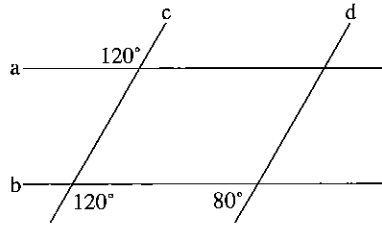
ולחיפך, אם הזוויות האלה שוות אז הישרים AB ו-CD מקבילים.

1. חשבו זוויות ובידקו אם $a \parallel b$ ואם $c \parallel d$ (אל תסתמכו על השרטוט).

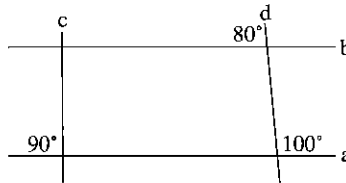
(ב)



(א)



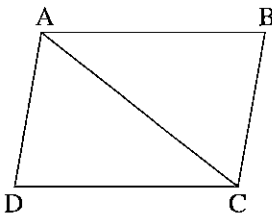
(ג)



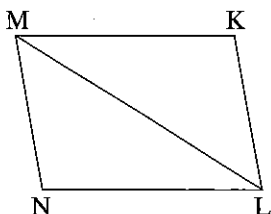
2. רשמו את הנתונים בשרטוט, חשבו זוויות נוספות, וקבעו אם המקבילית המתקבלת היא ריבוע, מעוין, מלבן, או מקבילית אחרת, (השרטוטים אינם על-פי הנתונים).

(א) ABCD מקבילית.

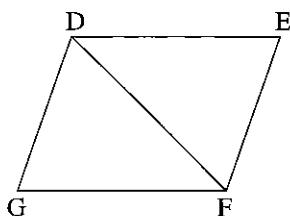
$$\angle ADC = 80^\circ, \angle CAB = 50^\circ$$



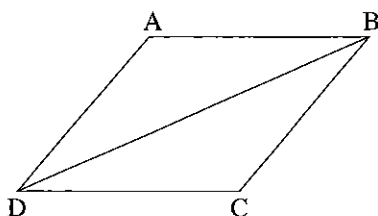
המשך →



- ב) MKLN מקבילית.
 $\angle KLM = 48^\circ$, $\angle KML = 42^\circ$.



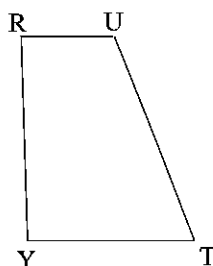
- ג) DEFG מקבילית.
 $\angle GDF = 45^\circ$, $\angle FDE = 45^\circ$.



- ד) ABCD מקבילית.
 $\angle DBC = 25^\circ$, $\angle ABD = 25^\circ$.

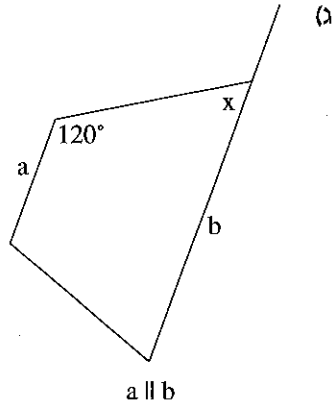
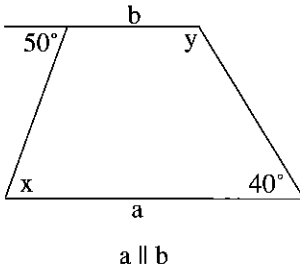
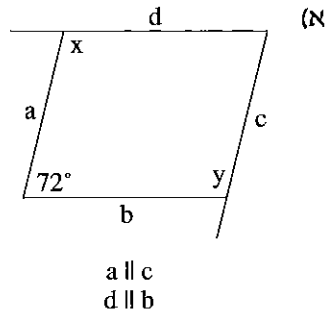
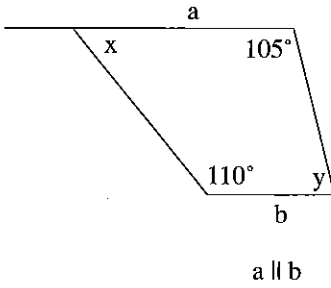
במרובע בו יש זוג צלעות מקבילות, יש שני זוגות של זוויות סמוכות שסכומן 180° .
 לדוגמה: נתון: $a \parallel b$
 השלימו:
 $\underline{\quad} + \underline{\quad} = 180^\circ$
 $\underline{\quad} + \underline{\quad} = 180^\circ$

גם הטענה ההפוכה נכונה: אם יש שני זוגות של זוויות סמוכות שסכומן 180° , אז במרובע יש זוג צלעות מקבילות. (מספיק לבדוק זוג אחד של זוויות).



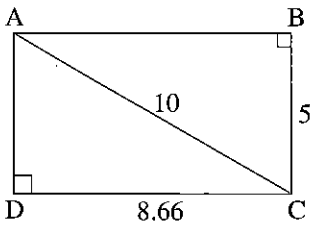
3. בטרפז ישיר RUTY ($RU \parallel TY$),
 אורך השוק UT = 20 יחידות.
 $\angle U = 110^\circ$, RU = 8 יחידות.
 א) חשבו את זוויות הטרפז.
 ב) חשבו את היקף הטרפז.
 (העבירו תחילה גובה מקודקוד U).

4. בכל שרטוט, חשבו את גודל הזוויות החסרות (x ו-y).

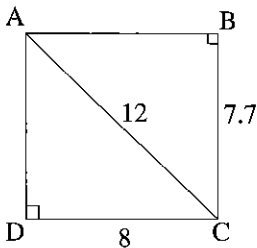


תרגילים

5. חשבו על סמך הנתונים הרשומים בשרטוט. (אל תקבעו על סמך השרטוט, שאינו בהכרח על-פי הנתונים.)

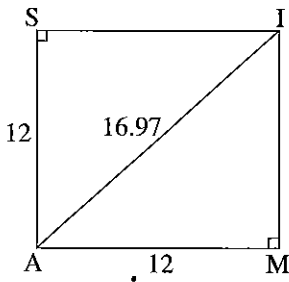


(א) חשבו את $\angle ACB$ ואת $\angle ACD$.
האם המרובע ABCD הוא מלבן?
נמקו.

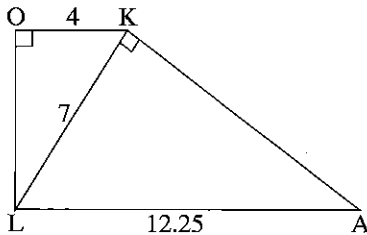


(ב) האם המרובע ABCD הוא מלבן?
נמקו.

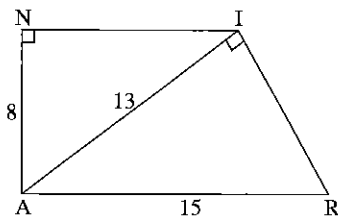
המשך ←



ג) חשבו את $\angle AIM$ ואת $\angle SIA$.
האם המרובע SIMA הוא ריבוע? נמקו.



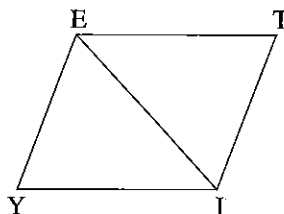
ד) חשבו את $\angle KLA$ ואת $\angle OKL$.
האם המרובע KOLA הוא טרפז? נמקו.



ה) חשבו את $\angle NAI$ ואת $\angle IAR$.
האם המרובע NIRA הוא טרפז? נמקו.

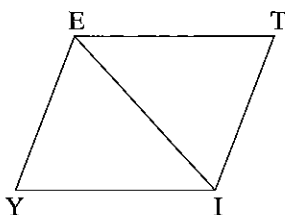
6. נתון כי המרובע YETI מקבילית.

א) חשבו את גודל זוויתיו וקבעו אם YETI ריבוע, מלבן, או מעוין.
(השרטוטים אינם על-פי הנתונים). שרטטו מחדש לפי מה שקבעתם.



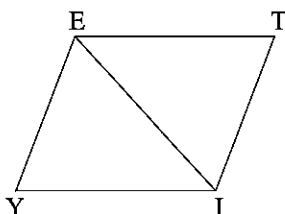
א) נתון:
 $\angle YEI = 55^\circ$
 $\angle TEI = 55^\circ$

המשך ←



(ב) נתון: $\star YEI = 55^\circ$

$\star TEI = 35^\circ$



(ג) נתון: $\star YEI = 55^\circ$

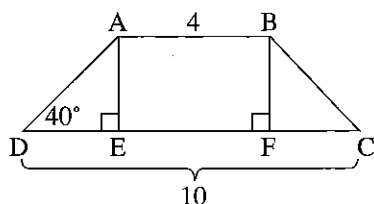
$\star TEI = 45^\circ$

(ii) נתון: 10 יחידות YI .

חשבו את הצלעות של המרובע YETI בסעיפים א' ו- ב'.

(iii) במקבילית בסעיף ג', שרטטו גובה מהקודקוד E לצלע YI .

אורך הגובה 7.8 ס"מ. חשבו את צלעות המקבילית.



7. ABCD טרפז שווה שוקיים.

(א) חשבו את אורך AD , DE ו- AE .

(ב) "נניח" את C מבלי לשנות את מקום הנקודות A, B, D, E, F

שרטטו, שרטוט מדגים ומצאו את גודל C אם אורך DC נתון.

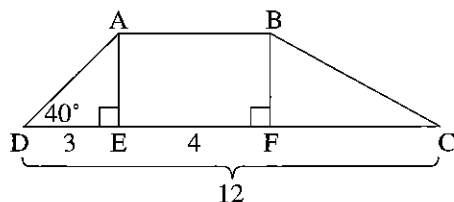
(i) $DC = 12$ יחידות

(ii) $DC = 15$ יחידות

(iii) $DC = 8$ יחידות

(iv) $DC = 6$ יחידות

(v) $DC = 4$ יחידות

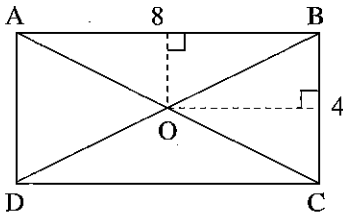


איזו צורה התקבלה?

(ג) נסו לשרטט סקיצה לגרף שיתאר את השתנות גודל הזווית C כפונקציה של

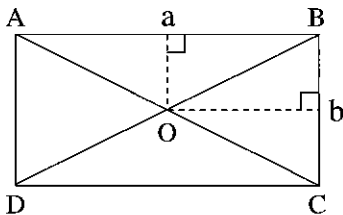
אורך DC .

אלכסונים במלבן



1. (א) חשבו את שטח $\triangle AOB$.

– חשבו את שטח $\triangle BOC$.



(ב) בטאו את שטח $\triangle AOB$ באמצעות

a ו- b .

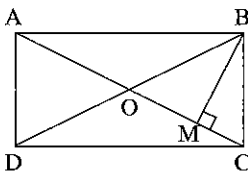
בטאו את שטח $\triangle BOC$ באמצעות

a ו- b .

האלכסונים במלבן, מחלקים אותו לארבעה משולשים שווים שוקיים. בדרך זו נוצרים שני זוגות של משולשים חופפים, וכל ארבעת המשולשים שווים שטח.



ניתן להוכיח את העובדה ששטחי המשולשים הנוצרים שווה, בדרך אחרת:



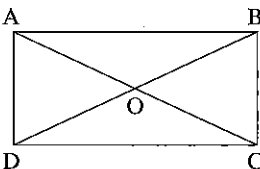
משרטים אנך לאלכסון מאחד הקודקודים (לדוגמה BM).

אנך זה הוא הגובה למשולש $\triangle BOC$ וגם למשולש $\triangle AOB$. אורכי הצלעות אליהן הגובה משורטט בשני המשולשים שווים ($OC = OA$), ולכן שטח

שני המשולשים שווה. שני המשולשים האחרים במלבן חופפים בהתאמה, לכן השטח של ארבעת המשולשים שווה.



2. (א) אורך כל אלכסון במלבן 10 ס"מ, הזווית החדה בין האלכסונים 70° .



– חשבו את שטח $\triangle AOB$.

(היעזרו בנוסחת השטח שהכרתם קודם: שטח משולש שווה למכפלת אורכי שתי צלעות בסינוס הזווית שביניהן חלקי שתיים).

– מה שטח $\triangle BOC$? מה שטח המלבן?

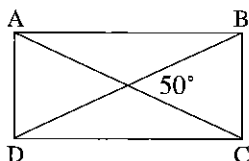
המשך ←

(ב) אורך כל אלכסון במלבן k יחידות. הזווית החדה בין האלכסונים α .

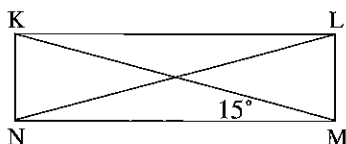
– בטאו את שטח $\triangle AOB$ באמצעות k ו- α .

– בטאו את שטח $\triangle BOC$ באמצעות k ו- α .

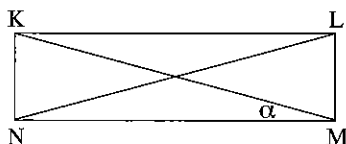
על-פי היכרותכם עם הפונקציה $\sin \alpha$, נסו לנמק מדוע שני הביטויים שקיבלתם שווים.



(א) 3. הזווית החדה הנוצרת בין אלכסוני מלבן היא בת 50° . חשבו את כל הזוויות שיוצרים האלכסונים עם הצלעות.



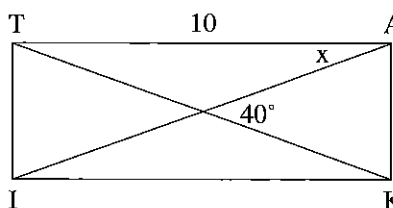
(ב) הזווית שיוצר האלכסון עם אחת מצלעות המלבן היא בת 15° . חשבו את הזווית החדה בין אלכסוני המלבן.



(ג) הזווית שיוצר האלכסון עם אחת מצלעות המלבן היא בת α° . בטאו את הזווית החדה בין אלכסוני המלבן.

(א) 4. חשבו את אורכי צלעות המלבן, אם אורך האלכסון 15 יחידות, והזווית שהוא יוצר עם אחת הצלעות היא בת 20° . שרטטו תחילה.

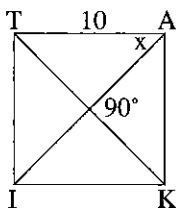
(ב) חשבו את אורכי צלעות המלבן, אם אורך האלכסון 15 יחידות, והזווית שהוא יוצר עם אחת הצלעות היא בת 45° . שרטטו תחילה. באיזה מלבן מדובר?



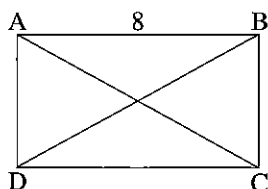
(א) 5. במלבן $KITA$, הזווית החדה בין האלכסונים היא בת 40° , אורך אחת הצלעות 10 ס"מ. חשבו את x .

העתיקו את $\triangle TAI$ מחוץ למלבן, עם הנתונים. חשבו את גודל IA ו- IT ורשמו בשרטוט, את הערכים שמצאתם.

המשך ←



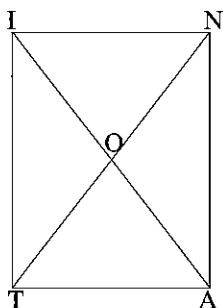
- (ב) חזרו על כל השלבים שבסעיף א', עבור המלבן המשורטט כאן.
באיזה מלבן מדובר במקרה זה?



6. (א) אורך אלכסוני המלבן ABCD 10 יחידות.
חשבו את הזווית החדה בין האלכסונים.
(ב) נשנה את אורך האלכסונים ל-12 יחידות.
מה גודל הזווית בין האלכסונים במקרה זה?

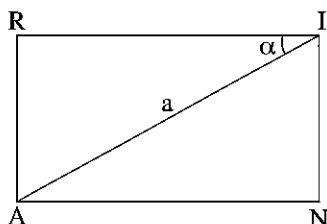
- (ג) מה צריך להיות אורך האלכסונים, בקירוב, כדי שהמרובע ABCD יהיה ריבוע?

תרגילים



7. במלבן NATI נתון:
8 ס"מ OA, 10 ס"מ AT.
(א) חשבו את זוויות משולש OAT.
(ב) חשבו את שטח המלבן.

8. במלבן RUSO, אורך האלכסון 10 יחידות OU,
ואורך הצלע 6 יחידות US.
חשבו את גודל הזווית החדה בין אלכסוני המלבן.

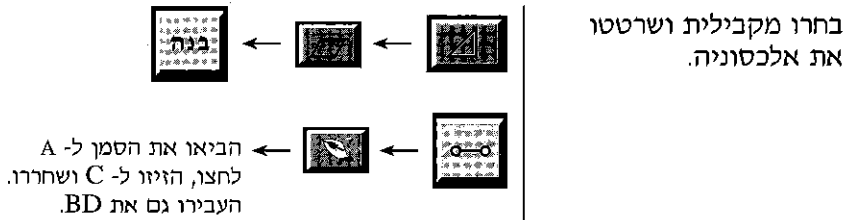


9. המרובע RINA מלבן.
(א) בטאו את RA בעזרת α ו- a .
(ב) בטאו את $\angle RAI$ בעזרת α .
(ג) בטאו את IR בעזרת α ו- a .
(ד) בטאו את היקף המלבן בעזרת α ו- a .
(ה) בטאו את שטח המלבן בעזרת α ו- a .

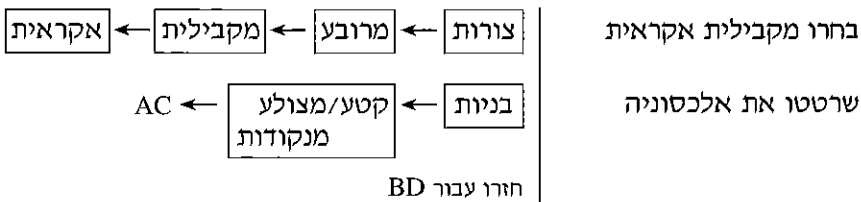
מקבילית

1. אם ברשותכם מחשב ותוכנה של גיאומטריה דינמית (משער גיאומטרי, או הנדסה בתנועה) בצעו את תרגיל 1 ועברו לאחר מכן לתרגיל 3, אם לא התחילו מתרגיל 2.

הנדסה בתנועה:



המשער גיאומטרי:

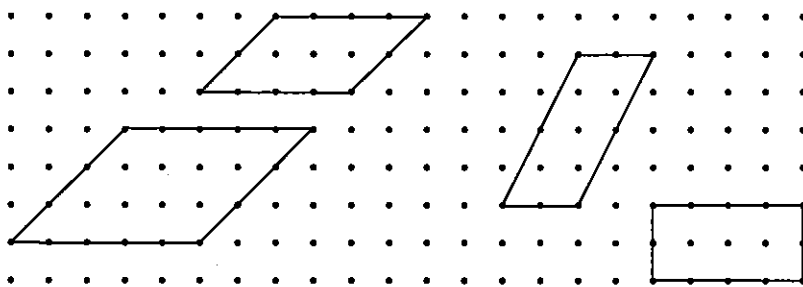


בידקו, תוך שינוי המקבילית (גררו קודקוד), אילו מהתכונות הבאות מתקיימות בכל מקבילית:

- האלכסונים חוצים זה את זה.
- האלכסונים מאונכים זה לזה.
- האלכסונים שווים זה לזה.
- האלכסונים חוצים את הזוויות.

רק אחת מהתכונות הנ"ל מתקיימת בכל המקביליות, איזו? נסו להסביר מדוע.

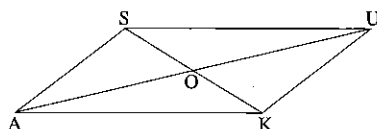
2. (א) העבירו אלכסונים בכל אחת מהמקביליות המשוורטות.



(ב) אילו מהתכונות הבאות מתקיימות, בכל אחת מהמקביליות? נמקו.

- האלכסונים חוצים זה את זה.
- האלכסונים שווים זה לזה.
- האלכסונים מאונכים זה לזה.
- האלכסונים חוצים את הזוויות.

(ג) אילו מהתכונות הרשומות לעיל, אינן בהכרח תכונות של מקבילית?



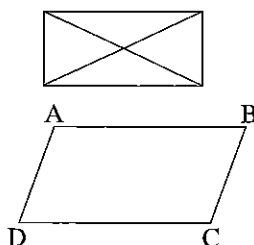
3. (א) במקבילית SUKA נתון:

$SK = 16$ יחידות, $AU = 22$ יחידות,

$\angle UOK = 25^\circ$.

(היעזרו בנוסחה לחישוב שטח משולש בעזרת אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן)

- (א) חשבו את שטח המשולש OUK.
- (ב) חשבו את שטח המשולש SOU.
- (ג) מה תוכלו לומר על ארבעת המשולשים שנוצרו?
- (ד) חשבו את שטח המקבילית.
- (ה) מאיזה סוג המקבילית, אם המשולשים האלה גם שווים שוקיים?

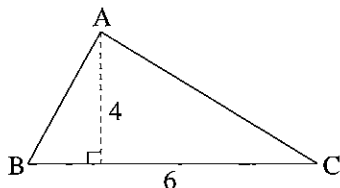


4. (א) ראינו שהאלכסונים במלבן יוצרים ארבעה משולשים שווים-שוקיים.

- שרטטו את אלכסוני המקבילית.
- סמנו את מפגש האלכסונים ב-M.
- האם גם במקבילית שאינה מלבן, יוצרים האלכסונים ארבעה משולשים שווים שוקיים?
- מצאו זוגות של משולשים חופפים.
- מצאו משולשים שווים שטח.

5.  חשבו שטח של מקבילית שאורך אלכסוניה 10 ס"מ ו-12 ס"מ, וגודל הזווית בין האלכסונים 48° . שרטטו תחילה שרטוט מדגים.

6.  דרך אחרת לחישוב שטח מקבילית, שוודאי הכרתם בלימודיכם הקודמים, דומה לדרך של חישוב שטח משולש.



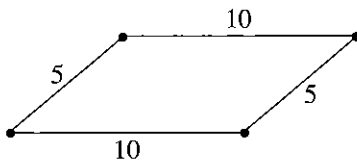
- (א) חשבו את שטח המשולש על-פי הנתונים.
(ב) שרטטו מקבילית על-ידי העברת מקביל ל-BC דרך A ומקביל ל-AB דרך C.
מה שטח המקבילית?

שטח מקבילית שווה למכפלת אורך אחת הצלעות באורך הגובה המשורטט אליה.

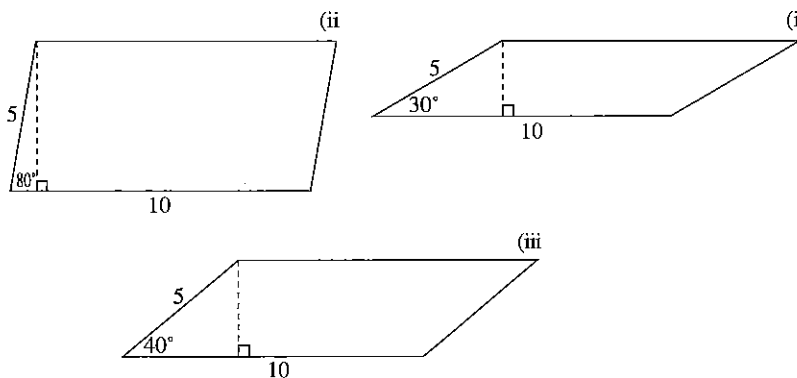
$$S = a \cdot h_1$$

$$S = b \cdot h_2$$

7.  אפשר לבנות מקביליות שונות עם אותן צלעות, למשל, 5 יחידות, 10 יחידות.



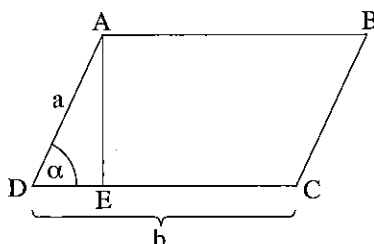
- (א) חשבו את גובהה ושטחה של כל מקבילית.



המשך ←

- (ב) לאיזו משלוש המקביליות הנ"ל השטח הגדול ביותר?
 (ג) שרטטו מקבילית נוספת, שאורכי צלעותיה 10 יחידות ו- 5 יחידות וקבעו זווית חדה, כך שיתקבל שטח גדול יותר מהשטח של המקביליות הנתונות.
 (ד) נסו לשרטט מקבילית שאורכי צלעותיה 10 יחידות ו- 5 יחידות והיא בעלת השטח הגדול יותר מכל המקביליות להן אותם אורכי צלעות.

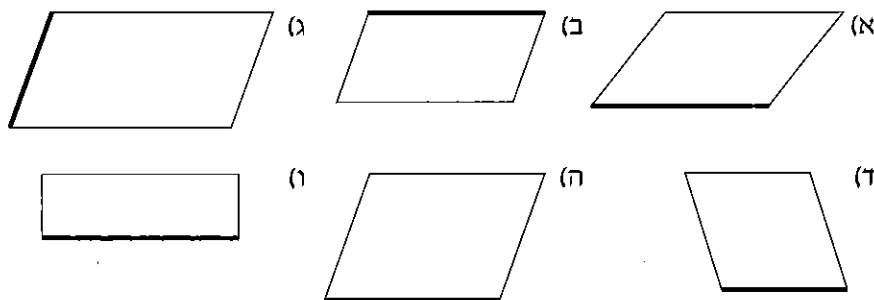
8. (א) בטאו את אורך הגובה AE באמצעות a ו- α .
 (ב) בטאו את שטח המקבילית באמצעות a ו- α .



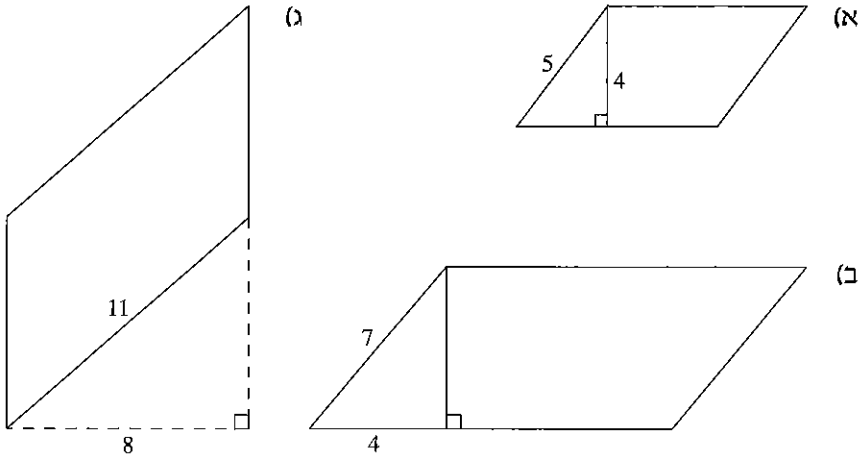
9. (א) חשבו את השטח של מקבילית שאורכי צלעותיה 7 ס"מ ו- 10 ס"מ וגודל הזווית החדה הוא 72° .
 (ב) דני טען כי השתמש בחישוב בזווית הקהה ובאותה נוסחה, כלומר, מכפלת אורכי הצלעות בסינוס של הזווית הקהה.
 חשבו ובידקו אם מתקבלת אותה תוצאה. הסבירו.

תרגילים

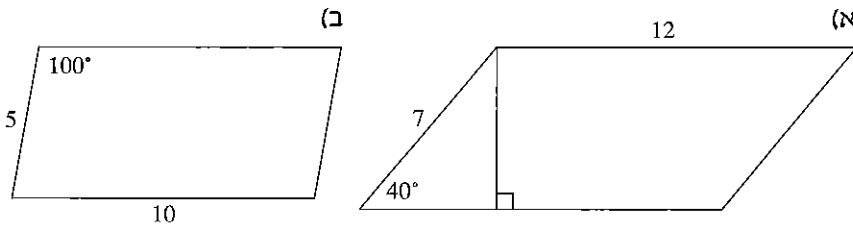
10. שרטטו בכל מקבילית, גובה לצלע המודגשת.



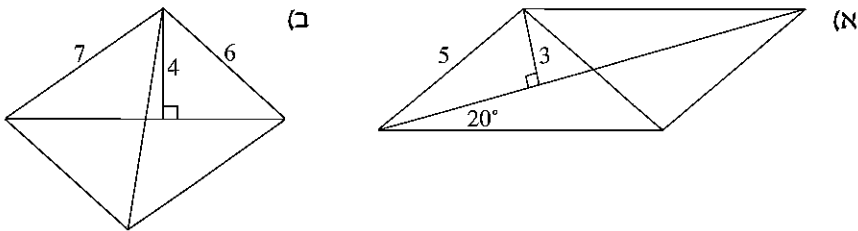
11. חשבו את גודל הזוויות במקביליות המשורטטות.



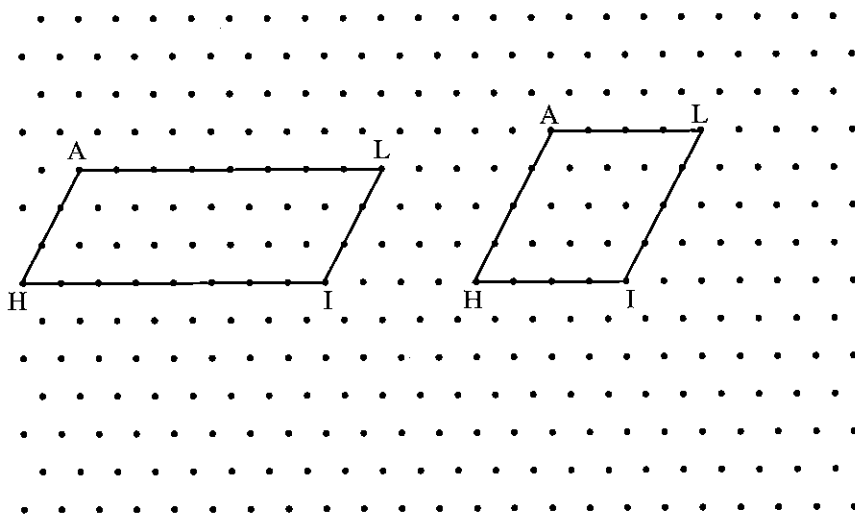
12. חשבו את שטחי המקביליות המשורטטות.



13. חשבו את גודל הזוויות במקביליות המשורטטות.



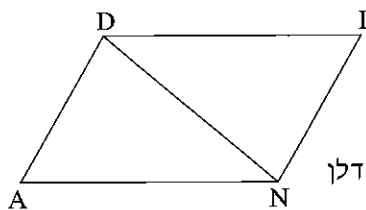
14. א) שרטטו בכל מקבילית את חוצי הזוויות H ו-L, ואת האלכסון HL.



ב) שרטטו, על הדף המנוקד, מקבילית נוספת שהאלכסון בה חוצה זווית, ומקבילית נוספת שהאלכסון בה אינו חוצה זווית.

15. במקבילית DINA נתון:

$$\angle I = 60^\circ, \angle NDI = 40^\circ.$$



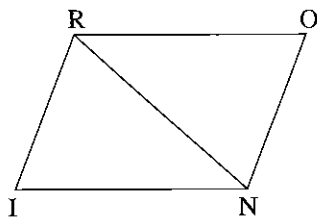
א) חשבו את שאר הזוויות, ורשמו את גודלן בשרטוט.

ב) האם האלכסון DN חוצה את זוויות המקבילית?

ג) גובה המקבילית (מקודקוד D) 5 ס"מ. חשבו את צלעות המקבילית.

16. מרובע RONI מקבילית.

$$\angle O = 80^\circ, \angle NRO = 50^\circ.$$



א) חשבו את גודל שאר הזוויות, ורשמו את גודלן בשרטוט.

ב) האם האלכסון RN חוצה את זוויות המקבילית?

ג) גובה המקבילית 8 ס"מ. חשבו את צלעות המקבילית.

ד) איזו מקבילית היא RONI?

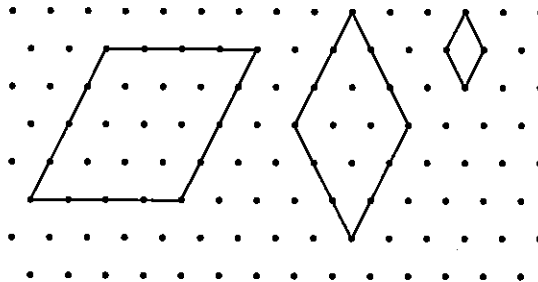
מעוין

מעוין הוא מקבילית, ולכן הוא מקיים את כל תכונות המקבילית, אך יש לו תכונות נוספות (אחת מהן נרמזה בתרגיל האחרון בסעיף הקודם).



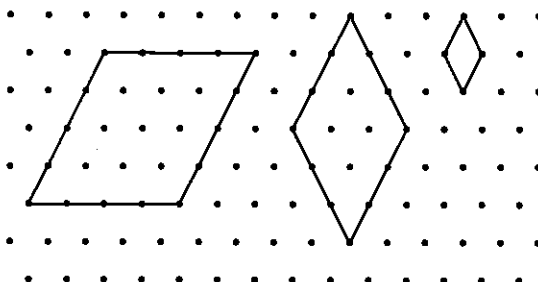
1. (א) העבירו את האלכסון הארוך בכל מעוין.

— מה תוכלו לומר על המשולשים שהתקבלו?



(ב) העבירו את האלכסון הקצר בכל מעוין.

— מה תוכלו לומר על המשולשים שהתקבלו?



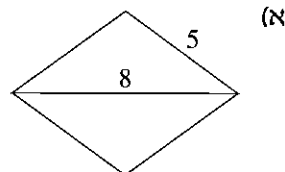
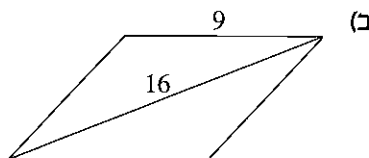
(ג) הסבירו מדוע האלכסונים במעוין חוצים את הזוויות.

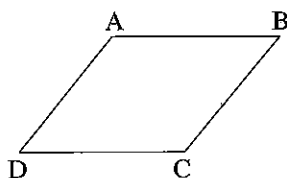
(ד) העבירו בסעיף ב' גם את האלכסון השני, בכל מעוין (מסעיף ב').

— מאיזה סוג המשולשים שהתקבלו?

(ה) רשמו תכונה נוספת של אלכסוני המעוין.

2. (א) חשבו את זוויות המעוין.





3. במעוין ABCD נתון:

10 יחידות DB , 6 יחידות AC .

- חשבו את צלעות המעוין.
- חשבו את זוויות המעוין.
- חשבו את שטח המעוין.
- כיצד תשתנה זווית B של המעוין, אם נשנה את אורך AC ל-8 יחידות?
- כיצד תשתנה זווית B של המעוין, אם נשנה את אורך AC ל-10 יחידות?

האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה, חוצים זה את זה, וחוצים את הזוויות מהן הם יוצאים.

4. אחת מזוויות המעוין היא בת 75° ואורך הצלע 10 יחידות.

- שרטטו וחשבו ואת אורכי האלכסונים.
- חשבו את שטח המעוין.

5. אורך אחד האלכסונים במעוין 10 יחידות, אורך הצלע 7 יחידות.

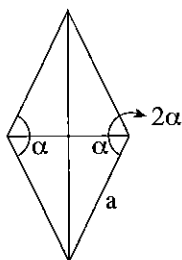
שרטטו וחשבו את זוויות המעוין.

6. צלע המעוין גדולה פי 2 מאחד מאלכסוניו.

- בחרו אורכי צלעות ואורכי אלכסונים למעוין המתאים לדרישות. שרטטו שרטוט מדגים וחשבו את זוויות המעוין. מה קיבלתם?
- חזרו על כל השלבים עבור מעוין בעל אורכי צלעות ואלכסונים שונים.

7. אורך צלע המעוין שווה לאורך אחד האלכסונים.

חשבו את זוויות המעוין.



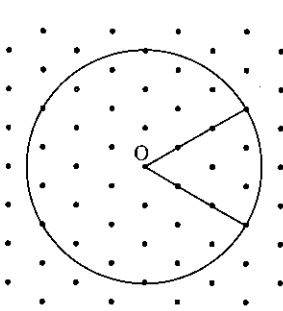
8. (א) הזווית המסומנת במעוין היא 2α , אורך צלע המעוין a .

- בטאו את כל הזוויות בשרטוט בעזרת α .
- בטאו את אורכי האלכסונים ואת שטח המעוין באמצעות α ו- a .

(ב) (i) הציבו $\alpha = 50^\circ$, $a = 10$ וחשבו את אורכי האלכסונים והשטח.

(ii) הציבו $\alpha = 60^\circ$, $a = 10$ וחשבו את אורכי האלכסונים והשטח.

מצולע משוכלל ומעגל חוסם וחסום



1. (א) שרטטו עוד ארבעה רדיוסים, ממרכז המעגל

המסומן (O), כך שיווצרו שש זוויות שוות במרכז.

מה גודלה של כל זווית?

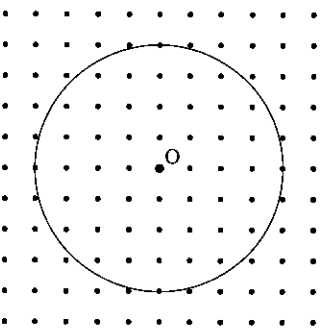
(ב) חברו את קצות הרדיוסים, שעל המעגל.

איזה מצולע קיבלתם?

(ג) התקבלו שישה משולשים. האם הם חופפים? נמקו.

מאיזה סוג 6 המשולשים?

(ד) אורך רדיוס המעגל 2 ס"מ. חשבו את אורך צלע המצולע.



במרכז.

מה גודלה של כל זווית?

(ב) חברו את קצות הרדיוסים, שעל המעגל.

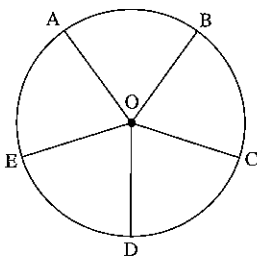
איזה מצולע קיבלתם?

(ג) התקבלו שמונה משולשים.

האם הם חופפים? נמקו.

מאיזה סוג כל משולש?

(ד) אורך צלע המתומן 3 ס"מ. מה אורך הרדיוס של המעגל?



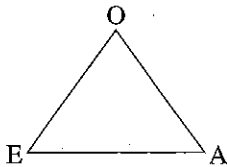
3. במעגל שרדיוסו 4 ס"מ, העבירו חמישה רדיוסים, כך

שנוצרו במרכז חמש זוויות שוות.

(א) מה גודלה של כל זווית במרכז?

(ב) חברו את קצות הרדיוסים שעל המעגל, כך שיתקבל מצולע.

איזה מצולע קיבלתם?



ג) התקבלו חמישה משולשים חופפים.

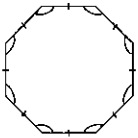
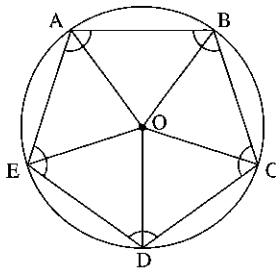
הוצאנו" מהשרטוט את $\triangle OEA$.

רשמו את הזוויות והצלעות הידועות עד כה.

חשבו את הזוויות החסרות, ואת אורך הצלע EA.

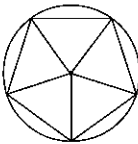
ד) חשבו את הגדלים של כל זוויות המחומש.

(הזוויות מסומנות בשרטוט).



המצולעים בהם טיפלתם עד כה, הם מצולעים משוכללים.

מצולע משוכלל הוא מצולע שאורכי כל צלעותיו שווים והגדלים של כל זוויותיו שווים.



שרטטנו משולשים, בעזרת מעגל החוסם את המצולע.

מרכז המעגל הוא קודקוד זווית הראש של כל המשולשים שווי השוקיים, שבסיסם צלע המצולע, ורדיוס המעגל החוסם הוא שוק המשולש.

ניתן לחשב את זווית הראש בכל משולש שווה שוקיים על-ידי חלוקת מספר המעלות בעיגול (360°) למספר צלעות המצולע (n).

זוויות המצולע הן סכום שתי זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים, וגודלן

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

4. אורך צלע מצולע משוכלל בעל 12 צלעות הוא 5 ס"מ. ממרכז המעגל החוסם העבירו רדיוסים כך שנוצרו 12 משולשים שווי-שוקיים חופפים.

א) מה גודל זווית הראש בכל אחד מהמשולשים שנוצרו?

ב) מה גודל זוויות המצולע?

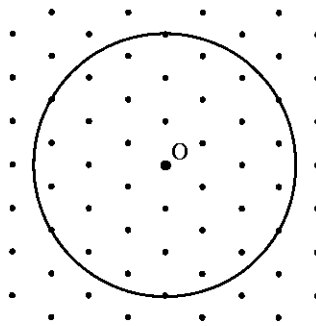
ג) מה אורך רדיוס המעגל החוסם את המצולע?



5.  התאימו בין מספר צלעות המצולע המשוכלל וגודל זוויתו. שימו לב, יש יותר זוויות ממצולעים.

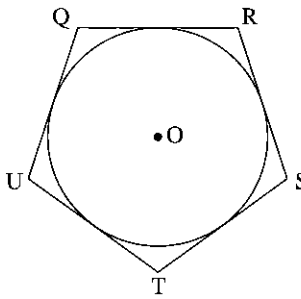
מס' צלעות	גודל הזווית
9	60°
5	112°
4	108°
10	120°
6	150°
3	140°
20	162°
	90°
	144°

6.  (א) אורך צלע של משושה משוכלל 12 יחידות. שרטטו אותו במעגל.



- חשבו את אורך רדיוס המעגל החוסם אותו.
 (ב) — שרטטו, בקירוב, גם מעגל חסום במצולע זה.
 — שרטטו רדיוס של המעגל החסום במשולש וחשבו את אורכו.

7. מעגל O, חסום במחומש המשוכלל המשורטט QRSTU.



אורך צלע המחומש 8 יחידות.

(א) העבירו רדיוסים אל נקודות ההשקה.

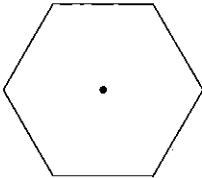
(ב) מה גודל הזווית הנוצרת בין רדיוס זה, לצלע

המצולע! נמקו.

(ג) חשבו את אורך רדיוס המעגל החסום.

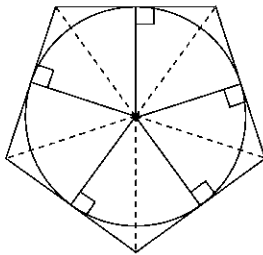
8. 

אורך רדיוס המעגל החסום במשושה משוכלל הוא 10 יחידות.



(א) שרטטו את המעגל החסום במשושה.

(ב) חשבו את אורכי צלעות המשושה.



בכל מצולע משוכלל ניתן לחסום מעגל.

מרכז המעגל הוא קודקוד זוויות הראש של כל המשולשים שווים-השוקיים, שבסיסם הוא צלע המצולע.

רדיוס המעגל החסום הוא גובה לבסיס במשולש שווה-השוקיים.

9.  המשושה המשוכלל ABCDEF חוסם את מעגל O.

(א) אורך רדיוס המעגל 20 יחידות.

חשבו את אורך צלע המשושה ABCDEF.

(ב) חשבו את שטח $\triangle AOB$.

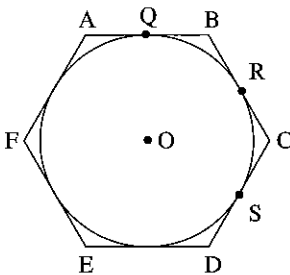
(ג) חשבו את שטח המשושה ABCDEF.

(ד) על-ידי חיבור נקודות ההשקה, מתקבל משושה

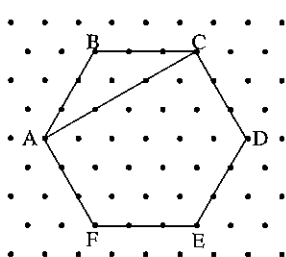
נוסף QRSTUV.

השלימו את השרטוט של משושה זה.

(ה) חשבו את אורך צלע המשושה החסום במעגל.



10. א) במשושה משוכלל $ABCDEF$, אורך כל צלע 8 יחידות. העבירו אלכסון



אחד מקודקוד C .

מה גודל הזווית B ?

ב) העבירו את שני האלכסונים הנותרים מקודקוד C .

התקבלו שני זוגות של משולשים חופפים.

רשמו את שני הזוגות.

ג) מאיזה סוג המשולש ABC ?

— חשבו את הגדלים של זוויותיו ואת אורכי צלעותיו.

— חשבו את שטח $\triangle ABC$.

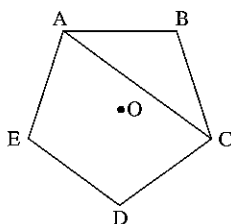
ד) חשבו את הגדלים של זוויות $\triangle ACF$.

— מאיזה סוג משולש $\triangle ACF$?

— חשבו את אורכי צלעותיו.

— חשבו את שטח $\triangle ACF$.

11. $ABCDE$ הוא מחומש משוכלל, שאורך כל צלע 12 יחידות.



א) חשבו את גודל זוויות המחומש.

ב) AC הוא אלכסון במחומש, חשבו את אורכו.

ג) — העבירו אלכסון נוסף מקודקוד A .

— כמה משולשים נוצרו?

— אילו מבין המשולשים הנ"ל הם חופפים? נמקו.

ד) חשבו את גודל $\angle DAC$.

ה) חשבו את שטחי המשולשים שנוצרו.

ו) מה שטח המחומש?

תרגילים

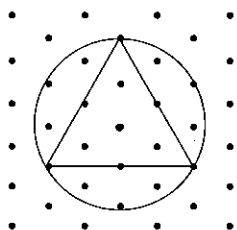
12. משולש שווה צלעות חסום במעגל.

רדיוס המעגל החוסם 12 יחידות.

א) חשבו את אורכי צלעות המשולש.

ב) שרטטו מעגל חסום במשולש זה.

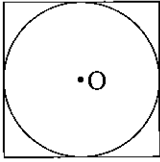
מה אורך הרדיוס של המעגל?



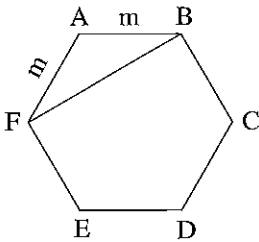
13. א) חשבו את זוויותיו של מצולע משוכלל בעל 10 צלעות.

ב) מה שטחו של המצולע, אם ידוע שאורך צלע המצולע 15 יחידות.

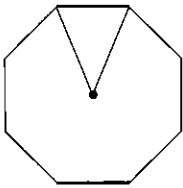
14. רדיוס המעגל החוסם ריבוע הוא 15 יחידות.
חשבו את שטח הריבוע.



15. המעגל O חסום בריבוע. אורך הרדיוס 5 יחידות.
חשבו את אורך אלכסון הריבוע.

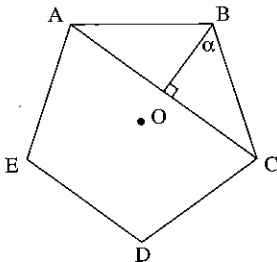


16. (א) חשבו את זוויות המשושה המשוכלל ABCDEF.
(ב) אורך צלע המשושה m.
בטאו את אורך האלכסון FB באמצעות m.
(ג) כמה אלכסונים השווים באורכם ל- FB ניתן להעביר במשושה זה?



17. (א) חשבו את גודל הזוויות של מצולע משוכלל בעל 8 צלעות.
(חשבו תחילה את זווית הראש של המשולש המשוורטט).
(ב) – בטאו, באמצעות n , את זוויות הראש של המשולשים שווים השוקיים, הנוצרים במצולע משוכלל בעל n צלעות.
– בטאו, באמצעות n , את גודל זוויות מצולע משוכלל בעל n צלעות.

18. (א) חשבו את גודל הזווית α במחומש המשוכלל ABCDE.
(ב) ידוע כי $AC = m$.



- כתבו ביטוי המקשר בין m , α ואורך צלע המחומש.
(ג) בטאו את אורך צלע המחומש בעזרת m .

פונקציה טריגונומטרית נוספת ושימושיה

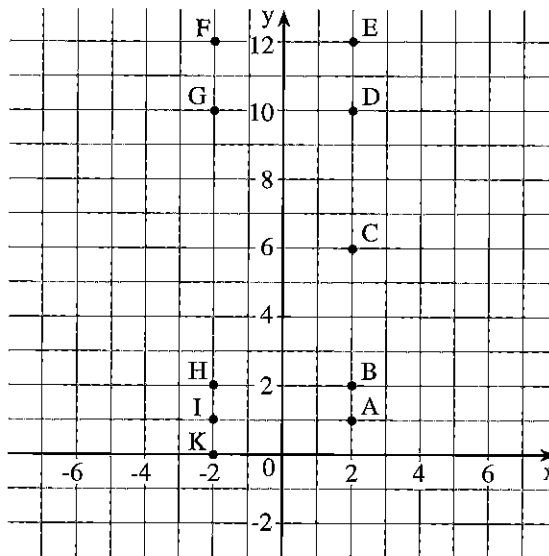
הפונקציה $\tan \alpha$

1. א) הניחו, במערכת הצירים, ישר העובר דרך הנקודה $(0, 0)$ ושיפועו $\frac{1}{4}$.

(היעזרו בישר המשורטט באחד הדפים השקופים).

סמנו את ראשית הצירים ב-O, הניחו אצבע וסובבו את הישר, כך שיעבור בכל פעם דרך אחת מהנקודות המסומנות. רשמו את שיפועו.

מערכת צירים לקריאת שיפועים



הישר	OA	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH	OI	OK
השיפוע										

ב) נסו לתאר את השתנות השיפוע, כשמסובבים את הישר סביב הראשית:

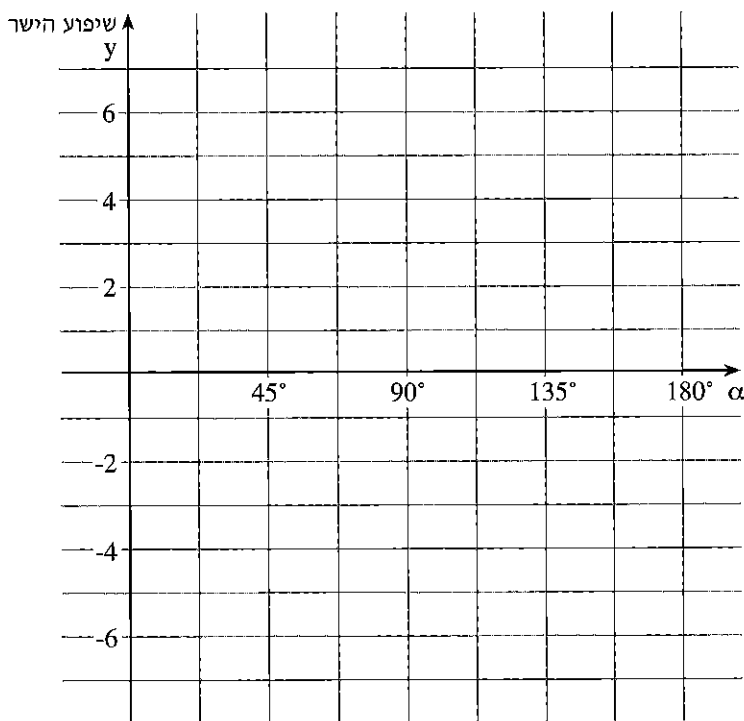
i) ברביע הראשון מ-A, ל-B, ל-C וכו'.

ii) ברביע השני מ-F, ל-G, וכו'.

2. א) מִדְדוּ אֶת הַזווֹיִת בֵּין כָּל אֶחָד מֵהַקְטָעִים OB , OA , OC וְכֹו', וְהַכְיוֹן הַחִיבוֹבִי שֶׁל צִיר x . α מֵיִצְגַת זווֹיִת זוֹ, וְתוֹצְאוֹת הַמְדִידָה מוֹפִיעוֹת בִּטְבִּלָּה.

הִשָּׁר	צִיר x	OA	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH	OI	OK
הַזווֹיִת α	0°	26.6°	45°	71.5°	78.7°	80.5°	99.5°	101.3°	135°	153.4°	180°
הַשִּׁפּוּעַ	0	1/2	1	3	5	6	-6	-5	-1	-1/2	0

ב) סִמְנוּ אֶת הַנְקוּדוֹת הַמֵּתְאִימוֹת בַּמַּעֲרֶכֶת הַצִּירִים (דִּיִּקְּו עַד כִּמָּה שֶׁאֲפִשֶׁר).
מַעֲרֶכֶת לַגִּרָף הַפּוֹנְקָצִיָּה



- באִיזָה תַּחֲסוּם (קִטְעַע עַל צִיר α) הַשִּׁפּוּעִים חִיבוֹבִיִּים?
- באִיזָה תַּחֲסוּם (קִטְעַע עַל צִיר α) הַשִּׁפּוּעִים שְׁלִילִיִּים?
- עֲבוֹר אֵילוֹ זווֹיֹת הַשִּׁפּוּעַ אֲפִס?
- חֲבְרוּ בְּקוֹ אֶת הַנְקוּדוֹת הַמֵּתְאִימוֹת לַזווֹיֹת מ־ 0° וְעַד ל־ 80.5° .
- חֲבְרוּ בְּקוֹ אֶת הַנְקוּדוֹת הַמֵּתְאִימוֹת לַזווֹיֹת מ־ 99.5° וְעַד ל־ 180° .

α היא הזווית הנוצרת בין הישר והכיוון החיובי של ציר x.
 הפונקציה המתאימה לכל זווית (α) את שיפוע הישר, נקראת
 טנגנס α , ומסומנת: $\tan(\alpha)$ או $tg(\alpha)$.

3. הניחו במערכת צירים ישר ששיפועו 5.

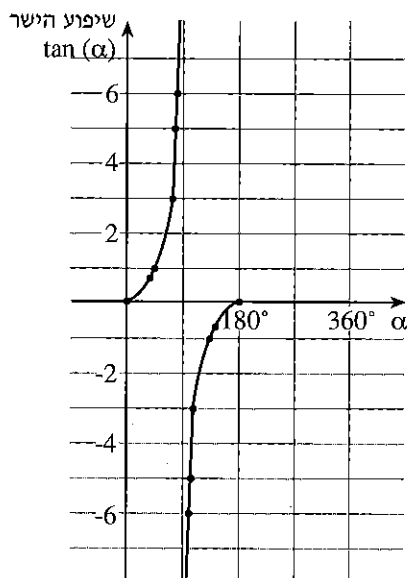
הניחו במערכת צירים ישר ששיפועו 10.

אם נאריך את ציר x וציר y כרצוננו:

- האם אפשר להניח ישר ששיפועו 100?
- האם אפשר להניח ישר ששיפועו 1000?
- האם אפשר להניח ישר ששיפועו 10,000,000?
- מה יקרה לזווית אם השיפוע יגדל עוד יותר?
- מה יהיה השיפוע אם הזווית תהיה 90° ?

הישר $\alpha = 90^\circ$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה $y = \tan(\alpha)$.

4. במערכת הצירים שבעמוד הקודם הניחו על ציר x ישר שקוף, וסובבו אותו סביב הראשית כך שהזווית תגדל. מתי (מאיזו זווית) יתחילו השיפועים לחזור על עצמם?



ב) נסו להמשיך את הגרף עד 360° .

ג) השלימו על-פי הגרף (בקירוב):

$$\tan(210^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(360^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(225^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

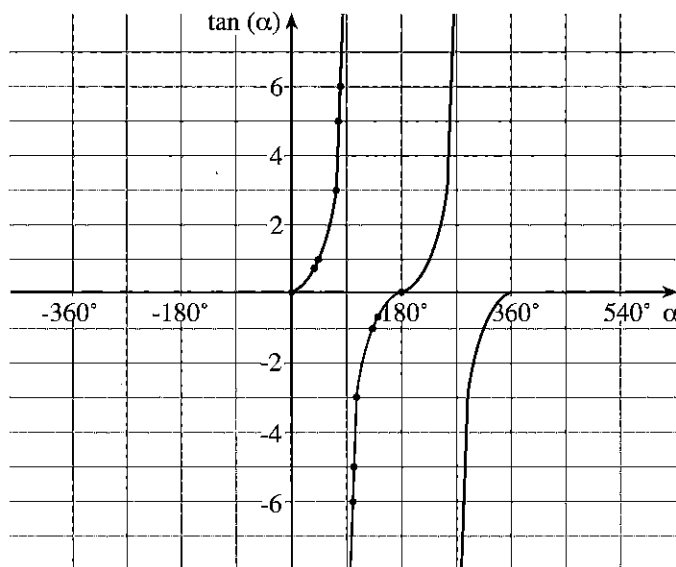
ד) רשמו משוואה של אסימפטוטה

נוספת של גרף הפונקציה.

מחזור הפונקציה $\tan(\alpha)$ הוא 180° .



5. (פ) א) שרטטו מחזורים נוספים בתחום בין -360° ל- 540° .



ב) השלימו לפי הגרף (בקירוב).

$$\tan(-210^\circ) =$$

$$\tan(135^\circ) =$$

$$\tan(405^\circ) =$$

$$\tan(-135^\circ) =$$

$$\tan(-120^\circ) =$$

$$\tan(-180^\circ) =$$

ג) רשמו שלושה ערכים שונים $\tan(56.3^\circ) = 1.5$

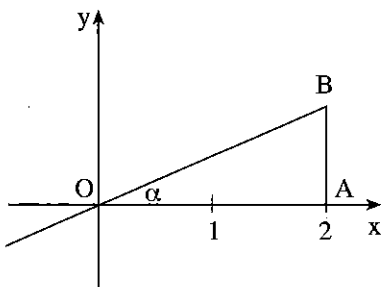
$$\tan(\quad) = 1.5$$

$$\tan(\quad) = 1.5$$

$$\tan(\quad) = 1.5$$

השלימו וחשבו את $\tan(\alpha)$.

תזכורת: שיפוע הישר (OB) מתקבל מחלוקת גובה המדרגה (AB) ברוחבה (OA).



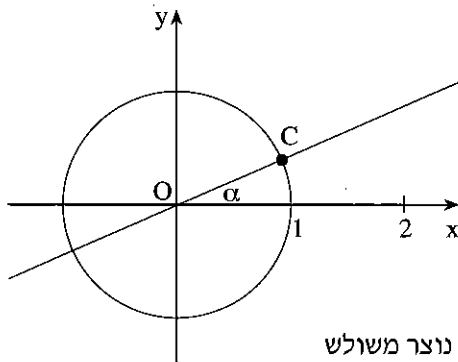
ב) העתיקו את המשולש OAB

למעגל היחידה המשוורט.

רשמו את הקודקודים B

ו-A על המשך שוקי הזווית

α (במקומות המתאימים).



ג) העבירו מהנקודה C, קטע CD

המתאר את $\sin \alpha$.

סמנו על קטע מתאים את $\cos \alpha$. נוצר משולש

חדש OCD.

ד) הסבירו מדוע המשולשים OBA ו-OCD דומים?

ה) השלימו $\tan(\alpha) = \frac{BA}{OA} =$

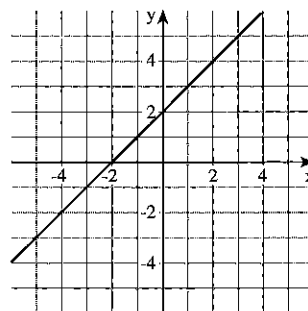
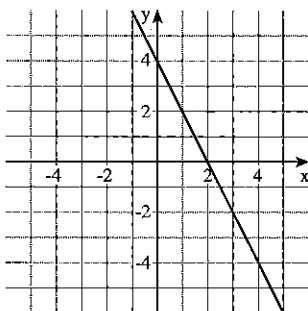
ו) במשולש ישר הזווית ששרטטתם, התקבל $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan(\alpha)$ זהות זו נכונה גם במקרים אחרים.

השלימו את הטבלה הבאה, והשוו בין שני הטורים משמאל.

הזווית (α)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\tan(\alpha)$
-60°				
100°				
210°				
290°				
480°				

תרגילים

7. מצאו את זווית השיפוע (α) של כל ישר עם הכיוון החיובי של ציר x .
(מצאו תחילה את שיפועו של הישר, והתאימו, בקירוב, את הזווית מתוך הגרף של $\tan(\alpha)$)



8. איזו זווית יוצר ישר עם הכיוון החיובי של ציר x , אם ידוע:
(א) שיפועו הישר 1. (ב) שיפוע הישר -1 . (ג) שיפוע הישר 0.

9. (א) ראשית הצירים. שרטטו במערכת צירים, ישר AB ששיפועו 1, ישר AC ששיפועו 2, ישר AD ששיפועו 4.
(ב) קבעו, נכון/לא נכון, ונמקו.
– כאשר השיפוע גדל פי 2 גם הזווית גדלה פי 2.
– כשהזווית גדלה בין 0° ל- 90° השיפוע גדל.
– כאשר הזווית מתקרבת ל- 90° השיפוע גדול מאוד.

10. כפי שראיתם, הישר $\alpha = 90^\circ$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה $\tan(\alpha)$.
רשמו עוד ארבע משוואות של אסימפטוטות לגרף של $y = \tan(\alpha)$.

11. סמנו את הטענות הנכונות (היעזרו במחזוריות).
(א) $\tan(45^\circ) = \tan(135^\circ)$ (ב) $\tan(22^\circ) = \tan(202^\circ)$
(ג) $\tan(60^\circ) = \tan(120^\circ)$ (ד) $\tan(45^\circ) = \tan(-135^\circ)$
(ה) הערך המכסימלי של $\tan(\alpha)$ הוא 1.

12. השלימו:

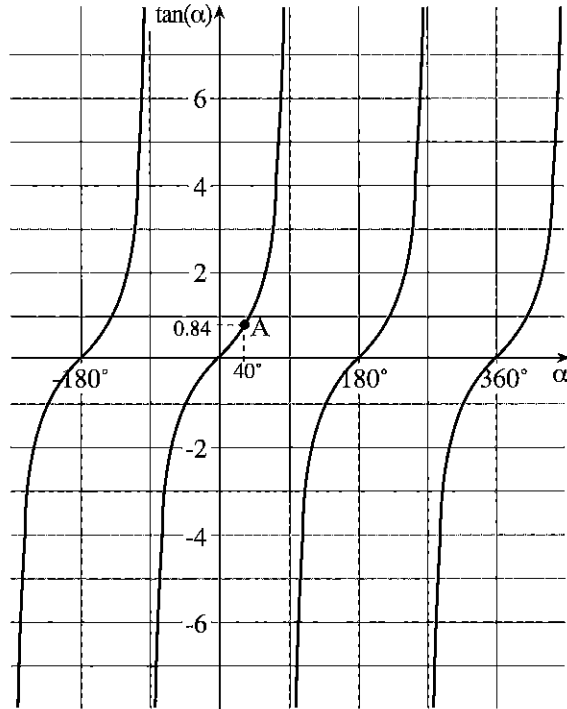
$$\tan(50^\circ) = \tan(\quad) = \tan(\quad)$$

$$\tan(120^\circ) = \tan(\quad) = \tan(\quad)$$

$\tan(\alpha)$ ומשוואות – רשות

נא לא זכ אינו מופיע לפי גבנית בחינה הכללה משנה גלסי"פ.

1. לפניכם גרף של $\tan(\alpha)$.



א) ידוע כי $\tan(40^\circ) \approx 0.84$ (נקודה A).
הניחו ישר שקוף דרך A, מקביל לציר האופקי, ורשמו על הציר האופקי ערכים נוספים עבורם מתקיים: $\tan(\quad) = 0.84$.

ב)  היעזרו בישר כדי לפתור את המשוואות הבאות (בקירוב).
מצאו ארבעה פתרונות לכל משוואה.

$\tan(\alpha) = 1$	(iii)	$\tan(\alpha) = -0.84$	(i)
$\tan(\alpha) = 0$	(iv)	$\tan(\alpha) = -4$	(ii)

2. א) - מצאו בעזרת המחשבון את $\tan 70^\circ =$ ע"ע

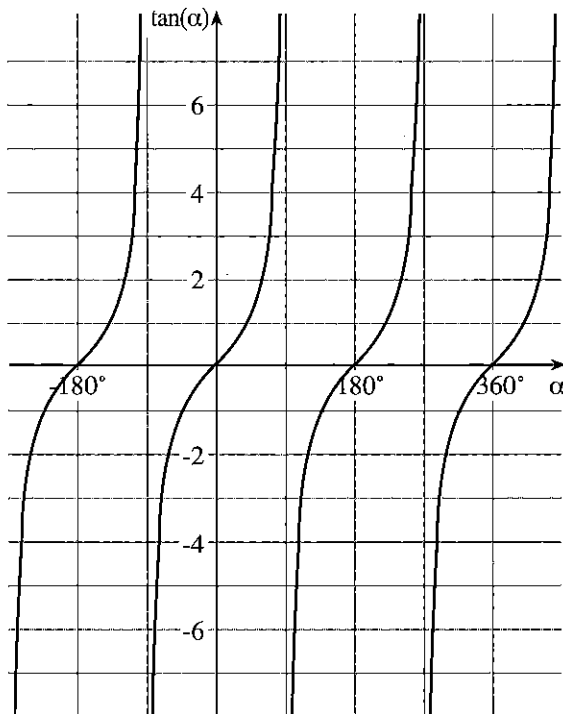
במחשבון בעל שורה אחת הקישו:

tan	70

במחשבון בו אפשר לרשום תרגיל הקישו:

tan	70

- סמנו בקירוב בגרף.
- הניחו ישר מקביל לציר האופקי דרך הנקודה שסימנתם.
- ב) סמנו על הציר שלוש זוויות נוספות המקיימות:
 $\tan 70^\circ = \tan \underline{\hspace{2cm}} = \tan \underline{\hspace{2cm}} = \tan \underline{\hspace{2cm}}$



ג) חשבו בעזרת המחשבון: $\tan(110^\circ) =$
 מצאו שלוש זוויות נוספות.

$\tan 110^\circ = \tan \underline{\hspace{2cm}} = \tan \underline{\hspace{2cm}} = \tan \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

ד) השלימו: $\tan 53^\circ = \tan \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. א) $\tan \alpha = 1.5$

מצא, בעזרת המחשבון, זווית חדה המקיימת את המשוואה.

במחשבון בעל שורה אחת הקישו:

1.5	Shift	tan

במחשבון בו אפשר לרשום תרגיל הקישו:

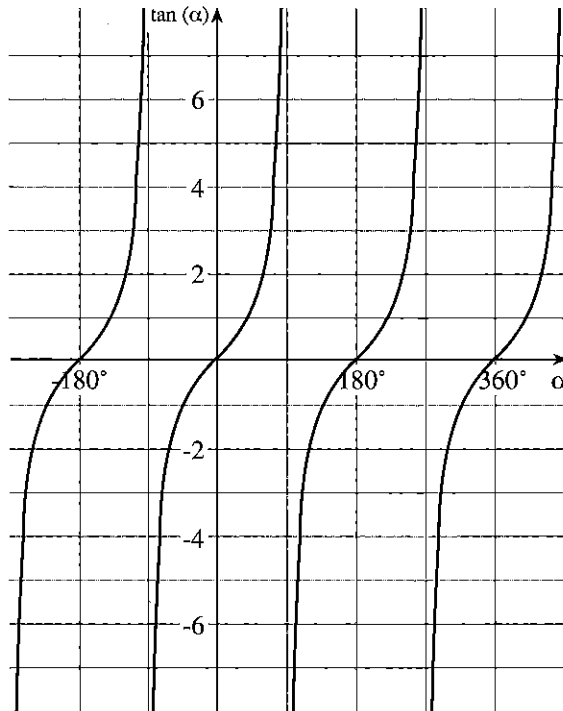
shift	tan	1.5

סמנו נקודה מתאימה במערכת הצירים.

סמנו את הזווית המתאימה על הציר האופקי.

ב) רשמו שלושה פתרונות נוספים, וסמנו אותם על הציר האופקי.

$\alpha_1 =$ $\alpha_2 =$ $\alpha_3 =$



4. פתרו את המשוואות (היעזרו במחשבון ובגרף).

רשמו ארבעה פתרונות לכל משוואה.

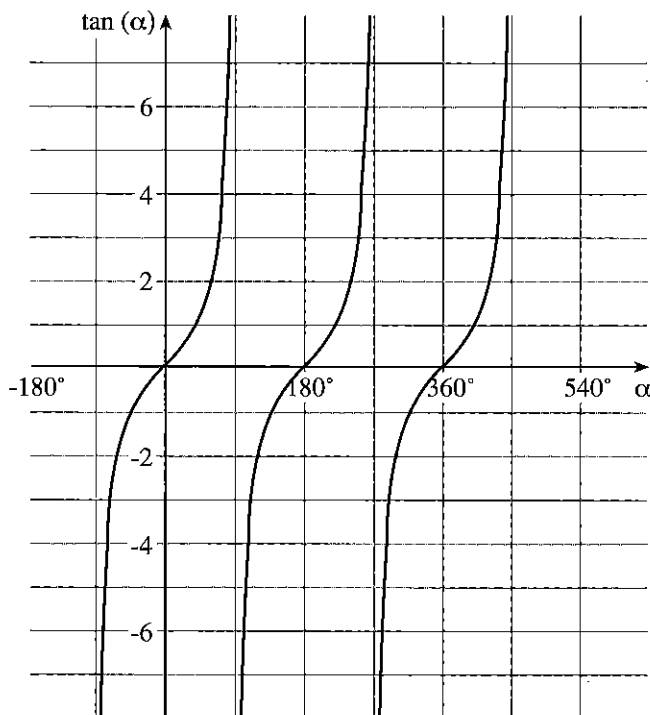
א) $\tan \alpha = -1$ ב)

א) $\tan \alpha = 2$ ב)

5. פתרו את המשוואה: $\tan \alpha + 3 = -5$. (בתחום שבין -90° ל- 270°).

6. (א) פתרו בעזרת המחשבון $\tan \alpha = -0.3$.
מצאו זווית בין 90° ל- 180° שגם היא פתרון המשוואה.
סמנו את שני הפתרונות שמצאתם, בקירוב, במערכת הצירים.

כשהשיפוע שלילי, אפשר לבטא את זווית השיפוע בעזרת זווית שלילית בין 90° ל- 0° , או כזווית בין 90° ל- 180° .

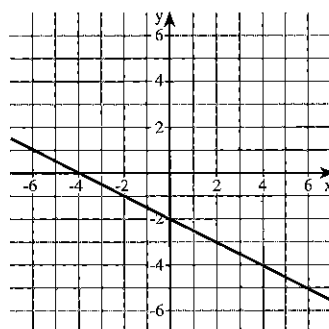
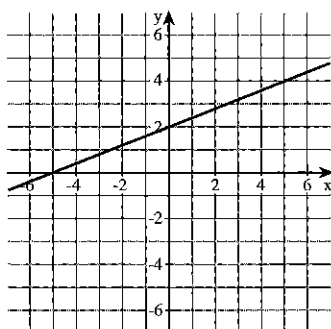
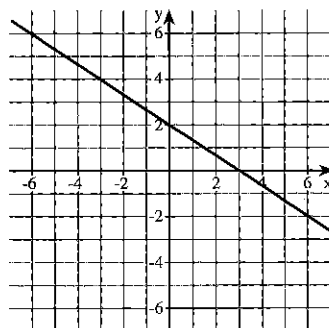
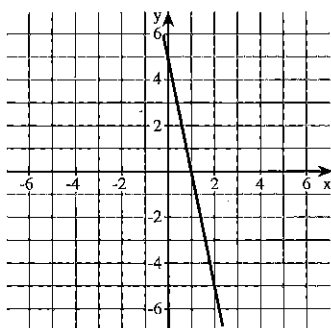


(ב) מצאו שני פתרונות למשוואה $\tan \alpha = -1.5$, אחד בין -90° ל- 0° והשני בין 90° ל- 180° . סמנו את שני הפתרונות במערכת הצירים.

7. רשמו את שיפוע הישר, ואת גודל הזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר x?
(א) $y = 3x + 2$ (ב) $y = x - 3$ (ג) $y = -3x$

8. (i) — מצאו, בעזרת מחשבון, את הזווית המתאימה לשיפוע של כל ישר.

— סמנו את הזווית בשרטוט.



(ii) בסעיף א' סימנתם את הזווית השלילית (α).

חשבו את גודל הזווית שיוצר הישר עם הכיוון החיובי של ציר x .

תרגילים

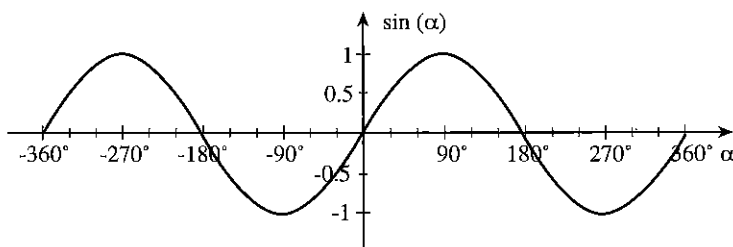
9. פתרו את המשוואות הבאות בתחום שבין -180° ל- 180° .
 (א) $\tan \alpha = 0.7$ (ב) $\tan \alpha = -12$ (ג) $\tan \alpha = 3$ (ד) $\tan \alpha = 12$

10. פתרו את המשוואות הבאות בתחום שבין 0° ל- 360° .
 (א) $\tan \alpha + 1 = 2$ (ג) $2 \tan \alpha = 3$
 (ב) $\tan \alpha - 1 = -1$ (ד) $3 \tan \alpha - 6 = 9$

11. חשבו את הזווית שיוצר כל ישר עם הכיוון החיובי של ציר x .
 (א) $y = 2x - 1$ (ג) $y = -2x + 3$ (ה) $y = \frac{1}{2}x$
 (ב) $y = -2$ (ד) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ (ו) $y = 8$

12. בסעיפים הקודמים למדתם לפתור משוואות דומות עבור הפונקציה $y = \sin \alpha$.

- (א) – סמנו על גרף הפונקציה נקודה המקיימת $\sin \alpha = 0.7$.
 – העבירו דרך אותה נקודה ישר המקביל לציר α .
 – מצאו שלושה פתרונות נוספים למשוואה $\sin \alpha = 0.7$, וסמנו אותם על ציר α .



(ב) פתרו את המשוואות הבאות (תנו שני פתרונות).

- | | | | |
|----------------------|-------|-------------------|------|
| $\sin \alpha = -0.5$ | (iii) | $\sin \alpha = 1$ | (i) |
| $\sin \alpha = 0.8$ | (iv) | $\sin \alpha = 0$ | (ii) |

13. פתרו את המשוואות הבאות בתחום שבין 0° ל- 90° .

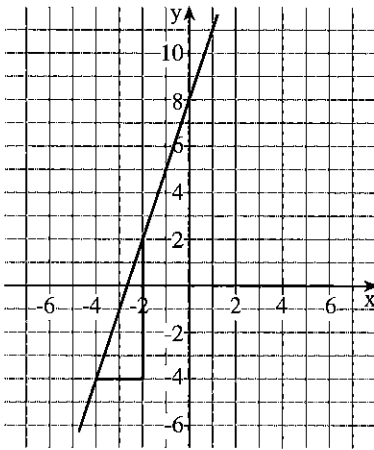
- | | | | |
|-------------------|-----|---------------------|-----|
| $\tan \alpha = 2$ | (א) | $\tan \alpha = 0.5$ | (א) |
| $\sin \alpha = 2$ | (ד) | $\sin \alpha = 0.5$ | (ב) |

- (ה) האם תוכלו לרשום מספר, במשבצת $\tan(\alpha) = \square$, כך, שכשתנסו לפתור במחשבון, יתקבל E (טעות)? נמקו.
 (ו) אילו מספרים אפשר לרשום במשבצת $\sin(\alpha) = \square$, כך שכשתנסו לפתור בעזרת המחשבון תקבלו E (טעות)? בידקו.

14. (א) אילו מספרים אפשר לרשום במשבצת $\tan \square$, כך שאם תנסו לפתור בעזרת מחשבון תקבלו E (טעות)? בידקו.
 (ב) האם קיימת זווית (α) בין 0° ל- 360° , שאם נציב את גודלה במשבצת $\sin \square$, נקבל E (טעות)? נמקו.

$\tan(\alpha)$ במשולש ישר זווית

באיור קודם הכרגם את שימושי הפונקציה $\tan \alpha$ לחישובי קטעים ואזורים במשולשים. כעת ננסה לקשר בין הפלגיה הכללי של הפונקציה $\tan \alpha$ לשימושים במשולש ישר זווית.

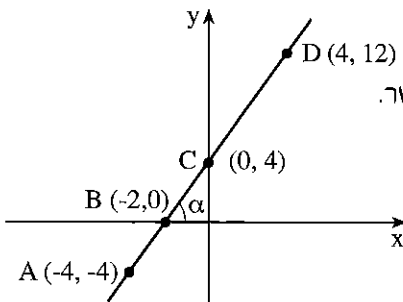


1. (א) מה שיפוע הישר המשוורט?
(ב) חשבו את היחס:

$$\frac{\text{גובה המדרגה}}{\text{רוחב המדרגה}} =$$

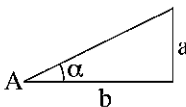
- (ג) שרטטו מדרגה נוספת, שרוחבה 3 יחידות.
מה היחס בין גובה המדרגה לרוחבה במקרה זה?

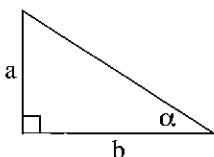
דמיון המשולשים, היוצרים את המדרגות על הישר, מסביר מדוע היחסים המתקבלים עבור כל המדרגות שווים.



2. (א) שרטטו מדרגה, וחשבו את שיפוע הישר.
(ב) שרטטו מדרגה נוספת עם רוחב שונה, וחשבו שוב את היחס.
(ג) מצאו את $\tan \alpha$.
(ד) מה גודל הזווית α ?

3. שרטטו מערכת צירים כך שראשית הצירים תהיה בנקודה A, הצלע b על ציר x, וציר y מקביל לצלע a. בטאו את שיפוע הישר:

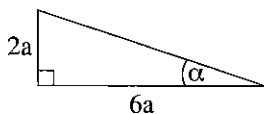




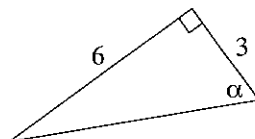
מכאן נסיק כי במשולש ישר-זווית:

$$\tan \alpha = \frac{\text{אורך הניצב מול הזווית } \alpha}{\text{אורך הניצב ליד הזווית } \alpha} = \frac{a}{b}$$

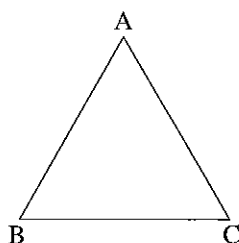
4. בכל אחד מהמשולשים הבאים חשבו את $\tan \alpha$ ו- α .



(ב)



(א)



5. $\triangle ABC$ משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

הגובה לבסיס שווה ל-10 יחידות.

זווית הבסיס 70° .

(א) חשבו את אורך הבסיס.

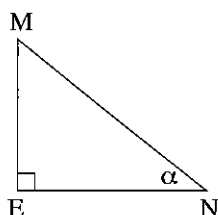
(ב) חשבו את שטח המשולש ABC .

6. במשולש ישר זווית ניצב אחד גדול פי 4 מניצב שני.

(א) בחרו אורכי צלעות במשולש, המקיימים את התנאים, וחשבו את זוויות המשולש.

(ב) בחרו אורכים אחרים לצלעות המשולש, המקיימים את התנאים, וחשבו את זוויות המשולש.

(ג) מה תוכלו לומר על כל המשולשים ישרי הזווית בהן ניצב אחד גדול פי 4 מהניצב השני? הסבירו.



7. במשולש ישר זווית MEN ($\angle E = 90^\circ$).

$\angle N = \alpha$, $EN = a$.

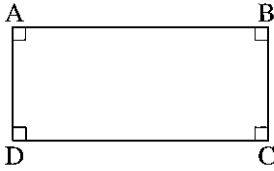
(א) כתבו ביטוי המקשר בין α ו- ME .

(ב) בטאו את ME באמצעות α ו- a .

(ג) כתבו בטוי לשטח המשולש MEN .

תרגילים

8. במלבן ABCD אורכי הצלעות 4 יחידות ו- 7 יחידות.



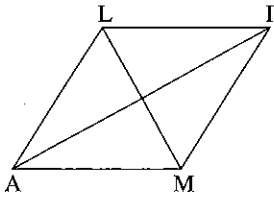
(א) חשבו את הזווית בין האלכסון BD לבין הצלע DC.

(ב) חשבו את הזווית בין האלכסונים.

9. במעוין LIMA אורכי האלכסונים 18 יחידות

ו- 14 יחידות.

חשבו את זוויות המעוין.



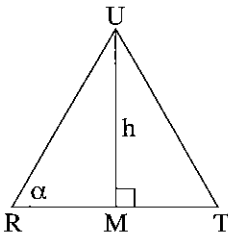
10. משולש RUT שווה שוקיים ($RU = UT$).

זוויות הבסיס α , והגובה לבסיס h.

(א) רשמו ביטוי המקשר בין h ו- RM .

(ב) בטאו את אורך בסיס המשולש בעזרת h ו- α .

(ג) בטאו את שטח המשולש בעזרת h ו- α .



11. הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא a.

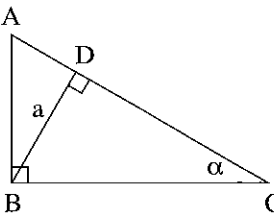
$$\angle BCA = \alpha$$

(א) בטאו את DC, בעזרת α ו- a.

(ב) בטאו את $\angle BAC$, בעזרת α .

(ג) בטאו את AD בעזרת α ו- a.

(ד) בטאו את שטח המשולש ABC בעזרת α ו- a.



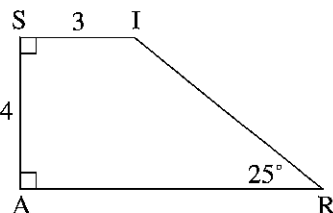
12. טרפז SIRA ישר - זווית.

נתון: 3 יחידות SI, 4 יחידות SA,

$$\angle R = 25^\circ$$

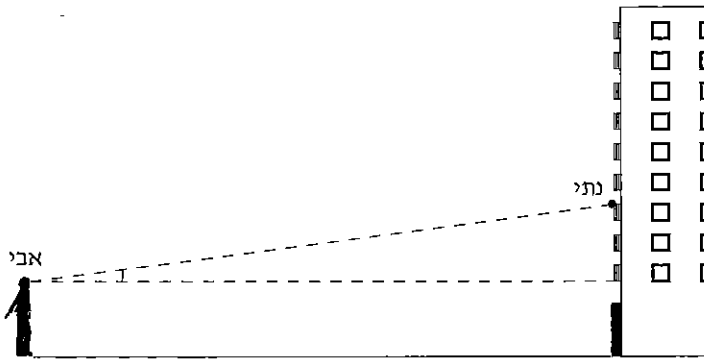
חשבו את שטח הטרפז.

(הדרכה: העבירו גובה מקודקוד I לצלע AR).



זווית גובה וזווית עומק

1. אבי מאותת לחבריו, נתי רחל ודוד, הגרים בבית רב קומות ממולו. בכל פעם הוא מרים את עיניו לקומה בה נמצאים החברים כדי לקרוא את תשובותיהם.
- א) מסומנת בקשת. הזווית בין הקו האופקי (הקו המקווקו) - בגובה עיניו של אבי לבין הקו המחבר את עיניו עם חלונו של נתי.

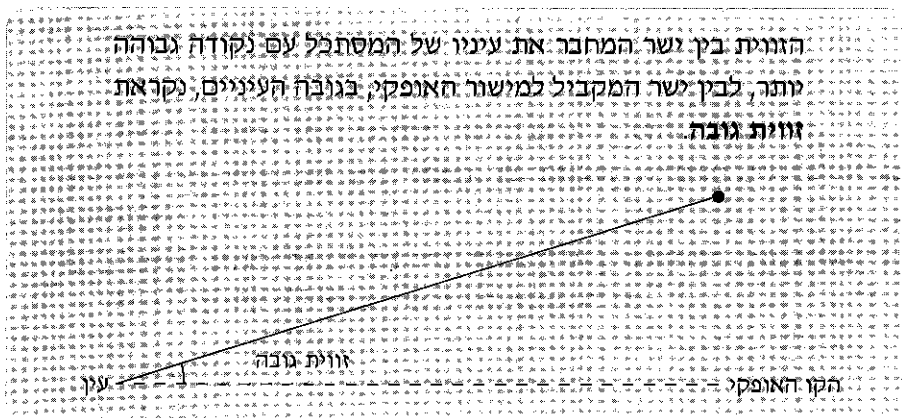


- ב) סמנו בקשתות את הזוויות בין הקו האופקי לבין הקווים המחברים את עיניו של אבי עם חלונותיהם של רחל ודוד.



הזוויות שסומנו נקראות זוויות גובה.





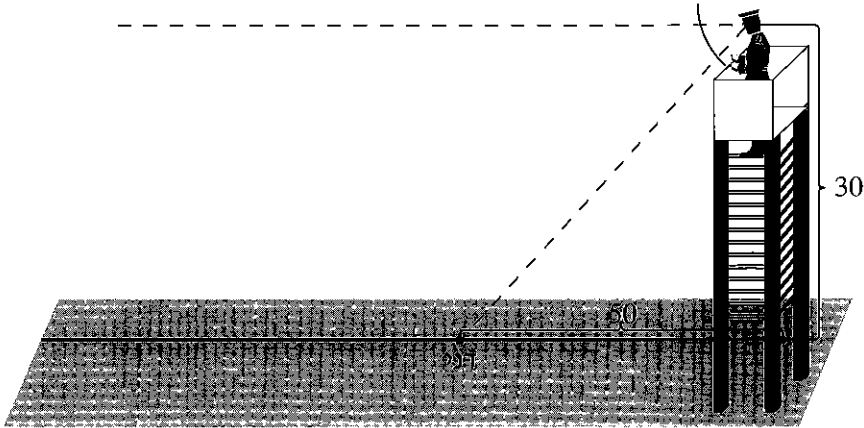
2. אסף, דני ועמית הם חיילים השוכבים ועורכים תצפית לעבר חייל העומד על גג מגדל.
- (א) שרטטו וסמנו את זווית הגובה בין כל אחד מהם לחייל המשקיף על הגג.



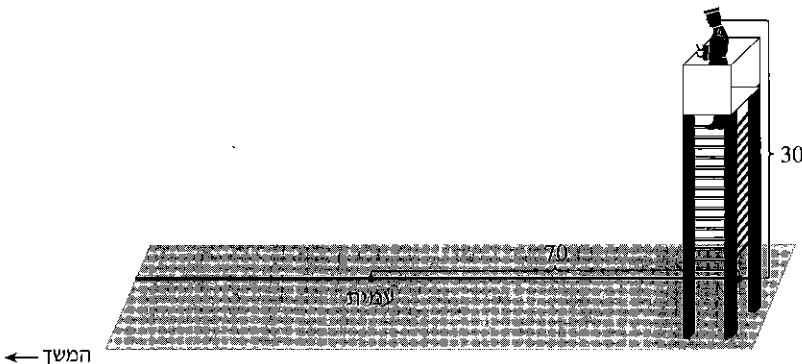
- (ב) גובה המגדל 30 מ', מרחקו של דני מהמגדל 50 מ', של עמית 70 מ', ושל אסף 100 מ'.
- חשבו את גודל זווית הגובה, בה רואה כל אחד מהם את גג המגדל.

3. פ) החייל על הגג משקיף על דני ורואה אותו בזווית עומק. הזווית הזו מסומנת בקשת.

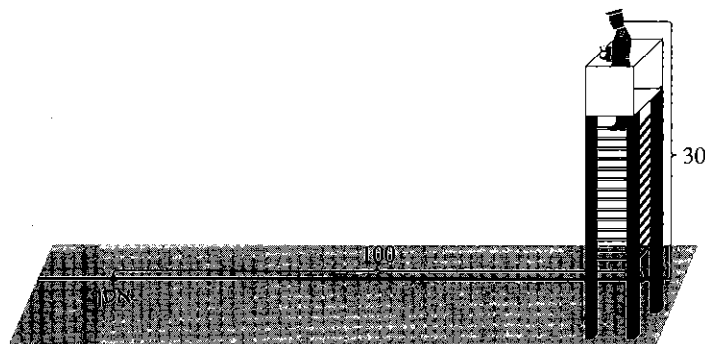
א) מה גודלה של זווית העומק בה רואה החייל את דני? (הנתונים זהים לאלה של תרגיל 2).



ב) שרטטו וסמנו בקשת את זווית העומק בה רואה החייל על הגג את עמיתו.

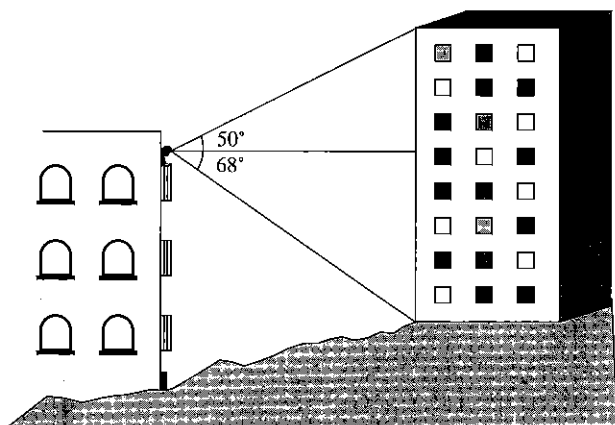


ג) שרטטו וסמנו בקשת את זווית העומק בה רואה החייל על הגג את אסף.
מה גודלה.



ד) מה הקשר בין זווית העומק לזווית הגובה לגבי כל חייל, והחייל על המגדל?

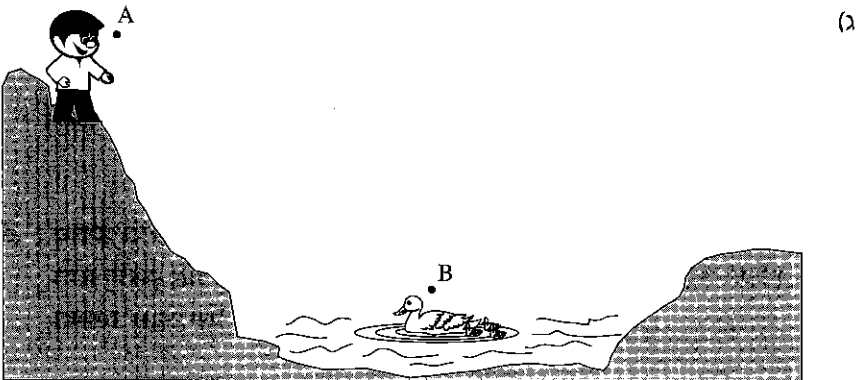
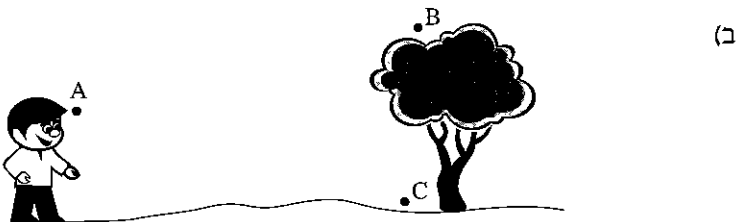
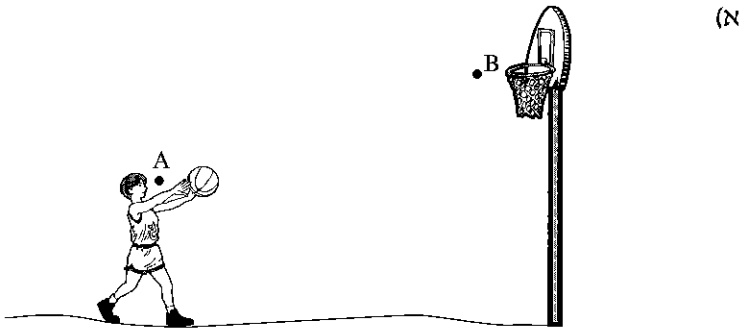
4.  דני גר בקומה שלישית, וממולו מתנשא בנין רב קומות.
דני רואה את הקצה התחתון של הבנין בזווית עומק של 68° ואת גג הבנין בזווית גובה של 50° .



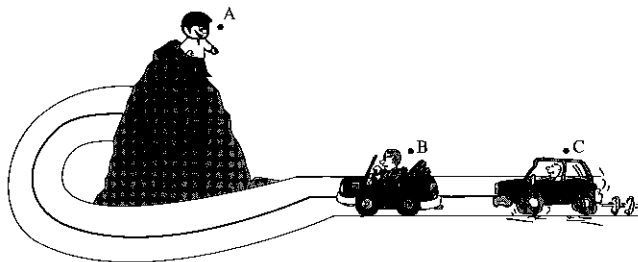
מרחק ביתו של דני מהבנין 15 מ'. חשבו את גובה הבנין.

תרגילים

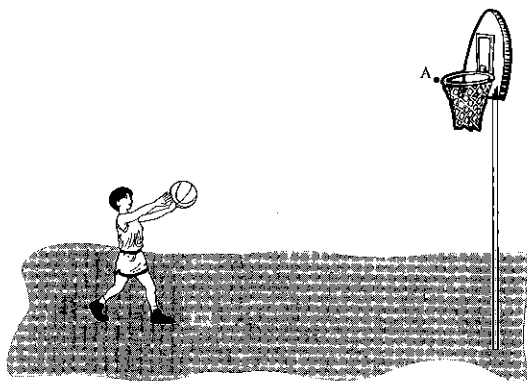
5. שרטטו וסמנו, בכל שרטוט, את זווית הגובה או את זווית העומק בין שאול או אבינועם (המסומנות באות A) והנקודות B או C, המסומנות. אם הזווית היא זווית גובה רשמו ג, אם היא זווית עומק רשמו ע.



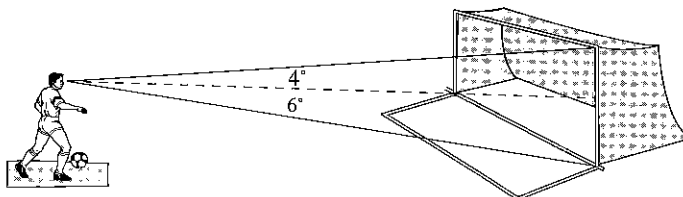
6. מנקודת תצפית של המשטרה, המצויה בגובה של 10 מ' מעל הכביש, רואים מכונית אחת בזווית עומק של 20° .
 (א) מה מרחק המכונית מתחתית עמדת התצפית.
 (ב) מכונית אחרת נראת בזווית עומק של 30° .
 מה מרחק מכונית זו מתחתית עמוד התצפית?
 (ג) מה המרחק בין שתי המכוניות?



7. שחקן כדורסל שגובהו 2.05 מ' זורק לסל, ל-3 נקודות, ממרחק 8 מ' הסל מצוי בגובה 3.05 מ' מעל הקרקע.
 באיזו זווית גובה רואה השחקן את הסל (הנקודה A).



8. שחקן כדורגל עומד במרחק 20 מ' משער. הוא רואה את תחתית השער בזווית עומק של 6° , ואת הקצה העליון של השער בזווית גובה של 4° . מה גובה השער?



מבחר תשובות

הפונקציות הטריגונומטריות והקשרים ביניהן

פונקציות מחזוריות (עמודים 205-211)

3. א) אורך המחזור 5 ב) אורך המחזור 4 ג) אורך המחזור 8
4. א) מחזוריות, אורך מחזור 4 ב) לא מחזורית
6. א) אורך המחזור 4 ב) אורך המחזור 8 ג) אורך המחזור 5
7. א) מחזורית, אורך מחזור 6.3 ב) לא מחזורית ג) לא מחזורית
- ד) מחזורית, אורך המחזור 45 דקות ה) לא מחזורית

עוד פונקציות מחזוריות (עמודים 212-214)

2. א) אורך המחזור 6
- ב) אורך המחזור 4
4. א) אורך המחזור 8 ב) למשל: $(2, 2)$, $(10, 2)$, $(18, 2)$
- ג) אחרי A: $(11, 1)$, אחרי B: $(14, -1)$ ד) $(8, -2)$, $(16, -2)$, $(0, -2)$
- ה) $(9, 0)$, $(17, 0)$, $(1, 0)$, $(4\frac{1}{4}, 0)$ ו $(10, 2)$, $(2, 2)$

פונקציה מחזורית וטיול על ריבוע (עמודים 215-217)

5. א) הנקודה על הגרף ב) הנקודה אינה על הגרף ג) הנקודה על הגרף ד) אי אפשר לדעת
- ה) הנקודה על הגרף ו) אי אפשר לדעת
9. א) על הגרף ב) אינה על הגרף ג) אינה על הגרף ד) אי אפשר לדעת ה) על הגרף
- ו) אינה על הגרף

הפונקציה s (עמודים 218-228)

6. F: $-600^\circ, -240^\circ, 120^\circ, 480^\circ$ H: $-450^\circ, -90^\circ, 270^\circ, 630^\circ$
- E: $-670^\circ, -310^\circ, 50^\circ, 410^\circ$
8. א) 0.5 ב) 0.85 ג) 0.8 ד) 0.35
10. א) 0.342 ב) 0.707 ג) 0 ד) -0.643 ה) -0.766 ו) 0
11. א) $\sin(50^\circ) > 0$ ב) $\sin(70^\circ) > \sin(10^\circ)$ ג) $\sin(130^\circ) < 2$ ד) $\sin(60^\circ) = \sin(120^\circ)$
- ה) $\sin(300^\circ) < 0$ ו) $\sin(50^\circ) > \sin(30^\circ)$
12. ב) בין 180° ל- 360° או בין 540° ל- 720°
14. א) למשל: B: $0^\circ, 360^\circ$ C: $180^\circ, 540^\circ$ D: $120^\circ, -240^\circ$ E: $90^\circ, -270^\circ$
- H: $240^\circ, -120^\circ$ G: $210^\circ, -150^\circ$ F: $30^\circ, -330^\circ$

15. א) $\sin(540^\circ)$ ב) $\sin(330^\circ)$ ג) $\sin(510^\circ)$ ד) $\sin(600^\circ)$ ה) $\sin(630^\circ)$ ו) $\sin(270^\circ)$
 17. א) $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, -180^\circ, -360^\circ, -540^\circ$
 ב) $-270^\circ, 90^\circ, 450^\circ, 810^\circ$
 18. $\sin(-490^\circ) = \sin(-130^\circ) = \sin(230^\circ) = \sin(590^\circ) = \sin(950^\circ)$
 20. א) -0.309 ב) -0.731 ג) -0.309 ד) -0.731
 21. $390^\circ, 750^\circ, 1110^\circ, 150^\circ, 510^\circ, 870^\circ$
 22. $300^\circ, 660^\circ, 1020^\circ, -120^\circ, 240^\circ, 600^\circ$
 23. $-0.9, 0.58, 0.72$

הפונקציה C (עמודים 229-234)

7. א) 0.5446 ב) 0.848 ג) -0.1426 ד) -0.5446
 8. א) $\cos(50^\circ) > 0$ ב) $\cos(10^\circ) < \cos(70^\circ)$ ג) $\cos(130^\circ) > -1$ ד) $\cos(420^\circ) = 0.5$
 ה) $\cos(120^\circ) < 0$ ו) $\cos(300^\circ) < \cos(30^\circ)$ ז) $\cos(120^\circ) < \cos(60^\circ)$ ח) $\cos(540^\circ) = \cos(180^\circ)$
 10. א) בין -180° ל- 0° ב) בין 180° ל- 360°
 ג) בין -360° ל- -180° ד) בין 0° ל- 180°
 11. א) בין -90° ל- 90° ב) בין 270° ל- 450°
 ג) בין -270° ל- -90° ד) בין 90° ל- 270°
 12. א) $\cos(-100^\circ) = \cos(260^\circ) = \cos(620^\circ) = \cos(980^\circ)$
 ב) $\cos(25^\circ) = \cos(385^\circ) = \cos(745^\circ) = \cos(1105^\circ)$
 13. א) לא שווה ב) שווה ג) שווה ד) שווה ה) לא שווה ו) שווה
 14. א) לא שווה ב) שווה ג) לא שווה ד) שווה ה) שווה ו) שווה

זוגיות ואי-זוגיות (עמודים 235-239)

1. א) זוגיות, ב) זוגיות, ג) איזוגיות, ד) איזוגיות, ה) איזוגיות, ו) איזוגיות, ז) איזוגיות, ח) איזוגיות, ט) איזוגיות, י) איזוגיות
 4. הפונקציה $\cos(\alpha)$ זוגית, הפונקציה $\sin(\alpha)$ איזוגית
 6. א) איזוגיות ב) זוגיות
 7. א) שווה ב) שווה ג) לא שווה ד) שווה ה) לא שווה ו) לא שווה ז) לא שווה ח) שווה
 8. א) $\sin(310^\circ) = -0.766$, $\sin(410^\circ) = 0.766$, $\sin(-50^\circ) = -0.766$
 ב) $\cos(520^\circ) = -0.94$, $\cos(160^\circ) = -0.94$, $\cos(-200^\circ) = -0.94$
 ג) $\cos(720^\circ + \alpha) = a$, $\cos(-\alpha + 360^\circ) = a$, $\cos(-\alpha) = a$
 ד) $\sin(-\alpha - 360^\circ) = -b$, $\sin(-\alpha + 360^\circ) = -b$, $\sin(-\alpha) = -b$
 9. $-\cos(\alpha) = -0.4$, $\cos(360^\circ - \alpha) = 0.4$, $\cos(360^\circ + \alpha) = 0.4$, $\cos(-\alpha) = 0.4$
 10. $-\sin(\alpha) = -0.2$, $\sin[360^\circ + (-\alpha)] = -0.2$, $\sin(360^\circ + \alpha) = 0.2$, $\sin(-\alpha) = -0.2$
 11. $\cos(360^\circ + \alpha) = k$, $\cos(360^\circ - \alpha) = k$, $\cos(-\alpha) = k$
 $\sin(360^\circ + \alpha) = m$, $\sin(360^\circ - \alpha) = -m$, $\sin(-\alpha) = -m$

פונקציות של הזוויות α , $(180^\circ - \alpha)$ (עמודים 245-240)

2. א) נכון ב) נכון ג) לא נכון ד) לא נכון ה) נכון ו) לא נכון ז) לא נכון ח) נכון
- 4 א) $\sin(380^\circ) = 0.34$ (iii) $\cos(-20^\circ) = 0.94$ (ii) $\sin(-20^\circ) = -0.34$ (i)
- $\cos(160^\circ) = -0.94$ (vi) $\sin(160^\circ) = 0.34$ (v) $\cos(380^\circ) = 0.94$ (iv)
- $\cos(340^\circ) = 0.94$ (viii) $\sin(340^\circ) = -0.34$ (vii)
- ב) (i) $\sin(20^\circ) = \sin(160^\circ) = \sin(380^\circ) = \sin(520^\circ) = 0.34$
- (ii) $\cos(20^\circ) = \cos(-20^\circ) = \cos(380^\circ) = \cos(340^\circ) = 0.94$
- (iii) $\sin(-20^\circ) = \sin(340^\circ) = \sin(200^\circ) = \sin(560^\circ) = -0.34$
- (iv) $\cos(160^\circ) = \cos(-160^\circ) = \cos(520^\circ) = \cos(200^\circ) = -0.94$
5. א) נכון ב) נכון ג) לא נכון ד) נכון ה) לא נכון ו) לא נכון ז) לא נכון ח) נכון ט) לא נכון
- י) לא נכון יא) נכון יב) נכון יג) נכון יד) לא נכון
6. א) $\sin(-\alpha) = -0.6$ ב) $\sin(180^\circ - \alpha) = 0.6$ ג) $\cos(-\alpha) = 0.8$
- ד) $\cos(180^\circ - \alpha) = -0.8$
7. א) $\cos(180^\circ - \alpha) = -m$ ב) $\cos(-\alpha) = m$

שניהם גם יחד (עמודים 247-246)

3. גרף (i) מתאים ל-(ב), הפונקציה זוגית. גרף (ii) מתאים ל-(א), הפונקציה לא זוגית ולא אי-זוגית.
- גרף (iii) מתאים ל-(ג), הפונקציה אחרת. גרף (iv) מתאים ל-(ד), הפונקציה זוגית.

פונקציות ומשוואות (עמודים 249-248)

4. א) ציר x ב) $x = 90^\circ, 270^\circ, -90^\circ, -270^\circ$ ג) $x = 0^\circ, 360^\circ, -360^\circ$
5. א) $x = -300^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 300^\circ$ ב) $x = -360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
- ג) $x = -180^\circ, 180^\circ$ ד) $x = -150^\circ, -30^\circ, 210^\circ, 330^\circ$

פתרון כללי של משוואות בעזרת מחשבון וגרף (עמודים 254-250)

1. א) $x = -360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
- ב) (i) $810^\circ, 450^\circ, 90^\circ, -270^\circ$ (ii) $990^\circ, 630^\circ, 270^\circ, -90^\circ$
- ג) $60^\circ, 120^\circ, -240^\circ, -300^\circ$ ד) אין פתרון
3. (i) 4 פתרונות (ii) 2 פתרונות (iii) 4 פתרונות (iv) 4 פתרונות
5. א) -15° ב) $345^\circ, 195^\circ, -165^\circ$
6. א) 40° ב) פתרונות נוספים בשרטוט: $-40^\circ, 320^\circ, -320^\circ, 400^\circ$ ג) $-400^\circ, 40^\circ$
7. א) $x_1 = 160^\circ, x_2 = 200^\circ, x_3 = -160^\circ, x_4 = -200^\circ$ ב) $520^\circ, -520^\circ$
9. א) $36.87^\circ, 323.13^\circ$ ב) $x_1 = 36.87^\circ + 360^\circ k, x_2 = 323.13^\circ + 360^\circ k$
10. א) $0^\circ, 360^\circ, -360^\circ$ ב) $60^\circ, 300^\circ, -60^\circ, -300^\circ$ ג) $90^\circ, 270^\circ, -90^\circ, -270^\circ$
- ד) אין פתרון
11. א) $45^\circ, 225^\circ$ ב) $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, x_2 = 225^\circ + 360^\circ k$
12. (i) $-120^\circ, -60^\circ$ ב) $10^\circ, 170^\circ$ ג) $35^\circ, 145^\circ$ ד) $-65^\circ, -115^\circ$
- (ii) $245^\circ, 295^\circ$ (iii) 655° פתרון כללי: $x_1 = -65^\circ + 360^\circ k, x_2 = -115^\circ + 360^\circ k$

$$\begin{aligned}
 & x_2 = 350^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = 10^\circ + 360^\circ k \quad (\text{N (ii) .13} \\
 & x_2 = 190^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = 170^\circ + 360^\circ k \quad (\text{O} \\
 & x_2 = 290^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = 70^\circ + 360^\circ k \quad (\text{A} \\
 & x_2 = 250^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = 110^\circ + 360^\circ k \quad (\text{T} \\
 x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (\text{O} \quad & x_2 = -156^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = -24^\circ + 360^\circ k \quad (\text{N (ii) .14} \\
 x = 90^\circ + 360^\circ k \quad (\text{T} \quad & x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \quad (\text{A} \\
 & x_2 = 122^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = 58^\circ + 360^\circ k \quad (\text{O} \\
 & x_2 = -32^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = 32^\circ + 360^\circ k \quad (\text{A} \\
 876.4^\circ \quad , \quad 743.6^\circ \quad (\text{O} \quad & x_2 = 156.4^\circ + 360^\circ k \quad , \quad x_1 = 23.6^\circ + 360^\circ k \quad (\text{N .15}
 \end{aligned}$$

קשרים נוספים בין הפונקציות $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ (עמודים 255-261)

$$\cos 415^\circ = \cos 55^\circ = 0.57 \quad \cos 55^\circ = \sin 135^\circ = 0.57 \quad \cos(-55^\circ) = \cos 55^\circ = 0.57$$

$$\begin{array}{l}
-\sqrt{1-m^2} \text{ \& } \sqrt{1-m^2} \text{ (ii) } -m \text{ (i) } \sqsupset \cos \alpha = -\sqrt{1-m^2} \text{ \& } \cos \alpha = \sqrt{1-m^2} \text{ \& } 10 \\
-\sqrt{1-m^2} \text{ \& } \sqrt{1-m^2} \text{ (vi) } -\sqrt{1-m^2} \text{ \& } \sqrt{1-m^2} \text{ (v) } m \text{ (iv) } m \text{ (iii)} \\
\sin(400^\circ) = 0.64 \sqsupset \sin(-40^\circ) = -0.64, \cos 50^\circ = 0.64 \text{ \& } 11 \\
\cos \alpha = -0.866 \text{ \& } \cos \alpha = 0.866 \text{ \& } 13 \\
-0.8 \text{ \& } 0.8 \text{ () } -0.8 \text{ \& } 0.8 \sqsupset -0.8 \text{ \& } 0.8 \text{ \& } 15 \text{ OY} = 0.954 \text{ \& } 14 \\
a \text{ () } a \text{ (} \tau \text{) } a \text{ (} \lambda \text{) } a \text{ (} \sqsupset \text{) } -a \text{ \& } 17 \text{ } -0.6, 0.6 \text{ \& } 16 \\
\pm \sqrt{1-k^2} \text{ (} \lambda \text{) } \pm \sqrt{1-k^2} \text{ (} \sqsupset \text{) } \pm \sqrt{1-k^2} \text{ \& } 19 \text{ } -m \text{ (} \eta \text{) } m \text{ (} \tau \text{) } -m \text{ (} \lambda \text{) } m \text{ (} \sqsupset \text{) } m \text{ \& } 18
\end{array}$$

שימושי הפונקציות הטריגונומטריות לחישובים בהנדסה

תרגילי חזרה (עמודים 272-275)

1. א) 25.4° , 64.6° , 90° ב) יח', 5.74 יח', 8.2 יח', ג) 10 יח', 17.4 יח', 14.28 יח'
2. ב) 75.5° , 75.5° , 29° ג) 62.05 יח'
3. א) 8.5 ס"מ $AB = AC$, 5.25 ס"מ BC , שטח המשולש 21.25 סמ"ר
ב) אורך חוצה הזווית B הוא 5.25 ס"מ
4. א) $ED = 8$ ב) $\sphericalangle E = 90^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle N = 45^\circ$ ג) $BE = EN$ המשולש שווה שוקיים
5. א) $\sphericalangle O = 45.6^\circ$, $\sphericalangle OSI = 44.4^\circ$, $\sphericalangle I = 90^\circ$, 7 יח' SO , 5 יח' SI ,
4.9 יח' OI ב) 10.1 יח' ID , 11.27 יח' SD
ג) $\sphericalangle OSD = 108^\circ$, $\sphericalangle D = 26.34^\circ$
6. א) הגובה הוא BC ואורכו 7.7 ס"מ ב) 8.5 ס"מ ג) 8.97 ס"מ
7. המרחק על הקרקע 2747.5 מטר, מרחק אווירי 2923.8 מטר
8. 1.96 מטר 9. הגובה המירבי 4.53 מטר
10. $RU = 15.72$ יח', $TU = 15$ יח', $TR = 7.98$ יח' RU
11. $\sphericalangle F = 60^\circ$, $\sphericalangle O = 40^\circ$, $\sphericalangle N = 80^\circ$
12. א) $\sphericalangle DBE = 12^\circ$, $\sphericalangle ABD = 42^\circ$, $\sphericalangle BEC = 102^\circ$, $\sphericalangle C = 24^\circ$
ב) $BC = 25.4$, $AC = 32.9$, $BE = 13.7$, $BD = 13.4$

14. ב) $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = \angle C = 40^\circ$ ג) $AB = AC = 12.45$ ס"מ , $BC = 19$ ס"מ
 ג) 76 סמ"ר

15. א) המשולש שווה שוקיים $AO = OB$ ב) $\angle AOB = 157^\circ$

16. א) 71 סמ"ר ב) 39.4 ס"מ

ביטויים במשולש (עמודים 276-281)

1. א) בכל המשולשים הזוויות הן $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ ב) לכל המשולשים אותן זוויות

ג) $LM = 10$ ד) $AB = 2a$, $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$

3. ב) $14.5^\circ, 75.5^\circ, 90^\circ$ ג) היחס בין אורך הניצב לאורך היתר שווה

4. א) $SF = 6x$ ג) $90^\circ, 80.4^\circ, 9.6^\circ$ ד) $90^\circ, 80.4^\circ, 9.6^\circ$ 5. הזוויות: $90^\circ, 78.5^\circ, 11.5^\circ$

8. א) $AC = a + 4$ ב) $\sin 30^\circ = \frac{a}{a+4} = 0.5$ ג) $a = 4$

9. א) $\sin \alpha = \frac{MN}{20}$ ב) $MN = 20 \cdot \sin \alpha$

10. א) $CB = 12 \cdot \sin \alpha$ ב) $\sin \alpha = \frac{BC}{a}$, $BC = a \cdot \sin \alpha$ 11. $CB = b \cdot \sin \alpha$

12. א) $OD = m \cdot \sin \alpha$ ב) שטח המשולש: $15m \cdot \sin \alpha$ ג) (i) 188.8 סמ"ר
 (ii) 389.7 סמ"ר (iii) 1276 סמ"ר

13. $PI = a \cdot \sin(90 - \alpha) = a \cdot \cos \alpha$, $\angle L = 90^\circ - \alpha$, $LI = a \cdot \sin \alpha$

14. א) $\angle B = \angle C = 80.4^\circ$, $\angle A = 19.2^\circ$

16. א) $AD = b \cdot \sin \alpha$ ב) שטח המשולש: $\frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$ ג) 19.3 סמ"ר

17. א) $\angle O = 41.8^\circ$ ב) $\angle K = \angle F = 69.1^\circ$ ג) $OF = 1.5a$, השטח: $\frac{1.5a^2}{2}$

עוד על שטח משולש (עמודים 282-284)

1. א) $AD = 9.4$ ס"מ ב) שטח המשולש ABC: 56.4 סמ"ר

5. ב) 22.23 סמ"ר ג) $\angle L = \angle M = 68^\circ$ ד) 6 ס"מ

6. שטח משולש BED: 13.53 סמ"ר 7. רק במשולש ג

מרובעים - מבוא (עמודים 285-287)

3. א), ב), ה) הם דלתונים.

6. א) 23.07 ס"מ ב) 26.85 ס"מ

7. א) 54 יחיד ב) 82.7 יחיד ג) 90° ד) $AM = 9 \cdot \sin \alpha$ ה) $108 \cdot \sin \alpha$

- 4 א' 12.17° , יח' 15.87° (ב' 96.6° יח' $5.91.2^\circ$, 88.8°)
 6 א' 29° , 151° 7 60° , 120°
 8 א' האלכסונים: $2a \cdot \sin \alpha$, $2a \cdot \cos \alpha$, שטח המעוין: $2a^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
 (ב' (i) האלכסונים 15.32° יח', 12.86° יח', השטח: 98.48 יח"ר
 (ii) האלכסונים: 10° יח', 17.32° יח', השטח: 86.6 יח"ר

מצולע משוכלל ומעגל חוסם וחסום (עמודים 309-304)

- 2 א' 45° (ב' מתומן משוכלל ג' המשולשים חופפים ד' 3.9 ס"מ
 4 א' 30° (ב' 150° ג' 9.66 ס"מ
 8 א' 11.55 ס"מ
 11 א' 108° (ב' 19.4 יח' ג' 3 משולשים, המשולשים החופפים הם ABC ו-AED ד' 36°
 ה) שטח כל אחד מהמשולשים ABC ו-AED הוא: 68.5 יח"ר, שטח משולש ADC הוא: 110.6 יח"ר ו' שטח המחומש: 247.6 יח"ר
 12 א' 20.8 יח' (ב' 6 יח"ר 13 א' 144° (ב' 1731.2 יח"ר
 14 450 יח"ר 15 14.14 יח'
 16 א' 120° (ב' $FB = 2m \cdot \sin 60^\circ$ ג' 6 אלכסונים
 17 א' 135° (ב' זווית הראש: $\frac{360^\circ}{n}$ זווית המצולע: $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$
 18 א' 54° (ב' $BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\sin \alpha}$

פונקציה טריגונומטרית נוספת ושימושיה

הפונקציה $\tan \alpha$ (עמודים 315-310)

- 7 א' 45° (ב' 116.56°
 8 א' 45° (ב' 135° ג' 0° או 180°
 11 הטענות הנכונות הן: (ב), (ד)
 12 $\tan(50^\circ) = \tan(230^\circ) = \tan(410^\circ)$
 $\tan(120^\circ) = \tan(300^\circ) = \tan(480^\circ)$

$\tan(\alpha)$ ומשוואות (עמודים 321-316)

- 1 א' 220° , 400° , -140° (ב' (i) 320° , 140° , -40° , -220° (ii) 284° , 104° , -76° , -256°
 (iii) 45° , -135° , 225° , 405° (iv) 0° , -180° , 180° , 360°
 2 א' $\tan 70^\circ = \tan 250^\circ = \tan 430^\circ = \tan (-110^\circ) = 2.75$ (ב' $\tan 70^\circ = \tan 250^\circ = \tan 430^\circ = \tan (-110^\circ) = 2.75$
 ג' $\tan 53^\circ = \tan 233^\circ = 1.33$ ד' $\tan 110^\circ = \tan 290^\circ = \tan 470^\circ = \tan (-70^\circ) = -2.75$
 4 א' 63.4° , 243.4° , -116.6° , 423.4° (ב' 45° , -45° , 135° , 315° , 495°
 5 $\alpha = -82.87^\circ$, 97.13° , $\tan \alpha = -8$
 7 א' השיפוע 3, הזווית: 71.6° (ב' השיפוע: 1, הזווית: 45° ג' השיפוע: -3, הזווית: 108.4°

8. א) השיפוע: $-\frac{2}{3}$, הזווית: -33.7° (או 146.3°) ב) השיפוע: $-\frac{1}{2}$, הזווית: -26.6° (או 153.4°)

ג) השיפוע: $-\frac{1}{5}$, הזווית: -11.3° (או 168.7°) ד) השיפוע: $\frac{2}{5}$, הזווית: 21.8°

9. א) $35^\circ, -145^\circ$ ב) $-85.2^\circ, 94.8^\circ$ ג) $71.6^\circ, -108.4^\circ$ ד) $85.2^\circ, -94.8^\circ$

10. א) $45^\circ, 225^\circ$ ב) $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ ג) $56.3^\circ, 236.3^\circ$ ד) $78.7^\circ, 258.7^\circ$

11. א) 63.4° ב) 0° ג) 116.6° ד) 153.4° ה) 26.6° ו) 0°

12. א) $44.4^\circ, 135.6^\circ, -224.4^\circ, -315.6^\circ$

ב) (i) $90^\circ, -270^\circ$ (ii) $0^\circ, -180^\circ, 360^\circ, -180^\circ, -360^\circ$

(iii) $-30^\circ, -150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ (iv) $53.13^\circ, 126.87^\circ, -233.13^\circ, -306.87^\circ$

13. א) 26.56° ב) 30° ג) 63.4° ד) אין פתרון ה) אין מספר כזה ו) המספרים שגדולים מ-1,

והמספרים שקטנים מ-1

14. א) $90^\circ, 270^\circ$ וכיו - כל הכפולות האי-זוגיות של 90° ב) לא

$\tan(\alpha)$ במשולש ישר זווית (עמודים 324-322)

2. א) שיפוע הישר: 2 ב) $2 = \frac{\text{גובה המדרגה}}{\text{רוחב המדרגה}} = \text{שיפוע}$ ג) $\tan \alpha = 2$ ד) $\alpha = 63.4^\circ$

4. א) $\tan \alpha = 2, \alpha = 63.4^\circ$ ב) $\tan \alpha = \frac{1}{3}, \alpha = 18.4^\circ$

5. א) 7.3 יחידות ב) 36.4 יחיד

8. א) 29.7° ב) 59.4°

9. $104.3^\circ, 75.7^\circ$

10. א) $\tan \alpha = \frac{h}{RM}$ ב) $RM = \frac{h}{\tan \alpha} \Leftarrow RT = \frac{2h}{\tan \alpha}$ ג) שטח המשולש: $\frac{h^2}{\tan \alpha}$

11. א) $DC = \frac{a}{\tan \alpha}$ ב) $\sphericalangle BAC = 90^\circ - \alpha$ ג) $AD = \frac{a}{\tan(90^\circ - \alpha)}$

ד) שטח המשולש: $\frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} \right)$

12. 29.16 יחיד

זווית גובה וזווית עומק (עמודים 330-325)

2. ב) דני: 30.96° , עמית: 23.2° , אסף: 16.7°

3. א) 30.96° ב) 23.2° ג) 16.7° ד) הזוויות שוות

4. גובה הבנין: 55 מטר

6. א) 27.5 מטר ב) 17.3 מטר ג) 10.2 מטר

7. 7.1°

8. 3.5 מטר

פרק ד: יישומים טריגונומטריים במרחב

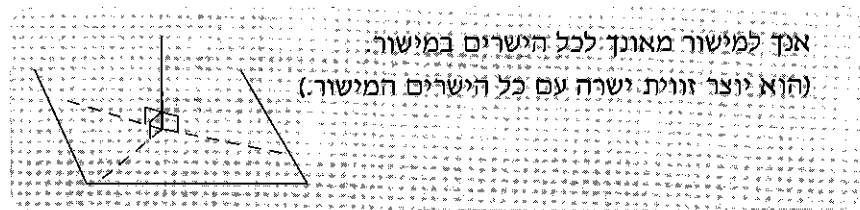
זוויות ישרות במרחב

סעיף זה ושני הסעיפים הבאים, חלוקים באנשים יסודיים ובגלגל מייצג גלגל מייצג ובגלגל קוקר (קיסמיה) לייצג דא מייצג (טרטוט) אופיקר.

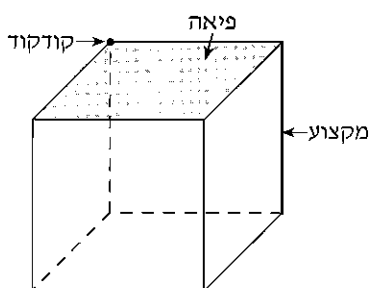
1.  הסתכלו בפינה של החדר ובידקו כמה זוויות ישרות אתם רואים שם.
2.  למעשה כל אחד יודע מהו ניצב למישור ומהו משופע למישור. ננסה כעת להשתמש בידע הזה, כדי להגדיר במונחים מתמטיים את המושגים האלה. היעזרו בקיסמים וחתיכת קלקר.

א) נעצו קיסם בקלקר כך שיהיה **משופע** לקלקר. שרטטו, דרך עקב המשופע, ישר שייצור זווית ישרה עם הקיסם המשופע. שרטטו על הקלקר (דרך עקב המשופע), ישר אחר. האם גם הוא יוצר זווית ישרה עם הקיסם המשופע? נסו לשרטט, על הקלקר, ישר נוסף שיהיה מאונך למשופע.

ב) נעצו בקלקר קיסם **מאונך** לקלקר. שרטטו ישר, דרך עקב הקיסם המאונך. האם הוא יוצר זווית ישרה עם הקיסם המאונך? שרטטו ישר נוסף (דרך עקב הקיסם המאונך) האם גם הוא יוצר זווית ישרה עם הקיסם? נסו לשרטט (דרך עקב הקיסם המאונך) ישר שלא ייצור זווית ישרה עם הקיסם הזה. האם הצלחתם?



משופע למישור יוצר זווית ישרה רק עם ישר אחד במישור.

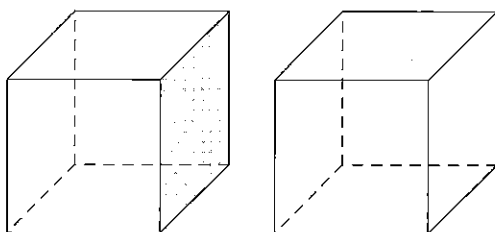


3. הפניכם שרטוט של קובייה.

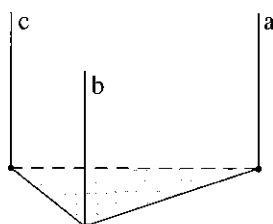
- (א) — כמה קודקודים לקובייה?
- כמה פיאות לקובייה?
- כמה מקצועות לקובייה?

(ב) איזו צורה יש לכל פיאה בקובייה?

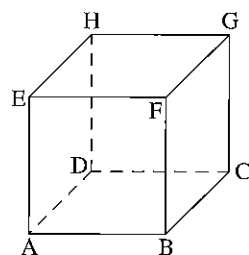
4. בנו לכם קובייה: שרטטו על הקלקר ריבוע, שאורך צלעו פחות מאורך קיסם והעמידו בקודקודים קיסמים מאונכים למישור הקלקר כך שיתקבל שלד של קובייה.



5. צבעו בשרטוטים שלפניכם את כל המקצועות המאונכים למישור הצבוע. (היעזרו בקובייה שבניתם).



6. a, b, c אנכים למישור הצבוע. סמנו את כל הזוויות הישרות שבשרטוט.

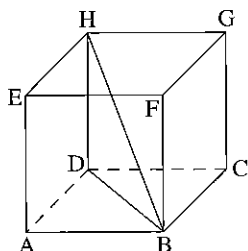


- 7. (א) — האם הקודקודים H ו-G נמצאים על אותה פיאה?
- האם הקודקודים H ו-A נמצאים על אותה פיאה?
- האם הקודקודים H ו-B נמצאים על אותה פיאה?

אלכסון של קובייה הוא קטע, המחבר שני קודקודים שאינם נמצאים על אותה פיאה.

המשך →

- (ב) הוסיפו אלכסון בקובייה שבניתם (בתרגיל 4).
 (ג) אילו מבין הקטעים הבאים הם אלכסונים של הקובייה המשרטטת:
 EC, AC, HF, DF, DB, CH
 (ד) כמה אלכסונים לקובייה?

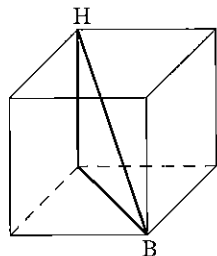
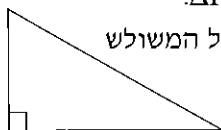


8. (א) לאילו מהישרים המשרטטים מאונך הקטע HD?

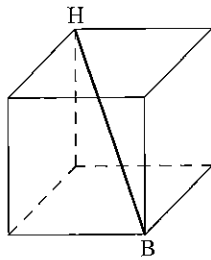
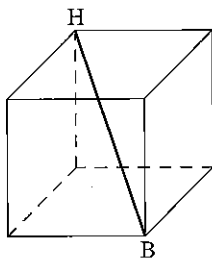
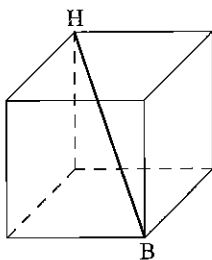
⚠ בכל חישוב דייקו עד ספרה אחת לאחר הנקודה העשרונית.

(ב) אורך מקצוע הקובייה 5 ס"מ.

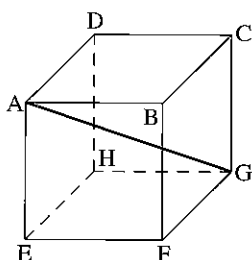
- שרטטו את הפיאה ABCD בצד.
- חשבו את אלכסון הפיאה BD, (על-פי משפט פיתגורס).
- סמנו, בשרטוט של הקובייה, זווית ישרה ב- $\triangle HDB$.
- רשמו H, D, B במקומות המתאימים בשרטוט של המשולש משמאל ורשמו את גודל הצלעות HD ו- DB.
- חשבו את אלכסון הקובייה HB.



9. (א) לחישוב אלכסון הקובייה השתמשתם במשולש ישר זווית, שאחד מניצביו מקצוע של הקובייה והניצב השני אלכסון של פיאה. (ראו שרטוט משמאל).
 (ב) היעזרו בקובייה שבניתם ושרטטו בכל שרטוט של הקובייה משולש אחר שצלעותיו הן BH, אלכסון של פיאה, ומקצוע של הקובייה.



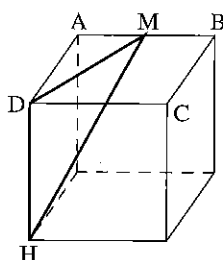
- (ב) סמנו זווית ישרה בכל משולש ששרטטתם.
 (ג) מה תוכלו לומר על כל המשולשים ששרטטתם? נמקו.



10. א) שרטטו בשרטוט הקובייה משולש ישר זווית, שצלעותיו AG, אלכסון פיאה ומקצוע של הקובייה.

ב) אורך מקצוע הקובייה 17 ס"מ.
 — שרטטו בצד את הפיאה בה העברתם אלכסון וחשבו את אלכסון הפיאה.
 — שרטטו בצד את המשולש ישר זווית מסעיף א' וחשבו את אלכסון הקובייה.

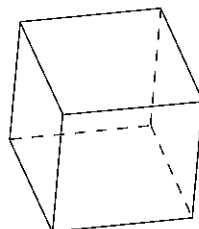
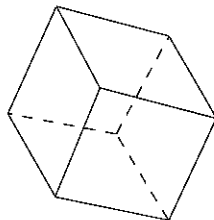
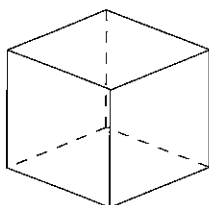
בשרטוט המרחבי, משולש ישר זווית נראה לעתים כקהה זווית או חד זווית, וריבוע או מלבן נראים לעתים כמקביליות. לכן, לפני החישוב כדאי לשרטט בצד את המשולשים או המרובעים, בצורתם הנכונה.

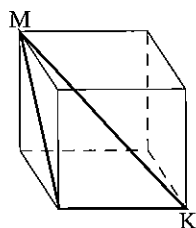


11. א) אורך מקצוע של קובייה 20 ס"מ.
 M אמצע AB.
 — סמנו במשולש המודגש את הזווית הישרה.
 — שרטטו בצד את המשולשים ADM ו-HDM.
 — חשבו את DM ואת MH.
 ב) שרטטו בקובייה משולש נוסף החופף ל-AHDM.

תרגילים

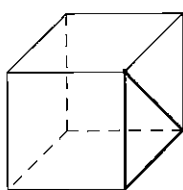
12. העבירו בכל שרטוט אלכסון של הקובייה ואלכסון של פיאה היוצאים מאותו קודקוד.



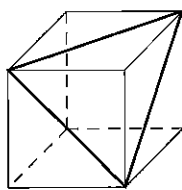


13. א) העבירו קיסמים בתוך הקובייה שבניתם כך שיתקבל המשולש המודגש.
 ב) שרטטו את המשולש בצד. מאיזה סוג הוא?
 ג) חשבו את MK אם אורך מקצוע הקובייה 7 ס"מ.

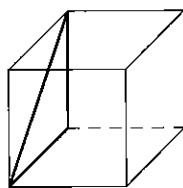
14. I) — היעזרו בקובייה שבניתם, זהו וסמנו זוויות ישרות (במידה ויש כאלה) בתוך המשולשים המודגשים.
 — שרטטו כל משולש בצד, זהו מאיזה סוג הוא (שווה צלעות, שווה שוקיים, ישר זווית), ונמקו.



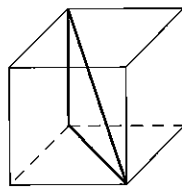
ב)



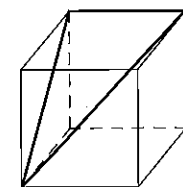
א)



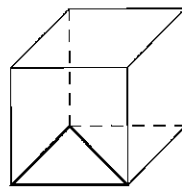
ד)



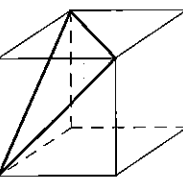
ג)



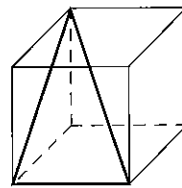
ו)



ה)



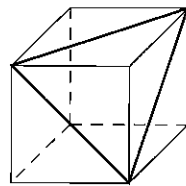
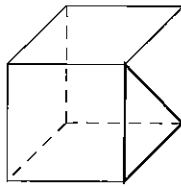
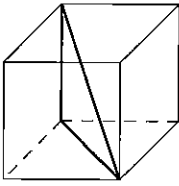
ח)



ז)

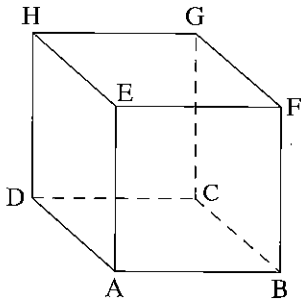
- II) חברו בקו שרטוטים בהם המשולשים המודגשים חופפים.

15. לפניכם השרטוטים מסעיפים א' ב' ו- ג' בתרגיל הקודם.



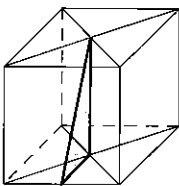
- שער, לאיזה מהמשולשים היקף גדול ביותר ולאיזה מהם היקף קטן ביותר.
- חשבו, את היקף המשולש המודגש, אם ידוע שאורך מקצוע הקובייה 10 ס"מ ובידקו את השערתכם.

16. א) שרטטו אלכסון של פיאה ואלכסון של הקובייה היוצאים מהקודקוד A והדגישו משולש ישר זווית שנוצר.

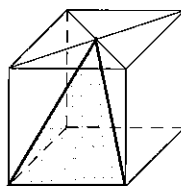


- אורך צלע הקובייה 12 ס"מ.
 - באיזה משולש תשתמשו כדי לחשב את אלכסון הפיאה ששרטטתם?
 - חשבו את אורך אלכסון הפיאה.
 - חשבו את אלכסון הקובייה.
- ב) נתון כי אורך אלכסון של פיאה הוא 8 ס"מ. חשבו את מקצוע הקובייה ואת אלכסון הקובייה (שרטטו תחילה את המשולש בצד).

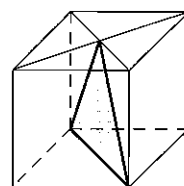
17. I) בנו על קלקר קובייה, שאורך המקצוע שלה קטן מאורך קיסם. הוסיפו קיסמים על-פי הצורך וקבעו מאיזה סוג המשולש המודגש.



ג)



ב)

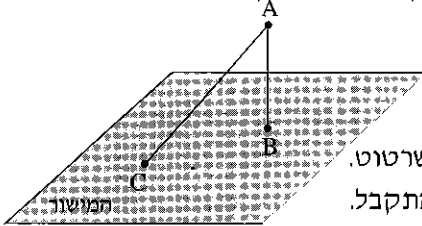


א)

II) חשבו את ההיקף והשטח של המשולשים המשורטטים, אם אורך מקצוע הקובייה 10 ס"מ.

היטלים

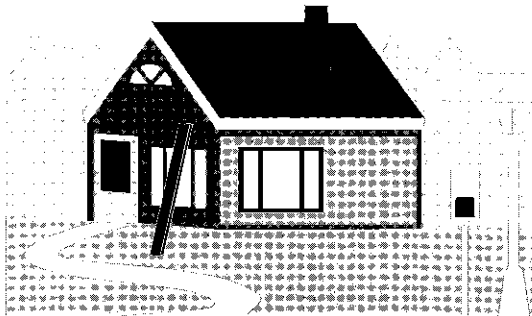
1. בנו על קלקר, קטע AC משופע למישור, וקטע AB מאונך למישור.



- בידקו מי קצר ביותר בבנייה שבניתם, המשופע AC, או הקטע המאונך AB?
- חברו את CB על הקלקר וגם כאן בשרטוט.
- סמנו את הזווית הישרה במשולש שהתקבל.

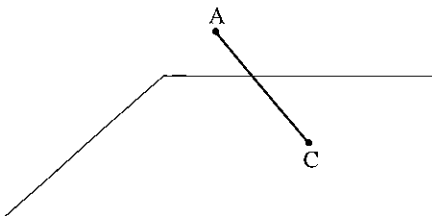
CB נקרא ההיטל של AC על המישור.

2. במהלך שיפוץ מבנה ישן העמידו מוט תומך בקיר. העבירו מקצה המוט אנך לקרקע ושרטטו את ההיטל של המוט.



3. (א) כדי לשרטט את ההיטל של AC על המישור, יש לשרטט אנך למישור דרך A.

כדי לקבל שרטוט, ש"מדגים טוב" את המבנה, משרטטים את הקטע המאונך קצר מהמשופע.



- שרטטו אנך למישור מ-A, ואת ההיטל של AC על המישור.
- סמנו את הזווית הישרה במשולש שהתקבל.

(ב) אורך AC 10 ס"מ ואורך ההיטל שלו על המישור 6 ס"מ. חשבו את אורך האנך מ-A למישור.



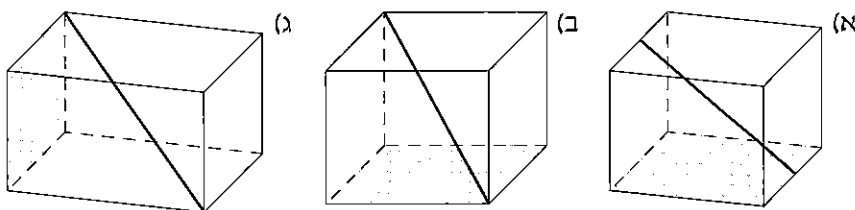
4. מרחק A מהמישור 4 ס"מ ואורך המשופע מ-A למישור 7 ס"מ.
 שרטטו וחשבו את אורך ההיטל של המשופע על המישור.

5. (א) האם ייתכן שההיטל של קטע יהיה באורך הקטע עצמו?
 (ב) האם ייתכן שהיטל של קטע יהיה ארוך מהקטע עצמו?
 (ג) האם ייתכן שהיטל של קטע יהיה נקודה?

6. אורך קטע משופע, היוצא מ-A אל המישור, 12 ס"מ.
 אורך היטלו על המישור 7 ס"מ.
 חשבו את המרחק של A מהמישור.

7. (א) שרטטו על קלקר קטע AB.
 נעצו ב-A וב-B שני קיסמים משופעים כך שהקטע AB יהיה סכום
 היטליהם.
 (ב) נעצו מחדש את הקיסמים כך שאורך ההיטל של כל אחד מהמשופעים יהיה
 כמחצית AB.

8. שרטטו וצבעו את ההיטל של הקטע המודגש על המישור הצבוע.



9. ע

(א) בנו תיבה על קלקר, על-פי ההוראות הבאות:

שרטטו על קלקר מלבן. נעצו קיסמים שאורכם שווה והם מאונכים למלבן

בקודקודיו. קיבלתם שלד של **תיבה**.

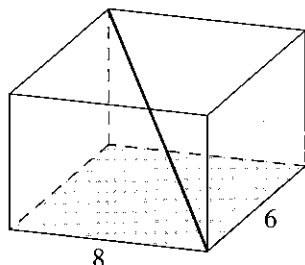
(ב) — שרטטו את ההיטל של אלכסון

התיבה (הקטע המודגש) על הפיאה

הצבועה.

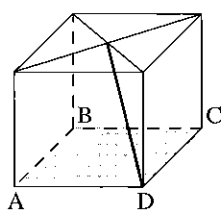
— חשבו, על-פי הנתונים, את אורך

ההיטל ששרטטתם.

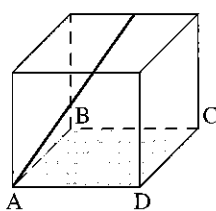


תרגילים

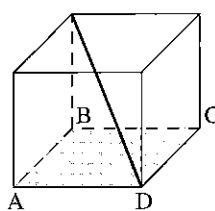
10. שרטטו את ההיטל של הקטע המודגש על הפיאה ABCD.



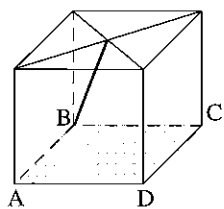
(א)



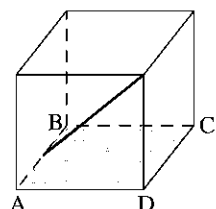
(ב)



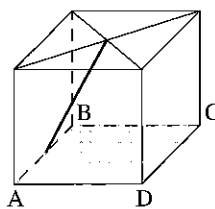
(א)



(ג)



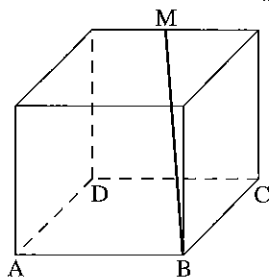
(ה)



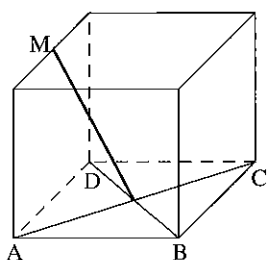
(ד)

11. (i) M אמצע מקצוע של קובייה. שרטטו את ההיטל של הקטע המודגש על הפיאה ABCD.

(ii) שרטטו את הפיאה ABCD בצד. שרטטו גם את ההיטל ששרטטתם וחשבו את אורכו, אם נתון שאורך צלע הקובייה 10 ס"מ.



(ב)

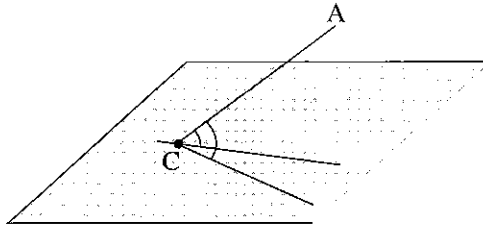


(א)

זווית בין ישר למישור

1. בנו משופע למישור הקלקר.

המשופע יוצר זוויות עם כל ישר שנשרטט על הקלקר דרך C .
נסו לשרטט על הקלקר ישר היוצר זווית קטנה ככל שאפשר עם המשופע.
הניחו קיסם על הקלקר דרך עקב המשופע (נקודת פגישתו עם המישור), סובבו אותו סביב העקב ועקבו אחר גודל הזווית בין המשופע לקיסם המסתובב. המשיכו עד שתיווצר הזווית הקטנה ביותר.



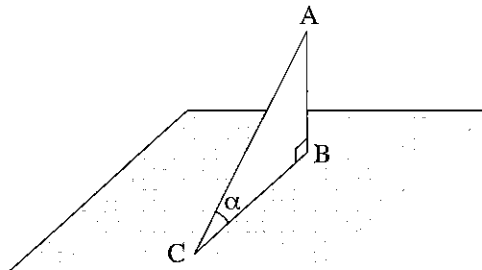
הזווית הקטנה ביותר זו הזווית בין המשופע למישור.

כעת נשאלת השאלה איך נמצא את הזווית הקטנה בין המשופע לישר במישור.



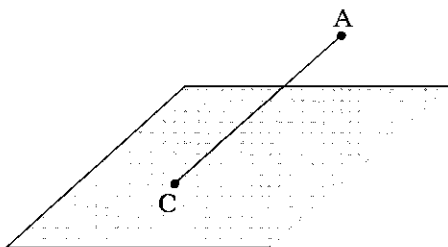
אם אכן מצאתם את הזווית הקטנה ביותר, הרי שהקיסם של הקלקר הוא היטל המשופע. כדי לבדוק זאת נעצו אנך למישור הקלקר, מהקצה העליון של המשופע. האם האנך פגע בישר המונח על המישור?

הזווית הקטנה ביותר בין משופע לישר במישור זו הזווית בין המשופע להיטלו.
זווית זו נקראת **הזווית בין המשופע למישור**, (α בשרטוט).



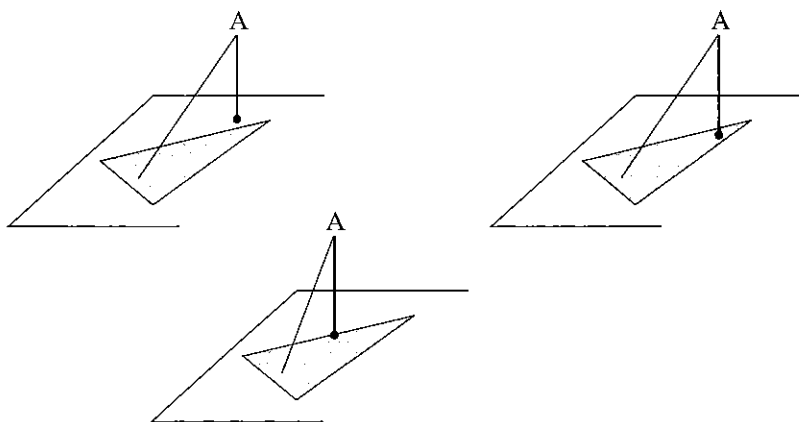
2. א) שרטטו מ- A אנך למישור וסמנו את הזווית בין AC למישור. סמנו גם את הזווית הישרה.

ב) אורך AC 10 ס"מ. הזווית בין AC לבין המישור 40° . שרטטו ורשמו בשרטוט. חשבו את מרחק A מהמישור.



3. א) בין אילו ערכים יכולה להיות הזווית בין המשופע להיטלו? ב) מהי הזווית הגדולה ביותר האפשרית, בין ישר למישור? מה תוכלו לומר, במקרה זה, על הישר והמישור?

4. שרטטו משולש על הקלקר. העבירו משופע שיפגע במישור בתוך המשולש. א) בחרו נקודה על המשופע והעבירו ממנה אנך למישור. היכן פוגע האנך שהעברתם, בתוך המשולש, על צלע המשולש, או מחוץ למשולש? השלימו את השרטוט המתאים למקרה שבניתם וסמנו את הזווית בין המשופע והמישור.

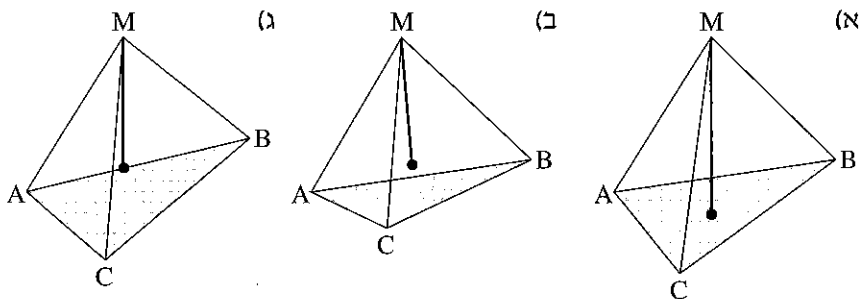


ב) בצעו את העברת האנך מנקודות אחרות על המשופע, כך שיתקבלו שני המקרים האחרים, והשלימו את השרטוטים.

5.  המרחק של A מהמישור 5 ס"מ. אורך המשופע AC 9 ס"מ. בנו (על קלקר), שרטטו וחשבו את הזווית בין AC למישור ואת אורך ההיטל של AC על המישור.

6.  הקטע המודגש בכל שרטוט הוא אנך למישור (היעזרו בבניה מתאימה של קיסמים על קלקר).

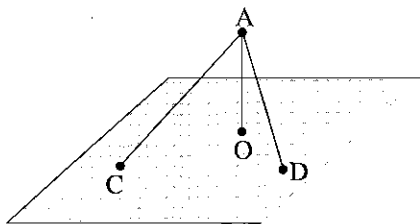
שרטטו וסמנו ב- α את הזווית בין MA למישור, ב- β את הזווית בין MB למישור, וב- γ את הזווית בין MC למישור.



7.  בנו בעזרת קיסמים וקלקר שני משופעים ואנך למישור.

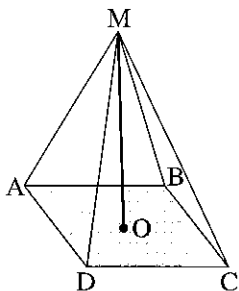
(בשרטוט, AD ו- AC משופעים, AO אנך.)

שרטטו את היטלי המשופעים על הקלקר וכאן בשרטוט. סמנו בשרטוט את הזוויות בין המשופעים למישור.



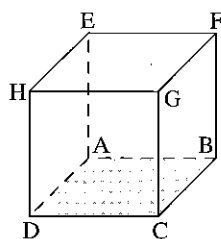
8.  בשרטוט, MO מאונך למישור ABCD.

ונתון כי $MA = MB = MC = MD = 8$ ס"מ
 $MO = 5$ ס"מ



— חשבו את הזווית α בין MA והמישור.
(שרטטו בצד את $\triangle MOA$ ורשמו בו את הנתונים.)

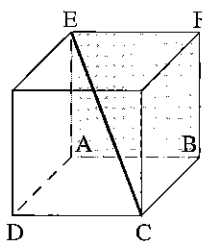
— מה גודלן של הזוויות שבין MB למישור, בין MC למישור ובין MD למישור? נמקו.



9. (א) בנו קובייה על קלקר (אורך המקצוע קטן מאורך קיסם). בנו ושרטטו אלכסון של הקובייה ואלכסון של הפיאה ABCD היוצאים מהקודקוד C. סמנו את הזווית בין אלכסון הקובייה לפיאה ABCD.

(ב) אורך מקצוע הקובייה 10 ס"מ. שרטטו את הפיאה בה העברתם אלכסון וחשבו את אורכו.

(ג) שרטטו את המשולש בו מופיעה הזווית שסימנתם, סמנו בו את הזווית הישרה, וחשבו את צלעותיו. חשבו את הזווית בין אלכסון הקובייה לפיאה ABCD.

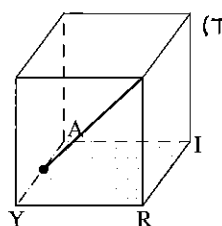
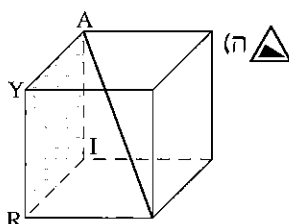
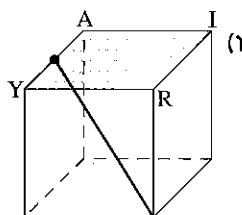
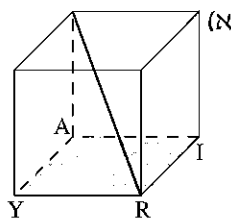
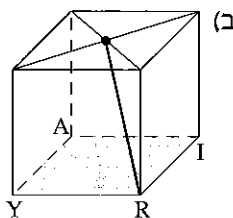
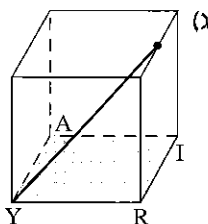


- (ד) שרטטו את הזווית בין אלכסון הקובייה CE לפיאה EFBA. מה גודלה? 

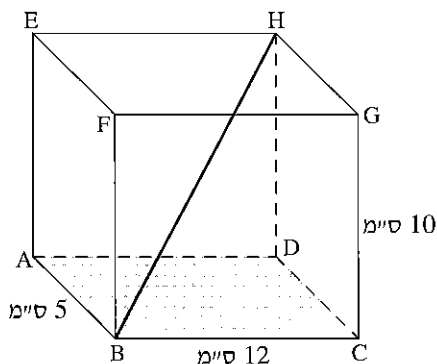
תרגילים

10. שרטטו את הזווית בין הישר המודגש והפיאה YAIR. הנקודות המודגשות נמצאות באמצע מקצוע או במרכז הפאה.

(תחילה הדגישו או שרטטו אנך למישור YAIR ואת ההיטל של המשופע עליו.)



11. (א) בנו תיבה על קלקר. העבירו אלכסון של התיבה ובנו את הזווית בינו ובין הבסיס התחתון של התיבה. השלימו את השרטוט.



(ב) שרטטו את הבסיס התחתון

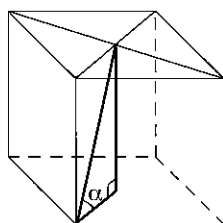
וחשבו את אורך האלכסון

ששרטטתם.

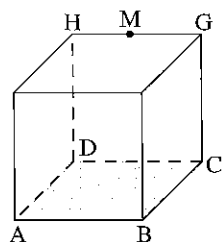
(ג) שרטטו משולש בו מופיעה

הזווית בין האלכסון והבסיס

וחשבו את גודלה.



12. העבירו בקובייה שבניתם על הקלקר, קיסמים המתאימים לישרים המודגשים. הוסיפו בבניה ובשרטוט משולש חופף למשולש המודגש וסמנו זווית השווה ל- α .



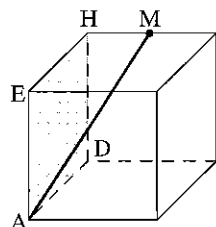
13. (א) M אמצע HG. שרטטו את הזווית בין MA

לבין הפיאה ABCD.

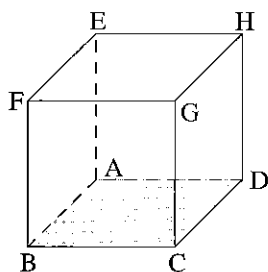
(ב) אורך צלע הקובייה 10 ס"מ.

חשבו אורכי צלעות במשולש ששרטטתם

בסעיף א' ואת הזווית בין MA לפיאה ABCD.

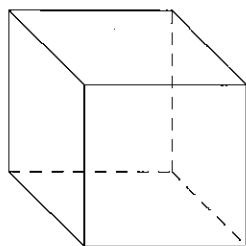


(ג)  שרטטו את הזווית בין AM לפיאה ADHE.



14. בנו את הקובייה על הקלקר.

בנו, שרטטו וסמנו את הזווית בין CH לבין הפיאה ABCD, גם בקובייה שבניתם וגם בשרטוט. מה גודלה?



15. א) אורך צלע הקובייה 40 ס"מ.

— שרטטו אלכסון כלשהו של הקובייה.

— שרטטו וסמנו את הזווית בינו לבין

אחת הפיאות וחשבו את הזווית.

ב) מה תהיה, לדעתכם, גודל הזווית הזו

בקובייה שאורך הצלע שלה 80 ס"מ?

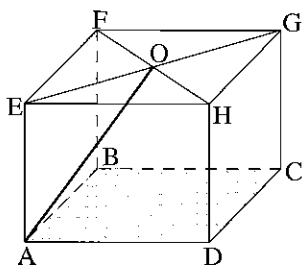
ג) מה יהיה גודל הזווית בין האלכסון לכל אחת

מהפיאות האחרות?

16. א) שרטטו ריבוע (קטן) על קלקר ונעצו קיסמים באורך שווה בקודקודים כך שאורכם

יהיה שונה מאורך צלעות הריבוע. קבלתם שלד של **תיבה** שבסיסה ריבוע.

ב) O נקודת הפגישה של אלכסוני הפיאה העליונה של התיבה.



— בנו בתיבה שעל הקלקר את הקטע

AO ואת היטלו על הקלקר.

— שרטטו וסמנו ב- α את הזווית בין

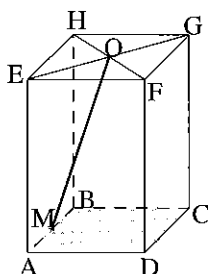
AO לבין הפיאה ABCD.

ג) $AD = 20$ ס"מ, $AE = 15$ ס"מ

חשבו את ההיטל של AO.

שרטטו את המשולש בו מופיעה הזווית α .

חשבו את אורכי צלעותיו ובעזרתן את גודל הזווית.



17. M אמצע AB.

א) בנו ושרטטו את הזווית בין MO לפיאה ABCD.

סמנו אותה ב- α .

ב) אורך צלע ריבוע הבסיס של התיבה 10 ס"מ.

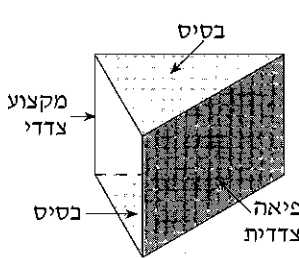
גובה התיבה 15 ס"מ ($AE = 15$).

שרטטו את המשולש בו מופיעה α ,

חשבו את צלעות המשולש ובעזרתן את גודל הזווית.

מנסרות

בסעיף זה גכילו מנסרות אגייטול אג מולולטל שולמדו, כולל מולכרים בין ייזול אג מולדו ודל מולדו.



1. א) שרטטו על קלקר משולש ונעצו קיסמים,

שאורכם שווה והם מאונכים למישור הקלקר, בקודקודי המשולש.

בניתם שלד של מנסרה שבסיסה משולש.

ב) שרטטו על קלקר מרובע ונעצו קיסמים,

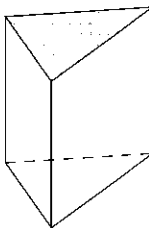
שאורכם שווה והם מאונכים למישור הקלקר, בקודקודי המרובע. בניתם מנסרה שבסיסה מרובע.

ג) חזרו על הבניה כשעל הקלקר משורטט מחומש.

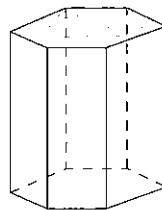
גוף החסום על-ידי שני מצולעים חופפים המקבילים זה לזה והמקצועות

הצדדיים מאונכים למצולעים החופפים נקרא **מנסרה ישרה**.

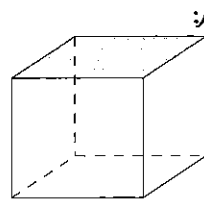
המצולעים החופפים הם בסיסי המנסרה.



מנסרה משולשת



מנסרה משושה



מנסרה מלבנית

דוגמאות:

⚠ בחוברת זו נעסוק רק במנסרות ישרות ונקרא להן מנסרות.

2. א) איזה מרובעים הם הפאות הצדדיות של מנסרה?

ב) איך נקראת מנסרה שבסיסה מלבנים?

ג) איך נקראת מנסרה שכל פיאותיה ריבועים?

ד) האם קיימת מנסרה שבסיסה ריבועים ואינה קובייה?

ה) איך נקראת מנסרה כזו?

ו) יצרו אוהל סיירים משמיכה.

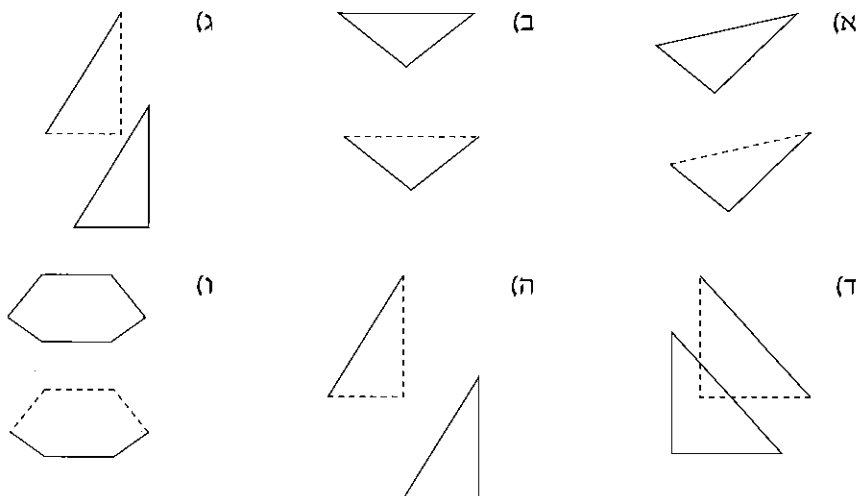
האם האוהל הוא מנסרה?



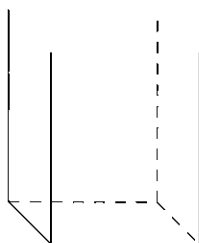
כדי שתקבל תמונה טובה של הגוף לא תמיד משרטטים את הבסיסים והפיאות הצדדיות של מנסרות על-פי הנתונים.



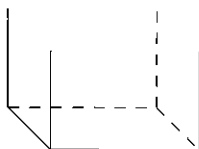
3. השלימו את שרטוט המנסרות על-פי הבסיסים הנתונים.



4. (א) השלימו שרטוט של תיבה.
מה צורת הבסיסים של תיבה?
מה צורת הפיאות הצדדיות?

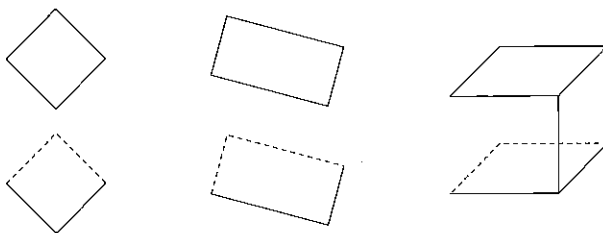


(ב) השלימו שרטוט של קובייה.
מה צורת הבסיסים של קובייה?
מה צורת הפיאות הצדדיות?



תיבה היא מנסרה שבבסיסה מלבנים. קובייה היא תיבה שכל פיאותיה ריבועים.

5. (א) השלימו את שרטוט התיבות הבאות על ידי חיבור קודקודים "מתאימים".



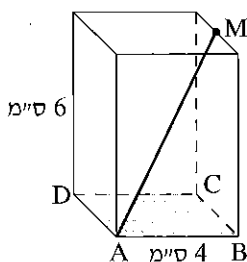
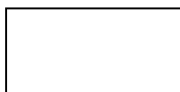
כל הפיאות של תיבה הן מלבנים אך לא כולן משורטטות כמלבנים.



(ב) יעל שרטטה את בסיסי התיבה כמלבנים.

נסו להשלים את שרטוט התיבה.

מה דעתכם על השרטוט?

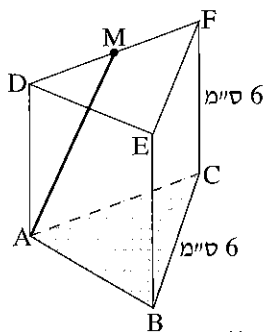


6. M אמצע מקצוע של תיבה שבסיסה ריבועים.

(א) שרטטו את הזווית בין AM לבסיס ABCD וסמנו ב- α .

(ב) שרטטו בצד את הפיאה ABCD וחשבו, על סמך הנתונים הרשומים בשרטוט, את ההיטל של MA על ABCD.

(ג) שרטטו בצד את המשולש בו מופיעה α וחשבו את גודלה.



7. M אמצע מקצוע של בסיס מנסרה שבסיסה

משולשים שווי צלעות.

(א) בנו מנסרה כזו על קלקר.

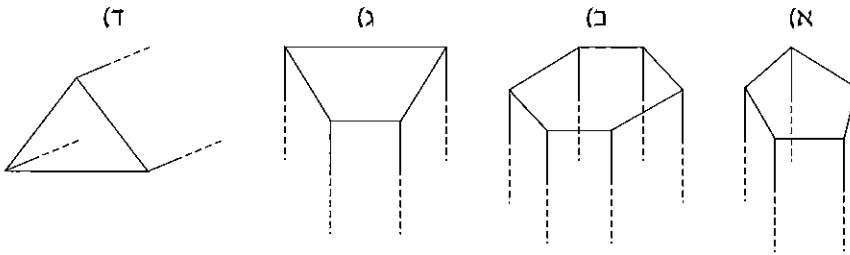
(ב) בנו ושרטטו את הזווית בין AM לבסיס ABC, (סמנו ב- α).

(ג) חשבו את α , אם אורך כל אחד מהמקצועות 6 ס"מ.

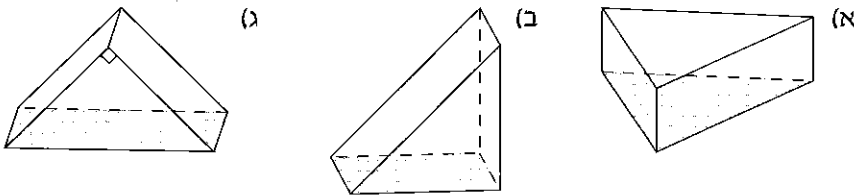
(ד) L אמצע AB. בנו על הדגם והוסיפו בשרטוט את הזווית בין ML לבסיס ABC. סמנו זווית זו ב- β וחשבו את גודלה.

תרגילים

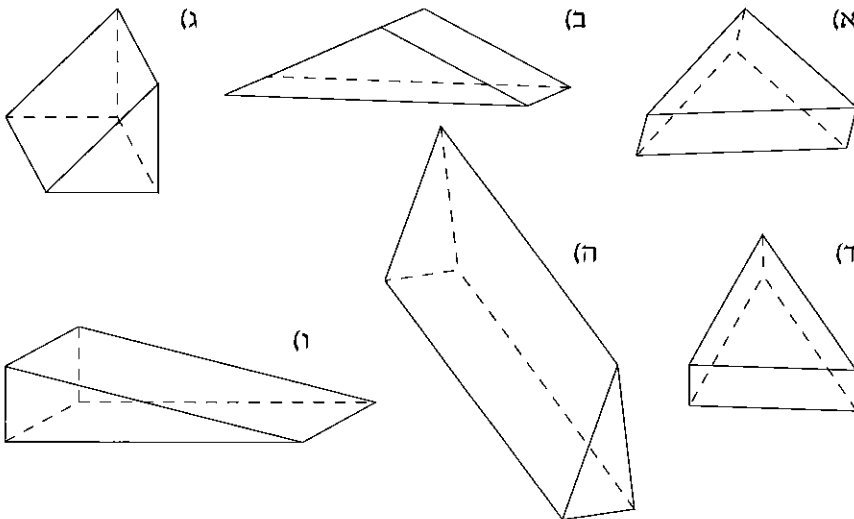
8. השלימו את שרטוט המנסרות.



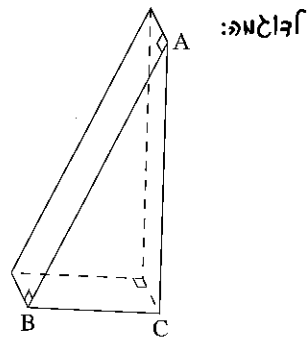
9. באחד מהדפים לגזירה שבסוף הספר, תמצאו פריסה של מנסרה משולשת. גזרו, קפלו והדביקו כך שתקבל מנסרה. הניחו את המנסרה על השולחן כך שתאיים לשרטוט.



10. סמנו באותיות את קודקודי אחד הבסיסים של כל מנסרה. מה משותף לכל המנסרות המשרטטות?

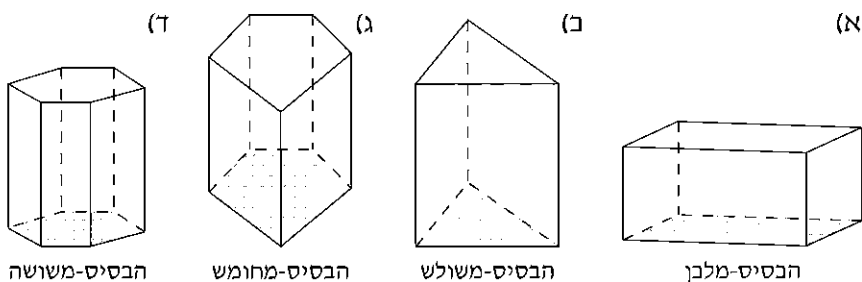


11. א) סמנו שלוש זוויות ישרות בכל אחת מהמנסרות שבתרגיל 10.

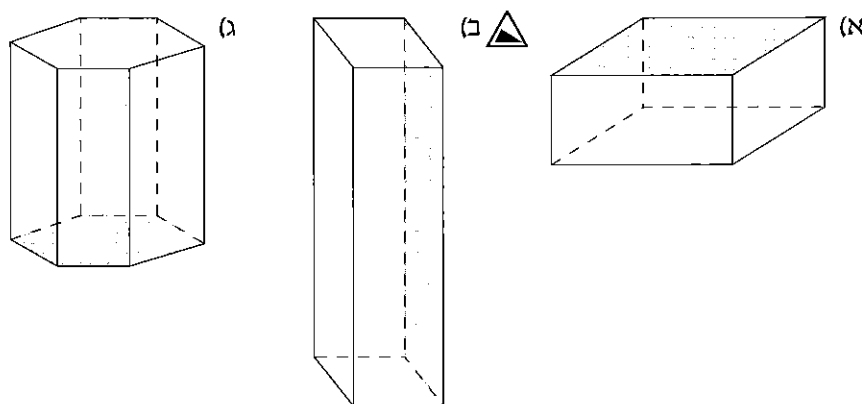


ב) בנו על קלקר, מנסרה ישרה שבסיסה משולש שווה צלעות וספרו כמה זוויות ישרות יש בה.

12. כמה אלכסונים, שאינם אלכסוני פיאות, יש לכל אחת מהמנסרות המפורטות.

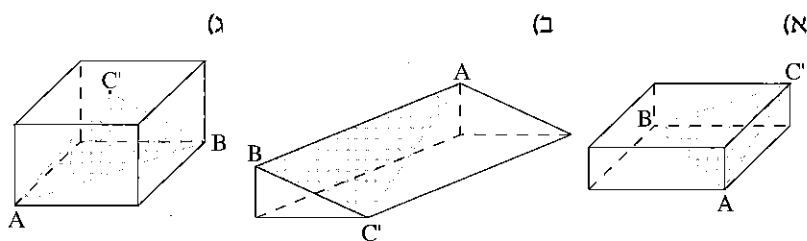


13. שרטטו אלכסון של המנסרה וסמנו את הזווית בין האלכסון ששרטטתם לפיאה הצבועה.



ד) שרטטו במנסרה ג, אלכסון שאורכו שונה מזה ששרטטתם בסעיף ג.

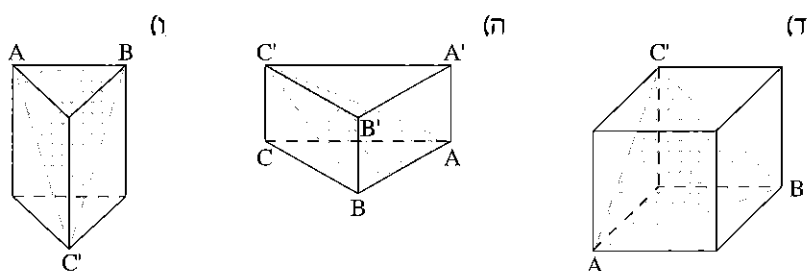
14. i) קבעו, על סמך הנתונים, מאיזה סוג המשולש הצבוע בכל מנסרה. היעזרו בקלקר ובקיסמים.



(ג) הבסיס ריבוע
פגישת האלכסונים
של הפיאה העליונה

(ב) הבסיס משולש

(א) הבסיס ריבוע



(ו) הבסיס משולש
שווה צלעות

(ה) הבסיס משולש
ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$)

(ד) קובייה

15. ii)  שרטטו וסמנו את הזווית בין AC' לבסיס, בכל אחת מהמנסרות המפורטות.

15. רשמו לגבי כל טענה אם היא נכונה או לא.

- (א) קובייה היא מנסרה.
- (ב) תיבה היא מנסרה.
- (ג) מספר המקצועות של מנסרה הוא תמיד 12 (כמספר מקצועות הקובייה).
- (ד) מספר המקצועות הצדדיים של מנסרה הוא כמספר קודקודי הבסיס.
- (ה) מספר המקצועות של מנסרה הוא פי 3 ממספר קודקודי הבסיס.
- (ו) קופסת מצות היא מנסרה.

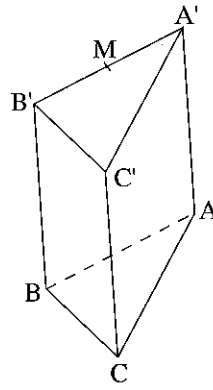
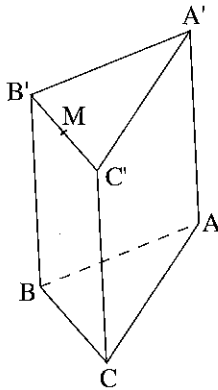
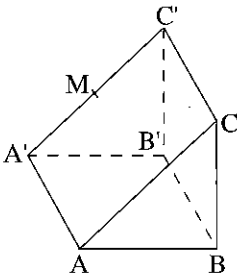
16. M על מקצוע בסיס של מנסרה (ראו שרטוטים).

- (i) חברו את MA ושרטטו אנך מ-M לבסיס ABC.
שרטטו וסמנו ב- α את הזווית בין MA לבסיס ABC.



(ב)

(ג)



- (ii) בשרטוטים א' ו-ג' α נמצאת על אחת הפאות, רשמו על איזו פאה.

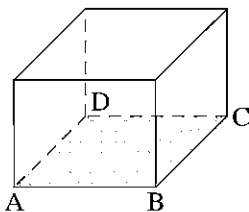
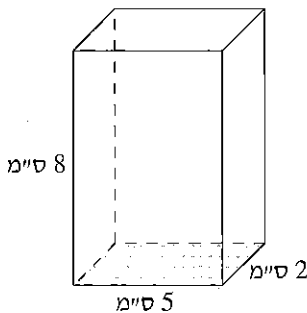
17. (א) בנו שלד של תיבה על קלקר: שרטטו מלבן ונעצו קיסמים בקודקודיו.

העבירו אלכסון של התיבה ושרטטו אלכסון של הבסיס.

- (ב) שרטטו בתיבה, כאן משמאל, אלכסון של הבסיס ואלכסון של התיבה היוצאים מאותו קודקוד.

- (ג) סמנו את הזווית בין אלכסון התיבה לבסיס. שרטטו את המשולש בו מופיעה הזווית.

- (ד) חשבו את אורכי צלעות המשולש ואת הזווית בין האלכסון לבסיס.



18. (א) שרטטו את הזווית בין אלכסון התיבה ובסיסה.

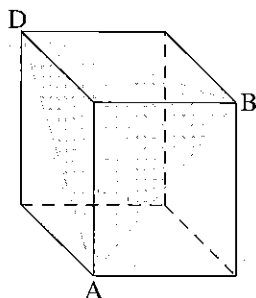
- (ב) בסיס התיבה הוא ריבוע, שאורך צלעו

10 ס"מ, גובה התיבה 7 ס"מ.

— חשבו את אלכסון הבסיס

(שרטטו בצד את הבסיס).

— חשבו את אלכסון המנסרה. (שרטטו בצד את המשולש המתאים).

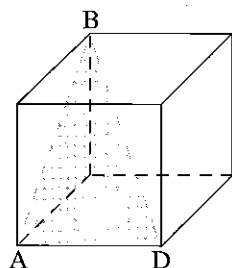


19. בסיס התיבה הוא ריבוע, שאורך צלעו 8 ס"מ.
גובה התיבה 10 ס"מ.

(א) מאיזה סוג משולש ADB ?

(ב) חשבו את צלעותיו.

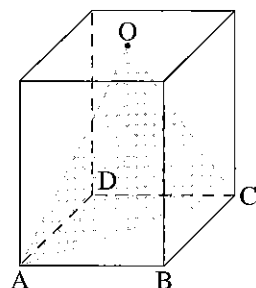
(ג) שרטטו אותו בנפרד וחשבו את שטחו.



20. אורך המקצוע של הקובייה 5 ס"מ.

(א) מאיזה סוג משולש ABD ?

(ב) חשבו את צלעותיו וזוויותיו של משולש ABD .



21. O פגישת אלכסוני הבסיס העליון במנסרה.

הבסיסים הם ריבועים שאורך הצלע שלהם

10 ס"מ.

הזווית בין OA לבסיס התחתון היא 55° .

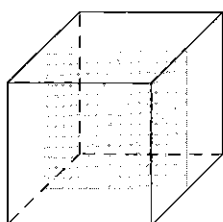
(א) חשבו את גובה המנסרה.

(ב) חשבו את שטח המשולש OAC .

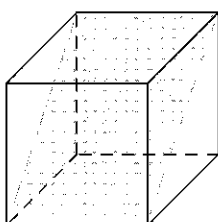
22. חילקו את הקובייה על-פי החתך הצבוע.

תארו את הגופים שהתקבלו.

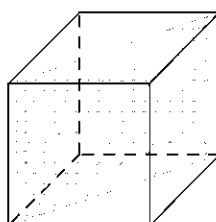
(ג)



(ב)



(א)

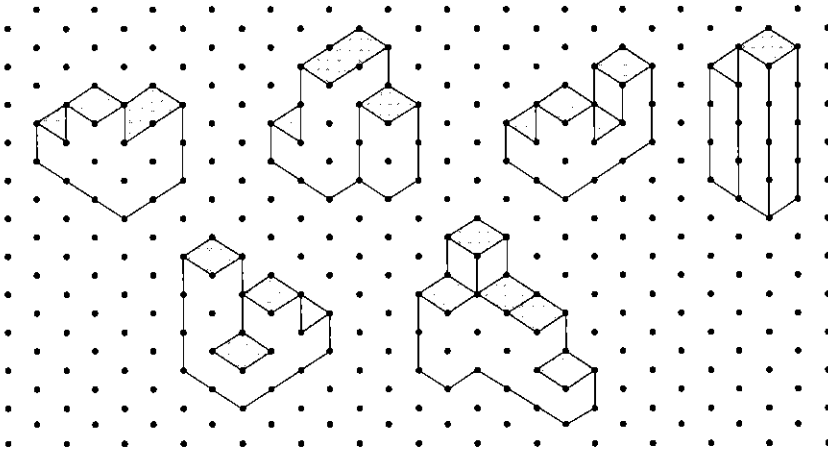


נפח ושטח פנים של מנסרה

נפח



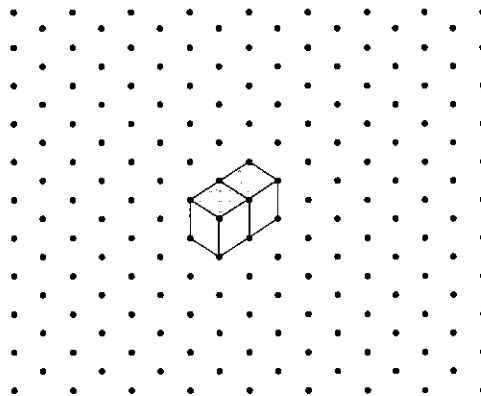
1. הוסיפו קווי חלוקה ומצאו כמה קוביות בכל מבנה.



2. (א) הוסיפו קובייה נוספת לשרטוט של המבנה, כך ששלוש הקוביות תהיינה מונחות בשורה.

(ב) הוסיפו קובייה רביעית למבנה, כך שהקובייה הרביעית לא תהיה באותה שורה, אך תהיה באותה קומה ומחוברת למבנה.

(ג) הוסיפו קובייה חמישית שתהיה מחוברת למבנה, אך בקומה שניה. (אם יש צורך מחקו קווים משורטטים).





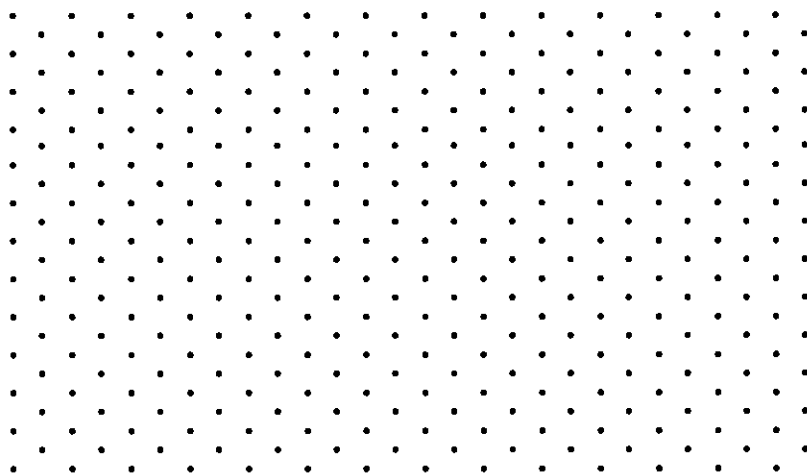
3. (א) שרטטו על דף הנקודות, **תיבה**, שהנפח שלה 10 יחידות נפח.

מה אורכי המקצועות של התיבה?

(ב) שרטטו על דף הנקודות תיבה שונה, שהנפח שלה 10 יחידות נפח.

מה אורכי מקצועות התיבה?

(ג) שרטטו מבנה שאינו תיבה, שהנפח שלו יהיה 10 יחידות נפח.

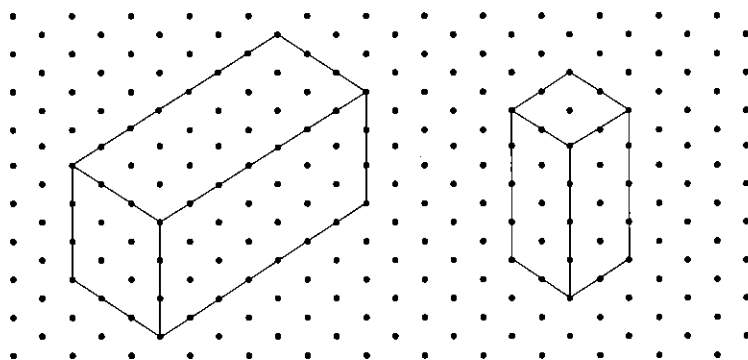
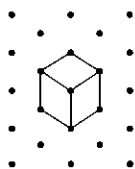


4. (א) אורך צלע קובייה קטנה 1 ס"מ.

חלקו כל תיבה לקוביות כאלה.

מצאו את הנפח של כל מנסרה (מספר הקוביות הקטנות מהן

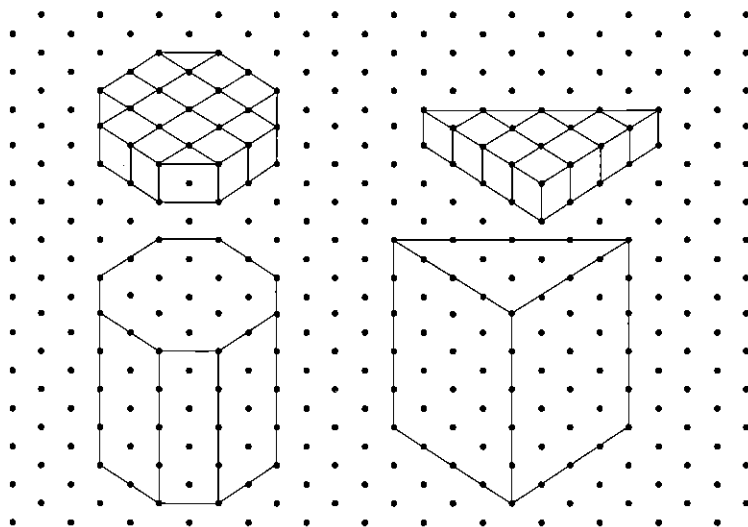
היא בנויה).



(ב) רשמו מה שטח הבסיס של כל תיבה ומה הגובה שלה (מספר הקומות).

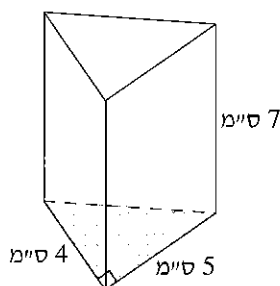
נפח תיבה, שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה התיבה.

- ג) נבדוק כעת נפח של מנסרה שאינה תיבה.
חשבו את מספר הקוביות ב"פרוסה" אחת של כל מנסרה, את מספר ה"פרוסות", ואת הנפח של המנסרה.

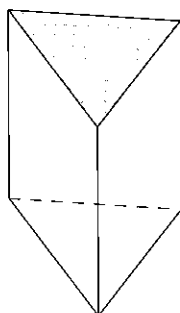


- ד) רשמו בשרטוט, מה שטח הבסיס של כל מנסרה, ומה הגובה שלה.

אורך מקצוע צדדי הוא **גובה המנסרה**.
נפח של מנסרה = מכפלה של אורך הגובה בשטח הבסיס.
בכתיב אלגברי: $V = B \times H$ כאשר V הנפח, B שטח הבסיס, H הגובה.



5. מצאו נפח של מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית, על-פי הנתונים הרשומים בשרטוט.

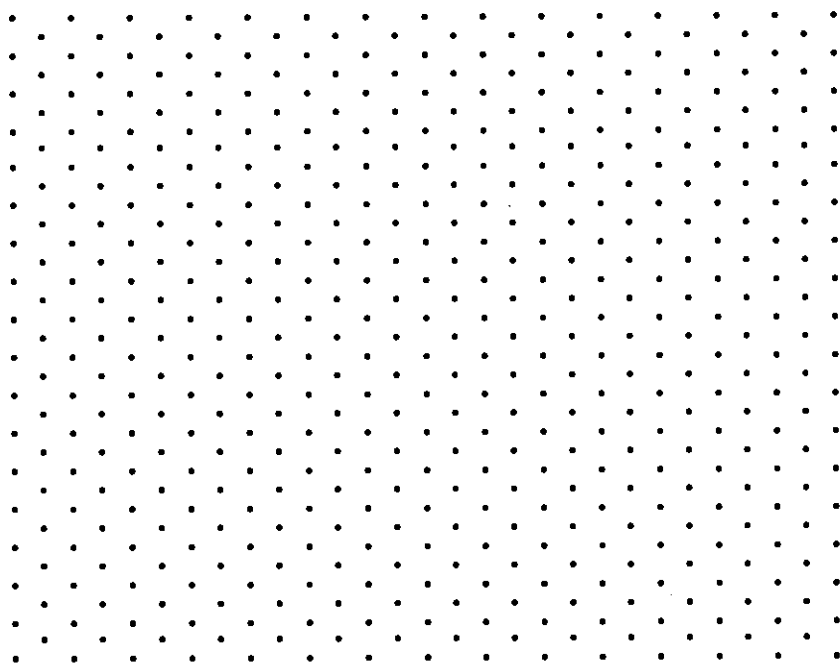


6.  הבסיס של מנסרה הוא משולש שווה צלעות שאורך צלעו 8 ס"מ.

- (א) חשבו את שטח המשולש (שרטטו אותו).
(ב) גובה המנסרה אף הוא 8 ס"מ. חשבו את נפח המנסרה.

7.  נפח של מנסרה שבסיסה ריבוע הוא 200 סמ"ק. אורך צלע הריבוע 5 ס"מ.

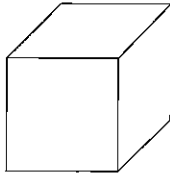
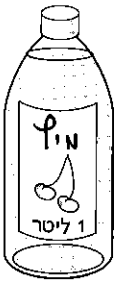
- (א) שרטטו על דף הנקודות.
(ב) חשבו את גובה המנסרה.



8.  הבסיס של מנסרה הוא ריבוע שאורך צלעו 2 יחידות.

- (א) שרטטו מנסרה, העבירו אלכסון ושרטטו את הזווית בין האלכסון לבסיס.
(ב) שרטטו בצד את הבסיס וחשבו את האלכסון של הבסיס.
(ג) הזווית בין האלכסון לבסיס 40° . שרטטו בצד את המשולש בו מופיעה הזווית וחשבו את צלעות המשולש.
(ד) חשבו את נפח המנסרה.

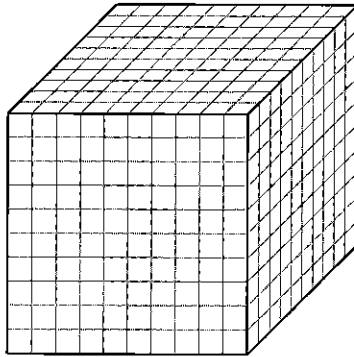
קצת על יחידות נפח



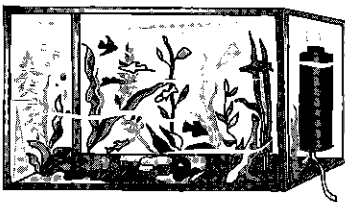
כל קובייה קטנה בשרטוט נפחה
כנפח בקבוק המכיל ליטר אחד.



קובייה שאורך מקצועה 1 מטר מכילה 1000 קוביות קטנות
שנפחן 1 ליטר.
שרטוט מוקטן:



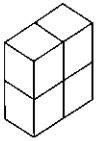
9.  אורך בריכת שחיה 24 מ' ורוחבה 14 מ'. עומק המים, לכל אורך הבריכה, 2 מ'.
(א) מה נפח המים בבריכה במ"ק (מטרים מעוקבים). 1000 ליטר = 1 מ"ק.
(ב) כמה ליטר מים בבריכה?
(ג) צינור ממלא את הבריכה בקצב של 800 ליטר בדקה.
בכמה דקות ימלא הצינור את הבריכה?



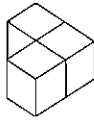
10. (א) אָמדו כמה ליטרים מים באקווריום.
(ב) חשבו את כמות המים בליטרים:
אורך האקווריום 0.9 מ',
רוחבו 0.5 מ' וגובה המים 0.4 מ'.

שטח פנים

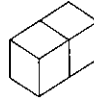
11. א) צבעו כל אחת מהפיאות של המבנים הבאים. כמה ריבועים צבעו?



ד)



ג)



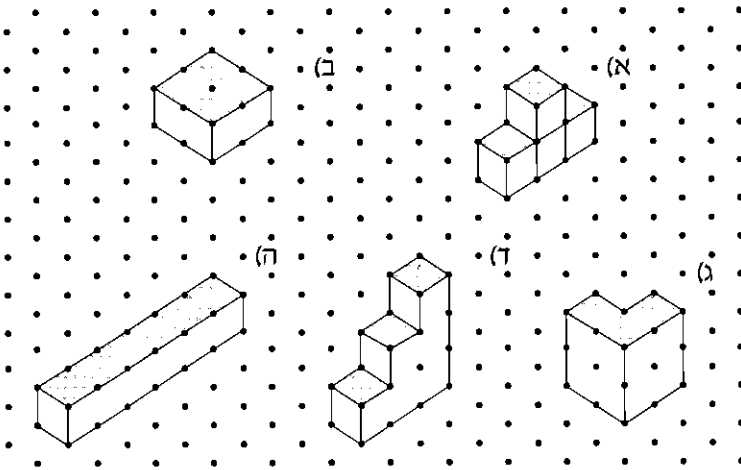
ב)



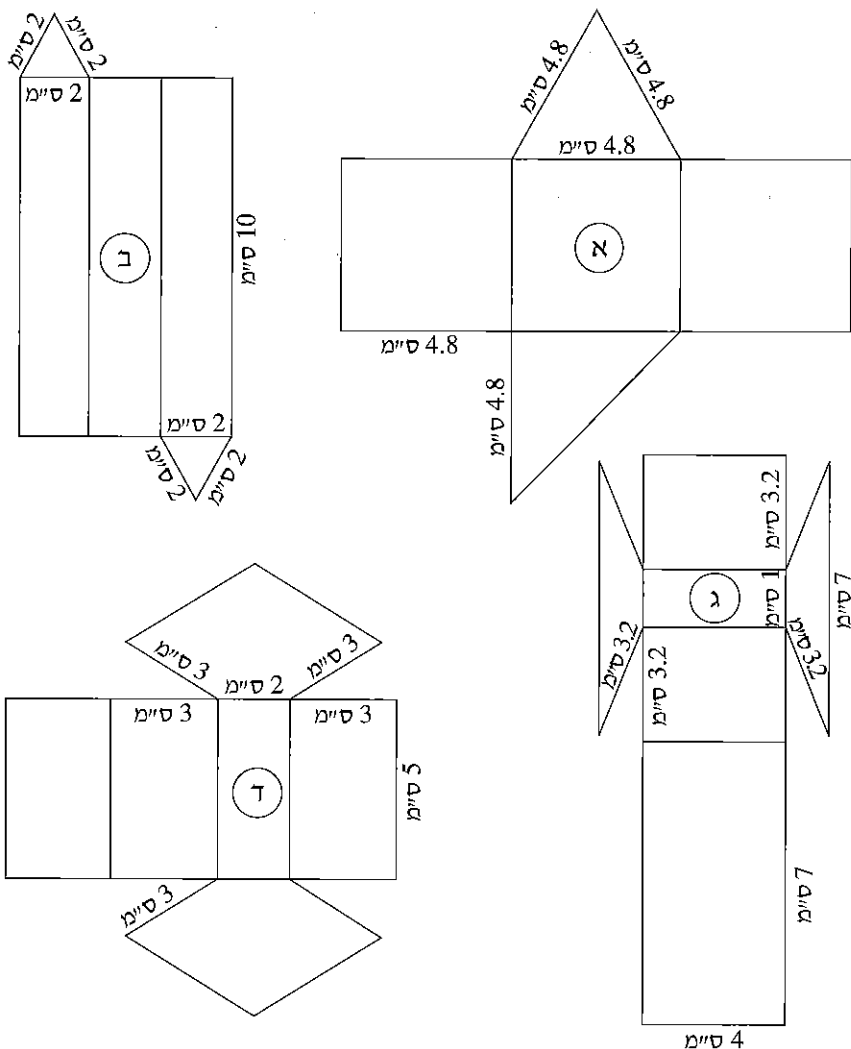
א)

כשצובעים את כל הפיאות של גוף (מבנה) השטח הצבוע נקרא שטח הפנים של הגוף.

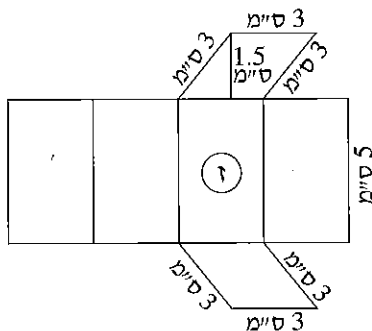
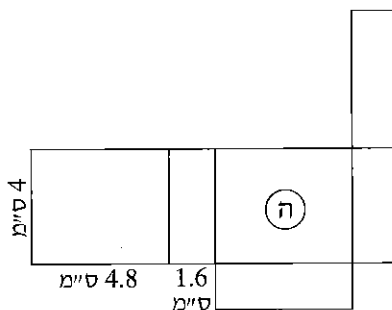
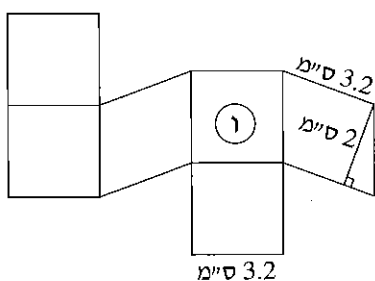
12. חשבו את שטח הפנים של כל מבנה (ביחידות ריבועיות).



Ⓕ 13. i) קבעו אילו מהפריסות המשורטטות הן פריסות של מנסרה. (ניתן לקפלן כך שתקבל מנסרה). תוכלו לגזור, לקפל, ולבדוק את קביעותיכם בעזרת דפים לגזירה הנמצאים בסוף הספר ובהם שרטוטים מוגדלים של הפריסות האלה.



המשך ←

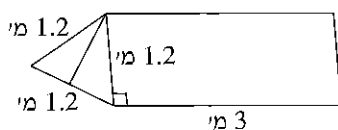


שטח הדף ממנו יוצרים את הגוף הוא שטח הפנים שלו.

(ii) חשבו את שטח הפנים של הגופים שסימנתם.

14. תכננו אוהלי סיירים ליחידה צבאית.

הפתח הוא משולש שווה צלעות, אורך הצלע 1.2 מ.



(א) שרטטו בצד את המשולש (הכניסה לאוהל).

(ב) חשבו את שטח הבד הדרוש לאוהל.

(ג) חשבו את נפח האוהל.

15. בסיסי מנסרה ישרה הם משולשים שווי שוקיים:

נתון: $AB = AC = 7$ ס"מ

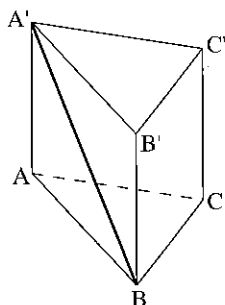
הזווית בין אלכסון הפיאה $A'B$ והבסיס היא 56° .

(א) סמנו זווית זו בשרטוט.

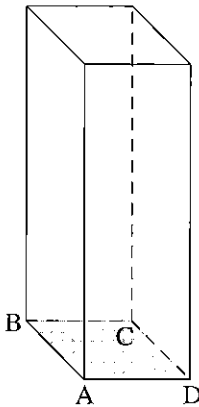
חשבו את גובה המנסרה.

(ב) נתון גם שאורך $BC = 5$ ס"מ.

חשבו את שטח הבסיס ואת נפח המנסרה.

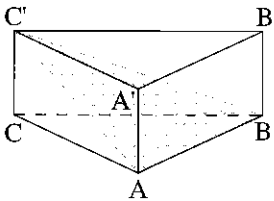


תרגילים

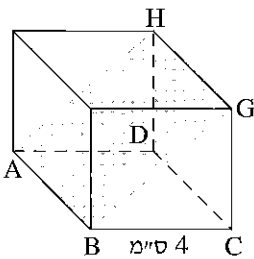


16. בסיס תיבה הוא ריבוע שאורך צלעו 10 ס"מ.
 (א) אלכסון התיבה יוצר עם בסיס התיבה זווית בת 65° .
 שרטטו את האלכסון וסמנו את הזווית.
 (ב) שרטטו בצד את המשולש בו מופיעה הזווית
 וחשבו את צלעותיו.
 (ג) — מהו גובה התיבה?
 — מצאו את נפח התיבה.
 — מצאו את שטח פני התיבה.

17. בסיס מנסרה הוא משולש שווה צלעות שאורך צלעו 12 ס"מ. (בנו על קלקר).
 אורך מקצוע צדדי 4 ס"מ.



- (א) חשבו את נפח המנסרה.
 (ב) סמנו את הזווית בין BC' לבסיס המנסרה וחשבו אותה.
 (ג) מאיזה סוג המשולש ABC' ? חשבו את שטחו.

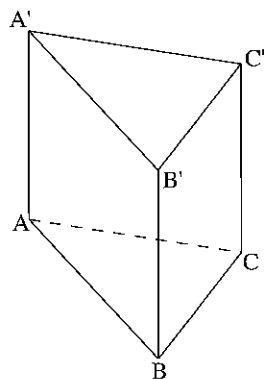


18. הגוף המשורטט הוא תיבה, שבסיסה ריבוע.
 (א) גודל הזווית בין BG לבסיס ABCD הוא 40° .
 סמנו אותה בשרטוט.
 (ב) חשבו את גובה התיבה.
 (ג) חשבו את נפח התיבה.
 (ד) איזה מרובע הוא המרובע הצבוע?
 חשבו את שטחו.

19. הבסיסים של מנסרה ישרה הם משולשים שווי שוקיים,

$$\angle BAC = 72^\circ, AB = AC = 12 \text{ ס"מ}$$

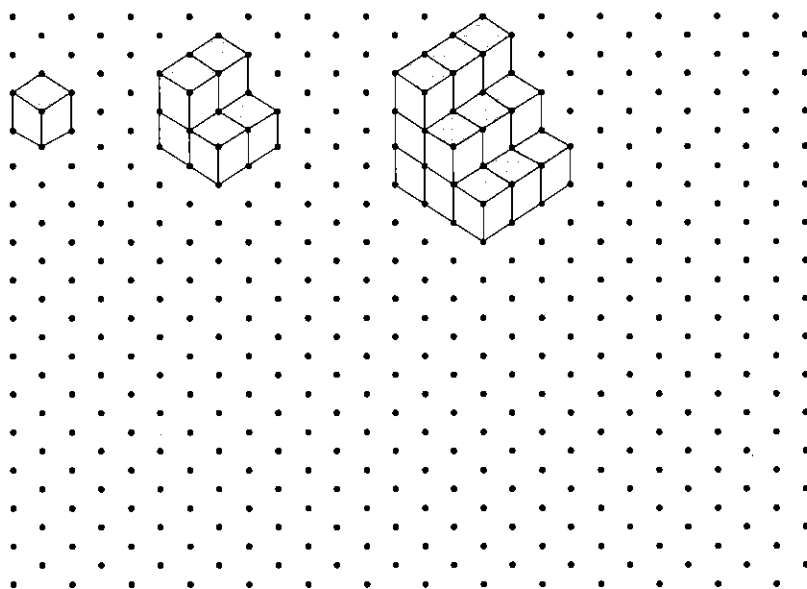
$$AA' = 10 \text{ ס"מ}$$



- (א) רשמו את הנתונים בשרטוט וחשבו את BC .
 (ב) שרטטו וחשבו את הזווית בין האלכסון BC' לבין בסיס המנסרה.
 (ג) חשבו את נפח המנסרה.

20. (א) מה נפח כל מבנה?

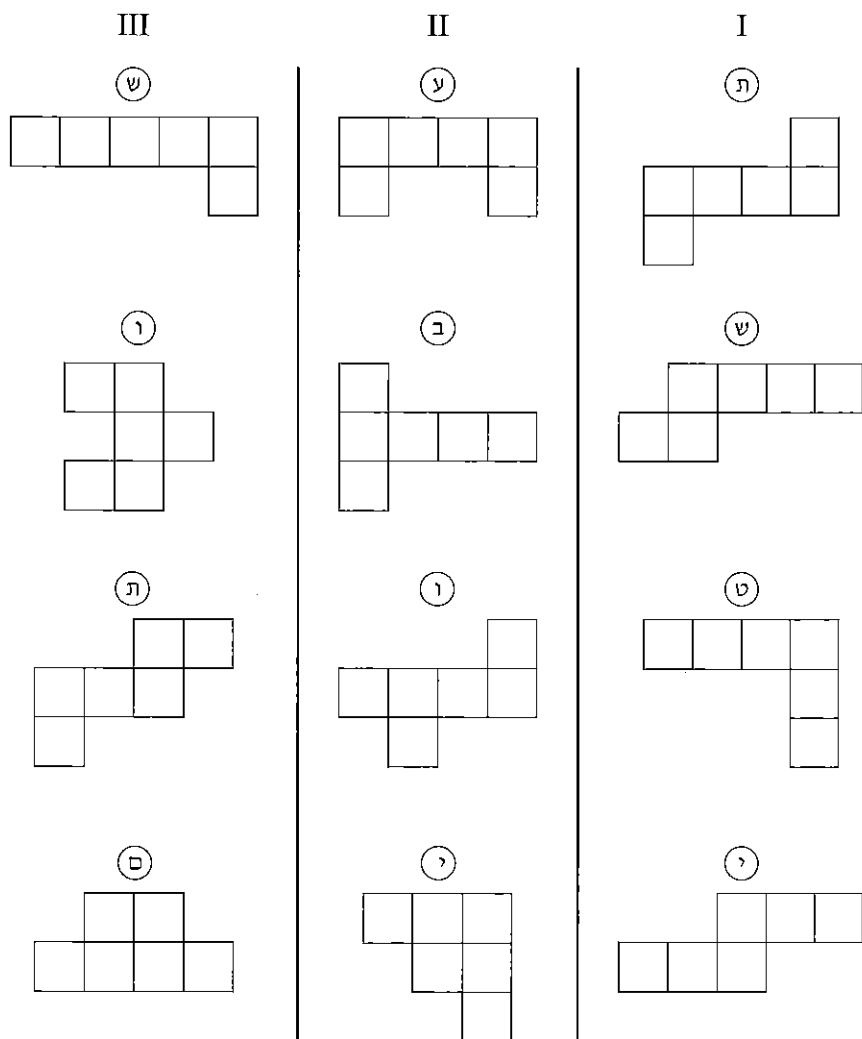
(ב) שרטטו מבנה נוסף בסדרה, כמה קוביות נוספו? מה הנפח שלו?



(ג)  נסו לשרטט שני מבנים שנפחם 6 קוביות יחידה וחשבו את שטח הפנים שלהם.

האם שטח הפנים של מבנים כאלה מבוטא תמיד בעזרת מספר זוגי? נמקו.

21. לפניכם 12 שרטוטים של 6 ריבועים כל אחד. סמנו את השרטוטים אותם ניתן לקפל כך שתתקבל קובייה. (כלומר, סמנו את אילו שהם פריסות של קובייה).
 בדפים לגזירה שבסוף הספר, תמצאו שוב את השרטוטים שבדף זה. תוכלו לגזור אותם משם, לקפל ולבדוק אם לא טעיתם.



רשמו את האותיות הרשומות ליד הפריסות שסימנתם ותקבלו שם לקבוצת גופים הכוללת בתוכה את הקוביות. (רשמו תחילה אותיות מטור I אחר כך מטור II ולבסוף מטור III).

קצת על המעגל והיקפו – רשות

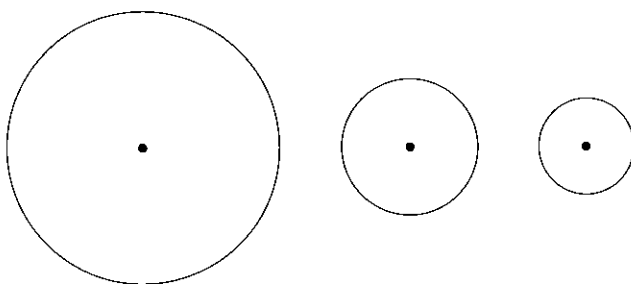
מעגל הוא אוסף הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה (שנקראת **מרכז**).

רדיוס הוא קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.



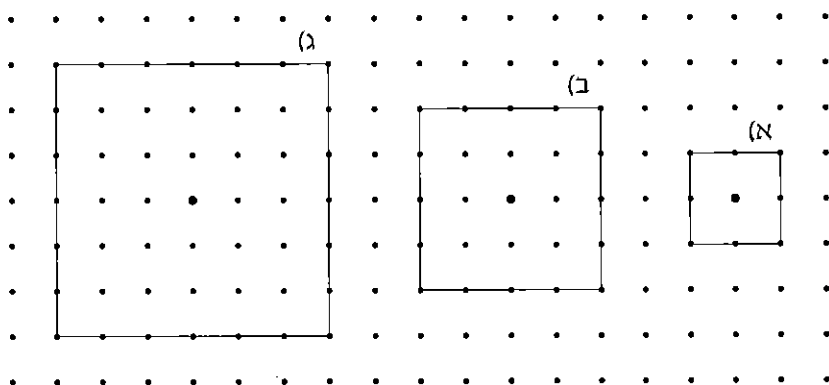
קוטר מחבר שתי נקודות על מעגל ועובר דרך המרכז.

1. א) שרטטו רדיוס בכל מעגל.

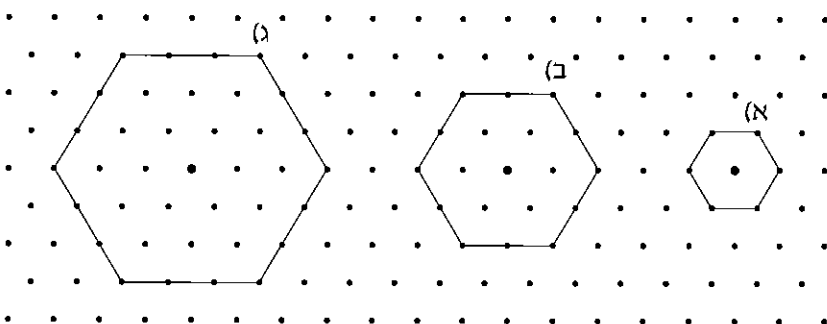


ב) שרטטו קוטר בכל מעגל, כך שהרדיוס ששרטטתם לא יהיה חלק ממנו.

2. א) המרחק בין זוג נקודות בכל שורה (או טור) יחידה אחת.
- מצאו את היקף של הריבוע.
 - חשבו את אורך אלכסון הריבוע.
 - מצאו פי כמה גדול היקף הריבוע מהאלכסון.



3.  המרחק בין כל זוג נקודות סמוכות יחידת אורך אחת (1).
 — מצאו את היקף המשושה.
 — שרטטו ומצאו את אורך האלכסון העובר דרך המרכז.
 — פי כמה גדול היקף המשושה מהאלכסון דרך המרכז?

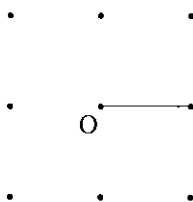


כשהצלע וההיקף גדלים פי מספר קבוע, גדל גם האלכסון, דרך המרכז, פי אותו מספר. מצאתם שהיחס הקבוע עבור ריבוע הוא בערך 2.8 ועבור משושה משוכלל 3.



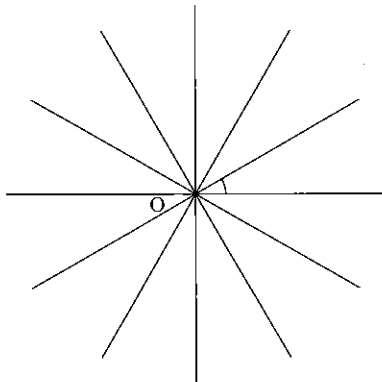
באופן דומה לריבוע ומשושה, גם במצולעים משוכללים אחרים, היחס בין ההיקף לאורך האלכסון העובר דרך המרכז, קבוע.
 גם במעגל, היחס בין ההיקף לקוטר ("אלכסון" העובר דרך המרכז) קבוע.
 בתרגילים 4 ו-5 ננסה להתקרב ליחס הזה בעזרת חישובים טריגונומטריים.

4.  (א) שרטטו קרניים מהמרכז O, כך שתקבלנה במרכז זוויות של 45° .



- (ב) הקצו על כל קרן קטע שאורכו 2 ס"מ וסמנו את נקודות הקצה באותיות C, B, A... חברו אותן. איזה מצולע התקבל?
 (ג) שרטטו בצד את המשולש AOB וחשבו בעזרתו את אורך הצלע של המצולע.
 (ד) — חשבו את היקף המצולע.
 — מה אורך האלכסון העובר דרך מרכז המצולע?
 — פי כמה גדול ההיקף מהאלכסון במצולע המשוכלל ששרטטתם?

5. (F) העבירו 12 קרניים מהמרכז O כך שנוצרו זוויות שוות במרכז.



- (א) מה גודלה של כל זווית כזו?
 (ב) הקצו על כל קרן קטע שאורכו 2 ס"מ וסמנו את הנקודות באותיות C, B, A ... חברו אותן. איזה מצולע התקבל?
 (ג) שרטטו בצד את המשולש AOB וחשבו את אורך הצלע של המצולע.
 (ד) — חשבו את היקף המצולע.
 — מה אורך האלכסון העובר דרך מרכז המצולע?

— פי כמה גדול ההיקף מהאלכסון במצולע המשוכלל ששרטטתם?

6. (F) (א) השלימו על-פי החישובים שביצעתם:

- בריבוע ההיקף גדול פי _____ מהאלכסון דרך המרכז (תרגיל 2).
 — במשושה משוכלל ההיקף גדול פי _____ מהאלכסון דרך המרכז (תרגיל 3).
 — במתומן משוכלל ההיקף גדול פי _____ מהאלכסון דרך המרכז (תרגיל 4).
 — במצולע משוכלל בן 12 צלעות ההיקף גדול פי _____ מהאלכסון דרך המרכז (תרגיל 5).

במצולעים משוכללים שמספר צלעותיהם הולך וגדל היחס בין ההיקף לאלכסון דרך המרכז הולך ומתקרב למספר שהוא $3.14 \dots \pi$.



היחס בין היקף המעגל לקוטר הוא π . כלומר, היקף המעגל הוא:

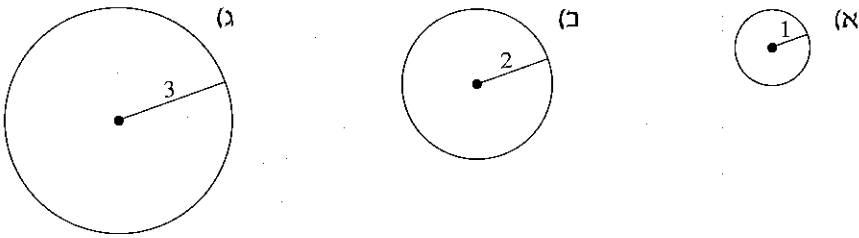
קוטר $\times \pi$

בעזרת הדייט x , ההיקף: $2\pi \cdot x$ (כלומר $2\pi x$).

(ב) מצאו את ערכו של π בקירוב של המחשבון שבידכם.

תרגילים

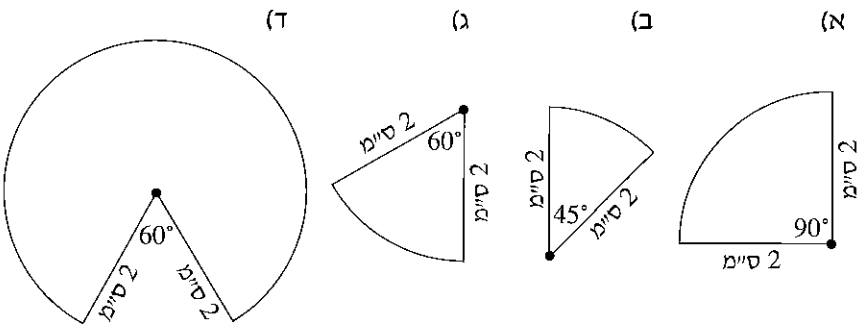
7. חשבו את היקפי המעגלים.



8. אורי ובנו צריכים לעבור על אופניים דרך של 500 מ' קוטר הגלגל של אורי 70 ס"מ ושל הבן של אורי 30 ס"מ. כמה סיבובי פדלים יעשה כל אחד מהם?

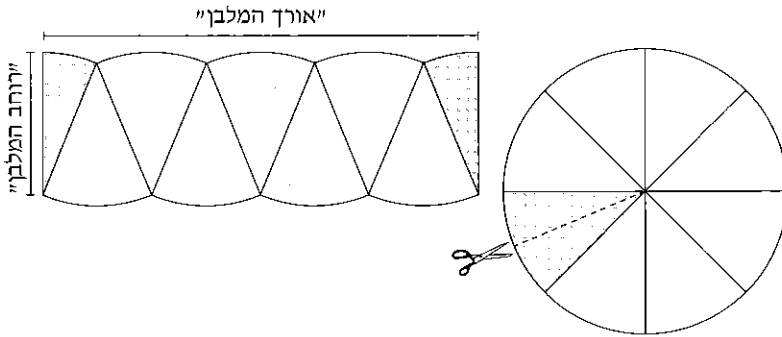
100 ס"מ = 1 מ'

9. חשבו את היקפי הצורות.



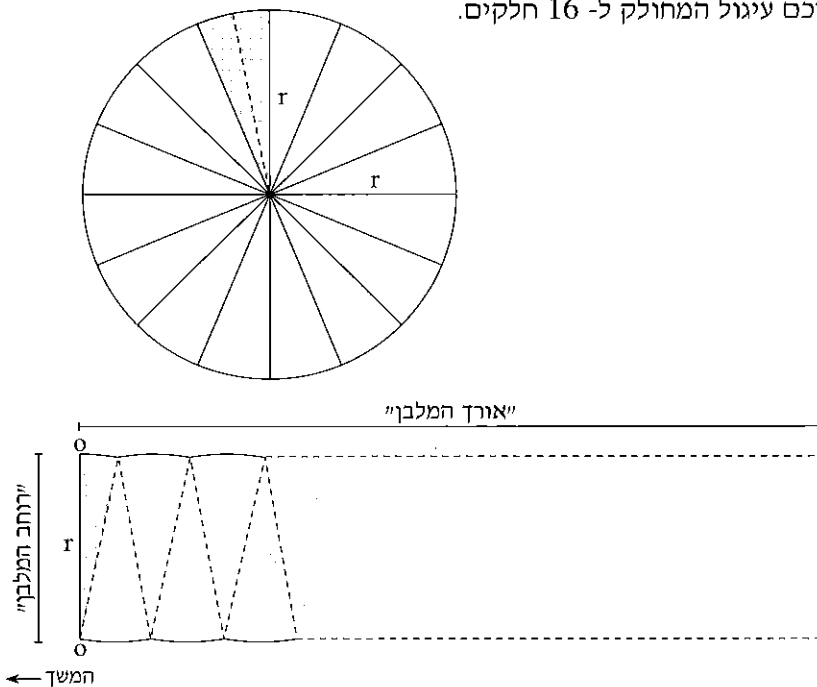
שטח עיגול – רשות

1. אפשר למצוא שטח של עיגול על-ידי חלוקתו ל"משולשים".
 גזרו את המשולשים והרכיבו מהם צורה דומה למלבן, הצורה משורטטת כאן ליד העיגול.



- (א) צבעו את היקף המעגל בשני השרטוטים.
 (ב) בטאו את "אורך המלבן" ואת "רוחבו" בעזרת r (הרדיוס).
 (ג) בטאו את שטח המלבן.

2. לפניכם עיגול המחולק ל-16 חלקים.



- (א) השלימו את שרטוט ההרכבה.
 (ב) בטאו את "אורך המלבן" ו"רוחבו" בעזרת r .
 (ג) בטאו את שטח המלבן.

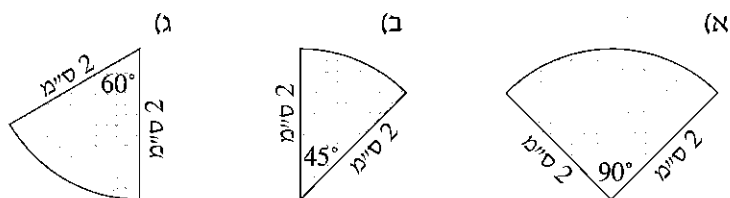
ככל שנחלק את העיגול ליותר חלקים, הצורה שתתקבל, לאחר ההרכבה תהיה דומה יותר למלבן, ושטח העיגול יהיה קרוב יותר לשטח המלבן הכולא את ההרכבה, כלומר: $r \times \text{חצי היקף}$, או $r \cdot \pi$.



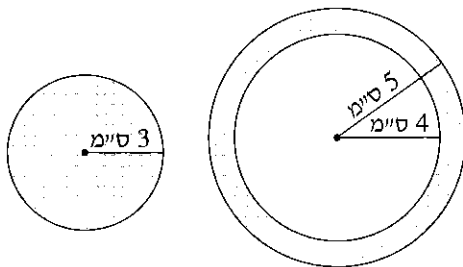
שטח העיגול הוא πr^2

תרגילים

3. חשבו את השטחים הצבועים.

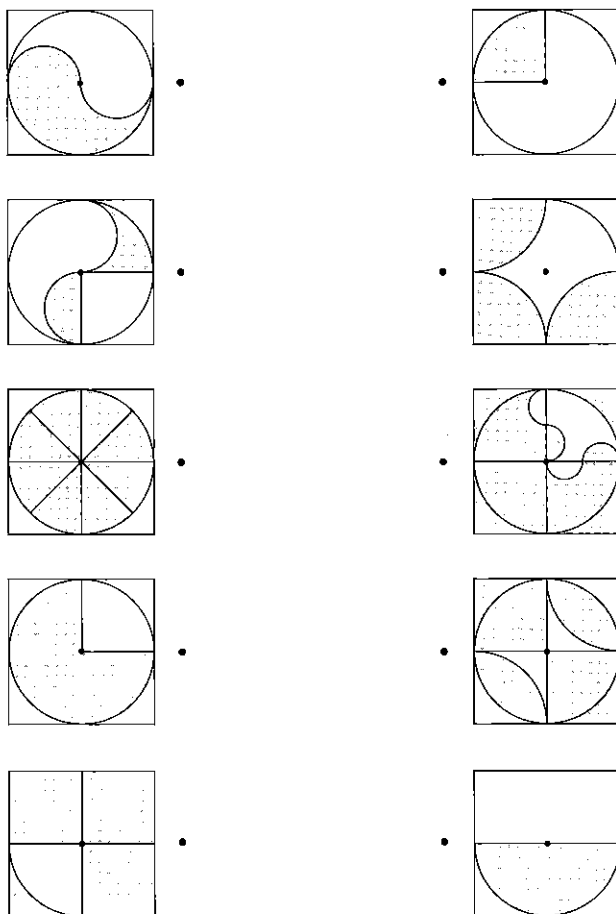


4. לפניכם עיגול שרדיוסו 3 ס"מ וטבעת בין שני עיגולים, הפנימי ברדיוס של 4 ס"מ והחיצוני ברדיוס של 5 ס"מ.



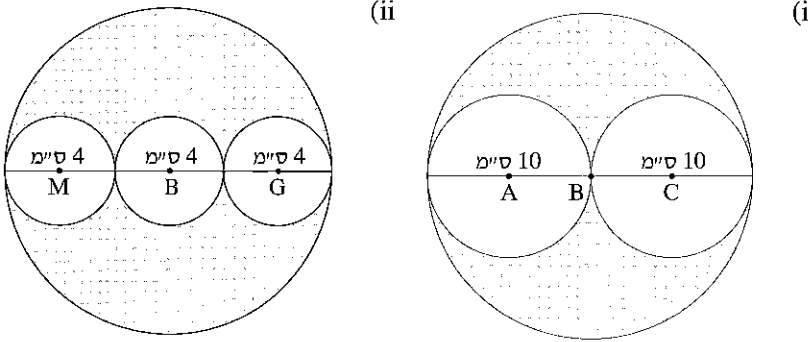
- (א) שערנו איזה שטח גדול יותר, של העיגול או של הטבעת.
 (ב) חשבו את שטח הטבעת ואת שטח העיגול ובידקו את השערתכם.

5. א) חברו בקו את הצורות בהן השטחים הצבועים שווים.



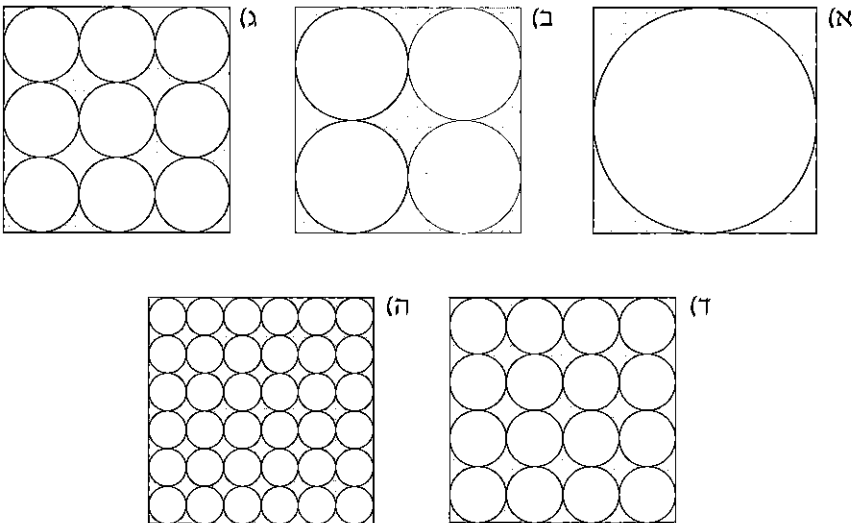
ב) בחרו שני זוגות וחשבו עבורם את השטח הצבוע, אם צלע כל ריבוע 4 ס"מ.

6. (א) בשרטוטים רשומים הקטרים של המעגלים.
חשבו את שטח העיגולים שאינם צבועים.



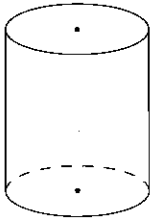
- (ב) מצאו קשר בין שטחי העיגולים הקטנים לשטח העיגול הגדול.
(ג) בסעיפים הקודמים "מסתתר" חוק מסוים. נסו למצוא אותו.

7. האופה של קונדיטורית "מקס ומוריץ" מתמחה באפיית עוגות עגולות בגדלים שונים. הוא מניח אותן בתבניות ריבועיות השוות בגודלן (כל העוגות באותו עובי).
באיזו תבנית נמצאת כמות הבצק ה"גדולה ביותר"?
(תוכלו לחשב ולבדוק כאשר צלע הריבוע 16 ס"מ.)



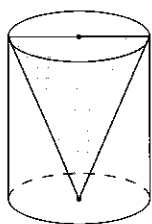
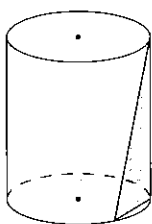
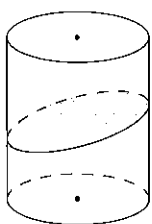
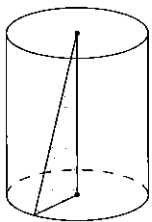
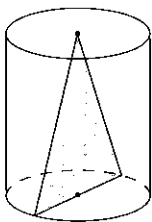
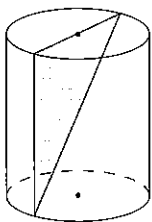
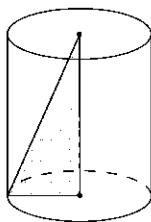
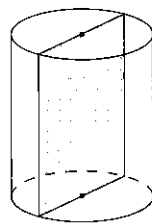
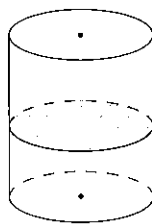
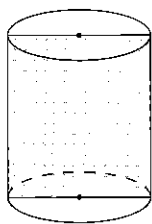
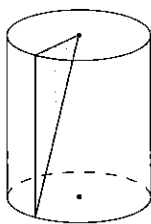
גליל – רשות

1. א) שרטטו מעגל על קלקר והעמידו אנכים בנקודות שונות על מעגל. אילו העמדנו אנכים בעלי אותו אורך, "בכל נקודה על המעגל" היה מתקבל למעלה עוד מעגל. גוף כזה נקרא **גליל**.



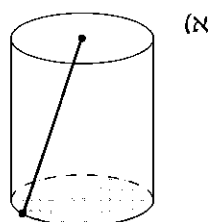
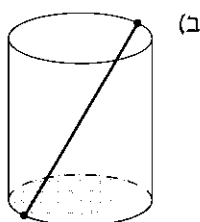
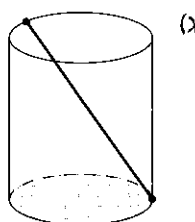
- ב) — הוסיפו בשרטוט רדיוס של הבסיס.
 — סמנו היקף של הבסיס.
 — סמנו גובה של הגליל.
- ג) גלגלו דף נייר מלבני לצורת גליל. פתחו את הדף ורשמו היכן בדף מופיע היקף הבסיס והיכן גובה הגליל.

2. א) קבעו מהי הצורה הצבועה (מרכזי המעגלים מסומנים).



3.

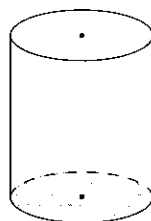
שרטטו את ההיטל של המשופע המודגש.



4.

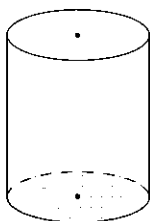
(א) שרטטו בגליל קטע משופע

כך שהיטלו יהיה רדיוס
הבסיס הצבוע.



(ב) שרטטו בגליל קטע משופע

כך שהיטלו יהיה קוטר
הבסיס הצבוע.

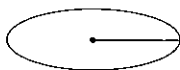


5.

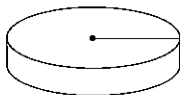
מלאו כוס בצורת גליל במים.

רדיוס הבסיס 10 ס"מ.

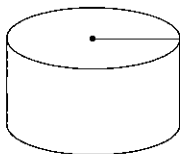
(א) מה שטח הבסיס?



(ב) מה כמות המים בכוס אם הגובה ס"מ אחד?



(ג) חשבו את נפח הכוס אם רדיוס הבסיס 10 ס"מ וגובה 13 ס"מ?

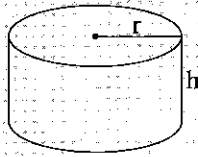


(ד) בטאו את נפח הכוס אם רדיוס הבסיס r והגובה h .

נפח הגליל, בדומה לנפח מנסרה ישרה, שווה:

לשטח הבסיס x הגובה

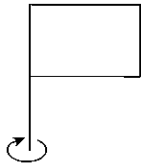
בסיס הגליל הוא מעגל ששטחו πr^2 :



$$V = h \cdot \pi r^2 \text{ לכן:}$$

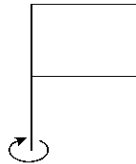
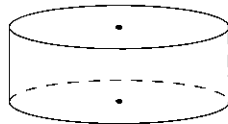
h - גובה הגליל

r - רדיוס הבסיס



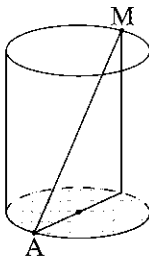
6. (א) הדביקו פיסת נייר מלבנית על קיסם וסובבו את הקיסם סביב עצמו. התקבל דימוי של "גוף סיבוב" שהוא גליל.

- (ב) רשמו בשרטוט של הדגל ובשרטוט הגליל את r (רדיוס הבסיס) ו- h (גובה הגליל).



- (ג) — הדביקו את המלבן באופן הבא:
— סובב את הקיסם כנ"ל.
— רשמו r על קטע שהוא רדיוס הבסיס ו- h על גובה הגליל.

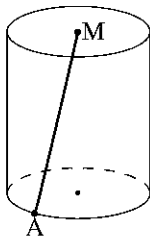
- (ד) שערו, לאיזה משני הגלילים נפח גדול יותר. בידקו על-ידי חישוב אם ידוע כי אורכי צלעות המלבן 8 ס"מ ו-5 ס"מ.



7. (א) סמנו את הזווית α בין MA לבסיס הגליל.

$$(ב) \quad r = 3 \text{ ס"מ}, \quad \alpha = 50^\circ$$

חשבו את גובה הגליל ואת הנפח שלו.



8. (א) שרטטו זווית α בין MA לבסיס הגליל.

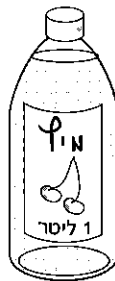
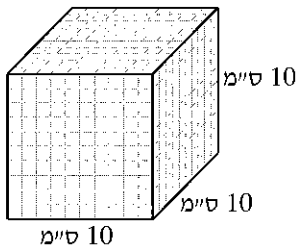
M מרכז הבסיס העליון

(ב) $\alpha = 70^\circ$, $h = 4$ ס"מ

חשבו את רדיוס הבסיס ואת נפח הגליל.

בפרק מנסרות ראיתם שקובייה שאורך הצלע שלה מ' אחד מכילה 1000 ליטר.

ליטר אחד שווה לנפח של 1000 קוביות קטנות שאורך הצלע שלהן 1 ס"מ (ונפחן סמ"ק אחד).



9. (א) 1000 סמ"ק = 1 ליטר
(סמ"ק - סנטימטר מעוקב).

(א) כמה סמ"ק בכוס "רגילה" המכילה $\frac{1}{4}$ ליטר?

(ב) לכמה כוסות "רגילות" ניתן למזוג ליטר משקה?

(ג) כמה סמ"ק ב- $2\frac{1}{2}$ ליטר?

(ד) כמה סמ"ק בפחית מיץ המכילה $\frac{1}{3}$ ליטר?

10. (א) קוטר של דלי (בצורת גליל) 28 ס"מ וגובהו 30 ס"מ.

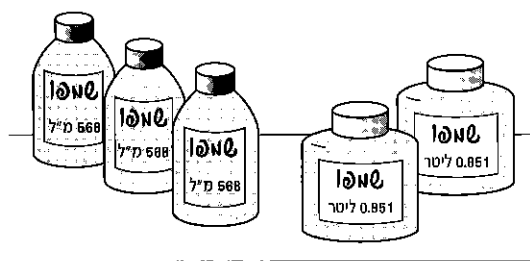
מה נפח הדלי בסמ"ק?

מה הנפח בליטרים?

(ב) כמה כוסות "רגילות" מים יש בדלי?

סמ"ק אחד נקרא גם מיליליטר אחד - אלפית ליטר (מ"ל)

11.  מי מכיל יותר "שמפני", שני הבקבוקים מימין או שלושת הבקבוקים משמאל.



12.  א. כמה מיליליטר בכל כוס? (כוס מכילה $\frac{1}{4}$ ליטר).

- ב. כמה מיליליטר בבקבוק מיץ המכיל ליטר וחצי?
 ג. בכל פחית משקה ב- 11 כפיות סוכר. פחית משקה מכילה ב- 330 מיליליטר. כמה כפיות סוכר בליטר משקה?
 ד. במתכון לעוגה רשמו שיש לשים בבצק 375 מיליליטר חלב ו- 100 מיליליטר יין.
 כמה כוסות חלב, יש לשים בבצק?
 כמה כוסות יין, יש לשים בבצק?
 ה. בקבוק סירופ נגד שיעול מכיל 150 מיליליטר.
 ילד מקבל כפית של 5 מיליליטר, 3 פעמים ביום.
 לכמה פעמים יספיק הסירופ בבקבוק? ולכמה ימים?

13.  במיכל 250 ליטר מיץ.

- מעבירים את המיץ לכלים בצורת גליל.
 רדיוס בסיס הכלי 5 ס"מ וגובה הכלי 10 ס"מ.
 האם כל המיץ יכנס: ב- 200 כלים כאלה?
 ב- 250 כלים?
 ב- 300 כלים?
 ב- 350 כלים?

תרגילים

14. העבירו לוח מלבני בתוך גליל.

O מרכז הבסיס התחתון.

א) $\alpha = 60^\circ$.

— קבעו מאיזה סוג משולש AOB ושרטטו אותו
בנפרד.

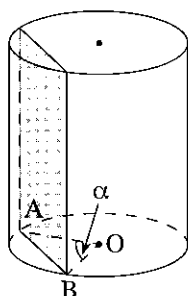
— חשבו את שטח המלבן אם $r = 3$ ס"מ,

$h = 10$ ס"מ (שרטטו אותו תחילה).

ב) $\alpha = 90^\circ$.

— קבעו מאיזה סוג משולש AOB ושרטטו אותו בנפרד.

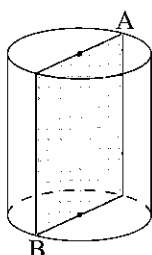
— חשבו את שטח המלבן אם $r = 3$ ס"מ, $h = 10$ ס"מ.



15. אלכסון המלבן המשורטט 10 ס"מ.

הזווית בין אלכסון המלבן לבסיס 30° .

מצאו את רדיוס בסיס הגליל, את גובהו ואת הנפח שלו.



16. חשבו, על-פי הנתונים, את נפח הגליל ונפח המנסרה.

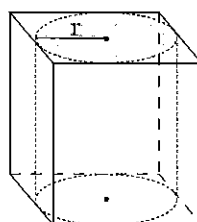
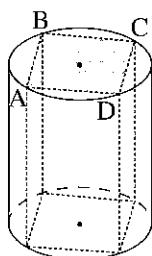
(ii) ABCD ריבוע

(i) $r = 4$ ס"מ

$h = 10$ ס"מ

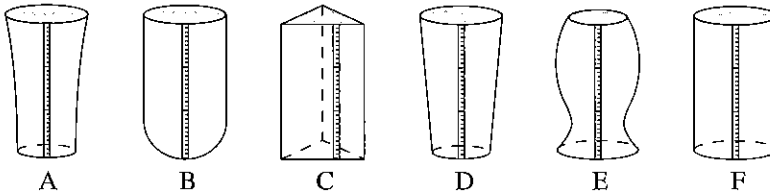
$h = 8$ ס"מ

$r = 5$ ס"מ



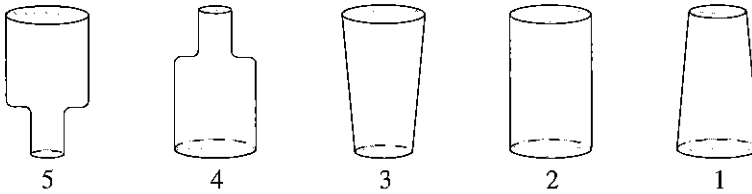
17. מוזגים לכל אחד מהכלים האלה מים בקצב קבוע.

(א) סמנו את הכלים בהם גובה המים בתוך הכלי גדל בקצב קבוע.

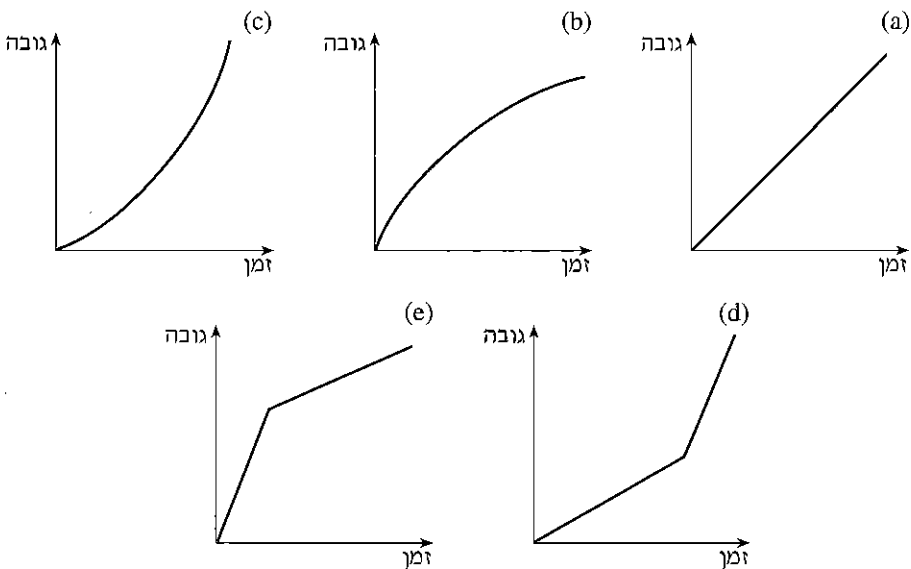


(ב) הגרפים הבאים מתאימים לזמן המילוי את גובה המים בכלים המצוירים. התאימו לכל כלי גרף מתאים.

כלים

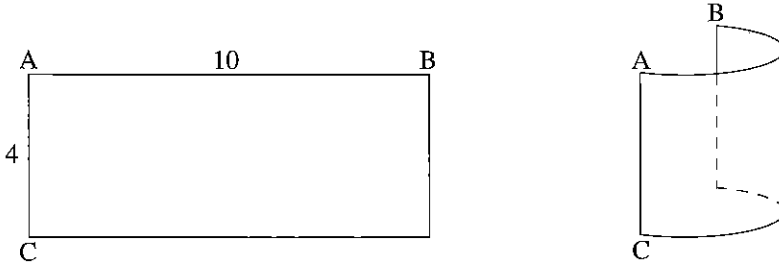


גרפים



שטח מעטפת של גליל – רשות

1. א) קחו דף נייר ובנו ממנו מעטפת של גליל.



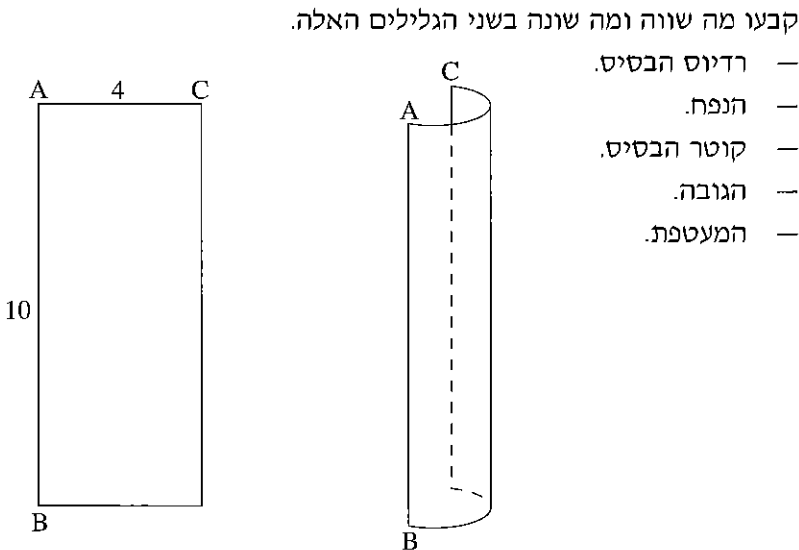
מהו AB בגליל שהתקבל?

מהו AC בגליל שהתקבל?

מה שטח הדף?

השטח הנוצר נקרא שטח המעטפת של הגליל.

ב) קפלו את הדף כך ש- AB יהיה הגובה ו- AC החיקף של הבסיס.



— רדיוס הבסיס.

— הנפח.

— קוטר הבסיס.

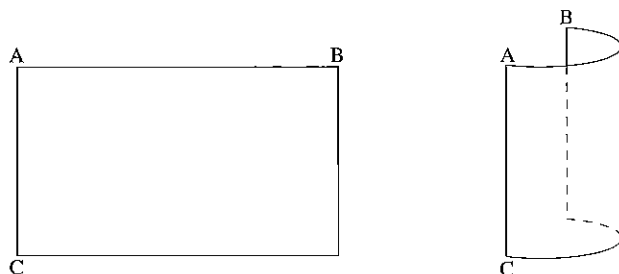
— הגובה.

— המעטפת.



2. א) רדיוס הבסיס של גליל הוא 10 ס"מ. מה היקף הבסיס? (רשמו על המלבן ועל הגליל).

גובה הגליל 6 ס"מ. מה שטח דף הנייר ממנו יצרו את מעטפת הגליל?



ב) רדיוס בסיס גליל r .

בטאו את היקף הבסיס. (רשמו על המלבן ועל הגליל).

גובה הגליל h . מה שטח המלבן ממנו יוצרים גליל כזה?

$$S = 2\pi \cdot r \cdot h \text{ שטח המעטפת של גליל הוא}$$

שטח הפנים הוא שטח העוטף את כל הגוף.

כלומר, **שטח המעטפת** של גליל הוא שטח הפנים ללא הבסיסים.



תרגילים

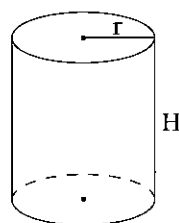
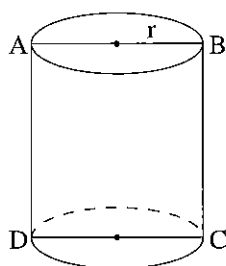
3. חשבו שטח מעטפת של גליל על-פי הנתונים.

א) $r = 3$ ס"מ

ב) שטח ABCD הוא 40 סמ"ר

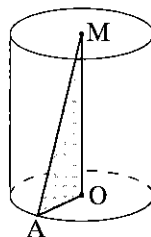
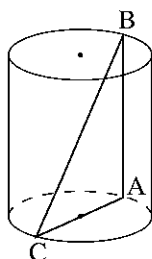
$h = 6$ ס"מ

$r = 5$ ס"מ

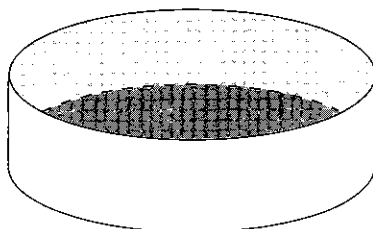


המשך ←

- ג) $MA = 10$ ס"מ ד) $AC = 7$ ס"מ
הזווית בין MA לבסיס 70° . הזווית בין CB לבסיס 60° .

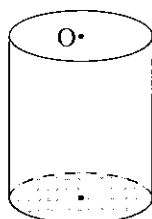


4. צבעו בריכת מים מבחוץ.
קוטר הבסיס הוא 20 מ', וגובה הבריכה 2 מ'.
לצביעת מ"ר אחד משתמשים ב- 0.5 ליטר של צבע.
כמה ליטר צבע דרושים לצביעת הבריכה?



5. רדיוס בסיס של גליל 5 מ' ושטח המעטפת 128 מ"ר.
חשבו את גובה הגליל ואת נפחו.

6. א) שרטטו משופע מ- O לנקודה על היקף הבסיס התחתון.
שרטטו וסמנו את הזווית בין המשופע לבסיס התחתון.

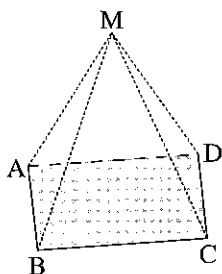


- ב) אורך המשופע 10 ס"מ והזווית בינו לבסיס 42° .
חשבו את גובה הגליל, את רדיוס בסיסו ואת שטח המעטפת שלו.



פירמידות

Ⓐ 1. א) שרטטו על קלקר מלבן.



מקודקודי המלבן העבירו קיסמים כך שהם יפגשו בנקודה אחת.

על-ידי כך מתקבל שלד של "פירמידה מלבנית".

כדי לשרטט את הפירמידה חברו את

הקטעים MA, MB, MC, MD ו- MD .

הקטעים האלה הם "המקצועות הצדדיים" של הפירמידה.

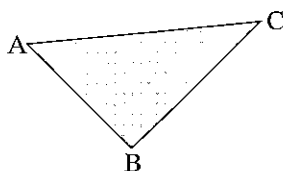
(DA, CD, BC, AB נקראים מקצועות הבסיס).

אם אורכי הקיסמים שהעברתם שווים זה לזה ($MA = MB = MC = MD$) הפירמידה נקראת **פירמידה ישרה**.

M •

ב) שרטטו משולש על קלקר ובנו פירמידה משולשת.

השלימו את השרטוט.



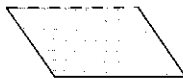
ג) השלימו את שרטוטי הפירמידות שבסיסיהן משורטטים.

•

•

•

•

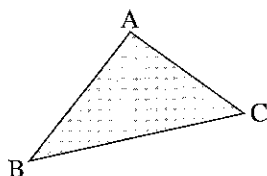




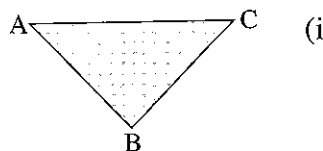
כשמשרטטים פירמידה, הבסיס לא תמיד משורטט על-פי הנתונים. למשל, בפירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים, הבסיס יכול להראות כמשולש שאינו שווה שוקיים. בפירמידה שבסיסה מלבן, לעיתים משורטט הבסיס כמקבילית וכו'. כל זאת כדי שיתקבל שרטוט שמדגים היטב את הגוף.

פירמידה נקראת על שם הבסיס (פירמידה מרובעת, מחומשת וכו').
אם המקצועות הצדדיים שווים זה לזה, הפירמידה נקראת
פירמידה ישרה.

2. (א) מה צורת הפיאות הצדדיות של פירמידה כלשהי? נמקו.
(ב) מה צורת הפיאות הצדדיות של פירמידה ישרה? נמקו.
3. (א) כמה קודקודים וכמה מקצועות לפירמידה משולשת?
(ב) כמה קודקודים וכמה מקצועות לפירמידה מרובעת?
(ג) כמה קודקודים וכמה מקצועות לפירמידה שבסיסה משושה?
(ד) כמה קודקודים וכמה מקצועות לפירמידה שבסיסה מצולע בעל n צלעות?
4. (א) שרטטו על קלקר משולש כלשהו.
העמידו קיסם מאונך לקלקר באחד מקודקדי המשולש.
נעצו קיסמים הנפגשים על האנך כך שתתקבל פירמידה (שאחד ממקצועותיה מאונך לבסיס). האם הפירמידה ישרה? נמקו.
(ב) שרטטו אנך למישור המשולש, דרך אחד הקודקודים, סמנו עליו נקודה M והשלימו שרטוט של פירמידה $MABC$. סמנו בכל שרטוט שתי זוויות ישרות.



(ii)



(i)

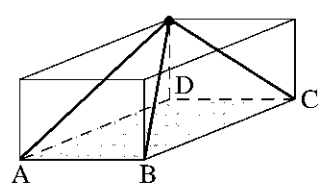
5.  לפניכם שלושה קודקודים של פירמידה. סמנו שתי נקודות נוספות והשלימו שרטוט של פירמידה מרובעת. צבעו את הבסיס והדגישו את המקצועות הצדדיים.

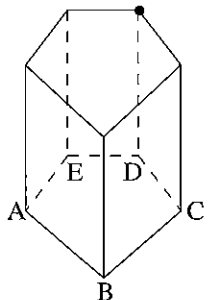
- (א) • (ב) • (ג) •
- • • • •

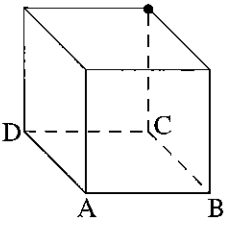
6. פירמידה בתוך מנסרה

(א) חברו את הקודקוד המודגש עם הקודקודים המסומנים באותיות. צבעו את בסיס הפירמידה שהתקבלה והדגישו את מקצועותיה הצדדיים.

דאגמה:

(i) 

(ii) 

(iii) 

(ב) בכל אחת מהפירמידות, שהתקבלו בתרגיל הקודם, אחד המקצועות הצדדיים מאונך למישור הבסיס. צבעו אותו. (בדוגמה המקצוע המאונך הוא הקטע המקווקו).

הקטע המקווקו הוא "גובה" של הפירמידה

הפירמידות הנ"ל אינן ישרות, כי המקצועות הצדדיים לא שווים זה לזה (הגובה הוא מקצוע צדדי בפירמידות אלה והוא קצר מהמקצועות האחרים).

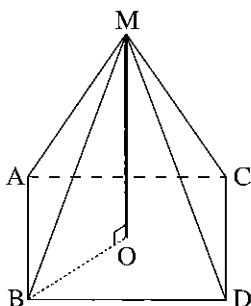


7. (א) שרטטו משולש על הקלקר, בחרו נקודה (נקרא לה S), מחוץ למישור הקלקר וחברו אותה בקיסמים עם קודקודי המשולש ששרטטתם.
- (ב) בנו אנך מ- S אל מישור הקלקר. האנך הוא **גובה** של הפירמידה. שרטטו על הקלקר, את ההיטלים של המקצועות.

רוב הפירמידות שנבנו בכיתה, ודאי אינן ישרות. נבדוק כעת היכן נמצא **הגובה בפירמידות ישרות**, שונות, ומה ניתן לומר על היטלי המקצועות בפירמידות כאלה.

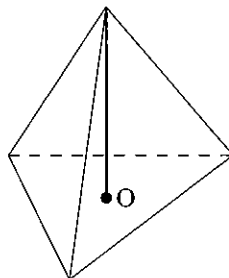
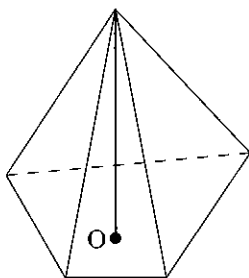


- (ג) בנו על קלקר פירמידה ישרה שבסיסה מלבן. (בפירמידה ישרה: המקצועות הצדדיים שווים זה לזה.) נעצו אנך מקודקוד הפירמידה לבסיס ושרטטו את היטלי המקצועות הצדדיים על הבסיס.



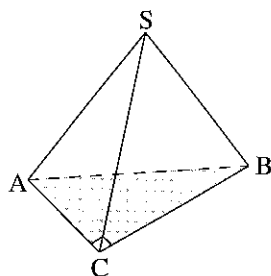
- מה תוכלו לומר על אורכם?
- (ד) לפניכם שרטוט של פירמידה **ישרה** שבסיסה **מלבן**. הקו **המודגש** הוא אנך למישור. השלימו את שרטוט היטלי המקצועות הצדדיים על הבסיס. המשולשים MOA , MOB , MOC ו MOD חופפים זה לזה. ולכן ההיטלים שווים.

- (ה) שרטטו את היטלי המקצועות הצדדיים על הבסיס (הקו המודגש מאונך למישור).

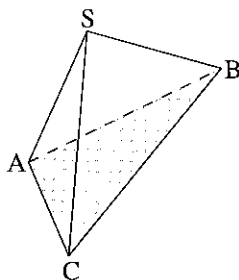


בפירמידה ישרה היטלי המקצועות הצדדיים שווים זה לזה.

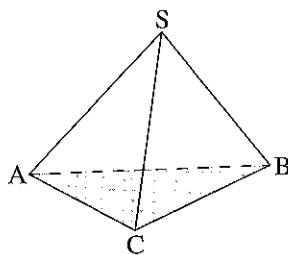
8. (א) – שרטטו על קלקר משולש קהה זווית.
 – בנו פירמידה **ישרה** שבסיסה המשולש ששרטטת.
 – בנו את גובה הפירמידה. היכן הוא פוגע בקלקר?
 – בידקו היכן פוגע הגובה כשהבסיס משולש שכל זוויותיו חדות.
 – בידקו היכן פוגע הגובה כשהבסיס משולש ישר זווית.
 (ב)  שרטטו גובה מ-S בכל פירמידה.
 שרטטו גם את היטלי המקצועות הצדדיים על הבסיס.



הבסיס משולש
ישר זווית.

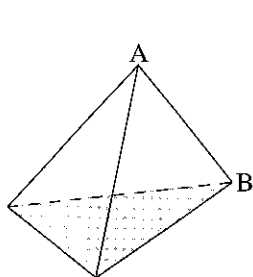


הבסיס משולש
שכל זוויותיו חדות.

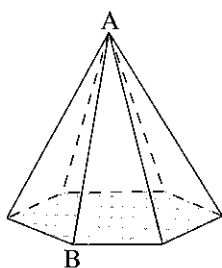


הבסיס משולש
קהה זווית.

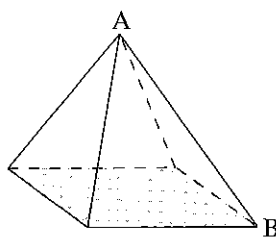
9.  כל הפירמידות המשורטטות הן ישרות.
 שרטטו גובה מ-A, את ההיטל של AB על הבסיס, ואת הזווית בין AB לבסיס.



הבסיס משולש שווה צלעות.



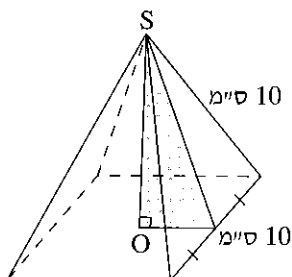
הבסיס משושה משוכלל.



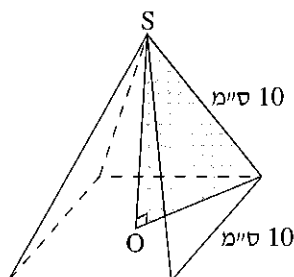
הבסיס ריבוע.

10. לפניהם שרטוטים של פירמידות ישרות שבסיסן ריבוע.

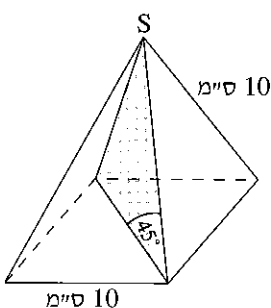
- (i) רשמו מאיזה סוג המשולש הצבוע.
 (ii) הדגישו, או שרטטו, את גובה הפירמידה וחשבו את אורכו.
 (שרטטו בצד את המשולש ממנו אתם מחשבים את הגובה).



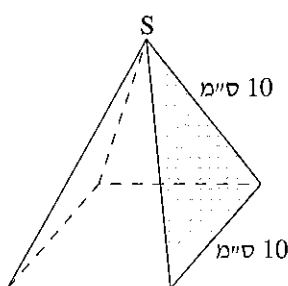
(ב)



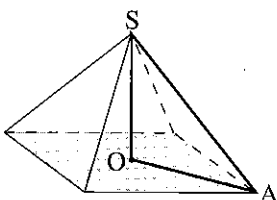
(א)



(ד)



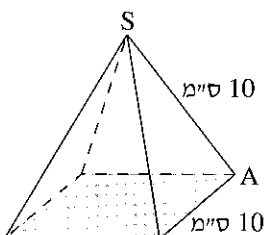
(ג)



11. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע אורך מקצוע הבסיס 4 ס"מ ואורך מקצוע צדדי 5 ס"מ.

- (א) שרטטו בנפרד את הבסיס (ריבוע) וחשבו את OA.
 (ב) סמנו וחשבו את הזווית בין SA לבסיס.

(שרטטו תחילה בצד את המשולש ממנו אתם מחשבים את הזווית).



12. הפירמידה המשורטטת ישרה, ובסיסה ריבוע. אורך כל מקצוע 10 ס"מ.

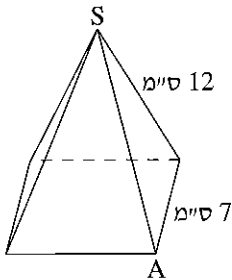
- (א) שרטטו את גובה הפירמידה ואת הזווית בין SA לבסיס.
 גודל הזווית הזו 45° . רשמו בשרטוט.
 (ב) חשבו את גובה הפירמידה.



13. הפירמידה המשורטטת היא פירמידה ישרה שבסיסה **ריבוע**.

(א) שרטטו את גובה הפירמידה ושרטטו את הזווית α , בין SA לבסיס.

(ב) חשבו את היטל המקצוע על הבסיס, את גובה הפירמידה, ואת הזווית α .



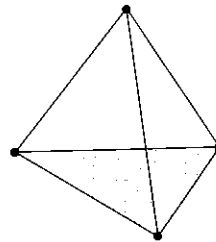
תרגילים

14. לפניכם שלשות של נקודות.

סמנו נקודה רביעית והשלימו שרטוט של פירמידה.

צבעו משולש שיהיה בסיס והדגישו את המקצועות הצדדיים.

באמצע:



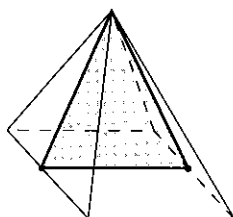
(א)

(ב)

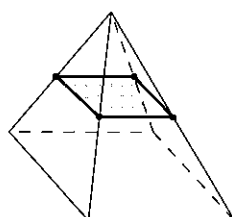
(ג)

15. הפירמידות המשורטטות הן פירמידות ישרות. כל הנקודות המודגשות הן **אמצעי** מקצועות.
קבעו מאיזה סוג הצורה הצבועה.

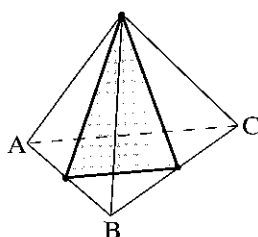
(ב) בסיס הפירמידה ריבוע



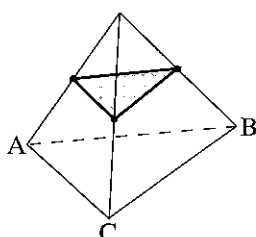
(א) בסיס הפירמידה ריבוע



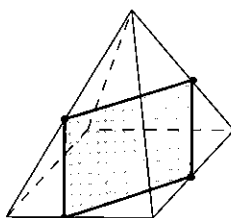
(ד) בסיס הפירמידה משולש שווה צלעות



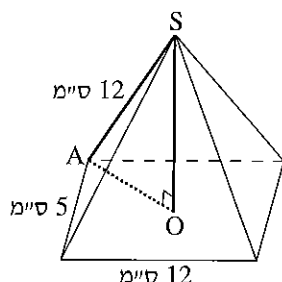
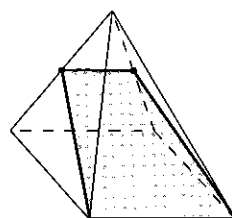
(ג) בסיס הפירמידה משולש שווה צלעות



(ו) בסיס הפירמידה ריבוע



(ה) בסיס הפירמידה ריבוע



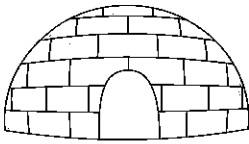
16. הפירמידה המשורטטת ישרה ובסיסה מלבן.

(א) סמנו את הזווית בין SA לבסיס.

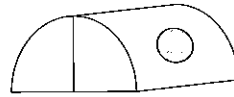
(ב) חשבו על-פי הנתונים את AO

ואת הזווית בין SA לבסיס.

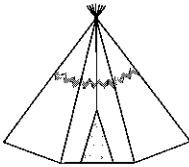
17. איזה גוף מתואר על-ידי כל אחד מהמבנים?



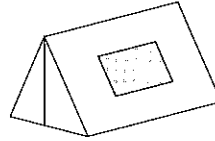
(ב)



(א)

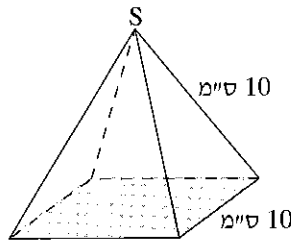


(ד)



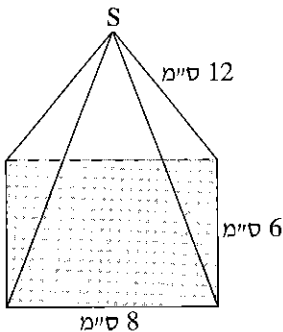
(ג)

18. לפניכם פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע.



(א) בנו את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס ושרטטו זווית זו.

(ב) שרטטו בצד משולש ממנו ניתן לחשב את הזווית ששרטטתם וחשבו אותה.



19. שרטטו על קלקר מלבן ובנו בעזרת

הקיסמים פירמידה ישרה שבסיסה מלבן.

(א) העבירו גובה של הפירמידה. היכן הוא פוגע בבסיס?

(ב) שרטטו וסמנו את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

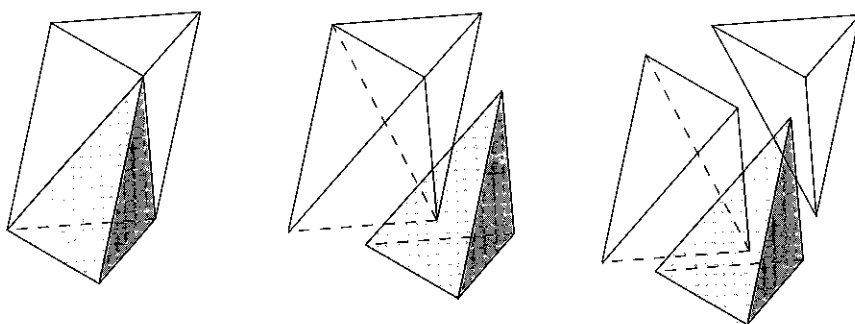
(ג) חשבו את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

על נפח של פירמידה

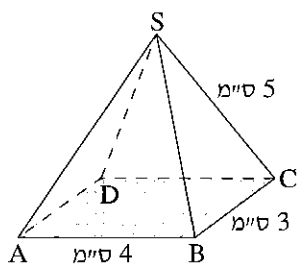
1. בדפי הגזירה שבסוף הספר תמצאו פריסה של פירמידה (לא ישרה). גזרו לאורך הקווים הרצופים, קפלו את הקטעים המקווקים והדביקו כך שתתקבל הפירמידה. הרכיבו יחד, משלוש פרימידות כאלה קובייה.

נפח כל פירמידה כזו היא $\frac{1}{3}$ מנפח הקובייה שהתקבלה.

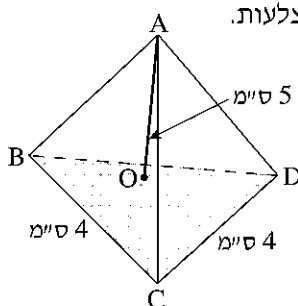
באופן כללי אפשר לחלק כל מנסרה גם אם איננה קובייה, ל- 3 פירמידות שוות נפח. לפניהם שרטוט חלוקה של מנסרה משולשת.



לכן נפח פירמידה יהיה $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$, כאשר B שטח הבסיס של הפירמידה, H הגובה של הפירמידה.

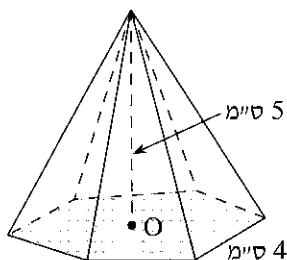


2. הפירמידה המשורטטת ישרה ובסיסה מלבן.
- שרטטו את הבסיס בצד,
 - חשבו את שטחו ואת אורך האלכסון.
 - שרטטו משולש מתאים לחישוב גובה הפירמידה, וחשבו אותו.
 - חשבו את נפח הפירמידה.

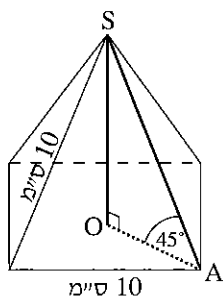


3. הפירמידה המשורטטת ישרה ובסיסה משולש שווה צלעות. (אורך הצלע 4 ס"מ).
- שרטטו את הבסיס בצד וחשבו את שטחו.
 - חשבו את נפח הפירמידה.

4. הפירמידה המשורטטת ישרה ובסיסה משושה משוכלל, שאורך צלעו 4 ס"מ.
- שרטטו את הבסיס בצד וחלקו למשולשים מהמרכז O.



- איזה משולשים התקבלו?
- חשבו שטח של משולש אחד ואת השטח של הבסיס כולו.
- חשבו את נפח הפירמידה.



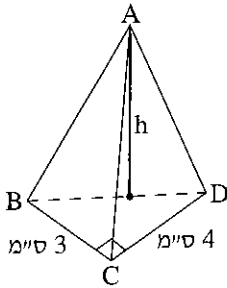
תרגילים

5. הפירמידה המשורטטת ישרה ובסיסה מלבן.
- חשבו את גובה הפירמידה ואת ההיטל של SA על הבסיס.
 - שרטטו את הבסיס וחשבו את צלעות המלבן.
 - חשבו את נפח הפירמידה.

6. חשבו את נפח הפירמידה על סמך הנתונים, שתי הפירמידות ישרות.

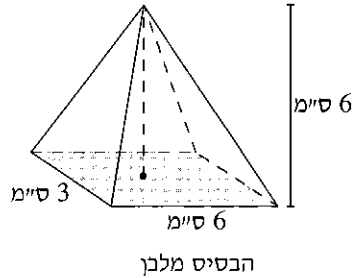
(שרטטו תחילה את הבסיס בצד וחשבו את שטחו.)

(ב)



הבסיס משולש ישר זווית
גובה הפירמידה 6 ס"מ

(א)

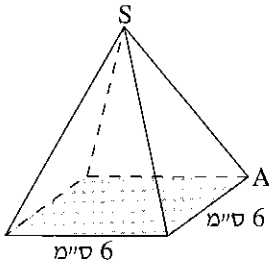


הבסיס מלבן

7. בסיס הפירמידה הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

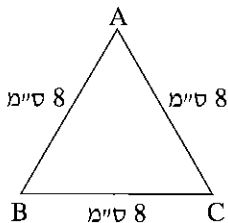
הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא 60° .
שרטטו.

חשבו את גובה הפירמידה ואת הנפח שלה.



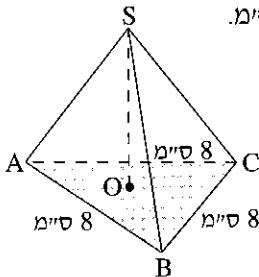
8. (א) שרטטו וחשבו גובה ושטח של משולש

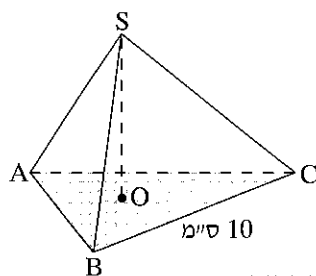
שווה צלעות שאורך צלעו 8 ס"מ.



(ב) על הבסיס הנ"ל בנו פירמידה ישרה שגובהה 10 ס"מ.

חשבו את הנפח שלה.





9. (א) שרטטו על קלקר משולש שווה צלעות.

— בנו בעזרת הקיסמים פירמידה

ישרה שבסיסה משולש שווה צלעות.

— כמה מקצועות לפירמידה כזו?

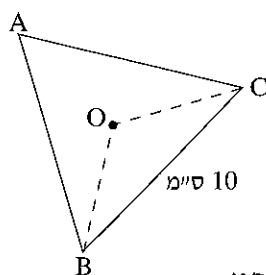
— בנו גובה של הפירמידה.

(ב) בנו על קלקר, את הזווית בין SC לבסיס הפירמידה.

שרטטו את הזווית הזו בפירמידה המשורטטת מול סעיף א'.

שרטטו את כל ההיטלים של המקצועות הצדדיים על הבסיס.

מה תוכלו לומר על אורכם?



(ג) לפניכם השרטוט של הבסיס.

מאיזה סוג המשולשים OBC, OAC, ו-OBA?

חשבו את הזוויות של $\triangle OBC$.

חשבו את צלעות $\triangle OBC$.

(ד) גודל הזווית בין SC לבסיס 50° .

שרטטו את $\triangle SOC$ בצד וחשבו את זוויותיו וצלעותיו.

חשבו את נפח הפירמידה.

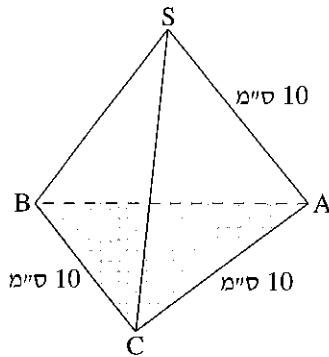
10. בנו על קלקר משולש שווה צלעות שאורך צלעו כאורך קיסם.

השלימו את הבניה לפירמידה ישרה, שאורך כל מקצועותיה כאורך קיסם.

בפירמידה זו כל המקצועות שווים זה לזה. לפירמידה כזו נקרא

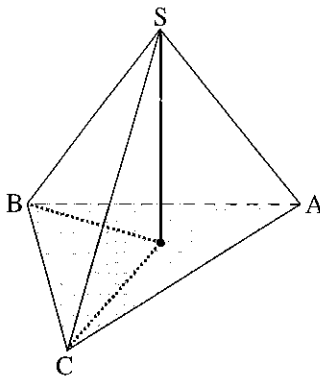
טטראדר או ארבעון.

11. אורך כל מקצוע של טטראדר 10 ס"מ.



- (א) שרטטו את $\triangle ABC$ בצד וחשבו את שטחו.
- (ב) שרטטו את ההיטל של SA על הבסיס ואת הזווית בין SA לבסיס.
- (ג) שרטטו בצד את $\triangle ABC$ וחשבו את אורך ההיטל של SA על הבסיס.
- שרטטו וחשב את הזווית בין SA לבסיס.
- (ד) חשבו את נפח הטטראדר.

12. ABCS היא פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה שוקיים. אורך המקצועות הצדדיים של הפירמידה 10 ס"מ וגובה הפירמידה 8 ס"מ. רשמו את הנתונים בשרטוט.



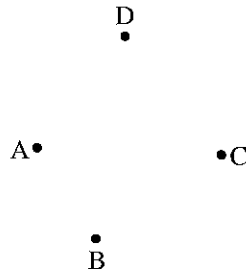
שרטטו, סמנו וחשבו את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

13.  בדף לגזירה שבסוף הספר תמצאו שתי צורות זהות. גזרו והדביקו. חברו אותן כך שתתקבל קובייה.

שטח פנים של פירמידה

הפיאות הצדדיות בפירמידה הם משולשים.
שטח הפנים של הפירמידה הוא סכום שטחי המשולשים האלה
בתוספת שטח הבסיס.

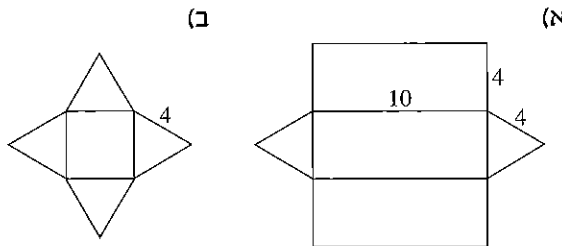
1. (א) מה תוכלו לומר על פיאות הטראדר?
(ב) ABCD קודקודים של טראדר. השלימו את השרטוט.



- (ג) אורך כל מקצוע של הטראדר 5 ס"מ.
שרטטו בצד משולש ABC שווה צלעות וחשבו את גובה המשולש ואת שטחו.
(ד) מה שטח הפנים של הטראדר?

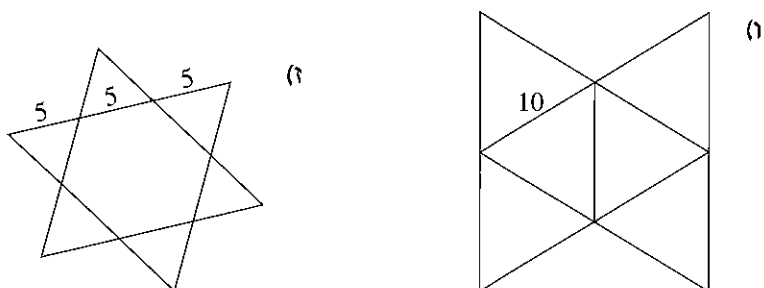
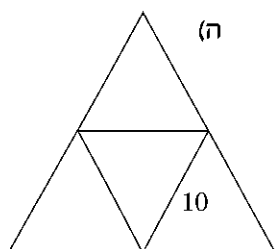
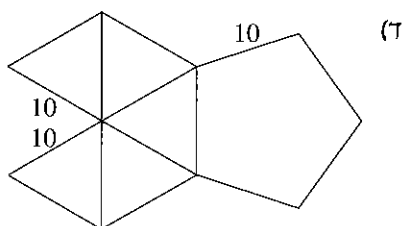
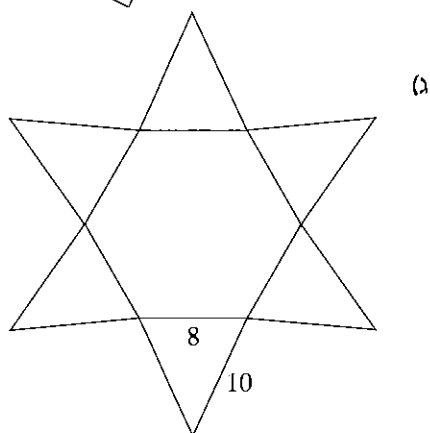
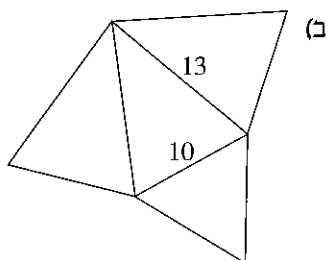
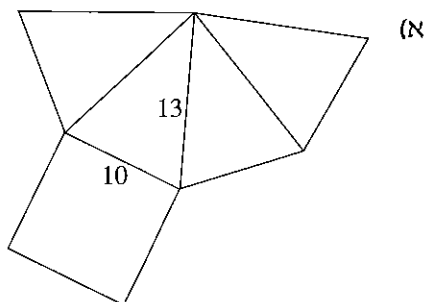
2. לפניכם שתי פריסות של גופים.

— זהו את הגופים.



— חשבו את שטח הפנים, אם ידוע כי כל המשולשים המשורטטים שווים צלעות.

לפניכם שרטוטים שונים. אלו מהן פריסות של פירמידה?
 בדפים לגזירה שבסוף החוברת תמצאו דף בו מופיעים השרטוטים שבעמוד זה.
 תוכלו לגזור ולנסות לקפל. חשבו את שטח הפנים של אלה **שהן פירמידות**.
 (היחידות ס"מ).

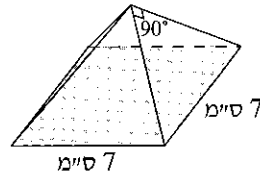


תרגילים

4. כל הפרימידות המשוורטות ישרות.

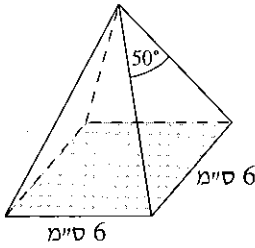
- שרטטו את הבסיס וחשבו את שטחו.
- שרטטו פיאה צדדית וחשבו את שטחה.
- חשבו את שטח הפנים.

(א)



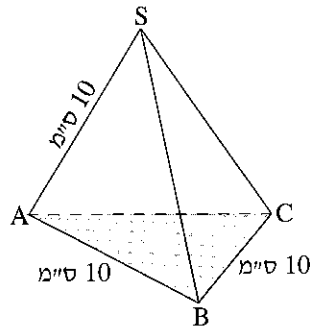
הבסיס ריבוע

(ב)



הבסיס ריבוע

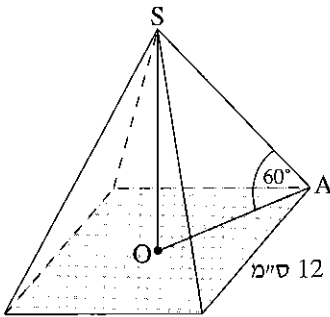
(ג)



טטראדר

(כל המקצועות שווים זה לזה)

(ד)



הבסיס ריבוע

(חשבו תחילה את OA ו-SA)

5. בדפים לגזירה שבסוף הספר, תמצאו שרטוט של פריסה. מהו, לדעתכם, הגוף שזאת הפריסה שלו? תוכלו לגזור ולקפל לקופסה ולבדוק את השערתכם.

זווית בין מישורים



1. שרטטו ישר על דף.

קפלו את הדף לאורך הישר ששרטטתם, כך שהזווית בין שני חלקי הדף תהיה:

- (א) קהה (ב) ישרה
(ג) בין 45° ל- 90° (ד) פחות מ- 45°

מביצוע התרגיל מסתבר שיש לכל אחד מושג מהי זווית בין מישורים. נשתמש כעת במושגים גיאומטרים כדי להגדיר זווית כזו.

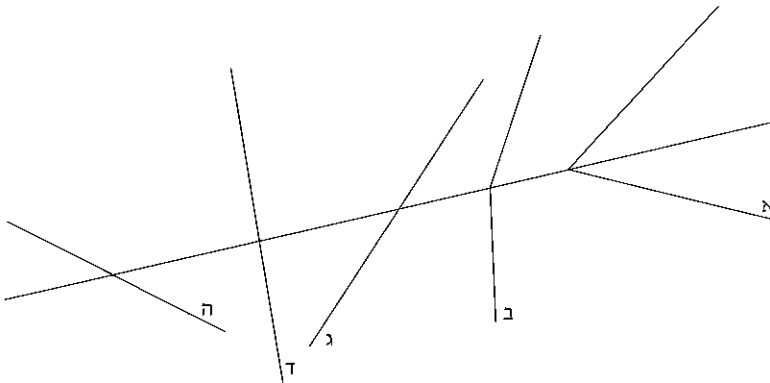


2. בדפים לגזירה שבסוף החוברת תמצאו את השרטוט המופיע כאן.

גזרו, קפלו את הדף לאורך הישר עליו השרטוטים א'-ה' כך שהזווית בין שני החלקים תהיה חדה.

איזה מהשרטוטים א'-ה' מאפיין, לדעתכם, את הזווית החדה בין שני המישורים שנוצרו?

קפלו את הדף לאורך הישר כך שהזווית בין שני חלקי הדף תהיה ישרה. בידקו שוב, איזה מהשרטוטים מאפיין את הזווית הישרה בין המישורים.



רק אחד מהישרים איפיין את זווית הקיפול בכל שלושת המקרים. איזה הוא?



3. קחו דף נייר, קפלו אותו קיפול אחד בכיוון כלשהו וישרו את הדף.

סמנו נקודה על קו הקיפול ושרטטו ישר מאונך לישר הקיפול.

קפלו בחזרה, הגדילו והקטינו את הזווית החדה בין שני חלקי הישר ששרטטתם. זווית זו היא הזווית בין המישורים.

לאחר שמקבלים, יתקבל בכל אחד מהחלקים (המישורים) אנך לישר הקיפול.

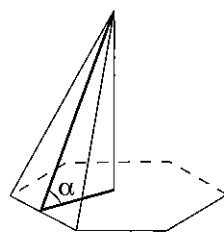
זווית בין מישורים היא זווית בין אנכים לישר החיתוך (ישר הקיפול) בשני המישורים.

כלומר, שרטוט ד' בתרגיל 2, הוא השרטוט שבעת הקיפול יאפיין את הזווית בין המישורים.

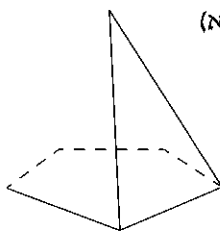


4. שרטטו וסמנו את הזווית בין שני המישורים המשורטטים.

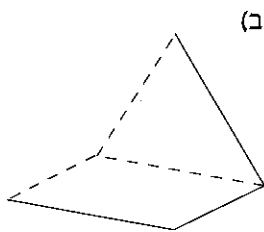
דוגמה



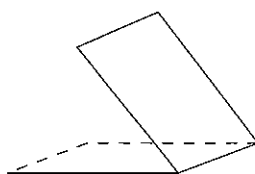
(א)



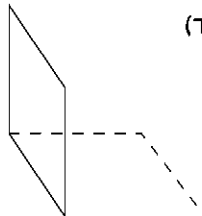
(ב)



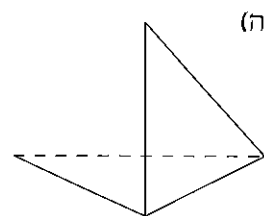
(ג)



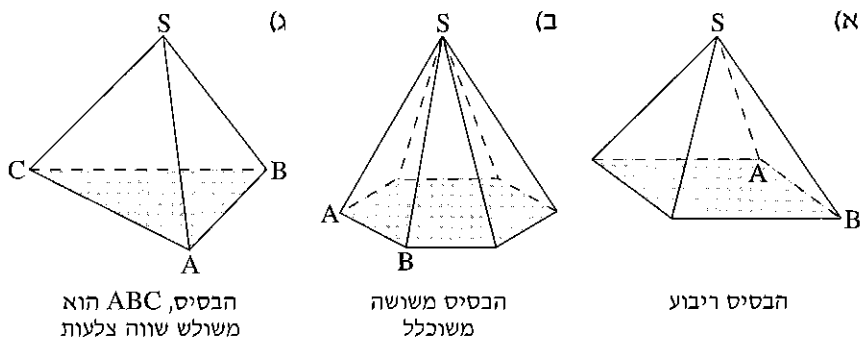
(ד)



(ה)



5.  שרטטו אנך מ- S ל- AB וקבעו היכן הוא פוגע ב- AB (היעזרו בבנייה על קלקר). שרטטו וסמנו את הזווית בין המישור SAB ומישור הבסיס. (כל הפירמידות ישרות, כלומר המקצועות הצדדיים שווים זה לזה).

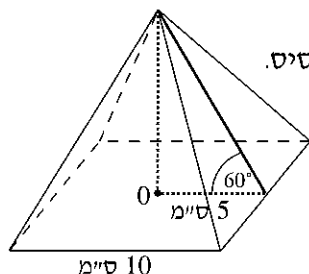


6.  בסיס הפירמידה המשורטטת הוא ריבוע, שאורך צלעו 10 ס"מ.

הזווית בין מישור הפיאה הצדדית למישור הבסיס 60° .

(א) חשבו את גובה הפירמידה ואת הנפח שלה.

(ב) שרטטו וחשבו את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



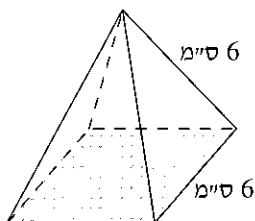
7.  מה אורך הגובה של פיאה צדדית בפירמידה, המשורטטת בתרגיל 6? חשבו את שטח הפנים של הפירמידה הזו.

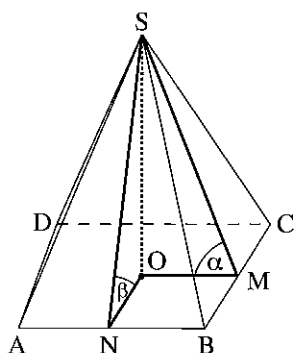
8.  כל המקצועות של הפירמידה הריבועית שווים ואורכם 6 ס"מ.

(א) חשבו גובה של המשולש שהוא פיאה צדדית.

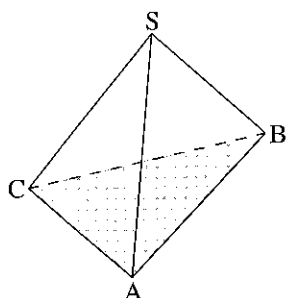
(ב) שרטטו וחשבו את הזווית בין הפיאה הצדדית לבסיס.

(ג) שרטטו וחשבו גם את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



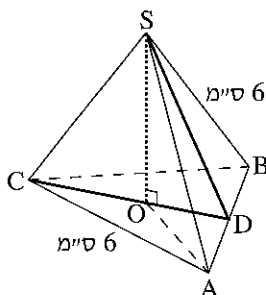


9. הבסיס של פירמידה הוא מלבן שאורכי צלעותיו $AB = 8$ ס"מ ו- $BC = 6$ ס"מ. גובה הפירמידה 10 ס"מ. חשבו את גודל הזווית שיוצרות הפיאות עם הבסיס (α ו- β).



10. כל המקצועות של הפירמידה המשורטטת שווים זה לזה (טטראדר).
 (א) שרטטו את הזווית בין הפיאה SAB והבסיס ABC.
 (ב) בדפים לגזירה שבסוף הספר תמצאו פריסה של טטראדר. גזרו, קפלו והדביקו והניחו על השולחן כך שבכל פעם פיאה אחרת תהיה הבסיס. נסו לשרטטו את הזווית בין הפיאות SAB ו- SAC.

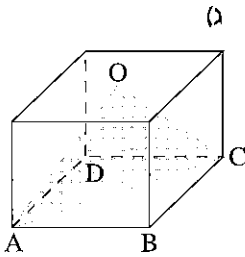
11. אורך כל מקצוע בטטראדר 6 ס"מ.



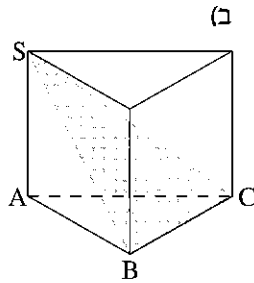
- (א) חשבו את SD , CD ואת הזווית בין פיאה צדדית לבסיס.
 (ב) מהו, לדעתכם, גודל הזווית בין הפיאה SAB לפיאה SAC?
 (ג) חשבו גם את גודל הזווית בין המקצוע SA לבסיס.

תרגילים

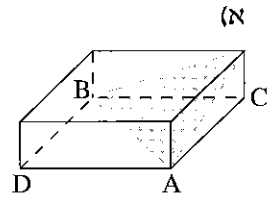
12. שרטטו וסמנו את הזווית בין המישור הצבוע והמישור ABC .



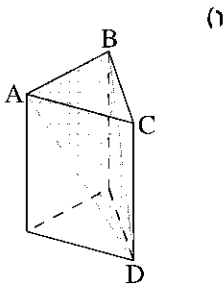
$ABCD$ ריבוע
 O פגישת האלכסונים
של הפיאה העליונה



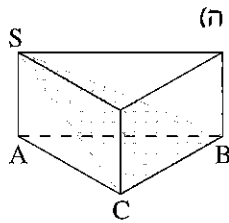
$\triangle ABC$ שווה צלעות



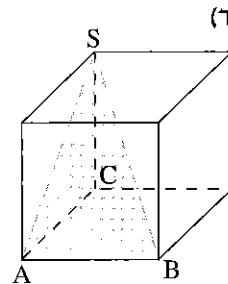
$ABCD$ ריבוע



$\triangle ABC$ שווה צלעות



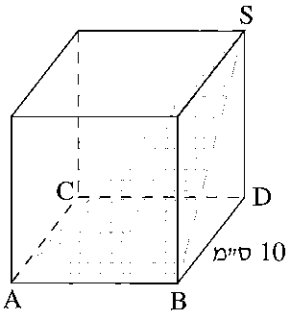
$\triangle ABC$ ישר זווית
($\angle ACB = 90^\circ$)



קובייה

13. סמנו ב- α את הזווית בין המישורים SAB ו- $ABCD$ בקובייה המשוטטת.

חשבו את גודל הזווית α ?



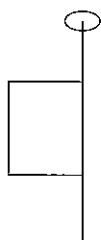
גופי סיבוב ובמיוחד חרוטים – רשות



1. Ⓢ גזרו פיסת נייר בצורת מלבן והדביקו אותה לקיסם או לחוט.

סובבו את הקיסם (או החוט) כציר.

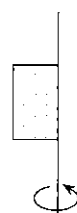
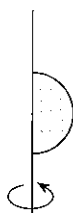
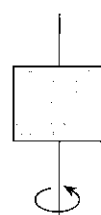
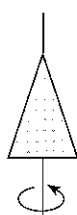
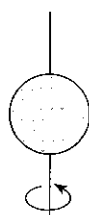
איזה גוף "נוצר" על-ידי סיבוב כזה?



2. Ⓢ בנו "דגלים" כמשורטט, בעזרת פיסות נייר וקיסמים או שיפודים. סובבו כך

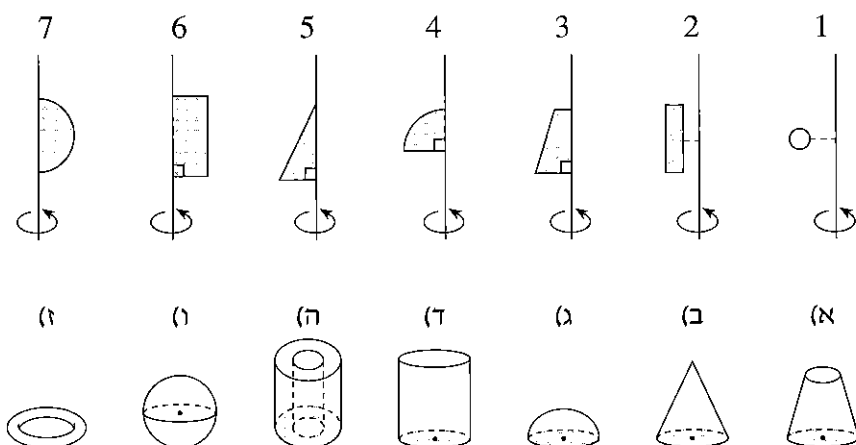
שהקיסם יהיה ציר הסיבוב. בעת הסיבוב מתקבל דימוי של גוף.

איזה גוף מתקבל בכל מקרה? ציינו שם או תארו את הגוף.

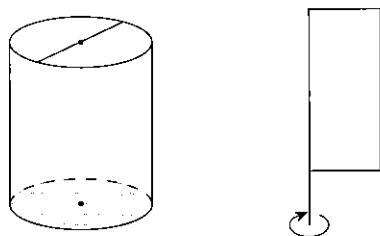


הגופים שהתקבלו בסעיפים ב' ו-ה' נקראים **חרוטים**.

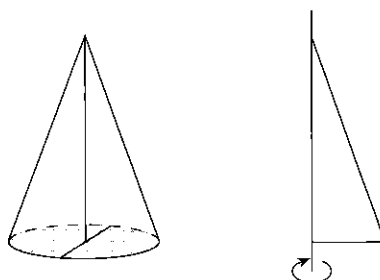
3.  התאימו לכל שרטוט של צורה מסתובבת, את הגוף המתקבל לאחר הסיבוב.



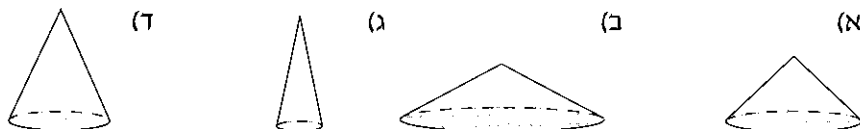
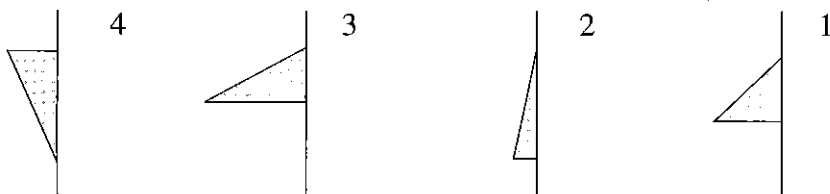
4.  (א) רשמו בשרטוט של הצורה המסתובבת ובשרטוט של הגליל: r על קטע שהוא רדיוס הבסיס ו- h על קטע שהוא גובה הגליל.



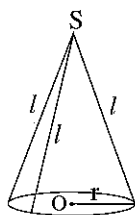
(ב) רשמו בשרטוט של הצורה המסתובבת ובשרטוט של החרוט: r על קטע שהוא רדיוס הבסיס ו- h על קטע שהוא גובה החרוט.



5. התאימו לכל שרטוט של צורה מסתובבת את החרוט המתאים.



6. שרטטו על קלקר מעגל. העמידו קיסם מאונך במרכז. מנקודה S על הקיסם, נעצו קיסמים לנקודות שונות על ההיקף. אילו חברנו כל נקודה על המעגל עם הנקודה S היה מתקבל חרוט.



הקטע המיוצג על-ידי הקיסם, נקרא בשם "קו יוצר" (l בשרטוט). והוא היתר של המשולש ישר הזווית המסתובב בתרגיל 4, או 5.

7. תארו במה דומה החרוט לגליל ובמה דומה החרוט לפירמידה.

בדומה לחישוב נפח של פירמידה על-פי מנסרה בעלת אותו בסיס וגובה, מחשבים נפח של חרוט על-פי גליל בעל אותו בסיס ואותו גובה:



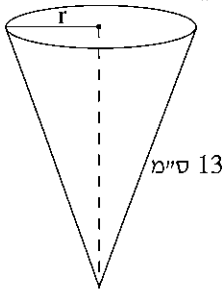
כפי שראיתם קודם, נפח של פירמידה הוא $\frac{1}{3}$ מנפח מנסרה בעלת אותו בסיס ואותו גובה.

נפח חרוט הוא $\frac{1}{3}$ מנפח גליל בעל אותו בסיס (אותו רדיוס) ואותו גובה h .

$$V = \frac{\text{שטח הבסיס} \times h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

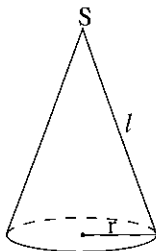
8. 

אורך הקו היוצר l של גביע גלידה בצורת חרוט הוא 13 ס"מ.
רדיוס הבסיס 5 ס"מ.
חשבו את גובה הגביע.
כמה סמ"ק גלידה ניתן לדחוס בתוך הגביע?



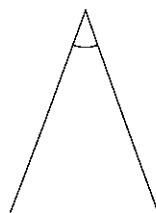
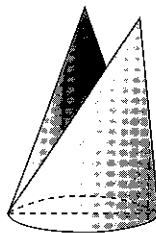
9. 

אורך הקו היוצר l של החרוט הוא 10 ס"מ,
והזווית בינו לבסיס 60° .
חשבו את גובה החרוט, את רדיוס הבסיס, ואת
נפח החרוט.



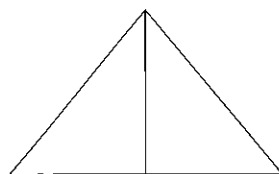
10. 

חתכו חרוט לשני חלקים שווים מהקודקוד עד לקוטר
שעל הבסיס. החתך שהתקבל הוא משולש שווה שוקיים
שווית הראש שלו 50° .
הקו היוצר של החרוט 10 ס"מ.
חשבו את רדיוס הבסיס, את הגובה, ואת נפח החרוט.



11. 

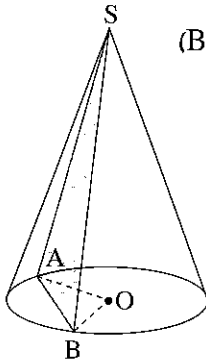
סובבו משולש שווה שוקיים סביב
הגובה לבסיס ונוצר חרוט.
בסיס המשולש המסתובב 20 ס"מ.
זווית הראש שלו 80° .
חשבו את נפח החרוט המתקבל.



תרגילים

12. אורך הגובה של חרוט 40 ס"מ.

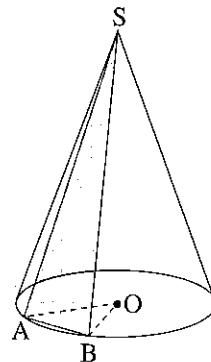
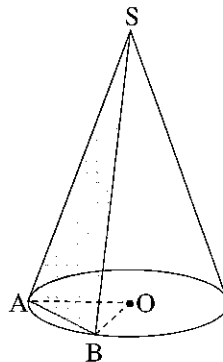
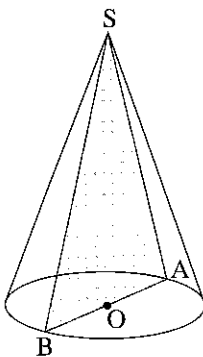
חתכו אותו מהקודקוד ועד לקוטר (כפי שמראה הציור בתרגיל 10). החתך שהתקבל הוא משולש שווה שוקיים.
שרטטו את המשולש.
זווית הבסיס של המשולש שהתקבל היא 65° .
חשבו את נפח החרוט.



13.  חיברו את קודקוד החרוט עם שתי נקודות על הבסיס (A ו-B) שרטטו וסמנו ב- α את הזווית בין המישור SAB ומישור הבסיס.

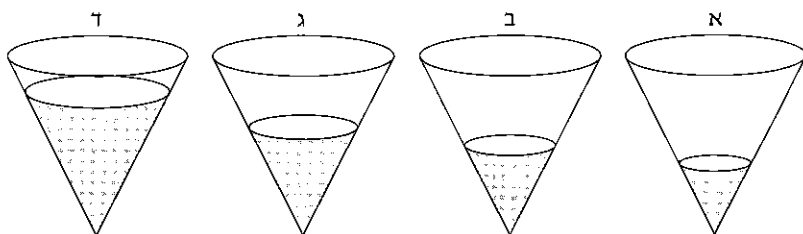
(ב) מקרבים את A ל-B. מה קורה לזווית α בין המישור SAB ומישור הבסיס? (היעזרו בחרוט הבנוי על קלקר).

(ג) שרטטו, בחרוטים הבאים, את הזווית בין המישור SAB למישור הבסיס.

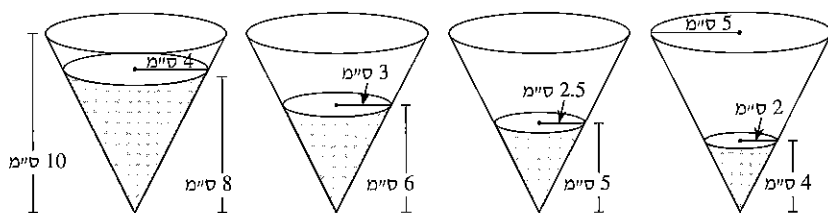


(ד) מהו הגודל המכסימלי של הזווית α ? באיזה מקרה מתקבלת זווית כזו?

14. א) לפניכם ארבעה חרוטים. איזה מהם "מלא למחצה"? נמקו.



ב) חשבו את כמות הנזל בכל חרוט ובידקו באיזה מהכלים כמות הנזל קרובה ביותר למחצית מקיבול החרוט.



15. שרטטו מעוין בו $AC > BD$, גזרו אותו, הדביקו

קיסם על האלכסון המודגש (AC) וסובבו.

א) תארו את הגוף המתקבל.

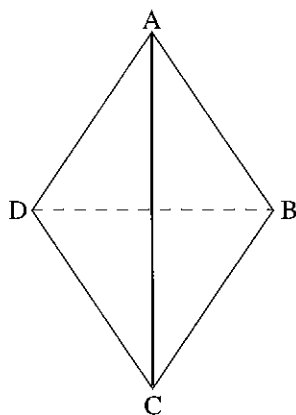
ב) סובבו אותו מעוין סביב DB.

איזה משני הגופים בעל נפח

גדול יותר לדעתכם, זה שהתקבל מסיבוב

סביב AC או זה שהתקבל מסיבוב

סביב DB, או שאולי הנפחים שווים?



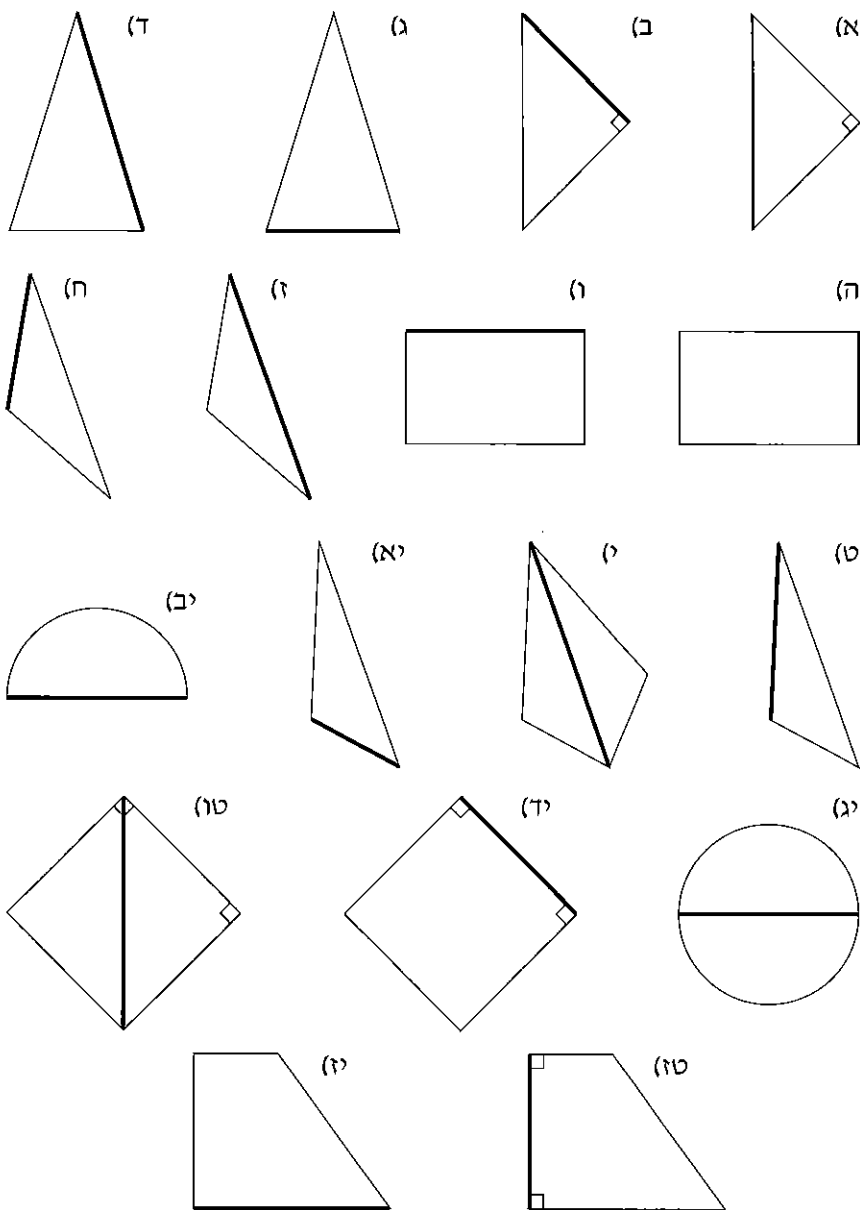
ג) נתון $AC = 24$ ס"מ ; $BD = 18$ ס"מ.

חשבו, על סמך הנתונים, את נפח הגוף

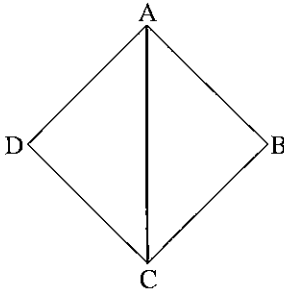
המתקבל מסיבוב סביב AC ואת נפח הגוף המתקבל מסיבוב סביב DB.

בידקו את תשובתכם לסעיף ב'.

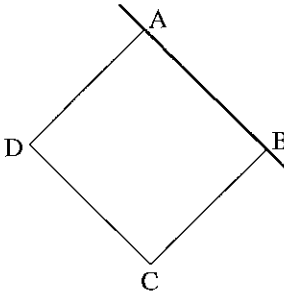
16. תארו את הגוף המתקבל מסיבוב הצורה סביב הקטע המודגש. בדפים לגזירה שבסוף הספר תמצאו דף בו מופיעים השרטוטים שבעמוד זה. תוכלו לגזור את המשולשים, להדביק על קיסם, לסובב ולבדוק את השערותיכם. (המשולשים (א), (ב), (ג), (ד), (ז) ו- (ח) הם שווי שוקיים.)



17. א) סובבו ריבוע סביב האלכסון AC.
תארו את הגוף שהתקבל.

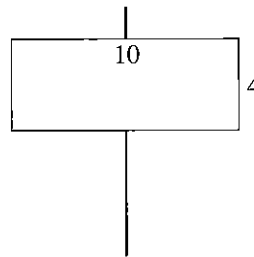
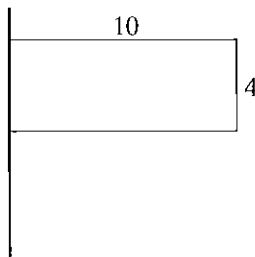


ב) אורך צלע הריבוע 10 ס"מ.
חשבו את נפח הגוף שהתקבל.



ג) איזה גוף יתקבל אם נסובב את
הריבוע סביב אחת הצלעות (למשל AB)?
מה הנפח של הגוף שהתקבל?

18. סובבו אותו מלבן פעמיים כל פעם סביב ציר אחר.



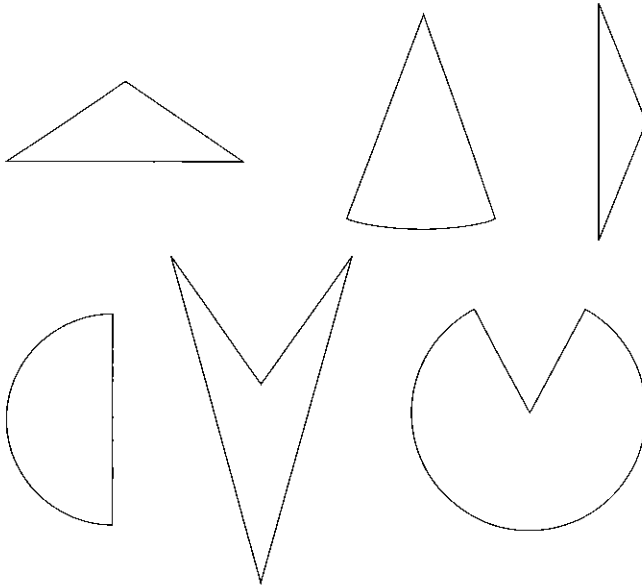
א) האם התקבל אותו גליל? אם לא, איזה מהם בעל נפח גדול יותר?

ב) שרטטו לכל דגל גליל מתאים, רשמו את גובהו ורדיוס בסיסו וחשבו את נפחו.

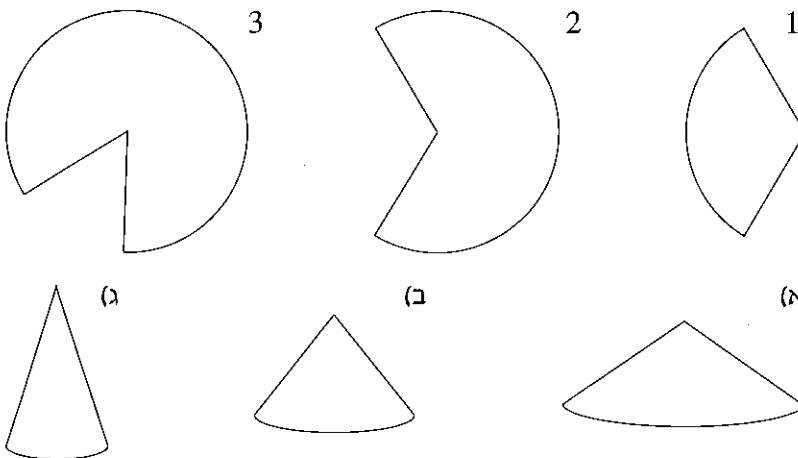
שטח מעטפת של חרוט – רשות

1. א) שרטטו צורה אשר לדעתכם ניתן לגזור ולקפלה כך שיתקבל חרוט.

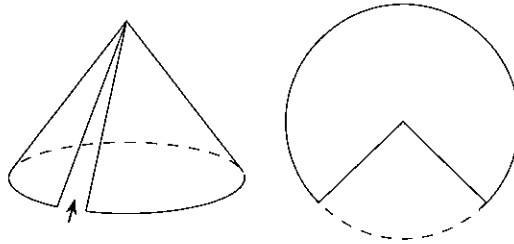
ב) בדפים לגזירה שבסוף הספר תמצאו דף בו מופיעים השרטוטים שבעמוד זה. גזרו ובידקו מאילו מהצורות אכן, ניתן ליצור חרוטים.



2. התאימו לכל אחת מהפריסות (1, 2, 3) אחד מהחרוטים (א, ב, ג).



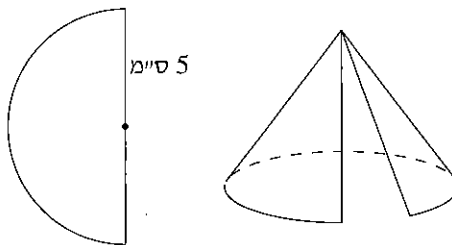
3. קיפלו "גזרה" והתקבל חרוט.
 (א) רשמו l ליד הקו היוצר בגזרה ובחרוט.



- (ב) הדגישו את היקף הבסיס של החרוט בחרוט ובגזרה.
 (ג) צבעו את שטח המעטפת בחרוט ובגזרה.

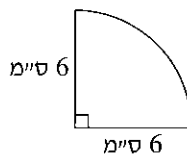
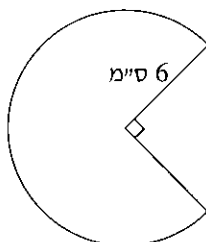
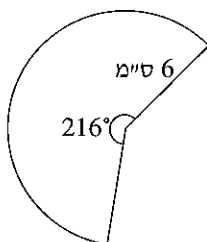
פריסה של מעטפת חרוט היא חלק של עיגול, הנקרא "גזרה".
 במעטפת הכוונה לחרוט ללא הבסיס.

4. מהגזרה המשורטטת בנו חרוט.
 (א) איזה חלק מהווה הגזרה משטח העיגול השלם?



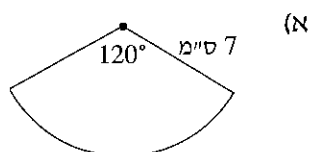
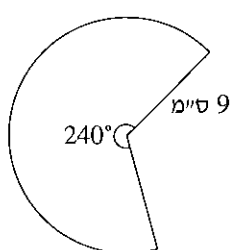
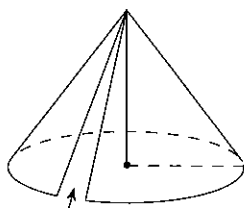
- (ב) חשבו את שטח הגזרה (מעטפת החרוט).

5. מהגזרות המשורטטות בנו חרוט.
 (א) מצאו איזה חלק מהווה הגזרה משטח העיגול.
 (ב) השלימו וחשבו את שטח הגזרה (מעטפת החרוט).



תרגיל

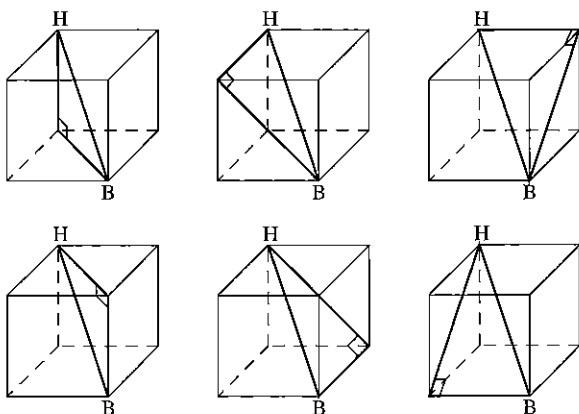
6. מהגזרה המשורטטת בנו חרוט.
 איזה חלק מהווה שטח הגזרה משטח העיגול.
 חשבו את שטח המעטפת של החרוט.



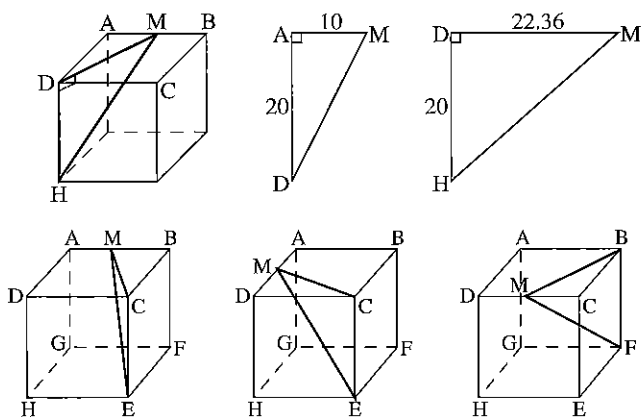
מבחר תשובות

זווית ישרות במרחב (עמודים 339-344)

9 א)



11 א) $PM = 22.36$ ס"מ, $MH = 30$ ס"מ



13 ג) $MK = 12.12$ ס"מ

14 I א) שווה צלעות ב) ישר זווית ש"ש ג) ישר זווית ד) ישר זווית ש"ש ה) ישר זווית ש"ש

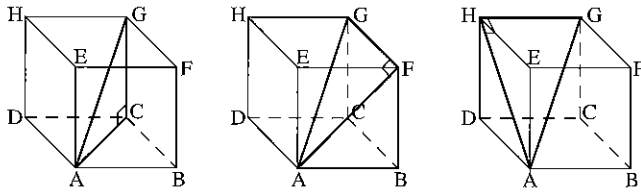
ו) ישר זווית ז) ישר זווית ח) שווה צלעות

II א) (ח) חופפים, (ב) (ד) (ה) חופפים, (ג) (ו) (ז) חופפים

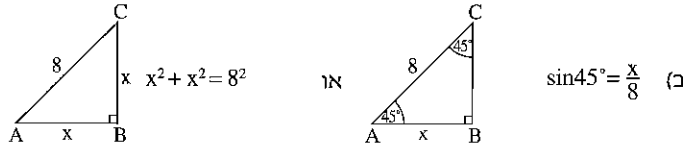
15. היקף המשולש האמצעי הוא הקטן ביותר אך קשה להשוות בין ההיקפים של הימני לשמאלי

היקף הימני 42.43 ס"מ, האמצעי 34.14 ס"מ, השמאלי 41.46 ס"מ

16. א) השרטוטים האפשריים:



אלכסון הפאה 16.97 ס"מ, אלכסון הקובייה 20.78 ס"מ



אורך המקצוע 5.66 ס"מ, אלכסון הקובייה 9.8 ס"מ

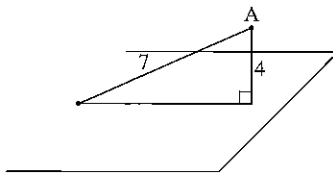
17. I) א) שייש ב) שייש ג) ישר זווית

II משולש	א)	ב)	ג)
היקף	38.63	34.49	26.18
שטח	70.71	55.9	25

היטלים (עמודים 347-345)

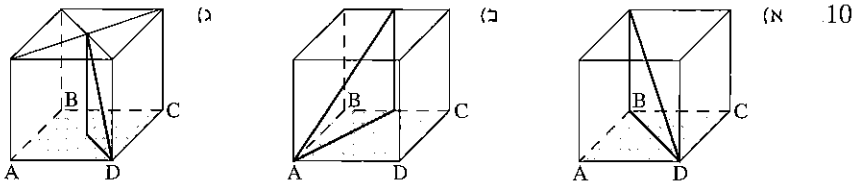
3. ב) 8 ס"מ

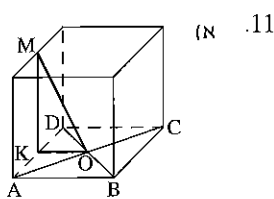
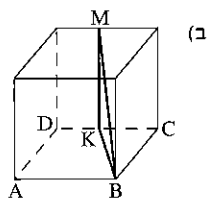
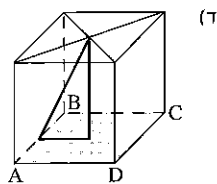
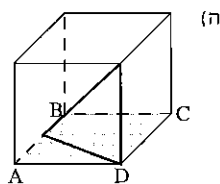
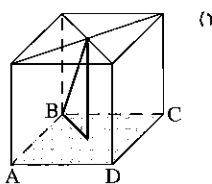
4. ההיטל 5.74 ס"מ



5. א) כאשר הקטע הוא על המישור או מקביל למישור ב) לא ייתכן ג) כאשר הקטע מאונך למישור

6. 9.75 ס"מ

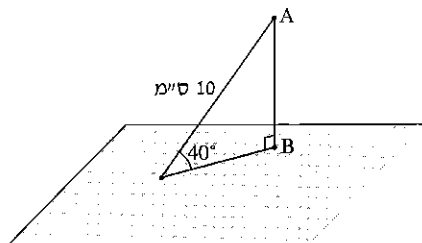




(ii) א) 5 ס"מ ב) 11.18 ס"מ

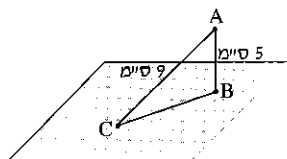
זווית בין ישר למישור (עמודים 353-348)

2. $AB = 6.43$ ס"מ



3. א) בין 0° ל- 90° ב) כאשר הישר מאונך למישור

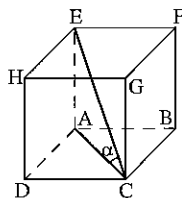
5. הזווית 33.75° ההיטל 7.48 ס"מ



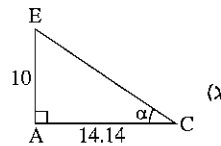
8. $\alpha = 38.68^\circ$, הזווית בין כל אחד מהמשופעים למישור, היא 38.68° .

(ב) 14.14 ס"מ

9. א)

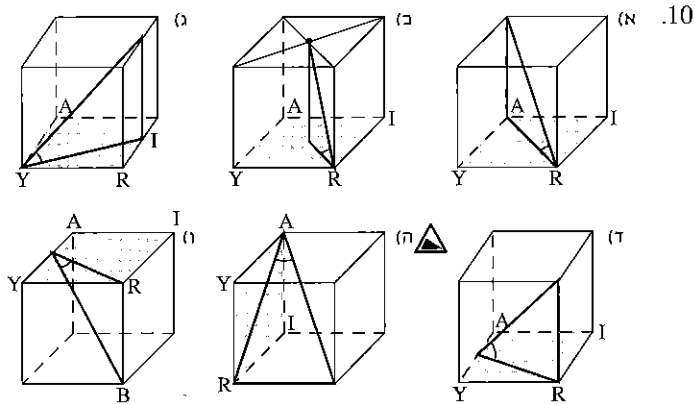


אורכי הצלעות: 17.32 ס"מ, 14.14 ס"מ, 10 ס"מ



והזווית: $\alpha = 35.26^\circ$

(ד) גודל הזווית: 35.26°



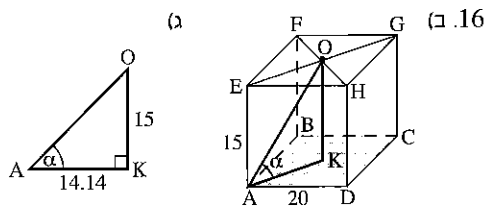
11. (ב) 13 ס"מ $\alpha = 37.57^\circ$

13. (ב) אם K אמצע הצלע DC: אז 10 ס"מ MK , 11.18 ס"מ AK ,

15 ס"מ AM , $\angle MAK = 41.81^\circ$

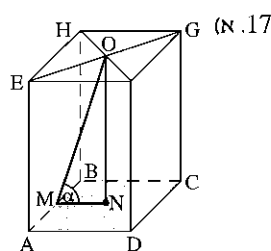
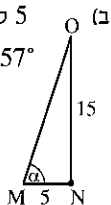
14. 45°

15. (א) 35.26° (ב) אותו גודל (ג) אותו גודל

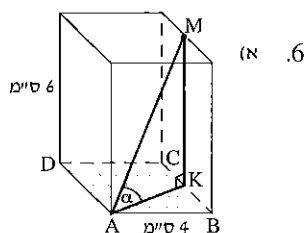
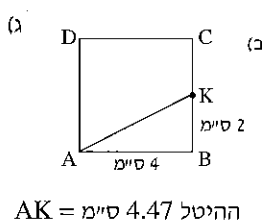
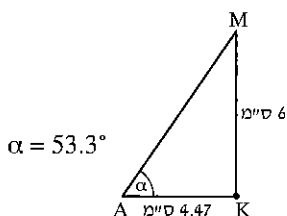


$\alpha = 46.7^\circ$, $AO = 20.62$ ס"מ, $OK = 15$ ס"מ, $AK = 14.14$ ס"מ

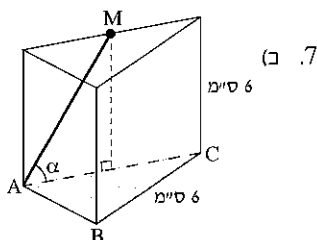
(ב) $OM = 15.81$ ס"מ, $ON = 15$ ס"מ, $MN = 5$ ס"מ
 $\alpha = 71.57^\circ$



מנסרות (עמודים 354-361)

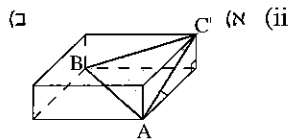
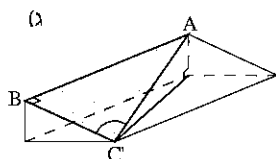
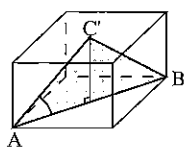


(ג) $\alpha = 63.43^\circ$ (ד) $ML = 6.71$ ס"מ, $\beta = 63.43^\circ$

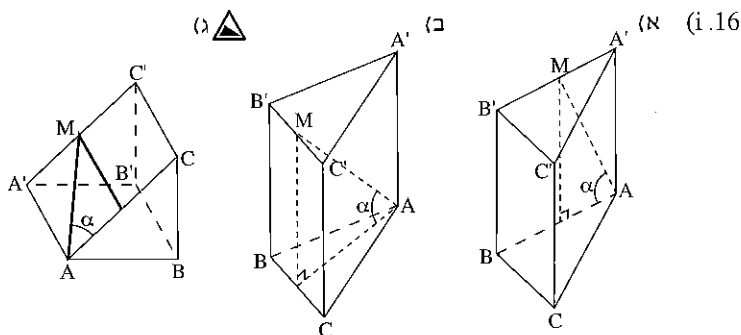


14. (i) (א) משולש שווה שוקיים (ב) משולש ישר זווית (ג) משולש שווה שוקיים

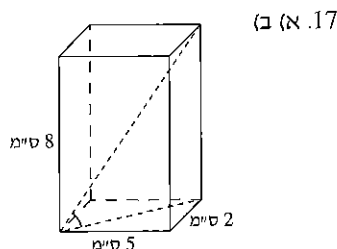
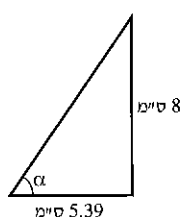
(ד) משולש שווה צלעות (ה) משולש ישר זווית (ו) משולש שווה שוקיים



15. (א) נכון (ב) נכון (ג) לא נכון (ד) נכון (ה) נכון (ו) נכון



(ii) $ACC'A' \perp ABB'A'$



(ד) הניצבים: 8 ס"מ, 5.39 ס"מ, היתר: 9.64 ס"מ, $\alpha = 56.05^\circ$

18. (ב) אלכסון הבסיס 14.14 ס"מ, אלכסון המנסרה 15.78 ס"מ
 19. (א) $\triangle ADB$ שווה שוקיים (ב) $AB = AD = 12.81$ ס"מ, $DB = 11.31$ ס"מ
 (ג) $S_{ABD} = 65$ סמ"ר
 20. (א) $\triangle ADB$ ישר זווית (ב) $AD = 5$ ס"מ, $AB = 7.07$ ס"מ, $BD = 8.66$ ס"מ
 $\angle ABD = 35.26^\circ$, $\angle BDA = 54.74^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$
 21. (א) גובה המנסרה 10.1 ס"מ (ב) 71.41 סמ"ר
 22. (א) (ב) שתי מנסרות שבסיסן משולש (ג) שתי תיבות ריבועיות (אם החתך באמצע)

נפח ושטח פנים של מנסרה (עמודים 372-368)

5. 70 סמ"ק
 6. (א) שטח המשולש 27.71 סמ"ר (ב) נפח המנסרה 221.70 סמ"ק (ג) 8 ס"מ
 8. (ב) 2.83 יח' (ג) ניצב 2.83 יח', גובה 2.37 יח', אלכסון 3.69 יח' (ד) 9.48 יח"ק
 9. (א) 672 מ"ק (ב) 672,000 ליטר (ג) 840 דקות = 14 שעות
 10. (ב) 180 ליטר (ג) 12 (א) 18 (ב) 16 (ג) 22 (ד) 24 (ה) 26
 11. (i) א, ב, ג, ה, ו, ז (ii) (ב) 63.46 סמ"ר (ג) אי אפשר לחשב (ד) אי אפשר לחשב
 (ה) 66.56 סמ"ר (ו) 53.76 סמ"ר (ז) 69 סמ"ר
 14. (ב) שטח הבד בלי הרצפה: 8.45 מ"ר, עם הרצפה: 12.05 מ"ר (ג) נפח האוהל: 1.87 מ"ק
 15. (א) גובה: 10.38 ס"מ (ב) שטח הבסיס: 16.35 סמ"ר, נפח: 169.64 סמ"ר
 16. (ב) אלכסון הבסיס: 14.14 ס"מ, גובה התיבה: 30.33 ס"מ, אלכסון התיבה: 33.46 ס"מ
 (ג) נפח התיבה: 3032.8 סמ"ק, שטח הפנים: 1413.12 סמ"ר

17. א) נפח המנסרה 249.42 סמ"ק (ב) 18.43° ג) המשולש שווה שוקיים, שטחו 66.81 סמ"ר
18. ב) 3.36 ס"מ ג) 53.7 סמ"ק (ד) המרובע הוא מלבן שטחו: 20.89 סמ"ר
19. א) 14.11 ס"מ $BC =$ (ב) 35.33° ג) 684.8 סמ"ק
20. א) 1, 6, 18 (ב) נוספו 22 קוביות, הנפח 40

קצת על המעגל והיקפו (עמודים 376-373)

5. ג) 1.04 ס"מ (ד) ההיקף: 12.42 ס"מ, האלכסון: 4 ס"מ, ההיקף פי 3.11 מהאלכסון
6. א) בריבוע פי 2.83, במשושה פי 3, במתומן פי 3.06, במצולע בעל 12 צלעות פי 3.11
7. א) 6.28 יח"ב (ב) 12.57 יח"ב ג) 18.85 יח"ב
8. אורי: 227 סיבובים בנו: 531 סיבובים
9. א) 7.14 ס"מ (ב) 5.57 ס"מ ג) 6.09 ס"מ (ד) 14.47 ס"מ

שטח עיגול (עמודים 380-377)

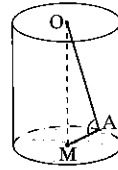
3. א) 3.14 סמ"ר (ב) 1.57 סמ"ר ג) 2.09 סמ"ר
4. ב) שטח העיגול: 28.27 סמ"ר, שטח הטבעת: 28.27 סמ"ר הם שווים בשטחם
5. השטחים: $1/4$ עיגול = 3.14 סמ"ר, $3/4$ עיגול = 9.42 סמ"ר, ריבוע פחות $1/4$ עיגול = 12.86 סמ"ר, עיגול = 12.57 סמ"ר, $1/2$ עיגול = 6.28 סמ"ר
6. א) (i) הגדול 314.16 סמ"ר, הקטנים 78.54 סמ"ר כל אחד (ii) הגדול 113.1 סמ"ר הקטנים 12.57 סמ"ר כל אחד (ב) אם יש שני מעגלים פנימיים השטח חצי משטח העיגול הגדול, עם יש שלושה מעגלים פנימיים השטח שליש משטח העיגול הגדול, אם יהיו ארבעה...
7. כמות הבצק זהה בכלם והיא 201.06 סמ"ר

גליל (עמודים 387-381)

2. א) מלבן (ב) עיגול (ג) מלבן (ד) משולש ישר זווית (ה) משולש ישר זווית (ו) משולש שווה שוקיים (ז) משולש ישר זווית (ח) משולש ישר זווית (ט) משולש שייש (י) משולש ישר זווית (יא) אליפסה
6. ד) כאשר הרדיוס 8 והגובה 5
7. ב) גובה: 7.15 ס"מ, נפח: 202.18 סמ"ק
8. ב) רדיוס הבסיס: 1.46 ס"מ, נפח הגליל: 26.64 סמ"ק
9. א) 250 סמ"ק (ב) 4 כוסות ג) 2500 סמ"ק (ד) 333.33 סמ"ק
10. א) 18472 סמ"ק שהם 18.47 ליטר (ב) 74 כוסות
11. שלושת הבקבוקים משמאל מכילים יותר "שמפני" (ב- 2 מ"ל)
12. א) 250 מ"ל (ב) 1500 מ"ל ג) כ- 33 כפיות (ד) 1.5 כוסות חלב, $2/5$ כוס יין (ה) 30 פעמים, 10 ימים
13. צריך 319 כלים, לכן 350 כלים יספיקו
14. א) המשולש שווה צלעות, שטח המלבן 30 סמ"ר (ב) המשולש ישר זווית ושווה שוקיים, שטח המלבן 42.43 סמ"ר
15. רדיוס: 4.33 ס"מ, גובה: 5 ס"מ, נפח: 294.52 סמ"ק
16. (i) הגליל: 402.12 סמ"ק, המנסרה: 512 סמ"ק (ii) הגליל: 785.4 סמ"ק, המנסרה: 500 סמ"ק
17. א) בקצב קבוע: C, F (ב) 1 - (c), 2 - (a), 3 - (b), 4 - (d), 5 - (e)

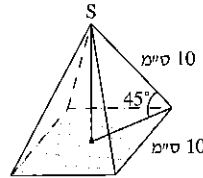
שטח מעטפת של גליל (עמודים 388-390)

3. א) 113.1 סמ"ר (ב) 125.66 סמ"ר (ג) 201.94 סמ"ר (ד) 266.63 סמ"ר
4. 62.8 ליטר (מבחוץ - רק מעטפת)
5. גובה: 4.07 מ', נפח: 320 מ"ק
6. א) (ב) גובה: 6.69 ס"מ, רדיוס: 7.43 ס"מ, שטח המעטפת: 312.44 סמ"ר

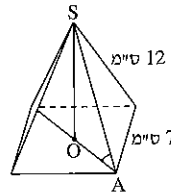


פירמידות (עמודים 391-399)

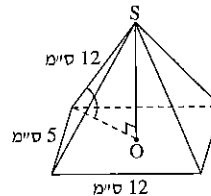
3. א) 4 קודקודים, 6 מקצועות (ב) 5 קודקודים, 8 מקצועות (ג) 7 קודקודים, 12 מקצועות (ד) $n+1$ קודקודים, $2n$ מקצועות
10. i) א) ישר זווית, שווה שוקיים (ב) ישר זווית (ג) שווה צלעות (ד) ישר זווית שווה שוקיים
- ii) כולם אותה פירמידה שגובהה 7.07 ס"מ
11. א) $OA = 2.83$ ס"מ (ב) 55.55°
12. א) (ב) 7.07 ס"מ



13. א) (ב) ההיטל: 4.95 ס"מ, הגובה: 10.93 ס"מ, $\alpha = 65.64^\circ$



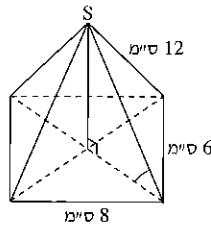
15. א) ריבוע (ב) משולש שווה שוקיים (ג) משולש שווה צלעות (ד) משולש שווה שוקיים
- ה) טרפז שווה שוקיים (ו) מקבילית או טרפז שווה שוקיים
16. א) $\alpha = 57.2^\circ$, $AO = 6.5$ ס"מ (ב)



17. א) חצי גליל (ב) חצי כדור (ג) מנסרה משולשת (ד) פרמידה משושה
18. א) 45° (ב)

ג) 65.38°

19. א) בנקודת פגישת האלכסונים (ב)

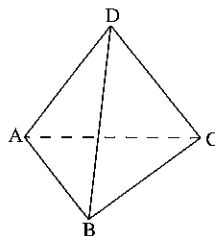
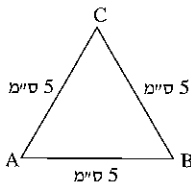


על נפח של פרמידה (עמודים 400-404)

2. א) שטח: 12 סמ"ר, אלכסון: 5 ס"מ (ב) גובה: 4.33 ס"מ (ג) 17.32 סמ"ר
3. א) שטח: 6.93 סמ"ר (ב) 11.55 סמ"ר
4. א) שוויון צלעות (ב) משולש אחד: 6.93 סמ"ר, הבסיס: 41.57 סמ"ר (ג) 69.28 סמ"ר
5. א) הגובה: 7.07 ס"מ, ההיטל: 7.07 ס"מ (ב) 10 ס"מ, 10 ס"מ (ג) 235.67 סמ"ר
6. א) 36 סמ"ר (ב) 12 סמ"ר
7. גובה: 7.35 ס"מ נפח: 88.18 סמ"ר
8. א) גובה: 6.93 ס"מ, שטח: 27.71 סמ"ר (ב) 92.38 סמ"ר
9. א) קחי זווית ושני שוקים חופפים, $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle OCB = \angle OBC = 30^\circ$, $OB = OC = 5.77$ ס"מ, $SC = 8.98$ ס"מ, הנפח: 99.31 סמ"ר
11. א) 43.3 סמ"ר (ג) ההיטל: 5.77 ס"מ, הזווית: 54.76° (ד) 117.9 סמ"ר
12. גודל הזווית: 53.13°

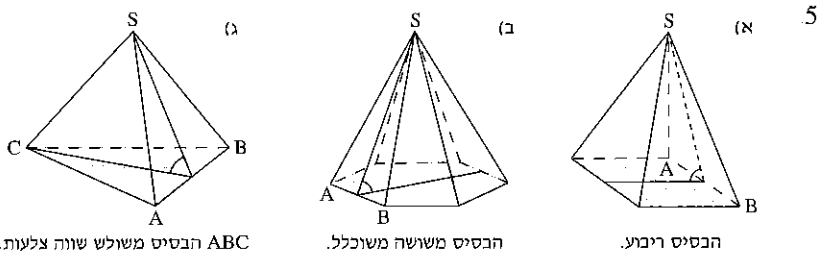
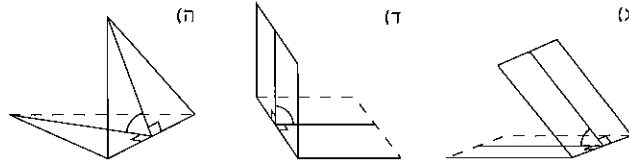
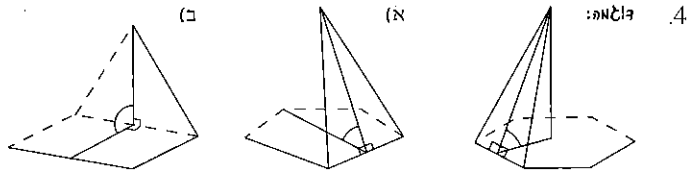
שטח פנים של פירמידה (עמודים 405-407)

1. א) משולשים שוויון צלעות (ב)



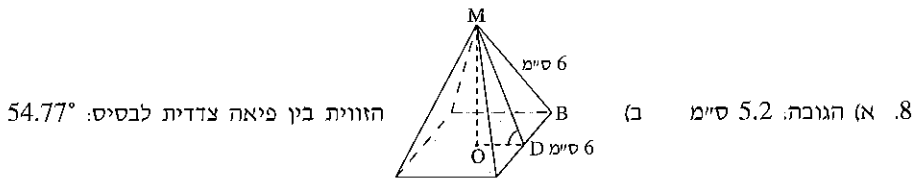
- השטח: 10.83 סמ"ר (ד) שטח הפנים: 43.3 סמ"ר
2. מנסרה משולשת: 133.86 סמ"ר פירמידה ריבועית: 43.71 סמ"ר
3. חוץ מ- (ו) ו- (ז) כולן פירמידות, שטח פנים: א) 340 סמ"ר (ב) 223.3 סמ"ר (ג) 386.24 סמ"ר (ד) 388.55 סמ"ר (ה) 173.21 סמ"ר
4. א) הבסיס: 49 סמ"ר, הפיאה: 12.25 סמ"ר, שטח הפנים: 98 סמ"ר (ב) הבסיס: 36 סמ"ר, הפיאה: 19.3, שטח הפנים: 113.2 סמ"ר (ג) הבסיס: 43.3 סמ"ר, הפיאה: 43.3 סמ"ר, שטח הפנים: 173.21 סמ"ר (ד) הבסיס: 144 סמ"ר, $OA = 8.49$ ס"מ, $SA = 16.97$ ס"מ, הפיאה: 95.25 סמ"ר, שטח הפנים: 524.99 סמ"ר

זווית בין מישורים (עמודים 408-412)



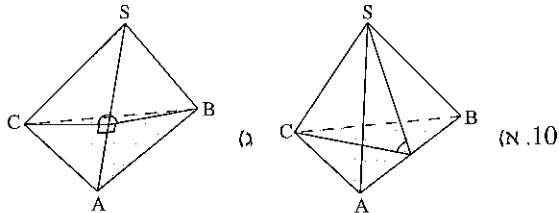
6 (א) הגובה 8.66 ס"מ, הנפח 288.67 סמ"ק (ב) הזווית: 50.77°

7. הגובה 10 ס"מ, שטח הפנים 300 סמ"ר

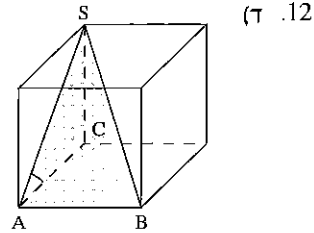
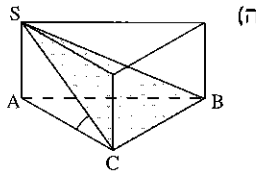
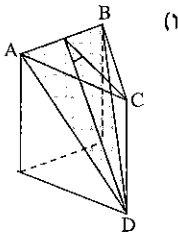


(ג) הזווית בין מקצוע לבסיס: 45°

9 $\alpha = 68.2$, $\beta = 73.3$



11. א) $CD = SD = 5.2$ ס"מ, הזווית 70.53° (ב) גם כן 70.53° (ג) הזווית בין המקצוע לבסיס: 54.74°



13. $\alpha = 45^\circ$

גופי סיבוב ובמיוחד חרוטים (עמודים 420-413)

3. 1 - (ו), 2 - (ה), 3 - (א), 4 - (ג), 5 - (ב), 6 - (ד), 7 - (ו)
8. הגובה: 12 ס"מ, כמות הגלידה: 314.16 סמ"ק
9. הגובה: 8.66 ס"מ, 5 ס"מ = r , נפח 226.72 סמ"ק
10. 4.23 ס"מ = r , הגובה: 9.06 ס"מ, הנפח: 169.76 סמ"ק
11. הגובה: 11.92 ס"מ, הנפח: 1248.26 סמ"ק
12. 18.65 ס"מ = r , הנפח: 14569.56 סמ"ק
13. (ב) הזווית הולכת וקטנה (ד) כאשר המישור SAB מאונך לבסיס החרוט ואז $\alpha = 90^\circ$
14. (א) חרוט ד (ב) נפח החרוט הגדול 261.80 סמ"ק, כמות הנוזל 56.55 סמ"ק
(א) 16.76 סמ"ק (ב) 37.72 סמ"ק (ג) 56.55 סמ"ק (ד) 134.04 סמ"ק
15. (א) שני חרוטים זהים עם בסיס משותף (ב) זה שמתקבל מסיבוב סביב DB
(ג) סיבוב סביב AC הנפח: 2035.75 סמ"ק, מסיבוב סביב DB הנפח: 2714.34 סמ"ק
16. (א) שני חרוטים זהים עם בסיס משותף (ב) חרוט (ג) שני חרוטים זהים עם בסיס משותף
(ד) שני חרוטים שונים בעלי בסיס משותף (ה) גליל (ו) גליל (ז) שני חרוטים זהים עם בסיס משותף
(ח) חרוט שהוציאו ממנו חרוט פנימי (ט) חרוט שהוציאו ממנו חרוט פנימי (י) שני חרוטים בעלי בסיס משותף (יא) חרוט שהוציאו ממנו חרוט פנימי (יב) כדור (יג) כדור (יד) גליל (טו) 2 חרוטים בעלי בסיס משותף (טז) חרוט קטום (יז) חרוט מעל גליל בעלי בסיס משותף
17. (א) שני חרוטים זהים בעלי בסיס משותף (ב) האלכסון: 14.14 ס"מ, הנפח: 740.15 סמ"ק
(ג) יתקבל גליל בנפח 3141.59 סמ"ק
18. (א) הגליל השמאלי בעל נפח גדול יותר (ב) גובה כ"א 4 ס"מ, נפח הגליל הימני: 314.16 סמ"ק, נפח הגליל השמאלי: 1256.64 סמ"ק

שטח מעטפת של חרוט (עמודים 423-421)

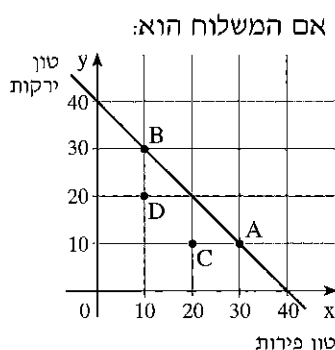
4. א) $1/2$ (ב) 39.27 סמ"ר
5. א) $1/4, 3/4, 3/5$ (ב) 28.27 סמ"ר, 84.82 סמ"ר, 67.86 סמ"ר
6. א) $1/3, 51.31$ סמ"ק (ב) $2/3, 169.65$ סמ"ר

פרק ה: תכנון לינארי

נגיעה קלה בכלכלה – מבוא

פליזאר, המסבירה מאפ' לוסק פולסא גכנון לינארי.

1.  מטוסי תובלה מובילים ירקות ופירות. מנהל חברת "שחף" נתן למנהל הייצור דף ובו הגרף הבא. השטח הצבוע מתאר את כל המשלוחים האפשריים. עזרו לו לפענח.



- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה C?
- לפי הנקודה D?

- ב) סמנו נקודות המתארות הובלה של: 30 טון פירות ו- 5 טון ירקות.
20 טון פירות ו- 20 טון ירקות.
20 טון פירות, ללא ירקות.

- ג) האם אפשר לשלוח 30 טון פירות ו- 20 טון ירקות? נמקו.
ד) היכן נמצאות כל הנקודות, המתארות משלוח של ירקות בלבד?
ה) היכן נמצאות כל הנקודות, המתארות משלוח של פירות בלבד?
ו) אם המשלוח הוא על-פי נקודה C, האם, לדעתכם, יש עוד מקום בטיסה?
ז) רשמו שיעורים של שלוש נקודות, המתארות מטוס מלא.
ח) היכן, בתחום המשוורטט, ימצאו המשלוחים הנ"ל? נמקו.
ט) האם ניתן לשלוח 50 טון של פירות וירקות ביחד?

המשך ←

ידוע שהרווח ממשלוח טון אחד של פירות הוא 700 ש"ח, מטון אחד של ירקות 500 ש"ח.

י) מה יהיה הרווח:

- לפי הנקודה A?

- לפי הנקודה B?

- לפי הנקודה C?

- לפי הנקודה D?

יא) באיזה מקרה מהמקרים שחישבתם, הרווח של החברה יהיה הגדול ביותר?

יב) סמנו במערכת הצירים נקודה, המייצגת רווח גדול יותר מאלה שמצאתם עד כה.

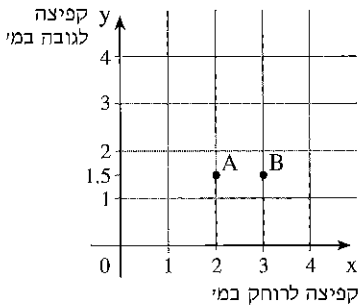
בהמשך פרק ג' נדון אודות הפיתוח של המערכת, ונראה כי הפיתוח של המערכת הוא פרויקט בעל סיכונים גבוהים.

יג) נסו למצוא בגרף נקודה המייצגת את הרווח הגדול ביותר.

בין מקבילים

בסעיף זה גאומטריה אנליטית של אי שוויון קווי, בא פה "עבול" מקביל לאחד הצירים.

1. ביום ספורט נרשמו תוצאות של תחרויות בקפיצה לרוחק ולגובה.



המורה לספורט תיאר את התוצאות באמצעות **נקודות**, במערכת הצירים.

אחת הטיטות שלו התגלגלה לידי התלמידים.

ההישגים של דן מיוצגים על-ידי הנקודה A ושל שירה על-ידי B.

א) מה ההישגים של דן ושירה בכל אחת מהקפיצות?

ב) רשמו וסמנו נקודות נוספות, המתאימות לתלמידים שקפצו **לגובה** כמו דן ושירה.

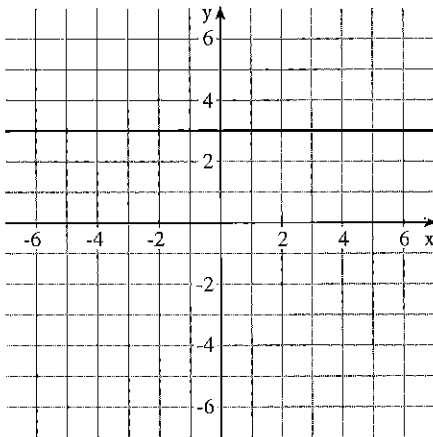
ג) מהי **משוואת הישר**, העובר דרך הנקודות A ו-B?

ד) אילו תוצאות מיוצגות על-ידי הנקודות שעל הישר AB?

2. א) רשמו את משוואת הישר המשוורט.

ב) סמנו ורשמו שיעורים של ארבע נקודות, ששיעור y שלהן גדול מ-3.

ג) צבעו את כל האזור המתאים לנקודות, ששיעור y שלהן גדול מ-3.

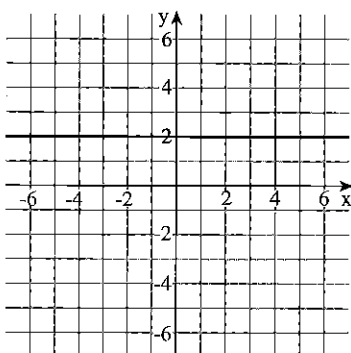


התבנית המתאימה לאזור הצבוע, כולל הישר, היא $y \geq 3$



3. (א) מהי משוואת הישר בגבול האזור הצבוע?

(ב) נסו לאפיין, בעזרת תבנית, את האזור הצבוע.

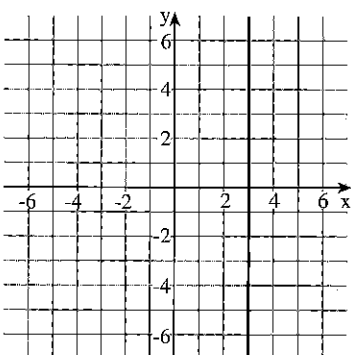


כשתעסקו ב"אזור צבוע", הכוונה לאזור כולל הישר שבגבולו, ולכן סימני האי-שוויון המתאימים הם $\leq$ או $\geq$.



4. (א) מהי משוואת הישר בגבול האזור הצבוע?

(ב) רשמו תבנית מתאימה לאזור הצבוע.



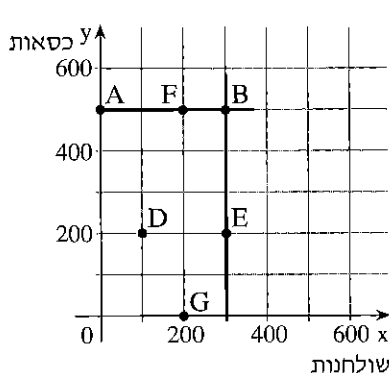
5. (א) סמנו במערכת צירים נקודות, ששיעור x שלהן 5, ורשמו את משוואת הישר העובר דרכן.

(ב) צבעו את האזור בו נמצאות כל הנקודות, ששיעור x שלהן קטן מ-5. רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.



6.

יצרן מייצר שולחנות וכיסאות. אפשרויות הייצור השבועי מתוארות בשרטוט.



(א) כמה שולחנות וכמה כיסאות מייצרים,

אם הייצור השבועי הוא:

- לפי הנקודה A?
- לפי הנקודה B?
- לפי הנקודה G?
- לפי הנקודה D?
- לפי הנקודה E?
- לפי הנקודה F?

(ב) סמנו נקודה המתארת ייצור של 100 שולחנות בלבד.

(ג) היכן נמצאות כל הנקודות, המתארות ייצור של שולחנות בלבד?

(ד) היכן נמצאות כל הנקודות, המתארות ייצור של כיסאות בלבד?

(ה) ידוע שהרווח ממכירת שולחן הוא 50 ש"ח, וממכירת כיסא 30 ש"ח.

מהו הרווח ממכירה של:

- 200 שולחנות ו- 300 כיסאות?
- 150 שולחנות ו- 100 כיסאות?
- 300 שולחנות בלבד?
- 200 כיסאות בלבד?

(ו) האם ניתן לייצר רק כיסאות ולהרויח לפחות 17,000 ש"ח? נמקו.

(ז) כמה שולחנות וכמה כיסאות אפשר לייצר, לפי המגבלות, ולקבל רווח מכסימלי?

(ח) מהי משוואת הישר AB?

(ט) רשמו אי-שוויון מתאים לנקודות מתחת לישר AB.

(י) רשמו אי-שוויון מתאים לנקודות משמאל לישר BE.

(יא) נסו להסביר מה מתאר האזור הצבוע.

7.

(א) שרטטו ישר מתאים לנקודות, ששיעור x שלהן שווה ל- 2.

(ב) צבעו את האזור המכיל את הנקודות, ששיעור x שלהן גדול מ- 2.

(ג) רשמו אי-שוויון מתאים.

בסעיף זה למדתם לתאר אי-שוויונים בצורות שונות.

דוגמאות:

אנאסוף הנקודות ששייכות ל- x

שנמצא קטן או שווה ל-3,

ממאיים פאי-שוויון $x \leq 3$,

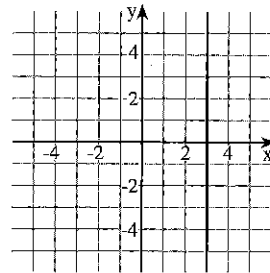
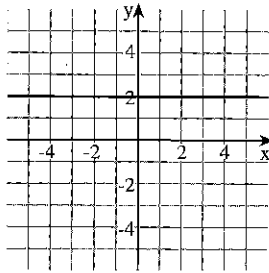
אנאסוף:

אנאסוף הנקודות ששייכות ל- y

שנמצא גדול או שווה ל-2,

ממאיים פאי-שוויון $y \geq 2$,

אנאסוף:



כמו כן ראייתם, שכדי לשרטט גרף של אי-שוויון, שהישר בגבולו מקביל לאחד הצירים, יש לשרטט תחילה את הישר.

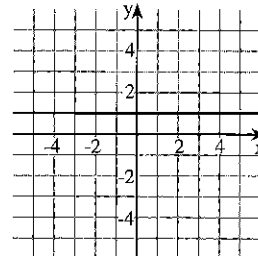
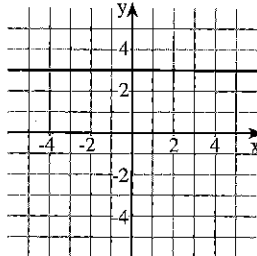
תרגילים

8. רשמו את משוואת הישר המודגש.

רשמו את האי-שוויון המתאים לאזור הצבוע.

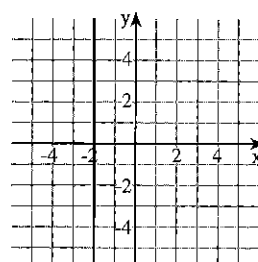
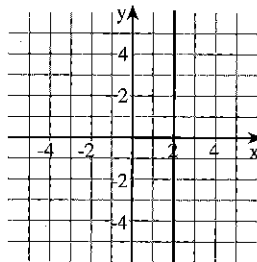
(א)

(ב)



(ד)

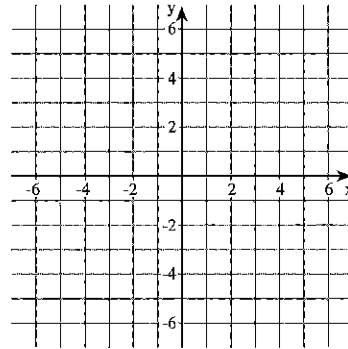
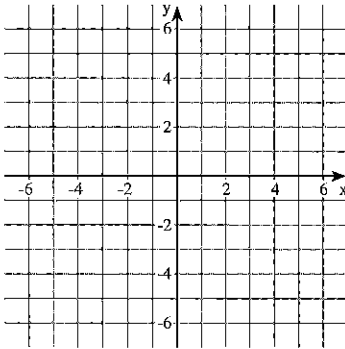
(ג)



9. שרטטו גרפים מתאימים.

א) $x \geq 5$

ב) כל הנקודות, ששיעור x שלהן גדול או שווה ל-1 ($x \geq -1$).



המשיכו לשרטט במחברתכם (במערכת צירים נפרדת לכל גרף).

ג) כל הנקודות, ששיעור y שלהן $x \leq 0$ (ד)

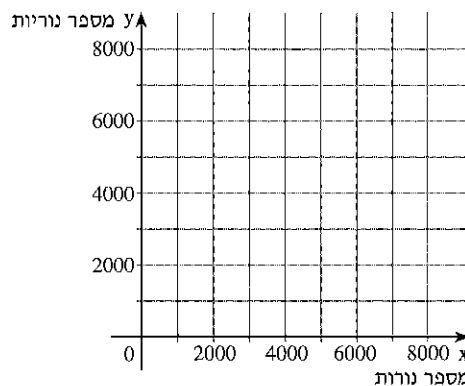
גדול או שווה ל-5

ה) $y \leq 0$ כל הנקודות, ששיעור y שלהן גדול

או שווה ל-1-

10. במפעל מייצרים נורות ונוריות.

א) סמנו נקודות, המתאימות לייצור של 5000 נורות. העבירו את הישר המתאים ורשמו את משוואתו.



— צבעו אזור מתאים לייצור של לא יותר מ- 5000 נורות.

— רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.

המשך ←

- (ב) – סמנו נקודות המתאימות לייצור של 7000 נוריות, העבירו את הישר המתאים ורשמו את משוואתו.
- צבעו אזור מתאים לייצור של לא יותר מ- 7000 נוריות.
- רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע.
- (ג) מגבלות הייצור מתוארות בתחום הצבוע פעמיים. רשמו אותן.
- (ד) היכן נמצאות הנקודות המתארות ייצור של נוריות בלבד?
- (ה) ידוע שהמפעל מרויח 0.30 ש"ח מנורה ו- 0.20 ש"ח מנורית. מה יהיה רווח המפעל:
- ממכירה של 2000 נורות ו- 1000 נוריות?
- ממכירה של 5000 נורות ללא נוריות?
- ממכירה של 7000 נורות ללא נורות?
- (ו) כמה נורות וכמה נוריות אפשר לייצר, כדי להגיע לרווח מכסימלי?

11. מנהל חברת "שחף" עסוק מאוד. מחוסר זמן נתן למנהל הייצור שלו את ההוראות הכתובות הבאות, כדי שישרטט גרף.

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

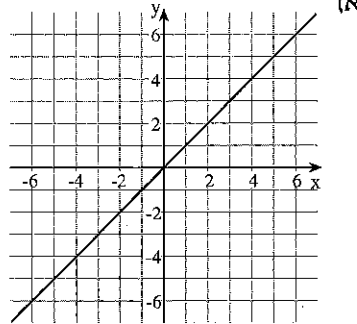
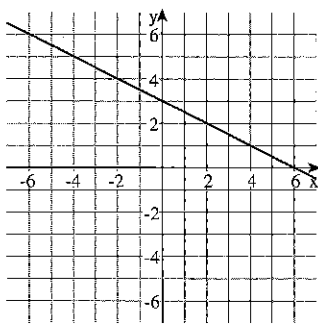
- x - משקל פרחים בטונות.
- y - משקל פירות בטונות.
- (א) שרטטו גרף של שני האי-שוויונים, באותה מערכת צירים, ברביע הראשון. (שרטטו תחילה את הישרים).
- (ב) מה מייצגות הנקודות $A(2, 4)$, $B(5, 3)$?
- (ג) סמנו במערכת הצירים נקודות המתארות משלוח של:
- 3 טון פרחים ו- 2 טון פירות
- 5 טון פרחים ו- 2 טון פירות.
- 2 טון פרחים ו- 3 טון פירות.
- (ד) השטח הצבוע בגרף ששרטטתם מתאר את אפשרויות הייצור השונות. רשמו שלוש דוגמאות למשלוחים אפשריים.

הפרד ומשול" במישור

לד כה שרטטגם גרף של אי-שוויון, כשהישר המגדיל מקביל לאחד הצירים. לגב גאמדו
אשרטט גרפים של אי-שוויונים נוספים. אלם כך נחזור על שרטוט ישרים.

1. (F) (א) שרטטו במערכת צירים את הישר שמשוואתו $y = x + 2$.
(ב) — היכן, לדעתכם, יימצאו הנקודות המקיימות $y \geq x + 2$?
— צבעו אזור מתאים.
— סמנו שלוש נקודות באזור הזה, רשמו את שיעוריהן.
— הציבו ובידקו אם שיעוריהן מקיימים את האי-שוויון הנ"ל.
— סמנו שתי נקודות באזור שאינו צבוע, ובידקו אם שיעורי הנקודות אינם מקיימים את האי-שוויון.

2. (F) (א) רשמו את משוואת הישר המודגש.
— רשמו אי-שוויון המתאים לאזור הצבוע.



3. (F) (א) שרטטו את הישר שמשוואתו: $y = \frac{1}{2}x + 3$.
(ב) צבעו את חלק המישור, המתאר את האי-שוויון $y \geq \frac{1}{2}x + 3$.
(ג) בחרו שתי נקודות באזור הצבוע, ובידקו על-ידי הצבה אם הן מקיימות את האי-שוויון.
(ד) רשמו אי-שוויון, המתאים לאזור שאינו צבוע.

ראינו שהישר מפריד בין שני "חצאי מישור", שלכל אחד מהם מתאים אי-שוויון מהצורה $y \geq$ או $y \leq$. (האזורים כוללים את הישר המפריד.)

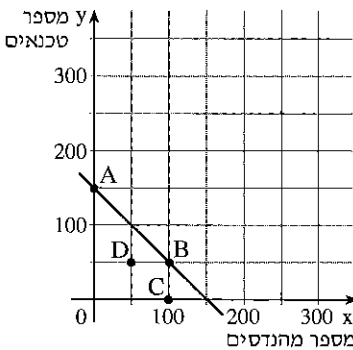


תרגילים

4. (א) שרטטו את הישר שמשוואתו $y = -3x + 2$.
 צבעו את האזור, המתאים לאי-שוויון $y \leq -3x + 2$.
 (ב) שרטטו את הישר שמשוואתו $y = 2x - 1$.
 צבעו את האזור המתאים לאי-שוויון $y \geq 2x - 1$.
5. שרטטו במערכת צירים נפרדת גרף מתאים לכל אי-שוויון. (שרטטו תחילה את הישר שבגבול האזור).

(א) $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$ (ב) $y \leq \frac{1}{2}x + 3$ (ג) $x \leq 5$

6. מקימים מפעל, שבו יעבדו מהנדסים וטכנאים.



האפשרויות השונות מתוארות בשרטוט.

(א) כמה מהנדסים, לכל היותר, יוכלו לעבוד במפעל זה?

(ב) רשמו את משוואת הישר AB.

(ג) רשמו אי-שוויונים מתאימים לבעיה.

(ד) מה מייצגת כל אחת מהנקודות B, A, C ו-D?

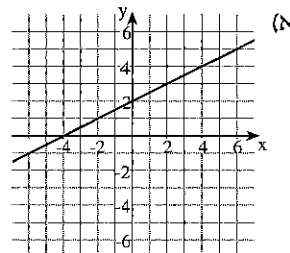
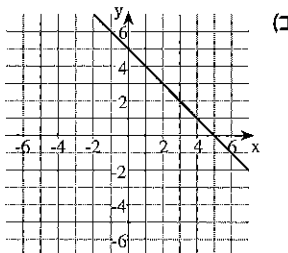
(ה) אילו מהנקודות הנ"ל אינן מאפשרות תוספת עובדים?

(ו) מהו המספר הגדול ביותר של עובדים שאפשר להעסיק?

(ז) האם הנקודה (52.5, 70) נמצאת בתחום הצבוע?

(ח) האם כל הנקודות בתחום הצבוע אכן מתאימות לאפשרויות ההעסקה? נמקו!

7. רשמו את משוואת הישר המודגש ואי-שוויון, המתאים לאזור הצבוע.



שרטוט ישרים

בסעיף זה נמצא על שרטוט ישרים פרמטרים בצורה $ax + by = c$.

1. כדי לשרטט ישר שמשוואתו $2x - 3y = 6$, אפשר לבחור שתי נקודות (ושלישית לביקורת) הנמצאות על הישר, לסמן ולהעביר את הישר. הסבירו מדוע. השלימו את הטבלה ושרטטו.

x	0		-3
y		0	

2. שרטטו את הישרים שמשוואותיהם נתונות (אפשר באותה מערכת צירים).

$$\frac{x-y}{2} = 3$$

$$x - 2y = 1$$

$$2x - y = 5$$

x	-1	0	1
y			

x	0		-1
y		0	

x	-1	0	1
y			

כפי שראיתם, נוח לבחור נקודות על הצירים.



תרגילים

3. שרטטו את הישרים.

$$\frac{y-x}{2} = 0 \quad (\text{ב})$$

$$2x - 3y = 6 \quad (\text{ד})$$

$$y - 3x = 5 \quad (\text{א})$$

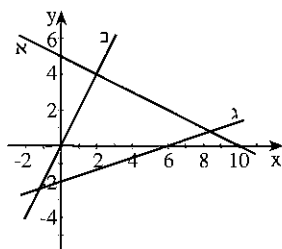
$$2y + x = 10 \quad (\text{ג})$$

4. התאימו לכל ישר את משוואתו.

$$x + 2y = 10 \quad (\text{I})$$

$$2x - y = 0 \quad (\text{II})$$

$$x - 3y = 6 \quad (\text{III})$$



פעילות מחשב

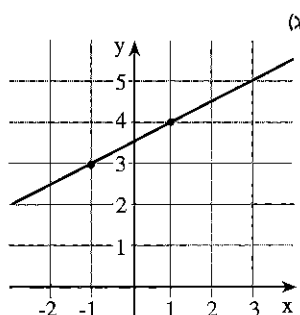
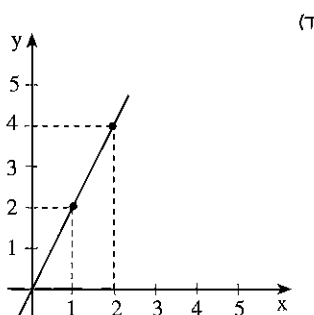
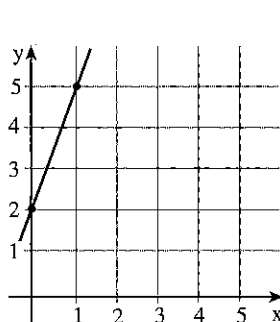
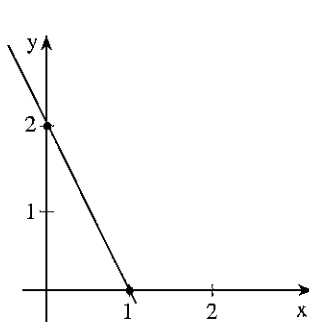
פתיאל צא היא חברה על הקו הישר, כשהישרים רשומים בהצגה כאלו: $2x + 3y = 10$. פתיאל צא ארבעה, על-פי האנאמטיק x א $Derive$, אמצא א הנספח שפתיאל צא.

- א) שרטטו ישר המתאים למשוואה $2x + y = 10$.

ב) מצאו בגרף את נקודת החיתוך של הישר עם ציר y .
(לשם כך שנו סקלות).

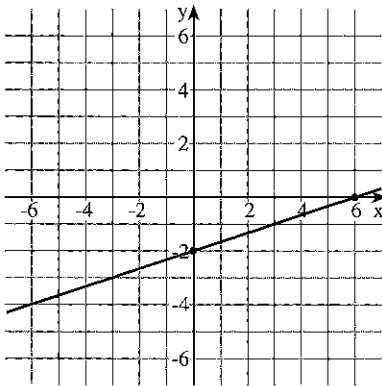
ג) רשמו (בדף ובמחשב) משוואת ישר מקביל לישר ששרטטתם. בידקו אם הישרים אכן מקבילים. (אם לא, נסו שנית).
- בכל סעיף רשמו (בדף ובמחשב) משוואה מתאימה לגרף.

בידקו אם התקבל השרטוט המבוקש, ואם הנקודות המודגשות נמצאות עליו.



3. שרטטו במחשב את הישר שמשוואתו $x + 3y = 12$.
 סמנו את הנקודות $(5.5, 2.2)$, $(4.8, 2.4)$ במערכת הצירים. שערו לגבי כל נקודה, אם היא נמצאת על הישר או לא, ורשמו את השערתכם. הציבו ובידקו. נקו את המסך.
4. (א) שרטטו, במחשב, משולש שכל קודקודיו על הצירים.
 (ב) שרטטו מלבן, שצלעותיו מקבילות לצירים.
 (ג) נסו לשרטט ריבוע, שאלכסונו על הצירים.
 (שנו תחילה סקלות, כך שיהיה אותו גודל יחידה על שני הצירים).

עוד על הפרדה במישור בסעיף זה גאומטריזציה חלק מישור על פי שיטת נקודות.



1. נתון ישר שמשוואתו $x - 3y = 6$.
 הציבו את שיעורי הנקודה $(5, -1)$
 בתבנית $x - 3y$.
 אם היא מקיימת $x - 3y > 6$, סמנו
 אותה במערכת הצירים בצבע כלשהו.
 אם היא מקיימת $x - 3y < 6$, סמנו
 אותה בצבע אחר.

חזרו על הפעולה לגבי כל אחת מהנקודות הבאות.



$(6, 1)$	$(5, -1)$	$(0, 0)$
$(3, 2)$	$(\frac{1}{2}, -2)$	$(-2, -1)$
$(-5, -4)$	$(3, -2)$	$(0, -4)$

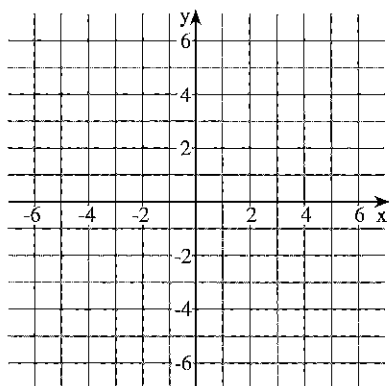
אם סימנתם נכון, קיבלתם, כפי שראינו בסעיף הקודם, שהישר מפריד בין שתי הקבוצות של הנקודות:
 אלה שמתאימות לאי-שוויון $x - 3y > 6$,
 ואלה שמתאימות לאי-שוויון $x - 3y < 6$,
 לכן מספיק לבחור נקודה אחת, ולבדוק בעזרתה איזה איזור מתאים לאי-שוויון.



כשנתון האי-שוויון $2x - 3y \geq 6$, לא נוח לעבור לצורה $y \geq$ או $y \leq$, לכן נשרטט את הישר המפריד על-פי נקודות, ואחר כך נקבע את האזור המתאים על-ידי בדיקת נקודה.

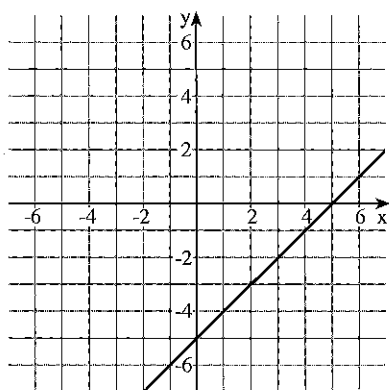
2.  א) שרטטו תחילה את הישר $2x - 3y = 6$.

x			
y			



ב) שערו איזהו האזור המתאים לאי-שוויון $2x - 3y \geq 6$. בחרו נקודה באזור זה, הציבו שיעוריה, ובידקו אם היא מקיימת את האי-שוויון $2x - 3y \geq 6$. אם כן, צבעו את האזור, אם לא, צבעו את ה"אזור השני".

3.  נתון ישר שמשוואתו: $x - y = 5$



(ראו שרטוט).
א) סמנו נקודה כלשהי מעל הישר ורשמו את שיעוריה.
ב) הציבו ובידקו איזה אי-שוויון מתאים לאזור שמעל הישר.
ג) הנקודות שמעל לישר $(5, 1)$, $(3, 0)$ נמצאות באזור. הציבו ובידקו אם שיעוריהן מקיימים את האי-שוויון שרשמתם.

4.  שרטטו במערכת צירים את הישר $2x - y = 3$.

בחרו נקודה באחד משני האזורים, ובידקו אם היא מקיימת את האי-שוויון $2x - y \geq 3$.
צבעו את האזור המתאים לאי-שוויון $2x - y \geq 3$.
לביקורת: בחרו נקודה נוספת באזור הצבוע, ובידקו אם שיעוריה מקיימים את האי-שוויון.

5.  רשמו את משוואת הישר "המפריד" בין האי-שוויונים:

$$y - x \geq 3$$

$$y - x \leq 3$$

6. רשמו לכל אי שוויון את הישר "המפריד".

(א) $2x + y \leq 5$ (ב) $2y - x \geq 5$

7. שרטטו גרפים מתאימים לאי-שוויונים הבאים.

(נשרטטו תחילה את הישר המפריד, בחרו נקודה באחד האזורים, בידקו איזה אי-שוויון היא מקיימת, ואחר כך צבעו את האזור המתאים לאי-שוויון הנתון).

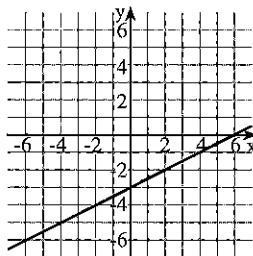
(א) $x + 2y \geq 2$ (ב) $y \geq -1$

(ג) $2x - y \leq 0$ (ד) $2x - 5y \leq 10$

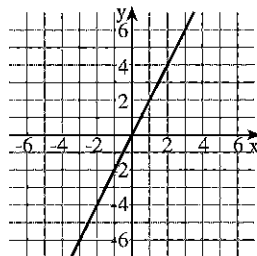
תרגילים

8. סמנו נקודה באחד משני האזורים, רשמו את שיעוריה, ובידקו אם היא מקיימת את האי-שוויון. אחר כך צבעו את האזור המתאים לאי-שוויון.

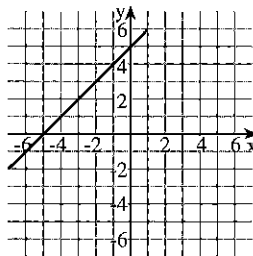
(ב) $x - 2y \leq 6$



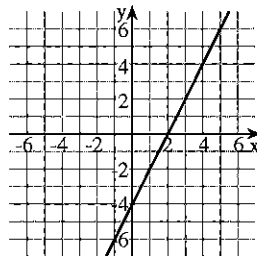
(א) $y \geq 2x$



(ד) $y - x \leq 5$



(ג) $2x - y \leq 4$



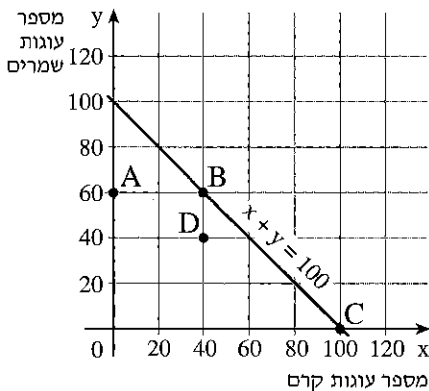
9. שרטטו את הישר המפריד, וצבעו את האזור המתאים לאי-שוויון.

(א) $x + y \leq 5$ (ב) $x + 2y \geq -6$

(ג) $2x + 3y \geq 12$ (ד) $y \leq \frac{1}{2}x + 3$

"טובים השניים מן האחד"

בסעיף הקודם ראינו כיצד לאתר על-פי אי-שוויון בודד. בסעיף זה נלמד לשרטט על-מסגרת אשף אי-שוויונים.



1. קונדיטוריה מייצרת עוגות שמרים ועוגות קרם, בסך-הכל לא יותר מ-100 עוגות ביום. מספר עוגות השמרים אינו עולה על 60 (ראה שרטוט).
 (א) רשמו מה מתארת כל אחת מהנקודות A, B ו-C.
 (ב) רשמו אי-שוויונים מתאימים לבעיה.

- (ג) ידוע שהרווח מעוגת קרם הוא 10 ש"ח, והרווח מעוגת שמרים 5 ש"ח. מהו הרווח על-פי הנקודות A, B ו-C?
 היכן, לדעתכם, יהיה הרווח גדול יותר, בנקודה B או D?

2. (א) שרטטו את הישר שמשוואתו $y = 2x + 5$.
 (ב) צבעו את האזור המתאים לאי-שוויון $y \leq 2x + 5$.
 (ג) שרטטו באותה מערכת צירים גרף מתאים לאי-שוויון $y \leq -x + 5$ (שרטטו תחילה את הישר המפריד).
 (ד) רשמו שיעורי נקודה, הנמצאת באזור המשותף לשני האי-שוויונים.
 (ה) הדגישו את האזור המשותף.

3. (א) שרטטו את הגרף של האי-שוויון $y \leq -2x + 4$ (זכרו לשרטט תחילה את הישר המפריד).
 (ב) שרטטו באופן דומה, באותה מערכת צירים, גרף של האי-שוויון $y \leq x + 1$.
 (ג) הדגישו את האזור המשותף.
 (ד) מצאו נקודה באזור המשותף. רשמו את שיעוריה, ובידקו אם היא מקיימת את שני האי-שוויונים.

4. 

במערכת הצירים משורטטים הישרים $y = -x + 5$, $y = x + 3$.

(א) התאימו כל ישר למשוואתו.

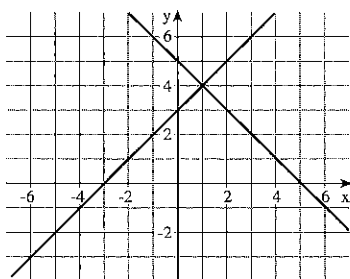
(ב) צבעו את הגרפים המתאימים:

לאי-שוויונים:

$$y \geq -x + 5$$

$$y \leq x + 3$$

(ג) הדגישו את האזור המשותף.



5. 

(א) התאימו כל ישר למשוואתו.

(I) $y = x + 2$

(II) $2x + y = 5$

(ב) רשמו אי-שוויון מתאים לשטח הצבוע

ש"מתחת" ל-I.

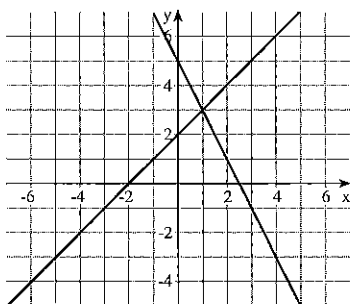
רשמו אי-שוויון מתאים לאזור הצבוע

ש"מתחת" ל-II.

(ג) מצאו שלוש נקודות באזור המשותף,

הציבו ובידקו אם שיעוריהן מקיימים

את האי-שוויונים שרשמתם.



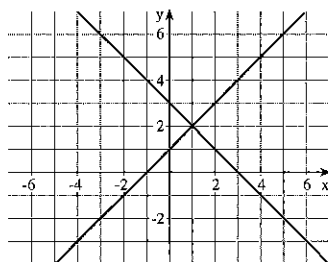
כדי לשרטט גרף של מערכת אי-שוויונים, יש לשרטט תחילה את הגרף של

כל אי-שוויון בנפרד. האזור המשותף של גרפים אלה הוא גרף המערכת.

אבלמה: השטח הצבוע בשרטוט שלפניכם מכיל את כל הנקודות ש"מתחת" לשני

הישרים $y = -x + 3$, $y = x + 1$, ולכן מהפוף פגרון למערכת האי-שוויונים:

$$\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$$



6.  א) סמנו במערכת צירים את הנקודות:

$C(0, 6)$, $B(2, 5)$, $A(-1, 3)$

שרטטו ישר, כך ששלוש הנקודות יהיו **מעליו**, ורשמו את משוואתו.

שרטטו ישר נוסף, כך ששלוש הנקודות יהיו מתחתיו, ורשמו את משוואתו.

ב) צבעו אזור הכלוא בין הישרים, באופן שיכיל את כל הנקודות הללו.

ג) רשמו מערכת אי-שוויונים, המתאימה לשטח הצבוע שנוצר.

7.  א) התאימו כל ישר למשוואה.

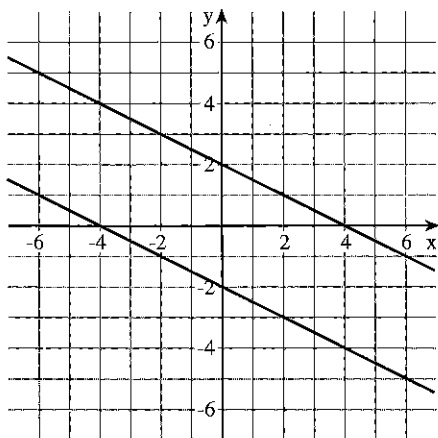
$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (I)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2 \quad (II)$$

ב) שרטטו גרף מתאים למערכת האי-שוויונים.

$$y \leq -\frac{1}{2}x + 2$$

$$y \geq -\frac{1}{2}x - 2$$



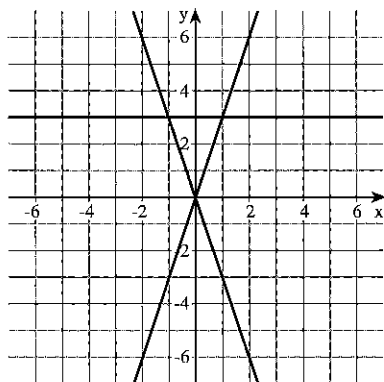
8.  א) רשמו את משוואות הישרים שבשרטטו.

ב) רשמו מערכת אי-שוויונים, שפתרונה

הוא השטח הצבוע שבשרטטו.

ג) רשמו את שיעורי הקודקודים של המשולש שהתקבל.

ד) רשמו שיעוריהן של שתי נקודות בתוך המשולש.



ב) צבעו את האזור המשותף לאי-שוויונים:

$$\begin{cases} y \leq x + 3 \\ y \leq -2x + 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

9. א) שרטטו את הישרים

$$y = x + 3$$

$$y = -2x + 3$$

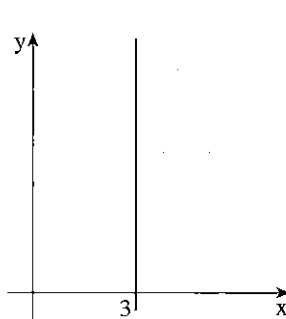
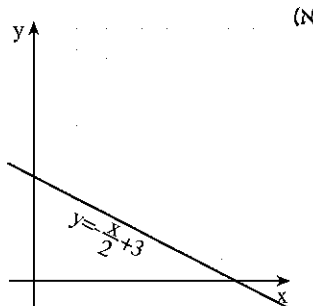
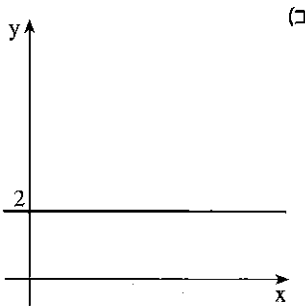
$$y = 1$$

10. פעילות מחשב – שרטוט אי-שוויונים

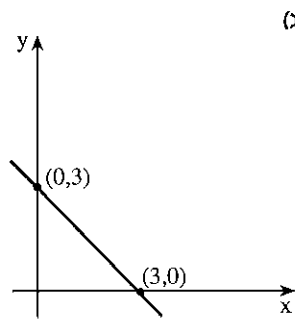
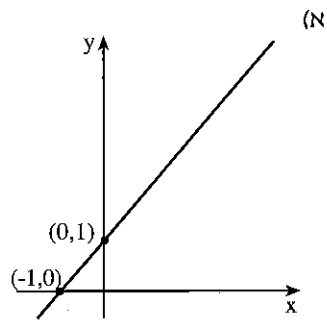
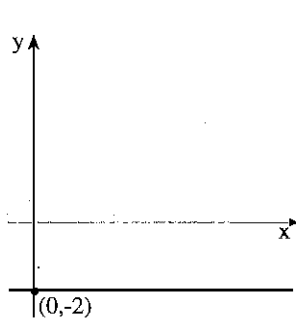
פעילות זו עוסקת בגיאור גרפי של אי-שוויונים, וכן של מערכות אי-שוויונים, ומחזקת את הידע של תלמידים בנושא. הפעילות מתבצעת בקבוצות של שלושה תלמידים, שיתאמו ויסייעו זה לזה. הפעילות מתבצעת במשך 15-20 דקות. הפעילות מתבצעת על פי מודל ה-*Derive* או במחשב בסיוע הספר.

1. שרטטו את האי-שוויון $2x + y \geq 4$.

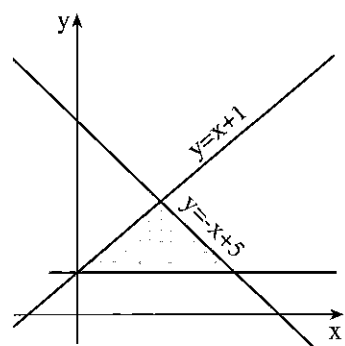
2. רשמו על הדף ובמחשב אי-שוויון מתאים לשרטוט. בידקו אם אתם מקבלים על מסך המחשב אותם שרטוטים.



3. רשמו בדף ובמחשב את משוואת הישר, ואת האי-שוויון המתאים לשרטוט. בידקו אם התקבל על מסך המחשב אותו שרטוט.

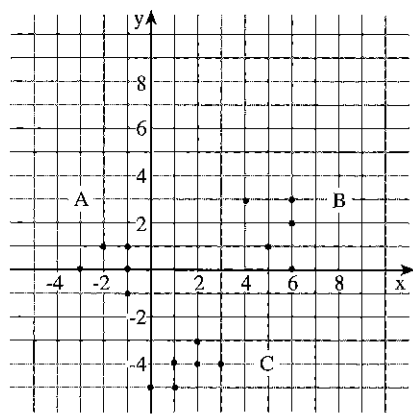


4. (א) שרטטו על מסך המחשב גרפים, כך שפנים המשולש יהיה צבוע שלוש פעמים.



- (ב) מצאו נקודה, המקיימת את שלושת האי-שוויונים וסמנו אותה.
- (ג) סמנו נקודה המקיימת שני אי-שוויונים בלבד (בידקו על-ידי הצבה).
- (ד) סמנו נקודה המקיימת אי-שוויון אחד בלבד. (בידקו על-ידי הצבה).

5. (א) סמנו במערכת צירים את הנקודות $(0, 4)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$.
 (ב) שרטטו גרף של אי-שוויון אחד, כך ששלוש הנקודות יהיו באזור אזור צבוע.
 (ג) שרטטו גרף של אי-שוויון אחר, כך שאחת הנקודות תהיה על הישר, ושתי האחרות באזור הצבוע.
 (ד) שרטטו גרף של אי-שוויון נוסף, כך שאחת הנקודות תהיה על הישר, אחת באזור הצבוע שלוש פעמים, ואחת מחוצה לו.
 רשמו בדף את האי-שוויונים ששרטטתם.
6. במערכת הצירים ישנם שלושה מקבצי נקודות: C, B, A .
 (א) סמנו את הנקודות המתאימות למקבצים C, B, A במחשב.
 (בידקו אם התקבל השרטוט המבוקש).

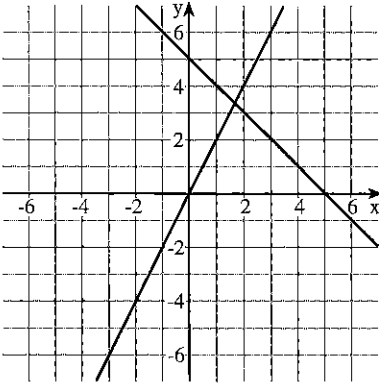


- (ב) שרטטו גרף של אי-שוויון אחד, כך שמקבצים A ו- B יהיו באזור הצבוע, ו- C באזור השני.
 (ג) בידקו אם התקבל על המסך מה שנתבקשתם. (אם לא, נסו שנית).
 (ד) לאחר מחיקת האי-שוויון, שרטטו גרף של שני אי-שוויונים, כך שמקבץ הנקודות C יהיה באזור הצבוע פעמיים, מקבצי A ו- B באזורים אחרים.
 (ה) שרטטו גרף של שני אי-שוויונים, כך שכל מקבצי הנקודות יהיו באזור הלא צבוע.

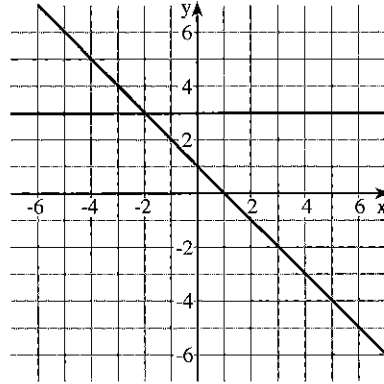
תרגילים

11. צבעו במערכת הצירים את האזורים המתאימים, כך שיתארו את מערכות האי-שוויונים

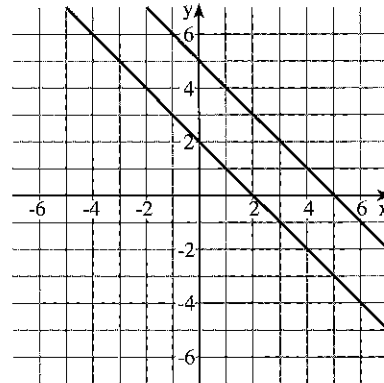
(ב)
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y \leq -x + 5 \end{cases}$$



(א)
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq -x + 1 \end{cases}$$



(ג)
$$\begin{cases} y \leq -x + 5 \\ y \geq -x + 2 \end{cases}$$



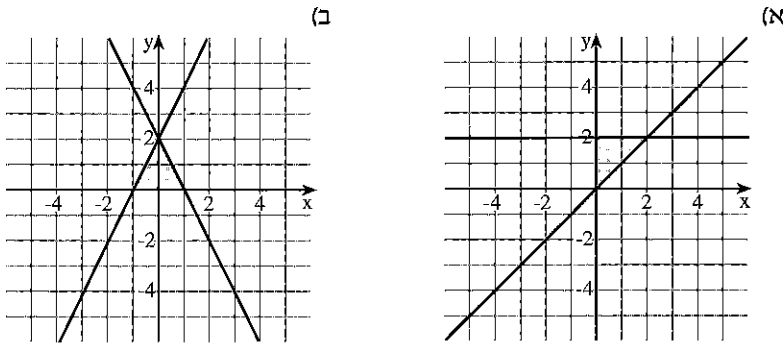
12. שרטטו גרפים מתאימים, והדגישו את האזור המשותף (אם קיים אזור כזה).

(ב)
$$\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ y \geq x - 5 \end{cases}$$

(א)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} \geq 0 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$$

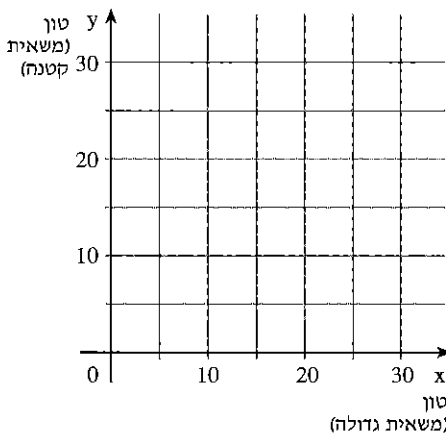
(ג)
$$\begin{cases} 3x + y \geq 5 \\ y \leq -3x \end{cases}$$

13. רשמו מערכת אי-שוויונים, המתאימה לאזור הצבוע.



14. משאית גדולה מסוגלת להעביר בכל הובלה x טון ברזל, ומשאית קטנה - y טון ברזל.

לפניכם האי-שוויונים, המתארים את האילוצים של הבעיה.



$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(א) שרטטו גרף מתאים לבעיה, ורשמו במילים את אילוצי הבעיה (בהקשר לסיפור).

(ב) בידקו לגבי כל אחת מהנקודות הבאות, אם שיעוריה מתארים הובלה אפשרית.

$A(20, 0)$, $B(9, 6)$, $C(-3, 10)$, $D(18, 5)$

(ג) סמנו שתי נקודות בתחום המתאים לבעיה, ורשמו מה מתארים שיעוריהן.

(ד) רשמו שיעורי נקודה, הנמצאת על אחת מהצלעות של הצורה שהתקבלה.

רשמו מה מתארים שיעורי הנקודה.

(ה) היכן נמצאות הנקודות, המתארות משלוח של 20 טון ברזל בסך הכל?

15. שרטטו במערכת צירים את הגרפים של מערכות האי-שוויונים.
צבעו את האזור המשותף (אם קיים כזה), ורשמו עבורו את שיעורי הקודקודים.

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y \geq 0 \\ y \leq -2x \\ x \geq -2 \end{array} \right. & \text{(ב)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} y \geq 2x \\ y + x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. & \text{(א)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq x \end{array} \right. \quad \text{(ד)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \leq x + 2 \\ 2x + y \leq 4 \end{array} \right. \quad \text{(ג)}$$

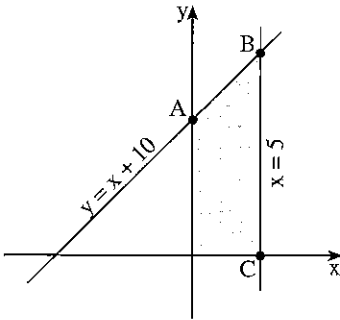
$$\left\{ \begin{array}{l} y \geq 0 \\ y \leq 2x + 1 \\ x - y \leq 5 \end{array} \right. \quad \text{(ה)}$$

קוד לחישוב קודקוד

לד כה קראנו מאך בשרטט אל שיעורי הקודקודים של המחום המשולש. בסעיף זה נחזור על מציאת שיעורי הקודקודים כשאין יחידה בשרטט, כפי שלשיגם בליטאמטריה אנליטית.

1. (פ) א) רשמו מערכת אי-שוויונים, שתתאר את התחום הצבוע.

ב) מצאו את שיעורי A, B ו-C. (רשמו את השיעור הידוע, ואחר כך חשבו את השיעור הנוסף).



2. (פ) א) התאימו כל ישר למשוואתו.

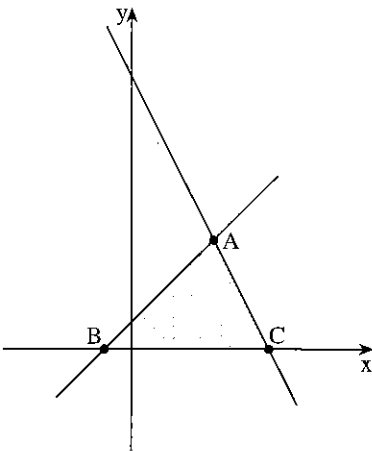
$$y = x + 1$$

$$y = -2x + 10$$

ב) רשמו מערכת אי-שוויונים, המתאימה לאזור הצבוע.

ג) חשבו את שיעורי הנקודות B, C.

ד) חשבו את שיעורי נקודה A.



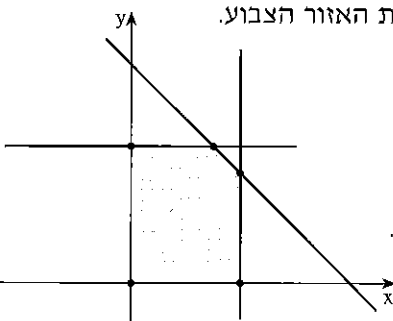
3. (פ) א) רשמו מערכת אי-שוויונים, שתתאר את האזור הצבוע.

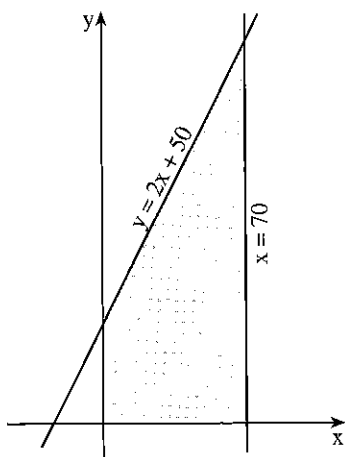
$$\text{משוואות הישרים: } y = 5$$

$$y + x = 8$$

$$x = 4$$

ב) מצאו את קודקודי הצורה שהתקבלה.





4. (ע"ע) א) רשמו מערכת אי שוויונים מתאימה לאזור הצבוע.

ב) חשבו את שיעורי הקודקודים.

ג) רשמו אי-שוויונים, היוצרים משולש שקודקדיו: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

5. (ע"ע) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של זוגות הישרים. רשמו תחילה כל משוואה בצורה $y =$

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \quad \text{ב)}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \text{א)}$$

לעיתים לא נוח לבדוד את אחד המשתנים, כלומר, לרשום את המשוואה בצורה $y =$ או $x =$. במקרים כאלה משתמשים בהשוואת מקדמים.



6. (ע"ע) שרטטו במערכת צירים את הישרים המתאימים למערכת

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

מהי נקודת החיתוך של שני הישרים? תוכלו לקרוא מהגרף להציב במשוואות ולבדוק.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{נחבר את שתי המשוואות:}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ x + y &= 5 \\ \hline 4x - y &= 5 \end{aligned} \quad \text{ונקבל:}$$

שרטטו באותה מערכת צירים, את הישר שמשוואתו התקבלה לאחר החיבור. האם הוא עובר דרך נקודת החיתוך של שני הישרים? נסו להסביר מדוע.

7. מאחר שבפתרון מערכת משוואות אנו מחפשים נקודות חיתוך נשתמש בדרך

הפתרון שלמדנו בתרגיל 6:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases} \quad \text{דאטא: נאנא מלכא מלאלא}$$

נכפול אל מלאלא פראלאלא ב-2 אקאל אל מלכא

$$\begin{cases} -4x + 6y = -2 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$$

כלא נחבר אל ש' מלאלא

$$11y = 11$$

כדי אקאל מלאלא מלשנא אחד:

$$y = 1$$

אכן:

כפי שראיתם בתרגיל הקודם הישר החדש עובר דרך נקודת החיתוך אותה אנחנו מחפשים.



הציבו באחת המשוואות $y = 1$ ומצאו את שיעור x של נקודת החיתוך.

פתרו על-ידי השוואת מקדמים.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & \text{(ב)} \\ 5x - 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 1 & \text{(א)} \\ 2x + y = -5 \end{cases}$$

בסעיף ב יש צורך לכפול את שתי המשוואות, כדי שלאחר החיבור תתקבל משוואה במשתנה אחד.

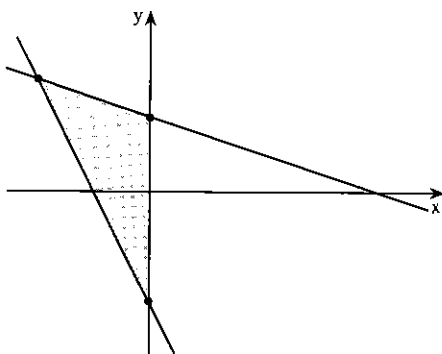
תרגילים

8. (א) משוואות הישרים שבשרטוט הן:

$$\begin{cases} y = -2x - 3 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

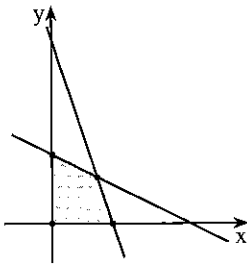
רשמו מערכת אי-שוויונים, שתתאר את האזור הצבוע.

(ב) מצאו את שיעורי הקודקודים.

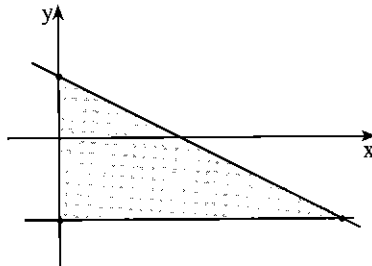


9. מצאו את שיעורי הקודקודים.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

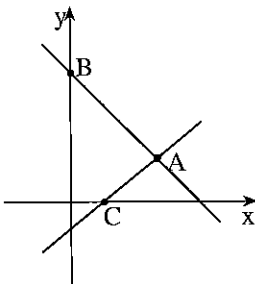


$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -2 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases} \quad (\text{א})$$

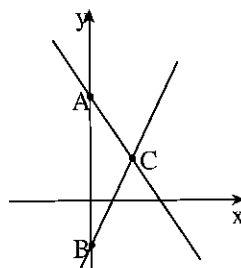


10. מצאו את שיעורי הנקודות, המסומנות בכל שרטוט, על-פי המשוואות הרשומות. (התאימו תחילה לכל ישר את משוואתו.)

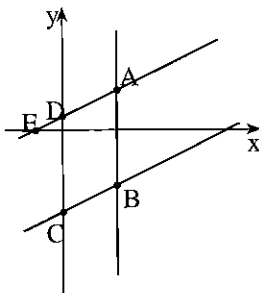
$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad (\text{ב})$$



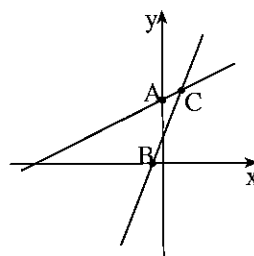
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \quad (\text{א})$$



$$\begin{cases} x = 5 \\ x - 2y = 15 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad (\text{ד})$$



$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \quad (\text{ג})$$



11. פתרו את מערכות המשוואות הבאות.

(רשמו תחילה, אם אפשר, בצורה $y = ax + b$. אם לא נוח לרשום כך, השתמשו בהשוואת מקדמים).

$$\begin{array}{lll} \text{א)} & \begin{cases} x = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} & \text{ב)} & \begin{cases} y - 5x = 10 \\ 2y - 3x = 6 \end{cases} & \text{ג)} & \begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד)} & \begin{cases} y = 3 \\ y - x = 5 \end{cases} & \text{ה)} & \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases} & \text{ו)} & \begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x - 3y = -1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ז)} & \begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ x - 3y = 7 \end{cases} & \text{ח)} & \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases} & \text{ט)} & \begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \end{array}$$

התחום האפשרי

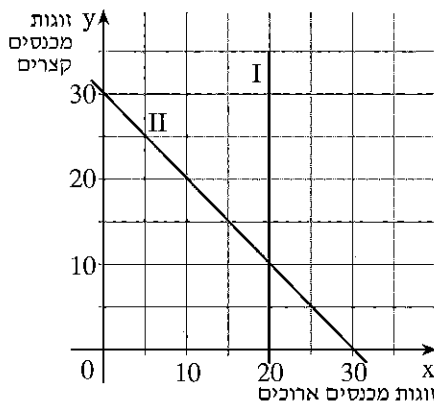
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



1. במפעל מייצרים שני סוגי מיצים: מיץ אשכוליות ומיץ ענבים.
 א כמות בליטרים של מיץ אשכוליות, שמייצר המפעל בשעה.
 y כמות בליטרים של מיץ ענבים, שמייצר המפעל בשעה.
 א רשמו תבנית לכמות המיץ שמייצרים במשך 5 שעות.
 ב במשך 5 שעות ניתן לייצר לא יותר מ- 1000 ליטר.
 רשמו אי-שוויון מתאים.
 ג שרטטו במערכת צירים גרף מתאים לאי-שוויון.
 ציר x: $0 \leq x \leq 300$ וציר y: $0 \leq y \leq 400$.
 ד האם הנקודות הבאות נמצאות בתחום שנוצר?
 $A(50, 200)$, $B(100, 100)$, $C(0, 200)$.
 ה האם המפעל יכול לייצר 70 ליטרים מיץ אשכוליות ו- 140 ליטרים מיץ ענבים?

אוסף כל הפתרונות האפשריים של בעיה נקרא **התחום האפשרי**.

2. בית-חרושת מייצר מכנסיים ארוכים וקצרים. כמות המכנסיים, שהמפעל יכול לייצר בשעה, מתוארת בגרף.

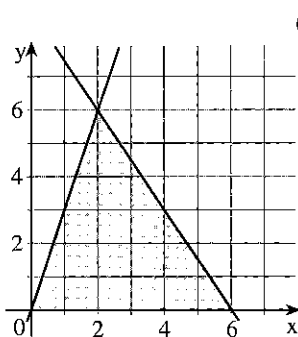
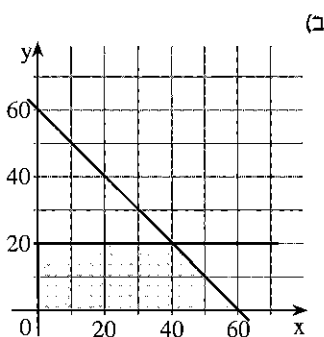


המשך ←

- (א) האם ניתן לייצר בשעה, 20 זוגות של מכנסיים קצרים בלבד?
 (ב) האם ניתן לייצר בשעה, 6 זוגות של מכנסיים קצרים ו- 12 זוגות של מכנסיים ארוכים?
 (ג) רשמו את משוואת הישר II שבשרטוט.
 (ד) רשמו מערכת אי-שוויונים מתאימה לאזור הצבוע.
 (ה) רשמו במילים את המגבלות של בית החרושת.

מערכת אי שוויונים, המתארת מגבלות, נקראת מערכת אילוצים.

3. כתבו מערכות אי-שוויונים מתאימות.



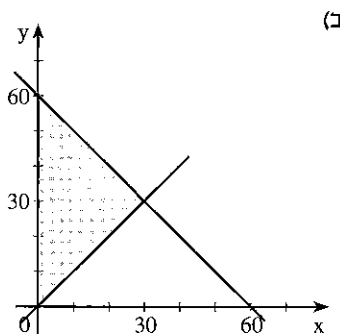
תרגילים

4. שרטטו גרף מתאים לכל מערכת, ברביע הראשון.

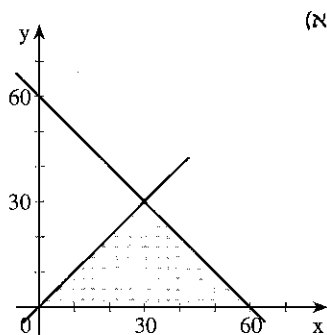
$$\begin{cases} y \leq 10 \\ x - y \leq -5 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq -x + 10 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} 4x + y \leq 7 \\ 3x + 2y \leq 9 \end{cases} \quad (\text{ד}) \quad \begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ 3x - 2y \geq 9 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

5. לאיילת התפזרו הדפים של שיעורי-הבית. עזרו לה "לשדך" את האי-שוויונים לגרפים המתאימים (ברביע ה-I).



$$\begin{cases} y \leq 60 - x & \text{(II)} \\ y \leq x \end{cases}$$



$$\begin{cases} y \leq 60 - x & \text{(I)} \\ y \geq x \end{cases}$$

6. (א) ידוע, שדרור מקבל **לכל היותר** 50 ש"ח לשבוע דמי-כיס.

האם ייתכן, שבשבוע שעבר קיבל דרור 30 ש"ח?

האם ייתכן שקיבל 60 ש"ח?

האם ייתכן שקיבל 50 ש"ח?

(ב) איילת מקבלת **לכל הפחות** 40 ש"ח דמי-כיס.

האם ייתכן, שאיילת קיבלה בשבוע מסוים 30 ש"ח?

האם ייתכן שקיבלה 60 ש"ח?

האם ייתכן שקיבלה 50 ש"ח?

(ג) האם ייתכן, שבשבוע מסוים יקבלו דרור ואיילת אותו סכום?

7. משאית גדולה מסוגלת להעביר בכל הסעה x טון ירקות, ומשאית קטנה y טון ירקות.

כמות הירקות, שמעבירות שתי המשאיות ביחד ב- 3 הסעות, היא לכל היותר 60 טון.

(א) רשמו תבנית לכמות הירקות המועברת ב- 3 הסעות.

(ב) רשמו אי-שוויון מתאים לאילוף הני"ל, ושרטטו גרף.

(ג) רשמו אילו מהנקודות A, B, C, D, E, מהוות פתרון אפשרי.

$E(6, 15)$, $D(10, 12)$, $C(10, 10)$, $B(20, 0)$, $A(5, 12)$

"אל המטרה"

אמדגם אשרטט גחאם אפשרי. כגך גאמדו אפשאמש בגחאם האפשרי, כדי אבצק שיקולים באלכאיים. אלם כך גכילו בסעף זכ מאשג חדש: "גבניג מטרה".

1.  מפעל מייצר שני מוצרים.
רווח המפעל הוא 5 ש"ח מק"ג של המוצר הראשון, ו- 1.5 ש"ח מק"ג של המוצר השני.
א) מה יהיה הרווח מייצור של 5 ק"ג מהמוצר הראשון ו- 10 ק"ג מהמוצר השני?
ב) רשמו תבנית לרווח, המתקבל מייצור x ק"ג מהמוצר הראשון ו- y ק"ג מהמוצר השני.
ג) חשבו את ערך התבנית אם $x = 12$ ו- $y = 3$.
ד) חשבו את הרווח אם $x = 7$ ו- $y = 50$.
ה) חשבו את רווח המפעל מייצור 4.8 ק"ג מהמוצר השני **בלבד** (ללא ייצור של המוצר הראשון).

2.  x מייצג משקל בק"ג, של עגבניות הנמכרות ביום.
 y מייצג משקל בק"ג, של מלפפונים הנמכרים ביום.
ממכירת ק"ג עגבניות מרוויחים 1 ש"ח.
ממכירת ק"ג מלפפונים מרוויחים $\frac{1}{2}$ ש"ח.
א) רשמו תבנית לרווח המתקבל ביום.
ב) מה ערך התבנית שרשמתם, אם $x = 20$ ו- $y = 30$?
ג) מה היה הרווח ביום, בו נמכרו 50 ק"ג עגבניות ו- 40 ק"ג מלפפונים?
ד) ערך התבנית 100. רשמו שתי אפשרויות שונות ל- x ול- y .
ה) הרווח 120 ש"ח. רשמו שתי אפשרויות שונות של מכירה.

3.  x מייצג כמות של חלב בליטרים, הנמכרת ביום.
 y מייצג כמות של מיץ בליטרים, הנמכרת ביום.
ממכירה של ליטר חלב מרוויחים $\frac{1}{2}$ ש"ח.
ממכירה של ליטר מיץ מרוויחים 2 ש"ח.
רשמו תבנית מתאימה לרווח.

תבניות כמו אלה שרשמתם, נקראות "**תבניות מטרה**". אנו מעוניינים
בעריכתן בנקודות מסויימות בתוך התחום האפשרי.

4. בתחרות ידע זוכים ב- 5 נקודות עבור כל תשובה נכונה, ומפסידים 2 נקודות עבור כל תשובה שאינה נכונה.

x מייצג את מספר התשובות הנכונות של משתתף בתחרות.

y מייצג את מספר התשובות השגויות שלו.

(א) רשמו תבנית מטרה, שתייצג את מספר הנקודות שצבר.

(ב) מה ערך התבנית אם $x = 7$, $y = 10$?

ג) מה מספר הנקודות, שצבר מתחרה, שענה נכון על 10 שאלות, ושגה ב- 3 שאלות?

(ד) רשמו שתי אפשרויות, המתאימות למשתתפים, שצברו 45 נקודות.

(ה) אילו מספרים ניתן להציב במקום x ו- y בשאלה זו?

5. לחברת נסיעות ישנן הוצאות קבועות: 100 ש"ח לטיול פרטי, ו- 50 ש"ח לטיול קבוצתי.

(א) רשמו תבנית מטרה להוצאות החברה עבור x טיולים פרטיים ו- y טיולים קבוצתיים.

(ב) מה הוצאות החברה עבור 50 טיולים פרטיים ו- 10 טיולים קבוצתיים?

(ג) אילו מספרים ניתן להציב במקום x ו- y בשאלה זו?

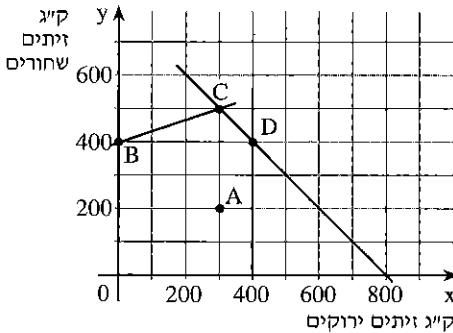
6. (א) רשמו תבנית מטרה לרווח ממכירה של x ק"ג פירות ו- y ק"ג ירקות, אם הרווח לק"ג פירות 2 ש"ח, ולק"ג ירקות 1.5 ש"ח.

ההרווח לק"ג פירות 2 ש"ח, ולק"ג ירקות 1.5 ש"ח.

(ב) מצאו את הרווח, אם מוכרים 30 ק"ג פירות ו- 20 ק"ג ירקות.

(ג) רשמו שתי אפשרויות של מכירה, המתאימות לרווח של 150 ש"ח.

7. מפעל מייצר שימורי זיתים ירוקים ושחורים.



(א) רשמו מערכת אילוצים מתאימה לתחום המשורטט (מערכת אי-שוויונים).
 סמנו ב- x את המשקל בק"ג של זיתים ירוקים, שמייצר המפעל במחזור ייצור, וב- y את המשקל בק"ג של זיתים שחורים שמייצר במחזור ייצור.

- (ב) רווח המפעל מזיתים ירוקים הוא 2 ש"ח לק"ג, ומזיתים שחורים 1 ש"ח לק"ג. חשבו את רווח המפעל מייצור של 200 ק"ג זיתים ירוקים ו-450 ק"ג זיתים שחורים.
- (ג) רשמו תבנית מטרה לרווח.
- (ד) מצאו את הערך של תבנית המטרה שרשמת בנקודה A.
- (ה) מצאו את ערך התבנית בנקודות B, D, C.
- (ו) באיזו מהנקודות A, B, C, D הרווח הוא הגדול ביותר?
- (ז) האם ניתן להרוויח 1300 ש"ח במחזור ייצור אחד? נמקו.

תרגילים

8. נתונה מערכת אילוצים: (ברביע ה-I: $x \geq 0, y \geq 0$)

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

- (א) שרטטו את התחום האפשרי.
- (ב) סמנו בתחום את הנקודות A(1, 1), B(1.5, 2), C(0.5, 2).
- (ג) חשבו את ערך התבנית $2x - 5y$ בנקודות A, B, C.
- (ד) באיזו מהנקודות הנ"ל הערך הוא הגדול ביותר?

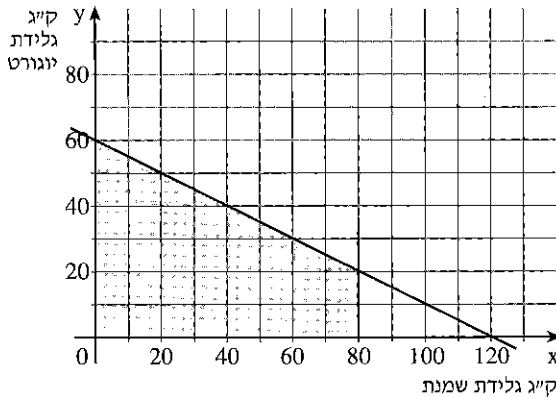
9. במפעל מייצרים שני סוגי מרצפות: ריבועיות ומלבניות. ייצור מרצפת ריבועית נמשך 3 דקות, וייצור מרצפת מלבנית נמשך 4 דקות.
- (א) רשמו תבנית מטרה לזמן, בדקות, הדרוש לייצור x מרצפות ריבועיות ו- y מרצפות מלבניות.
- (ב) רשמו שלוש אפשרויות שונות לייצור מרצפות בשעה (60 דקות).

"על הגובה"

בסוף הקודם ראינו, כי "גבנית המטרה" מקבלת ערכים שלונים בגובה האפשרי. בסוף זה נחפש היכן נמצא הנקודה, שלפניו מקבלת "גבנית המטרה" אגל ערך.

1. במחלבה מייצרים גלילות שמנת וגלילות יוגורט. אפשרויות הייצור בשעה מתוארות בשרטוט.

א) רשמו את האי-שוויונים, המתאימים לתחום המשרטט.



ב) מק"ג גלילת שמנת מרוויחים 4 ש"ח, ומק"ג גלילת יוגורט מרוויחים 2 ש"ח. רשמו תבנית מטרה לרווח.

ג) נניח שהרוויחו 120 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

ד) נניח שהרוויחו 60 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

ה) נניח שהרוויחו 40 ש"ח. רשמו משוואה מתאימה, ושרטטו את הישר.

הקווים ששרטטתם: נקראים קווי גובה

ו) מה תוכלו לומר על כל קווי הגובה?

ז) רשמו את משוואות הישרים ששרטטתם בצורה מפורשת ($y = ax + b$),

ובידקו את שיפועי הישרים. מה מצאתם?

ח) מה תוכלו לומר על הרווח המתקבל בנקודות על הישר $4x + 2y = 120$?

2. ⑦

א) רשמו את המשוואות הבאות בצורה $y = ax + b$.

$$2x + y = 100$$

$$2x + y = 7$$

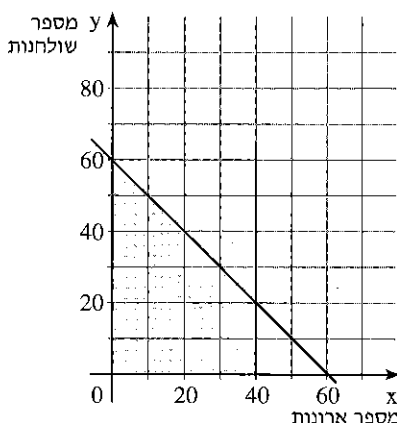
$$2x + y = 10$$

ב) הסבירו את הטענה הבאה: "אם במשוואות מהצורה הנ"ל המקדמים של x שווים והמקדמים של y שווים, אז הישרים מקבילים".

ג) רשמו משוואה של ישר המקביל לישר שמשוואתו $2x + 3y = 0$.

3. ⑦

התחום המשורטט מתאר אפשרויות שונות של הוצאות נגריה. x מייצג את מספר הארונות שמייצרים ביום, y מייצג את מספר השולחנות שמייצרים ביום.



ההוצאות לייצור ארון 450 ש"ח,

וההוצאות לייצור שולחן 150 ש"ח.

א) רשמו תבנית מטרה להוצאות הנגריה ביום.

ב) נניח שההוצאות ביום מסוים היו 6000 ש"ח.

— רשמו משוואה, צמצמו ושרטטו את קו הגובה.

— רשמו שיעורים של שתי נקודות, הנמצאות בתחום האפשרי ועל קו הגובה.

— מה ההוצאה המתקבלת בכל נקודה?

ג) ביום מסוים היו ההוצאות 10,500 ש"ח. רשמו משוואה, צמצמו ושרטטו

ישר מתאים.

— רשמו שיעורים של שתי נקודות, הנמצאות בתחום האפשרי ועל קו הגובה.

— תארו מה מייצגות הנקודות האלה.

4. ④

נתונה תבנית מטרה $x + 3y$.

(א) מצאו שלושה זוגות (x, y) , כך שערך התבנית יהיה 30, וסמנו במערכת צירים.

(ב) שרטטו את הישר $x + 3y = 30$. מה תוכלו לומר על ערך התבנית בנקודות אחרות על הישר ששרטטתם?

(ג) ערך התבנית $x + 3y$ הוא 10. רשמו משוואה של קו גובה מתאים, ושרטטו.

(ד) מה תוכלו לומר על כל קווי הגובה, שיתקבלו ממתן ערכים שונים לתבנית $x + 3y$?

כשקובעים ערך לתבנית המטרה, מתקבלת משוואת ישר, שנקרא **קו גובה**.

ערך תבנית המטרה זהה בכל הנקודות על קו גובה זה.

כשמשנים את ערך התבנית, מתקבל קו גובה מקביל לקו הגובה הקודם.



תרגילים

5. (א) שרטטו את הישרים. $x - 2y = 5$

$$x - 2y = 7$$

(ב) רשמו משוואה של ישר מקביל להם, ושרטטו אותו באותה מערכת צירים.

6. (א) ערן טען, כי הישרים $5x + 2y = 3$ ו- $5x + 4y = 10$ מקבילים.

האם צדק? נמקו.

(ב) שירה טענה, כי הישרים $5x + 2y = 3$ ו- $10x + 4y = 10$ מקבילים.

האם צדקה? נמקו.

7. חלק מהמידע על המשוואות הרשומות כאן נמחק.

השלימו, כך שהישרים יהיו **מקבילים** אך לא מתלכדים.

$$x + 2y = \underline{\hspace{2cm}}$$

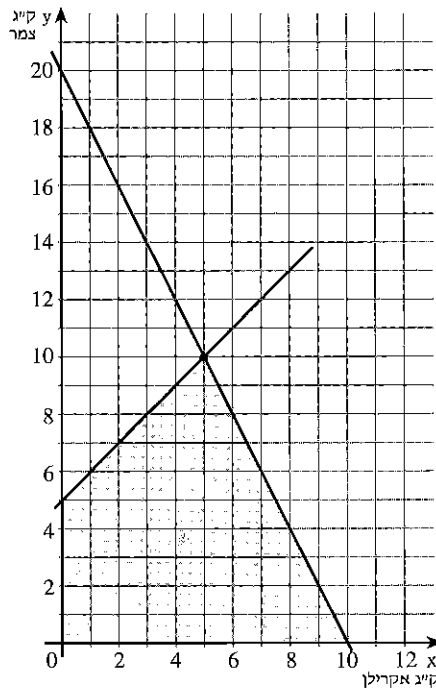
$$x + \underline{\hspace{2cm}} = 8$$

$$\underline{\hspace{2cm}} + 2y =$$

$$\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 20$$

$$2x + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

8. אפשרויות הייצור בשעה, של מפעל חוטים, מתוארות בשרטוט.



- (א) רשמו אי-שוויונים, שמתארים את התחום האפשרי.
 (ב) מק"ג אקרילן מרויחים 5 ש"ח, ומק"ג צמר 2 ש"ח. רשמו תבנית לרווח.
 (ג) נניח שהרוויחו 20 ש"ח. רשמו משוואה ושרטטו קו גובה מתאים.
 (ד) רשמו שיעורי נקודה, שנמצאת על הישר ובתחום האפשרי.
 (ה) מכרו 2 ק"ג אקרילן. כמה ק"ג צמר יש למכור, כדי להרוויח 20 ש"ח?
 (ו) מכרו 3 ק"ג אקרילן. כמה ק"ג צמר יש למכור, כדי להרוויח 20 ש"ח?
 (ז) מה ערכה של תבנית הרווח בנקודה $(1, 7)$? האם ייצור כזה אפשרי?

משוואות של קווי גובה

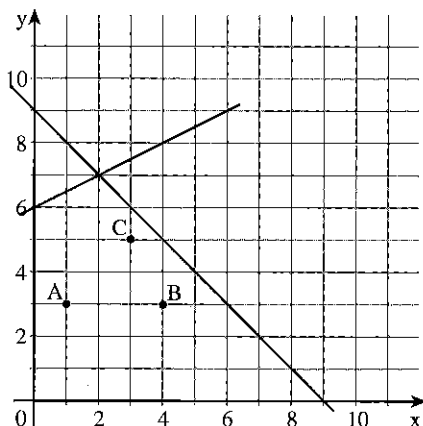
בסעיף זה ובסעיפים הבאים, ציטוטו של משפט בייקר, המשמש על דף שקף.

1. (פ) א) רשמו משוואה של ישר מקביל לישר $2x + 3y = 11$.
 ב) התלמידים נתבקשו לרשום משוואת ישר, המקביל לישר הנתון, ועובר דרך הנקודה $(1, 2)$.
 דן רשם $2x + 3y = 10$. האם הוא צודק?
 רן רשם $2x + 3y = 8$. האם הוא צודק?
 ג) איזה מהישרים הבאים עובר דרך הנקודה $(-2, 3)$?
 $2x + 3y = 5$ $2x + 3y = -5$ $2x + 3y = 13$
 ד) נסו לרשום משוואה של ישר העובר דרך הנקודה $(4, 2)$, ומקביל לישר הנתון בסעיף א.

2. (פ) א) כדי למצוא משוואת ישר מהצורה $3x + y = \square$, העובר דרך $(1, 2)$, הציב יוסי את שיעורי הנקודה. מה הוא קיבל? רשמו את משוואת הישר.
 ב) רשמו משוואת ישר מהצורה $3x + y = \square$, העובר דרך הנקודה $(3, -2)$.

3. (פ) השלימו את משוואת הישר $5x + 2y = \square$, אם נתון שהישר עובר דרך הנקודה $(-2, 4)$.

4. (פ) בשרטוט נתון תחום אפשרי. כמו כן, נתונה תבנית מטרה $x - 3y$.
 א) נניח שערך התבנית 6.



- רשמו משוואה ושרטטו את קו הגובה.
 ב) על הישר ששרטטתם הניחו ישר (ישר משורטט על דף שקוף), הזיזו אותו במקביל, כך שיעבור דרך A. מה משוואתו?
 ג) מצאו משוואות של ישרים מקבילים העוברים דרך B ודרך C.



5. (א) נתונה תבנית מטרה: $y - 2x$

אם ערך התבנית 2, רשמו משוואה ושרטטו קו גובה מתאים.

(ב) הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו אותו במקביל לישר המשורטט, כך

שיעבור דרך $A(2, 3)$.

– מה ערך התבנית $y - 2x$ בנקודה A?

– מהי משוואת הישר המוזז?

תרגילים

6. (א) מה תוכלו לומר על המצב ההדדי בין הישרים: $3x - 5y = 10$

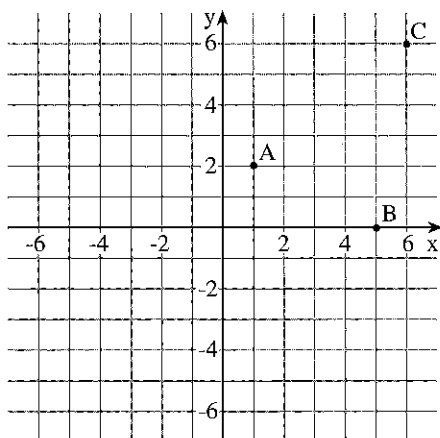
$$3x - 5y = 5$$

(ב) רשמו משוואת ישר מקביל לישרים הנ"ל, העובר דרך ראשית הצירים.

(ג) רשמו משוואת ישר מקביל לישרים הנ"ל, העובר דרך הנקודה $(0, -5)$.

7. (א) שרטטו ישר שמשוואתו $3x + 2y = 0$

השלימו תחילה טבלת ערכים.



x			
y			

(ב) הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו אותו במקביל לישר המשורטט, כך

שיעבור דרך הנקודה A.

מה משוואת הישר המוזז?

(ג) הזיזו את הישר, כך שיקביל לישר המשורטט ויעבור דרך B, אחר כך הזיזו

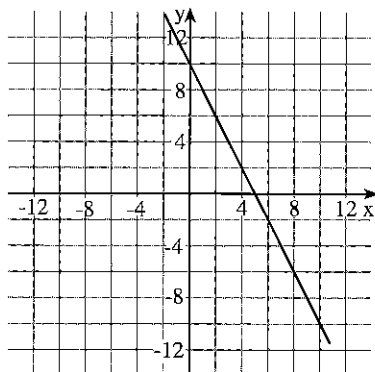
אותו כך שיעבור דרך C.

רשמו משוואות מתאימות.

8. לפניכם שרטוט של הישר $2x + y = 10$.

סמנו את הנקודה $(0, -4)$.

מצאו משוואת ישר מקביל לישר הנתון העובר דרך הנקודה.



9. (א) שרטטו ישר שמשוואתו $x - 4y = 8$.

(ב) רשמו משוואות של ישרים מקבילים לישר הנ"ל, העוברים דרך הנקודות:

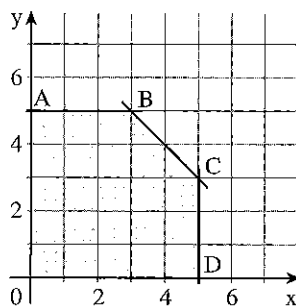
$D(-1, 3)$

$C(7, 0)$

$B(0, 5)$

$A(1, 2)$

10. לפניכם תחום משורטט ותבנית מטרה $2x + y$.



(א) שרטטו את הישר שמשוואתו $2x + y = 3$ במערכת הצירים.

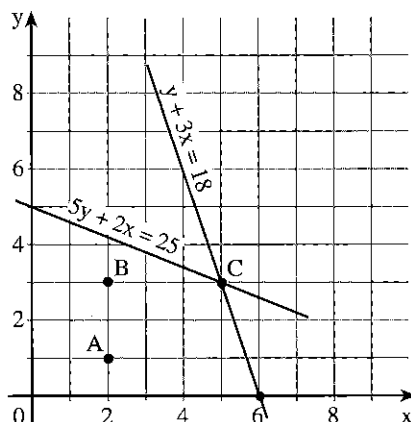
(ב) הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו אותו במקביל לישר המשורטט כלפי מעלה. מהי הנקודה האחרונה דרכה עובר הישר לפני יציאתו מהתחום?

(ג) איזה ערך מקבלת תבנית המטרה בנקודה זו? מהי משוואת קו הגובה המתקבל?

”אל הקודקוד”

בסעיף זה גרמנו מצולא אופטימום של גבניג מטרה בתחום האפשרי, באמצעות קווי יציבה.

1. (א) נתונה תבנית המטרה: $6x + 3y$. שרטטו במערכת הצירים את הישר שמשוואתו $6x + 3y = 24$. מה ערך התבנית בנקודות על הישר ששרטטתם?



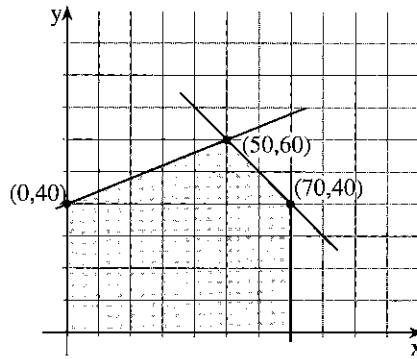
- (ב) הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו אותו במקביל לישר המשוורטט, עד שיעבור דרך A. מה ערך התבנית ב-A?
- (ג) הזיזו את הישר במקביל, לכיוון ראשית הצירים, וקבעו אם ערך התבנית גדל או קטן.
- (ד) באיזה כיוון יש להזיז את הישר, אם רוצים להגדיל את ערך התבנית?
- (ה) הזיזו את הישר במקביל (כך שערך התבנית יגדל) עד יציאתו מהתחום האפשרי. מה ערך התבנית בנקודה זו?
- (ו) מהו הערך המכסימלי של התבנית בתחום האפשרי?

כל קו גובה מבטא ערך של תבנית המטרה. הוזה מקבילה לכיוון אחד מגדילה את ערך התבנית, ולכיוון השני מקטינה את ערך התבנית.

בתרגיל הקודם ראינו, שהוזה של הישר עד לקודקוד הגדילה את ערך התבנית עד למכסימום בתחום האפשרי.

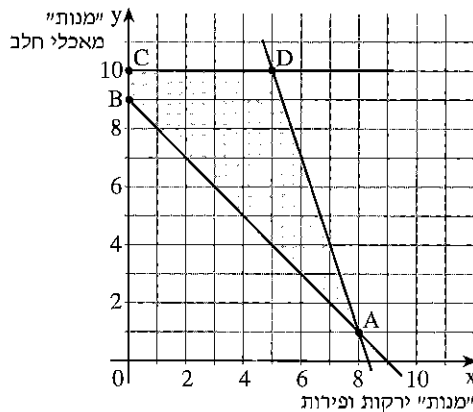


2. נתון תחום אפשרי משורטט, ותבנית מטרה $5x + y$. ע"ע



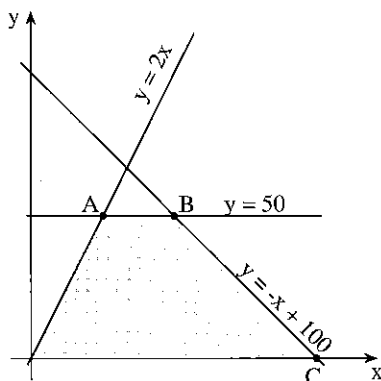
- (א) השלימו למשוואת ישר כלשהו, $5x + y = \square$, ושרטטו את הישר.
 (ב) הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו במקביל, כך שערך התבנית יגדל.
 (ג) באיזו נקודה בתחום האפשרי מתקבל הערך הגבוה ביותר?
 מה ערך התבנית בנקודה זו?

3. בחישוב קלוריות נקרא לכל 100 גרי "מנה". במנה אחת של פירות וירקות 40 קלוריות. במנה אחת של מאכלי חלב 70 קלוריות. ע"ע



- (א) רשמו תבנית מטרה למספר הקלוריות המתקבל מ- x מנות של ירקות ופירות ו- y מנות של מאכלי חלב.
 (ב) רשמו משוואת קו גובה כלשהו (המתאים לתבנית המטרה), ושרטטו.
 (ג) כמובן שמעוניינים להפחית את כמות הקלוריות ככל האפשר.
 הזיזו את הישר בכיוון המתאים. באיזו נקודה מתקבל מינימום קלוריות?
 מהו הערך המינימלי?

4. (פ) א) רשמו את שיעורי הקודקודים של התחום המפורט: A, B, C, ורשמו יחידות על הצירים. (דיקו עד כמה שאפשר).



ב) נתונה תבנית מטרה $2x + y$. השלימו למשוואת ישר כלשהו $2x + y = \square$ ושרטטו.

ג) הניחו ישר על הישר ששרטטתם, והזיזו במקביל, כך שערך התבנית יגדל.

באיזו נקודה בתחום מתקבל הערך הגבוה ביותר של התבנית? מהו?

ד) נתונה תבנית מטרה $x + y$. השלימו למשוואת ישר כלשהו $x + y = \square$ ושרטטו.

ה) הזיזו ישר במקביל לישר ששרטטתם, כך שערך התבנית יגדל. - היכן בתחום מתקבל הערך הגבוה ביותר?

5. (א) מתי, לדעתכם, יהיה לתבנית מטרה בתחום נתון מערך מכסימלי אחד?

הערך המכסימלי, או המינימלי, של תבנית מטרה בתחום נתון, מתקבל באחד הקודקודים, או בנקודות שעל אחת הצלעות של התחום.

תרגילים

6. א) שרטטו את התחום האפשרי, המתאים למערכת האי-שוויונים.

$$\begin{cases} x \leq 30 \\ y \leq 2x + 10 \\ y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ב) חשבו, או קראו את שיעורי הקודקודים.

ג) נתונה תבנית מטרה $x + 2y$. השלימו למשוואת ישר ושרטטו.

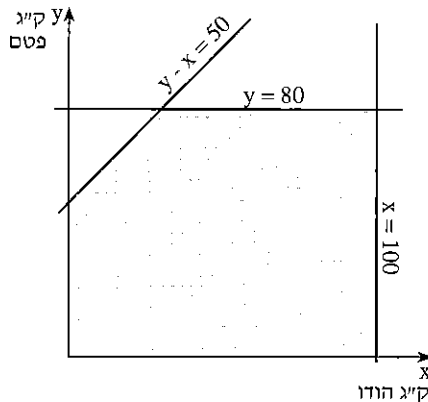
ד) הזיזו ישר במקביל, ומצאו באיזה קודקוד ערך התבנית הוא הגדול ביותר. מה ערך התבנית בנקודה זו?

7. התחום האפשרי מתאר אפשרויות שונות של ייצור מאכלי עוף בשעה, במפעל "עוף-עף".

x מייצג מספר ק"ג של בשר הודו, y מייצג מספר ק"ג של פטם.

(א) חשבו את שיעורי הקודקודים של התחום.

סמנו יחידות על הצירים.



(ב) מק"ג בשר הודו מרוויחים 2 ש"ח.

מק"ג בשר פטם מרוויחים 4 ש"ח.

רשמו תבנית מטרה.

(ג) השלימו את התבנית למשוואת ישר כלשהו, ושרטטו.

(ד) הזיזו ישר במקביל, כך שערך התבנית יגדל. לאיזה קודקוד הגעתם?

מהו הרווח המקסימלי האפשרי?

(ה) כמה ק"ג מכל סוג אפשר לייצר, ולקבל רווח מכסימלי?

8. בחנות יש מקרר, שיכול להכיל 60 ק"ג גלידה.

x מייצג את הכמות של גלידת וניל.

y מייצג את הכמות של גלידת שוקולד.

בעל החנות מוכר לכל היותר 50 ק"ג גלידת וניל, ולכל היותר 40 ק"ג גלידת שוקולד.

(א) רשמו מערכת אי-שוויונים מתאימה, ושרטטו תחום אפשרי.

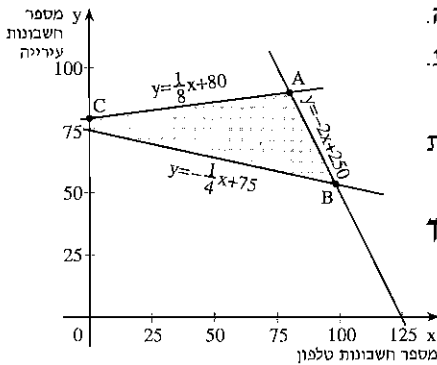
(ב) מצאו את שיעורי הקודקודים.

(ג) בעל החנות מרוויח 2 ש"ח מק"ג אחד של גלידת וניל, ו-3 ש"ח מק"ג אחד של גלידת שוקולד. רשמו תבנית מטרה.

שרטטו ישר מתאים, הזיזו אותו, ומצאו כמה ק"ג מכל סוג כדאי לו למכור,

כדי שהרווח יהיה מכסימלי.

9. התחום המשורטט מתאר מגבלות של עבודת מחשב, הנותן שירותים לחברת טלפונים ולעירייה.



(א) זמן חישוב לחשבון טלפון - 1 שנייה.

זמן חישוב לחשבון עירייה - 5 שניות.

רשמו תבנית לזמן החישוב של x חשבוניות טלפון ו- y חשבוניות עירייה.

(ב) מצאו באיזה קודקוד מתקבל הערך

הנמוך ביותר של הזמן.

חשבו את שיעורי הקודקוד.

(ג) כמה חשבוניות מכל סוג ניתן לחשב בזמן המינימלי?

10. פעילות מחשב - מציאת ערך אופטימלי

הוראל ארפלף, חן-פי האכנה ממשלח Derive אמצא נוספה בסוף הספר.

1. (א) כדי לשרטט את התחום האפשרי בחרו ברביע הראשון.

$$(0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 10)$$

רשמו את שני האי-שוויונים הנוספים.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ 5x + y \leq 24 \end{cases}$$

(ב) נתונה תבנית המטרה $2x + y$. רשמו וסמנו ארבע נקודות שעבורן מקבלת

תבנית המטרה ערך 3.

מה קיבלתם?

- שרטטו את כל הנקודות עבורן ערכה של תבנית המטרה הוא 3.

- סמנו שלוש נקודות, עבורן ערכה של תבנית המטרה 5. מה קיבלתם הפעם?

- שרטטו את כל הנקודות, עבורן ערכה של תבנית המטרה 5.

- בחרו ערך לתבנית המטרה, כך שהישר המתאים יעבור מחוץ לתחום, ושרטטו.

- היכן בתחום יהיה הערך המכסימלי של תבנית המטרה, ומהו?

בידקו על-ידי שרטוט קו גובה מתאים.

פעילות מחשב - מציאת ערך אופטימלי

2. (א) שרטטו את התחום המתאים לאי-השוויונים (בחרו סקלות מתאימות, ברביע הראשון).

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ x + y \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

(ב) נתונה תבנית המטרה $3x + y$.

שרטטו על המחשב קו גובה כלשהו, הזיזו אותו ומצאו היכן מתקבל ערך מכסימלי של תבנית המטרה.

(ג) נתונה תבנית מטרה אחרת: $x + 2y$.

שרטטו קו גובה מתאים, ומצאו היכן מתקבל המכסימום הפעם.
עבור איזו תבנית התקבל ערך מכסימלי גדול יותר?

3. במפעל עובדים מהנדסים וטכנאים. השכר החודשי של מהנדס 5000 ש"ח, ושל טכנאי - 3000 ש"ח. המפעל מקציב למשכורות החודשיות של x מהנדסים ו- y טכנאים לכל היותר 120,000 ש"ח. ניתן להעסיק מכסימום 18 מהנדסים.

א) שרטטו את התחום האפשרי במחשב (רשמו מערכת אי-שוויונים מתאימה).

(ב) רווח המפעל על כל מהנדס 1000 ש"ח, ועל כל טכנאי 600 ש"ח.
רשמו תבנית מטרה לרווח המפעל.

ג) שרטטו במחשב קו גובה כלשהו, ומצא כמה מהנדסים וכמה טכנאים כדאי מפעל להעסיק, כדי לקבל רווח מקסימלי. מהו הרווח המקסימלי?

4. במפעל ייצרו x ק"ג מלח שולחן ו- y ק"ג מלח בישול. אפשרויות הייצור היומיות מתוארות באמצעות מערכת האילוצים הבאה (ברביע הראשון).

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \leq 6 \\ y \leq 8 \end{cases}$$

(א) רשמו במילים "מה אומרים" האי-השוויונים.

ב) בחרו סקלות מתאימות, ורשמו את האי-שוויונים, כדי שישורטט התחום האפשרי במחשב.

(ג) ממכירת ק"ג אחד מלח שולחן מרוויחים 2 ש"ח,

וממכירת ק"ג אחד מלח בישול מרוויחים 3 ש"ח.

← המשך

- רשמו תבנית מטרה.
- מצאו 3 אפשרויות לרווח של 15 ש"ח.
- סמנו את הנקודות המתאימות לאפשרויות שרשמתם במערכת הצירים.
- (ד) אילו מהן נמצאות בתחום האפשרי ששרטטתם? (אם לא סימנתם כאלה, נסו לסמן נקודה אחת כזו לפחות.)
- (ה) שרטטו את כל הנקודות, המתאימות לרווח של 15 ש"ח.
- (ו) שרטטו גרף, המתאים לכל הנקודות בהן הרווח 20 ש"ח.
- (ז) האם ניתן להגיע לרווח של 30 ש"ח? שרטטו ונמקו.
- (ח) מה קורה לערכה של תבנית המטרה "בהזזה" של הישרים כלפי מעלה? מה קורה "בהזזה" כלפי מטה?
- (ט) שרטטו קו גובה כלשהו המתאים לתבנית המטרה, כלומר משוואתו: $2x + 3y = \square$, הזיזו אותו במקביל, ומצאו היכן מתקבל הרווח המכסימלי.
- (י) נסו להציע תבנית מטרה שונה, כך שהרווח המכסימלי בתחום יתקבל בקודקוד (4, 6). תוכלו לבדוק במחשב בעזרת שרטוט קווי גובה. תנו פירוש מילולי לתבנית המטרה. מהו הרווח המכסימלי המתקבל במקרה זה?

בצורה דומה תוכלו לפתור שאלות נוספות (מפרק זה ומספרים אחרים) בעזרת שרטוט במחשב והזזת קווי גובה.

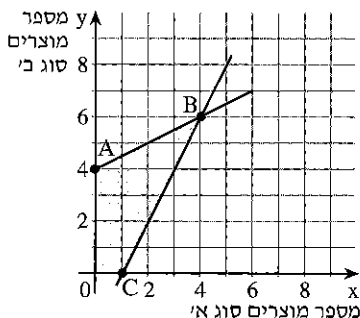
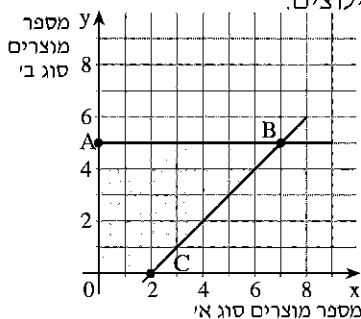
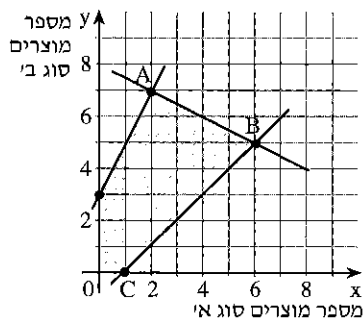


"חלוצים ואילוצים" – שאלות לסיכום

בסעיף זה גשלו בפעילת הפן משרטטים אולם קווי גרפה בגרמים שונים ופעילת הפן משרטטים קווי גרפה שונים באולם גרם.

1.  לצורך הקמת מפעל, הכינו שלושה תחומים אפשריים שונים המתארים את

האילוצים.



(א) ידוע, כי הרווח ממוצר א' 2 ש"ח, וממוצר ב' 3 ש"ח.

מייצרים x מוצרים מסוג א' ו- y מוצרים מסוג ב'.

רשמו תבנית מטרה.

(ב) איזה מהתחומים מאפשר רווח מכסימלי גדול יותר?

2.  שרטטו את התחום המתאים למערכת האי-שוויונים.

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 14 \\ -2 \leq y \leq 16 \end{cases} \quad \text{בחרו} \quad \begin{cases} x \leq 10 \\ x + 2y \geq 4 \\ x - y \geq -4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

3. 

בית חרושת מייצר שני סוגי מלט.

x - משקל בטונות של מלט מסוג א'.

y - משקל בטונות של מלט מסוג ב'.

א) משקל המלט משני הסוגים

יחד אינו עולה על 300 טון

ליום.

רשמו אי-שוויון מתאים.

ב) משקל המלט מסוג א' אינו

עולה על 200 טון.

משקל המלט מסוג ב' אינו

עולה על 150 טון.

רשמו אי-שוויונים

מתאימים.

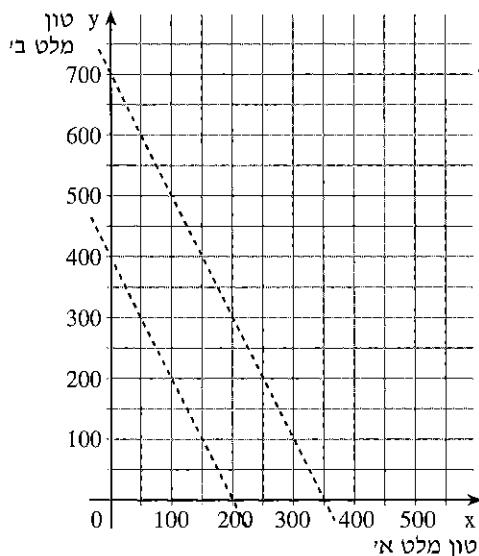
ג) שרטטו את התחום האפשרי

במערכת הצירים.

ד) כל קו גובה משורטט מתאר רווח כלשהו.

– שרטטו קו גובה המתאר רווח מכסימלי בתחום האפשרי.

– כמה טון מלט מכל סוג ניתן לייצר, כדי לקבל רווח מכסימלי?



4. 

א) רשמו מערכת אי-שוויונים מתאימה לתחום המשורטט.

ב) x מייצג משקל, בטונות, של חיטה שקוצרים ביום.

y מייצג משקל, בטונות, של שעורה שקוצרים ביום.

נסו לתאר במילים את

האילוצים המתוארים באי-

שוויונים.

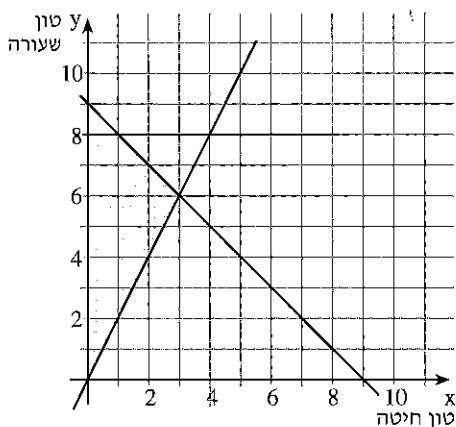
ג) על טון חיטה מרוויחים 100

ש"ח, ועל טון שעורה 50 ש"ח.

רשמו תבנית מטרה, שרטטו קו

גובה, ומצאו את הרווח

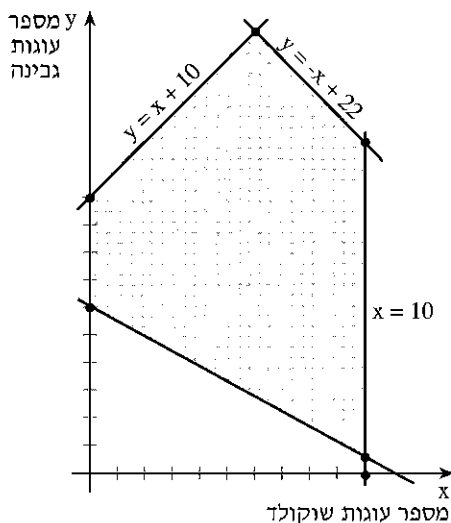
המכסימלי האפשרי.



מי ירוויח יותר? עוד שאלות לסיכום

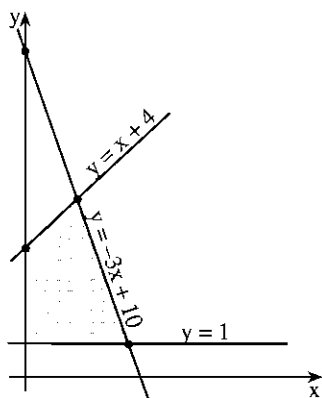
1. 

- שלוש קונדיטוריות מייצרות עוגות שוקולד ועוגות גבינה.
 x מייצג מספר עוגות שוקולד, שנמכרות בשעה.
 y מייצג מספר עוגות גבינה, שנמכרות בשעה.
 לפניכם תחום אפשרי, שנקבע לפי אילוצים שונים, ומתאים לשלוש הקונדיטוריות.



- (א) מצאו את שיעורי הקודקודים ורשמו בערך, יחידות על הצירים.
 (ב) קונדיטוריה "חיים" מוכרת עוגת שוקולד ב- 5 ש"ח, ועוגת גבינה ב- 3 ש"ח.
 קונדיטוריה "איציק" מוכרת עוגת שוקולד ב- 3 ש"ח, ועוגת גבינה ב- 4 ש"ח.
 קונדיטוריה "מלכה" מוכרת עוגת שוקולד ב- 4 ש"ח, ועוגת גבינה ב- 5 ש"ח. רשמו תבנית מטרה למכירות של כל קונדיטוריה.
 (ג) מצאו עבור כל קונדיטוריה את ההכנסה המכסימלית האפשרית.
 (ד) למי מהן ההכנסה המכסימלית הגדולה ביותר?

תרגילים



2. לפניכם שרטוט של תחום אפשרי.

א) רשמו את מערכת האי-שוויונים המתאימה.

ב) מצאו את שיעורי הקודקודים.

סמנו יחידות על הצירים.

ג) באיזו נקודה מקבלת תבנית המטרה

$2x + y$ ערך מכסימלי, ומהו הערך

המכסימלי?

3. בבית חרושת מייצרים מוטות של ברזל ושל נחושת.

x מייצג משקל בטונות של מוטות ברזל.

y מייצג משקל בטונות של מוטות נחושת.

בשעה מייצרים, לכל היותר, 8 טון של מוטות משני הסוגים יחד.

בשעה חייבים לייצר, לכל הפחות, 3 טון של מוטות משני הסוגים יחד.

כמות הברזל שמייצרים בשעה היא לכל היותר 7 טון.

כמות הנחושת שמייצרים בשעה היא לכל היותר 5 טון.

א) רשמו מערכת אי-שוויונים, ושרטטו את התחום האפשרי.

ב) מכל טון של ברזל מרוויח ביהח"ר 50 ש"ח, ומכל טון נחושת 100 ש"ח.

רשמו תבנית מטרה, שרטטו ישר, ומצאו מהו הרווח המכסימלי האפשרי.

4. הגרף מתאר אפשרויות של ייצור סוכר לבן וסוכר חום.

מק"ג אחד של סוכר לבן מרוויחים

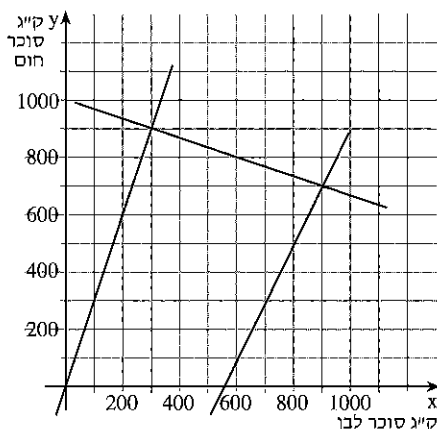
0.5 ש"ח.

מק"ג אחד של סוכר חום מרוויחים

1 ש"ח.

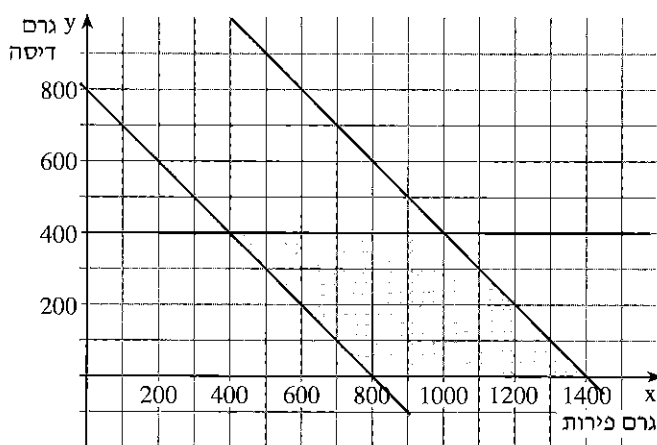
רשמו תבנית מטרה, ומצאו מהו הרווח

הגדול ביותר האפשרי.



5. במפעל מייצרים חומר להדברת נמלים וחומר להדברת תיקנים (ג'וקים).
 x מייצג משקל בק"ג של חומר להדברת נמלים, המיוצר ביום.
 y מייצג משקל בק"ג של חומר להדברת תיקנים, המיוצר ביום.
 בסה"כ מייצרים לא יותר מ- 500 ק"ג חומרי הדברה ביום.
 כמות החומר המיוצר ביום להדברת תיקנים היא לפחות 50 ק"ג.
 כמות החומר המיוצר להדברת תיקנים היא יותר מפי 2 מהכמות להדברת נמלים.
 (א) רשמו מערכת אי-שוויונים מתאימה, ושרטטו את התחום האפשרי (בחרו ביחידת מידה של 50 ק"ג).
 (ב) מכל ק"ג של חומר להדברת נמלים מרוויחים 2 ש"ח.
 מכל ק"ג של חומר להדברת תיקנים מרוויחים 1.5 ש"ח.
 רשמו תבנית מטרה, שרטטו ישר מתאים, הזיזו ומצא מהו הרווח המכסימלי האפשרי.

6. הגרף מתאר אפשרויות של תפריט יומי לתינוקות.
 בכל גרם פירות יש 0.007 גרם ברזל, ובכל גרם דיסה יש 0.005 גרם ברזל.



- (א) רשמו תבנית מטרה למשקל הברזל ב- x גרם דיסה ו- y גרם פירות.
 (ב) מצאו תפריט יומי אפשרי, שבו כמות הברזל מכסימלית.
 מה כמות הברזל בתפריט שמצאתם?

... אזאוי רק פהגחלה
 של פליאג אכנון באלאה ...

ארגון נתונים בתכנון לינארי

לד כה הכרגס כאים אפגיון בעליו פשטאלה בגכנון אינארי. בעליוה עמ אספר דה יארי של אוואצים, נוא אפגמטל בטבאף אארלון פנגאנים. נדעים זאל בשאלאל פבאל.

1.  מפעל מייצר שני סוגי מיצים: מיץ תפוזים ומיץ ענבים.

בייצור שלושה שלבים: סחיטה, ערבוב, מילוי.

הזמן הנדרש לכל שלב מתואר בטבלה.

סוג המיץ	סחיטה	ערבוב	מילוי
תפוזים 	8 דקות לליטר	2 דקות לליטר	5 דקות לליטר
ענבים 	3 דקות לליטר	10 דקות לליטר	4 דקות לליטר

א) כמה דקות דרושות **לסחיטה** של 3 ליטר מיץ תפוזים?

לערבוב של 3 ליטר מיץ תפוזים?

למילוי של 3 ליטר מיץ תפוזים?

חשבו כמה דקות דרושות לייצור כולל של 3 ליטר מיץ תפוזים?

רשמו תבנית למספר הדקות הדרושות לייצור כולל של x ליטר מיץ תפוזים.

ב) חשבו כמה דקות דרושות **לסחיטה** של 4 ליטר מיץ תפוזים ו- 5 ליטר מיץ

ענבים.

ג) רשמו תבנית למספר הדקות הדרוש **לסחיטה** של x ליטר מיץ תפוזים

ו- y ליטר מיץ ענבים.

ד) רשמו תבנית למספר הדקות הדרושות לערבוב של x ליטר מיץ תפוזים

ו- y ליטר מיץ ענבים.

ה) רשמו תבנית למספר הדקות הדרושות למילוי של x ליטר מיץ תפוזים

ו- y ליטר מיץ ענבים.

המשך —

ו) ביום מסוים פרצה במפעל שביתה לאחר שעתיים של עבודה (120 דקות) רשמו משוואות מתאימות.

ז) שרטטו את הישרים שבסעיף ו' במערכת צירים

(בחרו: $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 40$)

צבעו שטח המתאים לייצור אפשרי של מיץ תפוזים ומיץ ענבים.

ח) – האם אפשר, ביום זה, לסיים ייצור של 10 ליטרים מיץ תפוזים

ו- 10 ליטרים של מיץ ענבים? הסבירו.

– האם אפשר להספיק לייצר 10 ליטרים של מיץ תפוזים ו- 8 ליטרים מיץ

ענבים? הסבירו.

כלל האלף בית 4-1-5

2. 

שאלות כאלה פתרנו קודם, עם מספר קטן יותר של אילוצים.

נתון תחום אפשרי, המתאר ייצור של x ק"ג מוצר א' ו- y ק"ג מוצר ב'.

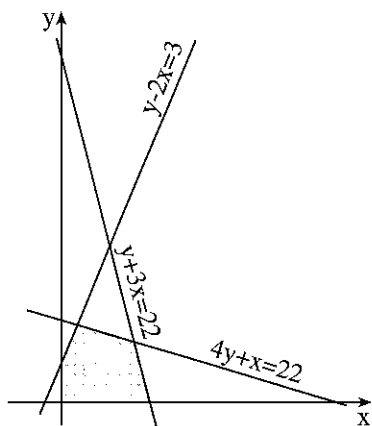
א) ידוע שהרווח לק"ג מוצר א' הוא 3 ש"ח ולק"ג מוצר ב' 5 ש"ח.

רשמו את האי-שוויונים המתוארים

בתחום.

רשמו תבנית לרווח המתקבל מייצור

של x ק"ג מוצר א' ו- y ק"ג מוצר ב'.



תבנית המטרה נקראת גם בשם **פונקציית מטרה**,

והיא מסומנת לעתים: $f(x, y)$.

השלימו: $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

ב) שרטטו קו גובה המתאים לרווח של 15 ש"ח.

ג) שרטטו קו גובה המתאים לרווח של 30 ש"ח.

ד) הזיזו את קו הגובה במקביל היכן יתקבל הרווח המכסימלי? כמה ק"ג מכל

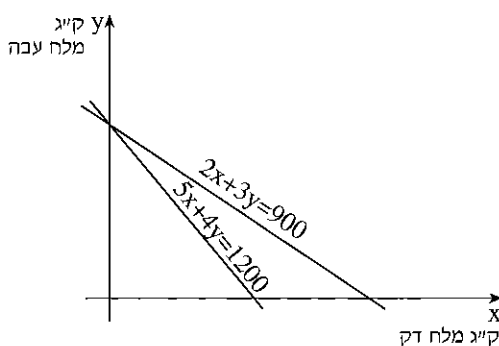
מוצר כדאי לייצר? חשבו מהו הרווח המכסימלי.

תרגילים

3. הטבלה שלפניכם מתארת תהליך ייצור של שני סוגי מלח: מלח דק ומלח עבה.

סוג	זמן עיבוד	זמן אריזה
מלח דק 	2 דקות לק"ג	5 דקות לק"ג
מלח עבה 	3 דקות לק"ג	4 דקות לק"ג

- (א) חשבו כמה דקות דרושות לעיבוד של 10 ק"ג מלח דק ו- 15 ק"ג מלח עבה.
 (ב) המכונה המעבדת יכולה לעבוד לכל היותר 15 שעות ביום (900 דקות), והמכונה האורזת יכולה לעבוד לכל היותר 20 שעות (1200 דקות).
 ביום מסוים עיבדו רק מלח דק. האם אפשר להספיק לעבד 300 ק"ג מלח דק?
 (ג) אם מייצרים רק מלח עבה, האם אפשר להספיק לעבד 300 ק"ג מלח עבה? האם אפשר להספיק לעבד ולארוז 300 ק"ג מלח עבה?
 (ד) רשמו תבנית לזמן ה**עיבוד** של x ק"ג מלח דק ו- y ק"ג מלח עבה.
 רשמו תבנית לזמן ה**אריזה** של x ק"ג מלח דק ו- y ק"ג מלח עבה.
 (ה) רשמו אי-שוויונים מתאימים.
 (ו) לפניכם משוואות הישרים שהם גבולות התחומים.
 צבעו שטח מתאים למערכת האי-שוויונים שרשמתם.

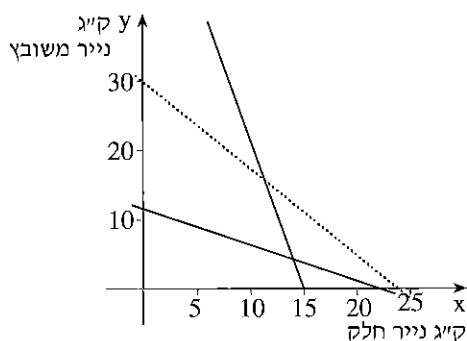


- (ז) סמנו שתי נקודות באזור הצבוע, ורשמו במילים כמה ק"ג מכל סוג מייצרים על-פי נקודות אלה, ומהו זמן העיבוד והאריזה.

4. מפעל מייצר שני סוגי נייר: משובץ וחלק.
 תהליך הייצור מורכב מהשלבים הבאים: הרכבת העיסה, ערבוב ועיבוד.
 בטבלה נתונים פרטי הייצור ב"דקות לק"ג.

סוג	הרכבת העיסה	ערבוב	עיבוד
נייר חלק	20	10	8
נייר משובץ	5	8	15

- (א) כמה דקות דרושות להרכבת עיסה של 20 ק"ג נייר חלק ו-10 ק"ג נייר משובץ?
 כמה דקות דרושות לערבוב עיסה של 20 ק"ג נייר חלק ו-10 ק"ג נייר משובץ?
 כמה דקות דרושות לייצור כולל של 20 ק"ג נייר חלק?
 (ב) במחזור ייצור אחד:
 — הרכבת העיסה חייבת להמשך **לפחות** 5 שעות (שהן _____ דקות).
 — המכונות המערבבות יכולות לפעול **לכל היותר** 4 שעות.
 — העיבוד צריך להתבצע במשך **לפחות** 3 שעות.
 רשמו תבנית לזמן ה**עיבוד** של x ק"ג נייר חלק ו- y ק"ג נייר משובץ, ורשמו אי-שוויון מתאים.
 רשמו שני אי-שוויונים נוספים, המתאימים לזמן ה**הרכבה** ולזמן ה**ערבוב**.
 (ג) לפניכם הישרים שבגבולות האי-שוויונים. התאימו את המשוואות לישרים וצבעו אזור המתאים לאי-שוויונים.



- (ד) אם מייצרים רק נייר חלק, כמה ניתן לייצר במחזור ייצור אחד?
 אילו מכונות אינן מנוצלות בכל הזמן שניתן להן? הסבירו.

$$5. \quad \begin{cases} 3x + y \leq 180 \\ y + x \leq 90 \\ y - x \geq -50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת האילוצים הבאה:}$$

- (א) שרטטו את התחום האפשרי. (כדאי לחלק את הצירים ליחידות של 10).
 (ב) נתונה פונקציית המטרה: $f(x, y) = x + 10y$. שרטטו קו גובה כלשהו, ורשמו את ערכה של פונקציית המטרה בנקודות על הקו הזה.
 (ג) הזיזו את קו הגובה ששרטטתם, ומצאו את ערכי x ו- y , עבורם מקבלת פונקציית המטרה ערך מכסימלי בתחום האפשרי. חשבו ערך זה.

6. מפעל מייצר שני סוגי סלטים: סלט חמוץ וסלט חריף.

יצור סלט חמוץ: משך הבישול: 20 דקות לק"ג

משך הערבוב: 5 דקות לק"ג

ייצור סלט חריף: משך הבישול: 10 דקות לק"ג

משך הערבוב: 10 דקות לק"ג

- (א) הכינו טבלה מתאימה לנתונים, ורשמו אותם בתוכה.
 (ב) מהו זמן הבישול של 5 ק"ג סלט חמוץ ו-10 ק"ג סלט חריף?
 (ג) האם ניתן להספיק לבשל במשך שעתיים 3 ק"ג סלט חמוץ ו-2 ק"ג סלט חריף?
 (ד) רשמו תבנית לזמן הבישול של x ק"ג סלט חמוץ ו- y ק"ג סלט חריף.
 (ה) הזמן המוקצב לבישול הוא לכל היותר 8 שעות (____ דקות). רשמו אי שוויון מתאים.

(ו) הזמן המוקצב לערבוב הוא לכל היותר

10 שעות. רשמו אי-שוויון מתאים.

(ז) לפניכם גרף של האי-שוויונים שרשמתם.

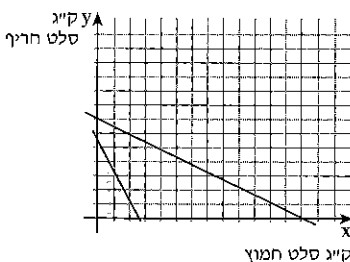
התאימו לכל ישר את המשוואה.

(ח) בחרו נקודה באזור הצבוע ורשמו

במילים מה היא מתארת.

(ט) האם קיים אילוץ, שהורדתו לא תשנה

את הפתרון? אם כן, רשמו מהו ונמקו.



”הכל פתוח”...

הספיקו זה גרסא אופטימאל כלשהוא פאפלירי פאא גחאם פאא.

$$1. \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 50 \\ y \leq 2x + 40 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת האילוצים:}$$

(א) שרטטו את התחום האפשרי, מה המיוחד בתחום זה?

(ב) נתונה פונקציית המטרה $f(x, y) = 3x + 5y$

- שרטטו קו גובה מתאים למקרה שבו ערך פונקציית המטרה הוא 100.
- הזיזו את קו הגובה במקביל לקו המשווה, ובדקו מה קורה לערכה של פונקציית המטרה בהזזה ”כלפי מעלה” ובהזזה ”כלפי מטה”.
- היכן, בתחום האפשרי, מקבלת פונקציית המטרה ערך מינימלי?
- האם יש ערך מכסימלי לפונקציית המטרה, במסגרת התחום האפשרי? נמקו.

בתחום פתוח, לא תמיד מקבלת פונקציית המטרה ערך מכסימלי או מינימלי. יש לבדוק על-פי פונקציית המטרה הנתונה, כלומר, בעזרת קווי הגובה המתאימים.



$$2. \quad \begin{cases} x + y \geq 20 \\ y - x \leq 3 \\ 5y - x \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת האילוצים:}$$

(א) שרטטו את התחום האפשרי.

(ב) נתונה פונקציית מטרה: i) $f(x, y) = x + y$

שרטטו קווי גובה מתאימים, ובדקו אם פונקציית המטרה מקבלת מכסימום או מינימום בתחום.

ii) $f(x, y) = x - 2y$ נתונה עוד פונקציית מטרה: (ג)

בדקו אם היא מקבלת מינימום או מכסימום בתחום.

3. רשמו מערכת אי-שוויונים, כך שהתחום המשותף המתאים להם יהיה פתוח, ושרטטו את התחום.

4. במפעל מייצרים בשעה לפחות 4 ק"ג ריבת משמש, ולפחות 5 ק"ג ריבת שזיפים. ידוע גם, שהמשקל של ריבת המשמש הוא לכל היותר 10 ק"ג יותר מהמשקל של ריבת השזיפים.

(א) רשמו מערכת אי-שוויונים מתאימה, כאשר x מייצג משקל בק"ג של ריבת משמש, ו- y מייצג משקל בק"ג של ריבת שזיפים.

(ב) שרטטו תחום אפשרי מתאים.

(ג) עלות הייצור היא 5 ש"ח לק"ג ריבת משמש, ו- 7 ש"ח לק"ג ריבת שזיפים. רשמו פונקציית מטרה, $f(x, y)$, ומצאו עלות מינימלית. (מצאו תחילה כמה יש לייצר מכל סוג כדי לקבל עלות מינימלית).

5. נתונה מערכת אי-שוויונים:

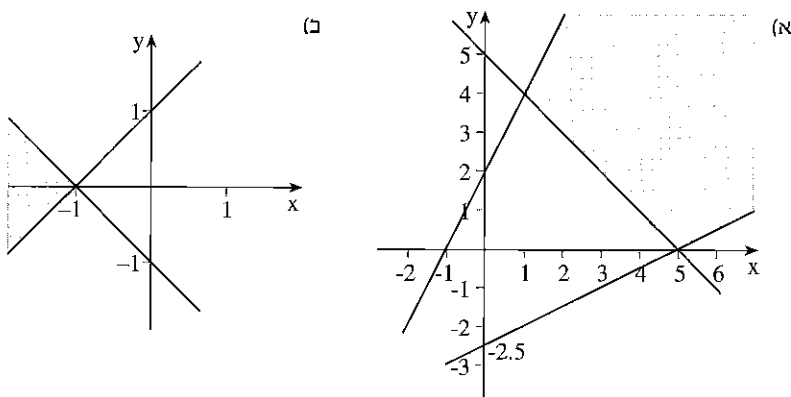
$$\begin{cases} y \geq 2 \\ x \leq -1 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$

(א) שרטטו את התחום המשותף.

(ב) הוסיפו אי-שוויון כרצונכם, כך שהתחום הנ"ל "יסגר", ושרטטו בהתאם.

תרגילים

6. רשמו מערכות אי-שוויונים, המתאימות לתחומים הפתוחים הבאים.



7. רשמו מערכת של שלושה אי-שוויונים לפחות, כך שהתחום המשותף המתאים להם יהיה פתוח, וכולו מעל ציר ה- x . (תוכלו לשרטטו תחילה תחום כזה.)

8. מצאו את נקודות המכסימום והמינימום של פונקצית המטרה:
 $f(x, y) = 5x + 8y$ במסגרת האילוצים:

$$\begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 2 \\ y \geq -3 \\ 3x + 4y \leq 24 \end{cases}$$

9. תזונאית מעוניינת שאדם הבא אליה להרכיב תפריט יקבל שני סוגי ויטמינים. הכמות המינימלית ההכרחית היא 260 מ"ג מכל סוג ויטמינים לשבוע. שני הסוגים נמצאים בתפוחי אדמה ובסלק בלבד. סמנו ב- x את משקל תפוחי האדמה וב- y את משקל הסלק.

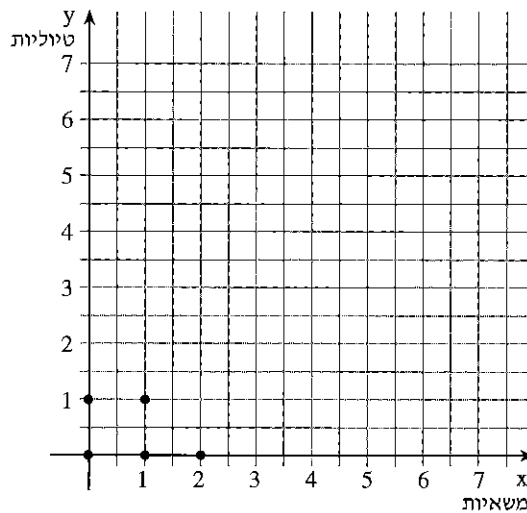
סוג	1 ק"ג תפוחי אדמה	1 ק"ג סלק
כמות ויטמין I סוג I 	20 מ"ג	60 מ"ג
כמות ויטמין II סוג II 	50 מ"ג	20 מ"ג

- (א) רשמו אי-שוויונים מתאימים ושרטטו את התחום האפשרי.
 (ב) ידוע, כי מחיר ק"ג תפוחי אדמה 20 ש"ח, ומחיר ק"ג סלק 15 ש"ח. רשמו פונקצית מטרה $f(x, y)$, ומצאו כמה ק"ג מכל סוג יש לאכול לפי ההוראות, כדי שההוצאות יהיו מינימליות.
 (ג) מהן ההוצאות המינימליות?

ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות?

1. קבעו באילו מהמקרים הבאים המשתנים מקבלים ערכים טבעיים:
- רוצים למצוא מכסימום רווח ממכירת כמויות של עגבניות ושל מלפפונים.
 - תחום אפשרי מתאר אילוצים של מפעל המייצר שולחנות וכסאות.
 - פונקצית המטרה מתארת זמן פעולה.
 - פונקצית המטרה מתארת מספר נקודות המתקבל מ- x תשובות נכונות ו- y תשובות לא נכונות.

2. חברת "המטייל" משכירה מכוניות לטיולים. לחברה יש 5 משאיות ו-7 טיוליות. בית ספר שוכר x משאיות ו- y טיוליות.
- (א) רשמו אי-שוויונים מתאימים.
- בשרטוט מסומנות חמש נקודות מהתחום האפשרי.



- (ב) המשיכו בסימון נקודות התחום האפשרי. כמה נקודות בתחום האפשרי? הסבירו.

- (ג) שכירת משאית ליום עולה 400 ש"ח ושכירת טיולית עולה 200 ש"ח. רשמו פונקצית מטרה: $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ למחיר שתגבה חברת "המטייל".

המשך ←

- (ד) מצאו אפשרות של מספר משאיות ומספר טיוליות המתאים לרווח יומי של 3000 ש"ח. שרטטו קו גובה מתאים לרווח של 3000 ש"ח.
כמה אפשרויות בתחום האפשרי מתאימות לרווח של 3000 ש"ח?
רשמו את כולן.
- (ה) שרטטו קו גובה מתאים לרווח יומי של 2000 ש"ח.
כמה אפשרויות מתאימות לרווח זה?
- האם ניתן להרוויח ביום 1500 ש"ח בדיוק? נמקו.
- רשמו עוד שלושה סכומים שלא ניתן להרוויחם ביום אחד.
- (ו) סמנו את הנקודה המתאימה לרווח המכסימלי האפשרי (מסעיף א').

תרגיל

3. בייס "ארזים" רוצה לשכור משאיות וטיוליות מחברת ה"מטייל" ליום אחד, עבור 200 נוסעים לכל היותר.
משאית יכולה להכיל 50 נוסעים, וטיולית יכולה להכיל 20 נוסעים.
חברת ה"מטייל" יכולה לספק לבייס "ארזים" 3 משאיות לכל היותר ו-7 טיוליות לכל היותר.
יחד עם זאת חברת ה"מטייל" מוכנה לשלוח כלי רכב רק אם מספר המקומות הכולל שבהם יהיה לפחות 100.
ביה"ס, לעומת זאת, מעוניין שלא יסעו יותר מ-200 תלמידים.
שכירת משאית ליום עולה 400 ש"ח ושכירת טיולית ליום עולה 200 ש"ח.
 x מייצג את מספר המשאיות ו- y מייצג את מספר הטיוליות.
(א) רשמו מערכת אי-שוויונים לבעיה, ושרטטו את התחום האפשרי.
(ב) בתחום ששרטטתם, כולל הקווים שתוחמים אותו נמצאות 17 נקודות ששיעוריהן מספרים שלמים.
בחרו שתי נקודות, ורשמו את כל המשתמע מהן: מספר המשאיות והטיוליות, מס' הנוסעים ועלות השכירה.
בסופו של דבר התברר, שיצאו לטיול 170 נוסעים.
(ג) המטרה של חברת ה"מטייל" לגבות את התשלום המכסימלי.
כמה כלי רכב מכל סוג כדאי לה לשלוח, ומהו המחיר שתגבה? (נסו למצוא יותר מאפשרות אחת).
(ד) מטרת הנהלת בית-הספר, לעומת זאת, לשלם מחיר מינימלי.
כמה כלי רכב מכל סוג תבקש ההנהלה לשלוח, וכמה תשלם עבור שכירתם?

בעיות שלמות

לד כה שגרם בליוא שלומא עם מספר אילוצים קטן, אלו בליוא אחילה, כהן נהבקלגם לבצח חלקים מפרגון הבליה. אמאל, שרטוט התחום האפשרי. בסליו צה בליוא, כהן גבצח אלו כל השלבים.

1.  יצרן מייצר שני סוגי ארונות, כמתואר בטבלה.

סוג הארונות	כמות העץ הדרושה לארון	מס' שעות עבודה לארון
מטבח 	5 מ"ר לארון	10
בגדים 	4 מ"ר לארון	20

כמות העץ שיש למפעל בסה"כ היא 120 מ"ר, ומספר שעות העבודה העומדות לרשותו הוא 450 לכל היותר.

- (א) רשמו מערכת אילוצים, ושרטטו את התחום האפשרי.
 (ב) הרווח הנקי לארון מטבח הוא 900 ש"ח, ולארון בגדים 600 ש"ח.
 רשמו פונקצית מטרה לרווח המתקבל מייצור של x ארונות מטבח ו- y ארונות בגדים.
 (ג) כמה ארונות מכל סוג על המפעל לייצר, כדי לקבל רווח מכסימלי, ומהו הרווח המכסימלי?

2.  האילוצים הם כמו בשאלה הקודמת, אבל הרווח הנקי לארון מטבח הוא 500 ש"ח, ולארון בגדים 1000 ש"ח. רשמו פונקצית מטרה מתאימה.
 (א) רשמו פתרון מתאים.
 (ב) רשמו את כל הפתרונות המתאימים.
 (ג) מצאו שני זוגות (x, y) , שעבורם הרווח של שני המפעלים זהה.
 (ד) האם תוכלו למצוא רווח זהה מכסימלי עבור שני המפעלים?

שלבי הפתרון הם:

- (א) רישום אי-שוויונים ושרטוט התחום האפשרי.
 (ב) רישום פונקצית המטרה.
 (ג) מציאת אופטימום. כלומר, מציאת מכסימום או מינימום.



תרגילים

3. מפעל מייצר גלידת וניל וגלידת שוקולד.

תהליך הייצור מתחלק לשני שלבים: בישול וקירור.

לייצור ק"ג גלידת וניל זקוקים ל- 10 דקות בישול ו- 20 דקות קירור, ולייצור

ק"ג גלידת שוקולד זקוקים ל- 5 דקות בישול ו- 30 דקות קירור.

אפשר להפעיל את מכונת הבישול לכל היותר במשך 40 דקות, ואת מכונת הקירור

– לכל היותר במשך 180 דקות.

מק"ג גלידת וניל מרוויחים 80 ש"ח, ומק"ג גלידת שוקולד - 40 ש"ח.

א) רשמו את הנתונים בטבלה.

זמן בישול לק"ג	זמן קירור לק"ג	רווח לק"ג	
			גלידת וניל
			גלידת שוקולד

ב) מהו הרווח המכסימלי, שיוכל המפעל להרוויח?

ג) אם מרוויחים 50 ש"ח על כל ק"ג מכל סוג, מהו הרווח המכסימלי במקרה זה?

4. ועד עובדים במפעל מעוניין להזמין לעובדיו חבילות שי, המכילות שקיות עם

פירות יבשים וחפיסות שוקולד.

הוחלט כי כל חבילת שי תכיל לכל היותר שמונה פריטים, משקלה יהיה לפחות

1000 גר', ונפחה לפחות 2000 סמ"ק.

המשקל והנפח של שקית פירות יבשים ושל חפיסת שוקולד רשומים בטבלה:

משקל	נפח	
100 גר'	500 סמ"ק	שקית פירות יבשים
200 גר'	100 סמ"ק	חפיסת שוקולד

מחיר שקית עם פירות יבשים 4 ש"ח, ומחיר חפיסת שוקולד 2 ש"ח.

א) כמה שקיות של פירות יבשים וכמה חפיסות שוקולד כדאי למוכר לשים

בכל חבילת שי כדי לגבות מחיר מכסימלי?

ב) המטרה של ועד העובדים לשלם מחיר מינימלי.

כמה שקיות פירות יבשים וכמה חפיסות שוקולד כדאי לו להזמין בכל חבילת שי?

5. במפעל מייצרים שני סוגים של לחמניות: עם שומשום ובלי שומשום. ידוע כי לכל לחמניה עם שומשום דרושים 40 גרם בצק ו-2 גרם שומשום. לכל לחמניה בלי שומשום דרושים 50 גרם בצק.
- (א) סדרו את הנתונים בטבלה.

לחמניה עם שומשום	לחמניה בלי שומשום	כמות הבצק	כמות השומשום
		הדרושה ללחמניה	הדרושה ללחמניה

- (ב) בכל מחזור ייצור עומדים לרשות המפעל 5 ק"ג בצק ו-160 גרם שומשום. רשמו מערכת אילוצים מתאימה לבעיה, ושרטטו את התחום האפשרי.
- הרווח הנקי של המפעל ללחמניה עם שומשום הוא 10 אג', וללחמניה בלי שומשום 5 אג'.
- x מייצג את מספר הלחמניות עם שומשום שמייצרים.
- y מייצג את מספר הלחמניות בלי שומשום שמייצרים.
- (ג) רשמו פונקציית מטרה לרווח הנקי המתקבל. $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$
- (ד) שרטטו קו גובה כלשהו, והזיזו אותו עד המקום בתחום האפשרי, בו מתקבל רווח מכסימלי.
- (ה) כמה לחמניות מכל סוג צריך המפעל לייצר במחזור ייצור, כדי לקבל רווח מכסימלי. מהו הרווח המכסימלי?

6. במפעל עובדים מהנדסים וטכנאים.
- השכר החודשי של מהנדס הוא 5000 ש"ח, ושל טכנאי - 3000 ש"ח.
- המפעל מקציב למשכורות החודשיות של x מהנדסים ו- y טכנאים לכל היותר 120,000 ש"ח. ניתן להעסיק מכסימום 18 מהנדסים.
- (א) רשמו מערכת אי-שוויונים, ושרטטו את התחום האפשרי.
- (ב) הרווח של המפעל על כל מהנדס הוא 1000 ש"ח, ועל כל טכנאי 600 ש"ח. רשמו פונקציית מטרה.
- כמה מהנדסים וכמה טכנאים כדאי למפעל להעסיק, כדי לקבל רווח מכסימלי? (תוכל לשרטטו קו גובה מתאים).
- מהו הרווח המכסימלי?

מבחר תשובות

נגיעה קלה בכלכלה - מבוא (עמודים 436-435)

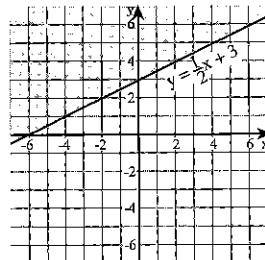
1. ג) לא ניתן ד) על ציר y ה) על ציר x ו) יש עדיין מקום ח) בנקודות על הישר AB ט) לא ניתן
 ז) לפי A: 26,000 ש"ח לפי B: 22,000 ש"ח, לפי C: 19,000 ש"ח, לפי D: 17,000 ש"ח
 יא) לפי A יג) הריווח המכסימלי מתקבל בנקודה $(40, 0)$

בין מקבילים (עמודים 442-437)

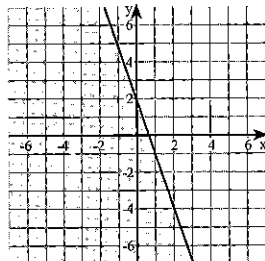
2. א) $y = 3$ ג) האזור שמעל הישר
3. א) $y = 2$ ב) $y \geq 2$
4. א) $x = 3$ ב) $x \geq 3$
6. א) לפי A: 500 כסאות, לפי B: 300 שולחנות ו- 500 כסאות לפי G: 200 שולחנות, לפי D: 100 שולחנות ו- 200 כסאות, לפי E: 300 שולחנות ו- 200 כסאות ג) על ציר x ד) על ציר y
 ה) 19,000 ש"ח, 10,500 ש"ח, 15,000 ש"ח, 6,000 ש"ח ו) לא (מכסימום 15,000 ש"ח)
 ז) 300 שולחנות ו- 500 כסאות והרווח המכסימלי 30,000 ש"ח ח) $y = 500$ ט) $y \leq 500$
 י) $x \leq 300$
7. ג) $x \geq 2$
8. א) $y \leq 1$ ב) $y \leq 3$ ג) $x \leq -2$ ד) $x \leq 2$
10. א) $x \leq 5000$ ב) $y \leq 7000$ ד) על ציר y ה) 800 ש"ח, 1500 ש"ח, 1400 ש"ח
 ו) 5000 נורות ו- 7000 נורות והרווח 2900 ש"ח
11. א) 2 טון פרחים ו- 4 טון פירות, B: 5 טון פרחים ו- 3 טון פירות
 ד) משלוחים אפשריים: $(1, 2)$, $(1.5, 2.1)$, $(2, 3)$

"הפרד ומשול" במישור (עמודים 444-443)

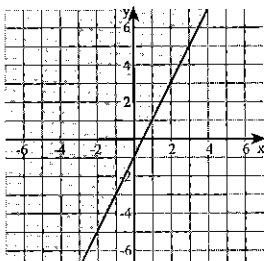
3. ב)

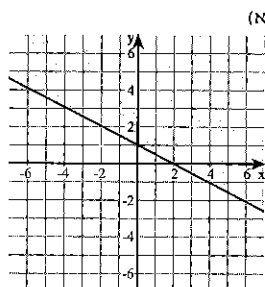
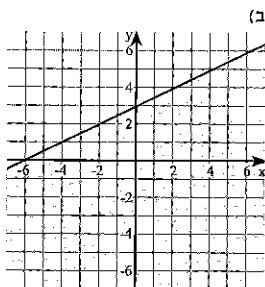
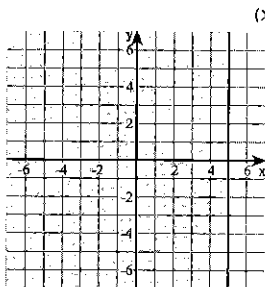


4. א)



ב)





5.

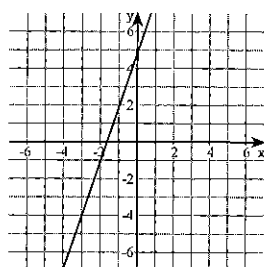
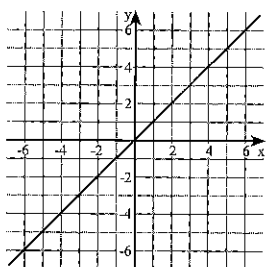
6. (א) 150 מהנדסים (ב) $y = -x + 150$ (ג) $y \geq 0, x \geq 0, y \leq -x + 150$
 (ד) A: 150 טכנאים B: 100 מהנדסים ו-50 טכנאים C: 100 מתנדבים
 D: 50 מתנדבים ו-50 טכנאים (ה) A, B (ו) 150 (ז) כן (ח) רק מספרים שלמים

7. (א) $y \geq \frac{1}{2}x + 2$ (ב) $y \geq -x + 5$

שרטוט ישרים (עמודים 445-447)

(ב) $\frac{y-x}{2} = 0$

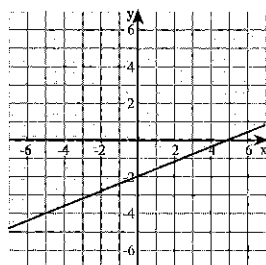
3. (א) $y - 3x = 5$



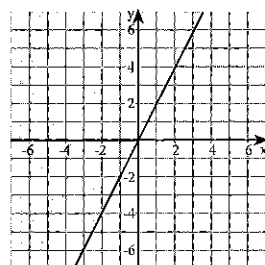
4. I - א, II - ב, III - ג

עוד על הפרדה במישור (עמודים 448-450)

3. (א) למשל: (1, 1) (ב) $x - y \leq 5$
 4. (א) האיזור הצבוע הוא מתחת לישר
 6. (א) $2x + y = 5$ (ב) $2y - x = 5$

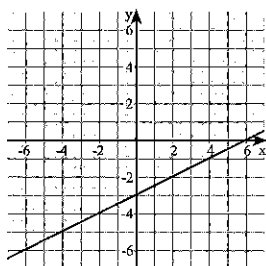


(ד)

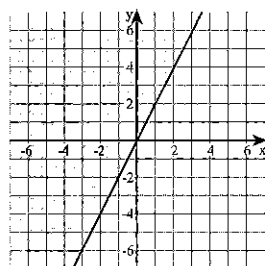


7. (ג)

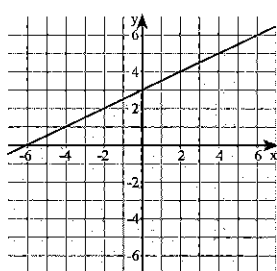
(ג) מעל לישר
(ד) מתחת לישר



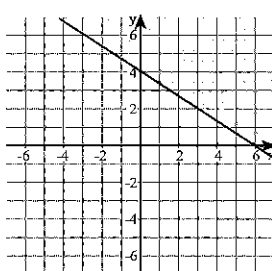
(ב)



8. (א)



(ד)



(ג)

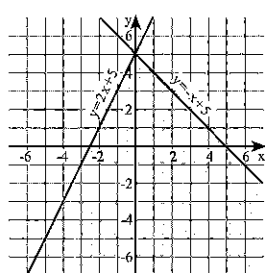
9. (א) מתחת לישר
(ב) מעל לישר

"טובים השניים מן האחד" (עמודים 451-459)

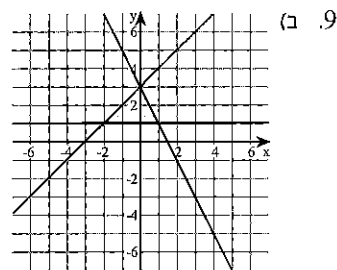
1. (א) A: 60 עוגות שמרים B: 40 עוגות קרם ו- 60 עוגות שמרים C: 100 עוגות קרם
(ב) $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 60, y \leq 60, x + y \leq 100$ (ג) A: 300 שיח, B: 700 שיח, C: 1000 שיח
ב- B רווח גדול מאשר ב- D

(ד) למשל (0, 0)

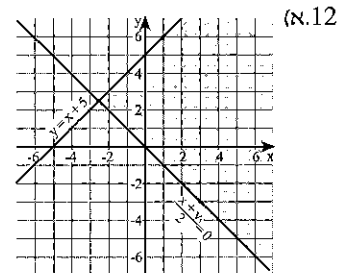
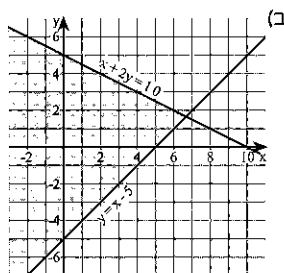
2. (ג)



5. (א) (i) הגרף העולה (ii) הגרף היורד (ב) $y \leq x + 2, 2x + y \leq 5$ (ג) $(0, 0), (0, -4), (2, 0)$
8 (א) $y = 3x, y = -3x, y \leq 3$ (ב) $y \geq 3x, y \geq -3x$ (ג) $(0, 0), (1, 3), (-1, 3)$
(ד) למשל: $(0, 1), (0.5, 2)$

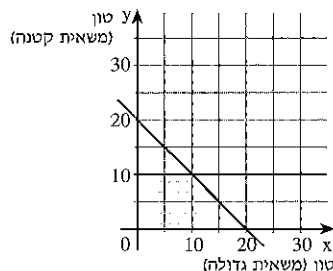


ג) לא קיים אזור משותף



13. א) $x \geq 0$, $y \geq x$, $y \leq 2$ ב) $y \leq -2x + 2$, $y \leq 2x - 2$, $y \geq 0$

14. א)



ב) הובלות אפשריות: A, B (ג) למשל: (10, 5), 10 טון ע"י משאית גדולה, 5 טון ע"י משאית קטנה
 ד) (15, 5) ה) על הישר $x + y = 20$

קוד לחישוב קודקוד (עמודים 460-464)

2. ב) $y \leq -2x + 10$, $y \leq x + 1$, $y \geq 0$ א) $A(3, 4)$ ב) $C(5, 0)$, $B(-1, 0)$
3. א) $y \geq 0$, $x \geq 0$, $y + x \leq 8$, $x \leq 4$, $y \leq 5$ ב) $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(4, 0)$, $(0, 5)$, $(0, 0)$
4. א) $y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \leq 2x + 50$, $x \leq 70$ ב) $(70, 190)$, $(0, 50)$, $(70, 0)$, $(0, 0)$

ג) $x + y \leq 2$, $y \geq 0$, $x \geq 0$

$$\left(\frac{5}{7}, -2\frac{3}{7} \right) \begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = 1.5x - 3.5 \end{cases} \quad (-2, 7) \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

7. א) $(-1, -3)$ ב) $(1, 2)$

8. א) $x + 3y \leq 6$, $y \geq -2x - 3$, $x \leq 0$ ב) $(-3, 3)$, $(0, -3)$, $(0, 2)$

9. א) $(0, 1\frac{1}{2})$, $(0, -2)$, $(7, -2)$ ב) $(0, 0)$, $(0, 1\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{3}, 0)$, $(1, 1)$

10. א) $C(\frac{8}{7}, \frac{9}{7})$, $B(0, -1)$, $A(0, 3)$ ב) $C(2, 0)$, $B(0, 5)$, $A(4, 1)$

ג) $C(1, 3)$, $B(-\frac{1}{2}, 0)$, $A(0, 2.5)$

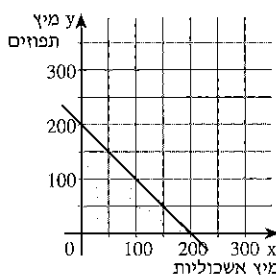
ד) $E(-2, 0)$, $D(0, 1)$, $C(0, -7\frac{1}{2})$, $B(5, -5)$, $A(5, 3.5)$

11. א) $(5, -\frac{11}{3})$ ב) $(-2, 0)$ ג) $(-1, 1)$ ד) $(-2, 3)$ ה) $(6, -3)$ ו) $(2, -1)$ ז) $(\frac{19}{13}, -\frac{24}{13})$

ח) $(1, 1)$ ט) $(3, 2)$

התחום האפשרי (עמודים 465-467)

1. א) $5x + 5y \leq 1000$ ב) $5x + 5y \leq 1000$ ד) C, B ה) לא



2. א) כן ב) כן ג) $x + y = 30$ ד) $x + y \leq 30$, $x \leq 20$, $y \geq 0$

ה) לכל היותר 30 זוגות מכנסיים ולכל היותר 20 זוגות מכנסיים ארוכים

3. א) $y \leq -x + 60$, $y \leq 20$ ב) $y \leq -1.5x + 9$, $y \leq 3x$

5. א) II ב) I ג) $3x + 3y \leq 60$ ד) C, B, A

"אל המטרה" (עמודים 468-470)

2. א) $x + \frac{1}{2}y = 35$ ב) 35 שיח ג) 70 שיח ד) $(60, 80)$, $(50, 100)$ ה) למשל: $(40, 160)$, $(100, 40)$

4. א) $5x - 2y \geq 0$ ב) 15 נקודות ג) 44 נקודות ד) $(9, 0)$, $(11, 5)$ ה) טבעיים ו- $5x - 2y \geq 0$

5. א) $100x + 50y \leq 5500$ ב) 5500 שיח ג) טבעיים

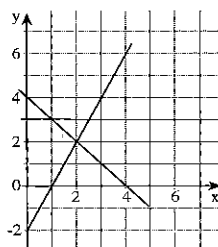
6. א) $2x + 1.5y \leq 90$ ב) 90 שיח ג) $(45, 40)$, $(15, 80)$

7. א) $x \leq 400$, $y \leq 800 - x$, $y \leq \frac{1}{3}x + 400$ ב) 850 שיח ג) $2x + y \leq 800$ ד) 800 שיח

ה) B: 400 שיח, C: 1100 שיח, D: 1200 שיח ו) B-D ז) לא

A: -3, B: -7, C: -9 ד) B-A

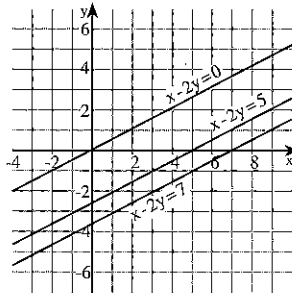
8 א)



9. א) $3x + 4y$ ב) למשל: $(4, 12)$, $(12, 6)$, $(20, 0)$

"על הגובה" (עמודים 471-474)

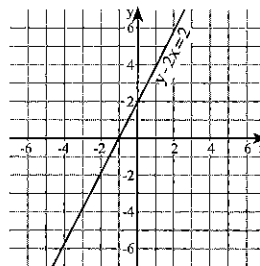
2. א) $y = -2x + 10$, $y = -2x + 7$, $y = -2x + 100$ ג) למשל: $2x + 3y = 100$
 3. א) $450x + 150y = 6000$ ב) $450x + 150y = 6000$, $3x + y = 40$, $(10, 10)$, $(5, 25)$
 ההוצאה 6000 ג) $450x + 150y = 10,500$, $3x + y = 70$, $(10, 40)$, $(20, 10)$
 5. ב) $x - 2y = 0$



6. א) לא, שני המקדמים צריכים להיות שווים ב) כן, לאחר צמצום המשוואה השנייה, המקדמים שווים
 7. לדוגמה: $x + 2y = 12$, $x + 2y = 8$, $x + 2y = 10$, $x + 2y = 20$, $2x + 4y = 30$
 8. א) $y \leq x + 5$, $y \leq -2x + 20$ ב) $5x + 2y = 20$ ג) $5x + 2y = 20$ ד) למשל: $(1, 7.5)$ ה) 5 ק"ג ו) 2.5 ק"ג ז) 19 ש"ח, הנקודה מחוץ לתחום

משוואות של "קו גובה" (עמודים 475-477)

3. $5x + 2y = -2$
 5. א) $y - 2x = 2$ ב) $y - 2x = -1$

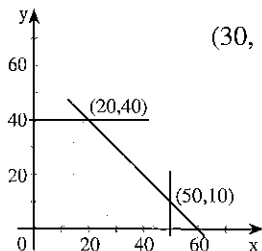
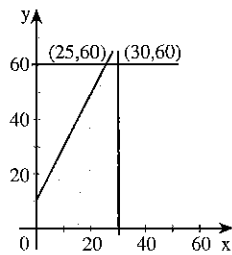


6. א) מקבילים ב) $3x - 5y = 0$ ג) $3x - 5y = 25$
 7. דרך A: $3x + 2y = 7$ דרך B: $3x + 2y = 15$ דרך C: $3x + 2y = 30$
 8. $2x + y = -4$
 9. ב) דרך A: $x - 4y = -7$ דרך B: $x - 4y = -20$ דרך C: $x - 4y = 7$ דרך D: $x - 4y = -13$
 10. ב) C ג) הערך 13, $2x + y = 13$

"אל הקודקוד" (עמודים 484-478)

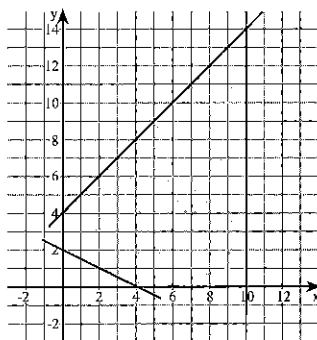
2. ג) בנקודה $(70, 40)$ ערך התבנית 390
 3. ב) למשל: $40x + 70y = 280$ ג) ב-A הערך המינימלי 390 קלוריות
 4. ב) למשל $2x + y = 50$ ג) ב-C וערכה 200 ד) למשל $x + y = 50$ ה) בקטע BC הערך 100

5. כשתכנית המטרה מתלכדת עם צלע (הגבול של תחום)
 6. א) (0, 0), (0, 10), (30, 0), (30, 60), (25, 60)
 ג) למשל: $x + 2y = 20$ (ד) ב- (30, 60) והערך 150



7. א) (0, 0), (0, 50), (100, 0), (100, 80), (30, 80)
 ג) למשל $2x + 4y = 20$ (ה) $x = 100$, $y = 80$ הרווח 520 ש"ח
 8. א) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 60$, $x \leq 50$, $y \leq 40$
 ב) (0, 0), (50, 0), (50, 10), (20, 40), (0, 40)
 ג) $2x + 3y$ ימכור 20 ק"ג וניל, 40 ק"ג שוקולד וירוויח: 160 ש"ח
 9. א) $x + 5y$ ב) ב- $B(100, 50)$ ג) 100 חשבוניות טלפון ו- 50 חשבונית עיריה. סה"כ הזמן 350 שניות

חלוצים ואילוצים - שאלות לסיכום (עמודים 485-486)

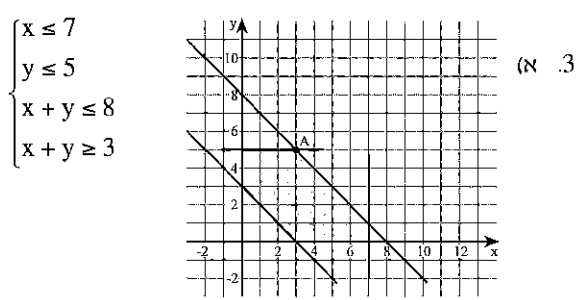


2.
 3. א) $x + y \leq 300$ ב) $x \leq 200$, $y \leq 150$ ד) 200 מסוג א', 100 מסוג ב'
 4. א) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 8$, $y \geq 2x$, $y \leq -x + 9$
 ב) לכל היותר 8 טון שעורה, סה"כ לא יותר מ-9 טון חיטה ושעורה, משקל השעורה יותר מפי 2 מממשקל החיטה ג) $100x + 50y$, רווח מכסימלי בנקודה (3, 6) והוא 600 ש"ח

מי ירוויח יותר? עוד שאלות לסיכום (עמודים 487-489)

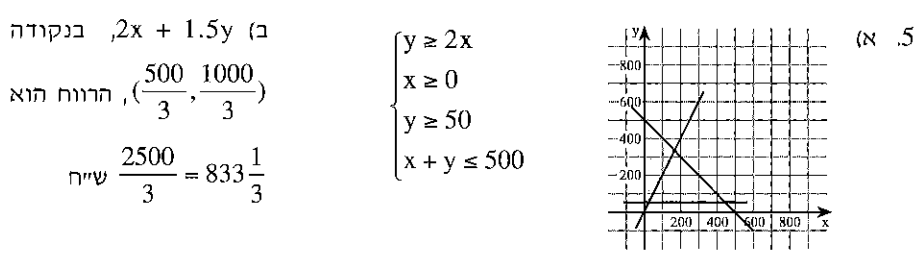
1. א) (0, 0), (6, 16), (10, 12), (10, 1), (0, 6), (0, 10) ג) חיים: 86 ש"ח, איציק: 84 ש"ח, מלכה: 104 ש"ח
 2. א) $x \geq 0$, $y \geq 1$, $y \leq x + 4$, $y \leq -3x + 10$ ב) (0, 1), (0, 4), (3, 1), $(1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$

ג) בנקודה $(1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$ והרווח $8\frac{1}{2}$



ב) $50x + 100y$ הרווח המכסימלי מתקבל בנקודה $A(3, 5)$ והוא 650 ש"ח

4. $\frac{1}{2}x + y$, הרווח הגדול ביותר מתקבל בנקודה $(900, 700)$ והוא 1150 ש"ח



6. א) $0.007x + 0.005y$ ב) בנקודה $(1400, 0)$ והכמות 9.8 גרם ברזל

ארגון נתונים בתכנון לינארי (עמודים 490-494)

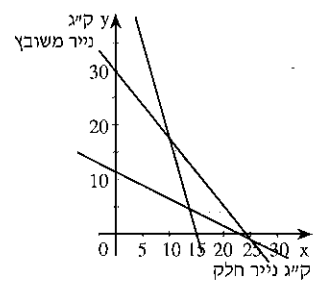
2. א) $y \leq 2x + 3$, $y \leq -3x + 24$, $y \geq -\frac{1}{4}x + 5\frac{1}{2}$, $f(x, y) = 3x + 5y$ ב) $3x + 5y = 15$

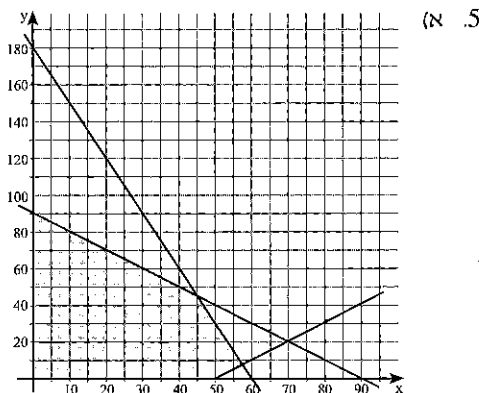
ג) $3x + 5y = 30$ בנקודה $(6, 4)$ הרווח המכסימלי 38 ש"ח

3. א) 65 דקות ב) כן ג) כן, כן ד) $2x + 3y$, $5x + 4y$ ה) $2x + 3y \leq 900$, $5x + 4y \leq 1200$

4. א) 450 דקות, 280 דקות, 760 דקות ב) $8x + 15y \geq 180$, $20x + 5y \geq 300$, $10x + 8y \leq 240$ ג) 15 ק"ג נייר חלק, מכונת הערבוב

והעיבוד לא יהיו מנוצלות





ב) למשל: $x + 10y = 20$ בנקודה $(0, 90)$ הערך המכסימלי 900

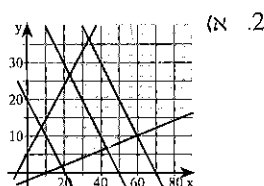
6. ב) 200 דקות ג) כן ד) $20x + 10y \leq 480$ ה) $20x + 10y \leq 600$ ו) $5x + 10y \leq 600$
ט) האילוץ המתייחס לזמן הערוב

הכל פתוח (עמודים 497-495)

ב) אין ערך מכסימלי רק ערך מינימלי, בכל נקודות על הישר

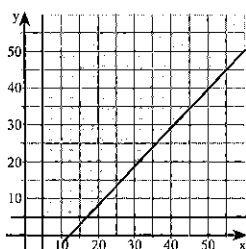
$$x + y = 20$$

ג) לפונקציה $x - 2y$ אין מינימום ואין מכסימום



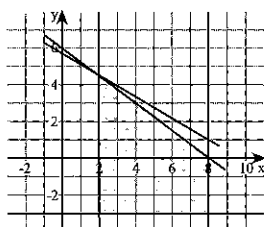
4. א) $x \geq 4$, $y \geq 5$, $x \leq y + 10$ ב)

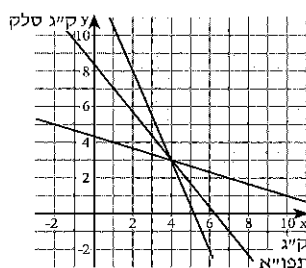
ג) $f(x, y) = 5x + 7y$ עלות מינימלית בנקודה $(4, 5)$ והיא 55 ש"ח



6. א) $x + y \geq 5$, $y \geq \frac{1}{2}x - 2.5$, $y \leq 2x + 2$ ב) $x + y \leq -1$, $y \geq x + 1$

8. המכסימום בנקודה $(2, 4.5)$ וערכו 46, המינימום בנקודה $(2, -3)$ וערכו -14



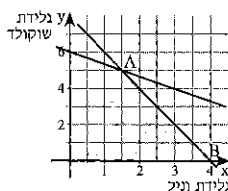


9. א) $50x + 20y \geq 260$, $20x + 60y \geq 260$
 ב) $f(x, y) = 20x + 15y$
 בנקודה (4, 3) 4 ק"ג תפוזים ו-3 ק"ג סלק
 ג) 125 ש"ח

ומה אם מתעניינים רק בנקודות שלמות (עמודים 498-499)

3. א) $50x + 20y \leq 200$, $50x + 20y \geq 100$, $y \leq 7$, $x \leq 3$
 ב) למשל: (2, 2): 2 משאיות, 2 טיוליות, 140 נוסעים עלות 1200 ש"ח, (1, 5) משאית אחת, 5 טיוליות, 150 נוסעים עלות 1400 ש"ח
 ג) 1 משאית ו-6 טיוליות, החברה תגבה 1600 ש"ח (ד) 3 משאיות, 1 טיוליות ההנהלה תשלם 1400 ש"ח

בעיות שלמות (עמודים 500-502)

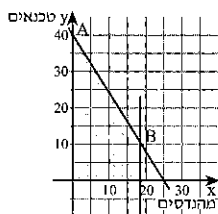


רווח	קירור	בישול	גלילת וניל (x)
80 ש"ח	20 דקות	10 דקות	
40 ש"ח	30 דקות	5 דקות	גלילת שוקולד (y)

- ב) הרווח המכסימלי מתקבל על הקטע AB והוא 320 ש"ח
 ג) הרווח המכסימלי בנקודה (1.5, 5) והוא 325 ש"ח
 4. $4x + 2y$ פונקציית המטרה: $x + y \leq 8$, $500x + 100y \geq 2000$, $100x + 200y \geq 1000$
 מחיר מכסימלי בנקודה (6, 2) והוא 28 ש"ח, מחיר מינימלי בנקודה $(3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3})$ והוא 20 ש"ח

רווח	שומשום	בצק	
10 אג	2 גרם	40 גרם	לחמניה עם שומשום
5 אג	—	50 גרם	לחמניה בלי שומשום

- ב) $f(x, y) = 10x + 5y$ ג) $2x \leq 160$, $40x + 50y \leq 5000$
 ד) $10x + 5y = 30$, בנקודה (80, 36) ה) 80 עם שומשום, 36 בלי שומשום 980 אג.
 6. א) $5000x + 3000y \leq 120,000$, $x \leq 18$
 ב) $1000x + 600y$
 הרווח המכסימלי מתקבל בנקודות השלמות על הקטע AB והוא 24000 ש"ח



פרק ו: הסתברות והתפלגות נורמלית

הסתברות

השערות ותחזיות – חזרה על מושגים בהסתברות



1. הוגן או לא

בגרעין זה משתמשים בקוביית משחק ושני ניסים, (א) שני מטבעות.

בקוביית משחק משתמשים גם בהמשך השיעור.

ניסים וחיים משחקים על-פי הכללים הבאים:

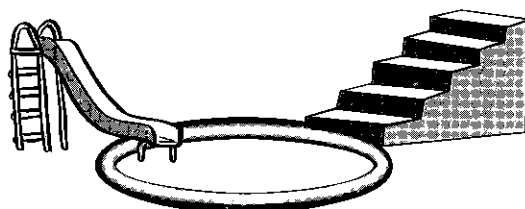
זורקים קוביית משחק (לא חשוב מי זורק).

אם יוצא 6, הרץ של ניסים יורד במגלשה ישירות אל נקודת הסיום. אם יוצא

מספר שונה מ-6, הרץ של חיים יורד מדרגה אחת, (עליו לרדת 5 מדרגות כדי

להגיע אל נקודת הסיום). מי שמגיע ראשון למטה זוכה בנקודה.

מחזירים את הרץ ומתחילים משחק חדש.



א) האם המשחק נראה לכם הוגן? אם לא, למי משניהם סיכוי גדול יותר לנצח?

רשמו את השערותכם ונמקו בכתב.

ב) כדי לבדוק אם המשחק הוגן, נשחק ונצבור תוצאות מהכיתה כולה.

שחקו 10 משחקים ורשמו את הנקודות בטבלה.

ניסים
חיים

ג) איספו תוצאות מכל הכיתה: רשמו בטבלה שעל הלוח בכמה משחקים (מתוך

ה-10) זכה חיים ובכמה זכה ניסים, וסכמו את התוצאות בכיתה.

רשמו לעצמכם, בכמה משחקים **סך הכל** ניצח חיים ובכמה ניצח ניסים,

והשוו עם ההשערה שרשמתם בסעיף א'.

בסוף היחידה גאבא אהלה אלה פסיכולוג כי אחד משניהם ארצה גאבא אהלה אלה פסיכולוג

שהתקבלה בכיתה מאומה אהלה.

2. בארץ מסוימת מתכונן המלך הרשע למלחמה עם השכנים. לשם כך זקוק המלך לחיילים רבים ולכן חוקק את החוק הבא: בכל משפחה מותר שתהיה בת אחת לכל היותר. לכן, לאחר לידת בת במשפחה, לא נולדו במשפחה זו ילדים נוספים.

(א) האם אתם חושבים כי המלך הצליח בכוונתו להגדיל את כמות הבנים במדינה ולהקטין את כמות הבנות? רשמו ונמקו את השערתכם.

(ב) כדי לבדוק את ההשערה נצא מהנחה ש- $\frac{1}{2}$ ממספר היולדות במדינה בכל שנה, ילדו בנים ו- $\frac{1}{2}$ מהן ילדו בנות.

נניח גם שלא מצטרפות יולדות חדשות לרשימה ונניח שהיו בשנה הראשונה 1000 יולדות.

השלימו את הטבלה. (אם המספר אינו מתחלק ב- 2 חלקו בערך).

מספר השנה	מספר הלידות	מספר הבנים שנולדו	מספר הבנות שנולדו
1	1000	500	500
2	500	250	250
3			
4			
.			
.			
.			

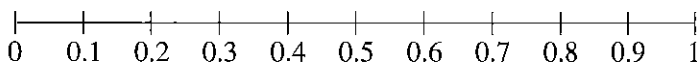
(ג) האם המלך הצליח בכוונתו להגדיל את כמות הבנים ולהקטין את כמות הבנות? הסבירו.

3. בארנק נמצאים 10 מטבעות: 4 מטבעות של 10 אגורות.
4 מטבעות של 10 שקלים.
2 מטבעות של 5 שקלים.

שולפים מהארנק מטבע מבלי להסתכל.

מצאו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים וסמנו אותם על קו הסיכוי.

- (א) להוציא מטבע של 10 שקלים.
(ב) להוציא מטבע של 10 אגורות.
(ג) להוציא מטבע של 5 שקלים.
(ד) להוציא מטבע שערכו יותר מ- 5 אגורות.



לצורך חישוב ההסתברות, בתרגיל 3, חישבתם את היחס בין התוצאות

המתאימות למאורע, לבין כל התוצאות האפשריות (למשל בסעיף א' $\frac{4}{10}$).



4. (א) בשקית נמצאות עוגיות שומשום ועוגיות שוקולד. יוסי אמר כי ההסתברות להוציא עוגית שוקולד מבלי להסתכל היא 0.7.
מה ההסתברות להוציא עוגית שומשום?
(ב) ההסתברות שמשותף בהגרלה בלונה פרק יזכה בפרס היא 0.05.
מה ההסתברות להשתתף בהגרלה ולא לזכות בפרס?

5. זורקים קוביית משחק.
חשבו את ההסתברות של המאורעות הבאים וסמנו על קו סיכוי את אות הסעיף.
(שרטטו קו סיכוי במחברת).
(א) יופיע מספר אי-זוגי.
(ב) יופיע מספר המתחלק ב- 5.
(ג) יופיע מספר שאינו מתחלק ב- 5.
(ד) יופיע מספר גדול מאפס.
(ה) יופיע מספר קטן מ- 10.
(ו) יופיע מספר המתחלק ב- 2 או ב- 3.
(ז) יופיע מספר ראשוני.

הנוסחה: ההסתברות של המאורע A: $\frac{\text{מספר התוצאות במאורע A}}{\text{מספר כל התוצאות האפשריות}}$

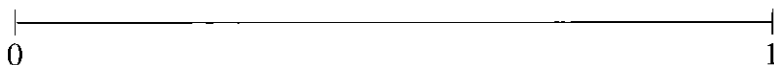
משמשת לחישוב הסתברות כאשר ידוע מספר כל התוצאות האפשריות ומספר התוצאות במאורע A, וכאשר לכל תוצאה אפשרית אותה הסתברות. ההסתברות של מאורע בלתי אפשרי שווה ל-0. הסתברות של מאורע ודאי שווה ל-1. בכל מקרה אחר, הסתברות של מאורע היא מספר בין 0 ל-1.

תרגילים

6. מסובבים סביבון של חנוכה (האותיות המופיעות נ, ג, ה, פ). חשבו את ההסתברות ורשמו את האות המציינת את הסעיף במקום המתאים על קו הסיכוי.



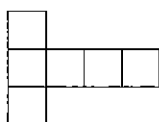
- (א) יצא נ.
(ב) לא יצא נ.
(ג) יצא נ או ג.
(ד) יצא ש.
(ה) לא יצא ש.



7. על כל פיאה של קוביית משחק רשום אחד המספרים 1, 2, 3.
(א) נתון שההסתברות לקבל $\boxed{2}$ היא $\frac{1}{6}$, וההסתברות לקבל $\boxed{3}$ היא $\frac{1}{3}$.
על כמה פיאות רשום כל אחד מהמספרים הנ"ל?
(ב) מה ההסתברות לקבל $\boxed{1}$?

8. על כל פיאה של קובייה רשום אחד מהסימנים $\triangle$, $\circ$, $*$.
האם ייתכן שבזריקת הקובייה, ההסתברות לקבל $*$ היא $\frac{1}{2}$, לקבל $\circ$ היא $\frac{1}{6}$, וההסתברות לקבל $\triangle$ היא $\frac{1}{3}$? נמקו.

9. על כל פיאה של קובייה רשמו אחד מהסימנים * או $\triangle$.
ההסתברות לקבל * היא $\frac{2}{3}$.



- (א) על כמה פיאות מופיע כל אחד מהסימנים הנ"ל?
רשמו על הפריסה משמאל.
(ב) מה ההסתברות לקבל $\triangle$?

10. הטבלה מתארת את שכיחות הגבהים בקבוצה בת 100 תלמידים.

גובה (בס"מ)	183-187.9	178-182.9	173-177.9
מס' תלמידים	20	50	30

תלמיד נבחר באקראי מתוך הקבוצה.

- (א) מה ההסתברות שגובהו מ- 183 ס"מ ומעלה?
(ב) מה ההסתברות שגובהו מ- 178 ס"מ ומעלה?
(ג) מה ההסתברות שגובהו מתחת ל- 183 ס"מ?
(ד) מה ההסתברות שגובהו מתחת ל- 188 ס"מ?

11. בטבלה מוצגת שכיחות המשקלים של קבוצה בת 110 אנשים.

משקל (בק"ג)	60-63.9	56-59.9	52-55.9	48-51.9	44-47.9	40-43.9	36-39.9
שכיחות (מס' אנשים)	3	8	25	33	27	10	4

אדם נבחר באקראי מהקבוצה.

- (א) מה ההסתברות שמשקלו מ- 60 ק"ג ומעלה?
(ב) מה ההסתברות שמשקלו מ- 52 ק"ג ומעלה?
(ג) מה ההסתברות שמשקלו קטן מ- 48 ק"ג?

12. $\triangle$ ארה"ב כוללת 50 ארצות.

ניצן טוענת: ההסתברות שהנשיא האמריקני הבא יהיה מטקסס היא $\frac{1}{50}$.
האם ניצן צודקת? נמקו.

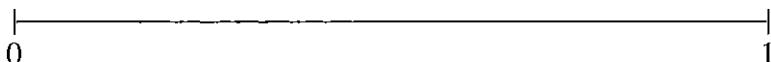
13. לכל אדם יש אחד מארבעת סוגי הדם: O , AB , B , A .
 ל- 40% מהאוכלוסיה סוג דם A , ל- 20% סוג דם B ול- 5% סוג דם AB .

- (א) לכמה אחוזים מהאוכלוסיה סוג דם O ?
- (ב) בעלי סוג דם A יכולים לקבל תרומת דם מבעלי סוג דם A או O .
 מה ההסתברות, שתורם מקרי יוכל לתרום לפצוע בעל סוג דם A ?
- (ג) בעלי סוג דם B יכולים לתרום דם לבעלי סוג דם B ו- AB .
 מה ההסתברות, שתורם בעל סוג דם B יוכל לתרום דם לפצוע מקרי?

בשני הפרג'אים הבאים נסא כוחכס באומדנן הסגברויאג של מאולקלג חאזריא, מניסויא נביא.

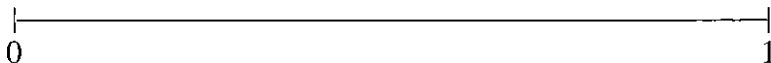
14. מסובבים סביבון של חנוכה 100 פעמים (האותיות המופיעות נ, ג, ה, פ).
 סמנו בערך, על קו הסיכוי את המאורעות הבאים.

- A: יצא 100 פעמים נ.
- B: לא יצא אף פעם נ.
- C: יצא 110 פעמים נ.
- D: יצא נ בין 20 ל- 30 פעם.
- E: יצא נ בין 80 ל- 90 פעם.



15.  מטילים מטבע 1000 פעמים.

- (א) סמנו, בערך, על קו הסיכוי את המאורעות הבאים.
- A: יצא 1000 פעמים עץ.
- B: יצא 1010 פעמים עץ.
- C: לא יצא אף פעם עץ.
- D: יצא עץ בין 450 ל- 550 פעם.
- E: יצא עץ בין 850 ל- 950 פעם.



- (ב) לאיזה מהמאורעות הבאים יש סיכוי גדול יותר? נמקו.
- A: שיצא עץ בין 450 ל- 550 פעם.
- B: שיצא עץ בדיוק 500 פעם.

16. איילת, בני, גליה, דן והילה משתתפים בהגרלה. שניים מהם יזכו בפרס. קיימים עשרה זוגות אפשריים.

- (א) רשמו את כולם: א, ב, ג, ד, ...
- (ב) מה ההסתברות שאיילת תזכה?
- (ג) מה ההסתברות ששתי בנות תזכינה?

17. רושמים על פתקים את כל המספרים בני שלוש ספרות שונות שניתן לרשום מהספרות 1, 2, 5 ומניחים אותם בסל.

- (א) רשמו את כל המספרים. כמה מספרים קיבלתם?
- (ב) מה ההסתברות להוציא, מבלי להסתכל, מספר המתחלק ב-5?
- (ג) מה ההסתברות להוציא, מבלי להסתכל, מספר זוגי?
- (ד) מה ההסתברות להוציא, מבלי להסתכל, מספר המתחלק ב-3?
- (ה) מה ההסתברות להוציא, מבלי להסתכל, מספר גדול מ-300?
- (ו) מה ההסתברות להוציא, מבלי להסתכל, מספר קטן מ-500?
- (ז) מה ההסתברות להוציא, מבלי להסתכל, מספר גדול מ-100?
- (ח) מה ההסתברות להוציא, מבלי להסתכל, מספר גדול מ-540?

לצורך פתרון תרגילים דומים לשני האחרונים, צריך תחילה לחשב את מספר התוצאות האפשריות ואת מספר התוצאות המתאימות למאורע שבו מדובר. כשמדובר במספר רב של תוצאות יש צורך ללמוד פרק שנקרא בשם קומבינטוריקה. אנו לא נעסוק בו כאן. נחשב הסתברויות במקרים בהם ניתן לרשום במפורש את כל התוצאות האפשריות, כפי שעשינו עד כה, או במקרים בהם ניתן לחשב הסתברויות על סמך נתונים שונים, כפי שתראו בסעיפים הבאים.



רישום תוצאות שוות הסתברות

1. (ר"ן) זורקים קובייה שעל אחת מפיאותיה מופיע המספר 1.
 על שתיים מפיאותיה מופיע המספר 2.
 על שלוש הפאות האחרות מופיע המספר 3.
- נועה רשמה את קבוצת התוצאות האפשריות כך: $\{1, 2, 3\}$.
 איילת רשמה את קבוצת התוצאות האפשריות כך: $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$.
- (א) מי משתי הבנות רשמה באופן המתאים לחישוב הסתברויות? נמקו.
 (ב) מה ההסתברות שיתקבל 2?
 (ג) מה ההסתברות שלא יתקבל 2?
2. (ר"ן) נדב ורינה רצו לחשב מה ההסתברות שאם זורקים שתי מטבעות (של שקל ושל 10 אגורות), על האחת יופיע מספר ועל השנייה תופיע תמונה.
נדב רשם את קבוצת התוצאות האפשריות כך:
 {על שתי המטבעות מספר, על שתי המטבעות תמונה, על מטבע אחת תמונה ועל האחרת מספר}
 נדב טען שההסתברות שיצא על מטבע אחת מספר ועל האחרת תמונה היא $\frac{1}{3}$.
- רינה** רשמה את התוצאות האפשריות כך:
- | | | | | |
|-----------|----|----|-------|-------|
| שקל | 1 | עץ | 1 | עץ |
| 10 אגורות | 10 | 10 | מנורה | מנורה |
- רינה טענה שההסתברות שיצא על מטבע אחת מספר ועל אחרת תמונה היא $\frac{1}{2}$.
- (א) מי משניהם צודק, לדעתכם? נמקו.
 (ב) בידקו בעזרת ניסוי:
 זרקו שתי מטבעות 20 פעם ורשמו את התוצאות בטור הראשון בטבלה שבעמוד הבא.
 לאחר איסוף התוצאות מכל הכיתה, השלימו את הטור השני בטבלה.

המשך ←

כיתה	יחיד	
—	$\overline{20}$	מספר תוצאות שונות. (על מטבע אחת מספר ועל השנייה תמונה).
—	$\overline{20}$	מספר תוצאות שוות. (על שתי המטבעות מספר, או על שתיהן תמונה).

ג) מי משניהם צדק? האם תוכלו להסביר מדוע?

התוצאה (10, עץ) והתוצאה (מנורה, 1) הן שתי תוצאות שונות **ולכל אחת מהן אותה ההסתברות** כמו לתוצאה (עץ, מנורה) או לתוצאה (1, 10). לכן הסיכוי לתוצאות שונות הוא 2 מתוך 4.
באופן כללי, יש לרשום את כל התוצאות בנפרד, כך שכולן תהיינה שוות הסתברות.



ד) אם נדב ורינה יזרקו שתי מטבעות שוות (של 10 אגורות למשל), האם ההסתברות שעל מטבע אחת יצא מספר ועל השנייה תמונה, תשתנה?

3. במשפחה שני ילדים.



א) השלימו את טבלת האפשרויות של בנים/בנות במשפחה.

						בכור
						צעיר

בוחרים באקראי, ממרשם התושבים, משפחה לה שני ילדים.

- ב) מה ההסתברות שבמשפחה 2 בנים?
ג) מה ההסתברות שבמשפחה יש בן ובת?
ד) מה ההסתברות שהבכור במשפחה בן והצעירה בת?
ה) מה ההסתברות שהבכורה בת?

במשפחה שלושה ילדים.

א) העתיקו את הטבלה למחברתכם, והשלימו את כל השלשות האפשריות. כמה שלשות יש?

בכור/ה	בינוני/ת	צעיר/ה

ב) בוחרים באקראי, ממרשם התושבים, משפחה לה שלושה ילדים. חשבו את ההסתברות של המאורעות הבאים.

A: הבכור הוא בן.

B: רק הבכור הוא בן (והשאר בנות).

C: במשפחה יש שני בנים ובת.

D: במשפחה יש לפחות בן אחד.

ג) בידקו בשלושת המקרים הבאים אם ההסתברויות שוות. אם לא, קבעו איזו הסתברות גדולה יותר ונמקו.

(i) שיהיו במשפחה 2 בנים, או שיהיו במשפחה 3 בנים?

(ii) שיהיו במשפחה 2 בנים, או שיהיה במשפחה בן אחד?

(iii) שיהיו במשפחה לפחות 2 בנים, או לכל היותר 2 בנים?

א) נועה ואיילת זרקו שתי קוביות רגילות.

נועה מקבלת נקודה אם מתקבל    

איילת מקבלת נקודה אם מתקבל  על אחת הקוביות ו-  על הקובייה האחרת.

האם, לדעתכם, המשחק הוגן?

לבדיקה: סמנו n במשבצות

שמתאימות לנצחון של נועה ו- n

במשבצות שמתאימות לנצחון של

איילת ובידקו את השערתכם.

ב) כמה תוצאות אפשריות קיימות כשמשחקים בשתי קוביות? נמקו.

ע"ע 6

שתי חברות, אפרת ודנה משחקות. שתיהן מראות מספר אצבעות בבת אחת. אפרת מנצחת אם סכום האצבעות הוא מספר זוגי, ודנה מנצחת אם סכום האצבעות הוא אי-זוגי.

(א) האם, לדעתכם, המשחק הוגן? אם כן, נמקו. אם לא, למי משתיהן סיכוי גדול יותר לנצח?

סכום האצבעות	1	2	3	4	5
1				5	
2			5		
3					
4				8	
5					10

(ב) השלימו את הטבלה ובידקו את השערתכם שבסעיף א'.

(ג) מה ההסתברות של כל אחת מהן לזכות?

(ד) במקרים רבים משתמשים ילדים רק ב-4 אצבעות במשחק זה. הסבירו מדוע.

(ה) האם המשחק הוגן במקרה ש**כופלים** את מספרי האצבעות שהילדות מראות? (מדובר בשימוש בכל חמש האצבעות).

ע"ע 7

זורקים שתי קוביות רגילות, ומסתכלים על ההפרש בין מספר הנקודות הגדול למספר הנקודות הקטן, המתקבלים על שתי הקוביות.

אם המספרים על שתי הקוביות שווים, ההפרש שווה ל-0.

הפרש	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

(א) כמה הפרשים שונים קיימים?

(ב) שער, האם לכל ההפרשים אותה הסתברות? הסבירו.

(ג) כדי **לחשב** את ההסתברויות של הופעת ההפרשים השונים נשתמש בטבלה. השלימו אותה.

(ד) היעזרו בטבלה וחשבו את ההסתברויות של כל אחד מההפרשים.

ע"ע 8

זורקים שתי קוביות משחק רגילות ומחשבים את המכפלה.

יעל תנצח אם המכפלה של מספר הנקודות זוגית, וורד אם המכפלה אי-זוגית.

(א) שער, אם המשחק הוגן. אם כן, נמקו, אם לא למי סיכוי טוב יותר לנצח?

(ב) רשמו את כל האפשרויות בטבלה ובידקו את השערתכם.

(ג) מה ההסתברות שהמכפלה שתתקבל היא 24?

(ד) מה ההסתברות שהמכפלה שתתקבל היא 9?

(ה) כמה תוצאות **שוונות** יכולות להתקבל?

(ו) למי מהמכפלות הסתברות **גדולה יותר**? מהי ההסתברות?

תרגילים

9. זורקים שתי קוביות משחק רגילות ומחשבים את הסכום.

עודד ינצח אם **הסכום** של הנקודות יהיה זוגי.

דניאל ינצח אם **הסכום** של הנקודות יהיה אי-זוגי.

(א) האם המשחק הוגן? אם כן, נמקו, אם לא למי סיכוי טוב יותר לנצח?

(ב) השלימו את הטבלה (רשמו את הסכומים).

(ג) האם השערתכם בסעיף א' נכונה?

(ד) (i) מה ההסתברות שסכום של הנקודות

יהיה 8?

(ii) רשמו מאורע **שווה** הסתברות לקודם.

(iii) לאיזה סכום הסתברות **גדולה ביותר**?

מהי ההסתברות שיתקבל סכום זה?

(iv) לאיזה סכום הסתברות **קטנה ביותר**?

האם יש עוד סכום שיש לו אותה הסתברות?

הסכום	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											

10. (א) רשמו את כל האפשרויות של בנים ובנות במשפחה לה שני ילדים.

(ב) קבעו אם המאורעות שווי הסתברות. אם לא, קבעו לאיזה מהם הסתברות

גדולה יותר.

(i) שני בנים לעומת בן ובת.

(ii) שני בנים לעומת שתי בנות.

(iii) הבכור בן והצעירה בת, לעומת הבכורה בת והצעיר בן.

(iv) הבכור בן והצעירה בת, לעומת בן ובת במשפחה.

11. זורקים שתי קוביות רגילות ורושמים את המספר הגדול יותר (אם על שתי הקוביות

אותו מספר רושמים מספר זה).

(א) שרטטו טבלה ורשמו בה את כל התוצאות האפשריות.

(ב) מה ההסתברות שהגדול משני המספרים שעל הקוביות יהיה 6?

(ג) מה ההסתברות שהגדול משני המספרים שעל הקוביות יהיה זוגי?

(ד) מה ההסתברות שהגדול משני המספרים שעל הקוביות יהיה קטן מ-4?

"מאורעות משולבים" – מטבלה לריבוע שטח

1.  בתוך קופסה נמצאים 20 פתקים עליהם רשומים המספרים מ- 11 ועד 30. (מספר אחד על כל פתק.)

א) מה ההסתברות להוציא מספר המתחלק ב- 3?
מה ההסתברות להוציא מספר זוגי?

מה ההסתברות להוציא מספר המקיים את שתי הדרישות הנ"ל? (מתחלק ב- 3 וזוגי). רשמו את המספרים וסמנו את אלו המתאימים לדרישה.
מה ההסתברות להוציא מספר המקיים **לפחות** אחת משתי הדרישות? כלומר, מתחלק ב- 3, או זוגי, או שניהם? (רשמו את המספרים וסמנו את אלו המתאימים לדרישה.)

ב) מה ההסתברות להוציא מספר המסתיים ב- 2?
מה ההסתברות להוציא מספר המתחלק ב- 5?

מה ההסתברות להוציא מספר המקיים את שתי הדרישות הנ"ל?
מה ההסתברות להוציא מספר המקיים **לפחות** אחת משתי הדרישות?

2.  זורקים שתי קוביות.

א) צבעו משבצות המתאימות למאורע: "בזריקת קובייה I יצא מספר זוגי של נקודות".

		קובייה I					
		2	4	6	1	3	5
קובייה II	2						
	4						
	6						
	1						
	3						
	5						

ב) צבעו, בצבע שונה, משבצות המתאימות למאורע: "בזריקת הקובייה II יצא מספר זוגי של נקודות".
כמה משבצות צבועות בשני הצבעים?

ג) מה ההסתברות לקבל בשתי הקוביות מספר זוגי?
מה ההסתברות לקבל בקובייה אחת מספר זוגי ובאחרת אי-זוגי

של נקודות? (סמנו משבצות מתאימות בטבלה).

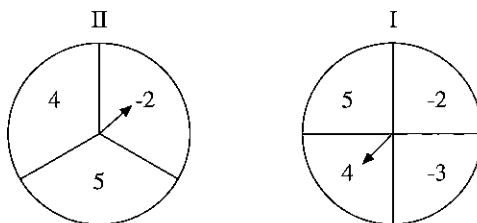
מה ההסתברות לקבל בשתי הקוביות מספר אי-זוגי של נקודות?

המספרים, בראש הטבלה, מסודרים באופן שמדגיש את האזורים המתאימים לכל מאורע אליו מתייחסים בתרגיל.



בשני הגרזילים הבאים גאומטריאלי אט פטבא, כך שאכלא אפגאיים ארישאם אצאאל אפטרוא
באקרים בפה פפסגבאל של אצאאל אינה שוא.

3. מסובבים את המחוגים של שני ה"שעונים" המשורטטים, עד שהם נעצרים.
(כל שעון מחולק לחלקים שווים).



יעל מנצחת אם מכפלת שני המספרים שמורים המחוגים היא חיובית.
ורד מנצחת אם מכפלת המספרים שמורים המחוגים היא שלילית.

(א) האם המשחק נראה לכם הוגן?

(ב) השלימו טבלה מתאימה.

(ג) חשבו את ההסתברות של יעל לנצח.

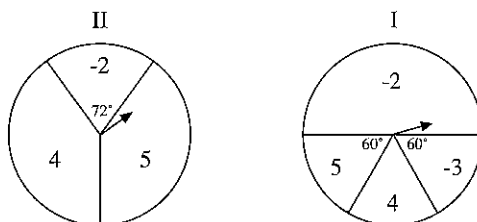
חשבו את ההסתברות של ורד לנצח.

האם המשחק הוגן?

שעון I

	מכפלה	-2	-3	4	5
שעון II	-2				
	4				
	5				

4. לפניכם שני "שעונים" אחרים, עם אותם מספרים כמו בשאלה הקודמת.
מסובבים את המחוגים של שני ה"שעונים" האלה.



כדי לחשב הסתברויות ולבדוק את הגינות המשחק הפעם, יש לחלק את הטבלה
יחסית לגודל השטח המתאים לכל מספר.

המשך ←

(א) הדגישו קווי חלוקה אנכיים (מלמעלה למטה) כך שתתקבל חלוקה של הריבוע לפי שיעון I.

		שיעון I				
		-2			-3	4 5
שיעון II	-2					
	4					
	5					

- (ב) הדגישו קווי חלוקה אופקיים שיתאימו לשיעון II.
 (ג) צבעו את השטחים המתאימים לניצחון של יעל (מכפלה חיובית), וחשבו את ההסתברות שלה לנצח.
 (ד) מה ההסתברות של ורד לנצח?
 (ה) האם המשחק הוגן?

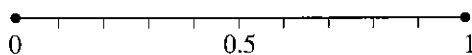
בתרגיל האחרון הכרתם, למעשה, את "מודל השטח". מודל זה יעיל לחישוב הסתברויות גם במקרים בהם לא ניתן לרשום את כל התוצאות האפשריות במפורש, אלא רק לייצג את ההסתברויות שלהן, כפי שתראו בתרגיל הבא.



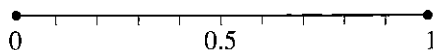
5. (P) ההסתברות לפגוש אדם מעשן בעיר "ערפיח" היא 0.3. ההסתברות לפגוש אדם שגובהו יותר ממטר ושמונים בעיר הני"ל, היא 0.2. (גבוהים כאן פירושו גובהם מעל 1.80 מ').

נניח שאחוז המעשנים מבין הגבוהים הוא כמו באוכלוסיה כולה.

(א) סמנו על קו הסיכוי את ההסתברות לפגוש ב"ערפיח" אדם מעשן.

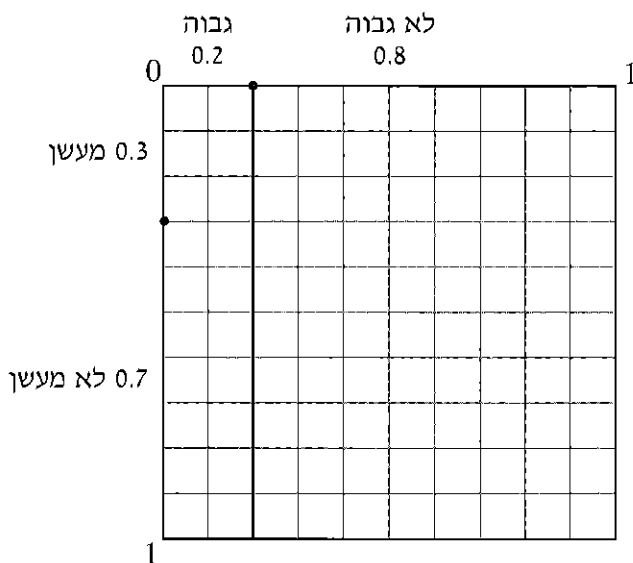


סמנו על קו הסיכוי את ההסתברות לפגוש בעיר זו אדם גבוה.



המשך ←

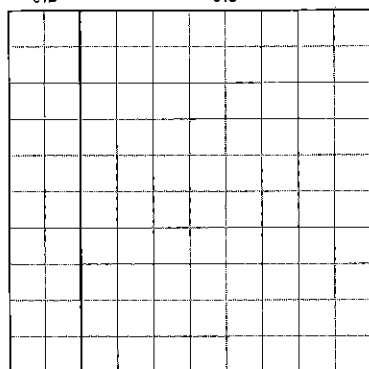
(ב) נשרטט ריבוע בעזרת שני קווי הסיכוי (לכן אורך צלע הריבוע כאורך קו הסיכוי - יחידה אחת) לפניכם חלוקה של הריבוע לפי ההסתברות לפגוש אדם גבוה, (הקו "האנכי").



- סמנו חלוקה נוספת בעזרת קו אופקי – לפי **מעשנים ולא מעשנים**.
- (ג) צבעו את השטח המתאים לאנשים הגבוהים וגם מעשנים, ורשמו בתוכו גבוהים ומעשנים.
- איזה חלק הוא מהווה משטח הריבוע כולו? (אפשר לספור משבצות).
- מה ההסתברות לפגוש אדם מעשן גבוה?
- (ד) צבעו שטח המתאים לאנשים **שאינם** גבוהים וגם **אינם** מעשנים, ורשמו בתוכו לא גבוהים ולא מעשנים.
- מה ההסתברות לפגוש אדם שאינו גבוה וגם אינו מעשן?
- (ה) האם המאורעות בהם עסקתם בסעיפים ג' ו-ד' "משלימים זה את זה" לקבוצת כל התוצאות האפשריות? נמקו.
- (ו) רוצים למצוא את ההסתברות לפגוש אדם המקיים לפחות אחת משתי הדרישות: הוא גבוה או מעשן.
- הקיפו את השטח המתאים בריבוע השטח.
- האם נכון לחבר $0.2 + 0.3$? אם כן, נמקו. אם לא, נמקו על-ידי חישוב.

113

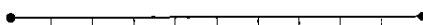
גבוה	לא גבוה
0.2	0.8



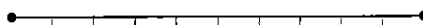
(ב) אם מעבירים קו כזה מה פירושו?



עפרה



איילת



היעזרו בסימון שלכם על קווי הסיכוי וחלקו את הריבוע לפי ההסתברות

(ד) רשמו, בכל אחד מארבעת המלבנים שנוצרו, מה מבטא שטחו.

(ו) רשמו בכל מלבן את שטחו.

(ז) מה ההסתברות ששתייהן תפגענה במטרה?

(ח) מה ההסתברות ששתיהן לא תפגענה במטרה?

529

ט) האם המאורעות הרשומים בשני הסעיפים הקודמים משלימים לכל התוצאות האפשריות? נמקו.

י) צבעו מלבן המתאים להסתברות של עפרה לפגוע במטרה. מה שטחו של מלבן זה?

יא) מה ההסתברות שלפחות אחת משתי הן תפגע במטרה? סמנו מלבנים מתאימים.

גאבא אפאג אג פאגליאס 13, 14 אפאגליאס.

8. 

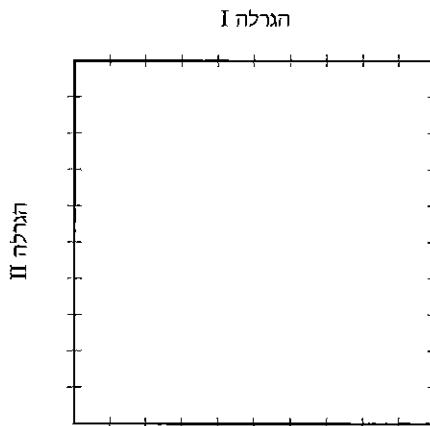
לצורך עידוד מכירות במרכז קניות גדול ערכו שתי הגרלות.

בהגרלה הראשונה זכו 10% מהקונים שנבחרו באופן מקרי על-ידי דיילים.

בהגרלה השנייה זכו בעת התשלום 20% מהקונים.

א) העבירו קו אנכי המחלק את הריבוע לזוכים/לא זוכים בהגרלה ראשונה.

העבירו קו אופקי המחלק את הריבוע לזוכים/לא זוכים בהגרלה השנייה בעת התשלום.



רשמו, בכל מלבן, את המאורע המתאים לו (למשל, "זכו בשתי הגרלות").

ב) מה ההסתברות שקונה יזכה בשתי ההגרלות גם יחד? (סמנו שטח מתאים).

ג) מה ההסתברות שקונה לא יזכה כלל? (סמנו את השטח המתאים).

ד) רשמו מאורע המשלים את המאורע שבסעיף ג' לכל התוצאות האפשריות.

כדי למצוא מספר משבצות בכל מלבן, אין צורך לספור את כולן. אפשר, במקום לספור, לכפול את אורכי הצלעות של המלבן. למעשה מחשבים בצורה כזו, את שטח המלבן במשבצות ריבועיות.



9 

ההסתברות שיעל תפגע במטרה ביריה אחת היא 0.5. יעל יורה פעמיים.
(א) שרטטו ריבוע וחלקו אותו, (2 חלוקות) לפי ההסתברות **לפגוע ולא לפגוע** בכל יריה.

(ב) מה ההסתברות שיעל תפגע פעמיים במטרה?

ג) מה ההסתברות שיעל תפגע **לפחות פעם אחת** במטרה? (סמנו תחילה את המלבנים המתאימים).

(ד) מה ההסתברות שהיא **לא תפגע כלל** במטרה?

(ה) מה ההסתברות שהיא תפגע **לכל היותר** פעם אחת במטרה? (סמנו תחילה את המלבנים המתאימים.)

ריבוע השטח עוזר לחישוב הסתברויות כשמדובר בניסוי או במשחק בו יש שני שלבים: 2 קלעים יורים למטרה או קלע יורה פעמיים, זריקת 2 קוביות או זריקה של קובייה אחת פעמיים. זריקת מטבע פעמיים, או זריקת שתי מטבעות וכו'.



10. במבצע והגרלות ניתן לזכות בקלטת וידאו או בקלטת לטייפ.

ההסתברות לזכות בקלטת וידאו היא 0.1 ובקלטת לטייפ 0.2 .
אבנר קנה שני כרטיסי הגרלה.

(א) שרטטו ריבוע וחלקו אותו בהתאם (כל צלע ל- 3 חלקים).

(ב) מה ההסתברות שאבנר יזכה בקלטת וידאו וגם בקלטת לטייפ?

(ג) מה ההסתברות שלא יזכה כלל?

(ד) מה ההסתברות שיזכה לפחות בקלטת אחת? (סמנו את המלבנים המתאימים).

(ה) מה סכום ההסתברויות שחישבתם בסעיפים ג' ו-ד' נמקו.

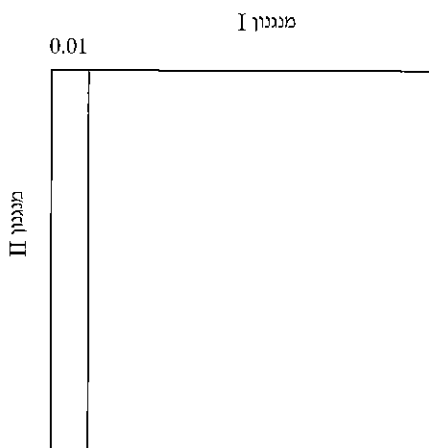
11. אדם השתתף פעמיים בהגרלה. ידוע שההסתברות שהוא יזכה לפחות פעם אחת היא 0.78.

מה ההסתברות שהוא לא יזכה כלל.

האבא אפאר אגרג'וים 15, 16, 17 שגרג'וים.

12. לשם הבטחת פעולתה התקינה של מכונה הותקנו שני מנגנוני בטיחות. הראשון **איננו** פועל כהלכה ב- 1% של המקרים, והשני **איננו** פועל כהלכה ב- 2% מהמקרים.

קשה לחלק את הריבוע לפי ההסתברויות מאחר והן קטנות מאד בערכן. אך אפשר להעביר קווי חלוקה "מדגימים", ללא קנה מידה, לרשום את החלק, ולהיעזר בכך לחישוב.

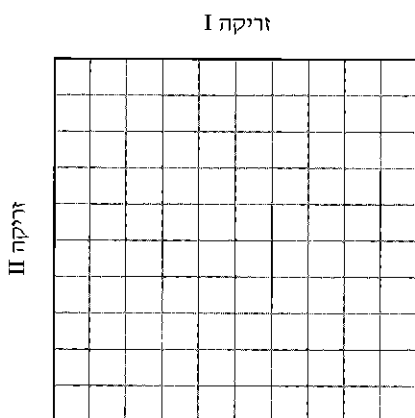


- (א) חלוקה אחת משורטטת, השלימו את החלוקה השנייה של הריבוע.
- (ב) צבעו שטח המתאים למאורע: "שני המנגנונים לא יפעלו".
- (ג) מה ההסתברות, שלמרות שני מנגנוני הבטיחות, תקרה תקלה?

תרגילים

13. לכל פלגם של אדם מחשבים הסתכלה, סמנו אחיזה אל פלטה המגלים כריבוע פלטה.

13. לשחקן כדורסל יש סיכוי של 70% לקלוע לסל ו- 30% להחטיא. השחקן ניסה לזרוק לסל פעמיים.



- (א) חלקו את הריבוע על-פי הנתונים.
- (ב) מה ההסתברות שהשחקן לא יקלע כלל?
- (ג) מה ההסתברות שהשחקן יקלע בדיוק פעם אחת? (סמנו תחילה את השטחים המתאימים).
- (ד) מה ההסתברות שהשחקן יקלע לפחות פעם אחת?
- (ה) מה ההסתברות שהשחקן יקלע לכל היותר פעם אחת?

14. במכונת משחק לחיצה על הידית מוציאה מספר.

כל שחקן לוחץ על הידית פעמיים.

ההסתברות להוציא מספר זוגי היא

.0.6

(א) רשמו על הצלעות "זוגי ואי-זוגי"

בהתאם.

רשמו בכל מלבן את המאורע

המתאים.

(ב) רשמו איזה מאורע מתואר

בשטח הצבוע וחשבו את

הסתברותו.

(ג) רשמו איזה מאורע מתואר בשטח שאינו צבוע וחשבו את הסתברותו.

15. כד מכיל 10 כדורים: 6 אדומים ו- 4 כחולים.

(א) מה ההסתברות להוציא מהכד כדור אדום?

מה ההסתברות להוציא מהכד כדור כחול?

גלעד מוציא כדור ומחזירו, ומוציא כדור שני.

(ב) שרטטו ריבוע וחלקו אותו על-פי ההסתברות.

(ג) מה ההסתברות שיוציא:

שני כדורים אדומים?

שני כדורים כחולים?

כדור אחד כחול וכדור אחד אדום (לא משנה איזה מהם הוצא קודם)?

16. בשק אחד 3 כדורים אדומים ו- 7 כדורים לבנים.

בשק שני 5 כדורים אדומים ו-5 כדורים לבנים.

מוציאים כדור מכל שק.

(א) בנו ריבוע שטח מתאים.

(ב) מה ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים?

(ג) מה ההסתברות להוציא **לפחות** כדור אחד אדום?

(ד) מה ההסתברות להוציא **לכל היותר** כדור אחד אדום?

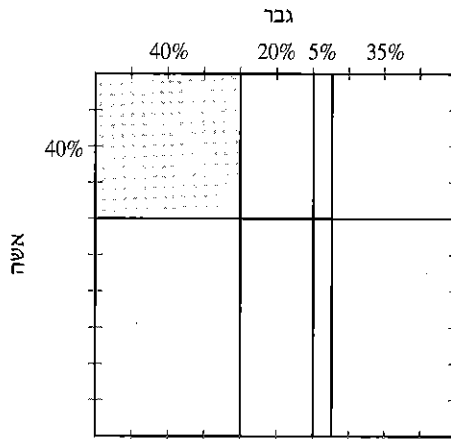
17. התפלגות האוכלוסיה בארץ לארבע קבוצות דם היא:

(אין הבדל בין נשים וגברים).

5%	-	AB	40%	-	A
35%	-	O	20%	-	B

(א) בוחרים באקראי "זוג נשוי".

השלימו את החלוקה השנייה של הריבוע (קווי חלוקה "מדגימים").



(ב) רשמו איזה מאורע מתואר במלבן הצבוע וחשבו את הסתברותו.

(ג) צבעו מלבן המתאים למאורע: "סוג הדם של האישה B וסוג הדם של הגבר AB" וחשבו את הסתברותו.

(ד) חשבו את ההסתברות שלשניהם **אותו** סוג דם.

(ה) חשבו את ההסתברות שלשניהם סוג דם שונה.

18. בדקו ומצאו ש- 1% (0.01) מהגפרורים בביח"ר "אֶשְׁקֵל" יוצאים פגומים.

(א) שרטטו ריבוע וחלקו את הריבוע חלוקה מדגימה.

(ב) מוציאים שני גפרורים לבדיקה.

(i) מה ההסתברות ששניהם יהיו פגומים?

(ii) מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם יהיה תקין?

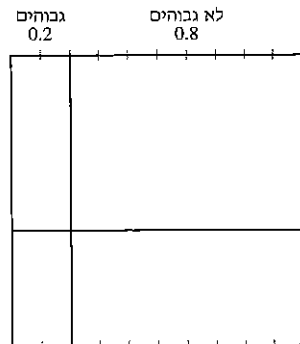
(iii) מה ההסתברות שלפחות אחד מהם יהיה תקין?

עוד על ריבוע שטח

באחד הפסליים הקדומים לסקסאם בגרליז הראשון הואפיל כאן. כלל נאסילי נאניס אנדון
בפגלון בלילאסולא זא.

1. א) ההסתברות לפגוש בעיר מסויימת אדם שגובהו מעל מטר ושמונים היא 0.2. וההסתברות לפגוש שחקן כדורסל היא 0.02.
האם נכון לחלק את הריבוע על-ידי העברת קו אופקי דרך 0.02, כדי למצוא את האנשים הגבוהים, שהם גם שחקני כדורסל?
אם מעבירים קו כזה מה פירושו?

- ב) ידוע כי 0.08 מהגבוהים, בעיר זו, הם שחקני כדורסל. חלקו את המלבן המתאים, חלוקה מדגימה.



ידוע גם כי 0.005 מאלה שאינם גבוהים בעיר זאת הם שחקני כדורסל. חלקו את המלבן המתאים, חלוקה מדגימה.

- ג) מה ההסתברות לפגוש בעיר זו אדם גבוה שהוא גם שחקן כדורסל?

- ד) מה ההסתברות לפגוש, בעיר זו, אדם שאינו גבוה והוא שחקן כדורסל?

- ה)  מה ההסתברות לפגוש בעיר זו שחקן כדורסל?

- ו) האם התשובה שקיבלתם מתאימה לנתון שבסעיף א' (0.02 מתושבי העיר שחקני כדורסל).

2.  ההסתברות שקלע יפגע במטרה בירה הראשונה היא 0.8.

- א) שרטטו ריבוע וחלקו אותו **ליפגע ולא יפגע** בירה הראשונה.
ב) ההסתברות לפגוע בירה השנייה תלויה בהצלחתו בירה הראשונה:
— אם הקלע פוגע בירה הראשונה, ההסתברות היא 0.9. חלקו את המלבן המתאים **ליפגע ולא יפגע** בירה השנייה.
— אם הקלע אינו פוגע בירה הראשונה, ההסתברות שיפגע בירה השנייה יורדת ל- 0.7. חלקו את המלבן המתאים בהתאם לנתון זה.

- ג) מה ההסתברות שהקלע יפגע בשתי היריות?
ד) מה ההסתברות שהקלע יפגע **בדיוק** פעם אחת? (סמנו מלבנים מתאימים).
ה) מה ההסתברות שיפגע **לפחות** פעם אחת? (סמנו מלבנים מתאימים).
ו) מה ההסתברות שיפגע **לכל היותר** פעם אחת? (סמנו מלבנים מתאימים).

3. (F)

בכד נמצאים 5 כדורים לבנים ו- 5 כדורים שחורים.

לבן שחור

--	--

מוציאים מהכד כדור ראשון מבלי להסתכל ואחר כך כדור שני. חלוקה ראשונה משורטטת.

קבעו, בכל מקרה, אם בחלוקה השנייה מחלקים את שני המלבנים באותו אופן. כלומר, אם הקו האופקי מועבר באותו גובה או לא:

- (א) כאשר **מחזירים** את הכדור הראשון ומוציאים פעם שנייה.
(ב) כאשר **לא מחזירים** את הכדור הראשון ומוציאים פעם שנייה.

4. (V)

כל חודש בודקים כינים בגן "הדרדסים".

- (א) בחודש תשרי מצאו כינים אצל 30% מהילדים.

ההסתברות למצוא כינים בחודש חשוון, אצל ילד שמצאו אצלו כינים בחודש תשרי, היא 0.4.

ההסתברות למצוא כינים בחודש חשוון, אצל ילד שלא מצאו אצלו כינים בחודש תשרי, היא 0.2.

שרטטו ריבוע שטח.

חלקו חלוקה ראשונה על-פי חודש תשרי, וכל מלבן שנוצר, חלקו על-פי הנתונים לגבי חודש חשוון.

- (ב) מה ההסתברות למצוא כינים, אצל ילד שנבחר באקראי בחודש חשוון?

5. (F)

ההסתברות לזכות במשחק במכונה היא 0.3. מי שזוכה במשחק הראשון משחק פעם נוספת, ורק אם הוא זוכה גם במשחק השני הוא מקבל פרס.

- (א) שרטטו ריבוע שטח וחלקו בהתאם לנתונים.

- (ב) סמנו שטחים שמתאימים **לאי זכיה**.

- (ג) מה ההסתברות לקבל פרס?

בידקו! אם לא טעיתם, רק אחד מהמלבנים שנוצרו בחלוקה הראשונה, חולק בחלוקה השנייה.

תרגילים

6. בשדה כותנה משתמשים בחומר מסוים נגד מזיקים. ההסתברות שהריסוס הראשון יעזור היא 0.7.

- שרטטו ריבוע וחלקו על-פי הנתון.
- אם נשארים בשדה מזיקים משתמשים בתכשיר אחר שמנקה את השדה מהמזיקים ב- 0.4 מהמקרים. חלקו את המלבן המתאים.
- מה ההסתברות שהתכשיר הראשון לא יועיל והשני כן?
- מה ההסתברות ששני התכשירים לא יועילו? (סמנו שטח מתאים).

7. חנות "הזמן הנכון" פרסמה את המודעה הבאה.



- שרטטו ריבוע שטח וחלקו אותו על-פי הנתונים לזכות בפרס.
- מה ההסתברות לקנות שיען ולזכות בפרס?

8. בשק נמצאים 10 כדורים: 4 לבנים ו- 6 כחולים.

- מוציאים כדור אחד מבלי להסתכל. שרטטו ריבוע וחלקו חלוקה ראשונה, על-פי הנתונים.
- נניח שהכדור שיוצא יהיה לבן. כמה כדורים ישארו בשק וכמה מהם לבנים? מוציאים כדור נוסף. חלקו את המלבן המתאים.
- נניח שהכדור הראשון שיוצא יהיה **כחול**. חלקו את המלבן המתאים.
- מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו לבנים?
- מה ההסתברות שלשני הכדורים שיוצאו אותו צבע?

9. בשק נמצאים כדורים לבנים ושחורים. מוציאים שני כדורים.

ההסתברות להוציא שני כדורים להם אותו צבע היא 0.51. מה ההסתברות להוציא שני כדורים להם צבעים שונים?

מציאת P

1.  במבצע מסויים ניתן לזכות בשתי הגרלות. ההסתברות לזכות בהגרלה הראשונה מיוצגת על-ידי p .

- (א) מה ההסתברות של משתתף לא לזכות בהגרלה?
- (ב) שרטטו ריבוע וחלקו חלוקה מדגימה ראשונה.
- (ג) ההסתברות לזכות בהגרלה השנייה היא 0.2. חלקו חלוקה שנייה.
- (ד) ההסתברות לזכות בשתי הגרלות היא 0.15. רשמו בתוך המלבן המתאים 0.15 וחשבו את צלע המלבן שאורכה לא ידוע.
- מה ההסתברות לזכות בהגרלה הראשונה (p)?
- (ה) מה ההסתברות לא לזכות כלל?

2.  ההסתברות של יעל לפגוע במטרה בירה בודדת מיוצגת על-ידי p . יעל יורה למטרה פעמיים.

- (א) שרטטו ריבוע וחלקו שתי חלוקות מדגומות.
- (ב) סמנו שטחים המתאימים למאורע: "יעל תפגע בדיוק פעם אחת".
- (ג) ההסתברות שיעל תפגע בדיוק פעם אחת היא 0.32. רשמו משוואה מתאימה וחשבו את p .
- (ד) מה ההסתברות שיעל תפגע **לפחות** פעם אחת?

3.  יורם ויוסי יורים למטרה פעם אחת. ההסתברות של יורם לפגוע במטרה בירה אחת היא 0.8. ההסתברות שיוסי יפגע במטרה בירה אחת מסומנת ב- p . שרטטו וחלקו ריבוע בהתאם.

(א) סמנו מלבנים המתאימים למאורע: "אחד יפגע והשני יחטיא" ובטאו את שטחם בעזרת p .

(ג) ידוע שההסתברות שאחד יפגע והשני יחטיא היא 0.38. רשמו משוואה ומצאו את ההסתברות של יוסי לפגוע בירה בודדת.

ריבוע שטח ושאלות מהחיים... - רשות

פלאולוג בסף זכרון שייכאג אגכניג פאיוואדזיס של אטויד 3 יחידות

1. לפי דיווחי המורים, 0.7 מהתלמידים שנבחנו במבחן ארצי במתמטיקה **ידעו** היטב את החומר. 0.8 מאלה, שלפי הדיווחים הנ"ל **ידעו** את החומר, הצליחו במבחן והשאר נכשלו. 0.3 מאלה, שלפי הדיווחים **לא ידעו** את החומר, הצליחו במבחן והשאר נכשלו.

(א) שרטטו ריבוע שטח מתאים.

(ב) סמנו מלבנים המייצגים את אלה **שלא הצליחו** במבחן.

איזה חלק מאלה **שלא הצליחו** בעצם **יודעים** את החומר, לפי דיווחי המורים?

2. שכיחותה של מחלה באפריקה היא 20%.

ההסתברות שבדיקה מסוימת לאבחון המחלה תגלה אותה אצל אדם חולה היא 0.9. ההסתברות, שהיא תאבחן אדם בריא כחולה, היא 0.2.

(א) השלימו את ריבוע השטח.

	חולה 0.2	בריא 0.8	
אובחן כחולה			אובחן כחולה
אובחן כבריא			אובחן כבריא

(ב) סמנו מלבנים המתאימים למאורע "אובחן כחולה", ורשמו בתוכם ההסתברויות.

מה ההסתברות שאדם שנבדק אובחן כחולה?

מה ההסתברות שאדם **שאובחן כחולה** (שהבדיקה הראתה שהוא חולה) הוא בעצם **בריא**? (חשבו איזה חלק מהווים בריאים שאובחנו כחולים מכל אלה שאובחנו כחולים).

(ג) מה ההסתברות שאדם שאובחן כבריא הוא בעצם חולה?



3. בדקו את מספר הגברים והנשים שנרשמו ושהתקבלו למוסד להשכלה גבוהה. בריבוע השטח רשום איזה אחוז מהנשים ואיזה אחוז מהגברים התקבלו. א) מצאו, על-פי הנתונים הרשומים בתוך הריבוע, איזה חלק מאלה **שהתקבלו** הן נשים, ואיזה חלק הם גברים?

	נשים שנרשמו	גברים שנרשמו	
התקבלו	0.21	0.18	התקבלו
לא התקבלו	0.49	0.12	לא התקבלו

ב) ידוע גם ש- 0.7 מהנרשמים היו נשים ו- 0.3 גברים. ההנחלה טוענת שאין הבדל בין קבלת נשים וגברים למוסד זה, ואפילו יש העדפה לגבי הנשים. השלימו את ריבוע השטח ובידקו טענה זו.



4. "עישון מזיק לבריאות וגורם למחלות לב". כדי לבדוק טענה זו עקבו אחר התפתחות של מחלות לב אצל מעשנים ואצל לא מעשנים. תוצאות המעקב מופיעות בריבוע השטח.

	לא מעשנים	מעשנים	
חלו	0.15	0.2	חלו
לא חלו	0.45	0.2	לא חלו

המשך ←

- (א) איזה חלק מבין אלה שחלו הם מעשנים?
האם ניתן להסיק שהעישון אינו גורר מחלות לב?
(ב) ידוע גם כי 0.4 מהנבדקים מעשנים ו-0.6 מהם לא מעשנים.
השלימו את ריבוע השטח ובידקו איזה חלק מהמעשנים חלו ואיזה חלק מהלא מעשנים חלו.

5. ערכו מעקב אחר 2000 אנשים מעל גיל 65 במטרה לבדוק יעילותה של זריקה נגד שפעת.
500 מהם קיבלו זריקה ו-1500 לא קיבלו זריקה.
100 מאלה שקיבלו זריקה חלו בשפעת ו-600 מאלה שלא קיבלו זריקה חלו בשפעת.
(א) שבצו מספרים אלה בתוך הריבוע.

	קיבלו זריקה	לא קיבלו זריקה	
חלו			חלו
לא חלו			לא חלו

- (ב) איזה חלק מאלה שחלו, חלו **למרות** שקיבלו זריקה?
האם ניתן להסיק שהזריקה יעילה?
(ג) השלימו את ריבוע השטח (רשמו את החלקים המתאימים על הצלעות).
מה ההסתברות לקבל זריקה ולחלות?
מה ההסתברות לא לקבל זריקה ולחלות?
מה תוכלו לומר כעת על יעילות הזריקה?

ועוד שלבים – מודל העץ

1. ① ההסתברות לגשם בערב חנוכה היא 0.2 וההסתברות לגשם בערב פורים היא 0.4.

(א) שרטטו ריבוע וחלקו אותו על-פי הנתונים.

(ב) חשבו: מה ההסתברות שירד גשם בערב חנוכה ולא בערב פורים?

מה ההסתברות שירד גשם בשני ערבי החגים?

מה ההסתברות שבשני ערבי החגים לא ירד גשם?

מה ההסתברות שאחד מערבי החג יהיה ללא גשם?

(ג) נניח שנתון גם, שבערב פסח ההסתברות לגשם היא 0.1, ורוצים לחשב את הסתברויות שאחד מערבי החג הנ"ל יהיה ללא גשם.

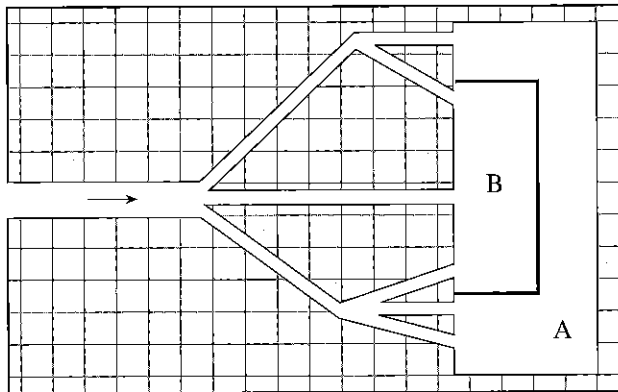
נסו לפתור בעזרת מודל השטח: חלקו כל אחד מהמלבנים שהתקבלו על-פי ההסתברות לגשם בערב פסח.

כפי שכאיגא, כשיש יאגר משני שלבים מודל פלטה מסובך, נכיר כלל מודל נוסף שיקן אן פאגלן במקרים אלו.

2. ② לפני שנים רבות חי מלך ולו בת יפיפה.

המלך הועיד את בתו לנסיך הממלכה השכנה, אך בת המלך אהבה עלם מפשוטי העם. המלך החליט להשאיר לגורל ולחוכמתה של בתו את ההחלטה וקבע כדלהלן: מתחת לארמון ישנו מבוך, כמשורטט. הנסיכה תחליט אם לעמוד באיזור A או באיזור B, באיזור השני יעמוד נמר.

העלם, אהובה של הנסיכה, יעבור במבוך. אם יגיע אל הנסיכה, יכנע המלך לרצון בתו. אם יגיע לנמר הטורף...



המשך ←

(א) היכן כדאי לנסיכה לעמוד?

נראה כעת כיצד משתמשים במבוך הנסיכה כמודל. בהמשך תלמדו לתרגם בעיות שונות לעץ הדומה למבוך כזה, כך שהחישוב יוכל להיעשות בדומה לחישוב שנדגים כאן.



(ב) הוסיפו, בכל שביל בשרטוט של המבוך, את ההסתברות שהעלם המגיע לצומת יבחר באחד המסלולים: למשל, בצומת הראשון יש פיצול ל-3 מסלולים לכן ההסתברות שיבחר בכל אחד מהם היא $\frac{1}{3}$. רשמו הסתברויות מתאימות במסלולים האחרים.

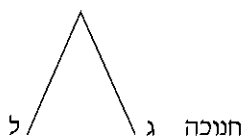
(ג) ההסתברות שהעלם יגיע ל-A דרך המסלול העליון היא $\frac{1}{2}$ מההסתברות שיגיע לצומת הראשון, כלומר $\frac{1}{2}$ של $\frac{1}{3}$. חשבו. המשיכו את רישום ההסתברויות על המסלולים, וחשבו מה ההסתברות שהעלם יגיע ל-B?

נחזור ל"שאלת הגשם" (שאלה 1), ונראה כיצד משתמשים במודל העץ לפתונה.

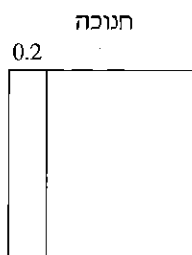


3.  ההסתברות לגשם במקום מסוים היא: 0.2 בערב חנוכה, 0.4 בערב פורים ו-0.1 בערב פסח. (א) נראה כיצד שלבי הבנייה של ה"עץ" מקבילים לשלבים המוכרים של בניית ריבוע שטח.

נפצל לשני ענפים לאפשרויות של "גשם" (ג) או "לא גשם" (ל) בחנוכה.

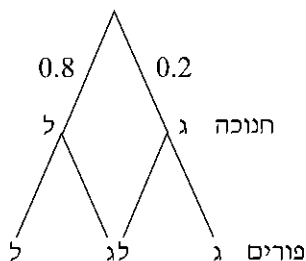


החלוקה המתאימה במודל השטח נראית כך:



המשך ←

רשמו על כל ענף את ההסתברות המתאימה.
 כעת נפצל כל ענף לשתי אפשרויות "גשם",
 "לא גשם" בפורים.

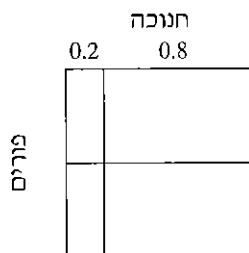


רשמו הסתברויות מתאימות על הענפים.

צבעו מסלול המתאים לגשם בחנוכה וגם בפורים, וחשבו את ההסתברות.

צבעו (בצבע שונה) מסלול המתאים "לגשם" בחנוכה ו"לא גשם" בפורים. חשבו את ההסתברות.

קו לרוחב הריבוע מחלק למעשה כל אחד מהמלבנים לפי ההסתברות לגשם בפורים.



רשמו הסתברויות מתאימות על הצלעות.

צבעו שטח המתאים לגשם בחנוכה וגם בפורים, וחשבו את ההסתברות.

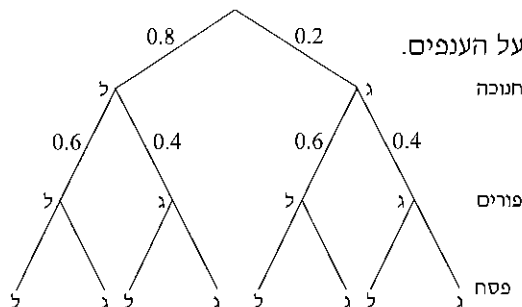
צבעו (בצבע שונה) שטח המתאים "לגשם" בחנוכה ו"לא גשם" בפורים. חשבו את ההסתברות.

כפי שראיתם בתרגיל 1, צריך כעת לחלק כל שטח לפי ההסתברות לגשם בפסח... לא נעשה זאת בגלל הסירבול.



כעת נפצל כל אחד מהארבעת הענפים על-פי האפשרויות "לגשם" (ג) או "לא גשם" (ל) בפסח.

רשמו את ההסתברויות המתאימות על הענפים.

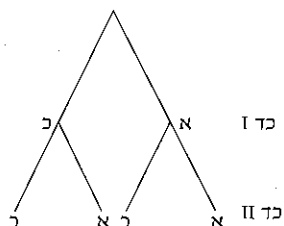


המשך ←

- (ב) מה ההסתברות לגשם בשלושת ערבי החגים? (סמנו מסלול מתאים).
 (ג) צבוע את כל המסלולים המתאימים לגשם בשני ערבי חג (יש שלושה מסלולים).
 חשבו את ההסתברות שירד גשם בשני ערבי חג.

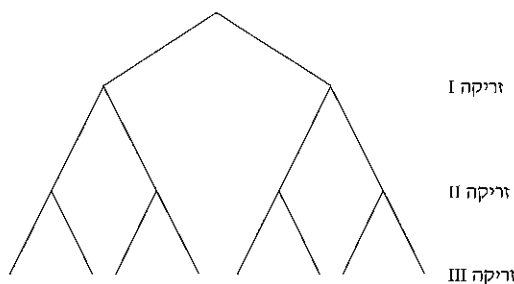
תרגילים

4. לפניכם שני כדים שכל אחד מהם מכיל כדורים אדומים וכחולים במספר שווה. מבלי להסתכל, מוציאים כדור מכל כד.



- (א) לפניכם מודל "עץ" מתאים לבעיה.
 רשמו ליד הענפים את ההסתברויות המתאימות: להוציא כדור אדום (א) כדור כחול (ב).
 (ב) צבעו מסלול מתאים למאורע "יוציאו שני כדורים אדומים".
 מה ההסתברות של מאורע זה?
 (ג) צבעו, בצבע שונה, מסלולים מתאימים למאורע: "יוציאו כדור אחד אדום ואחד כחול", וחשבו את ההסתברות של מאורע זה.

5. זורקים קוביית משחק 3 פעמים. בכל פעם שמתקבל $\boxed{\cdot\cdot\cdot}$ זוכים בנקודה.
 (א) רשמו בקצות הענפים "שש", "לא שש", כך שהעץ ייצג את כל התוצאות האפשריות. רשמו הסתברויות מתאימות על הענפים.



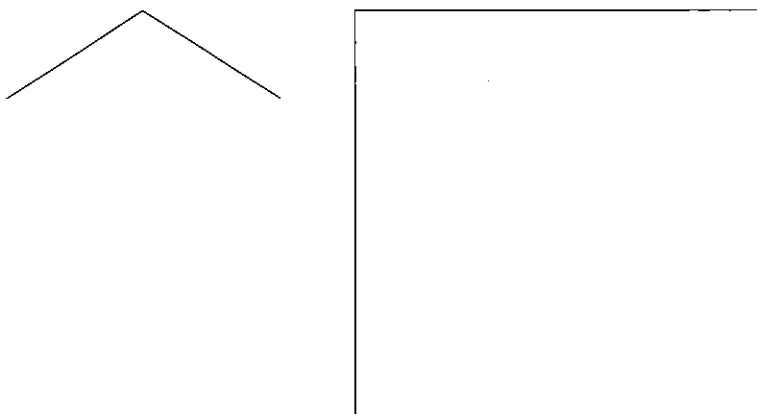
- (ב) סמנו מסלול מתאים למאורע "לא יתקבל $\boxed{\cdot\cdot\cdot}$ כלל".
 מה ההסתברות של מאורע זה?
 (ג) סמנו מסלולים מתאימים למאורע "יתקבל $\boxed{\cdot\cdot\cdot}$ לכל היותר פעם אחת".
 מה ההסתברות של מאורע זה?

בניית העץ

1. שני קלעים יורים למטרה פעם אחת. ההסתברות שהראשון יפגע במטרה ביריה בודדת היא 0.7. ההסתברות שהשני יפגע במטרה ביריה בודדת היא 0.6.

(א) חלקו את הריבוע בהתאם.

(ב) השלימו את מודל ה"עץ". (כולל רישום ההסתברויות על הענפים המתאימים).



במודל השטח אפשר, במקרים מסוימים כמו תרגיל זה, לשרטט את החלוקה השנייה בבת אחת, או לחלק כל מלבן לחוד. במודל העץ מפצלים בשלב השני, כל ענף לחוד, מה ששקול לחלוקה של כל מלבן בנפרד.

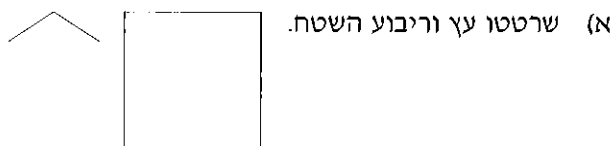


(ג) צבעו בריבוע השטח מלבנים המתאימים למאורע "אחד הקלעים יפגע והשני יחטיא".

צבעו מסלולים מתאימים למאורע זה, במודל העץ.
חשבו את ההסתברות של המאורע.

(ד) צבעו בריבוע השטח שטחים ובמודל העץ מסלולים המתאימים למאורע "לפחות קלע אחד יפגע", וחשבו את ההסתברות.

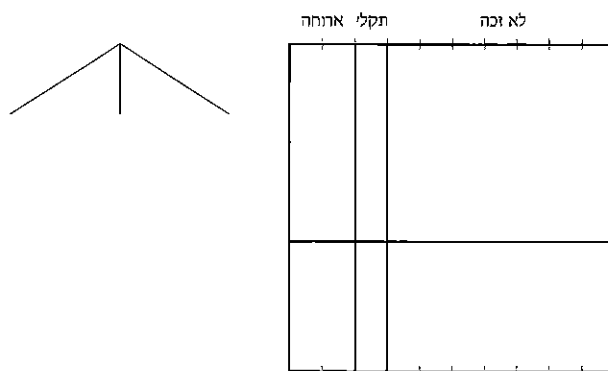
2.  טירון משתתף במטווח. ההסתברות שיפגע ביריה הראשונה היא 0.5.
 אם פגע ביריה קודמת, ההסתברות שיפגע ביריה הבאה היא 0.6.
 אם לא פגע בקודמת, ההסתברות שיפגע ביריה הבאה היא 0.3.
 הטירון ירה פעמיים.



כאן, גם בריבוע השטח, החלוקה השנייה מתבצעת על כל מלבן בנפרד. 

- (ב) צבעו בריבוע השטח מלבנים מתאימים למאורע "תהיה לפחות פגיעה אחת במטרה".
 צבעו מסלולים מתאימים במודל העץ.
 חשבו את ההסתברות של המאורע.
 (ג)  הוסיפו פיצול נוסף, במודל העץ, למקרה "הצלף יורה יריה שלישית".
 צבעו מסלולים מתאימים למאורע: "תהיה רק פגיעה אחת במטרה", וחשבו את ההסתברות.

3.  רשת המבורגרים "טעים מאוד" הכריזה על מבצע:
 כל מי שקונה ארוחה מלאה משתתף בהגרלה, בה ההסתברות לזכות בארוחה חינם היא 0.2, וההסתברות לזכות בתקליטור 0.1.
 רותי מתכוונת ללכת פעמיים לאכול במסעדה "טעים מאוד".
 (א) השלימו חלוקה של ריבוע שטח, והשלימו את העץ.



- (ב) חשבו את ההסתברות שהיא תזכה בארוחה ובתקליטור.
 (ג) חשבו את ההסתברות שרותי לא תזכה כלל.

החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים	החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים	החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים
החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים	החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים	החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים
החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים	החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים	החנות המבצע הפרסים הכרזו על מבצע פרסים

בחנות צעצועים הכריזו על מבצע פרסים:
כל קונה מקבל כרטיס עליו תשע משבצות מכוסות.
בשתיים מהן מצויר טרול.
הקונה מגרד שתי משבצות. אם בשתייהן מצויר טרול
הוא זוכה בו.
היעזרו במודל שטח, או עץ וחשבו את ההסתברות
של קונה לזכות בטרול.

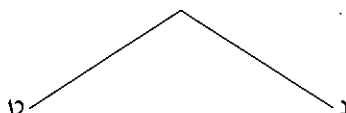
תרגילים

5. בדקו ומצאו שבמפעל ברגים 0.01 של הברגים יוצאים פגומים.
מוציאים שלושה ברגים מארגז
(א) שרטטו "עץ" מתאים.
(ב) סמנו מסלולים מתאימים למאורע "יוציאו בדיוק בורג אחד פגום".
מה ההסתברות של מאורע זה?
(ג) סמנו מסלולים מתאימים למאורע: "יוציאו לכל היותר בורג אחד פגום".
מה ההסתברות של מאורע זה?
6. ההסתברות לזכות בכרטיס טיסה חינם בחברת "דרך צלחה" היא 0.1.
משפחת "מזל" קנתה שלושה כרטיסים.
(א) שרטטו עץ מתאים.
(ב) סמנו מסלולים מתאימים לזכייה של כרטיס אחד חינם וחשבו את ההסתברות?
(ג) סמנו מסלולים מתאימים למאורע "המשפחה תזכה ב**בלפחות** כרטיס אחד חינם". מה ההסתברות של מאורע זה?
7. ההסתברות ששחקן כדורסל יקלע לסל בניסיון ראשון היא 0.8.
(א) שרטטו "עץ" ורשמו הסתברויות על הענפים עבור הזריקה הראשונה.
(ב) ההסתברות שיקלע לסל בזריקות הבאות, תלויה בתוצאת הזריקה הקודמת:
0.9 אם קלע בזריקה הקודמת, 0.6 אם לא קלע בזריקה הקודמת.
השחקן יזרוק לסל עוד פעמיים (סך הכל שלוש פעמים).
השלימו את שרטוט העץ ורשמו הסתברויות מתאימות.
(ג) מה ההסתברות שיחטיא בכל שלוש הזריקות?

המשך ←

- (ד) מה ההסתברות שיקלע **לפחות** פעם אחת? (בידקו אילו מסלולים מתאימים למאורע זה).
- (ה) מה ההסתברות שיקלע בדיוק פעמיים?

8. במבחן רב ברירה (אמריקאי) שלוש שאלות. לכל שאלה ארבע תשובות אפשריות, רק אחת מהן נכונה.
- דני אינו יודע דבר על הנושא הנלמד, לכן החליט לבחור בתשובה נכונה על-ידי "אָן דֶן דינו".
- (א) רשמו הסתברויות מתאימות על הענפים (נ – יענה נכון ט – יטעה).



- (ב) העתיקו והשלימו את העץ לשאר השאלות.
- (ג) מה ההסתברות שדני יענה על כל שלוש השאלות נכון? (דייקו עד שתי ספרות לאחר הנקודה).
- (ד) מה ההסתברות שדני יענה על שתי שאלות נכון?
- (ה) מה ההסתברות שדני יענה **לפחות** על שתי שאלות נכון (ויעבור את המבחן)?

9. במבחן רב ברירה חמש שאלות.
- ההסתברות של דני לא לענות על אף שאלה נכון היא 0.24.
- מה ההסתברות שדני יענה נכון **לפחות** על שאלה אחת?

10.  בטופס טוטו 14 משחקים.

- (א) מהי ההסתברות לנחש תוצאה נכונה עבור משחק בודד?
- (ב) מה ההסתברות לנחש נכון את כל התוצאות?
- (ג) מה ההסתברות לנחש נכון 13 משחקים?
- (ד) מה ההסתברות לנחש נכון **לפחות** 13 משחקים?

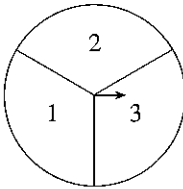
תרגילים נוספים לסיכום וחזרה

בחלק מהתרגילים יש צורך להיעזר במודל העץ, בתרגילים אחרים אפשר להשתמש במודל השטה, ותרגילים אחרים תוכלו לפתור ישירות על-פי הנתונים, או להיעזר ברישום מפורט של התוצאות בשורה או בטבלה. בחרו בדרך מתאימה בכל תרגיל.



1. אפרת וגלעד משחקים.

כל אחד מסובב בתורו פעמיים את מחוג השעון המשוורטט. (השעון מחולק לשלושה חלקים שווים).



אם מכפלת המספרים זוגית מנצחת אפרת.

אם מכפלת המספרים אי זוגית מנצח גלעד.

בידקו אם המשחק הוגן.

אם לא, מצאו מה ההסתברות של כל אחד מהם לנצח.

(תוכלו להשתמש בטבלה).

2. איילת ודפנה החליטו לשחק בסביבון של חנוכה. בכל תור תסובב השחקנית

פעמיים את הסביבון. (התוצאות האפשריות **נ, ג, ה, פ**).

הן מתכוונות לשנות את הכללים במהלך המשחק.

(א) הכלל הראשון: דפנה תנצח אם בשני הסיבובים תצא אותה אות, ואיילת

תנצח אם בשני הסיבובים תצאנה אותיות שונות. האם המשחק הוגן?

(תוכלו להיעזר בטבלה). חשבו את ההסתברות של כל אחת מהן לנצח.

(ב) הכלל השני: איילת תנצח אם בכל אחד משני הסיבובים יוצא **נ** או **ג**.

דפנה תנצח אם לפחות באחד משני הסיבובים יצא **פ**.

(אם שתיהן תצלחנה המשחק יגמר בתיקו).

האם לשתיהן אותו סיכוי לנצח?

(ג) הכלל השלישי: איילת תנצח, כמו קודם, אם בכל אחד משני הסיבובים יצא

נ או **ג**, ודפנה תנצח אם בשני הסיבובים תצא אותה אות.

(אם שתיהן לא תצלחנה, המשחק יגמר בתיקו).

חשבו את ההסתברות של כל אחת לנצח.

3. בשק אטום נמצאים פתקים בצבע כסף ובצבע זהב, אותו מספר של פתקים מכל צבע. מוציאים פתק, מחזירים ומוציאים פתק נוסף.
 אם מוציאים שני פתקים בצבע זהב זוכים בפרס של 50 ש"ח.
 אם מוציאים שני פתקים בצבעים שונים לא זוכים כלל.
 אם מוציאים שני פתקים בצבע כסף משלמים 10 שקלים.
 לכל משתתף במסיבה תהיה זכות להוציא שני פתקים.
 (א) רשמו את כל התוצאות האפשריות. (כזוגות או בטבלה).
 (ב) מה ההסתברות לזכות בפרס?
 (ג) מה ההסתברות לשלם קנס?
 (ד) נניח כי מספר המשתתפים במסיבה גדול מאוד. האם, לדעתכם, מארגני המסיבה מסתכנים בהפסד? נמקו.

4. זורקים קובייה שעל-פיאותיה רשומים המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6 ומסובבים סביבון שעל ארבע פיאותיו רשומים המספרים: 1, 2, 3, 4.
 (א) מה ההסתברות, שהקובייה והסביבון יראו אותו מספר?
 (ב) מה ההסתברות, שהסביבון יראה מספר גדול יותר מהמספר שתראה הקובייה?

5. במבצע מכירות בחנות ספרים הוכרז שכל אדם חמישי, הקונה בחנות ביום מסוים, יקבל הנחה של 20% על מחיר הקניה. בנוסף לכך יזכו באותו יום, בספרון חינם, אלה שיבחרו באחד מהספרים שסומנו באקראי בסימן נסתר.
 בחנות 10000 ספרים ומתוכם סומנו בסימן נסתר 100 ספרים.
 (א) שרטטו ריבוע שטח, או עץ, לתאור כל האפשרויות.
 (ב) מה ההסתברות של אדם, שיכנס לחנות ביום המסוים, לזכות בהנחה?
 (ג) מה ההסתברות של אדם, שיכנס לחנות ביום המסוים, לקבל ספרון חינם?
 (ד) מה ההסתברות של אדם, שיכנס לחנות ביום המסוים, לזכות בשני הפרסים?
 (ה) מה ההסתברות של אדם, שיכנס לחנות ביום המסוים, לא לזכות בפרס כלל?

6. צבעו שלוש פיאות של קוביית משחק בלבן, שתי פיאות בכחול ופיאה אחת באדום.

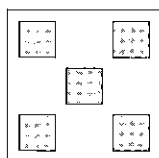
זורקים את הקובייה פעמיים.

- (א) בנו ריבוע שטח, או עץ, שיתאר את כל התוצאות האפשריות.
 (ב) מה ההסתברות לקבל באחת הזריקות כחול ובזריקה האחרת לבן? (סמנו תחילה מלבנים מתאימים בריבוע השטח, או מסלולים מתאימים בעץ).
 (ג) מה ההסתברות לא לקבל לבן כלל?
 (ד) מה ההסתברות לקבל, **לפחות** באחת הזריקות, לבן?
 (ה) מה ההסתברות לקבל, **לכל היותר** באחת הזריקות, לבן?

7. יאיר ודפנה משחקים במטבע.

- יאיר זוכה בנקודה אם יוצא עץ. דפנה זוכה בנקודה אם יוצא מספר.
 ינצח במשחק מי שיגיע ל- 10 נקודות.
 דפנה הגיעה ל- 8 נקודות ויאיר הגיע ל- 9 נקודות ואז הופסק המשחק...
 יאיר טען: "הייתי מנצח בטוח".
 דפנה אמרה: "לא נכון, היה לי עדיין סיכוי טוב לנצח".
 (א) כמה זריקות, לכל היותר, עליהם לזרוק, כדי שאחד מהם יגיע ל- 10 נקודות?
 (ב) חשבו את ההסתברות של דפנה לנצח, מהשלב הנ"ל במשחק. (היעזרו בריבוע שטח או בעץ).

8. ב"מזל בורגר" נותנים לכל קונה טופס ובו 5 ריבועים. הריבועים מכסים על 5



- ציורים, **שניים** מהם זהים. יש לגרד שני ריבועים. אם בשניהם מופיע אותו ציור מקבלים פרס.
 מה ההסתברות לקנות ב"מזל בורגר" ולזכות בפרס?
 (היעזרו בריבוע שטח או בעץ).

9.  (א) ביום א' יָרַד גשם. ההסתברות שִׁיָּרֵד גשם ביום מסוים, אם ביום לפניו יָרַד גשם היא 0.6. שרטטו עץ או ריבוע שטח ורשמו הסתברויות לגבי יום ב'.
 (ב) ההסתברות שִׁיָּרֵד גשם ביום מסוים אם ביום לפניו לא יָרַד גשם היא 0.5. השלימו את העץ עבור יום ג'.
 (ג) מה ההסתברות שביום ג' יָרַד גשם?

10. ההסתברות להצליח בטסט נהיגה אצל הבוחן ירושע היא 0.3. (בלי קשר לרמת הנהיגה של הנבחן).
 בחרו **שלושה** שמות של נבחנים, שנבחנו אצל ירושע.
- (א) מה ההסתברות ששלושתם עברו?
 - (ב) מה ההסתברות שאף אחד לא עבר?
 - (ג) מה ההסתברות שלפחות אחד עבר?
 - (ד) מה ההסתברות שבדיוק אחד עבר?

מציאת p

11. ההסתברות שכדורסלן יפגע בזריקה בודדת מיוצגת על-ידי p. הכדורסלן זורק פעמיים את הכדור.
- (א) שרטטו ריבוע שטח ועץ. השלימו הסתברויות במלבנים ועל הענפים.
 - (ב) ההסתברות שהכדורסלן לא יפגע בשתי הזריקות היא 0.04. מצאו את p.
12. במפעל מייצרים ברגים ובודקים אותם.
- (א) ההסתברות שהבורג המוצא פגום מיוצגת על-ידי p.
 - (ב) מוציאים באקראי שני ברגים מהערימה.
 - (א) בנו ריבוע שטח, או עץ, ורשמו הסתברויות.
 - (ב) ההסתברות שיוצא בורג אחד פגום והשני לא היא 0.18. מצאו את p.
13. רותי משחקת פעמיים במשחק מזל. ידוע שההסתברות להצליח בשני המשחקים היא 0.0144.
- (א) מה ההסתברות שרותי תצליח במשחק בודד? (תוכלו לבחור כמשתנה את ההסתברות שלה להצליח במשחק בודד ולבנות עץ, או ריבוע שטח).
 - (ב) מה ההסתברות שתצליח בדיוק במשחק אחד?
 - (ג) מה ההסתברות שתצליח לפחות במשחק אחד?
14. במדינה מסוימת חלק מהאוכלוסיה מרכיבים משקפיים.
- (א) בוחרים באקראי שני תושבים של מדינה זו. ההסתברות ששניהם שייכים לאותה קבוצה (שניהם מרכיבים משקפיים, או שניהם לא מרכיבים משקפיים) היא 0.68.
 - (ב) מה ההסתברות, שאם בוחרים באקראי תושב, הוא מרכיב משקפיים? (בחרו משתנה, שרטטו עץ או ריבוע שטח, כתבו משוואה ופתרו).

הסתברות והבינום של ניוטון – רשות

סעיף זה אינו שייך לאכיפת האימוץ של המידע וי"א.

1.  ההסתברות שקלע היורה למטרה יפגע בה היא $\frac{2}{5}$.

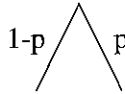
(א) הקלע יורה פעמיים למטרה. שרטטו עץ מתאים. כמה מסלולים בעץ?

(ב) הקלע יורה שלוש פעמים. כמה מסלולים יהיו בעץ?

(ג) הקלע יורה ארבע פעמים. כמה מסלולים יהיו בעץ?

בפרק זה נכיח מודל חדש המאגד את כל המידע של שאלה. בכל שאלה הפיזיקלית נא

ל-2 כלומר:



2.  ההסתברות שירד גשם ביום בחודש ינואר היא 0.6.

(א) שרטטו דיאגרמת עץ שתתאר את ההסתברות לירידה, או אי ירידת גשם,

ביומיים הראשונים של חודש ינואר.

(ב) המסלולים הקיימים בעץ המתאים ליומיים הראשונים הם:

$$0.6^2 + \boxed{2} \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.4^2$$

קיימים שני מסלולים "מהסוג $0.6 \cdot 0.4$ " הסבירו למה.

הסבירו מדוע סכום המכפלות מתאים ל: $(0.6 + 0.4)^2$.

(ג) הוסיפו בעץ ששרטטתם שלב נוסף, כך שיתקבל עץ שיתאר את ההסתברות

לירידה, או אי-ירידת גשם, בשלושת הימים הראשונים של ינואר.

כפלתם כל מסלול של "עץ היומיים" פעם ב-0.6 ופעם ב-0.4, לכן מ-4 מסלולים התקבלו 8 מסלולים.

סך הכל כפלתם את הביטוי $(0.6 + 0.4)^2$ פעם ב-0.6 ופעם ב-0.4 כלומר,

$$\text{קיבלתם } (0.6 + 0.4)^3.$$



(ד) מה ההסתברות שירד גשם בכל שלושת הימים?

מה ההסתברות, המתאימה למסלול בלשה, של יומיים גשם ויום אחד ללא

גשם?

המשך ←

ה) סוגי המסלולים הקיימים בעץ עם שלושה השלבים רשומים כאן בהמשך. השלימו על הקווים המרוסקים מה מתאר כל סוג של מסלול. השלימו במשבצות כמה מסלולים מכל סוג קיימים בעץ זה.

$$0.6^3 + \square 0.6^2 \cdot 0.4 + \square 0.6 \cdot 0.4^2 + 0.4^3 = (0.6 + 0.4)^3$$

ו) נניח שרוצים לחשב הסתברויות לגשם בהתייחס לארבעה הימים הראשונים בחודש ינואר. במקרה כזה יש צורך להוסיף שלב נוסף לעץ. כמה מסלולים יהיו סך הכל בעץ המתאר ארבעה שלבים? במקרה כזה מסובך לשרטט עץ ונשתמש בביטוי כמו זה שרשמנו עבור שלושה ימים ויומיים.

מה ההסתברות המתאימה למסלול של ארבעה ימים ללא גשם?
מה ההסתברות המתאימה למסלול אחד, המייצג שלושה ימים ללא גשם ויום אחד של גשם?
מה ההסתברות המתאימה למסלול אחד, המייצג שני ימים ללא גשם ושני ימי גשם?
מה ההסתברות המתאימה למסלול אחד המייצג, יום אחד ללא גשם ושלושה ימי גשם?

מה ההסתברות המתאימה למסלול של ארבעה ימי גשם?

ז) רשמו ביטוי לסך כל ההסתברויות השונות: (רשמו ביטוי לכל סוג של מסלול והשאירו מקום ריק למקדם שלו).

סוגי מסלולים

$$\square + \square + \square + \square + \square = (\quad)^4$$

שורה זו היא תחליף לעץ במקרה שמספר השלבים גדול.

מה מייצגים הביטויים שרשמתם בשורה האחרונה בהתייחס לעץ?
מה מייצגים המקדמים (החסרים בינתיים) בהתייחס לעץ?

סכום מעריכי החזקות בכל איבר בביטוי שרשמתם למעלה שווה ל-4. בעץ בו יש 5 שלבים סכום מעריכי החזקות יהיה שווה ל-5 וכו'.



הבעיה כעת היא לקבוע, כמה מסלולים מכל סוג קיימים. כלומר, את המקדם של כל מחובר.



3. בתרגיל הקודם קיבלתם, למעשה, פיתוח של $(a + b)^2$, אחר כך של $(a + b)^3$, ולבסוף את סוגי המכפלות בפיתוח של $(a + b)^4$.

פיתוח של $(a + b)^n$ נקרא בשם **הבינום של ניוטון** במקרה שמדובר בו כאן, $a + b = 1$ (כי מדובר בהסתברות p ובמשלים $1 - p$). כדי לקבוע את המקדמים נסתכל על המעבר מ- $(a + b)^3$ ל- $(a + b)^4$. העץ "בן" 4 השלבים מתקבל מכפל כל מסלול בעץ של 3 השלבים, פעם ב- a ופעם ב- b :

הביטוי a^4 התקבל מכפל של המסלול a^3 בעץ ב- a . הביטוי a^3b מתקבל מכפל המסלול a^3 ב- b ומכפל שלוש המסלולים שצורתם a^2b ב- a . לכן בעץ בעל 4 השלבים יהיו 4 מסלולים שצורתם a^3b .

$$(a+b)^3 = \boxed{1}a^3 + \boxed{3}a^2b + \boxed{3}ab^2 + \boxed{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \boxed{}a^4 + \boxed{}a^3b + \boxed{}a^2b^2 + \boxed{}ab^3 + \boxed{}b^4$$

בסך הכל המעבר מ- $(a + b)^3$ ל- $(a + b)^4$ מיוצג בשורות הבאות:
 (א) רשמו במשבצת המתאימה, כמה מסלולים שצורתם a^2b^2 קיימים. שרטטו חיצים המראים מה "מקורם".
 (ב) רשמו במשבצת המתאימה, כמה מסלולים שצורתם ab^3 קיימים. שרטטו חיצים המראים מה "מקורם".

4. לפניהם שורות המקדמים בפיתוח מספר המסלולים מכל סוג עד לשורה השלישית (שלב שלישי בעץ).
 א) השלימו את השורה הרביעית.

$$\begin{array}{lcl} a+b : & 1 & 1 \\ (a+b)^2 : & 1 & 2 & 1 \\ (a+b)^3 : & 1 & 3 & 3 & 1 \\ (a+b)^4 : & 1 & & & \end{array}$$

- ב) כל מקדם מתקבל מחיבור שני המקדמים שמעליו בשורה הקודמת. הסבירו למה.
 ג) העתיקו והשלימו את "המשולש" הזה עד לשורה העשירית.

המשולש שהתקבל נקרא משולש פסקל

- ד) המקדמים בשורה n מייצגים את הפיתוח של $(a + b)^n$. בקודקוד המשולש למעלה יש לרשום 1, שמתאים ל- $(a + b)^0 = 1$. הוסיפו אותו למשולש פסקל.

- ה) השלימו את כל הביטויים המתקבלים בפיתוח של העץ עבור 6 ימים בינואר. כלומר, את הפיתוח של $(0.6 + 0.4)^6$

$$0.6^6 + \square \cdot 0.6^5 \cdot 0.4 + \square \dots$$

- רשמו את המקדמים.
 חשבו את ההסתברות ל- 3 ימי גשם ו- 3 ימים ללא גשם.
 מנו את האיברים המתאימים ליותר מ- 3 ימי גשם וחשבו את ההסתברות.

בנספח, בסוף סעיף 3, מצאנו הסבר נוסף לאוקדאי הביןאם.

5. זורקים קובייה הוגנת ובודקים אם יצא מספר גדול מ-4.
(א) השלימו, על תחילת העץ, את הסתברויות המתאימות לזריקת הקובייה פעם אחת.



זורקים את הקובייה 5 פעמים.

(ב) השלימו את הפיתוח $(____ + ____)^5$, היעזרו במשולש פסקל.

$$(\quad + \quad)^5 = \underline{\hspace{1cm}} + \boxed{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} + \boxed{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} + \boxed{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} + \boxed{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} +$$

ג) מה ההסתברות שיתקבל פעמיים מספר גדול מ-4 ושלוש פעמים מספר קטן או שווה ל-4?

ד) סמנו איברים המתאימים למאורע: "לפחות 3 פעמים יתקבל מספר גדול מ-4", מה ההסתברות של מאורע זה?

(ה) סמנו איברים המתאימים למאורע: "לכל היותר 3 פעמים יתקבל מספר גדול מ-4". מה ההסתברות של מאורע זה?

תרגילים

6. שחקן כדורסל מתאמן בקליעה.

ההסתברות שיקלע לסל בזריקה בודדת היא: 0.8.

שחקן זורק 5 פעמים לסל.

(א) רשמו ביטוי לסך כל ההסתברויות של קליעה ואי-קליעה לסל, (השאירו מקום ריק למקדמים).

$$(\quad + \quad)^5 = \underline{\hspace{1cm}} + \boxed{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} + \boxed{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} + \boxed{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} + \boxed{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} +$$

(ב) סמנו בקו את האיברים המתאימים לחישוב המאורע: "השחקן יקלע לפחות 3 פעמים".

ג) הקיפו את האיברים המתאימים לחישוב המאורע: "השחקן יקלע לכל היותר 3 פעמים".

7. בבית חורשת לנרות "נריה" יש 1% של נרות פגומים.
 בשלב האחרון של הייצור מוציאים 10 נרות לבדיקה.
 (א) רשמו ביטוי לסך כל ההסתברויות למציאת נרות פגומים או תקינים.
 (ב) סמנו בקו איברים המתאימים למאורע: "יוציאו לכל היותר 2 נרות פגומים".
8. (א) רשמו את הפיתוח המלא של $(0.5 + 0.5)^6$.
 (ב) רשמו את הפיתוח המלא של $(0.2 + 0.8)^{10}$.
9. (א) מטבע של שקל מוטל 6 פעמים. מה ההסתברות, **שבדיוק** פעמיים התוצאה תהיה עץ? היעזרו בפיתוח שרשמתם בתרגיל 8א.
 (ב) מטבע של שקל מוטל 6 פעמים. מה ההסתברות, **שבדיוק** 3 פעמים התוצאה תהיה "עץ"?
10. במשחק כדור-סל מסוים, 10% מהצופים הם מרמת-גן.
 בוחרים באופן מקרי 5 צופים לראיון.
 (א) רשמו ביטוי מתאים לסך כל ההסתברויות. (כולל מקדמים מתאימים).
 (ב) מה ההסתברות שכל חמשת הצופים שיבחרו יהיו מרמת-גן?
 (ג) מה ההסתברות, **שבדיוק** 3 מהצופים שיבחרו יהיו מרמת גן?
 (ד) מה ההסתברות, **שלפחות** 3 מהצופים שיבחרו יהיו מרמת-גן?
 (ה) מה ההסתברות, שאף אחד מחמשת הצופים שיבחרו לא יהיה תושב רמת-גן?
11. בשל תקלה בבית החורשת המייצר ברגים, יצאו 20% מהברגים (שיוצרו בעת התקלה) פגומים. מבין הברגים שיוצרו באותה תקופה, דגמו אקראית 6 ברגים.
 (א) רשמו ביטוי מתאים.
 (ב) מה ההסתברות, שבמדגם של 6 הברגים הנ"ל, יהיו לכל היותר 2 ברגים פגומים?
 (ג) מה ההסתברות, שבמדגם של 6 הברגים הנ"ל, יהיו לפחות 2 ברגים פגומים?
12. בכד 7 כדורים ירוקים ו- 5 כדורים צהובים. מוציאים כדור, רושמים את צבעו ומחזירים אותו לכד. בצורה זאת מוציאים סך הכל 4 כדורים.
 (א) מה ההסתברות להוציא 4 כדורים צהובים?
 (ב) מה ההסתברות להוציא 3 כדורים ירוקים וכדור אחד צהוב?
 (ג) מה ההסתברות להוציא **לכל היותר** 3 כדורים ירוקים?

אג שאלה 13 לא ניגן אפאר בלעזר נאסח פפסגהלה פבינאליג - היילדל באדל פלל.

13. בכד 4 כדורים אדומים ו- 3 כדורים לבנים. מוציאים כדור, ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף ולבסוף כדור שלישי, ללא החזרה.

(א) מה ההסתברות להוציא שלושה כדורים אדומים?

(ב) מה ההסתברות להוציא כדור ראשון לבן ואחריו שני כדורים אדומים?

14. ההסתברות שנורה המיוצרת במפעל מסוים תהיה פגומה היא 0.3.

בודקים שבע נורות שנבחרות באקראי.

(א) מה ההסתברות שבדיוק אחת מהן תהיה פגומה?

(ב) מה ההסתברות שבדיוק שתיים מהן תהיינה פגומות?

(ג) מה ההסתברות שלכל היותר שתיים מהן תהיינה פגומות?

15. ההסתברות שנורה המיוצרת במפעל מסוים תהיה פגומה היא 0.3.

הוציאו נורות לבדיקה בשיטה הבאה: מוציאים נורה ובודקים אותה. אם היא

תקינה, מוציאים נורה נוספת. אם היא פגומה, מסיימים את הבדיקה.

מה ההסתברות שהוציאו בבדיקה זו, חמש נורות **בדיוק**? (היעזרו בעץ.)

16. זורקים קובייה מאוזנת חמש פעמים.

(א) הראו, כי ההסתברות לקבל בדיוק פעמיים מספר גדול מארבע שווה

להסתברות לקבל בדיוק פעם אחת מספר גדול מארבע.

(ב) מה ההסתברות לקבל **לכל היותר** פעמיים מספר גדול מארבע?

(ג) מה ההסתברות לקבל **לפחות** פעמיים מספר גדול מארבע?

17. (א) מה ההסתברות שבמשפחה בת שני ילדים יהיו שניהם בנים?

(ב) מבין כל המשפחות בארץ, להן שני ילדים, בוחרים באקראי שבע משפחות.

מה ההסתברות, שבשתיים מתוך שבע המשפחות האלה, יהיו כולם בנים?

(ג) מה ההסתברות, **שלפחות** בשתיים מתוך שבע המשפחות האלה, יהיו כולם

בנים?

18. ההסתברות שמסמר המוצא מקו ייצור יהיה פגום היא 0.1.

(א) מה ההסתברות, שאם יוצאו באקראי שלושה מסמרים, יהיו שלושתם פגומים?

(ב) מוציאים לצורך בדיקה שלוש של מסמרים.

מה ההסתברות, שאם יוצאו 6 שלשות כאלה, בדיוק בשלושה אחת יהיו כל המסמרים פגומים.

מה ההסתברות, שאם יוצאו 6 שלשות כאלה, **לפחות** בשלושה אחת יהיו כל המסמרים פגומים?

19. ההסתברות לזכות בהגרלה מיוצגת על-ידי p .

בועז עומד לקנות ארבעה כרטיסי הגרלה.

נניח ש- q מייצג את ההסתברות לא לזכות בהגרלה. (כלומר $p + q = 1$)

(א) רשמו ביטוי לסך כל ההסתברויות של בועז, לזכות או לא לזכות בהגרלה.

(ב) ההסתברות שבכל ארבעת הכרטיסים לא תהיה זכיה היא 0.922.

מצאו את p ו- q .

(ג) מה ההסתברות שבשניים מארבעת הכרטיסים שבועז יקנה תהיה זכיה?

20. ההסתברות לבחור תלמיד מבית ספר "רם", שגובהו קטן מ- 1.60 מ' מיוצגת על-ידי p .

אם בוחרים באקראי שישה תלמידים מבית הספר, אז ההסתברות שהגובה כל ששת התלמידים הוא 1.60 מ' ויותר היא 0.2458.

(א) מצאו את p .

(ב) מה ההסתברות שאם יבחרו שישה תלמידים מבית הספר, יהיה הגובה של **לכל היותר** שניים מהם קטן מ- 1.60 מ'?

21. בוחרים באקראי ארבעה אנשים ממפעל מסוים. ההסתברות שכולם אינם מעשנים היא 0.6561.

מה אחוז המעשנים במפעל?

22. בוחרים באקראי המישה תלמידים מבית ספר "גור". ההסתברות שלפחות אחד מהם אוהב ספורט היא 0.98976.

מה ההסתברות שתלמיד אחד, שיבחר באקראי מבית ספר זה, אוהב ספורט?

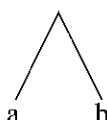
23. אחוז המקרים העומדים בתקן מיוצג על-ידי p .
 אם בוחרים באקראי חמישה מקרים, שעברו את פס הייצור, אז ההסתברות שכל החמישה עומדים בתקן שווה להסתברות שבדיוק ארבעה עומדים בתקן.
 (א) מצאו את p . (רשמו ביטוי מתאים בעזרת p ו- q , רשמו משוואה ופתרו).
 (ב) מה ההסתברות שלפחות ארבעה מקרים עומדים בתקן?
24. p מייצג את ההסתברות שתרופה מסוימת תרפא מחלה.
 ידוע כי אם בוחרים באקראי שישה אנשים, שיטופלו בתרופה זו, אז ההסתברות שחמישה ירפאו שווה להסתברות ששלושה מהשישה ירפאו.
 (א) מצאו את p .
 (ב) מה ההסתברות שלפחות ארבעה משישה המטופלים ירפאו?
25. ההסתברות להצליח בניסוי מסוים היא p .
 ההסתברות להיכשל באותו ניסוי היא q .
 מבצעים את הניסוי 5 פעמים.
 ידוע כי ההסתברות להצליח בשלוש מתוך חמשת הניסויים (ולהיכשל בשניים) היא 0.0512.
 כמו כן ידוע כי ההסתברות להצליח בשניים מתוך חמשת הניסויים (ולהיכשל בשלושה) היא 0.2048.
 (א) מצאו את p .
 (ב) מה ההסתברות שהניסוי יצליח **בלפחות** שלושה מתוך חמשת הניסויים?

הסבר נוסף למקדמי נוסחת הבינום

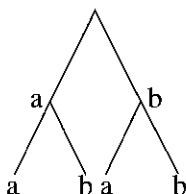
ראינו שניתן למצוא את המקדמים של איברי הביטוי $(a + b)^n$ בעזרת משולש פסקל. ההסבר היה רקורסיבי, מצאנו את המקדמים של $(a+b)^n$ על-פי מקדמי $(a+b)^{n-1}$. ננסה כעת להסביר באופן אחר, כיצד למצוא את המקדמים האלה ונראה את הקשר למשולש פסקל.



כאמור, אפשר להסתכל על הפיתוח של $(a + b)^n$ כעל בנית עץ בעל n שלבים.



העץ המתאים ל- $a + b$ הוא:



העץ המתאים ל- $(a + b)^2$ הוא:

(כשמדובר בחישובי הסתברות $a + b = 1$).

באופן דומה, בעץ המתאים ל- $(a + b)^n$ יהיו n קומות".
ניקח לדוגמה פיתוח של $(a + b)^7$. כל מסלול בעץ מורכב מ- 7 גורמים, חלק מהם a וחלק מהם b (כולל האפשרות שהגורמים כולם מאותו סוג). סך הכל, נמצאות בעץ כל המכפלות האפשריות בכל הסידורים האפשריים השונים זה מזה.
במסלול כלשהו המתאים ל- ab^6 יש גורם אחד a ו- 6 גורמים b . בעץ כולו ישנם כל המסלולים השונים מסוג זה, כלומר 7 מסלולים. לכן המקדם של איבר זה הוא 7.
(a יכול להופיע במקום ראשון או במקום שני וכו', סך הכל 7 אפשרויות).
באותו אופן המקדם של a^3b^4 בפיתוח של $(a + b)^7$ מתאר את מספר המסלולים בהם נמצאים 3 גורמים a ו- 4 גורמים b . לכן, כשמחפשים את המקדם a^3b^4 מחפשים למעשה בכמה אפשרויות ניתן לסדר 3 גורמים a ו- 4 גורמים b בשורה.

נדון כעת בשאלת מספר הסידורים של עצמים בשורה. נניח לצורך הדיון, שהעצמים הם הספרות ואנו בונים מהן מספרים.

מהספרות 1 ו- 2 אפשר ליצור שני מספרים: 12 ו- 21.

את הסיפורה 3 נוכל להוסיף בכל אחד מהמספרים הנ"ל בשלושה מקומות: מימין או משמאל או בין הספרות. באופן כזה נקבל $3 \cdot 2$, כלומר 6 מספרים שונים המורכבים מהספרות 1, 2, 3: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

תרגיל

- א) מה המקדם של a^2b^5 בפיתוח של $(a+b)^7$?
- ב) מה המקדם של ab^6 בפיתוח של $(a+b)^7$?
- ג) מה המקדם של a^3b^2 בפיתוח של $(a+b)^5$?
- ד) לאיזה איבר בפיתוח של $(a+b)^5$ יש אותו מקדם כמו זה שמצאתם ב- ג'.
- ה) מה המקדם של a^7b^5 בפיתוח של $(a+b)^{12}$?
- ו) מה המקדם של $(0.7)^2 \cdot (0.3)^3$ בפיתוח של $(0.3+0.7)^5$?
- ז) למה שווה האיבר הזה בפיתוח?
- ח) פתחו את $(0.2+0.8)^7$.

המקדמים ומשולש פסקל

נהוג לסמן את המקדמים הנ"ל בצורה $\binom{n}{k}$ למשל, $\binom{5}{3}$, והפירוש: המקדם של a^3b^2 בפיתוח של $(a+b)^5$, ערכו

תרגילים

1. חשבו את $\binom{6}{3}, \binom{5}{3}, \binom{4}{3}$
2. חשבו את $\binom{6}{4}, \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$ ואת $\binom{6}{4}$.
3. נרשום את משולש פסקל בצורת רישום זה:
- $$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ & & & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ & & & & & & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ & & & & & & \\ & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ & & & & & & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \end{array}$$

התכונה, בעזרתה בונים את משולש פסקל, באה לידי ביטוי בזהות:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

כלומר, סכום שני מספרים סמוכים בשורה, הוא המספר הרשום ביניהם בשורה שמתחתם.

השלמות בסטטיסטיקה (הכנה להתפלגות נורמלית)

מדדי פיזור

1. לפניכם ציוני התעודה של חן, רונית ושי.

חן: 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70
רונית: 40, 50, 60, 70, 70, 80, 90, 100
שי: 40, 40, 70, 70, 70, 70, 100, 100

א) חשבו את הציון הממוצע, ורשמו את השכיח של כל תלמיד.

ב) האם המדדים (ממוצע, שכיח) מספיקים לתיאור והשוואת הישגי התלמידים? נמקו.

ג) הציעו דרך לתאר את ההבדל בין ציוני שלושת התלמידים.

2. א) השתמשו בציוני התלמידים מהתרגיל הקודם, וחשבו את ההפרש בין הציון הגבוה ביותר לציון הנמוך ביותר של כל תלמיד.

אחת האפשרויות לאפיין פיזור של קבוצת נתונים היא לחשב את ההפרש בין הערך הגדול ביותר בקבוצה לערך הקטן ביותר בקבוצה.
מדד פיזור זה נקרא **טווח**.

ב) האם הממוצע והטווח מאפשרים להשוות בין הישגי התלמידים? נמקו.

הטווח מודד פיזור של הציונים. בדוגמה זו, הטווח עוזר לאפיין את ההבדלים בציונים בין חן לעומת רונית ושי, אך אינו עוזר לאפיין את ההבדלים בין הציונים של רונית ושי.



3. לפניהם ציוני בחנים במתמטיקה של רונית ושי.

רונית: 100, 50, 90, 70, 60, 80

שי: 50, 75, 100

- (א) חשבו את הממוצע של הציונים של כל תלמיד.
(ב) חשבו, עבור כל תלמיד, את הסטיות מהממוצע. מסמנים סטייה מעל הממוצע כמספר חיובי וסטייה מתחת לממוצע כמספר שלילי.

רונית: 100, 50, 90, 70, 60, 80

הסטיות מהממוצע: _____
חשבו את סכום הסטיות מהממוצע.

שי: 50, 75, 100

הסטיות מהממוצע: _____
חשבו את סכום הסטיות מהממוצע.

האם ניתן להיעזר בסכום הסטיות מהממוצע לחישוב הפיזור? נמקו.

(ג) מחקו מרשימת הסטיות מהממוצע את הסימנים ומצאו את סכום הסטיות "המוחלטות" (ללא סימן). האם אפשר להסיק ש"פיזור הציונים" אצל רונית גדול יותר מאשר אצל שי? נמקו.

(ד) חשבו את הממוצע של הסטיות "המוחלטות". כלומר, חלקו במספר הציונים. למי משני התלמידים פיזור ציונים גדול יותר?

לקראת סטיית התקן

במקום להתייחס לערכים המוחלטים של סטיות, כפי שעשינו בתרגיל הקודם, נהוג להעלות בריבוע את הסטיות מהממוצע. העלאה בריבוע פותרת אף היא, את הבעיה שהסטיות מהממוצע הן חיוביות ושליליות וכשמחברים אותן הן מבטלות אלו את אלו, ובנוסף היא נותנת משקל גדול יותר לסטיות הגדולות מהממוצע. בגלל סיבה זו (וסיבות מתמטיות נוספות) נהוג לחשב את ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע, כפי שתלמדו בתרגילים הבאים.



4. בְּרִשְׁמָה מופיעים ציוני הבחנים במתמטיקה של חן. ממוצע הציונים שלו 80.

(א) חשבו את הסטיות של ציוניו מהממוצע.

חשבו גם את ריבועי הסטיות מהממוצע.

הציונים: 95 , 80 , 75 , 70

הסטיות מהממוצע (80):

ריבועי הסטיות מהממוצע:

(ב) מצאו את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע.

חשבו את ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע (חלקו במספר הציונים).

לממוצע ריבועי הסטיות, קוראים **שונות** ומסמנים אותה ב- S^2 .
השונות שהתקבלה בתרגיל זה היא 87.5.

לצורך השוואת פיזור של קבוצות שונות ניתן להשתמש בשונות, או בשורש הריבועי של השונות.



השורש הריבועי של השונות נקרא **סטיית תקן**

כדי לאפיין את פיזור ציוניו של תלמיד בודד משתמשים בסטיית התקן. במקרה זה $\sqrt{87.5} = 9.35$ כלומר, סטיית התקן של ציוני חן מהממוצע היא 9.35.



בחישוב השונות כאן, הנחנו אי-תלות בין הציונים של חן, למרות שבדרך כלל לא ניתן להניח הנחה כזו כשמדובר בציונים של אותו תלמיד.

5. הגובה הממוצע של תלמידי כיתה מסוימת הוא 165 והשונות 100.

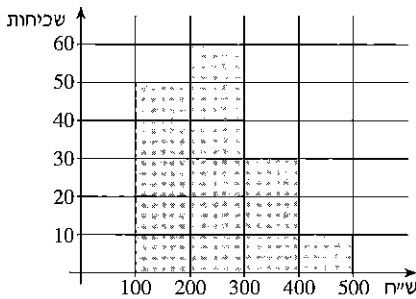
(א) מהי סטיית התקן?

(ב) באיזה משני המדדים, שונות או סטיית תקן, עדיף לתאר את פיזור הגבהים ביחס לממוצע בכיתה זו?

(ג) בכיתה אחרת אותו גובה ממוצע. סטיית התקן 20. מה תוכלו לומר על הגבהים בשתי הכיתות האלה?

ע"ע 6

ההקטוֹגְרַם מתאר את הסכומים בש"ח, שנתרמו על-ידי עובדי מפעל, עבור השתלת כבד בחו"ל לאחד מהעובדים.



- (א) כמה תורמים היו במפעל?
 (ב) ממוצע סכומי ההתרמה 250 ש"ח.
 סמנו על הציר האופקי.
 (ג) סטיית התקן היא 90.
 סמנו על הציר נקודה המתאימה לתרומה הנמצאת סטיית תקן אחת מעל הממוצע? מהי?

(ד) סמנו על הציר נקודה המתאימה לתרומה הנמצאת שתי סטיות תקן מעל לממוצע? מהי?

- (ה) מהי התרומה הנמצאת סטיית תקן אחת מתחת לממוצע?
 (ו) צבעו על הציר האופקי את הקטע המתאים לתרומה שבין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע לסטיית תקן אחת מעל לממוצע.

סטיית תקן מטבלת שכיחויות

7. בכיתה י"ב 12 תלמידים. במבחן בהסטוריה התקבלו הציונים הבאים:

שכחות (מס' התלמידים)	הציון
2	6
4	7
5	8
1	9

- (א) השלימו רשימה מפורטת של הציונים.
 6, 6, 7, 7, _____
 (ב) הממוצע של הציונים הוא 7.4.
 רשמו מתחת לכל ציון את הסטייה שלו מהממוצע, ומתחת לסטייה מהממוצע את ריבוע הסטייה מהממוצע.

כמו בחישוב הממוצע מטבלת שכיחויות, במקום לחבר את אותו ריבוע סטייה מהממוצע כמה פעמים, אפשר לכפול את ריבוע הסטייה מהממוצע במספר הפעמים המתאים לשכיחות.



- (ג) כמה פעמים מופיע ריבוע הסטייה מהממוצע 1.96?
 0.16!
 (ד) כפלו ומצאו את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע.
 (ה) חשבו את השונות ואת סטיית התקן.

בכיתה י"א 30 תלמידים. במבחן בלשון התקבלו הציונים הבאים.

הציון	שכיחות (מס' התלמידים)
5	2
6	7
7	10
8	6
9	5

- (א) השלימו רשימה מפורטת באופן הבא:
- 5, 5, 6, 6, 6, — — — — —
- (ב) חשבו את ממוצע הציונים.
- (ג) השלימו שורה של סטיות מהממוצע, שורה של ריבועי הסטיות מהממוצע, שורה של מכפלות.
- (ד) חשבו את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע ואת סטיית התקן.
- (ה) חשבו את סטיית התקן בעזרת מחשבון (ההוראות כאן בהמשך בתרגיל 13), והשוו את התוצאה למה שקיבלתם בסעיף ד'.

תרגילים

לפי גנניג האינדוקס אין צורך אפילו חישובים של סטיות. חשוב לפיכך ולפיכך אל תפסידו את הזמן בלחישובים כאלו. חשוב לפיכך ולפיכך אל תפסידו את הזמן בלחישובים כאלו.

9. חשבו את סטיית התקן של ציוני רונית ושי (משאלה 1). הממוצע של כל אחד מהם היה 70.
- (א) רונית: 40, 50, 60, 70, 70, 80, 90, 100
- הסטיות מהממוצע: — — — — —
- ריבועי הסטיות מהממוצע: — — — — —
- סכום ריבועי הסטיות מהממוצע: —
- חלקו במספר הציונים לחישוב השונות.
- חשבו את סטיית התקן.

המשך ←

(ב) שי: 40 , 40 , 70 , 70 , 70 , 70 , 100 , 100

הסטיות מהמוצע: — — — — — — — —

ריבועי הסטיות מהמוצע: — — — — — — — —

חשבו את סכום ריבועי הסטיות מהמוצע.

חשבו את השונות, ואת סטיית התקן.

(ג) מהי סטיית התקן של ציוני חן שבשאלה 1 (כל ציוניו היו 70)?

10. באותה כיתה ישנו תלמיד נוסף שציוניו מפורטים בשורה הבאה. ממוצע ציונים אלה 70.

עמית: 40 , 50 , 65 , 65 , 75 , 75 , 90 , 100

(א) חשבו את סטיית התקן של ציוני עמית.

(ב) רשמו את סטיות התקן של ציוני חן, רוגית, שי ועמית על-פי הסדר.

למי סטיית התקן הגדולה ביותר ולמי הקטנה ביותר? הסבירו את המשמעות של תוצאות אלה.

11. (א) מצאו את הממוצע וסטיית התקן של כל סדרת ציונים.

(i) 6 , 10

(ii) 6 , 8 , 10

(iii) 6 , 8 , 8 , 10

(iv) 6 , 8 , 8 , 8 , 10

(v) 6 , 8 , 8 , 8 , 8 , 8 , 8 , 8 , 8 , 10

(ב) כמה פעמים צריך להופיע הציון 8 כדי שסטיית התקן תהיה בדיוק 1?

(ג) האם ניתן, על-ידי תוספת של "ציוני 8", להגיע לסטיית תקן 0? נמקו.

12. במבחנים בהסטוריה בכיתה י"א קיבל דן את הציונים: 70, 75, 80, 90.
רון קיבל את הציונים: 40, 50, 90, 100.

- (א) חשבו את ממוצע הציונים של כל אחד מהם.
(ב) נסו לקבוע, ללא חישוב, אצל מי מהם סטיית התקן גדולה יותר.
(ג) חשבו את סטיית התקן ובידקו את תשובתכם לסעיף ב'.

13. לפניכם רשימת ציונים של דפנה בשמונה מבחנים במתמטיקה שהתקיימו במשך השנה: 58, 75, 90, 85, 80, 68, 70, 65.

- (א) חשבו את ממוצע הציונים ואת סטיית התקן.
(ב) אפשר להיעזר במחשבון כדי לחשב ממוצע וסטיית תקן של סדרת נתונים.
להלן הוראות למחשבון Casio 82:

כדי לעבור לחישוב סטטיסטי הקישו:

MODE	.
------	---

בצד ימין, על המצג, יופיע SD.

(SD) ראשי תיבות של standard deviation - סטיית תקן.)

כדי לנקות את הזכרון הקישו:

Shift	AC
-------	----

להכנסת הנתונים הקישו:

58	M+	75	M+	90	M+	...
----	----	----	----	----	----	-----

המשיכו להכניס באופן זה את הציונים, כלומר, לאחר הכנסת כל נתון הקישו M+. לאחר סיום הכנסת הנתונים, הקישו ורשמו תוצאות במשבצות הריקות שמתחת לסדרת ההקשות.

לבדיקת מספר הנתונים הקישו:

Shift	n

לקריאת הממוצע הקישו:

Shift	$\bar{x}$

לקריאת סטיית התקן הקישו:

Shift	σ_n

השוו עם התוצאות שקיבלתם בחישוב רגיל.

אם ברצונכם לצאת מ- MODE SD הקישו:

MODE	0
------	---

14. מדדו את הגבהים (בס"מ) של הבנים והבנות בכיתה י"א בביה"ס.

בנות: 180, 175, 172, 170, 165, 160, 158, 156, 155, 153, 152

בנים: 192, 190, 187, 185, 180, 175, 174, 172, 172, 170, 162, 160, 157

(א) חשבו את ממוצע הגבהים של הבנים ואת סטיית התקן של גבהים אלה.

(ב) חשבו את ממוצע הגבהים של כל התלמידים בכיתה.

(ג) חישובו ומצאו כי ממוצע הגבהים של הבנות 163 וסטיית התקן 9.

האם, לדעתכם, סטיית התקן של כל הגבהים בכיתה גדולה או קטנה מסטיית

התקן של גובה הבנות? נמקו.

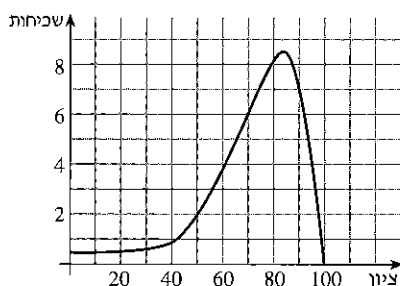
האם, לדעתכם, סטיית התקן של כל הגבהים בכיתה גדולה או קטנה מסטיית

התקן של גובה הבנים? נמקו.

(ד) חשבו את סטיית התקן של כל הגבהים בכיתה ובידקו את תשובותיכם

לסעיף ג.

15. לפניכם גרף המתאר התפלגות ציונים של מבחן.



(א) נניח כי הממוצע 70 וסטיית התקן היא 17.

סמנו על הציר האופקי את הממוצע, נקודה המתאימה לציון של סטיית

תקן אחת מעל הממוצע, ונקודה המתאימה לציון של סטיית תקן אחת

מתחת לממוצע.

מהם הציונים המתאימים?

(ב) צבעו, על הציר האופקי, את החלק המתאים לציון של יותר מסטיית תקן

אחת מעל הממוצע.

מס' החבילות	מס' אטבים פגומים בחבילה
1	0
40	1
50	2
6	3
2	4
1	5

16. בדקו מדגם של 100 חבילות אטבים (מקלות כביסה). בכל חבילה 150 אטבים.

א) שערן אם סטיית התקן גדולה או קטנה מ-1, ונמקו.

ב) חשבו ממוצע וסטיית תקן באמצעות MODE SD במחשבון, או באופן ישיר על-ידי השלמת שורת סטיות מהממוצע, וריבועי סטיות מהממוצע.

כדי לחשב ממוצע וסטיית תקן מטבלת שכיחויות בעזרת מחשבון, (casio)

נקו תחילה את הזיכרון

INV	AC
-----	----

 אחר כך הכניסו את הנתונים

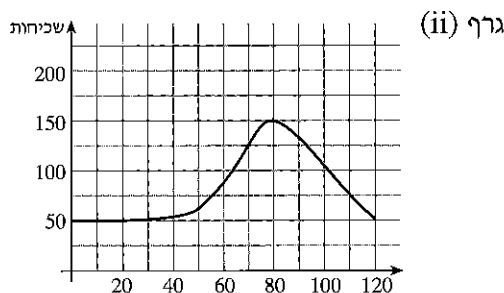
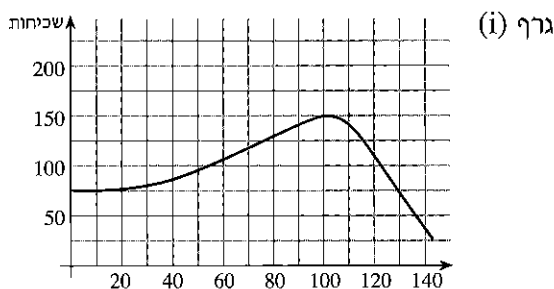
באופן הבא:

0	x	1	M+	1	x	40	M+	...
---	---	---	----	---	---	----	----	-----

הקפידו על הסדר: הקישו את הציון ואחרי סימן הכפל את השכיחות (מספר הפעמים שהציון מופיע).



17. הגרפים מתארים נתונים שונים.



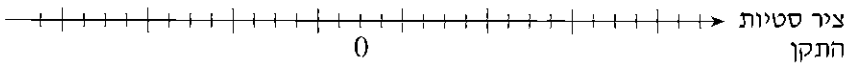
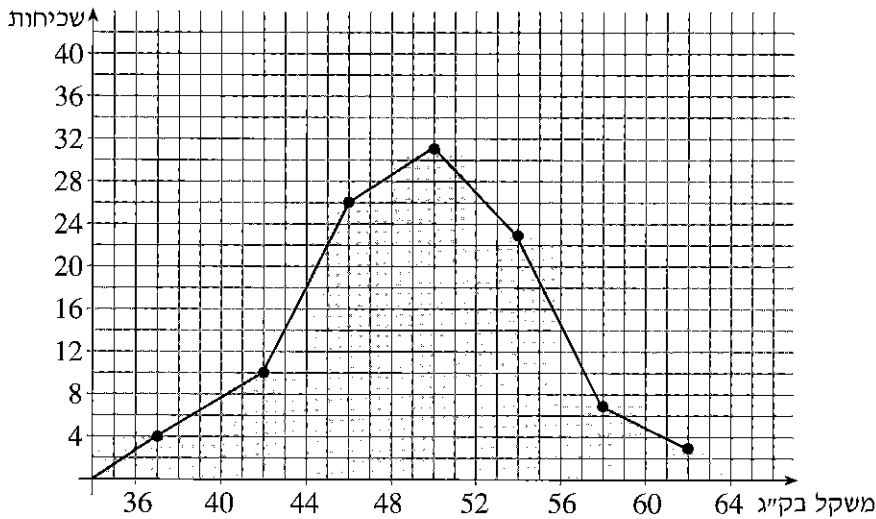
- א) היכן "מתרכזים" יותר נתונים ליד הממוצע, בגרף (i) או (ii)?
 ב) איזו סטיית תקן גדולה יותר, של קבוצה (i) או של קבוצה (ii)?

התפלגות נורמלית

מגרף שכיחויות להתפלגות נורמלית

1. לפניהם טבלת התפלגות משקלם של 104 תלמידים, הסטוגרם ומצולע שכיחויות.

60-64	56-59.9	52-55.9	48-51.9	44-47.9	40-43.9	36-39.9	משקל (ק"ג)
3	7	23	31	26	10	4	שכיחות



(א) הממוצע 50 בקירוב. סמנו את מקומו על ציר המשקל.
סטיות התקן 5 בקירוב.

סמנו על ציר המשקל במקומות המתאימים:

- סטיות תקן אחת מעל הממוצע, ושתי סטיות תקן מעל הממוצע.
- סטיות תקן אחת מתחת לממוצע ושתי סטיות תקן מתחת הממוצע.

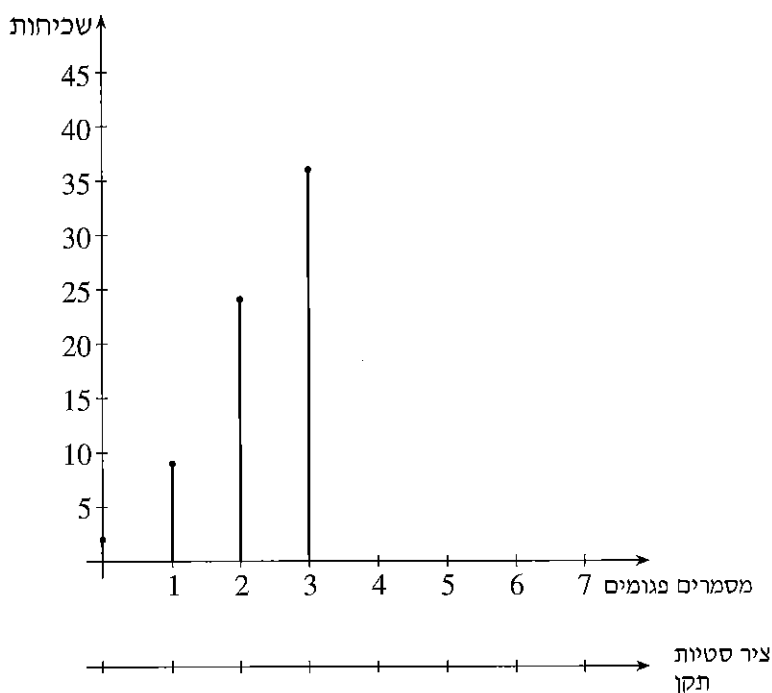
(ב) רשמו על "ציר סטיות התקן" את המספרים 2, 1, -1, -2,

במקומות המתאימים מתחת ל"ציונים" שסימנתם בסעיף א'.

בבדיקה של 110 חבילות מסמרים נמצאו מסמרים פגומים לפי הטבלה:

מספר מסמרים פגומים	0	1	2	3	4	5	6	7
מספר חבילות	2	8	24	36	19	12	5	4

(א) השלימו את דיאגרמת המקלות ושרטטו מצולע שכיחויות.



(ב) ממוצע מספר המסמרים הפגומים בחבילה הוא 3.25 וסטיות התקן 1.5.

סמנו את הממוצע על ציר המסמרים.

(ג) סמנו, על ציר המסמרים, נקודות המתאימות למספרים הנמצאים סטיות

תקן אחת מעל הממוצע וסטיות תקן אחת מתחת לממוצע.

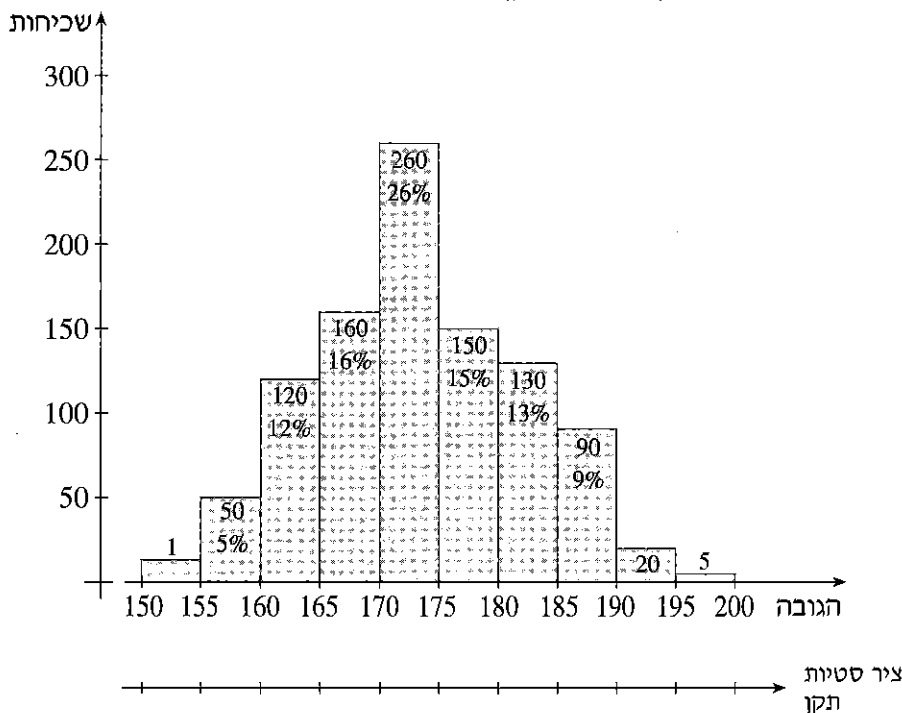
סמנו על הציר, נקודות המתאימות למספרים הנמצאים 2 סטיות תקן מעל

ומתחת לממוצע.

(ד) סמנו על ציר "סטיות התקן", במקומות המתאימים, את המספרים

$-2, -1, 0, 1, 2$

3. לפניכם היסטוגרם המתאר גבהים של 1000 נבדקים בוגרים.
הממוצע: $\bar{x} \approx 173$, וסטיית התקן $s = 9$.



- (א) סמנו על ציר הגובה את הממוצע.
(ב) סמנו על ציר הגובה את המקום של סטיית תקן אחת ו-2 סטיות תקן מעל ומתחת לממוצע.
(ג) סמנו על ציר "סטיות התקן" את מספרי הסטיות המתאימות.

4. (פ) (א) הגרפים של תרגילים 2 ו-3 נמצאים על דף שקוף בסוף הספר. סמנו גם בהם את הממוצע וסטיות התקן. הניחו כל אחד בנפרד, על הגרף בתרגיל 1 כך שהממוצעים יתלכדו.
מה תוכלו לומר על מקומם של "סטיות התקן" בכל הגרפים?

תופעות שהתנהגותן דומה להתנהגות התופעות המתוארות בתרגילים 1-3 נקראות "תופעות המתפלגות נורמלית".
צורת הגרף, המתאר שכיחות של תופעות כאלה, דומה לגרפים שהתקבלו: הגרף סימטרי, ציר הסימטריה הוא "קו הממוצע", רוב האוכלוסיה נמצא מסביב לממוצע וככל שהמרחק מהממוצע גדל השכיחות קטנה. המשך ←

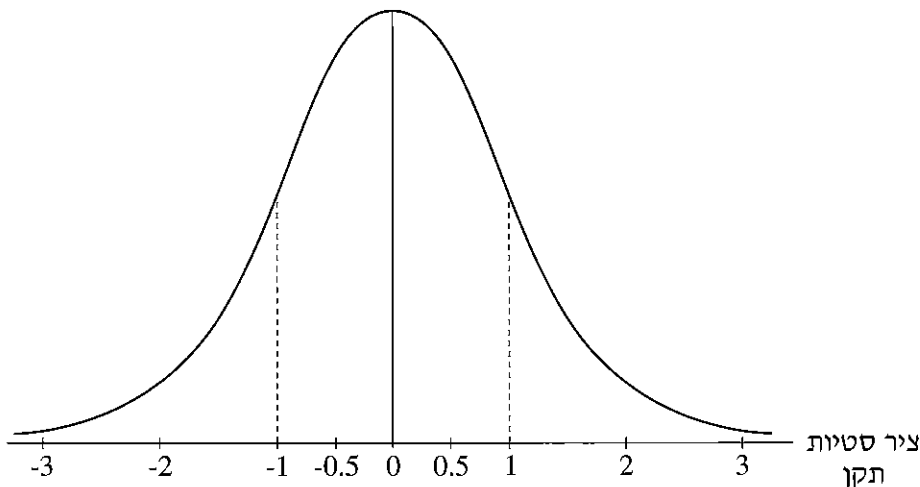


ב) בחרו אחד מהגרפים וחשבו, בערך, איזה אחוז מהאוכלוסיה נמצא בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע וסטיית תקן אחת מעל לממוצע. (1- עד 1).
(השוו עם תוצאה של חבר שחישב עבור גרף אחר).

אילו ניתן היה לתאר את גרף השכיחויות (ההתפלגות) של תופעות **כאלה**, לגבי **כל** האוכלוסיה שבה מדובר, היה מתקבל גרף **דומה** לגרף המשורטט כאן בהמשך.



גרף של התפלגות נורמלית



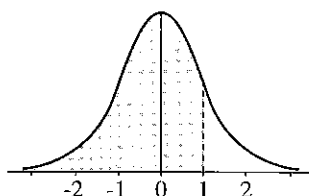
ג) הניחו את הגרפים השקופים על עקומת ההתפלגות הנורמלית.
בגרף זה 68% של השטח, שמתחת לעקומה, נמצא בין -1 ל-1. (כלומר, בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע וסטיית תקן אחת מעליה).
השוו עם תוצאות החישוב בסעיף ב'.
כמו כן חישבו ומצאו ש- 95% מהשטח נמצאים בין -2 ל-2.
כמובן שמתחת לעקומה כולה נמצא 100% של השטח.

משתמשים בגרף זה כמודל לחישוב אחוזי אוכלוסיה שבין סטיות תקן נתונות. מחישוב זה אפשר להסיק מסקנות על אחוזי האוכלוסיה הנמצאים בין הציונים עצמם, למשל גבהים.

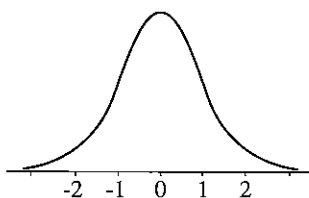


בסוף הספר, תמצאו דף עם טבלה של התפלגות נורמלית מצטברת. תוכלו לגזור ולהשתמש בה בתרגילים כאן ובהמשך.

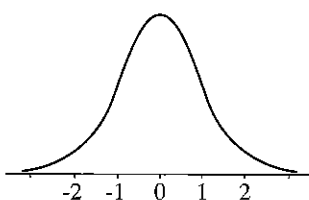
בטבלה תמצאו את השטח הנמצא מתחת לעקומה הזו החל בקצה השמאלי ועד לסטיית התקן הנתונה. כלומר, אחוז האוכלוסיה מהקצה התחתון עד לסטיית התקן.



5. א) קראו מהטבלה מהו השטח עד 1.
 ב) מה השטח עד 0.2?
 ג) מה השטח עד -1.3?



- ד) – מה השטח עד 1.5?
 – מה השטח עד -1.5?
 – מה השטח שבין -1.5 ל-1.5?
 צבעו בגרף.



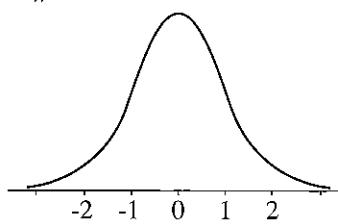
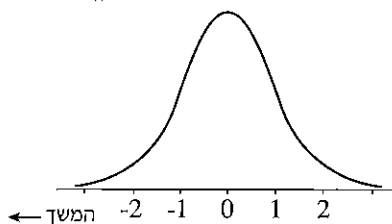
- ה) איזה אחוז של אוכלוסיה המתפלגת נורמלית נמצא מתחת ל-0.75 של סטיית תקן?
 צבעו את השטח המתאים בגרף.

תרגילים

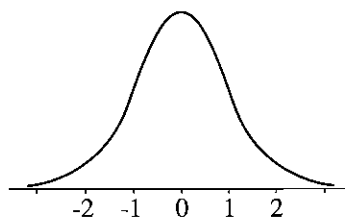
6. צבעו, על גרף ההתפלגות המשורטט, את השטח המבוקש. היעזרו בטבלה ומצאו אותו.

ב) מעל ל-0.5 סטיות תקן.

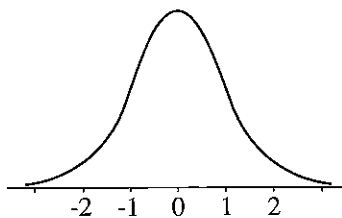
א) מתחת ל-0.5 סטיות תקן.



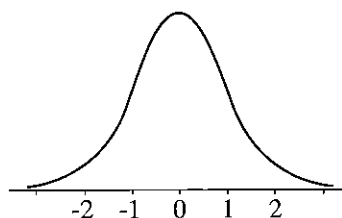
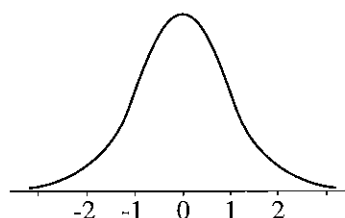
ד) מתחת ל-0.75 סטיות תקן.



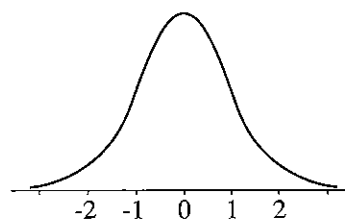
ג) מעל 0.75 סטיות תקן.



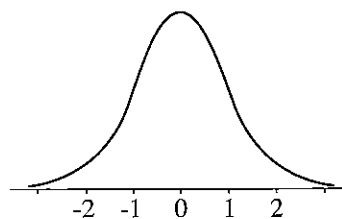
ה) בין -0.75 ל-0.75 סטיות תקן.



ח) בין -0.7 ל-+1.4 סטיות תקן.



ז) מתחת ל-0.7 סטיות תקן.



7. מצאו את אחוז האוכלוסיה, המתפלגת נורמלית, שציונו נתון.

(היעזרו בשרטוט עקומה וסימון השטח המתאים).

א) מתחת ל-1.2 סטיות תקן.

ב) מעל שתי סטיות תקן.

ג) מעל -0.75 סטיות תקן.

ד) בין -0.5 סטיות תקן ו-0.5 סטיות תקן.

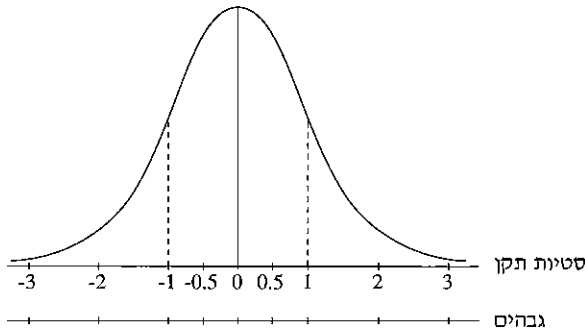
ה) בין 0.5 סטיות תקן ו-1.5 סטיות תקן.

ו) בין -0.5 סטיות תקן ו-1.5 סטיות תקן.

ז) בין -1.2 סטיות תקן ו-0.4 סטיות תקן.

ציון תקן

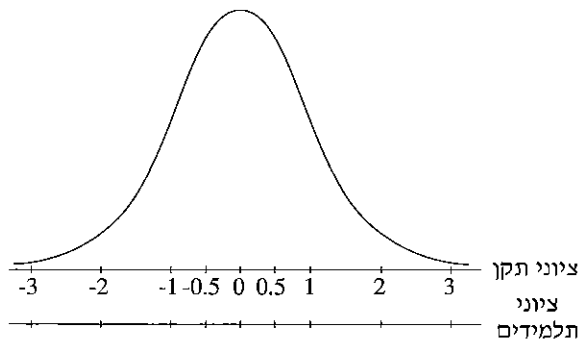
1. Ⓐ הגובה הממוצע של תלמידי תיכון הוא 170 ס"מ וסטיית התקן 8 ס"מ.
 (א) השלימו את הגבהים בנקודות המסומנות על ציר "הגבהים".



- (ב) כמה סטיות תקן מעל, או מתחת לממוצע נמצא נער שגובהו:
- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 178 ס"מ | 162 ס"מ | 174 ס"מ | 158 ס"מ | 154 ס"מ |
| 180 ס"מ | 194 ס"מ | 152 ס"מ | 164 ס"מ | |

המספרים שרשמתם נקראים **ציוני התקן של הגבהים**

2. Ⓐ הציון הממוצע, במבחן משוב ארצי, היה 75 וסטיית התקן 6.
 (א) השלימו את הציונים בנקודות המסומנות על ציר הציונים.



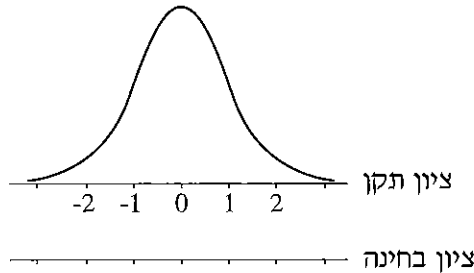
- (ב) בין אילו שתי סטיות תקן נמצא תלמיד שציונו 89 ?
 חלקו בקירוב את הקטע המתאים, על ציר ציוני התלמידים, ל- 6 חלקים.
 סמנו את מקום הציון 89 בשני הצירים.
 מה ציון התקן המתאים לתלמיד זה?
- המשך ←

- ג) מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 65 ?
 ד) מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 80 ?
 ה) מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 60 ?

3. באוניברסיטה ניתנו מבחנים לדרוג תלמידים.

איזה ציון טוב יותר:

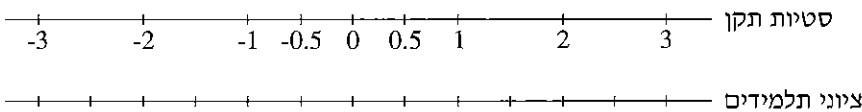
- ציון של 65 בבחינה שהממוצע בה הוא 62 וסטיית התקן 5.
 או ציון של 72 בבחינה שהממוצע בה הוא 68 וסטיית התקן 8.



4. ציוני בחינות בית ספר גדול מתפלגים נורמלית.

הציון הממוצע 75 וסטיית התקן 15.

- א) העתיקו את הצירים ורשמו על הציר התחתון את הציונים המתאימים לציוני התקן הרשומים על הציר העליון.



- ב) הוסיפו על הציר התחתון את הציונים 100, 80, 70, 55.

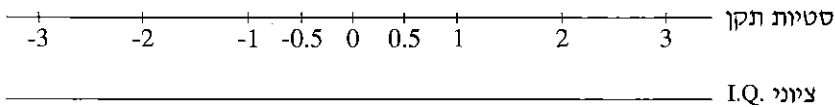
הוסיפו על ציר ציוני התקן את הציונים המתאימים.

- ג) שרטטו מעל הציר "ציון תקן" סקיצה של גרף העקומה הנורמלית והיעזרו בו לפתרון השאלות הבאות.

- מצאו איזה אחוז מהתלמידים קיבלו פחות מ- 80 ?
 איזה אחוז מהתלמידים קיבלו יותר מ- 80 ?
 איזה אחוז מהתלמידים קיבלו פחות מ- 70 ?
 איזה אחוז מהתלמידים קיבלו יותר מ- 70 ?
 איזה אחוז מהתלמידים קיבלו בין 70 ל- 80 ?
 איזה אחוז מהתלמידים קיבלו בין 55 ל- 90 ?

5.  ציוני I.Q. מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 15.

(א) רשמו ערכים מתאימים על ציר ציוני I.Q.



שרטטו מעל הציר "ציוני תקן" סקיצה של גרף העקומה הנורמלית והיעזרו בגרף בהמשך.

(ב) לאיזה אחוז מהאוכלוסיה I.Q. גבוה מ-115?

(ג) מה ההסתברות שאם נבחר באקראי אדם מהאוכלוסיה, ציון ה-I.Q. שלו גבוה מ-115?

משתמשים בעקומה הנורמלית גם לחישובי הסתברויות (דוגמת סעיף ג'). ההסתברות היא בעצם אחוז האוכלוסיה המתאים למאורע, וכידוע אחוז האוכלוסיה, או ההסתברות, נמדד בעזרת השטח המתאים שמתחת לעקומה.



(ד) מה ההסתברות שאם נבחר באקראי אדם, ציון ה-I.Q. שלו:

נמוך מ-110 ?

גבוה מ-90 ?

בין 90 ל-110 ?

(ה) מה הציון המתאים ל-2.5 סטיות תקן מעל הממוצע ?

לאיזה אחוז של האוכלוסיה I.Q. גבוה מהציון שרשמתם ?

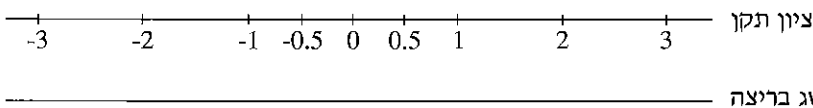
6.  ההישגים בתחרויות של ריצת 2000 מ' בנים בתיכון, מתפלגים נורמלית עם

סטיית תקן של דקה אחת.

(א) להישג של 9 דקות מתאים ציון תקן 0.5.

העתיקו את הצירים וסמנו עליהם.

מה הממוצע ?



שרטטו סקיצה של גרף העקומה הנורמלית והיעזרו בגרף בהמשך.

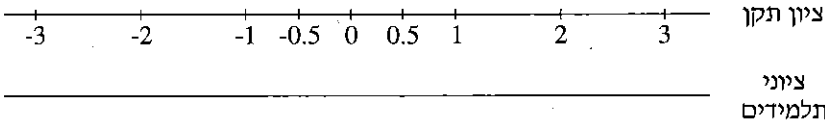
(ב) לאיזה אחוז מהאוכלוסיה הישג בריצה שהוא פחות מ-7.5 דקות?

(ג) מה ההסתברות, לבחור באקראי תלמיד תיכון, שהישגו בריצה יותר מ-9.5 דקות.

תרגילים

7. במבחני משוב ארצי הציון הממוצע 7 וסטיית התקן 1.5.

(א) העתיקו את הצירים, בהנחה שהתפלגות הציונים נורמלית, רשמו, על קו ציוני תלמידים, את הערכים המתאימים לנקודות המסומנות על ציר ציוני התקן.



(ב) מה ציוני התקן של תלמידים שקיבלו את הציונים:

7.5, 7.75, 5.5, 4, 10, 5.

(ג) ציון התקן של תלמיד הוא -0.5 . מה ציונו במבחן?

(ד) ציון התקן של תלמיד הוא 1.25. מה ציונו במבחן?

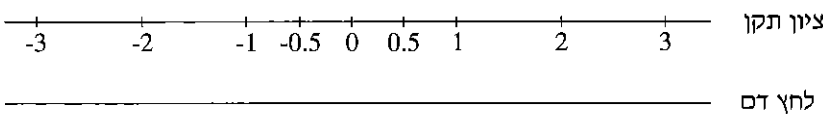
(ה) ציון התקן של תלמיד הוא -0.8 . מה ציונו במבחן?

8. לחץ הדם של מבוגרים, המבוטחים בקופת חולים "לבריאות", מתפלג נורמלית.

הממוצע 122 וסטיית התקן 16. (מדובר בערך הגבוה של מידת לחץ הדם.)

(א) רשמו על ציר "לחץ הדם" את הערכים בנקודות המסומנות.

(ב) העתיקו את הצירים וסמנו על שניהם ערכים מתאימים ללחץ דם של: 134, 140, 150, 110, 100.



שרטטו סקיצה של גרף העקומה הנורמלית והיעזרו בגרף כדי לענות על סעיף ג.

(ג) היעזרו בגרף ובטבלה ומצאו:

- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם נמוך מ-130?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם גבוה מ-130?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם נמוך מ-140?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם גבוה מ-110?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם בין 110 ל-140?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם גבוה מ-150?

9. אורך החיים של נורות מתפלג נורמלית עם ממוצע של 720 שעות וסטיית תקן של 90 שעות.

(א) שרטטו סקיצה של התפלגות נורמלית עם ציר ציוני תקן וציר "אורך חיים של נורות".

(ב) היעזרו בגרף ובטבלה ומצאו:

- איזה אחוז של הנורות דולקות יותר מ- 765 שעות ?
- איזה אחוז של הנורות דולקות פחות מ- 500 שעות ?
- מה ההסתברות שנורה תדלוק פחות מ- 400 שעות ?
- מה ההסתברות שנורה תדלוק בין 720 ל- 840 שעות ?

10. הגובה הממוצע של תלמידים הוא 168 ס"מ וסטיית התקן היא 12 ס"מ. בהנחה שהתפלגות הגבהים נורמלית.

(א) מה ההסתברות שאם נבחר באקראי תלמיד מקבוצה זו, גובהו יהיה בין 165 ס"מ ל- 177 ס"מ.

(ב) ידוע שבקבוצה 10000 תלמידים. כמה תלמידים, בערך, גובהם בין 165 ס"מ ל- 177 ס"מ.

11. באיזור מסוים נערכו מבחנים משווים בהבנת הנקרא.

במבחן הראשון הציון הממוצע היה 75 וסטיית התקן 10.

במבחן השני הציון הממוצע היה 62 וסטיית התקן 5.

(א) איזה ציון טוב יותר יחסית: 80 בראשון או 65 בשני.

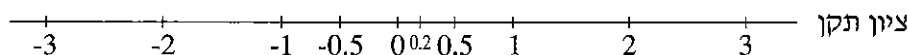
(ב) איזה ציון במבחן הראשון "שקול" ל- 66 במבחן השני ?

12.  כמות צריכת החלב למשפחה ביום מתפלגת נורמלית, עם סטיית תקן של

500 מ"ל. צריכה של 1000 מ"ל (1 ליטר) מתאימה לציון תקן של 0.2.

(א) מה ממוצע צריכת החלב למשפחה ביום ? (העתיקו את הצירים ורשמו עליהם את כל הנתונים.)

(ב) איזה אחוז של המשפחות צורכות פחות מ- 2000 מ"ל (2 ליטר) ביום?



צריכת חלב

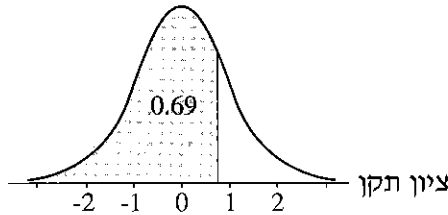
(ג) מה ההסתברות לבחור באקראי משפחה שצריכת החלב שלה נמוכה

מ- 500 מ"ל ?

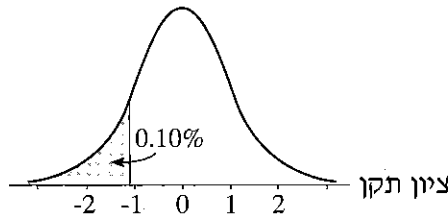
מאחוז האוכלוסיה לציון תקן

בסעיפים הקודמים למדגם, שמעלך ומטה של ההפסד של פנורמליה אפסר אפסר מהא
אחוז האוכלוסיה שנמצא מתחת או מעל לציון תקן נתון.
בסעיף זה גמור כיצד אפסר מאחוז אוכלוסיה נתון אפסר ציון התקן המתאים למכאן אפסר ציון
(האמיר המתאים).

1. (א) מצאו, בתוך הטבלה, את המספר הקרוב ביותר ל- 0.69. איזה ציון תקן מתאים לו?

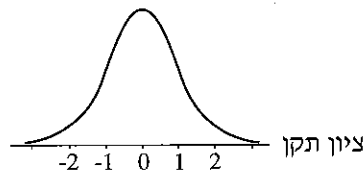
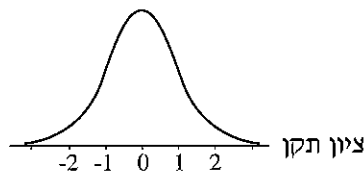


- (ב) מצאו את הציון התקן המתאים ורשמו על הציר.

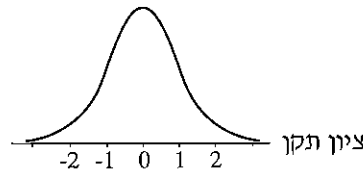
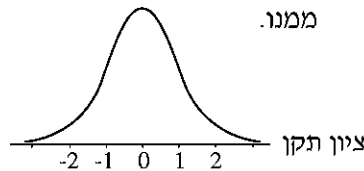


2. (א) קווקו את השטח המתאים על הגרף ומצאו ציון תקן המתאים לאחוז האוכלוסיה הנתון.

- (א) 75% מהאוכלוסיה נמצא מתחתיו.
(ב) 25% מהאוכלוסיה נמצא מעליו (רבעון עליון).

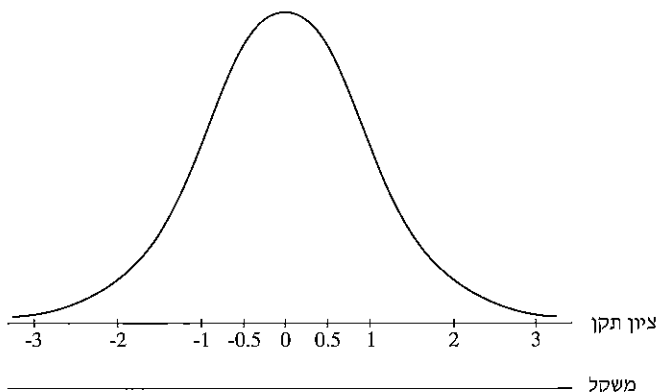


- (ג) 40% מהאוכלוסיה גבוה ממנו.
(ד) 60% מהאוכלוסיה גבוה ממנו.



3. משקל של נשים בפֶּטְלַנְד מתפלג נורמלית עם ממוצע של 68 ק"ג וסטיית תקן של 5 ק"ג.

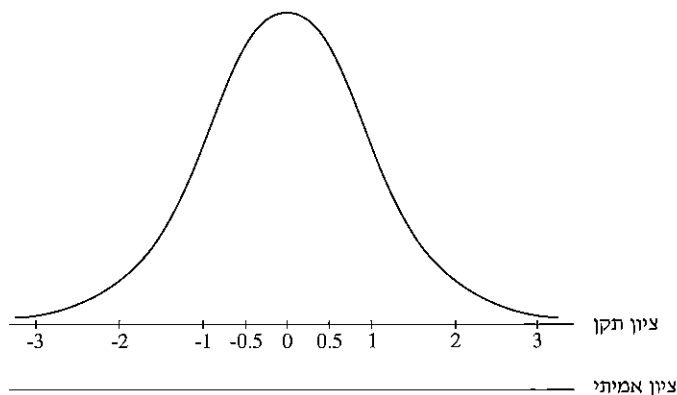
(א) רשמו את הנתונים על ציר המשקל.



- (ב) מהו **ציון התקן**, שמשקלן של 75% אחוז מהנשים קטן ממנו. (סמנו את השטח בגרף, רשמו את ציון התקן המתאים על הציר.)
- (ג) רשמו את **המשקל**, המתאים לציון התקן הנ"ל, על ציר המשקל.
- (ד) רשמו **משקל** כך שמשקלן של 80% מהנשים **גדול** ממנו ?
- (ה) רשמו **משקל** כך שמשקלן של 20% מהנשים **קטן** ממנו ?

4. הציונים של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 10. לציון 55 מתאים ציון תקן של -1.5.

(א) מה הממוצע במבחן? (היעזרו בסימון הנתונים על הצירים.)



- (ב) רשמו ציון תקן, וציון אמיתי, ש- 25% מהנבחנים קיבלו ציון נמוך ממנו.

המשך ←

מצאתם את הציון המתאים לרבעון התחתון.



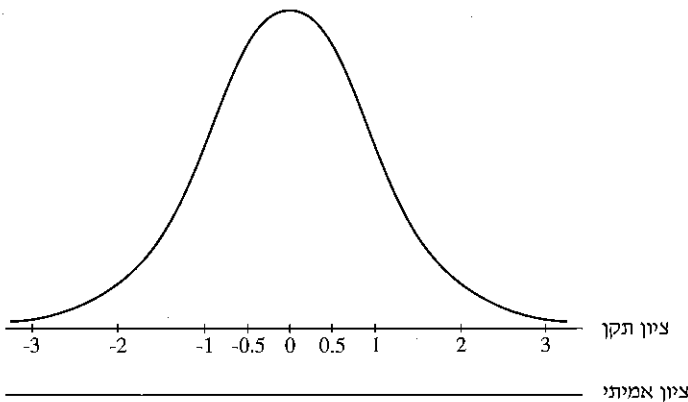
(ג) מצאו ציון תקן וציון אמיתי, ש- 25% מהנבחנים קיבלו ציון גבוה ממנו.

מצאתם את הציון המתאים לרבעון העליון.



תרגילים

5. ציוני בחינה של אוכלוסיה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 78 וסטיית תקן 10.
(א) רשמו ציונים מתאימים על ציר ציוני הבחינה.

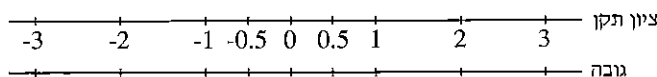


- (ב) מצאו ציון אמיתי, שציוני 60% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו.
- (סמנו תחילה שטח מתאים של הגרף, רשמו וסמנו ציון תקן וציון אמיתי.)
- (ג) מצאו ציון אמיתי, שציוני 75% מהאוכלוסיה גבוהים ממנו.
- (חזרו על השלבים הנ"ל)
- (ד) מצאו ציון אמיתי, שציוני 25% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו, (רבעון תחתון).
- (ה) מצאו ציון אמיתי, שציוני 32% מהאוכלוסיה גבוהים ממנו.

6. הגבהים של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית, עם סטיית תקן 6 ס"מ.

לגובה 174 ס"מ מתאים ציון תקן של 1.5.

א) מה ממוצע הגבהים של האוכלוסיה? (העתיקו את הצירים והיעזרו בסימון הנתונים על הצירים).



ב) שרטטו סקיצה של עקומה נורמלית והיעזרו בה למצוא ציון תקן שגובה 40% מהאוכלוסיה קטן ממנו.

מה הגובה המתאים לציון התקן שמצאתם?

7. ההישגים בקפיצה למרחק של בנות בתיכון, מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 10 ס"מ.

לקפיצה למרחק של 230 ס"מ מתאים ציון תקן של 0.5.

א) מה ממוצע ההישגים בקפיצה למרחק של בנות בתיכון?

ב) מצאו ציון תקן והישג בקפיצה למרחק, שהישגי 70% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו.

ג) מה ההסתברות, שההישג של תלמידת תיכון שנבחרה באקראי, גבוה מ- 2.40 מ'.

ההתפלגות הנורמלית - תרגילים נוספים

1.  הגובה של בנים בגיל גיוס מתפלג נורמלית. הממוצע 174 ס"מ וסטיית תקן 8 ס"מ.
- (א) מה ההסתברות שאם נבחר מתגייס באקראי, גובהו קטן מ-179 ס"מ.
- (ב) מה ההסתברות שאם נבחר שני מתגייסים באקראי הגובה של **שניהם** יהיה מתחת ל-179 ס"מ ?
- (שרטטו ריבוע שטח או עץ לתאור כל האפשרויות).
- (ג) מה ההסתברות, שאם נבחר שני מתגייסים באקראי, גובה של אחד מהם יהיה קטן מ-179 ס"מ ושל השני גדול מ-179 ס"מ ?
2. ציוניהם של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית, עם ממוצע 75 וסטיית תקן 12.
- (א) מצאו ציון, שלרבע מהתלמידים ציון גבוה ממנו.
- (שרטטו עקומה, ציר ציוני תקן, וציר ציונים אמיתיים והיעזרו בהם).
- (ב) בוחרים באקראי תלמיד מהאוכלוסיה. מה ההסתברות שהציון שלו בין 63 ל-93?
- (ג) בוחרים באקראי שני תלמידים מהאוכלוסיה. מה ההסתברות שהציון של שניהם בין 63 ל-93 ?
3. ציוני בחינות של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית.
- סטיית התקן 12 והציון שרבע מהציונים גבוהים ממנו הוא 82 (רבעון עליון).
- (א) מצאו את ציון התקן.
- (ב) מצאו את הממוצע. (היעזרו בציר ציוני תקן וציר ציונים אמיתיים).
- (ג) מצאו את הציון, שרבע מהציונים נמוכים ממנו (רבעון תחתון).
4. סדרת מספרים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן 20.
- לאיבר בסדרה שערכו 71 מתאים ציון תקן של 0.6.
- (א) חשבו את הממוצע.
- (היעזרו בשרטוט העקומה והצירים).
- (ב) מה ההסתברות, שאיבר שנבחר באקראי מסדרה זו, יהיה נמוך מ-80?
- (ג) מה ההסתברות **שמשני** איברים שנבחרו באקראי מסדרה זו, יהיה האחד נמוך מ-80 והשני גבוה מ-80 ?

5. הישגים בקפיצה לגובה, של בנים בגיל תיכון, מתפלגים נורמלית עם ממוצע 1.45 מ'.

לקפיצה של 1.50 מ' מתאים ציון תקן של 0.5 .

(א) מהי סטיית התקן ?

(ב) מה ההסתברות, לבחור באקראי נער, שההישג שלו בקפיצה לגובה הוא בין 1.30 מ' ל- 1.70 מ'.

6. התוצאות במבחני משוב מתפלגות נורמלית.

במבחן המשוב במתמטיקה קיבל אבי ציון 70 .

הממוצע הארצי במבחן היה 60 וסטיית התקן 5.

במבחן המשוב בעברית קיבל אבי 85.

הממוצע הארצי במבחן היה 73 וסטיית התקן 7.5.

באיזה משני המבחנים, יש אחוז גדול יותר של תלמידים שקיבלו ציון גבוה מזה של אבי.

7. ציונים של מבחני כניסה, למוסד להשכלה גבוהה, מתפלגים נורמלית.

(א) בשנה מסוימת התקבלו למוסד 30% מהנבחנים. (בעלי ההישגים הגבוהים ביותר).

הממוצע במבחן היה 77 וסטיית התקן 12.

דני קיבל 83 . האם הוא התקבל ללימודים?

(ב) בשנה שלאחר מכן נרשם דני לאותו מוסד, על סמך המבחן בו נבחן שנה קודם. (הציון שקיבל 83). בשנה זו התקבלו רק 25% מהנבחנים.

הממוצע היה שוב 77 וסטיית התקן 8.5. האם הפעם דני התקבל ?

מבחר תשובות

הסתברות

השערות ותחזיות - חזרה על מושגים בהסתברות (עמודים 519-513)

3. א) $\frac{4}{10}$ ב) $\frac{4}{10}$ ג) $\frac{2}{10}$ ד) 1

4. א) 0.3 ב) 0.95

5. א) $\frac{1}{2}$ ב) $\frac{1}{6}$ ג) $\frac{5}{6}$ ד) 1 ה) 1 ו) $\frac{2}{3}$ ז) $\frac{1}{2}$

6. א) $\frac{1}{4}$ ב) $\frac{3}{4}$ ג) $\frac{1}{2}$ ד) 0 ה) 1

7. א) המספר 2 רשום על פיאה אחת, והמספר 3 רשום על 2 פיאות ב) $\frac{1}{2}$

8. כן, כי $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

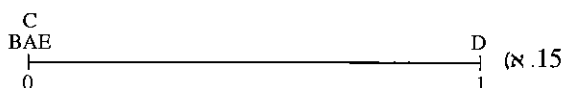
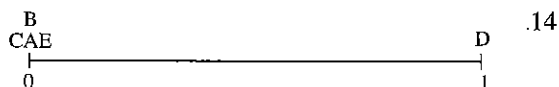
9. א) הסימן * מופיע על 4 פיאות, והסימן Δ מופיע על 2 פיאות ב) $\frac{1}{3}$

10. א) $\frac{20}{100}$ (או 0.2) ב) $\frac{70}{100}$ (או 0.7) ג) $\frac{80}{100}$ (או 0.8) ד) 1

11. א) $\frac{3}{110}$ ב) $\frac{36}{110}$ ג) $\frac{41}{110}$

12. ניצן אינה צודקת. ההסתברות תלויה במספר האנשים בכל מדינה, במספר המועמדים לנשיאות ובגורמים נוספים.

13. א) ל-35% ב) 0.75 ג) 0.25



ב) למאורע A - ההסתברות קרובה ל-1, למאורע B - קרובה ל-0.

16. א) 0.4 ב) 0.3

17. א) 6 מספרים ב) $\frac{1}{3}$ ג) $\frac{1}{3}$ ד) 0 ה) $\frac{1}{3}$ ו) $\frac{2}{3}$ ז) 1 ח) 0

רישום תוצאות שוות הסתברות (עמודים 520-524)

3. א)

בכור	בן	בן	בת	בת
בן	בן	בן	בת	בת

 ב) $\frac{1}{4}$ ג) $\frac{1}{2}$ ד) $\frac{1}{4}$ ה) $\frac{1}{2}$
4. א) 8 שלשות ב) מאורע A: $\frac{1}{2}$, מאורע B: $\frac{1}{8}$, מאורע C: $\frac{3}{8}$, מאורע D: $\frac{7}{8}$
- ג) (i) ההסתברות שיהיו 2 בנים גדולה יותר. (ii) ההסתברות שווה (iii) ההסתברות שיהיו לכל היותר 2 בנים גדולה יותר
6. א) לאפרת סיכוי גדול יותר ג) אפרת: $\frac{13}{25}$, דנה: $\frac{12}{25}$ ה) לא הוגן, הסיכוי של אפרת גדול יותר.
7. א) 6 הפרשים (0, 1, 2, 3, 4, 5) ד) להפרש 0: $\frac{6}{36}$, להפרש 1: $\frac{10}{36}$, להפרש 2: $\frac{8}{36}$, להפרש 3: $\frac{6}{36}$, להפרש 4: $\frac{4}{36}$, להפרש 5: $\frac{2}{36}$
8. א) המשחק לא הוגן, ליעל סיכוי טוב יותר ג) $\frac{1}{18}$ ד) $\frac{1}{36}$ ה) 18 תוצאות שונות
- ו) למכפלה 12 ולמכפלה 6 הסתברות $\frac{1}{9}$
9. א) המשחק הוגן ד) (i) $\frac{5}{36}$, (iii) לסכום 7 ההסתברות $\frac{1}{6}$
- (iv) לסכום 12 ולסכום 2 ההסתברות $\frac{1}{36}$
10. א) (i) ההסתברות לבן ובת גדולה יותר (ii) ההסתברות שווה (iii) ההסתברות שווה (iv) ההסתברות לבן ובת גדולה יותר
11. א) $\frac{11}{36}$ ג) $\frac{7}{12}$ ד) $\frac{1}{4}$

"מאורעות משולבים" - מטבלה לריבוע שטח (עמודים 525-534)

1. א) 0.35, 0.2, 0.5, 0.65 ב) 0.1, 0.2, 0, 0.3
2. ג) 0.25, 0.5, 0.25
3. ג) יעל: 0.5, ורד: 0.5, המשחק הוגן
4. ג) 0.4 ד) 0.6 ה) המשחק לא הוגן
5. ג) 0.06, 0.06 ד) 0.56 ה) המאורעות אינם משלימים ו) ההסתברות 0.44
6. ב) העברת קו דרך 0.02 פירושו ששחקני הכדורסל מהווים אותו חלק (0.02) מהגבוהים ומאלה שאינם גבוהים

8. (ב) 0.02 (ג) 0.72 (ד) יזכה לפחות באחת מהגרלות
 9. (ב) 0.25 (ג) 0.75 (ד) 0.25 (ה) 0.75
 10. (ב) 0.04 (ג) 0.49 (ד) 0.51 (ה) 1
 11. 0.22
 12. (ג) 0.0002
 13. (ב) 0.09 (ג) 0.42 (ד) 0.91 (ה) 0.51
 14. (ב) לפחות פעם אחת יצא מספר זוגי, ההסתברות: 0.84
 (ג) פעמיים מספר אי-זוגי, ההסתברות: 0.16
 15. (א) 0.4, 0.6 (ג) 0.36, 0.16, 0.48
 16. (ב) 0.15 (ג) 0.65 (ד) 0.85
 17. (ב) סוג הדם של שניהם A וההסתברות 0.16 (ג) 0.01 (ד) 0.325 (ה) 0.675
 18. (ב) (i) 0.0001 (ii) 0.0198 (iii) 0.9999

עוז על ריבוע שטח (עמודים 537-535)

1. (ג) 0.016 (ד) 0.004 (ה) 0.02
 2. (ג) 0.72 (ד) 0.22 (ה) 0.94 (ו) 0.28
 4. (ב) 0.26
 5. (ג) 0.09
 6. (ג) 0.12 (ד) 0.18
 7. (ב) $\frac{1}{15}$
 8. (ב) 9 כדורים, 3 מהם לבנים (ד) $\frac{2}{15}$ (ה) $\frac{7}{15}$
 9. 0.49

מציאת p (עמוד 538)

1. (א) $1-p$ (ד) 0.75 (ה) 0.2
 2. (ג) $p \cdot (1-p) = 0.32$, $2 \cdot p \cdot (1-p) = 0.8$ או $p = 0.2$ (אם $p = 0.2$) או 0.96 (אם $p = 0.8$)
 3. (ג) $p = 0.7$, $0.2p + 0.8(1-p) = 0.38$

ריבוע שטח ושאלות מהחיים... (עמודים 541-539)

1. (ב) 0.4 מאלה שלא הצליחו בעצם יודעים את החומר
 2. (ב) 0.47 מאלה שאובחנו כחולים הם בעצם בריאים
 (ג) 0.03 מאלה שאובחנו כבריאים הם בעצם חולים

3. א) 0.54 מאלה שהתקבלו הן נשים
 ב) רק 0.3 מהנשים שנרשמו התקבלו ואילו מהגברים התקבלו 0.6 מאלה שנרשמו
 4. א) 57% מאלה שחלו הם מעשנים
 ב) 0.5 מהמעשנים חלו, מאלה שאינם מעשנים חלו רק 0.25
 5. ב) 0.143 מאלה שחלו, חלו למרות שקיבלו זריקה
 ג) 0.4 מאלה שלא קבלו זריקה חלו ורק 0.25 מהאלה שקיבלו זריקה חלו

ועוד שלבים - מודל העץ (עמודים 542-545)

1 ב) 0.12, 0.08, 0.48, 0.44

3 ב) 0.008 ג) 0.116

4 ב) 0.25 ג) 0.5

5 ב) $\frac{125}{216}$ ג) $\frac{200}{216}$

בניית העץ (עמודים 546-549)

1 ג) 0.46 ד) 0.88

2 ב) 0.65 ג) 0.305

3 ב) 0.04 ג) 0.49

4 $\frac{1}{36}$

5 ב) 0.029 בקירוב ג) 0.9997 בקירוב

6 ב) 0.243 ג) 0.271

7 ג) 0.032 ד) 0.968 ה) 0.228

8 ג) 0.016 בקירוב ד) 0.14 בקירוב ה) 0.16 בקירוב

9 0.76

10. א) $\frac{1}{3}$ ב) $\left(\frac{1}{3}\right)^{14}$ ג) $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot 14$

ד) הסכום של התשובות בסעיפים ב' ו- ג' $\left(\frac{1}{3}\right)^{14} + 14 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$

תרגילים נוספים לסיכום וחזרה (עמודים 550-553)

1. ההסתברות של אפרת לנצח $\frac{5}{9}$ ושל גלעד $\frac{4}{9}$.

2. א) דפנה $\frac{1}{4}$, ואיילת $\frac{3}{4}$ ב) איילת $\frac{1}{4}$, ודפנה $\frac{7}{16}$ ג) איילת $\frac{1}{4}$, ודפנה $\frac{1}{4}$

3. א) (כ, כ), (ז, ז), (ז, ז), (ז, ז), (ז, ז) ב) 0.25 ג) 0.25 ד) $\frac{1}{4}$ עשויים להרוויח 50 ש"ח וכ- $\frac{1}{4}$

עלולים להפסיד 10 ש"ח, לכן המארגנים מפסידים.

4. א) $\frac{1}{6}$ ב) $\frac{1}{4}$

5. א) 0.2 ב) 0.01 ד) 0.002 ה) 0.792

6. א) $\frac{1}{3}$ ב) $\frac{1}{4}$ ג) $\frac{3}{4}$ ד) $\frac{3}{4}$ ה) $\frac{3}{4}$

7. א) 2 זריקות ב) 0.25

8. $\frac{1}{10}$

9. א) 0.56

10. א) 0.027 ב) 0.343 ג) 0.657 ד) 0.441

11. א) 0.8

12. א) $p = 0.1$ או $p = 0.9$

13. א) 0.12 ב) 0.2112 ג) 0.2256

14. א) $p = 0.2$ או $p = 0.8$

הסתברות והבינום של ניוטון (עמודים 554-562)

1. א) 4 מסלולים ב) 8 מסלולים ג) 16 מסלולים

2. א) 0.216, 0.432 ב) 0.0256, 0.0384, 0.0576, 0.0864, 0.1296

4. א) 0.276, 0.544

5. א) 0.329 ב) 0.211 ג) 0.955

9. א) 0.234 ב) 0.3125

10. א) $0.1^5 = 0.00001$ ב) 0.0081 ג) 0.00856 ד) $0.9^5 = 0.59049$ ה) 0.3446

11. א) 0.90112 ב) 0.3446

12. א) $(\frac{5}{12})^4 = 0.0301$ ב) $4 \cdot \frac{5}{12} \cdot (\frac{7}{12})^3 = 0.3308$ ג) 0.884

13. א) $\frac{4}{35}$ ב) $\frac{6}{35}$

14. א) 0.247 ב) 0.318 ג) 0.647

15. 0.072

16. א) $\frac{80}{243}$ ב) $\frac{192}{243}$ ג) $\frac{131}{243}$

17. א) 0.25 ב) 0.3115 ג) 0.555

18. א) 0.001 ב) 0.00597, 0.00599

19. א) $p = 0.02$ ב) $q = 0.98$ ג) 0.0023

$$0.89 \quad \alpha = 0.209, p = 0.791 \quad \beta$$

$$10\% .21$$

$$0.6 .22$$

$$0.804 \quad \alpha = \frac{5}{6}, p =$$

$$0.639 \quad \alpha = 0.646, p =$$

$$0.05792 \quad \alpha = 0.2, p =$$

השלמות בסטטיסטיקה (הכנה להתפלגות נורמלית)

מדדי פיזור (עמודים 566-574)

6. א) 150 תורמים ג) התרומה המתאימה לסטיית תקן אחת מעל לממוצע היא 340 ש"ח, בין 40

ל- 45 עובדים תרמו סכום זה ד) 2 סטיות ממעל לממוצע: 430 ש"ח ה) 160 ש"ח

ו) בין 90 ל- 100 תרומות

7. ה) השונות 0.74, סטיית התקן: 0.86

8. ב) הממוצע 7.17 ג) השונות 1.34, סטיית התקן: 1.16

9. א) סטיית התקן של רונית: 18.7 ב) סטיית התקן של שי: 21.2 ג) סטיית התקן של חן: 0

10. א) סטיית התקן של עמית: 18.37 ב) חן: 0, עמית: 18.37, רונית: 18.7, שי: 21.2

11. א) בכל הסדרות הממוצע 8. (i) $s = 2$ (ii) $s = 1.63$ (iii) $s = 1.41$ (iv) $s = 1.26$ (v) $s = 0.85$

ב) עבור 6 פעמים 8 תתקבל סטיית תקן 1 ג) לא

12. א) הממוצע של דן: 78.75, של רונן: 70 ג) סטיית התקן של דן: 7.39, של רונן: 25.49

14. א) ממוצע הגבהים של הבנים: 175.08 ס"מ, וסטיית התקן: 10.9 ב) ממוצע הגבהים של כל

התלמידים בכיתה: 169.67 ס"מ ד) סטיית התקן של הכיתה כולה: 11.74

15. א) הציון המתאים לסטיית תקן אחת מעל לממוצע: 87, לסטיית תקן אחת מתחת לממוצע: 53

16. הממוצע 1.71, סטיית התקן 0.77

17. ב) סטיית התקן בגוף (i) גדולה יותר

התפלגות נורמלית

מגרי שכיחויות להתפלגות נורמלית (עמודים 575-580)

$$0.841 \quad \alpha \quad 0.579 \quad \beta \quad 0.097 \quad \gamma \quad 0.933, 0.067, 0.866 \quad \delta \quad 77.3\% \quad \epsilon$$

$$0.308 \quad \alpha \quad 0.692 \quad \beta \quad 0.227 \quad \gamma \quad 0.227 \quad \delta \quad 0.546 \quad \epsilon \quad 0.919 \quad \zeta \quad 0.242 \quad \eta \quad 0.677$$

$$0.115 \quad \alpha \quad 0.023 \quad \beta \quad 0.773 \quad \gamma \quad 0.384 \quad \delta \quad 0.241 \quad \epsilon \quad 0.625 \quad \zeta \quad 0.23$$

ציון תקן (עמודים 581-585)

1. א) ב) ל- 178 מתאים +1, ל- 162 מתאים -1, ל- 174 מתאים 0.5, ל- 158 מתאים -1.5,

ל- 154 מתאים -2, ל- 180 מתאים 1.25, ל- 194 מתאים 3, ל- 152 מתאים -2.25,

ל- 164 מתאים -0.75

$$2. \quad \alpha \quad 2\frac{1}{3} \quad \beta \quad -1\frac{2}{3} \quad \gamma \quad \frac{5}{6} \quad \delta \quad -2.5 \quad \epsilon$$

3. הציון 65 טוב יותר יחסית מהציון 72
4. ג) 62.9%, 37.1%, 37.1%, 62.9%, 25.8%, 74.9%
5. ב) 15.9% ג) 0.159 ד) 0.749, 0.498 ה) ציון ה I.Q. המתאים 137.5, אחוז האוכלוסיה מעליו 0.6%
6. א) הממוצע 8.5 ב) 15.9% ג) 0.159
7. ב) 0.5, $\frac{1}{3}$, -1, -2, 2, $-\frac{1}{3}$ ג) 6.25 ד) 8.875 ה) 5.8
8. ב) 0.75, 1.125, 1.75, -0.75, -1.375
ג) 69.2%, 30.8%, 87.1%, 77.3%, 64.4%, 4%
9. ב) 30.9%, 0.7%, 0%, 40.8%
10. א) 0.372 ב) 3720
11. א) 65 ב) 83
12. א) הממוצע 900 מ"ל ב) 98.6% ג) 21.2%

מאחז האוכלוסיה לציון תקן (עמודים 589-586)

1. א) 0.5 ב) -1.28
2. א) 0.67 ב) 0.67 ג) 0.25 ד) -0.25
3. ב) 0.67 ג) 71.35 קייג ד) 63.8 קייג ה) 63.8 קייג
4. א) הממוצע 70 ב) ציון תקן -0.67, ציון אמיתי 63.3 ג) ציון תקן 0.67, ציון אמיתי 76.7
5. ב) 80.5 ג) 71.3 ד) 71.3 ה) 82.7
6. א) הממוצע 165 ב) ציון תקן -0.25, הגובה 163.5 ס"מ
7. א) הממוצע 225 ב) ציון תקן 0.52, הישג בקפיצה 230.2 ס"מ ג) 0.067

ההתפלגות הנורמלית - תרגילים נוספים (עמודים 591-590)

1. א) 0.734 ב) 0.539 ג) 0.392
2. א) 83 ב) 0.774 ג) 0.599
3. א) 0.67 ב) 74 ג) 66
4. א) הממוצע 59 ב) 0.853 ג) 0.25
5. א) 0.1 ב) 0.927
6. במבחן בעברית
7. א) בשנה הראשונה לא התקבל, כי 30.8% נמצאים מעליו ב) בשנה השנייה התקבל, כי רק 24% נמצאים מעליו

פרק ז: משוואות, גרפים ופעולות אלגבריות

משוואות עם פרמטר

השלימים קודמים של האימוד לסקתם בפגיון משוואה, כלל נלסוק בפגיון משוואה פכאלל פרמטר אגילת נסכיר פרמטר מל.

1. נתונה משפחה של ישרים $y = 2x + b$.
 - א) הציבו ארבעה ערכים שונים במקום b ושרטטו את הישרים המתאימים במערכת צירים.
 - ב) אכאלו אפילצז בגלכג מלשל פמאלפגל שרלט גלללל חוק של פונקציה.
 - ג) אפיינו את המשותף לישרים ששרטטתם.
 - ד) אפיינו את ההבדל בין הישרים השונים?
- מה תוכלו לומר על נקודת החיתוך עם ציר y כש- b חיובי? שלילי? אפס?
- נבדוק, כעת, את השפעת ערכו של b על נקודת החיתוך עם ציר x :
 - מצאו את נקודת החיתוך של הישרים ששרטטתם עם ציר x .
 - מצאו באופן כללי את נקודת החיתוך הזו.
 - לשם כך פתרו את המשוואה: $2x + b = 0$ ובטאו את x בעזרת b .
 - האם נקודות החיתוך שמצאתם מתאימות לפתרון הכללי?

פתרון משוואה עם פרמטר מאפשר לאפיין תכונות של משפחת משוואות. במקרה זה ראינו כיצד נקודות החיתוך עם הצירים מושפעות מערכו של b .



2. פתרו את המשוואות: בטאו את x בעזרת הפרמטר a, b, m המופיע במשוואה.

דללמל:

$$6x - 2b = 2x + 3$$

$$4x = 2b + 3$$

$$x = \frac{2b + 3}{4}$$

- | | | | |
|-------------------------------|----|----------------------|----|
| $2(x + 1) = 3(x + a)$ | ה) | $2x - a = 4x - 2$ | א) |
| $4(x - a) = a + 2x$ | ו) | $3(x - a) = 5$ | ב) |
| $8(x - b) = 2x - 1$ | ז) | $2(a - 2x) = 3a + 1$ | ג) |
| $2(x + a) - 3(x + a) = x + a$ | ח) | $6(x - m) = x - m$ | ד) |

נתונה משפחה של ישרים $y = ax - 4$.

- (א) הציבו ערכים שונים במקום a ושרטטו ישרים מתאימים
(למשל: הציבו $a = 1$ ושרטטו, הציבו $a = 4$ ושרטטו, הציבו $a = -2$ ושרטטו)
גאון אפיקיזר באכנה מחשב מאפשר שרטוט גרף לפי חוק של פונקציה.
(ב) מה משותף לשלושת הישרים?
(ג) אפיינו את ההבדל בין שלושת הישרים.
(ד) ננסה כעת לאפיין את השפעת ערכו של a על נקודת החיתוך של הישרים עם ציר x .

- מצאו את נקודת החיתוך של כל אחד משלושת הישרים עם ציר x .
הציבו במשוואת הישר $a = 0$, איזה ישר התקבל? מה תוכלו לומר על נקודת החיתוך שלו עם ציר x ?
(ה) נמצא, באופן כללי, את נקודת החיתוך. עם ציר x במקרים בהם $a \neq 0$
לשם כך, פתרו את המשוואה: $ax - 4 = 0$ ובטאו את x בעזרת a .
האם נקודות החיתוך שמצאתם בסעיף ד' מתאימות לפתרון הכללי?
(ו) — מה תוכלו לומר על נקודת החיתוך עם ציר x כאשר $a > 0$ (חיובי) והוא הולך וגדל? נמקו.

— מה תוכלו לומר על נקודת החיתוך עם ציר x כאשר $a < 0$ (שלילי)?

בסעיף ה' הנחנו $a \neq 0$, חילקנו ב- a ורשמנו $x = \frac{4}{a}$. (בסעיף ד' בדקנו איזה

ישר מתקבל עבור $a = 0$).

נבדוק כעת את המשוואה המתקבלת כאשר $a = 0$.



(ז) נציב $a = 0$ במשוואה: $ax - 4 = 0$

ונקבל: $0 \cdot x = 4$

הסבירו מדוע אין מספר שהוא פתרון של משוואה כזו.

4. (I) נתונה המשוואה: $2mx - x = 8$

נבטא את x בעזרת m מהמשוואה $2mx - x = 8$

$$x(2m - 1) = 8$$

(א) המשיכו: $x =$, $m \neq \frac{1}{2}$

(ב) הציבו $m = \frac{1}{2}$ במשוואה. מה קיבלתם?

הסבירו מדוע למשוואה אין פתרון כאשר $m = \frac{1}{2}$.

(II) בטאו את x בעזרת הפרמטר (a, b, m) וכו', רשמו בכל משוואה מתי אין למשוואה פתרון.

הציבו ערך זה במשוואה המקורית והסבירו.

(א) $ax = 4(x + 3)$ (ג) $3ax = 2(x - a)$

(ב) $2a(x - 3) = 3(5x - 2a + 1)$ (ד) $a(x - 2) = 4a - x$

5. רן מתכוון לצבא ויוצא בכל יום לריצה/צעדה של 20 ק"מ.

בחלק הראשון הוא רץ במשך t שעות במהירות של v ק"מ לשעה. אחר כך עובר להליכה ומקטין את מהירותו ב-2 ק"מ לשעה (כלומר, במהירות $(v - 2)$) וצועד במשך שעה אחת יותר מאשר בחלק בו רץ (כלומר, במשך $t + 1$ שעות).

(א) בטאו את המרחק שעבר בריצה.

בטאו את המרחק שעבר בצעידה.

רשמו משוואה.

(ב) בטאו את t (זמן הריצה) באמצעות v (מהירות הריצה).

(ג) מה יהיה זמן הריצה אם מהירות הריצה 8 ק"מ לשעה.

בכמה זמן עבר את כל המסלול (ריצה והליכה) במקרה זה?

(ד) מה יהיה זמן הריצה אם מהירות הריצה 6 ק"מ לשעה?

בכמה זמן עבר את כל המסלול במקרה זה?

(ה) עבור איזה ערך של v אין פתרון למשוואה?

חזרו לשאלה, או למשוואה, ובידקו מה קורה במקרה זה.

(ו) בבעיה זו לא ייתכן שיתקיים $v \leq 2$. הסבירו מדוע מהירות הריצה חייבת להיות גדולה מ-2 ק"מ לשעה.

תרגילים

6. נתונה משפחה של ישרים $y = ax - a$.

(א) הציבו שלושה ערכים שונים עבור a , ושרטטו את הישר המתקבל.

(ב) מצאו את נקודת החיתוך של כל אחד מהישרים עם ציר x .

מה התכונה המשותפת של כל הישרים האלה?

(ג) בטאו את x בעזרת a מהמשוואה: $0 = ax - a$, $(a \neq 0)$

והסבירו את מימצאיכם בסעיף ב'.

(ד) איזה ישר יתקבל אם תציבו במשוואה הנתונה $a = 0$?

7. פתרו את המשוואות (בטאו את x בעזרת הפרמטר המופיע במשוואה).

קבעו, עבור איזה ערך של הפרמטר **אין** למשוואה פתרון (אם קיים ערך כזה).

$$t(x + 2) = 2x + t \quad (\text{ה}) \quad 4x - 5 = 2ax + a \quad (\text{א})$$

$$a(x - a) = 2x + a \quad (\text{ו}) \quad a^2x = 5 - x \quad (\text{ב})$$

$$5(x - m) = m + 2(x + 1) \quad (\text{ז}) \quad bx + x = 3 \quad (\text{ג})$$

$$t(x + 2) = t^2 + 3x \quad (\text{ח}) \quad 5 + x = t(2 - x) \quad (\text{ד})$$

8. פתרו את המשוואות (בטאו את x בעזרת הפרמטר).

קבעו, עבור איזה ערך של הפרמטר **אין** למשוואה פתרון (אם קיים ערך כזה).

$$\frac{4}{1+x} = \frac{a}{2-x} \quad \text{דוגמה:}$$

$$\text{כפולו אל המשוואה ב- } (1+x)(2-x) \text{ נכפול ב- } 1-x \text{ ו- } x \neq 1$$

$$\frac{4(2-x)(1+x)}{\cancel{1+x}} = \frac{a(2-x)(1+x)}{\cancel{2-x}}$$

המשיכו לפתור את המשוואה (נניח כי המכנים בכל המשוואות שונים מאפס).

$$\frac{a}{2x+a} = \frac{3}{x+2} \quad (\text{ד}) \quad \frac{1}{x} = \frac{a}{x-2} \quad (\text{א})$$

$$\frac{4}{1+ax} - \frac{a}{x} = 0 \quad (\text{ה}) \quad \frac{2}{ax} + \frac{a}{a+2} = 0, \quad a \neq 0 \quad (\text{ב})$$

$$\frac{a}{x} = \frac{a+2}{2x+a} \quad (\text{ו}) \quad \frac{3}{1+ax} = \frac{a}{2+x} \quad (\text{ג})$$

חקירה נוספת של משוואה עם פרמטר

1. נתונה המשוואה $a^2x - 4x = a + 2$.

- (א) הציבו $a = 1$ ופתרו את המשוואה המתקבלת.
 (ב) הציבו $a = 3$ ופתרו את המשוואה המתקבלת.
 (ג) בטאו את x בעזרת a .
 (ד) עבור איזה ערכים של a המכנה הוא אפס?
 (ה) הציבו במשוואה המקורית $a = 2$. האם יש פתרון למשוואה במקרה זה?
 (ו) הציבו במשוואה המקורית $a = -2$.
 וודאי קיבלתם $0 \cdot x = 0$
 – האם 3 הוא פתרון של המשוואה $0 \cdot x = 0$?
 – האם 4 הוא פתרון של המשוואה $0 \cdot x = 0$?
 – האם 172 הוא פתרון של המשוואה $0 \cdot x = 0$?

תוצאת הכפל של כל מספר באפס היא אפס. לכן כל מספר הוא פתרון של משוואה מהצורה $0 \cdot x = 0$.



בגרעילים קודמים ראינו כי למשוואה $ax = b$ (כאשר a ו- b אינם אפס) יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, או אין לה פתרון כלל.

אם כשמבטאים את x מתקבל שבר $x = \frac{a}{b}$ (כלומר, $b \cdot x = a$) אז:

אם המכנה $b \neq 0$, יש למשוואה פתרון יחיד.

אם המכנה $b = 0$, נחזור למשוואה לפני שלב החילוק:

אם המכנה $b = 0$, והמונה $a \neq 0$ נקבל $0 \cdot x = a$, ולמשוואה אין פתרון.

אם המכנה $b = 0$, וגם המונה $a = 0$ נקבל $0 \cdot x = 0$, ולמשוואה אינסוף

פתרונות - כל מספר הוא פתרון של המשוואה.

2. נתונה המשוואה $(b^2 - 9)x = b + 3$.

- (א) בטאו את x בעזרת b . ובידקו עבור אילו ערכים של b המכנה אפס.
 (ב) מצאו עבור אילו ערכים של b , יש למשוואה פתרון יחיד?
 (ג) מצאו עבור איזה ערך של b אין למשוואה פתרון (אם קיים ערך כזה)?
 (ד) מצאו עבור איזה ערך של b יש למשוואה אינסוף פתרונות (אם קיים ערך כזה)?

3. נתונה המשוואה $ax - 2x = a^2 - 4$.

- (א) בטאו את x בעזרת a , ובידקו עבור אילו ערכים של a המכנה אפס. צמצמו את הפתרון (עבור ערכי a שונים מאפס).
- (ב) האם קיים ערך של a עבורו למשוואה אין פתרון? אם כן, מהו?
- (ג) האם קיים ערך של a עבורו למשוואה אינסוף פתרונות? אם כן, מהו?
- (ד) בידקו מה פתרון המשוואה כאשר $a = 1$, $a = 5$, $a = -4$, $a = 0$, והסבירו את מימצאיכם.

תרגילים

4. נתונה המשוואה $mx + 4 = 4x + m$.

- (א) בטאו את x בעזרת m .
- (ב) בידקו אם קיים ערך של m עבורו למשוואה אין פתרון. אם כן, מהו?
- (ג) בידקו אם קיים ערך של m עבורו למשוואה אינסוף פתרונות. אם כן, מהו?
- (ד) בידקו מה פתרון המשוואה אם $m = 5$, $m = 2$, $m = 0$, והסבירו את מימצאיכם.

5. פתרו, בטאו את x בעזרת הפרמטר.

- קבעו אם קיים ערך של הפרמטר עבורו למשוואה אין פתרון.
קבעו אם קיים ערך של הפרמטר עבורו למשוואה יש אינסוף פתרונות.

(א) $mx - m^2 = x - m$ (ד) $x = \frac{x+2}{1+a^2}$

(ב) $ax + 2x = a^2 - 4$ (ה) $\frac{bx}{1-x} = 4 + b$, $x \neq 1$

(ג) $x - p = 2px + 1 - 3p$ (ו) $\frac{5}{1+bx} = \frac{b}{2-x}$, $\frac{x \neq 2}{bx \neq -1}$

מערכות משוואות עם פרמטר

1. מצאו את נקודת החיתוך של שני הישרים ושרטטו אותם במערכת צירים.

$$\begin{array}{ll} (א) & y = 2x + 5 \\ (ב) & 2x - 3y = 11 \\ & y = x + 1 \\ & 3x + y = 0 \end{array}$$

2. נתונה משפחה של ישרים: $4x + 2y = a$

(א) בחרו ערכים שונים עבור a :

$$\begin{array}{ll} (i) & a = 2 \\ (ii) & a = 8 \\ (iii) & a = -4 \\ (iv) & a = 0 \end{array}$$

רשמו את המשוואות המתאימות ושרטטו את הישרים במערכת צירים.
 גאבלו אפולדזר באכנה האאפליג שרטוט גרף על-פי חוק של פונקציה ולשרטט
 בעזרתה את הישרים.

(ב) מה מאפיין את משפחת הישרים הזו?
 (ג) שרטטו את הישר $y = x + 1$ (באותה מערכת צירים בה שרטטתם את הישרים בסעיף א') והדגישו את נקודות החיתוך של הישר עם הישרים הנ"ל.

(ד) — רשמו מערכת משוואות באמצעותה תוכלו למצוא את נקודת החיתוך של ישר (i) עם הישר $y = x + 1$, ומצאו את הנקודה.

— חזרו עבור ישר (ii), ישר (iii) וישר (iv).

(ה) נפתור באופן כללי את המערכת (בטאו את x ו- y באמצעות הפרמטר a).

$$4x + 2y = a$$

$$y = x + 1$$

נציב $x + 1$ במקום y ונקבל:

$$4x + 2(x + 1) = a$$

המשיכו לפתור.

$$x = \frac{a-2}{6} \quad \text{אם פתרתם נכון קיבלתם ודאי}$$

$$y = \frac{a+4}{6} \quad \text{נציב במשוואה השנייה: } y = \frac{a-2}{6} + 1 \text{ פשוט. ודאי קיבלתם}$$

(ו) הציבו ובידקו את פתרונות המערכות שמצאתם בסעיף ד'.

ציון פגיון המערכה המאלי ניכר בחיבור פשוט של שברים.
3 פשוט.

$$5 - \frac{a+3}{2} = \frac{10-(a+3)}{2} = \frac{-a+7}{2} \quad \text{דאמפ:}$$

$$p - \frac{p+1}{p+2} \quad (\text{ה}) \quad 8 + \frac{a+2}{3} \quad (\text{א})$$

$$2p - \frac{p+1}{p-1} \quad (\text{ו}) \quad 12 - \frac{a+1}{a} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{2m-1}{5} - \frac{m+4}{4} \quad (\text{ז}) \quad 3b - \frac{2b+1}{b+1} \quad (\text{ג})$$

$$\frac{a+1}{2} - \frac{a-1}{3} \quad (\text{ח}) \quad p - \frac{p+2}{p+1} \quad (\text{ד})$$

4 פתרו את מערכות המשוואות הבאות (בטאו את x ו-y בעזרת הפרמטר).

$$\begin{cases} x + 2y = b \\ x - 2y = -8 \end{cases} \quad (\text{א}) \quad \begin{cases} 2x + y = a - 1 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} y = x - 2a \\ y = 2x - a \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} x + y = 4a \\ x - y = a + 2 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

5 פתרו כל מערכת המשוואות ושרטטו כל זוג ישרים במערכת צירים.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \quad (\text{א}) \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2(x + y + 2) = 4 - x \end{cases} \quad (\text{ב})$$

אם פתרם נכון וודאי מצאתם כי:

למערכת (א) יש פתרון יחיד - נקודת חיתוך יחידה לשני הישרים.
למערכת (ב) אין פתרון - שני הישרים מקבילים ולכן אין להם נקודת חיתוך.
למערכת (ג) קיבלתם שתי משוואות זהות - שני הישרים מתלכדים וכל נקודה על הישר היא פתרון של המערכת - למערכת אינסוף פתרונות.



6. נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = ax + 1 \end{cases}$

- (א) האם קיים ערך של a עבורו הישרים לא ייפגשו?
 (ב) עבור אילו ערכים של a הישרים ייפגשו?
 (ג) האם קיים ערך של a עבורו הישרים יתלכדו? הסבירו.

7. נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} mx - y = 6 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$

- (א) פתרו את המערכת אם $m = 2$.
 (ב) פתרו את המערכת אם $m = 0$.
 (ג) פתרו את המערכת באופן כללי, (בטאו את x ו- y בעזרת m).
 (ד) הציבו במשוואה $m = \frac{1}{2}$. מה תוכלו לומר על פתרונות המערכת ועל הישרים במקרה זה?

8. נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} 2x - ay = 3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

- (א) פתרו את המערכת עבור $a = -1$.
 (ב) פתרו את המערכת באופן כללי (בטאו את x ו- y בעזרת a).
 (ג) הציבו בפתרון $a = -1$ והשוו עם הפתרון שמצאתם בסעיף א'.
 (ד) עבור אילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד?
 (ה) האם קיים ערך של a עבורו אין למערכת פתרון? אם כן, מהו?
 הציבו ערך זה במערכת והסבירו.
 (ו) האם קיים ערך של a עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות?
 אם כן, מהו? הציבו ערך זה במערכת והסבירו.

9. (א) פתרו את מערכת המשוואות (בטאו את x ו- y בעזרת הפרמטר a).

$\begin{cases} x + ay = a^2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ צמצמו אם אפשר.

- (ב) בידקו מה קורה כאשר $a = 1$ (הציבו במשוואות המקוריות).
 כמה פתרונות למערכת במקרה זה?

10. א) פתרו את מערכת המשוואות (בטאו את x ו- y בעזרת הפרמטר b).

$$\begin{cases} y + b^2x = 2 \\ -(y + 4x) = b \end{cases}$$

ב) בידקו מה קורה כאשר $b = 2$ (הציבו במשוואות). כמה פתרונות במקרה זה?

ג) בידקו מה קורה כאשר $b = -2$ (הציבו). כמה פתרונות במקרה זה?

כאשר פותרים מערכת משוואות פרמטריות והפתרון הוא שבר בו מופיע הפרמטר במכנה, יש לבדוק כמה פתרונות למערכת כשהמכנה מתאפס. לשם כך, ניתן להציב ערך זה של הפרמטר במשוואות ולבדוק האם מתקבלות משוואות של ישרים מקבילים (אין פתרון), או שעבור ערך זה של הפרמטר הישרים מתלכדים, כלומר, יש אינסוף פתרונות - כל הנקודות על הישר.

תרגילים

11. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y - x = a + 2 \\ y - ax = 3a \end{cases}$$

א) פתרו את המערכת.

אם צמצמתם את הפתרון ב: $a - 1$ קיבלתם וודאי

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = a \end{cases}$$

ב) הציבו במשוואות $a = 1$ ($a - 1 = 0$). מה תוכלו לומר על שני הישרים במקרה זה? כמה פתרונות למערכת המשוואות במקרה זה?

12. פתרו את מערכת המשוואות. (בטאו את x ו- y בעזרת הפרמטר).

— מצאו אם קיים ערך של הפרמטר עבורו למערכת **אין פתרון**. אם קיים ערך

כזה הציבו אותו במשוואות והסבירו.

— מצאו אם קיים ערך של הפרמטר עבורו למערכת **אינסוף פתרונות** (שימו לב

לצמצום). אם קיים ערך כזה, הציבו אותו במשוואות והסבירו.

א) $\begin{cases} y + 3x = p \\ 2(y - 0.5px) = 3 \end{cases}$ ב) $\begin{cases} x + my = m^2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ ג) $\begin{cases} y + x = a \\ y - ax = 2 \end{cases}$

ד) $\begin{cases} 5x - ay = 10 \\ x = 2y - 4 \end{cases}$ ה) $\begin{cases} x + y = a + 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$ ו) $\begin{cases} y = bx - 2 \\ y = 2x + b \end{cases}$

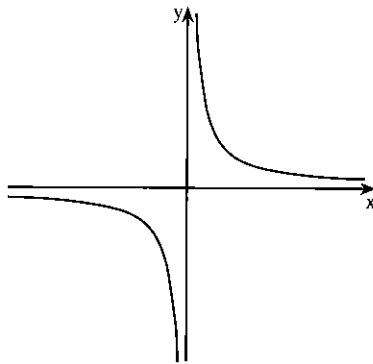
ועוד סוג של משוואות

1. א) פתרו את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

רשמו את המשוואה השניה בצורה $y = 5 - x$, הציבו במשוואה הראשונה ופתרו.

ב) הגרף המשוורטט הוא הגרף המתאים למשוואה הראשונה. שרטטו, בקירוב, את משוואת הישר, סמנו את הפתרונות בגרף, ורשמו את שיעורי הנקודות המתאימות לפתרון.



ג) בשני הפתרונות שהתקבלו שיעורי x ו- y "מוחלפים" זה בזה. נסו לרשום משוואה נוספת של ישר, שתיתן פתרונות מאותו סוג.

ד) פתרו את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} xy = 4 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

שרטטו בקירוב את הישר במערכת הצירים למעלה, סמנו את הפתרונות בגרף ורשמו את שיעורי הנקודות המתאימות.

ה) פתרו את מערכת המשוואות והסבירו בעזרת הגרף, מה קיבלתם.

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

פתרו את המערכות הבאות. 2. 

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 0 & x \neq 0 \\ & y \neq 0 \end{cases} \quad \Delta \quad \begin{cases} xy + 7x = 8 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (א)$$

כפלו כל משוואה ב- xy
ובדקו אם הפתרונות
מתאימים.

$$\begin{cases} y - 2xy = 3 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad (ב)$$

מצאו זוג מספרים, שסכומם שווה למכפלתם. 3. 

(א) נסו למצוא עוד זוג כזה.

(ג) ייצגו את שני המספרים ב- x ו- y , רשמו משוואה המתארת את התנאי הזה, ובטאו את y כפונקציה של x .

(ד)  — האם ייתכן ששני מספרים כאלה יהיו שניהם שליליים?

אם כן, מצאו זוג כזה. אם לא, הסבירו.

— האם ייתכן שאחד משני המספרים חיובי והשני שלילי?

אם כן, מצאו זוג כזה. אם לא, הסבירו.

(ה)  שרטטו את גרף הפונקציה באמצעות מחשב, מחשבון גרפי, או על דף, ובידקו בעזרת הגרף את תשובותיכם לסעיף ד'.

4.  בית הקולנוע "גלילי" הוא במרחק 2 ק"מ מביתה של משפחת "סרטון". בני

המשפחה נוהגים לצעוד רגלית לקולנוע, כל אחד בקצב שלו.

מהירויות הצעידה של כל אחד מבני המשפחה הן:

סבתא 2 ק"מ לשעה

אמא 4 ק"מ לשעה

אבא 6 ק"מ לשעה

איילת 8 ק"מ לשעה (בריצה).

כמה זמן דרוש לכל אחד מהם להגיע לקולנוע.

5.  כמו רן (בתחילת הפרק) אורי מתאמן לקראת הצבא. בכל יום בשבוע הראשון רץ אורי מרחק של 8 ק"מ ואחר כך הולך מרחק של 12 ק"מ נוספים. הזמן הכולל של האימון הוא 3 שעות.
 סמנו ב x את מהירות הריצה של אורי וב- y את מהירות ההליכה שלו, ורשמו משוואה מתאימה.
 בשבוע השני ההוא ממשיך לרוץ וללכת באותן מהירויות, אך מגדיל את מרחק הריצה וההליכה: אורי רץ 12 ק"מ והולך 15 ק"מ. סה"כ נמשך האימון 4 שעות. רשמו משוואה נוספת.

$$\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{12}{y} = 3 \\ \frac{12}{x} + \frac{15}{y} = 4 \end{cases}$$

וודאי רשמתם את המשוואות:



$$\begin{cases} 8y + 12x = 3xy \\ 12y + 15x = 4xy \end{cases}$$

נפשט כל משוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} 8y - 3xy &= -12x && \text{נבודד את } y \text{ מאחת המשוואות:} \\ y(8 - 3x) &= -12x \\ y &= -\frac{12x}{8 - 3x} \end{aligned}$$

נציב במשוואה השנייה ונקבל:

$$\frac{12 \cdot (-12x)}{8 - 3x} + 15x = -\frac{48x^2}{8 - 3x}$$

המשיכו לפתור.

אם פתרם נכון קיבלתם משוואה ריבועית לה שני פתרונות: $x = 8$ או $x = 0$.
 $x = 0$ אינו מתאים לשאלה וגם לא למשוואות שרשמתם, הסבירו.
 מצאו את y .

לפניכם דרך שונה לפתרון מערכת המשוואות הדורשת פחות חישובים.

נרשום את המשוואות בצורה הבאה:

$$\begin{cases} 8 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{y} = 3 \\ 12 \cdot \frac{1}{x} + 15 \cdot \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

נתייחס כעת ל- $\frac{1}{x}$ ול- $\frac{1}{y}$ כשני נעלמים.

נכפול את המשוואה הראשונה ב- 3 ואת השנייה ב- 2 ונקבל:

$$\begin{cases} 24 \cdot \frac{1}{x} + 36 \cdot \frac{1}{y} = 9 \\ -24 \cdot \frac{1}{x} - 30 \cdot \frac{1}{y} = -8 \end{cases}$$

חברו את המשוואות, ומצאו את y .

$$y = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

הציבו באחת המשוואות ומצאו את x .

תרגילים

6. בחרו בדרך הנוחה לכם ופתרו את מערכות המשוואות הבאות.

שימו לב לתנאי $x \neq 0$ ו- $y \neq 0$

$$\begin{array}{ll} \text{א)} & \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = 0 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 3 \end{cases} \\ \text{ה)} & \begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 4 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ב)} & \begin{cases} \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = 4 \\ \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = -1 \end{cases} \\ \text{ו)} & \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 1 \\ \frac{10}{x} - \frac{2}{y} = -3 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ג)} & \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 11 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \\ \text{ז)} & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{6}{y} = 3 \end{cases} \end{array}$$

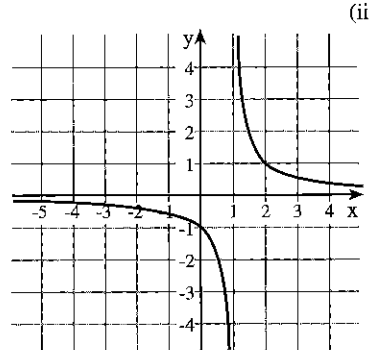
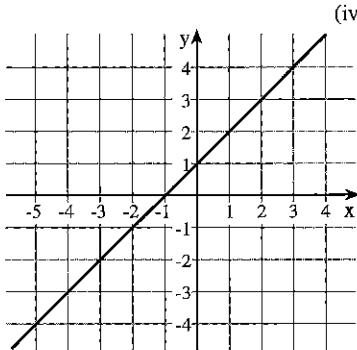
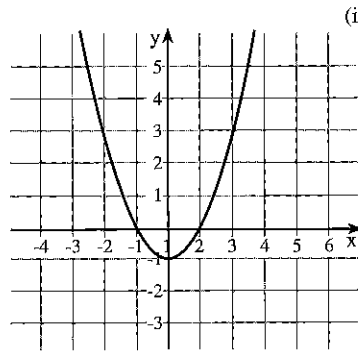
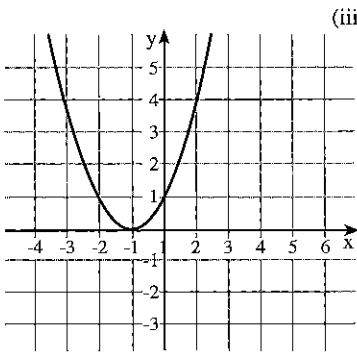
$$\begin{array}{ll} \text{ד)} & \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{16}{y} = 3 \\ x + y = -6 \end{cases} \\ \text{ח)} & \begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{4}{y} - \frac{4}{x} = 3 \end{cases} \end{array}$$

קצת על גרפים ושברים אלגבריים

1. שערך, איזה גרף מתאים לכל אחת מהפונקציות הבאות.

(א) $y - x = 1$ (ג) $y = \frac{1}{x-1}$

(ב) $y = (x + 1)^2$ (ד) $y = x^2 - 1$



לבדיקה תוכלו להציב נקודות ולבדוק, או להשתמש בתוכנת מחשב באמצעותה ניתן לשרטט גרפים.

2. כיצד יראה, לדעתכם, גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$?

האם הגרף הוא פרבולה, קו ישר או גרף של פונקציה מנה?
בדקו עם תוכנת מחשב או שרטטו באמצעות טבלת הערכים ($x \neq -2$):

x	-3	-2.5	-1.5	-1	0	1	2	3	4
y									

את נקודת אי ההגדרה בגרף סמנו בעיגול ריק.
צמצמו את השבר והסבירו את המימצאים.

3. צמצמו את השברים ונסו לקבוע מה תהיה צורת הגרף.

א) $(x \neq -3), y = \frac{9 - x^2}{3 + x}$ ה) $(x \neq \pm \frac{1}{3}), y = \frac{3x + 1}{9x^2 - 1}$

ב) $(x \neq -3), y = \frac{-3x - 9}{x + 3}$ ו) $(x \neq \pm \frac{1}{2}), y = \frac{(2x + 1)^2}{4x^2 - 1}$

ג) $(x \neq \pm 4), y = \frac{-2x - 8}{x^2 - 16}$ ז) $(x \neq \frac{1}{2}), y = \frac{2x^2 - x}{6x - 3}$

ד) $(x \neq 1), y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ ח) $(x \neq \pm 4), y = \frac{3x^3 - 12x^2}{2x^2 - 32}$

4.  חברו את השברים וצמצמו.

$$\frac{2}{x-1} - \frac{3+x}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{3+x}{(x+1)(x-1)} = \quad \text{באמצע: } x \neq \pm 1$$

$$= \frac{2(x+1) - 3 - x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$(x \neq 0), \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} \quad (\text{א})$$

$$(x \neq 0), \quad 5 - \frac{4}{x} + x \quad (\text{ב})$$

$$(y \neq \pm 2), \quad \frac{3}{y+2} - \frac{3y}{y^2-4} \quad (\text{ג})$$

$$(x \neq \pm 2), \quad \frac{7x}{2x+4} - \frac{3}{4x^2-16} \quad (\text{ד})$$

$$(y \neq \pm 3), \quad \frac{12}{y-3} - \frac{y}{y^2-9} \quad (\text{ה})$$

$$(x \neq \pm 1.5), \quad \frac{10}{2x-3} + \frac{2x}{4x^2-9} \quad (\text{ו})$$

$$(y \neq \pm 1), \quad \frac{5}{-y+1} - \frac{y}{1-y^2} \quad (\text{ז})$$

$$(x \neq \pm 4), \quad \frac{2}{x-4} - \frac{x}{x+4} \quad (\text{ח})$$

$$(x \neq \pm 4), \quad 2 + \frac{x}{2x-8} - \frac{4}{x^2-16} \quad (\text{ט})$$

מבחר תשובות

משוואות עם פרמטר (עמודים 599-602)

$$x = m \quad (\tau) \quad x = -\frac{a+1}{4} \quad (\lambda) \quad x = \frac{3a+5}{3} \quad (\eta) \quad x = \frac{2-a}{2} \quad (\kappa) \quad .2$$

$$x = -a \quad (n) \quad x = \frac{8b-1}{6} \quad (r) \quad x = 2\frac{1}{2}a \quad (t) \quad x = 2-3a \quad (n)$$

$$x = \frac{12}{a-4} \quad (a \neq 4) \quad \text{עבור } a = 4 \text{ אין פתרון} \quad \text{II} \quad 4.$$

ב) $x = \frac{3}{2a-15}$, עבור $a = 7.5$ אין פתרון ($a \neq 7.5$)

$$a = \frac{2}{3} \text{ עבור } (a \neq \frac{2}{3}) \quad x = \frac{-2a}{3a-2} \quad (a)$$

פתרון $a = -1$ עבור $(a \neq -1)$ $x = \frac{6a}{a+1}$ (7)

$$t = \frac{22-v}{2(v-1)} \quad (ב) \quad tv + (t+1)(v-2) = 20 \quad (א) \text{ המשוואה: } 5.$$

(ג) זמן הריצה 1 שעה והזמן בו הוא עובר את כל המסלול 3 שעות

(ד) זמן הריצה 1.6 שעות והזמן בו הוא עובר את כל המסלול 4.2 שעות.

(ה) עבור $v = 1$ אין פתרון למשוואה

(ו) לא ייתכן $v \leq 2$ כי אז מהירות הצעידה $(v - 2)$ שלילית או אפס.

6. (ב) כל הישרים עוברים דרך $(1, 0)$ (ג) $x = 1$ (ד) $y = 0$ ציר x

בתרגילים 7 ו- 8 אין פתרון למשוואה עבור ערכי הפרמטר, הרשומים בסוגריים ליד הפתרונות.

(b $\neq -1$), $x = \frac{3}{b+1}$ (ג) (יש פתרון לכל a), $x = \frac{5}{a^2+1}$ (ד) (a $\neq 2$), $x = \frac{5+a}{4-2a}$ (ה) 7.

$$(a \neq 2), x = \frac{a^2 + a}{a - 2} \quad (t \neq 2), x = \frac{t}{2 - t} \quad (t \neq -1), x = \frac{2t - 5}{t + 1} \quad (7)$$

$$(t \neq 3) \quad x = \frac{t^2 - 2t}{t - 3} \quad (n) \quad (m \text{ פתרון לכל } m), \quad x = \frac{6m + 2}{3} \quad (n)$$

$$(a^2 \neq 3) \quad x = \frac{6-a}{a^2-3} \quad (\alpha) \quad (a \neq 0) \quad x = -\frac{2a+4}{a^2} \quad (\beta) \quad (a \neq 1) \quad x = \frac{2}{1-a} \quad (\gamma) \quad .8$$

$$(a \neq \pm 2 \text{ כלומר } a^2 \neq 4) \quad x = \frac{a}{4-a^2} \quad (7) \quad (a \neq 6) \quad x = \frac{a}{a-6} \quad (7)$$

$$(a \neq 2), x = \frac{-a^2}{a-2} \quad (1)$$

חקירה נוספת של משוואה עם פרמטר (עמודים 603-604)

1. א) $x = -1$ ב) $x = 1$ ג) $x = \frac{a+2}{a^2-4}$ ואחרי צמצום $x = \frac{1}{a-2}$ (כאשר $a^2 \neq 4$, כלומר $a \neq \pm 2$)

ד) המכנה אפס עבור $a = \pm 2$ (ה) אין פתרון ו) יתקבל $0x = 0$, כאשר $a = -2$ כל מספר הוא פתרון של משוואה

2. א) $x = \frac{b+3}{b^2-9}$, $(b \neq \pm 3)$ ואחרי צמצום $x = \frac{1}{b+3}$ ב) עבור $b \neq \pm 3$ יש למשוואה פתרון יחיד

ג) עבור $b = 3$ אין למשוואה פתרון ד) עבור $b = -3$ יש למשוואה אינסוף פתרונות

3. א) $x = \frac{a^2-4}{a-2}$, $(a \neq 2)$ ואחרי צמצום $x = a + 2$ ב) עבור כל ערך של a יש למשוואה פתרון

ג) עבור $a = 2$ יש למשוואה אינסוף פתרונות ד) כאשר $a = 1$ מתקבל $x = 3$,

כאשר $a = 5$ מתקבל $x = 7$, כאשר $a = 0$ מתקבל $x = 2$, כאשר $a = -4$ מתקבל $x = -2$

כאשר $a \neq 2$ מתקבל $x = a + 2$ (צמצום השבר שהוא הפתרון שמצאתם ב-א)

4. א) $x = \frac{m-4}{m-4}$, $(m \neq 4)$ ואחרי צמצום $x = 1$ ב) עבור כל ערך של m יש למשוואה פתרון

ג) עבור $m = 4$ יש למשוואה אינסוף פתרונות ד) כאשר $m = 5$ מתקבל $x = 1$,

כאשר $m = 2$ מתקבל $x = 1$, כאשר $m = 0$ מתקבל $x = 1$, עבור כל $m \neq 4$ נקבל $x = 1$

5. א) $x = \frac{m^2-m}{m-1}$, $(m \neq 1)$ כש- $m = 1$ יש אינסוף פתרונות, כאשר $m \neq 1$ יש פתרון יחיד והוא:

ב) $x = \frac{a^2-4}{a+2}$, $(a \neq -2)$ כאשר $a = -2$, יש אינסוף פתרונות, כאשר $a \neq -2$ יש פתרון

יחיד והוא $x = a - 2$

ג) $x = \frac{2p-1}{2p-1}$, $(p \neq \frac{1}{2})$, כאשר $p = \frac{1}{2}$ יש למשוואה אינסוף פתרונות, כאשר $p \neq \frac{1}{2}$ יש

למשוואה פתרון יחיד והוא תמיד $x = 1$

ד) $x = \frac{2}{a^2}$, $(a \neq 0)$ כאשר $a = 0$ אין למשוואה פתרון, כאשר $a \neq 0$ יש למשוואה פתרון יחיד

ה) $x = \frac{4+b}{2b+4}$, $(b \neq -2)$ כאשר $b = -2$ אין למשוואה פתרון, כאשר $b \neq -2$ יש פתרון יחיד

ו) $x = \frac{10-b}{b^2+5}$ עבור כל b יש למשוואה פתרון יחיד

מערכות משוואות עם פרמטר (עמודים 605-608)

1 א) $(-4, -3)$ ב) $(1, -3)$

3 א) $\frac{26+a}{3}$ ב) $\frac{11a-1}{a}$ ג) $\frac{3b^2+b-1}{b+1}$ ד) $\frac{p^2-2}{p+1}$ ה) $\frac{p^2+p-1}{p+2}$

ו) $\frac{2p^2-3p-1}{p-1}$ ז) $\frac{3m-24}{20}$ ח) $\frac{a+5}{6}$

4 א) $\begin{cases} x = \frac{a+3}{3} \\ y = \frac{a-9}{3} \end{cases}$ ב) $\begin{cases} x = \frac{5a+2}{2} \\ y = \frac{3a-2}{2} \end{cases}$ ג) $\begin{cases} x = \frac{b-8}{2} \\ y = \frac{b+8}{4} \end{cases}$ ד) $\begin{cases} x = -a \\ y = -3a \end{cases}$

5 א) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ ב) אין פתרון הישרים מקבילים

ג) כל נקודות הישר $3x + 2y = 0$, הישרים מתלכדים

6 א) עבור $a = 2$ הישרים מקבילים ב) עבור כל $a \neq 2$ הישרים יפגשו
ג) לא קיים ערך של a עבורו הישרים יתלכדו

7 א) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ ב) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ ג) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ ד) עבור $m = \frac{1}{2}$ למערכת אינסוף פתרונות - הישרים מתלכדים

8 א) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$ ב) $\begin{cases} x = \frac{a+3}{2(1-a)} \\ y = \frac{4}{1-a} \end{cases}$ ג) עבור כל $a \neq 1$ עבור $a = 1$ אין למערכת פתרון (הישרים מקבילים)

ז) אין ערך של a עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות

9 א) $\begin{cases} x = -a \\ y = a+1 \end{cases}$, $a \neq 1$ ב) עבור $a = 1$ הישרים מתלכדים ולמערכת אינסוף פתרונות

10. $\begin{cases} x = \frac{2+b}{b^2-4} = \frac{1}{b-2} \\ y = \frac{-b^2+2b-4}{b-2} \end{cases}$, $b \neq \pm 2$ ב) כאשר $b = 2$ אין פתרון - הישרים מקבילים

ג) כאשר $b = -2$ יש אינסוף פתרונות - כל הנקודות על הישרים המתלכדים

11. ב) עבור $a = 1$ מתקבלת אותה משוואה כלומר, הישרים מתלכדים ולמערכת אינסוף פתרונות

12. א) $a \neq -1$ עבור $a = -1$ אין למערכת פתרון (הישרים מקבילים)
 אין ערך של a עבורו יש אינסוף פתרונות (הישרים מתלכדים)

$$\begin{cases} x = \frac{a-2}{1+a} \\ y = \frac{a^2+2}{1+a} \end{cases}$$

ב) עבור $m = 2$ אין למערכת פתרון (הישרים מקבילים). אין ערך m עבורו יש אינסוף פתרונות.

$$\begin{cases} x = \frac{6m-2m^2}{m-2} \\ y = \frac{m^2-6}{m-2} \end{cases}, m \neq 2$$

ג) עבור $p = -6$ אין למערכת פתרון (הישרים מקבילים). אין ערך של p יש למערכת אינסוף פתרונות.

$$\begin{cases} x = \frac{2p-3}{p+6} \\ y = \frac{p^2+9}{p+6} \end{cases}, p \neq -6$$

ד) עבור $b = 2$ אין למערכת פתרון (הישרים מקבילים). אין ערך של b עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות.

$$\begin{cases} x = \frac{b+3}{b-2} \\ y = \frac{b^2+6}{b-2} \end{cases}, b \neq 2$$

ה) עבור $a = 1$ אין למערכת פתרון (הישרים מקבילים), אין ערך של a עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות

$$\begin{cases} x = \frac{4-2a-a^2}{1-a} \\ y = \frac{a-2}{1-a} \end{cases}, a \neq 1$$

ו) עבור $a=10$ אין למערכת פתרון (הישרים מקבילים). אין ערך של a עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות

$$\begin{cases} x = \frac{20+4a}{10-a} \\ y = \frac{30}{10-a} \end{cases}, a \neq 10$$

עבוד סוג של משוואות (עמודים 609-613)

1. (א) שני פתרונות: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ (ב) $(1, 4)$, $(4, 1)$

(ד) הפתרונות: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$ והנקודות $(1, 4)$, $(-4, -1)$

(ה) אין פתרון (אין נקודות חיתוך לשני הגרפים)

2. (א) $(1, 1)$, $(-4, -9)$ (ב) $(-1, 1)$, $(-0.5, 1.5)$ (ג) $(3, 2)$

3. (א) $2, 2$ (ב) $0, 0$ או $1.2, 6$ (ג) $y = \frac{x}{x-1}$

(ד) - לא ייתכן ששניהם שליליים כי הסכום שלילי והמכפלה חיובית.

- ייתכן שאחד חיובי והשני שלילי, למשל $\frac{1}{2}$ ו- -1

4. סבתא: שעה, אמא: $\frac{1}{2}$ שעה, אבא: $\frac{1}{3}$ שעה (20 דקות), איילת: $\frac{1}{4}$ שעה (15 דקות)

6. (א) $(-2, 1)$ (ב) $(3, -4)$ (ג) $(1, 1)$ (ד) $(2, -8)$ (ה) $(-2, -4)$ (ו) $(-5, 2)$ (ז) $(2, 6)$ (ח) $(-2, 4)$ (ט) $(-4, 2)$

קצת על גרפים ושברים אלגבריים (עמודים 614-616)

1. א - (iv), ב - (ii), ג - (i), ד - (i)

2. $f(x) = x - 2$ גרף הפונקציה הוא קו ישר עם "חור"

3. (א) $y = 3 - x$ (ב) $y = -3$ (ג) $y = \frac{-2}{x-4}$ (ד) $y = x$ (ה) $y = \frac{1}{3x-1}$ (ו) $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

(ז) $y = \frac{x}{3}$ (ח) $y = \frac{3x^2}{2(x+4)}$

4. (א) $\frac{x^3-2}{2x^2}$ (ב) $\frac{x^2+5x-4}{x}$ (ג) $\frac{-6}{(y+2)(y-2)}$

(ד) $\frac{14x^2-28x-3}{4(x+2)(x-2)}$ (ה) $\frac{11y+36}{(y+3)(y-3)}$ (ו) $\frac{22x+30}{(2x+3)(2x-3)}$

(ז) $\frac{4y+5}{(1+y)(1-y)}$ (ח) $\frac{-x^2+6x+8}{(x+4)(x-4)}$ (ט) $\frac{5x^2+4x-72}{2(x+4)(x-4)}$

נספח: הוראות הפעלה לתוכנות השונות

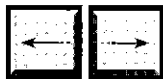
(I) לתוכנה מתמטיא בחלונות

א) **לשרטוט פונקציה:** רישמו את חוק הפונקציה בחלון הפונקציות והקישו Enter לשרטוט.



ב) **לשינוי סקלות:** לחצו על לחצן "תכונות צירים" בסרגל הכלים הראשי. בתיבת שיח שנפתחה, שנו את גבולות הסקלות לגבולות הבאים כרצונכם, הקישו "אישור".

הלכו עם העכבר על גבי גרף הפונקציה. לחצו לחיצה ימנית קצרה על העכבר ובחרו בנקודת עיגון על הפונקציה. (בחלון המידע מופיעים הערכים של שיעורי הנקודה שעליה נמצא ה



סמן) תוכלו להלך בעזרת החיצים שנו בצד שמאל למטה את הצעד ל- 1.

ג) **להילוך על הגרף:**

הלכו עם העכבר על הפונקציה עד אשר תגיעו לנקודת החיתוך. בנקודת החיתוך הסמן ישתנה ותפתח תיבה ובה רשום:

חיתוך ציר
חיתוך גרפים

ד) **לבדיקת חיתוך בין גרפים או בין גרף לצירים:**

בחרו את המתאים.

ה) **לניקוי המסך:** בחרו "קובץ" בסרגל הכלים ואחר כך "חדש".

Derive לתוכנה (II)

(א) לשרטוט
פונקציה:

כדי לראות את החלון האלגברי והגרפי במקביל, הקישו
בסרגל הכלים הראשי, בחרו בתפריט window
ואחר-כך tile vertically



רשמו בשורת העריכה למטה את חוק הפונקציה והקישו
Enter.

וודאו שאתם נמצאים בחלון הגרפי והקישו על לחצן



"שרטוט גרף"

ודאו שאתם נמצאים בחלון האלגברי, והקישו על Declare,
בשורת ההוראות מתקבל מסך משני.

לחצו על Simplification setting מתקבל מסך משני נוסף.

סמנו: Angular Units: Degree

Precisions Digits: 4

ok

רשמו בשורת העריכה למטה את חוק הפונקציה והקישו על



לחצן "שרטוט גרף"

בחלון הגרפי, בסרגל הכלים הראשי, בחרו בתפריט set ואחר כך:
Plot Range ורשמו את הגבול המינימלי והמכסימלי לכל ציר.

לדוגמה: Horizontal min (-10) max 940 interval 1

Vertical min (-2) max 2 interval 1

ok

(ג) להילוך על
הגרף:

לחצו על לחצן "הילוך על גרף" בסרגל הכלים.



תוכלו לנוע על גבי הגרף באמצעות לחצני החיצים שעל המקלדת
(בשורת המידע שבתחתית החלון יופיעו שיעורי הנקודה
("cross:x:y").

ליציאה מהילוך
על הגרף:

הקליקו פעם נוספת על לחצן "הילוך על גרף".

(ד) לניקוי המסך:

פתחו קובץ חדש.

File → Close → File → New

(ה) למחיקת גרף:

הקליקו על לחצן (בסרגל הכלים), למחיקת הגרף
האחרון.



(III) למחשבון גרפי

(א) להתחיל במחשבון גרפי

ON להפעיל

X I T משתנה x

במחשבון הגרפי כותבים ביטויים מתמטיים כמו במחברת.

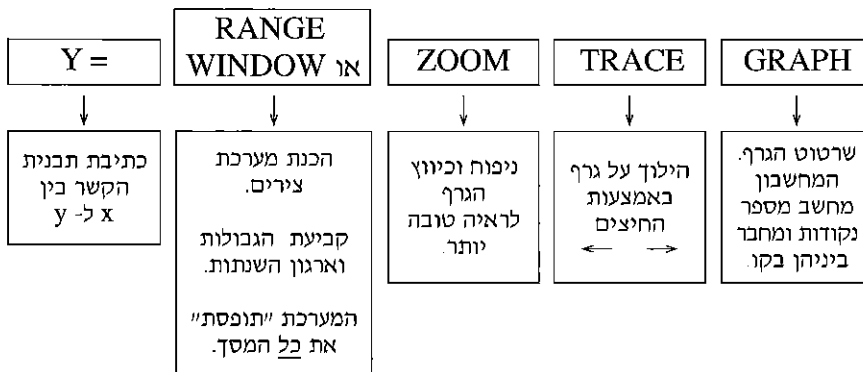
Λ חזקה, — פעולת חיסור (−) סימן כיוון.

DEL מחיקת סימן.

X² העלאת בריבוע

ENTER במקום "="

(ב) לשרטוט גרף



המחשבון שומר את הפעילות האחרונה בכל פעם שמפעילים אותו. לפני שמתחילים פעילות חדשה כדאי לעבור למצב ההתחלתי:

בדיקה אם יש תבניות קודמות: Y =

מחיקת תבניות קודמות: כאשר הסמן על תחילת התבנית הקישו CLEAR

המשך ←



לחצו על Mode ועברו בעזרת
החיצים ל-Degree.

ג) לשינוי
סקלות:

לחצו על window והקישו מספרים בהתאם לערכים
שברצונכם לקבוע.

Xmin = 0 לדוגמה:

Xmax = 940°

Xscl = 90

Ymin = -4

Ymax = 4

Yscl = 1

Xres = 1 (לא שייך לעניינו)

ד) להילוך על גרף: הקישו על החץ ▲, יופיע הסמן + ותוכלו להלך איתו

במערכת הצירים בעזרת החיצים  ולקבל את

שיעורי הנקודות של מקומכם בכל רגע, או

תוכלו להקיש על TRACE ולהלך על הגרף, בעזרת

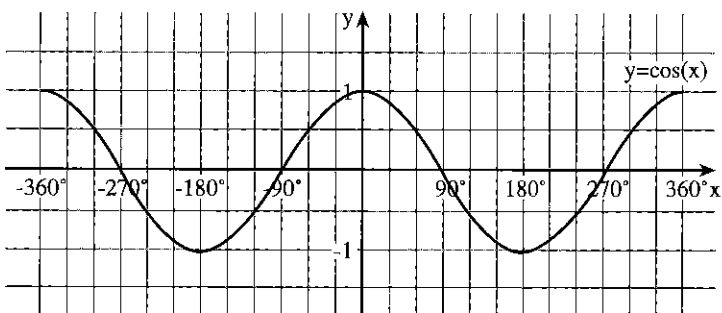
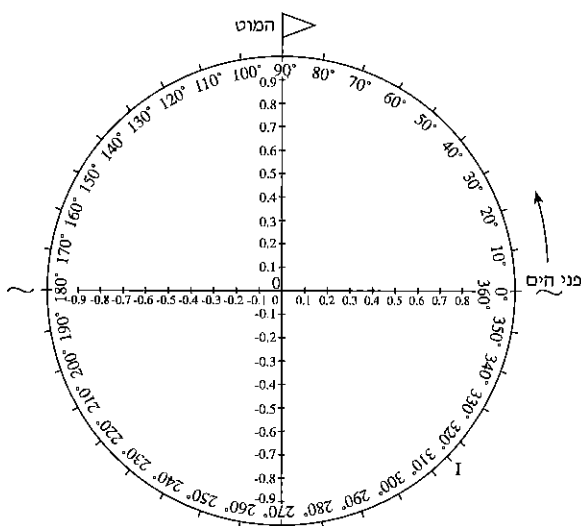
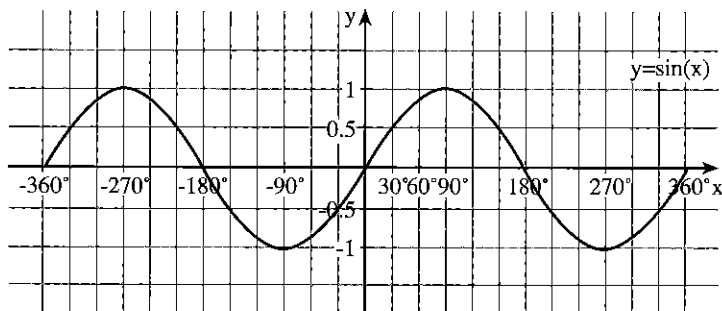
החיצים ◀ ▶.

ה) לניקוי המסך: הקישו Clear לניקוי המסך.

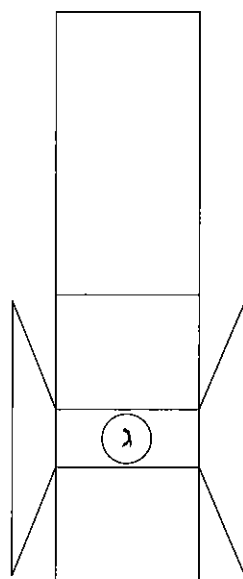
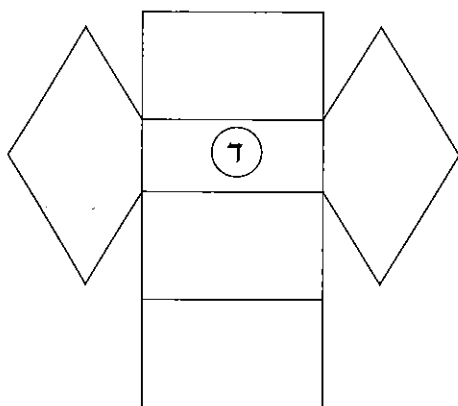
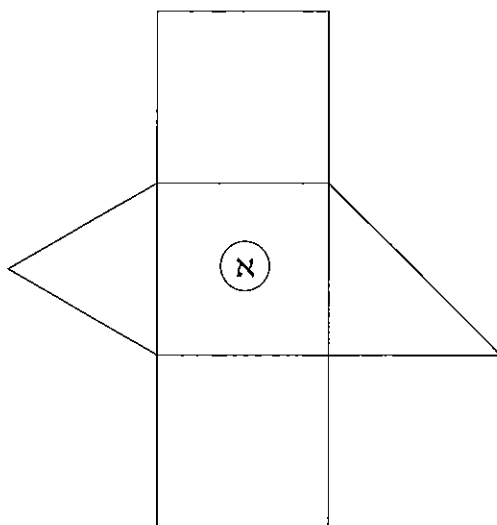
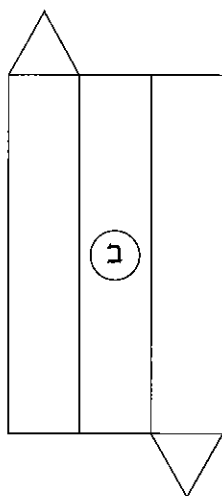
⚠️ אזור שימוש חוזר בספר עדף אצלם את העמודים אלה והשגם בצ'אט.

דפים לגזירה

פרק ג: לעמודים 248-254.

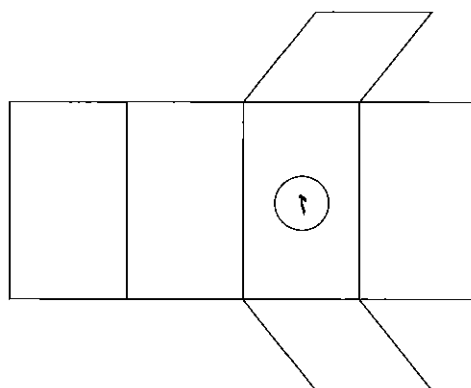
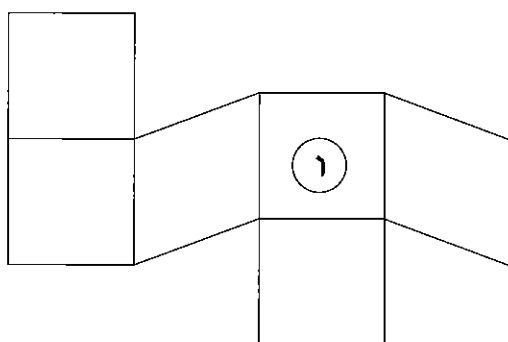
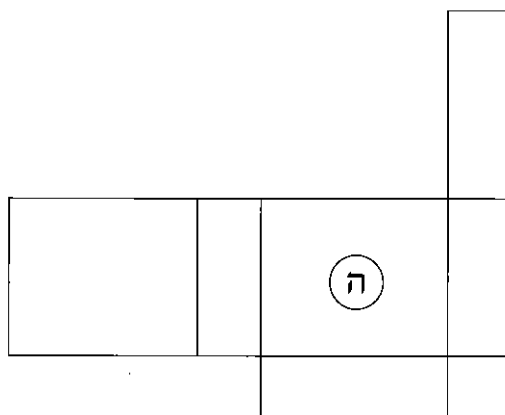


פרק ד
לעמודים 368-369 תרגיל 13.

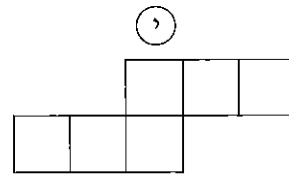
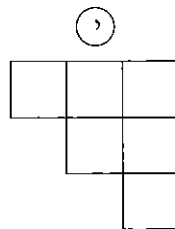
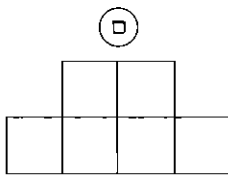
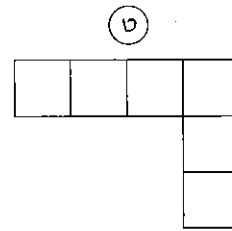
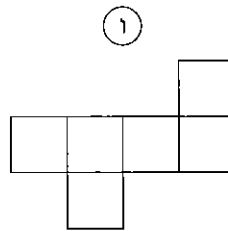
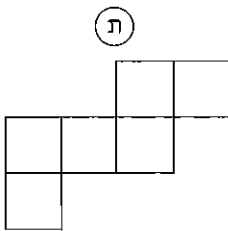
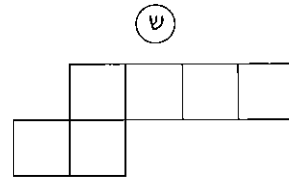
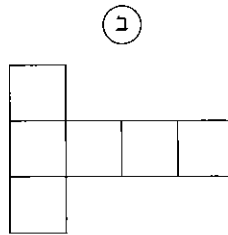
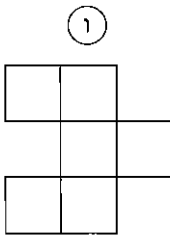
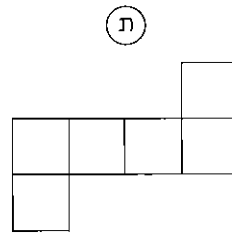
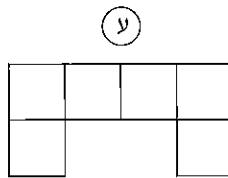
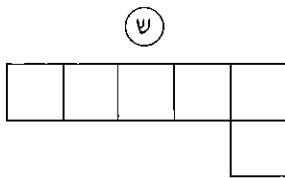


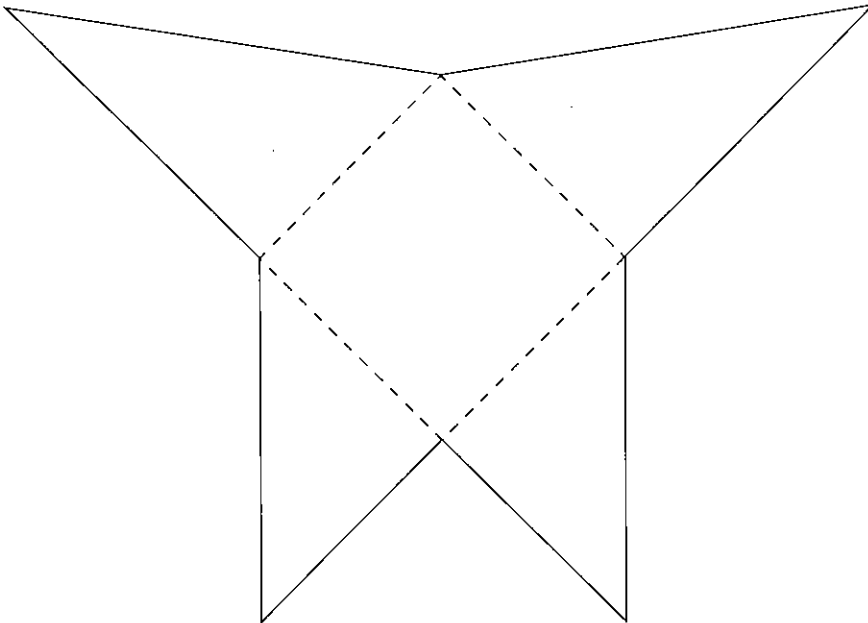
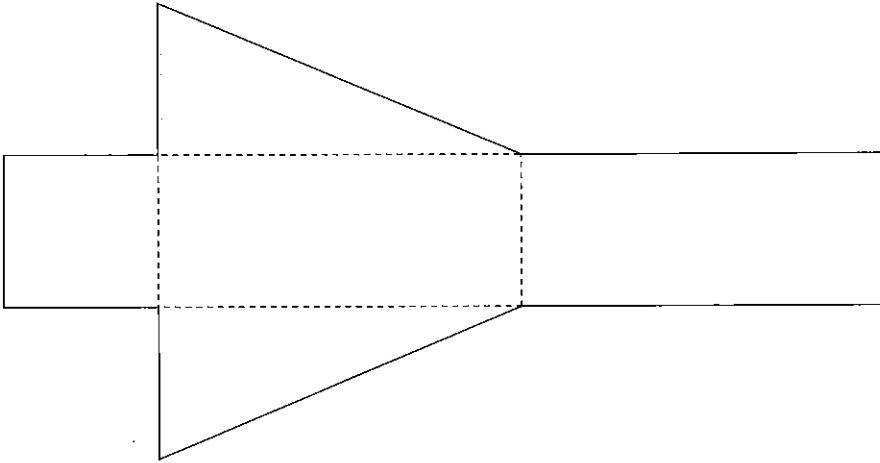
המשך ←

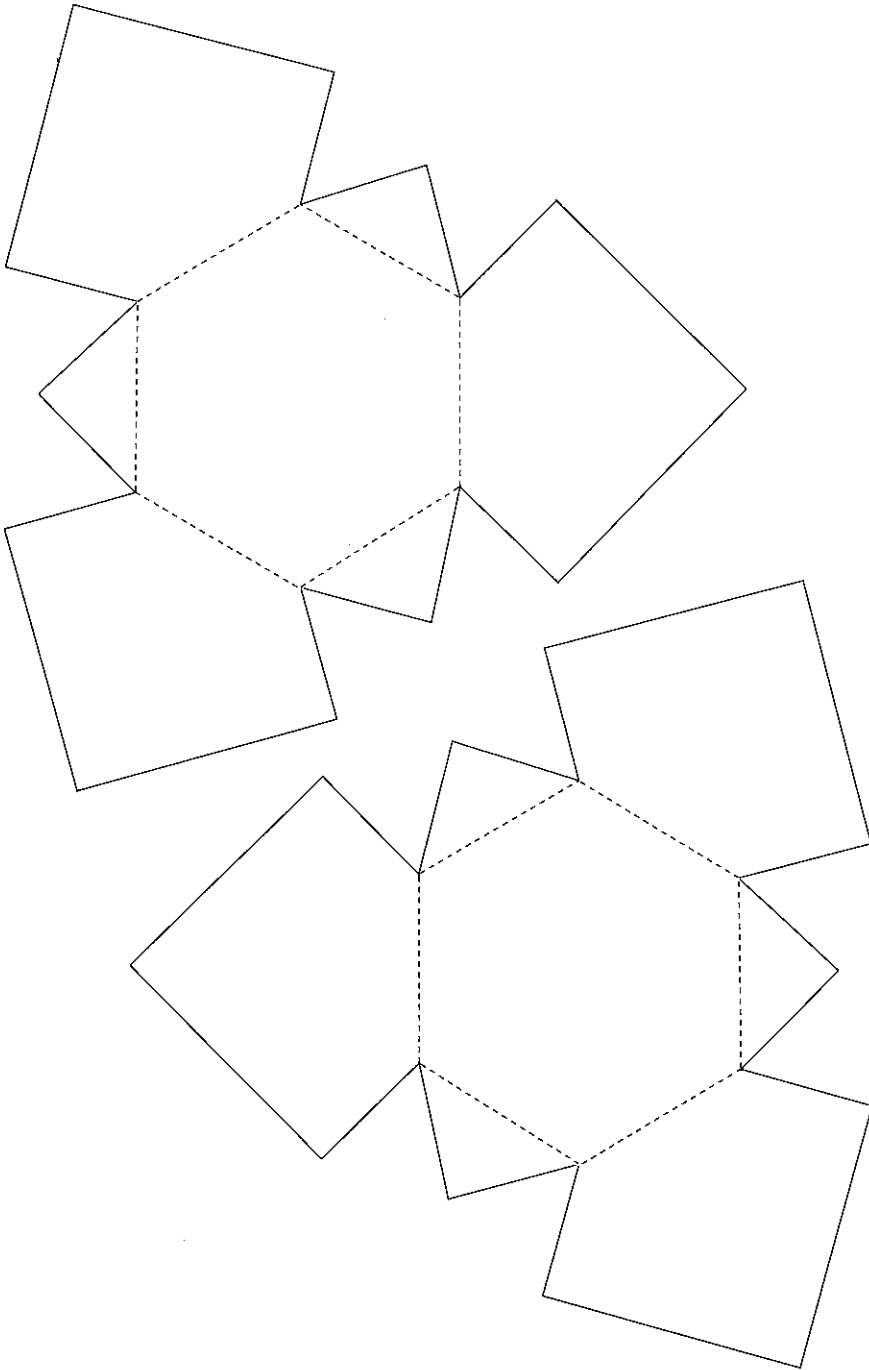
פרק ד
לעמודים 368-369 תרגיל 13



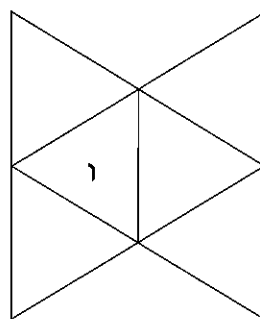
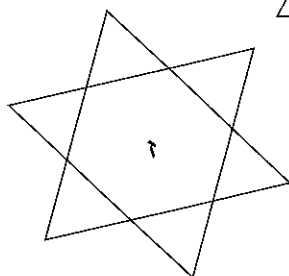
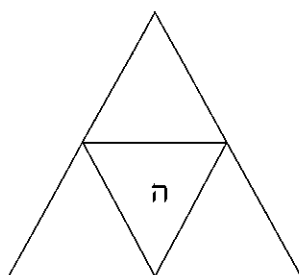
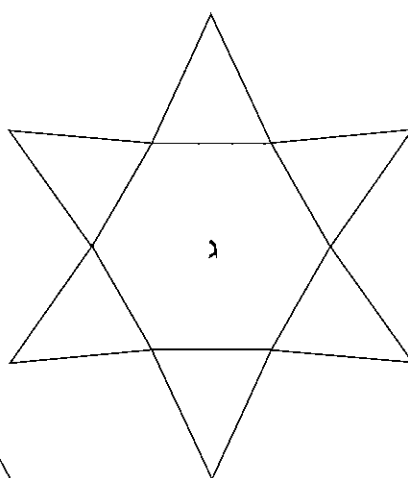
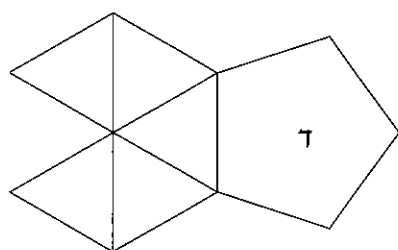
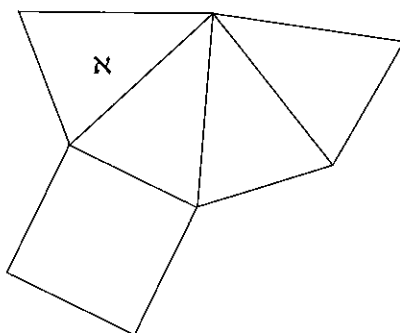
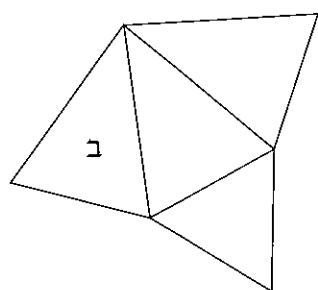
פרק ד
לעמוד 372 תרגיל 21.



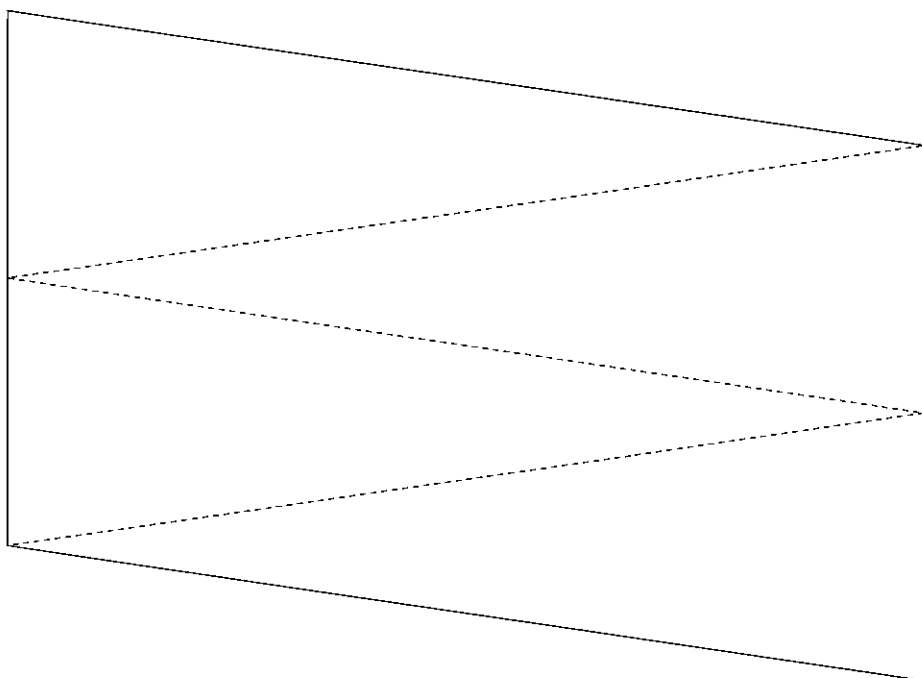




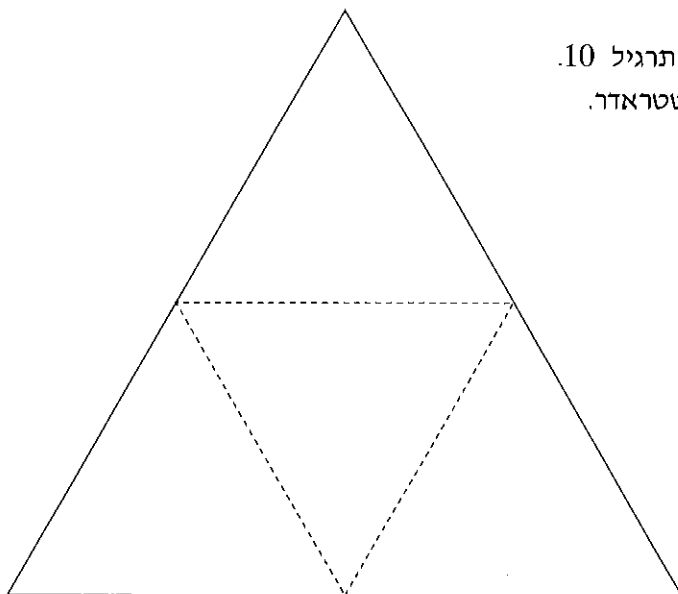
פרק ד
לעמוד 406 תרגיל 3



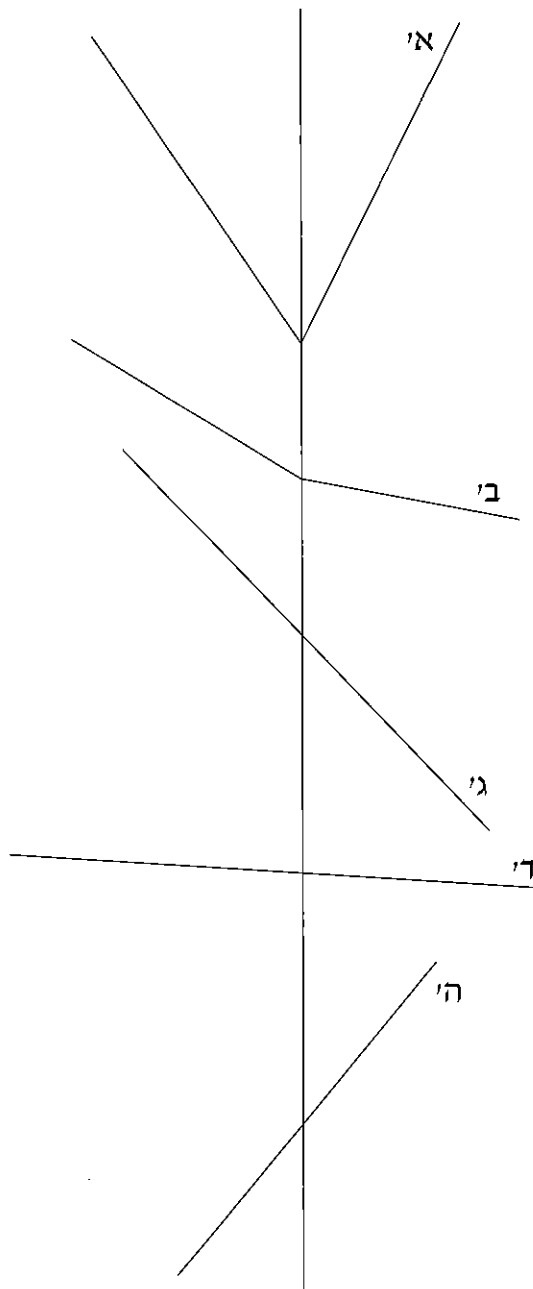
פרק ד
לעמוד 407 תרגיל 5.



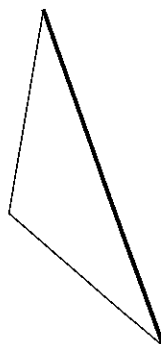
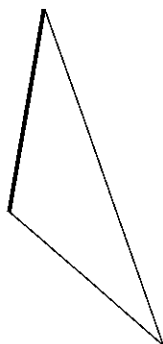
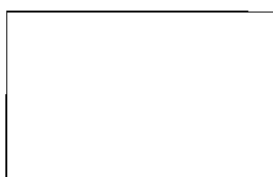
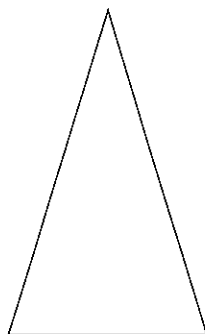
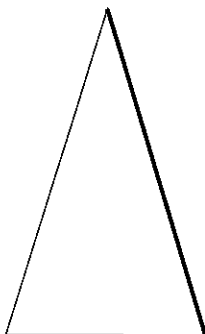
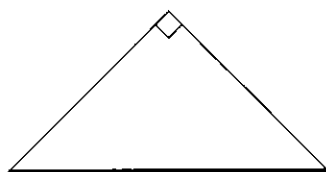
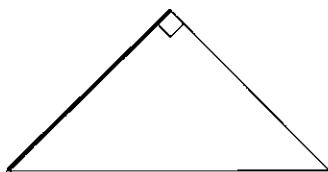
לעמוד 411 תרגיל 10.
פריסה של טראאדר.



פרק ד
לעמוד 408 תרגיל 2.

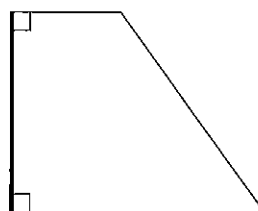
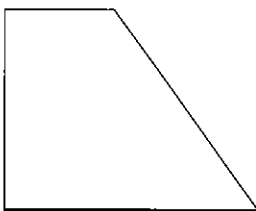
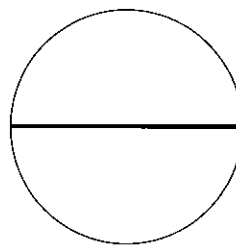
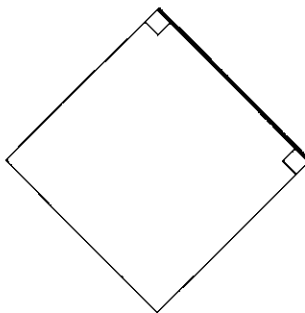
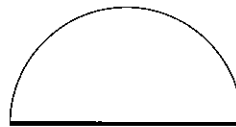
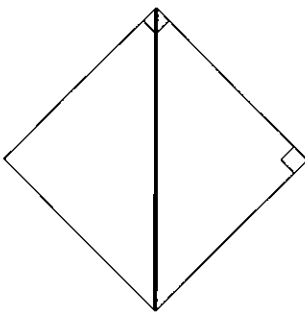
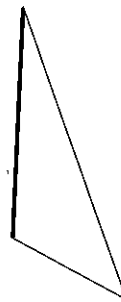
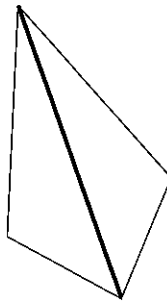


פרק ד
לעמוד 419 תרגיל 16

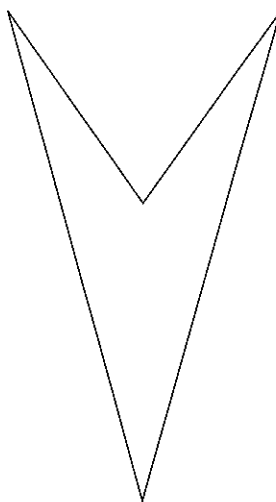
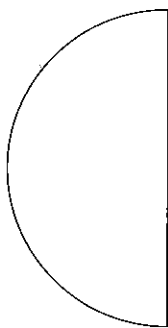
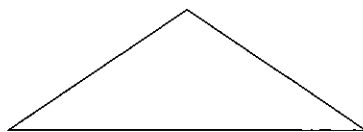
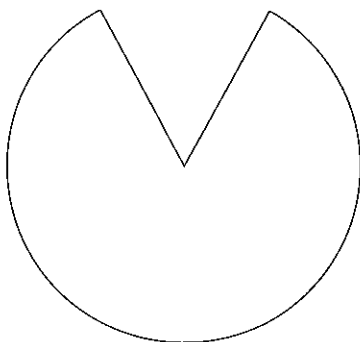
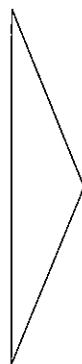
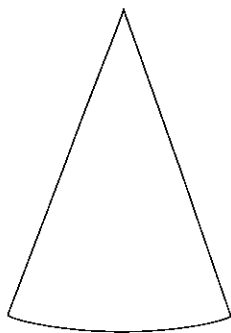


המשך ←

פרק ד
לעמוד 419 תרגיל 16



פרק ד
לעמוד 421 תרגיל 1.



טבלה של התפלגות נורמלית מצטברת

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
-2.9	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
-2.8	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
-2.7	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
-2.6	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
-2.5	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
-2.4	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006
-2.3	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008
-2.2	0.014	0.014	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011
-2.1	0.018	0.017	0.017	0.017	0.016	0.016	0.015	0.015	0.015	0.014
-2.0	0.023	0.022	0.022	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.018
-1.9	0.029	0.028	0.027	0.027	0.026	0.026	0.025	0.024	0.024	0.023
-1.8	0.036	0.035	0.034	0.034	0.033	0.032	0.031	0.031	0.030	0.029
-1.7	0.045	0.044	0.043	0.042	0.041	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037
-1.6	0.055	0.054	0.053	0.052	0.051	0.049	0.048	0.047	0.046	0.046
-1.5	0.067	0.066	0.064	0.063	0.062	0.061	0.059	0.058	0.057	0.056
-1.4	0.081	0.079	0.078	0.076	0.075	0.074	0.072	0.071	0.069	0.068
-1.3	0.097	0.095	0.093	0.092	0.090	0.089	0.087	0.085	0.084	0.082
-1.2	0.115	0.113	0.111	0.109	0.107	0.106	0.104	0.102	0.100	0.099
-1.1	0.136	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.123	0.121	0.119	0.117
-1.0	0.159	0.156	0.154	0.152	0.149	0.147	0.145	0.142	0.140	0.138
-0.9	0.184	0.181	0.179	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161
-0.8	0.212	0.209	0.206	0.203	0.200	0.198	0.195	0.192	0.189	0.187
-0.7	0.242	0.239	0.236	0.233	0.230	0.227	0.224	0.221	0.218	0.215
-0.6	0.274	0.271	0.268	0.264	0.261	0.258	0.255	0.251	0.248	0.245
-0.5	0.309	0.305	0.302	0.298	0.295	0.291	0.288	0.284	0.281	0.278
-0.4	0.345	0.341	0.337	0.334	0.330	0.326	0.323	0.319	0.316	0.312
-0.3	0.382	0.378	0.374	0.371	0.367	0.363	0.359	0.356	0.352	0.348
-0.2	0.421	0.417	0.413	0.409	0.405	0.401	0.397	0.394	0.390	0.386
-0.1	0.460	0.456	0.452	0.448	0.444	0.440	0.436	0.433	0.429	0.425
0.0	0.500	0.496	0.492	0.488	0.484	0.480	0.476	0.472	0.468	0.464
0.1	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.2	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.3	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.4	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.5	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.6	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.7	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.8	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.9	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
1.0	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.1	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.2	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.3	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.4	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.5	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.6	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.7	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.8	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.9	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
2.0	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.975	0.976	0.977
2.1	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.2	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.3	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.4	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.5	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.6	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.7	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.8	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.9	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
3.0	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

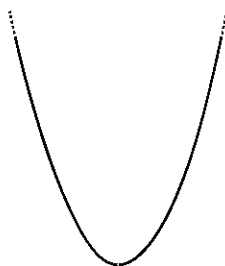
טבלה של
התפלגות
נורמלית
מצטברת



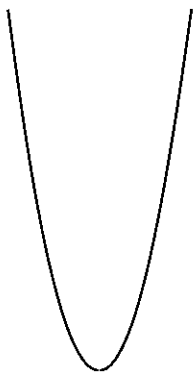
דפים שקופים

פרבולות לעמודים 18, 19 ו- 20 (פרק א)

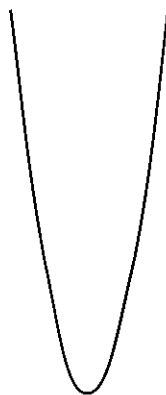
פרבולה 1



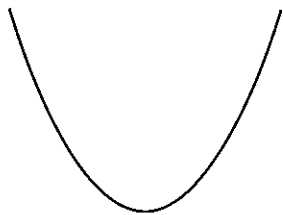
פרבולה 2

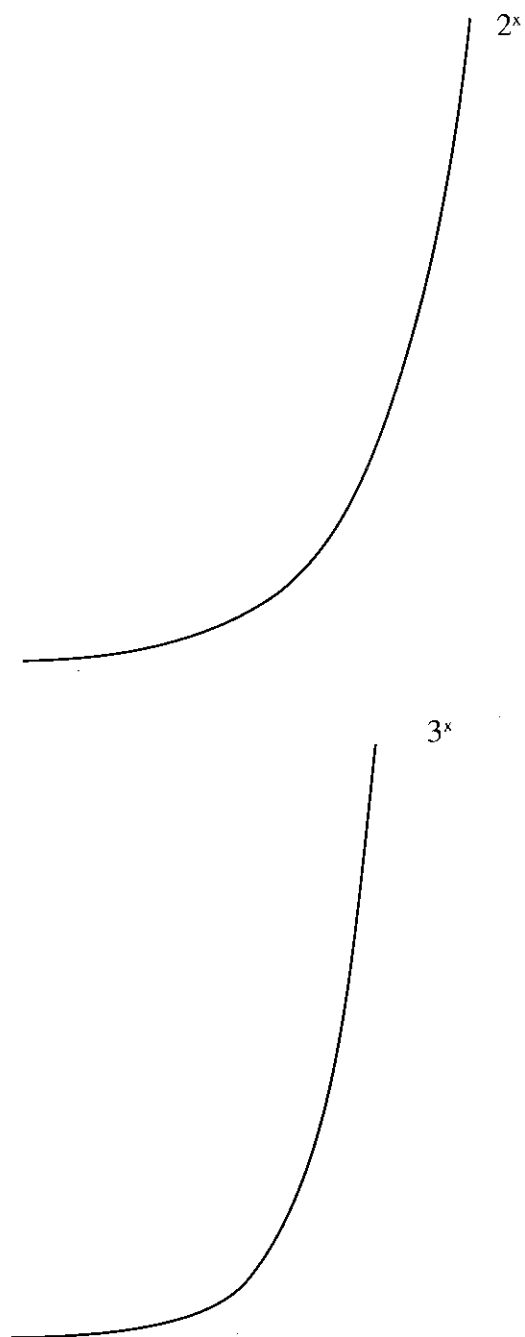


פרבולה 3



פרבולה 4

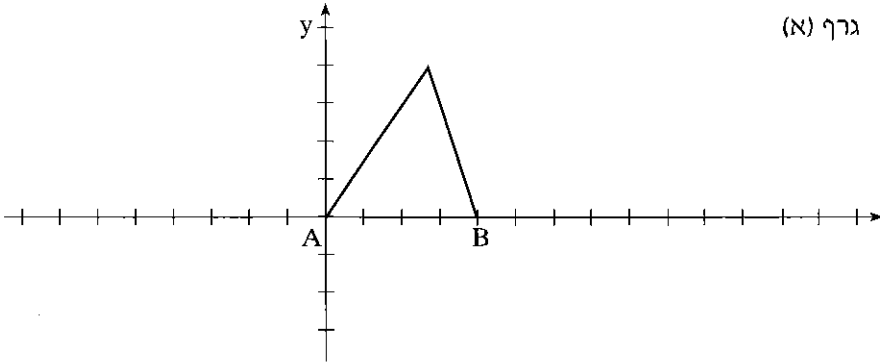




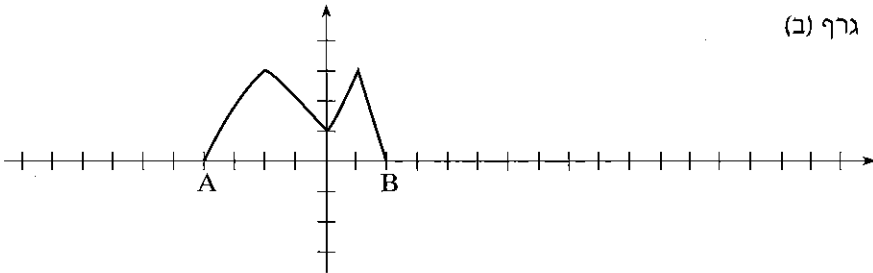
לגבי כל סעיף:

- הניחו את הדף השקוף על הדף המתאים כך שהשרטוט יתלכד עם השרטוט בספר.
- הזיזו את הדף השקוף כך שהנקודה B תתלכד עם הנקודה A שבספר, ושרטטו על הדף השקוף מחזור נוסף של הגרף.
- חזרו ובצעו את הפעולות כך שיתקבלו שלושה מחזורים מימין לנתון ועוד אחד משמאל.

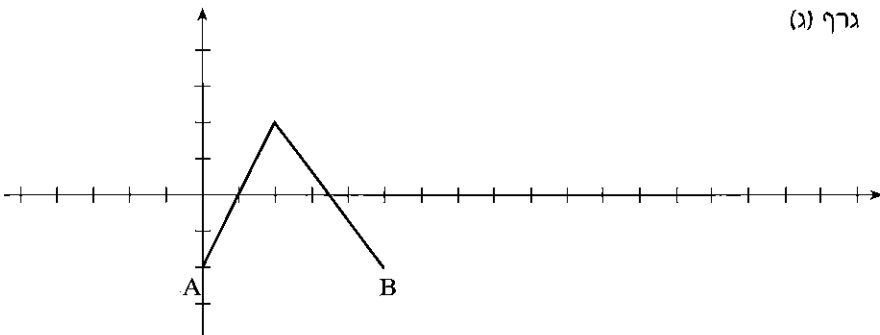
גרף (א)



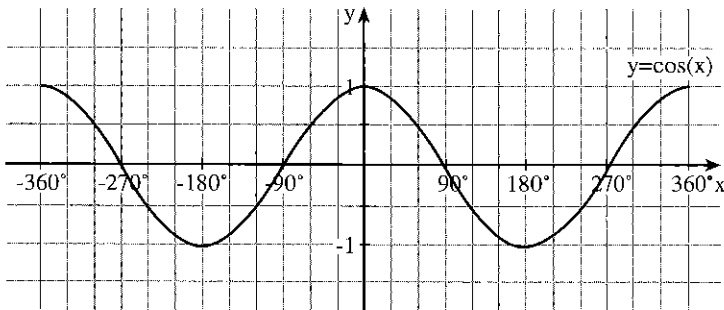
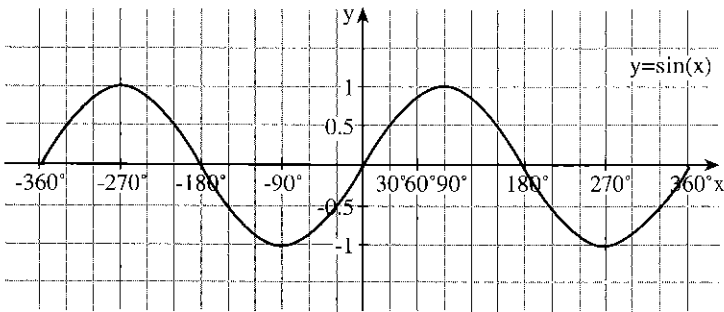
גרף (ב)



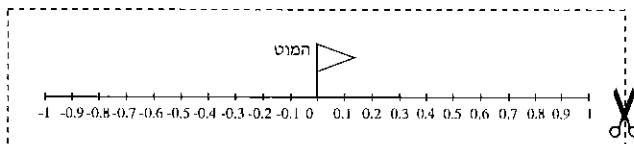
גרף (ג)



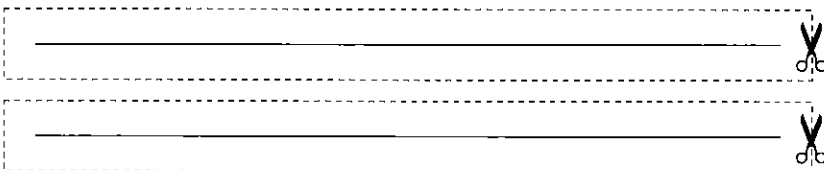
גרפים לעמודים 248-253 (פרק ג)



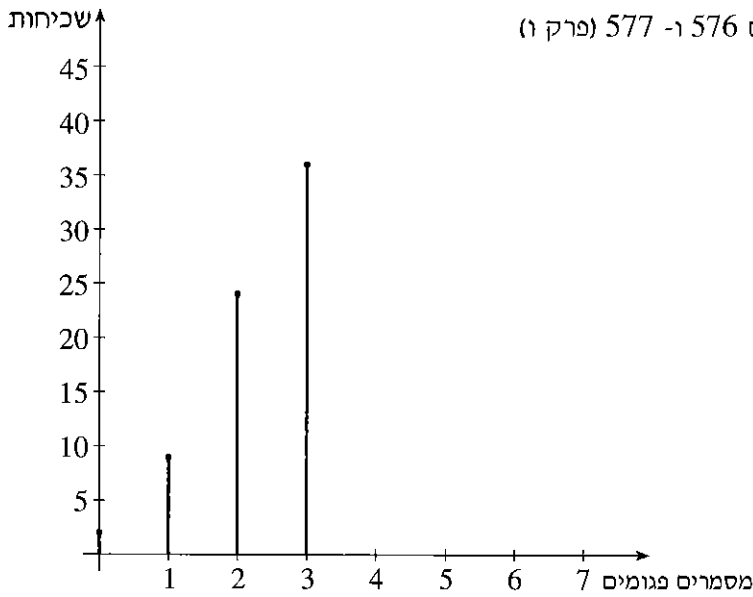
סרגלון לעמוד 229



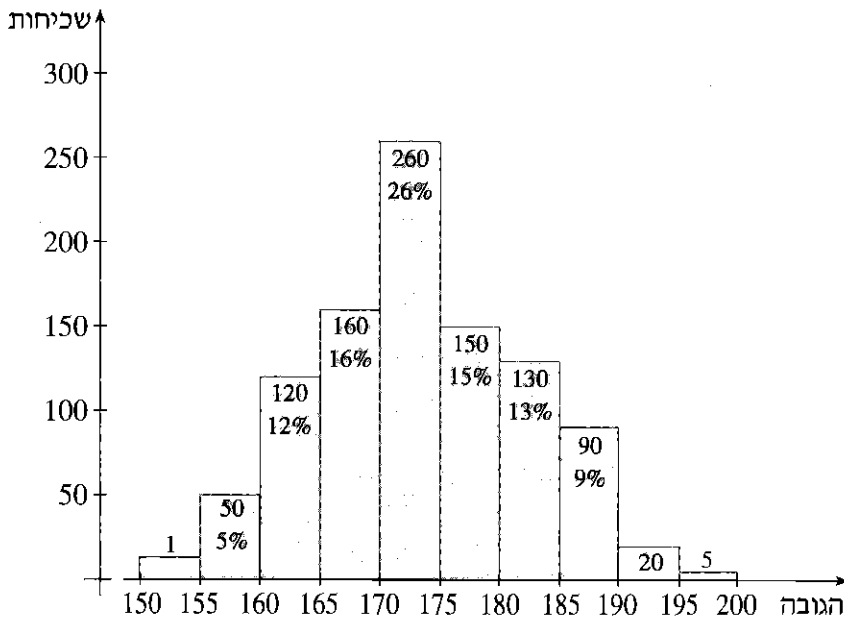
ישרים לעמודים 248-245, 229, 310



גרפים לעמודים 576 ו- 577 (פרק ז)



ציר סטיות תקן



ציר סטיות תקן

