שלוש יחידות

אנליזה

לכיתות י"א - י"ב

מדריך למורה



המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

חובר על ידי:
שרה קירו
אורלי גוטליב

ייעוץ:

אברהם הרכבי

הדפסה, עריכה ושרטוטים:

שרה קירו

שרטוטים:
סיגלית בר-מנשה

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או
אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה.
שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט אלא ברשות מפורשת בכתב מהמו"ל.

©
כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע
ומשרד החינוך התרבות והספורט

נדפס בישראל תשנ"ט - 1999
הרצות פילמים: גרפאור בע"מ
דפוס מאירי בע"מ

תוכן עניינים

פרק א: פונקציות מנה 7-90

אסימפטוטה, מהי? 9

עוד על אסימפטוטות 17

שברים עשרוניים קטנים 21

אחת מהמשפחה, $f(x)=\frac{1}{x}$ 23

פונקציות חזקה נוספות 39

פעולות אלגבריות והזזות 49

עוד הזזות ושיקופים של $y=\frac{1}{x}$ 54

קצת "מתיחות" 60

על משיק לפונקציה 74

חקירה של פונקציות מנה נוספות (רשות) 80

גרף עם חור וצימצום שברים (רשות) 85

פרק ב: הפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$ 91-142

פונקציה המוגדרת בקטע סגור 93

ומה אם התחום לא סגור? 107

ומה אם הגרף חותך את ציר ה-x? 115

שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$ כאשר ידוע החוק של f 122

פרק ג: עוד משפחה של פונקציות 143-172

התאמה והתאמה הפוכה 144

פונקציית השורש 153

עוד על שורשים 157

על שורשים ונגזרת 163

פרק ד: פונקציה מורכבת 210-173

מהי פונקציה מורכבת? 174

נגזרת של פונקציה מורכבת 181

חקירה של פונקציות מורכבות 188

אינטגרל של פונקציה מורכבת 203

פרק ה: הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת 235-211

קצב שינוי של פונקציה (מ-f ל- f') 212

מגרף הנגזרת f' לגרף הפונקציה f 227

פרק ו: מכפלה של פונקציות 274-236

גרפים של מכפלה של פונקציות 237

נגזרת של מכפלת פונקציות 245

חקירה של מכפלת פונקציות 252

משוואת משיק 270

פרק ז: מבחר בעיות קיצון 298-275

הקדמה

על מבנה הספר לתלמיד

הספר "אנליזה" שייך לסדרת ש"י, שנכתבה עבור תלמידים הלומדים ברמה של שלוש יחידות לימוד. הוא מהווה המשך ל"מבוא לאנליזה" והוא כולל חקירה של משפחות פונקציות, תוך כדי חזרה והרחבת התכונות הקשורות בפונקציות אלה.

כמו בספרים אחרים בסדרה, מהלך הלימוד משתף את התלמידים בבניית הנושאים. נעשה שימוש נרחב בגרפים ובאסטרטגיות מוכרות של פעולות עליהם ("מתיחות", הזזות במקביל לצירים ושיקוף בצירים). טכניקות אלגבריות משולבות על-פי הצורך ובהקשרים המתאימים.

לאורך כל הספר משולבות בעיות קיצון הקשורות עם הפונקציות הנחקרות.

הספר כולל פעילויות מחשב כתחליף למהלכים מסוימים או כהעשרה.

מה במדריך זה?

במדריך תוכלו למצוא:

- תיאור המהלך של כל פרק.
- תיאור הקשר בין הפרקים.
- רציונל לתרגילים, פתרונות שונים, התיחסות לתשובות וקשיים אפשריים של תלמידים והצעות להתמודד אתם.
- הערות דידקטיות שונות (ארגון ההוראה בכיתה, המלצות לקיים דיון, הצעות לפתיחה או לסיכום של נושא וכדומה).
- תרגילים נוספים להעשרה.

המלצה לחלוקת השעות לפי הפרקים

מספר שעות

פרק א: פונקציות מנה 10

פרק ב: הפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$ 10

פרק ג: עוד משפחות של פונקציות 5

פרק ד: פונקציה מורכבת 8

פרק ה: הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת 7

פרק ו: מכפלה של פונקציות 10

פרק ז: מבחר בעיות קיצון 5

פרק א : פונקציות מנה

מבוא לפרק

פרק זה מטפל ב-

- מושג חדש "האסימפטוטה".
- חקירת הפונקציה $\frac{1}{x}$ ופונקציות מנה כלליות יותר שהן הזזות שקופים ומתיחות של $\frac{1}{x}$.
- חקירות נוספות הקשורות לפונקציות מנה, כולל בעיות קיצון.

כמו בספרים האחרים הגישה, מבוססת על התנסויות, שפונות לשכל הישר של התלמיד, ואשר מנסות לשמור על הקשר עם המשמעות, גם אם הדבר כרוך בוויתור על טיפול פורמלי. גישה זו מטפחת יצירת אינטואיציות, שימוש בכלים מניפולטיביים וויזואלים, קריאה וניתוח של גרפים ושימוש בכלים אלמנטרים לבדיקה ולקביעת הגיוניות של פתרון. התוכנית מסתמכת על שימוש במחשבונים, אשר משחררים את התלמידים מחישובים מיגעים. יחד עם זאת, אנו לא מוותרים על הוראת טכניקות ופרוצדורות, אשר באות לתמוך פורמלית באינטואיציות.

המושג אסימפטוטה מוצג לתלמידים באופן לא פורמלי. האסימפטוטה מוצגת כקו ישר שאליו מתקרב גרף הפונקציה, במובן זה שהמרחק בין הפונקציה והישר הולך וקטן (שואף לאפס). התלמידים יכירו את המושג דרך ישרים מקבילים לצירים או הצירים עצמם.

התלמידים יחשפו לאסימפטוטות אינטואיטיבית, כאשר לא תְלַמֵּד הדרך הפורמלית לזיהוין. למעשה, האלגוריתם למציאת אסימפטוטות לא עוזר להבין את המושג, שהוא מורכב כשלעצמו ובתוכו מעורבים מושגים מסובכים אחרים של גבולות. גם אם נשארים בהיבט האינטואיטיבי עדיין המושג מורכב מאחר וקשור בתוכו מושג האינסוף. כדי לתת כניסה רכה יותר לנושא הוקדשו שני סעיפים, בהם שמים את הדגש על ההתקרבות לישר. ההתקרבות לישר שונה לגבי אסימפטוטה מקבילה לציר x ואסימפטוטה המקבילה לציר y. בראשונה,

x גדל (או קטן) וערכי הפונקציה מתקרבים לערך מסוים של y. בשניה, x- ים מתקרבים לערך מסוים ו- y מקבל ערכים שגדלים (או קטנים) מאוד.

בסעיף הראשון ישנה הכרות עם אסימפטוטה מקבילה לציר x.

מתחילים עם אסימפטוטה מקבילה לציר x (ולא מקבילה לציר y) משתי סיבות:

- כדי להתרכז במושג ההתקרבות ולא בנקודות אי-הגדרה, מה שמאפיין אסימפטוטה אנכית.
- כדי שלא ייווצר הרושם לתלמיד שגרף הפונקציה לא יכול לחתוך את האסימפטוטה. (מה שלמעשה קורה באסימפטוטה אנכית.)

בהמשך עוסקים בגרפים של פונקציות רציונאליות המתקרבים לאסימפטוטה המקבילה לציר y (אנכית) משני הצדדים (או מצד אחד).

גם הסעיפים הבאים, בהמשך הפרק, מחזקים את הפנמת המושג אסימפטוטה על-ידי הכרות עם משפחות של פונקציות שגם להן יש אסימפטוטות כמו:

הפונקציה $\frac{1}{x}$ הזזות ומתיחות שלה וכן פונקציות מהצורה $\frac{1}{x^n}$.

מכירים גם את התכונות הנוספות של הפונקציות הקשורות ב- $\frac{1}{x}$ גם על-ידי הנגזרות.

בנוסף חוקרים פונקציות שהחוק שלהן הוא צרוף ליניארי של $\frac{1}{x}$ עם פונקציות חזקה שהמעריך שלהן מספר טבעי. מוצאים משוואות של משיקים לפונקציות כאלה ופותרים בעיות קיצון.

כמו כן חוקרים פונקציות מנה נוספות כאשר פונקציה הנגזרת שלהן נתונה.

בסעיף האחרון בפרק עוסקים בפונקציות להן נקודת אי-ההגדרה שבהן יש חור (ולא אסימפטוטה אנכית), במטרה להראות שנקודת אי-ההגדרה אינה בהכרח קשורה לאסימפטוטה, אלא יכולה להיות קשורה ל"חור" בגרף.

אסימפטוטה מהי? (עמודים 7 - 11 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה עוסקים בפונקציות שלהן אסימפטוטה מקבילה לציר x, שמשמעותה שגרף הפונקציה מתקרב לישר מקביל לציר ה- x (או לציר x עצמו) עבור x-ים גדולים מאוד או קטנים מאוד, במובן שהמרחק בין הפונקציה לישר הולך וקטן (שואף לאפס).

כדי לבנות את המושג "אסימפטוטה" באופן אינטואיטיבי מתחילים ממשימה בה נדרשים התלמידים לשרטט קודם פונקציה שהיא יורדת לכל x ואחר-כך לשרטט פונקציה שיורדת לכל x אך אינה חותכת את ציר x. המשימה השניה יוצרת התלבטות לקיום פונקציות כאלה. כדי לטפל בהתלבטות שנוצרת מכירים פונקציות שמתקרבות לציר x או לישר המקביל לציר x. השכנוע להתקרבות לישר נעשה באמצעות חשובים נומריים. כדי לשרטט את הפונקציות נעזרים בתכונות מוכרות מהחקירה של פולינומים כמו: נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.

הערה: בכיתה לא נשתמש במילים אסימפטוטה אנכית ואסימפטוטה אופקית, אלא נשתמש באסימפטוטה מקבילה לציר y (במקום - אנכית), ומקבילה לציר x (במקום אופקית). זאת בגלל שמילים אילו מסבירות את המושג. למרות זאת במדריך, כדי לקצר נשתמש במילים אסימפטוטה אופקית ואסימפטוטה אנכית.

תרגיל 1

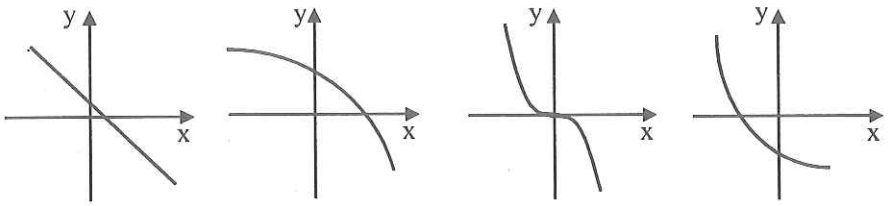
בסעיף הראשון מבקשים מהתלמידים לשרטט גרף של פונקציה יורדת עבור כל x (תכונה מוכרת). בסעיף השני מציעים לתלמידים **לנסות** לשרטט גרף של פונקציה יורדת עבור כל x שאינו חותך את ציר x (תכונה לא מוכרת).

הסיבות לסעיף א':

(i) לתת מצב מוכר, לפני הלא מוכר, כדי שלא יירתעו מהלא מוכר.

(ii) לפשט את הדרישה בסעיף ב', שבו התלמידים נדרשים להתייחס לשתי תכונות (יורדת ולא חותכת את ציר x).

סעיף א' אינו מהווה בעיה לרב התלמידים. דוגמאות לשרטוטים של תלמידים:



המשימה בסעיף ב' נראית לרב התלמידים כבלתי אפשרית מבחינה ויזואלית. דוגמאות שהם משרטטים:



הדוגמה הראשונה (i) עונה רק על האילוץ של חיתוך עם ציר x אך לא יורדת לכל x. לעומת זאת הדוגמה השניה (ii) עונה על האילוץ של אי-חיתוך עם ציר x לכל x, אך אינה יורדת לכל x. בשתי הדוגמאות הפונקציה אינה חותכת את ציר x, אך הפונקציה אינה **יורדת לכל** x.

מומלץ לאסוף תשובות של תלמידים (לשתי המשימות) ולהציגן על הלוח.

בכיתות הניסוי בדקו המורים יחד עם התלמידים את התאמת הגרפים שהוצעו לנתוני הסעיפים. בהקשר לסעיף ב' התלמידים הסכימו שהגרפים לא מתאימים והגיעו למסקנה שאי אפשר לשרטט. באחת הכתות המורה אמרה שאכן ניתן לשרטט גרף העונה על דרישות הסעיף, אך ההסבר יינתן בשיעור הבא. אחד מהתלמידים אמר *"אז מה תשאירי אותנו באותה שיעור הבא"*.

למרות שרב התלמידים בכתות השונות קבעו שלא ניתן לשרטט פונקציה שיורדת לכל x ואינה חותכת את ציר ה- x , באחת הכתות תלמיד התעקש שיכולה להיות פונקציה כזו והסביר: *"אכיוון שניתן לחלק לדעל נתון בכל פעם באספר לדעול יותר ולדיין להישאר מעל ציר ה- x"* ואכן זאת מטרת התרגיל הבא.

תרגיל 2

מטרת התרגיל לענות על סעיף ב' מתרגיל 1, בעזרת חישוב נומרי. לשם כך ניתן חוק של פונקצית מנה, שציר x הוא אסימפטוטה שלה.

עיקר התרגיל כאן לשרטט גרף של פונקציה על-פי חוק נתון (שיעזור לתשובה לתרגיל קודם). כדי להתמקד בעקר השאלה ניתנות חלק מהתכונות: נקודות קיצון (כיוון שלא יודעים למצוא אותן), ונקודת החיתוך עם ציר x .

כדאי לשים לב שאנו נעזרים באותה אסטרטגיה שהצענו בחקירות קודמות: בכל שלב של החקירה אנו מסמנים את הנקודות המתאימות במערכת צירים, והגרף נוצר בשלבים.

עד סעיף ו' התלמידים חוזרים על ידע קודם, תוך שימוש במחשבון.

ב) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y: (0,0.5)

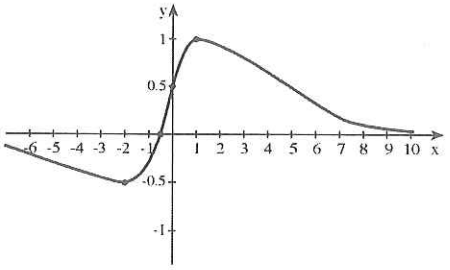
ג) (8,0.26), (2,0.833), (-3,-0.45), (-6,-0.29). התוצאות הן לאחר עיגול .

בתרגיל בספר מצורפות הוראות לביצוע החישובים במחשבון.

ה) (1,1) נקודת מקסימום, (-2,-0.5) נקודת מינימום.

כדאי לדבר בשיעור על כיצד הנקודות שחושבו (או שנתנו) בסעיפים קודמים עוזרים לנו לאפיין את נקודות הקיצון.

ו)



סעיפים ז', ח' ו- ט' מיועדים להכנסת המושג החדש "אסימפטוטה", תוך כדי ניתוח סימן הערכים המתקבלים, ערכם ומיקום הנקודות במערכת הצירים. מטרת הסעיפים היא ליצור תחושה שאכן ניתן לשרטט פונקציה שיורדת לכל x ואינה חותכת את ציר x.

ז) מומלץ לפתור סעיף זה יחד עם התלמידים ולבקש נימוק לכל תת סעיף.

כדאי להדגיש שאין צורך לרשום את המספר במשבצת אלא יש להשיב על פי סעיפים קודמים.

- המספר במשבצת לא יכול להיות שלילי מאחר ונקודת החיתוך היחידה עם ציר x היא (0 ,0.5-) וערכי הפונקציה עבור $x > -0.5$ חיוביים.

ניתן לנמק זאת גם מהתבנית, כי עבור $x = 20$ המונה והמכנה חיוביים

- המספר במשבצת לא יכול להיות אפס כי (0 ,0.5-) היא נקודת החיתוך היחידה עם ציר x.
- המספר במשבצת לא יכול להיות 0.5 כי קיבלנו עבור $x = 8$ את הערך 0.26 שהוא קטן מ- 0.5 וכן ידוע שאין נקודות קיצון נוספות עבור $x > 1$.
- המספר חייב להיות חיובי (לפי ההסברים למעלה).
- לפי הסעיפים הקודמים לא ניתן לתת תשובה וודאית לכך שיש ערך קטן מ-0.24 (כמובן שניתן לחשב אך לא זאת הכוונה). אפשר לדחות את ההכרעה לשאלה זו לאחר סעיף ח'.

ח) כדאי לדון בסעיף זה לאחר שהתלמידים קבלו מספרים ולבקש שיתארו היכן הנקודות נמצאות. בסעיף זה שמים לב שכאשר x גדל, ערכי הפונקציה הולכים וקטנים ומתקרבים לאפס.

(100, 0.02) (150, 0.013) (200, 0.01)

ט) אם נציב מספר גדול מאוד נקבל מספר חיובי קטן מאוד.

כדאי לשים לב שהגרף של הפונקציה שנבחרה חותך את ציר x ב- $x = -0.5$, אך אינו חותך אותו כאשר ערכי x גדולים מאוד, או קטנים מאוד.

כדאי לרשום את שיעור y עם לפחות שלוש ספרות מימין לנקודה העשרונית, כי באופן זה ניתן לראות את מגמת הירידה .

(100, 0.020), (150, 0.013), (200, 0.010)

למרות המספרים הקטנים, לחלק מהתלמידים היה קונפליקט בין התוצאות של החישוב לבין ההשערה האומרת- שהגרף שיורד לכל x חייב לחתוך ציר x. ישנם תלמידים שאינם משתכנעים גם מהחישוב שביצעו וזה עלה מתגובותיהם.

תלמד א': *מה זה האסימפטוטות האלה?*

תלמיד ב': שהפונקציה על פסים לא יחתוך, לכן יהיה תאריך מקביל אליו. אסור להם להיפגש.

תלמיד ג': אך לכן ייפגש בסופו של דבר מוכרח להיפגש.

תלמיד ד': לא מכירים כלל אספה, אבל אולי הוא קיים.

בסעיפים הבאים נמשיך לטפל בהפנמת המושג אסימפטוטה .

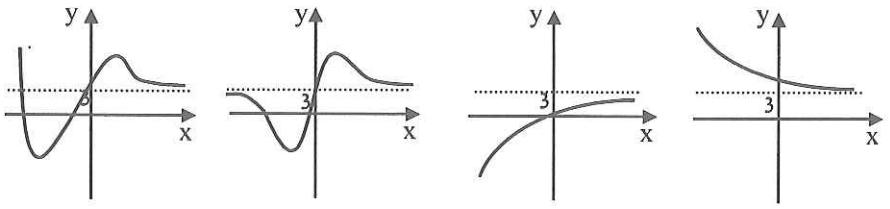
למורים:

בחרנו בפונקציה $\frac{2x+1}{x^2+2}$ ולא ב- $y=\frac{1}{x}$ (הפונקציה שנכיר אותה היטב בהמשך) גם כדי שהתלמידים יראו שיש פונקציות שלהן אסימפטוטה אופקית,ושהגרף שלהן חותך את האסימפטוטה עבור ערכי x - קטנים.

תרגיל 3

מטרת התרגיל היא להתרגל למושג החדש אסימפטוטה. ישנם גרפים רבים מתאימים להם תכונות שונות שניתן לשרטט. אנו ממליצים לתת לתלמידים להתמודד עם השאלה, ולאחר מכן לבקש שישרטטו על הלוח את האפשרויות השונות. כדאי, בכל דוגמה,להדגיש את ההתקרבות לישר $y = 3$.

דוגמאות אפשריות:

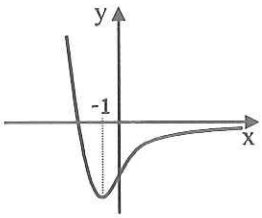


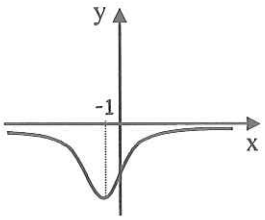
תרגיל 4

בתרגיל זה אנו משלבים שרטוט גרף של פונקציה לפי תכונה מוכרת (נקודת קיצון), והתכונה החדשה: אסימפטוטה שהיא ציר x. שרטוט גרף לפי תכונות

שזור בחומרי הלמידה שלנו בכל נושא הקשור לפונקציות. בתרגיל זה האסימפטוטה קובעת את סוג נקודת הקיצון.

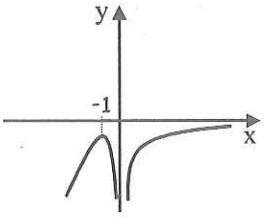
א)





למורים:

האסימפטוטה אכן עוזרת לקבוע את סוג נקודת הקיצון בהנחה שהתלמידים חושבים רק על פונקציות רציפות, אחרת תיתכן גם הפונקציה:



ב) מאחר וציר x הוא אסימפטוטה, נקודת הקיצון היא מינימום (במקרה זה, הכוונה לפונקציה רציפה).

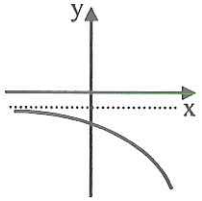
ג) משוואת האסימפטוטה: $y = 0$.

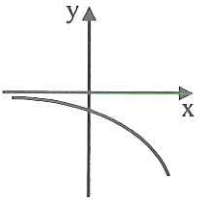
תלמידים רבים מתקשים לרשום את משוואות הצירים. חלקם הגדול מתבלבל וטוען שמשוואת ציר ה- x היא דווקא $x = 0$. בגיאומטריה אנליטית נעזרנו בסימון ורישום מספר נקודות על הציר (למשל: (3, 0), (2, 0), (-1, 0)). מכאן הסקנו מה המשותף לכולן, על מנת לרשום את המשוואה המתאימה.
גם כאן כדאי להזכיר איך להגיע למשוואת המתאימות לצירים.

תרגילים

5. תרגיל זה מיועד להתמודד עם הבלבול בין התכונות עולה-חיובית או בין יורדת-שלילית. תלמידים רבים נוטים לחשוב שפונקציה עולה חייבת להיות חיובית. במקרה זה האסימפטוטה עוזרת לשרטט את הגרף.

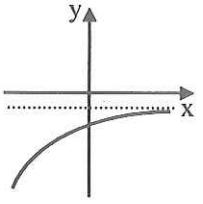
א) דוגמאות לגרפים מתאימים:

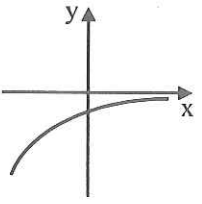




סעיף זה דומה לתרגיל 1 שבפרק. כדאי לציין שייתכן שסעיף א' קשה יותר מסעיף ב' של תרגיל 1, כיוון שבשרטוט הגרף, משמאל לימין, אנו "מתחילים" מהאסימפטוטה.

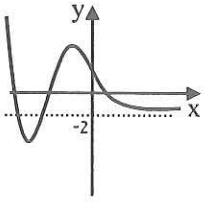
ב) דוגמאות לגרפים מתאימים:

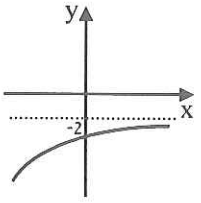


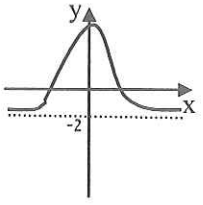


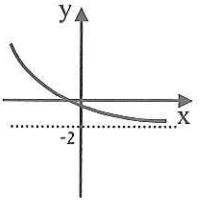
תרגילים 8,7,6 מיועדים לחזור על שרטוט לפי תכונות כאשר נתונה אסימפטוטה אופקית, כולל התנסות נוספת של חישוב נומרי (בתרגיל 8).

6. הצעות לפתרון:



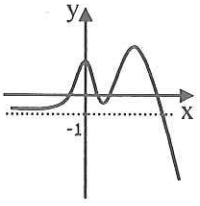


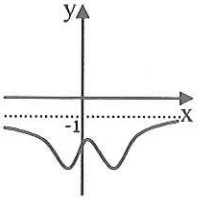




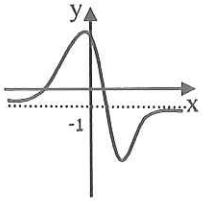
7. א) כדאי לשרטט פונקציות שונות, כולל כאלה שחותכות את האסימפטוטה.

הצעות לפתרון:





ב) הצעה לפתרון (יש כמובן עוד אפשרויות):



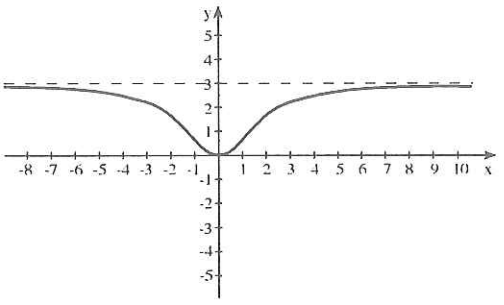
8. ב) (10, 2.91) (2, 1.71)

ג) - (200, 2.9997) , (1000, 2,9999) הכוונה כאן לא לעגל ל- 4 ספרות מימין לנקודה העשרונית, אלא לרשום את ארבעת הספרות (כפי שמופיעות על צג המחשבון), כדי שאפשר יהיה לראות את מגמת ההתקרבות ל- $y = 3$.

- משוואת האסימפטוטה: $y = 3$.

ד) הפונקציה זוגית מאחר שגם במכנה וגם במונה יש ביטוי של x^2 ומספר, ועל כן נקבל אותה התוצאה כאשר נציב מספרים נגדיים.

ה)



אפשר להוסיף תרגילים של שרטוט גרפים של הפונקציות:

$$y = -\frac{3x^2}{x^2+3} \qquad y = \frac{3x^2}{x^2+3}+1 \qquad y = \frac{3x^2}{x^2+3}-2$$

הפונקציה ראשונה היא שקוף של הפונקציה הנתונה והשתים האחרות הן הזזות שלה.

עוד על אסימפטוטות (עמודים 12 - 14 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה מכירים "אסימפטוטה המקבילה לציר y" (אסימפטוטה אנכית). אסימפטוטה כזו נראית כ"מחיצה" בין שני חלקים של גרף הפונקציה, שאליה מתקרב הגרף לפחות מצד אחד של המחיצה.

בתחילת הסעיף תלמידים מתבקשים לשרטט פונקציות להן אסימפטוטות מקבילות לציר y (או ציר y עצמו), מבלי שיש התייחסות מפורשת לסוג כזה של אסימפטוטות. הכוונה כאן שתלמידים ייעזרו בתחושה של ההתקרבות שנוצרה מהסעיף הקודם.

ההתנסות העיקרית של התלמידים בסעיף זה, היא בשרטוט של פונקציה לפי תכונות, בתוספת אסימפטוטה אנכית.

בנוסף בעזרת אסימפטוטה אנכית, נפגשים התלמידים לראשונה עם פונקציות שיש להן שתי נקודות מינימום ללא נקודת מקסימום (או שתי נקודות מקסימום ללא נקודת מינימום).

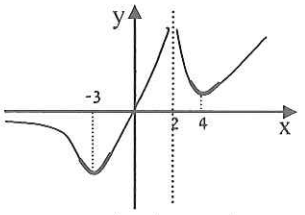
בסעיף הקודם ההסבר להתקרבות לישר שהוא אסימפטוטה, ניתן בעזרת חישובים נומרים, בגלל שההתקרבות אינה אינטואיטיבית. בסעיף זה, יש כבר תחושה של משמעות ההתקרבות, ולכן נתמקד בהתקרבות לאסימפטוטות אנכיות רק מבחינה גרפית ולא נומרית.

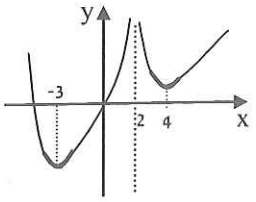
תרגיל 1

מומלץ לשרטט את הפונקציה יחד עם התלמידים. בשני הסעיפים הראשונים משרטטים פונקציות על-פי תכונות שהכירו בעבר. סעיף ג', מפגיש את התלמידים עם המושג החדש.

א) כדאי להוסיף (לסימון נקודות הקיצון) קשת הממחישה את העובדה שהן נקודות מינימום.

דוגמאות אפשריות:



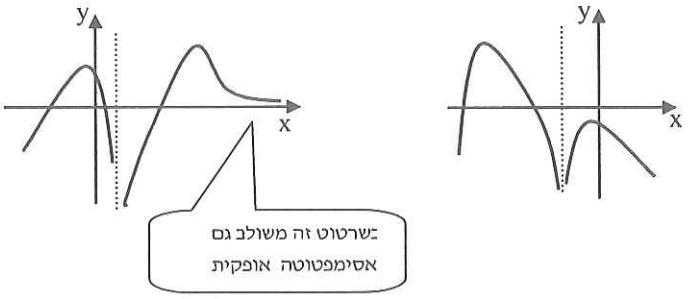


כדאי לבקש מתלמידים שונים שישרטטו את הגרפים שלהם על הלוח.

תרגיל 2

משרטטים דוגמאות שונות למרות שיתכן שעדין המושג אסימפטוטה אנכית אינו מופנם.

דוגמאות אפשריות:

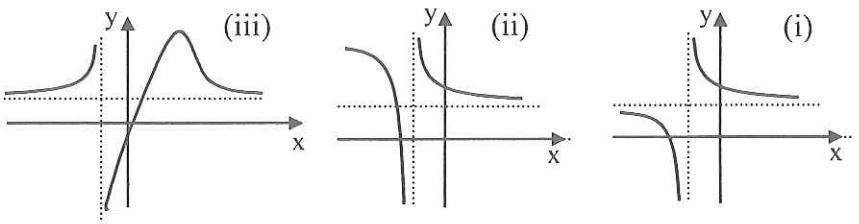


תרגיל 3

ייתכן ותלמידים יתקשו לשרטט גרף של פונקציה שיש לה גם אסימפטוטה אופקית וגם אסימפטוטה אנכית. בדרך כלל הם מתרכזים בחלק אחד של מערכת הצירים המתקבל משרטוט שני הקווים המקווקוים. במקרה זה אפשר לבקש לשרטט תחילה את הישר $x = -1$ ופונקציה כך שישר זה הוא אסימפטוטה, אחר-כך להוסיף את שרטוט הישר $y = 1$ ולתקן את גרף הפונקציה כך שגם ישר זה יהיה אסימפטוטה. אם משרטטים על-פי השלבים הנ"ל כדאי להדגיש שוב למה אסימפטוטה אופקית יכולה לחתוך את הגרף, אך אסימפטוטה אנכית אינה נחתכת על-ידי הגרף.

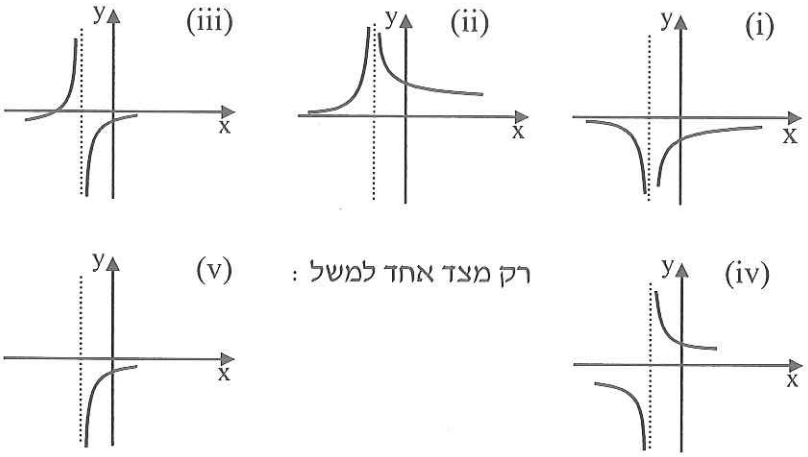
רצוי לבקש מהתלמידים לציין תכונות נוספות של הפונקציה ששרטטו.

דוגמאות אפשריות:



למורים:

בתרגיל 3 ראינו אפשרויות שונות להתקרבות לאסימפטוטה אנכית, ובעצם יש מספר גדול יותר של אפשרויות מאלו שהובאו כדוגמאות. נפרט להלן את האפשרויות להתקרבות לאסימפטוטה אנכית.

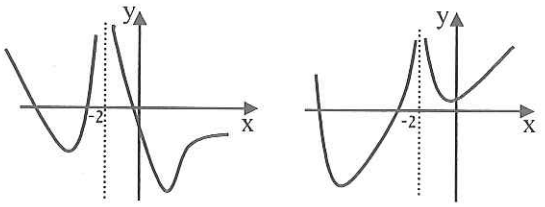


רק מצד אחד למשל :

תרגילים

4. בתרגיל זה תלמידים בוחרים בעצמם את מיקומן של נקודות המינימום ואת האסימפטוטה .

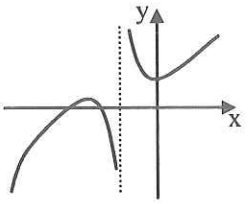
דוגמאות אפשריות :



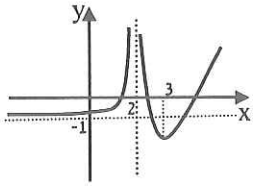
משוואת האסימפטוטה : $x = -2$.

5. תלמידים, בספר מבוא לאנליזה, ראו שלא ניתן לשרטט גרף של פונקציה רציפה שיש לה נקודת מקסימום יחידה, ונקודת מינימום יחידה שיותר גבוהה מנקודת המקסימום. האסימפטוטה האנכית מאפשרת לשרטט גרף לא רציף עם תכונות כאלה.

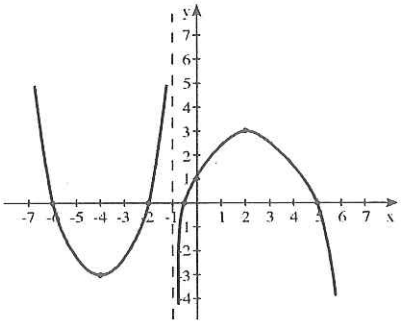
שרטוט לדוגמה:



6. הצעה לפתרון:



7. הצעה לפתרון:



מכיוון שלא מצוין שנקודות הקיצון ונקודות החיתוך הנתונות הן יחידות, אפשר לשאול שאלות נוספות:

א) האם יתכן שהפונקציה תחתוך את ציר x בנקודה נוספת?

ב) כיצד משפיעה תוספת של נקודת חיתוך עם ציר x על תכונות אחרות (כמו נקודות קיצון ואסימפטוטה)?

8. א) משוואת האסימפטוטה: $x = -1$.

ב) משוואות האסימפטוטות: $x = 2$, $y = 0$ (ציר x). בגלל אי-הדיוק בגרף, ניתן לקבל כתשובה נכונה גם ערך הקרוב ל- $x = 2$.

שברים עשרונים קטנים (עמודים 15 - 16 בספר לתלמיד)

מבוא לסעיף

מטרת הסעיף להכיר כתיבה של מספרים קטנים מאוד בעזרת מחשבון, וזאת כדי לתמוך בחישוב נומרי עבור אסימפטוטות אופקיות.

בתרגיל 2 בסעיף :"אסימפטוטה, מהי?" (עמוד 8, תרגיל 2) השתדלנו שהחישובים בעזרת מחשבון יופיעו על הצג בצורה עשרונית רגילה, כדי למנוע קושי נוסף של הבנת הכתיבה במחשבון.

בסעיף זה הדגש הוא על היכרות התלמידים את הייצוג החדש על צג המחשבון ושימוש בו בפונקציית מנה עם אסימפטוטה אופקית (תרגיל 3).

כדאי לשים לב שהכתיבה של מספרים קטנים מאוד עלולה לבלבל את התלמיד עם כתיבה של חזקות.

לדוגמה: 3.5^{-05} במחשבון משמעותו 0.000035, אך בכתיב חזקות משמעותו: $\frac{1}{3.5^5}$ ומספר זה שונה מ- 0.000035.

הערה:

יש דגמים שונים של מחשבונים בהם הכתיבה של מספרים עשרוניים קטנים מאוד היא לא רגילה ממקום מסוים, והמקום שונה ממחשבון למחשבון. כמו כן ההצגה של מספרים קטנים מאוד יכולה להיות שונה ממחשבון למחשבון למשל:

2.25^{-10} או 2.25E-10

תרגיל 1

א) $0.000015^2 = 2.25^{-10}$ ב) $0.0000037^2 = 1.369^{-11}$

תרגיל 2

במהדורה של 1999 כתוב 35^{-03} במקום 3.5^{-03}.

א) $3.5^{-03} = 0.0035$, $2^{-03} = 0.002$, $8^{-02} = 0.08$

ב) $4^{-02} = 0.04$

תרגיל 3

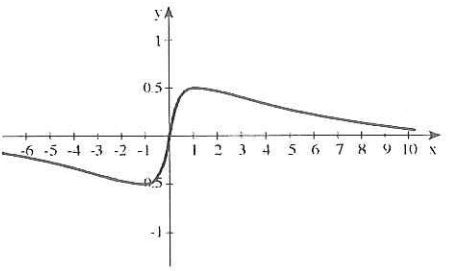
תרגיל זה דומה לתרגילים 2 ו- 8 מהסעיף "אסימפטוטה, מהי?", רק כאן נתנו מספרים קטנים, המופיעים על הצג בכתיב חזקות.
אחרי השרטוט אפשר להתייחס לתכונות נוספות: תחומי עליה וירידה ותכונת האי-זוגיות.

א) נקודת החיתוך עם ציר y: (0, 0).

ב) נקודות נוספות לזיהוי נקודות הקיצון, למשל: (-2, -0.4) , (2, 0.4) לכן (1, 0.5) נקודת מקסימום, (-1, -0.5) נקודת מינימום.

ג) (1000, 0.00099), (100, 0.0099) , (–100, –0.0099)
(10,000, 0.000099) . משוואת האסימפטוטה: y = 0

ד)



אחת מהמשפחה, $f(x)=\frac{1}{x}$ (עמודים 17-23 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ היא פונקציה בסיסית שיש לה שתי אסימפטוטות: ציר x וציר y. החוק הפשוט שלה מחזק שוב, באופן נומרי, את משמעות האסימפטוטה של פונקציה , ולכן מתחילים את הסעיף עם ההיכרות עם פונקציה זו. כמו כן, בעזרת פונקציה זו, קושרים את האסימפטוטה האנכית עם נקודת אי-הגדרה.

ההיכרות עם הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ נעשית באמצעות בניית הגרף שלה על- ידי חישובים נומריים ועל ידי אפיון תכונותיה: אינה מוגדרת עבור $x = 0$, יורדת וחיובית עבור ערכים חיוביים של x, יורדת ושלילית עבור ערכים שלילים של x, ולה שתי אסימפטוטות (תרגיל 3).

אחר-כך נותנים את חוק הנגזרת ומקשרים בין תכונות הפונקציה לחוק הפונקציה .

$f(x)=\frac{1}{x}$ משמשת כבסיס ללמוד פונקציות נוספות המתקבלות משיקופה בציר x או מהזזתה במקביל לציר y, כפי שעשינו עם הפונקציות הריבועיות והפונקציות הטריגונומטריות. גם פה בודקים את התאמת החוק על-ידי הצבת שערי נקודות שעל גרף הפונקציה. כמו-כן מאפיינים את תכונות הפונקציות המתקבלות משיקוף או/ו מהזזה על-ידי בדיקת הנגזרת (תרגילים 4-9).

בסעיף זה חוקרים גם פונקציות בהם אחד המחוברים הוא $\frac{1}{x}$ (תרגילים 10-14), וכן שאלות שבחקירתן מתקבלות פונקציות שתבניתן מכילה גם את הביטוי $\frac{1}{x}$.

תרגיל 1

מטרת התרגיל היא להזכיר מדוע החילוק באפס הוא חסר משמעות, והוא משמש הכנה לזיהוי נקודות אי-הגדרה של פונקציות.

א) 4 ב) 2 ג) חסר משמעות

תרגיל 2

בתרגיל זה מראים תבניות שנקודת אי-ההגדרה שלהן היא לאו דווקא עבור $x = 0$. בהמשך נפגוש גם פונקציות כאלה.

א) $x = 2$ ג) $x = 3$ ה) $x = 0$

ב) $x = -2$ ד) $x = -1$ ו) $x = 1$

תרגיל 3

מטרת התרגיל היא לשרטט את הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$. השרטוט נעשה בשלבים: בסעיפים א' - ז' בונים את הענף הימני של הגרף, (סעיפים ב' - ד' נותנים תמיכה נומרית למשמעות הגרפית של אסימפטוטה אנכית), ובסעיפים הבאים משלימים את הענף השמאלי. רצוי מאד להזכיר שיש לסמן במערכת צירים את הנקודות שמתקבלות בכל שלב.

א) מציבים ערכים שלמים חיוביים.

x	1	2	3	4	5
f(x)	1	0.5	0.33	0.25	0.2

ב) מציבים ערכים חיוביים שמתקרבים לאפס.

x	0.25	0.4	0.5	0.75
f(x)	4	2.5	2	1.33

המטרה בחישובים "לחוש" את קיומה של האסימפטוטה האנכית.

ג) בסעיף זה מקשרים את העובדה שאי-אפשר להציב בחוק $x = 0$, עם העובדה שאין לגרף הפונקציה נקודת חיתוך עם ציר y ועם נקודת אי-ההגדרה.

ד) סעיף זה ממחיש ומדגיש את ההתקרבות לציר y כאשר התלמידים מתארים זאת במילים. אין הכוונה שיסמנו את הנקודות שמתקבלות במערכת הצירים.

כדאי, אחרי החישובים, לדון עם התלמידים על כך שבעצם הפונקציה נותנת את הערך ההופכי של שיעור x . רואים זאת במיוחד בהצבת ערכים שלמים ובשברי יחידה כלומר: $\frac{1}{100},\frac{1}{10},\frac{1}{4},\frac{1}{2}...$ וזה נותן משמעות נוספת לחישובים.

ה) מטרת הסעיף היא לתת תמיכה נומרית למשמעות שציר x הוא אסימפטוטה, כפי שעשינו בסעיף הקודם.

ו) עד כה יש לתלמידים מספיק מידע לשרטט את גרף הפונקציה עבור x-ים חיוביים.

ז) ההתייחסות לנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x בסעיף זה היא לגבי הכיוון החיובי של ציר x והיא תהיה בשני אופנים:

(i) באמצעות חוק הפונקציה, כל מספר חיובי שמציבים מתקבל מספר חיובי.

(ii) בעזרת פתרון המשוואה: $\frac{1}{x} = 0$.

ח) ההצבה של זוגות מספרים נגדיים מאפשרת להשלים את הגרף עבור ערכים שליליים, ומאפשרת להסיק שהפונקציה אי-זוגית. אם לא מלמדים את המושגים של פונקציה זוגית/אי-זוגית אפשר להשתמש במילים כדי לתאר את התכונה.

$f(1) = 1$	$f(0.25) = 4$	$f(0.5) = 2$	$f(3) = 0.33$
$f(-0.25) = 4$	$f(-0.5) = -2$	$f(-3) = -0.33$	$f(-1) = -1$

ט) אנו נעזרים בדף השקוף על-מנת לחסוך בחישובים וגם כדי לראות בבת אחת תמונה של הענף המתקבל עבור x-ים שליליים.

מטרת התרגיל לסכם את תכונות הפונקציה בעזרת : (i) הגרף שהתקבל בתרגיל הקודם. (ii) חוק הפונקציה הנגזרת הניתן כאן.

בתרגיל מזכירים את משמעות הנגזרת על-ידי קריאת שיפועים של משיקים לפונקציה בנקודות שונות. קוראים את שיפוע פונקציה בנקודות אחדות, וגם בעזרת הנחת ישר (כפי שנעשה במבוא לאנליזה) ומשווים עם הצבה בחוק הפונקציה הנגזרת שניתן בתרגיל זה. אומנם לא נותנים הוכחה לתלמידים שזוהי אכן הנגזרת , אבל מאמתים את תכונות הפונקציה הנצפות מתוך הגרף עם חוק הנגזרת הנתון.

א) לפונקציה אין נקודות קיצון.

ב) הפונקציה יורדת עבור x – ים חיוביים וגם עבור x – ים שליליים.

ג) בנקודה A: $f'(1) = -1$

בנקודה B: $f'(2) = -0.25$

כדי לקבל את השיפועים האחרים יש לסמן את הנקודות , להניח את ה"ישר" השקוף בנקודה המתאימה, לקרוא את השיפוע המתאים ולרשום במקום המתאים . תלמידים עשויים להשתמש בסימטרייה סביב הראשית כדי לרשום את השיפועים : $f'(-1)$ ו- $f'(-2)$.

$f'(-1) = -1$ $\qquad$ $f'(0.5) = -4$

$f'(-2) = -0.25$ $\qquad$ $f'(-0.5) = -4$

ד) מטרת הסעיף לבדוק את השיפועים מהסעיף הקודם על-ידי הצבה בחוק הנגזרת וכן לראות את תכונות הפונקציה על-ידי מהות חוק הנגזרת.

(i) לדוגמה : $f'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4} = -0.25$ $\qquad$ (ii) $f'(\frac{1}{3}) = -9$

(iii) הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה (עבור $x > 0$ ועבור $x < 0$), ואין לפונקציה נקודת קיצון מכיוון שעבור כל ערך של x מתחום ההגדרה שנציב בחוק הנגזרת ,נקבל ערך שלילי (ולא אפס).

תרגיל 5

בתרגיל זה עוסקים בהזזה של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ לאורך לציר y ביחידה אחת למעלה. לצורך זה משתמשים בדף שקוף. בוחרים להזזה זו את גרף הפונקציה (בדף השקוף שבסוף הספר) ללא ציר x, כדי שלא יקשה על קריאת נקודות על הגרף המוזז. בכיתות הניסוי תלמידים התקשו להניח נכון את הדף השקוף (כפונקציה המוזזת) בגלל האסימפטוטה, ולכן מתבקשים תחילה לסמן במערכת הצירים נקודה אחת השייכת לפונקציה המוזזת ואחר-כך להניח את הדף השקוף כך שהפונקציה המוזזת תעבור דרך הנקודה המסומנת. לאור הניסיון בהזזות ייתכן ורוב התלמידים יציעו את חוק הפונקציה המוזזת: $y=\frac{1}{x}+1$, אך ייתכן ותלמידים יציעו חוקים אחרים, ובמקרה זה יש לבקש לאמת אותם בעזרת הצבה ולבדוק האם מתקבלים אותם ערכים של הפונקציה אשר התקבלו בהזזה של נקודות בודדות.

ב) בסעיף זה בודקים תכונות של הפונקציה המוזזת:

- גם לפונקציה המוזזת יש שתי אסימפטוטות $x = 0$ (ציר y), $y = 1$.
  ייתכן ויהיו תלמידים שיראו, שכפי שכל הנקודות זזו יחידה אחת למעלה, גם האסימפטוטה זזה יחידה אחת למעלה.
- אפשר לקרוא בגרף המוזז שנקודת החיתוך עם ציר x היא (-1, 0), להציב בחוק של הפונקציה המוזזת $x = -1$ ולבדוק שאכן מקבלים 0. רצוי גם לדבר על פתרון המשוואה $\frac{1}{x}+1=0$ כמשוואה שמבטאת את הדרך למצוא את נקודת החיתוך עם ציר x.
- הפונקציה המוזזת אינה זוגית ואינה אי-זוגית. לתלמידים טובים אפשר להוסיף ולדבר על שני צירי סימטרייה: $y = x$ ו- $y = -x$ של $f(x)=\frac{1}{x}$, ולדבר על השפעת ההזזה על המשוואות של צירי הסימטרייה כלומר שגם צירי הסימטרייה זזים ביחידה אחת ומתקבלות המשוואות:
  $y = x + 1$, $y = -x + 1$.

ג) תלמידים ראו במבוא לאנליזה שהזזה של פונקציה לאורך לציר y אינה משפיעה על הנגזרת, ואפשר להשתמש בכך גם כאן. אפשר להזכיר שהנגזרת אינה משתנה כי המשיקים של הפונקציה והפונקציה המוזזת מקבילים בנקודות להן אותו שיעור x. אפשר גם לראות זאת גרפית על-ידי הנחת "ישרים", שהם משיקים בנקודות להן אותו שיעור x. לדוגמה ב- $x = 1$.

ד) השיפוע בנקודה בה $x = 2$ הוא -0.25.

תרגיל 6

מתרגלים את ההזזה של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ ומשמעותה לגבי הנגזרת. בעצם בתרגיל זה מבהירים שוב, על-ידי דוגמה, מדוע הנגזרת של הפונקציה אינה משתנה.

ב) שיפוע המשיק הוא 1-.

ג) המשיקים מקבילים.

כדאי לשאול גם מהו חוק הנגזרת של הפונקציה g.

תרגיל 7

א) הפונקציה הנגזרת של כל הזזה לאורך לציר y של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ היא

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ב) כל פונקציה מהצורה $y = \frac{1}{x} + c$ כאשר c מספר כלשהו.

תרגיל 8

התרגיל עוסק בחוק של הפונקציה המתקבלת משיקוף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ בציר x, בבדיקת החוק על-ידי הצבת נקודה ובתכונות הפונקציה המתקבלת.

א) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

ב) למשל הנקודה $(1, -1)$ על גרף הפונקציה המתקבלת והיא גם מקיימת את החוק הרשום בסעיף א'.

ג) - שתי האסימפטוטות של פונקצית השיקוף הן אותן אסימפטוטות כשל הפונקציה המקורית $f(x) = \frac{1}{x}$: ציר x וציר y.

- גם לפונקצית השיקוף אין נקודות חיתוך עם הצירים.
- הפונקציה עולה לכל x בתחום ההגדרה ($x < 0$, $x > 0$).
- גם פונקצית השיקוף היא אי-זוגית.

ד) הסבר לעובדה שהנגזרת של פונקצית השיקוף היא $\frac{1}{x^2}$, יכול להינתן בהקשר לתבנית ככפל פונקציה שיודעים לגזור ($y = \frac{1}{x}$) במספר, או בהקשר לעליה של פונקצית השיקוף והדמיון שלה ל $y = \frac{1}{x}$.

תרגיל 9

בתרגיל זה עוסקים בשילוב של שתי הפעולות: שיקוף והזזה, כאשר יש לבצע תחילה את השיקוף. (אם קודם מזיזים ואחר כך משקפים מתקבלת הפונקציה ($y = -(\frac{1}{x} + 1)$)

א) נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x היא $(1, 0)$. אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר y.

ב) האסימפטוטות הן: ציר y , $y = 1$.

תרגיל 10

תרגיל זה מהווה הכנה לתרגילים בהם חוקרים פונקציות, שבהם נדרש לפתור משוואות כמו אלה המופיעות בתרגיל.

i) במציאת נקודות חיתוך של פונקציות עם ציר x.

ii) במציאת נקודות בהן השיפוע הוא אפס, כלומר נקודות חשודות (כלומר מועמדות להיות נקודות קיצון.)

א) $x = 1 \ , \ x = -1$ ג) אין פתרון ה) $x = -\frac{1}{3} \ , \ x = \frac{1}{3}$

ב) $x = -0.5 \ , \ x = 0.5$ ד) $x = -0.5 \ , \ x = 0.5$ ו) $x = -1.73 \ , \ x = 1.73$

למורים:

בתרגילים 11- 14 חוקרים פונקציות שבחוק שלהן משולב הביטוי $\frac{1}{x}$ עם פונקציות החזקה מן הצורה: $y = \pm\frac{1}{x} + ax + b$ או $y = \pm\frac{1}{x} + ax^2$.

חוקרים את הפונקציות האלה כי אפשר למצוא בדרך אלגברית גם נקודות קיצון וגם נקודות חיתוך עם ציר x.

תרגיל 11

א) השלב הראשון בחקירה של פונקציות הכוללות את הביטוי $\frac{1}{x}$ הוא בדיקת ערך של x עבורו הפונקציה אינה מוגדרת, והדגשת ציר y כאסימפטוטה אנכית המתקבלת מנקודה אי-ההגדרה. במקרה זה הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$ וחשוב מאד לצבוע בקו מקווקוו את ציר y.

ב) i) $y' = -\frac{1}{x^2} + 4$

ii) על ידי השוואת פונקציה הנגזרת לאפס כלומר: $-\frac{1}{x^2} + 4 = 0$, מתקבלים שעורי x של הנקודות החשודות.

הנקודות החשודות הן: (4 , 0.5), (-4 , -0.5).

iii) חשוב להדגיש שהאסימפטוטה (ציר y) מחלקת את המישור לשני אזורים לכן הנקודות שיש לבחור (כדי לאפיין האם הנקודות החשודות הן קיצון) צריכות להימצא באזור בו נמצאת הנקודה החשודה. לכן כדי לאפיין את הנקודה (0.5, 4) יש לבחור נקודות מימינה ומשמאלה בתחום בו x חיובי, אפשר לבחור לדוגמה את הנקודות (1,5) ו- (0.25,5). כדי לאפיין את

הנקודה (-0.5, -4) יש לבחור נקודות מימינה ומשמאלה בתחום בו x שלילי, למשל אפשר לבחור את הנקודות : (-5, -1) ו- (-5, -0.25).

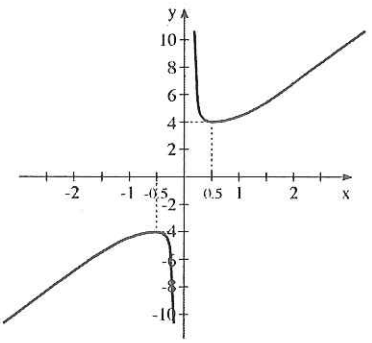
iv) הנקודה (0.5, 4) היא נקודת מינימום, והנקודה (-0.5, -4) היא נקודת מקסימום. הנקודות הנוספות שנבחרו (0.25, 5) ו- (-5, -0.25) עוזרות לראות את התנהגות הפונקציה בסביבת נקודת אי-ההגדרה, ובכך מתמקד הסעיף הבא של השאלה.

ג) i) בשלב זה של הלימוד יש תלמידים ששמים לב לעובדה שהפונקציה היא אי-זוגית ונעזרים בכך למלא את ערך הפונקציה עבור $x < 0$ בטבלה.

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
y	-0.4	-100.04	לא מוגדרת	100.04	10.4

ii) ככל שמתקרבים לאפס מהכיוון החיובי, ערכי הפונקציה הולכים וגדלים וככל שמתקרבים לאפס מהכיוון השלילי, הערכים של הפונקציה הולכים וקטנים. (כלומר גדלים בערך מוחלט, אך קטנים בגלל שליליותם).

ד)



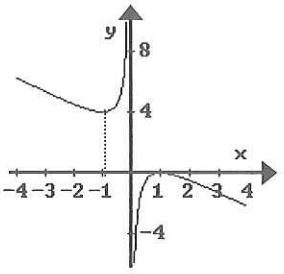
למורים :

מהתבוננות בחוק הפונקציה $y = \frac{1}{x} + 4x$ אפשר להגיד כי עבור ערכים הולכים וגדלים של x, $\frac{1}{x}$ הולך וקטן ולכן הפונקציה מאד קרובה ל- $y = 4x$ (שאת הגרף שלה קל לשרטט). אך ככל ש x מתקרב לאפס האיבר שמשתלט הוא $\frac{1}{x}$ כי הוא מייצג מספר גדול מאוד ניתוח מסוג זה עוזר לנו כמורים לראות את הגרף מבלי לחקור על-ידי גזירה. כדאי לערוך דיון כזה עם תלמידים מתקדמים: א) כביקורת לחקירה שעשו. ב) כדי לראות שיש אסימפטוטות נוספות לאסימפטוטות אנכיות ואופקיות, במקרה זה $y = 4x$, ולדון מדוע היא אסמפטוטה.

תרגיל 12

א) הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$.

ב) נגזרת הפונקציה היא: $y' = \frac{1}{x^2} - 1$. נקודות קיצון : $(1,0)$ נקודת מקסימום, $(-1,4)$ נקודת מינימום. הגרף בהמשך נועד לעזור לזהות את סוג הקיצון.

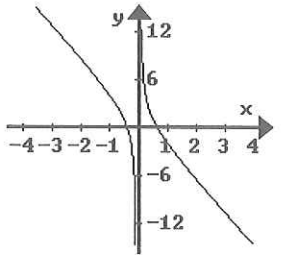


תרגיל 13

כדי לענות על השאלה מספיק לרשום את הנגזרת ולבדוק אם יש פתרונות למשוואה המתקבלת מהשוואת הנגזרת לאפס.

אפשר להמשיך לחקור את הפונקציה כולל שרטוט הגרף, ואז לדון במשמעות הגרפית לכך שאין לפונקציה נקודות קיצון והיא עולה או יורדת בתחום בו היא מוגדרת. אפשר לבחור שתי נקודות בתחום החיובי של ציר x ושתי נקודות

בתחום השלילי של ציר x כדי לבדוק את מגמת הפונקציה בכל אחד מתחומים אלה. אפשר גם לראות מתוך התבנית של הנגזרת שערכיה שליליים לכל ערך אפשרי של x ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום.



להלן הגרף:

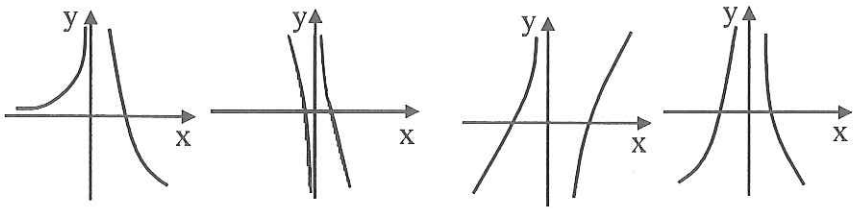
גם גרף הפונקציה מעניין כי לראשונה מתקבל גרף כזה.

למורים:

במקרה זה אין נקודות חשודות ולכן אין נקודות קיצון. ישנן פונקציות שהנגזרת לא מתאפסת ובכל זאת יש להן נקודות קיצון, הכוונה לנקודות קצה.

את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x אפשר לחשב באופן אלגברי, על ידי פתרון המשוואה: $\frac{1}{x} - 4x + 1 = 0$. פתרונות המשוואה הם: 0.4- ו- 0.6, כלומר קבלנו שיעורי x של נקודות החיתוך עם ציר x.

הצעה נוספת להרחבת התרגיל: אחרי שמראים שאין נקודות קיצון לפונקציה אפשר להראות מס' גרפים ולבקש מהתלמידים לבחור את הגרף המתאים ולנמק.



תרגיל 14

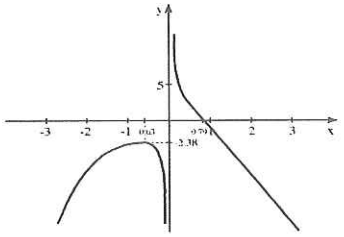
א) הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$.

ב) נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x היא (0.79, 0).

בתרגיל זה יש תמיכה בפתרון כי מתקבלת משוואה מסוג שלא פתרו עד כה.

ג) יש לפונקציה נקודת מקסימום יחידה (-0.65, -2.39). בדיקת אופייה של הנקודה החשודה יעשה בתחום בו ערכי x שליליים מאחר ושעור x של הנקודה החשודה הוא שלילי.

ד) כדי להשלים את שרטוט גרף הפונקציה יש לבדוק את מגמת הפונקציה בתחום בו ערכי x חיוביים. בתחום זה הפונקציה יורדת. אפשר לבדוק זאת על-ידי בחירת שתי נקודות בתחום.



תרגילים

15.א) בתרגיל זה אפשר לבקש מהתלמידים נימוק המסביר את ההתאמה שבוחרים. יש תלמידים שממינים לפי (+2) ו (-2) בחוק. הם מקשרים בין מספרים אלה שמופיעים בחוק לאסימפטוטות $y = 2$ ו- $y = -2$, ולאחר מכן מתייחסים ל $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x}$. יש תלמידים שפועלים היהפך. בכל מקרה לאחר ההתאמה בוחרים נקודה על הגרף ובודקים את ההתאמה שנבחרה.

$g(x) \leftrightarrow (ii)$ $\quad$ $h(x) \leftrightarrow (i)$

$f(x) \leftrightarrow (iv)$ $\quad$ $m(x) \leftrightarrow (iii)$

ב) לשתי הפונקציות שיורדות: (ii) ו- (iv) יש שיפוע $-\frac{1}{4}$. אפשר להראות שלא ייתכן שיש פתרון למשוואה $\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$ כשמדובר בנגזרת של הפונקציות $m(x)$ ו- $h(x)$ לעומת העובדה שיש פתרון למשוואה $-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$.

אפשר לשאול: באילו נקודות על הגרף השיפוע הוא $-\frac{1}{4}$ (ת' $x = 2$, $x = -2$).

16. תרגיל זה דומה לתרגיל 9 במהלך.

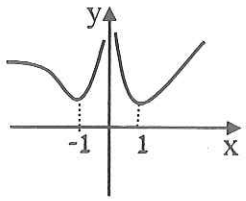
ב) החוק המתקבל לאחר שיקוף והזזה : $y = -\frac{1}{x} + 3$.

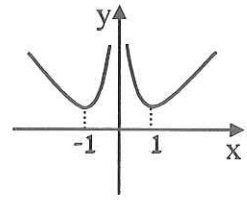
ג) $y = 3$ וציר y.

ד) נקודת החיתוך עם ציר x : (0.33,0).

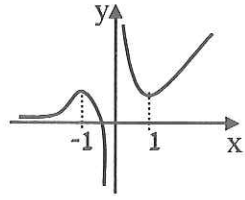
17. שרטוט על פי תכונות.

א) להלן שתי דוגמאות אם נקודות הקיצון הנתונות הן יחידות.

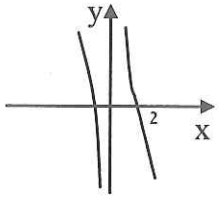


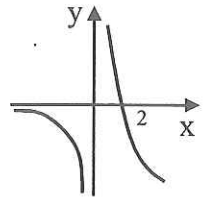


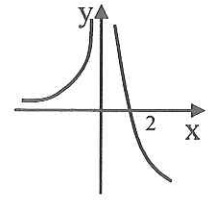
ב) דוגמה לגרף של פונקציה אם נקודות הקיצון ונקודת החיתוך עם ציר x הנתונות הן יחידות.



ג) דוגמאות לפתרון :







18. אין הכוונה ללמד בתרגיל זה בעיות קיצון אלא רק לרענן מיומנויות שנלמדו. יש בהמשך הספר סעיף הנוגע לבעיות קיצון ואפשר לדחות את התרגיל להמשך.גיל זה עוסק בפונקציה בתחום החיובי, והתרגיל הבא (תרגיל 19) עוסק בפונקציה בתחום המורחב הכולל גם את התחום השלילי. התרגיל עוסק תחילה במקרים פרטיים כדי לסייע להגיע לתבנית הנכונה וההתייחסות רק לתחום החיובי.

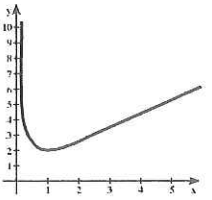
בתרגיל זה התלמידים רואים שהפונקציה היא מכשיר לענות על הרבה שאלות בבת אחת ו- $\frac{1}{x}+x$ היא לא רק ביטוי אלגברי אלא פונקציה שהיא מודל לבעיה נומרית.

א) $4\frac{1}{4}$ ב) $3\frac{1}{3}$ ג) 3 ד) לדוגמה: 2, $2\frac{1}{2}$

ה) (i) $y = x + \frac{1}{x}$ (ii) $(4,4\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{3},3\frac{1}{3})$, $(3,3\frac{1}{3})$

(iii) הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$. בהשוואת הנגזרת לאפס מתקבלים שני ערכים של x , $x = 1$, $x = -1$. מאחר ועוסקים רק בתחום החיובי נתייחס רק ל- $x = 1$. הנקודה החשודה היא: (1, 2). בעזרת הנקודות הקודמות שחושבו הנקודה היא נקודת מינימום.

(iv)



לאחר שרטוט גרף הפונקציה כדאי:

- לחזור לסעיף ג' ולהראות את משמעות המספר הנוסף שהתקבל (3). יש להראות שאין מספר אחר מתאים.
- לחזור לסעיף ד' ולהראות שיש הרבה מספרים מתאימים.
- להדגיש גם בעזרת הגרף את המשמעות ש (1, 2) היא נקודת מינימום וגם שהערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא 2.

למורים:

בכתיב אלגברי המשמעות היא $\frac{1}{x}+x \geq 2$, תרגיל זה מופיע בספרי אלגברה רבים וניתן לפתור זאת באופן הבא:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \;/\cdot x \quad , \quad x > 0$$

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$(x-1)^2 \geq 0$ ביטוי זה נכון תמיד.

אך כאן יש מבט פונקציונלי.

19. בתרגיל זה מרחיבים את התחום בו עוסק התרגיל הקודם גם לתחום השלילי. התלמידים יכולים להיעזר בתשובותיהם לתרגיל 18 עבור הסעיפים ב / (i) , (ii) בתרגיל זה .

א) חשוב לציין שעד כה שאלנו היכן הפונקציה לא מוגדרת, ולא מהו תחום הפונקציה, כי לדעתנו קל יותר להשיב על שאלה זו. בתרגיל זה אנו משתמשים בהיגד "תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x \neq 0$" כדי שתלמידים יתרגלו להכיר ניסוח כזה שגם הוא מופיע בשאלות.

ב) (iii) (2,2.5) , (0.5,2.5) , (-0.5,-2.5) , (-2,-2.5)

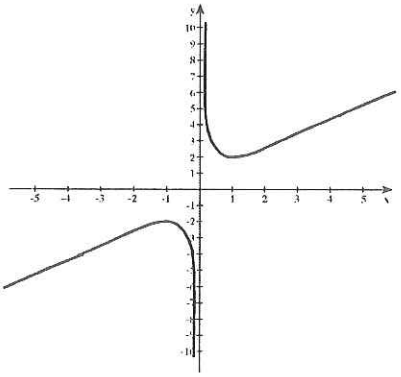
(iv) (1,2) נקודת מינימום , (-1,-2) נקודת מקסימום.

ג) (i)

x	-0. 1	-0.01	0	0.0 1	0.01
y	-10.1	-100.01	לא מוגדרת	100.01	10.1

(ii) ככל שמתקרבים לאפס מהכיוון החיובי, הערכים של הפונקציה הולכים וגדלים וככל שמתקרבים לאפס מהכיוון השלילי, הערכים של הפונקציה הולכים וקטנים.

ד) (iv) משוואת האסימפטוטה: $x = 0$



דרך נוספת לשרטוט הגרף: אפשר להרחיב את שרטוט הפונקציה עבור ערכי x שליליים על-ידי זיהוי תכונת האי-זוגיות של הפונקציה ומילוי הטבלה עם שיעורי x נגדיים לאלה שנבחרו בתרגיל 18.

20. כדאי לדבר על המשמעות הגרפית שלפונקציה אין נקודות קיצון. כלומר, הפונקציה עולה או יורדת בכל אחד מהתחומים בהם היא מוגדרת. כדי לשרטט את הגרף: אפשר להיעזר בשתי נקודות בכל צד של ציר y או להיעזר באופייה של תבנית הנגזרת ($y'=1+\frac{1}{x^2}$) שהיא חיובית לכל $x \neq 0$, ולכן הפונקציה עולה בכל אחד מהתחומים בהם היא מוגדרת.
אפשר להוסיף גרף של הפונקציה.

21. א) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x \neq 0$.

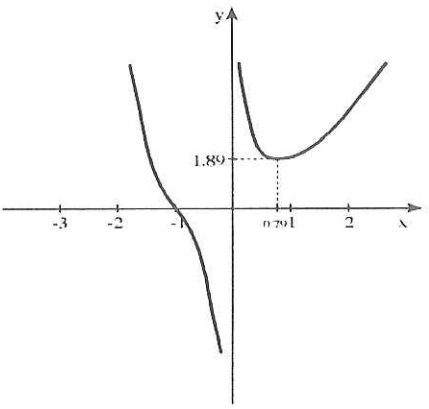
ב) אין נקודת חיתוך עם ציר y כי $x \neq 0$.

(-1, 0) היא נקודת חיתוך עם ציר x. על מנת לפתור את המשוואה המתקבלת, אפשר להיעזר בתמיכה האלגברית שניתנה בתרגיל 14.

ג) (0.79, 1.89) נקודת מינימום.

ד) משוואת האסימפטוטה: $x = 0$.

ה)



פונקציות חזקה נוספות (עמודים 33 - 41 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה מרחיבים את המשפחה של פונקציות החזקה: $y = x$, $y = x^2$, ...

שהכירו במבוא לאנליזה, לפונקציות חזקה נוספות: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$, ...

ההיכרות עם פונקציות החזקה הנוספות מתבססת על התכונה של זוגיות/אי-זוגיות, ועל מה שלמדנו על אסימפטוטות. כאשר התכונות של הפונקציות מהמשפחה המורחבת נבדקות דרך הגרפים שלהן.

כאמור, במקרה שהמושגים זוגית/אי זוגית לא מוכרים, אפשר להחליף את המושג: "פונקציה זוגית", במושג פונקציה סמטרית לגבי ציר y, ואת המושג "פונקציה אי זוגית", במושג פונקציה שלמקורות נגדיים שלה יש תמונות נגדיות.

להלן שתי הצעות להעביר את הנושא שאחת מהן נעזרת במחשב והשניה ללא מחשב.

נקודת המוצא של ההצעה המבוססת על המחשב יוצאת מפונקציות החזקה המוכרות ואפיונן. מנצלים את המיון לפונקציות זוגיות ואי-זוגיות, כדי למיין גם את הפונקציות הנוספות לפונקציות זוגות ואי-זוגיות ולבדוק את התכונות המשותפות לפונקציות הזוגיות והאי-זוגיות הנוספות. הפעילות במחשב מאפשרת להכיר פונקציות רבות מהמשפחה, דבר שלא ניתן לעשות ללא מחשב.

ההצעה השנייה מתייחסת רק לפונקציות החזקה הנוספות, והלימוד של התכונות נעשה דרך השוואה בין שתי פונקציות (זוגית ואי-זוגית, שתי פונקציות זוגיות ושתי פונקציות אי-זוגיות).

התרגול בהמשך משותף לשתי ההצעות והוא יכול להשלים את המהלך שבכל אחת מההצעות.

הערה:

בסעיף זה אנו מרחיבים את מספר הקבוצות של הפונקציות כשכל קבוצה נתפשת כיחידה גלובלית מבחינה גרפית ותבנית. למעשה הכרנו את הפרבולות והישרים ועתה התווספה קבוצה נוספת: $\frac{1}{x^n}$, n טבעי.

בתרגילים 1- 6 נעזרים במחשב, בעזרת התוכנה מתמטי x .

תרגיל 1

מטרת התרגיל להזכיר את פונקציות החזקה ואת תכונותיהן שהיו במבוא לאנליזה. המטרה לחדד את התכונות המשותפות לכל הפונקציות הזוגיות והתכונות המשותפות לכל הפונקציות האי-זוגיות.

אפשר להגיע למיון פונקציות החזקה המוכרות אחרי שרטוט של כל הפונקציות ולא כפי שמופיע כאן: קודם למיין ורק לאחר מכן לשרטט.

א)

פונקציות זוגיות	**פונקציות אי-זוגיות**
x^6	x^9
x^2	x^7
x^4	x^3
x^{10}	

ד) תכונות **משותפות** לפונקציות הזוגיות:

(i) הן סמטריות לגבי ציר y.

(ii) הן מקבלות ערכים חיוביים או אפס.

(iii) הגרפים עוברים דרך הנקודות: (0, 0), (1, 1), (-1, 1).

(iv) יש להן נקודת מינימום ב- (0, 0).

(v) הן יורדות בתחום $x < 0$, עולות בתחום $x > 0$.

עוסקים בתכונות המשותפות כי:

- יש קושי להתייחס להבדלים שהם מזעריים.
- ההבדל בין הפונקציות בתחום $0 < x < 1$: ככל שהמעריך גבוה יותר, ערכי הפונקציה קטנים יותר- לגבי אותו ערך של x.
- בתחום $x > 1$: ככל שהמעריך גבוה יותר ערכי הפונקציה גבוהים יותר).

ו) תכונות **משותפות** לפונקציות האי - זוגיות :

- הפונקציות עולות לכל x.
- הגרפים עוברים דרך הנקודות : (0,0), (1, 1), (-1, -1).
- לערכי x מנוגדים, מתאימות תמונות מנוגדות.

הערה:

אפשר להוסיף תרגיל נוסף לתלמידים זריזים : לשער איך יראה גרף הפונקציה $y = x^{20}$. לבדוק את ההשערה ולקשור במלים מה קורה כאשר מגדילים את המעריך.

כדאי לסכם את התרגיל ולהעלות את הנקודות הבאות :

- הקשר בין המעריכים, המשמעות של פונקציה זוגית/אי-זוגית ובין הגרף. מעריך זוגי מתקשר עם פונקציה זוגית ועם גרף שהוא סמטרי ביחס לציר y.
- להתייחס להבדלים שצוינו בסוף סעיף ד'.

תרגיל 2

מטרת תרגיל זה להכיר, בעזרת המחשב, את התיאור הגרפי של פונקצית החזקה : $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots$ ולמיין לשתי קבוצות על פי שרטוט הגרפים :

(i) $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^4}, \ldots$ (ii) $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^5}, \ldots$ ובהמשך להשוות בין שתי הקבוצות.

ב)

קבוצה I	קבוצה II
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^5}$
$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^3}$

ג,ד) לא שואלים במפורש על התכונות המשותפות של כל קבוצה, במקום זה מבקשים שישרטטו פונקציה נוספת השייכת לקבוצה ובודקים את השתייכותה על-פי הגרף המתקבל במחשב.

ה) תכונות **המבדילות** בין קבוצה I לקבוצה II (לפי הטבלה למעלה):

- הפונקציות מקבוצה I חיוביות לכל $x \neq 0$, הפונקציות מקבוצה II חיוביות עבור $x > 0$ ושליליות עבור $x < 0$.
- בתחום $x < 0$ הפונקציות מקבוצה I עולות אך הפונקציות מקבוצה II יורדות
- הפונקציות מקבוצה I סמטריות לגבי ציר y. אך הפונקציות מקבוצה II, לערכי x נגדיים מתאימות תמונות נגדיות.

תכונות **משותפות** לשתי הקבוצות:

- הפונקציות אינן מוגדרות עבור $x = 0$.
- יורדות עבור $x > 0$.
- אין לפונקציות נקודות קיצון.
- ציר x וציר y הם אסימפטוטות.
- הפונקציות חיוביות עבור $x > 0$.

תרגילים 3-6 עוסקים בהזזות במקביל לציר, כאשר כל תרגיל נותן מבט אחר לעניין ההזזה.

בתרגיל 3 הולכים מהזזה אל החוק ובדיקה בעזרת מחשב.

בתרגיל 4 הולכים מאחת התכונות המאפיינות (במקרה זה אסימפטוטה) אל החוק ובדיקה בעזרת מחשב.

בתרגיל 5 יוצאים מהגרף אל החוק. תרגיל 6 מהווה סיכום למשפחה של פונקציות החזקה הנוספות והזזות שלהן לאורך ציר y.

תרגיל 3

ב) החוק של הפונקציה המוזזת הוא : $y = \frac{1}{x^2} + 2$.

ג) ההבדלים בין שתי הפונקציות:

(i) משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר x שונה: $y = 0$ משוואת האסימפטוטה של $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 2$ משוואת האסימפטוטה של $y = \frac{1}{x^2} + 2$.

(ii) ערכי הפונקציה $y = \frac{1}{x^2}$ גדולים מאפס וערכי הפונקציה המוזזת גדולים מ- 2.

כסיכום להבדלים כדאי לומר שלמעשה הכל "זז" ב- 2 יחידות כלפי מעלה.

כדאי לדבר גם על המשותף בין שתי הפונקציות:

(i) ציר y אסימפטוטה אנכית בשתיהן.

(ii) יש להן אסימפטוטה אופקית.

(iii) הן חיוביות.

(iv) אין נקודות קיצון ואין נקודות חיתוך עם צירים.

(v) הן עולות עבור $x < 0$, ויורדות עבור $x > 0$.

ד) משוואות האסימפטוטות של $y = \frac{1}{x^2}$: $x = 0, y = 0$.

משוואות האסימפטוטות של $y = \frac{1}{x^2} + 2$: $x = 0, y = 2$.

משוואת האסימפטוטה המשותפת: $x = 0$.

תרגיל 4

ב) חוק הפונקציה המוזזת: $y = \frac{1}{x^2} - 4$.

ג) תכונות **מבדילות**:

- משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר x שונה: $y = 0$ משוואת האסימפטוטה של $y = \frac{1}{x^2}$, $y = -4$ משוואת האסימפטוטה של $y = \frac{1}{x^2} - 4$. כלומר בהזזה של $y = \frac{1}{x^2}$ יחידות כלפי מטה, גם האסימפטוטה זזה ב- 4 יחידות כלפי מטה.

- לפונקציה $y=\frac{1}{x^2}$ אין נקודות חיתוך עם ציר x, ולפונקציה $y=\frac{1}{x^2}-4$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x : $(0.5,0)$, $(-0.5,0)$

- הפונקציה $y=\frac{1}{x^2}$ חיובית לכל x בתחום הגדרתה, אך הפונקציה המוזזת שלילית בתחומים : $x > 0.5$ או $x < -0.5$ וחיובית בתחומים : $0 < x < 0.5$ או $-0.5 < x < 0$.

תרגיל 5

ב) החוק של הפונקציה המוזזת : $y=\frac{1}{x^3}-1$.

ג) - נקודת החיתוך של גרף הפונקציה המוזזת עם ציר x: $(1, 0)$.

- משוואות האסימפטוטות : $y=-1, x=0$.

תרגיל 6

תרגיל זה מהווה סיכום לנושא ההזזות מאחר ויש הרבה תשובות אפשריות.

דוגמאות אפשריות : $y=\frac{1}{x}+3$, $y=\frac{1}{x^2}+3$, $y=\frac{1}{x^3}+3$, $y=\frac{1}{x^4}+3$ ...

אפשר גם : $y=-\frac{1}{x}+3$, $y=-\frac{1}{x^2}+3$ ...

תרגילים 7 - 9 הם המהלך של פונקציות חזקה נוספות ללא מחשב.

תרגיל 7

תרגיל זה עוסק בשתי קבוצות של פונקציות החזקה, הפונקציות הזוגיות והפונקציות האי- זוגיות.

א) הכוונה שהתלמידים ינסו להתאים גרף לפונקציה, ויתכן וישתמשו לצורך זה בידע שלהם על פונקציות החזקה, כלומר שפונקציות עם מעריך זוגי הן סמטריות ביחס לציר y. במידה ולא יתאימו נכון, סעיף ב' עוזר ל"תקן" את ההתאמה.

גרף (i) מתאים לחוק $y=\frac{1}{x^2}$, גרף (ii) מתאים לחוק $y=\frac{1}{x^3}$.

ב) לבדיקת ההתאמה נבחרו שיעורי x שבהם בא לידי ביטוי ההבדל בין שתי הקבוצות של הפונקציות.

$y=\frac{1}{x^3}$	$y=\frac{1}{x^2}$	
-0.125	0.25	x = -2
8	4	x = 0.5

תרגיל 8

התרגיל עוסק בפונקציות מאותה משפחה: $y=\frac{1}{x^n}$, n זוגי.

כדאי לפתוח את התרגיל בהשוואה בין שני הגרפים המשורטטים.

תכונות **משותפות**:

- יש להן 2 אסימפטוטות, ציר x וציר y.
- הן חיוביות.
- הן עולות בתחום $x<0$, יורדות בתחום $x>0$.

תכונות **מבדילות**: מידת ההתקרבות לציר x ולציר y שונה וזאת למרות שהגרפים נראים כמעט זהים. הגרף של $y=\frac{1}{x^4}$ קרוב יותר לציר x עבור x-ים גדולים מאוד או קטנים מאוד, לעומת זאת הגרף של $y=\frac{1}{x^2}$ קרוב יותר לציר y עבור x - ים קרובים לאפס משני צידי ציר y.

א) למרות ההשוואה שהוצעה בפתיחה, יש קושי בהתאמת הגרף לחוק וייתכן והתלמידים יצליחו לעשות זאת רק אחרי סעיף ב', בעזרת הצבה בחוק (כפי שעשו בתרגיל 7 – ב').

הגרף הימני מתאים לחוק $y=\frac{1}{x^4}$. הגרף השמאלי מתאים לחוק $y=\frac{1}{x^2}$.

ב) - עבור $x=2$ ערך הפונקציה $y=\frac{1}{x^4}$ הוא $\frac{1}{16}=0.0625$.

- עבור $x = 2$ ערך הפונקציה $y = \frac{1}{x^2}$ הוא $0.25 = \frac{1}{4}$.

תרגיל 9

שאלה דומה לשאלה 8 רק הפונקציות הן מהמשפחה $y = \frac{1}{x^n}$, n אי-זוגי, לכן ניתן להשתמש בשיקולים דומים לאלה שנידונו בשאלה הקודמת.

א) הגרף הימני מתאר את גרף הפונקציה : $y = \frac{1}{x}$. הגרף השמאלי מתאר את גרף הפונקציה : $y = \frac{1}{x^3}$.

ב) - עבור $x = 2$ ערך הפונקציה $y = \frac{1}{x^3}$ הוא $0125 = \frac{1}{8}$.

- עבור $x = 2$ ערך הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ הוא $0.5 = \frac{1}{2}$

תרגילים 10 - 15 מיועדים לכל התלמידים גם לאלה שעשו את פעילות המחשב.

תרגילים 10 - 12 מסכמים את הנושא הנלמד הן מבחינת זיהוי הפונקציה כזוגית או אי-זוגיות והן מבחינת ההזזות.

תרגיל 10

הפונקציות הזוגיות : $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^4}$, $y = \frac{1}{x^{10}}$.

הפונקציות האי-זוגיות : $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^5}$, $y = \frac{1}{x}$.

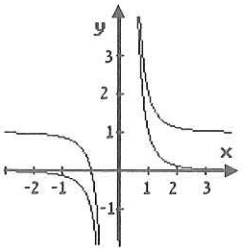
כדאי להדגיש שכל הפונקציות האי-זוגיות דומות בצורתן לפונקצית $y = \frac{1}{x}$ בה עסקנו בהרחבה בסעיף הקודם.

תרגיל 11

התלמידים משרטטים במערכת צירים (ללא מחשב) גרף של פונקציה שהיא הזזה של הפונקציה $y = \frac{1}{x^3}$ ובודקים אלו תכונות משתנות ואלו נשמרות.

אומנם התרגיל מסומן כתרגיל מפתח אך יכול להתבצע כעבודה עצמית.

א)



ב) $x = 0\ ,\ y = 1$.

הערה:

בספר יש טעות בסעיף זה, אמור להיות רשום "אסימפטוטות" ולא "אסימפטוטה".

ג) $(-1,\ 0)$ נקודת החיתוך עם ציר x. אין נקודת חיתוך עם ציר y.

תרגיל 12

תרגיל זה מהווה סיכום לנושא ההזזות ויש יותר מאשר תשובה אחת נכונה.

דוגמאות אפשריות: $y = \frac{1}{x^2} + 3\ ,\ y = \frac{1}{x^3} + 3\ ,\ y = \frac{1}{x^4} + 3\ \ldots$

אפשר גם: $y = -\frac{1}{x} + 3\ ,\ y = -\frac{1}{x^3} + 3\ \ldots$

תרגילים

תרגילים 13-15 מסכמים את הנושא של פונקציות החזקה מהצורה: $y = \frac{1}{x^n}$

ו- $y = x^n$, עבור n טבעי תוך שילוב החוק, הגרף, וחלק מהתכונות.

13. בתרגיל זה יש גם שיקופים של פונקציות מן הצורה $y = \frac{1}{x^n}$. המטרה להתרכז בתכונה של חיוביות/שליליות. אפשר בתרגיל זה גם למיין לפונקציות זוגיות ואי-זוגיות, ולהדגיש שתכונה של חיוביות לכל x מאפיינת

את הפונקציות הזוגיות מהצורה $y=\frac{1}{x^n}$ והתכונה של שליליות לכל x

מאפיינת את הפונקציות הזוגיות מהצורה $y=-\frac{1}{x^n}$.

אפשר לשרטט את הפונקציות הנתונות במחשב ולמיין בעזרת הגרפים המתקבלים.

(i) $y=\frac{1}{x^6}$,$y=\frac{1}{x^2}$ (ii) $y=-\frac{1}{x^4}$,$y=-\frac{1}{x^2}$

14. סיכום של התאמה של חוק לגרף.

(i) ד (ii) א (iii) ב (iv) ג (v) ו (vi) ה

תרגיל זה ניתן לבדיקה בעזרת מחשב.

15. תרגיל זה מהווה סיכום לקשר בין הפונקציות $y=x^n$ ל- $y=\frac{1}{x^n}$ כאשר n זוגי וכאשר n אי-זוגי.

כדאי לדון בקשר בין הפונקציה $y=x^4$ ל- $y=\frac{1}{x^4}$ וכן בקשר בין $y=x^7$ ל- $y=\frac{1}{x^7}$. כמו כן אפשר לבקש לשרטט בכל גרף שיקוף של הפונקציה בציר x ולרשום את החוק.

למורים:

בפרק הבא נתייחס לפונקציות $y=\frac{1}{x^n}$, n טבעי, גם בהקשר ל-$\frac{1}{f}$ כאשר f נתונה, במקרה זה $f(x)=x^n$.

פעולות אלגבריות והזזות (עמודים 42-46 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף קודם עסקנו בפונקציות שהן צרוף ליניארי של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ ופונקציות פולינום אותן אפשר לחקור, כלומר למצוא את נקודות הקיצון ו/ או את נקודות החיתוך עם ציר x. בסעיף זה נחקור פונקציות הנתונות כמנה של שני פולינומים ועל-ידי פישוט אלגברי ניתן לכתוב אותן כצרוף ליניארי של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ ופונקציות פולינום. בדרך זאת תלמידים יוכלו למצות את האסטרטגיות של חקירה שלמדו תוך כדי שילוב טכניקות אלגבריות פשוטות. כמו כן יוכלו לחקור חלק מפונקציות המנה בעזרת הנגזרת של $\frac{1}{x}$ מבלי להזדקק לכללי גזירה נוספים בסעיף גם מתרגלים את הפישוטים האלגבריים הנחוצים.

תרגיל 1

למורים:

התלמידים למעשה פגשו את הפונקציה $y=\frac{1+x}{x}$ כאשר הייתה רשומה בצורה $y=\frac{1}{x}+1$. המטרה בתרגיל שהתלמידים יווכחו שהפונקציה $y=\frac{x+1}{x}$ זהה לפונקציה $y=\frac{1}{x}+1$. הדבר נעשה על-ידי כך שהם משרטטים את גרף הפונקציה על-פי נקודות (הנקודות נבחרו כך שיתקבל החלק המאפיין של הפונקציה, וכדאי לדבר עם התלמידים על כך שהבחירה של הנקודות נעשתה באופן זה), ומזהים שהפונקציה היא הזזה של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ ביחידה אחת למעלה לאורך ציר y - גרף שראו בפרק הקודם.

א) תחום הגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

ב)

x	-3	-2	-1	-0.5	0.1	0	0.1	0.5	1	2	3
y	2/3	0.5	0	-1	-9	לא מוגדרת	11	3	2	1.5	4/3

הגרף המתקבל הוא הזזה של $\frac{1}{x}$ ביחידה אחת כלפי מעלה לאורך ציר y.

החוק הוא: $y=\frac{1}{x}+1$.

תרגיל 2

כדאי לציין לתלמידים את מטרת התרגיל, שהפישוט שבו אנו עוסקים בתרגיל זה יעזור לנו להגיע מפונקציות לא מוכרות לפונקציות מוכרות ,שאותן אנו יודעים לחקור. הדרך המוצעת בתרגיל היא על-ידי שימוש בחוק הפילוג, אבל ייתכן שתלמידים/מורים יעדיפו לעבוד באופן הבא: $\frac{4x+1}{x}=\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}=4+\frac{1}{x}$.

יש לציין שהחיסרון בדרך הזו הוא שתלמידים נוטים לבצע את הטכניקה הזו גם במקרה של התבנית $\frac{x}{4x+1}$ שבודאי אינה נכונה. לכן חשוב להדגיש שהמשותף לכל התבניות הנתונות שבמכנה יש איבר אחד, והסכום או ההפרש מופיע במונה.

א) $3x+4$ ב) $3+\frac{1}{x}$ ג) $\frac{1}{x}-2$ ד) $3-\frac{1}{x}$

תרגיל 3

משתמשים בטכניקה האלגברית של הוצאת גורם משותף (או בדרך שהוצעה למעלה) על-מנת להראות את הזהות של הפונקציה $y=\frac{x+1}{x}$ מתרגיל 1 עם הפונקציה $y=\frac{1}{x}+1$.

א) $y=\frac{1+x}{x}=\frac{1}{x}(1+x)=\frac{1}{x}+1$.

ב) $y=3x+4$ היא הזזה של $y=3x$ ב- 4 יחידות כלפי מעלה.

$y=3+\frac{1}{x}$ היא הזזה של $y=\frac{1}{x}$ ב- 3 יחידות כלפי מעלה.

$y=\frac{1}{x}-2$ היא הזזה של $y=\frac{1}{x}$ ב- 2 יחידות כלפי מטה.

$y=3-\frac{1}{x}$ היא הזזה של $y=-\frac{1}{x}$ ב- 3 יחידות כלפי מעלה.

תרגיל 4

בתרגיל זה מפשטים את תבנית הפונקציה הנתונה ואחר-כך מניחים את הגרף השקוף באופן שיתאר את ההזזה המתאימה לפונקציה המפושטת. כדאי להזכיר לתלמידים שאפשר לבדוק על-ידי קריאת נקודה בפונקציה המוזזת והצבה בחוק הפונקציה כדי לאמת את ההתאמה.

א) $y=\frac{1}{x}+3$ היא הזזה של $y=\frac{1}{x}$ ב- 3 יחידות כלפי מעלה.

ב) $y=2+\frac{1}{x}$ היא הזזה של $y=\frac{1}{x}$ ב- 2 יחידות כלפי מעלה.

ג) $y=\frac{1}{x}-2$ היא הזזה של $y=\frac{1}{x}$ ב- 2 יחידות כלפי מטה.

ד) $y=\frac{1}{x}-1$ היא הזזה של $y=\frac{1}{x}$ ביחידה אחת כלפי מטה.

תרגיל 5

מטרת התרגיל היא להראות שטכניקת הפישוט מאפשרת את הגזירה של הפונקציה על בסיס ידיעת הנגזרת של הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ ונגזרת של סכום של פונקציות, ולכן ניתן לחקור את הפונקציה הנתונה .

א) אין לפונקציה נקודת חיתוך עם ציר y כי אי-אפשר להציב $x=0$.

אין לפונקציה נקודת חיתוך עם ציר x כי למשוואה : $1+x^2=0$ אין פתרון.

ב) $y=\frac{1}{x}+x$, $y'=-\frac{1}{x^2}+1$

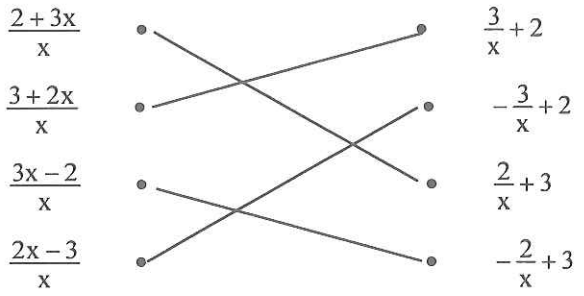
(1,2) נקודת מינימום , (-1, -2) נקודת מקסימום.

בסכום התרגיל אפשר לחזור לתרגיל 19 (בעמוד 31 בספר) בו עסקנו בשאלה הקשורה לאותו חוק.

כדאי לחזור לחוק הפונקציה הנתונה, כדי להדגיש שאלמלא הפישוט שהצענו אין לנו הכלים לגזור.

6. למורים:

הפונקציות שמתקבלות הן מתיחה של $f(x)=\frac{1}{x}$ והזזה ו/או שיקופה (נושא שלא נלמד עדיין), ולכן אי-אפשר לבקש מהתלמידים לתאר באופן גרפי את הפונקציות המתקבלות. אפשר לחזור לתרגיל זה אם מלמדים בהמשך מתיחות של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.



7. א) $y = 0.5 - 0.5x$, פונקציה קווית.

ב) $y=4-\frac{1}{x}$, הזזה של $y=-\frac{1}{x}$.

ג) $y=\frac{1}{x}+1.5$, הזזה של $y=\frac{1}{x}$.

ד) $y=x+1$, פונקציה קווית.

ה) $y=5-\frac{1}{x}$, הזזה של $y=-\frac{1}{x}$.

ו) $y=\frac{1}{x}-1$, הזזה של $y=\frac{1}{x}$.

8. בתרגיל זה הפישוט שונה משאר התרגילים מאחר ומתקבל הביטוי $\frac{1}{x}-\frac{2x^3}{x}$, שהוא $\frac{1}{x}-x^2$, ולכן מומלץ לבצע אותו יחד עם התלמידים.

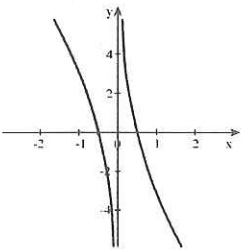
כדאי להיעזר במערכת צירים ובסימון הנקודה החשודה ושתי נקודות משני צידי הנקודה החשודה (אך מאותו צד של ציר y), כדי לקבוע את סוג הקיצון: הנקודה החשודה (-2.38, -0.6) ושיעורי נקודות נוספות: (-3,-1), (-2.5,-0.5). לכן (-2.38 , -0.63) היא נקודת מקסימום, והיא נקודת הקיצון היחידה.

9. א) תחום הגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

ב) $(0.5\ ,\ 0)$, $(0\ ,\ -0.5)$ נקודות חיתוך עם ציר x. אין נקודת חיתוך עם ציר y.

ג) נגזרת הפונקציה : $y' = -\frac{1}{x^2} - 4$. אין נקודות קיצון, כי הנגזרת שלילית לכל x בתחום.

ד)



ה) אין לפונקציה תחומי עליה. הפונקציה יורדת כאשר $x > 0\ ,\ x < 0$.

אחרי החקירה אפשר לשאול על ההבדל בין הפונקציה הנתונה לפונקציה, $y = \frac{1+4x^2}{x}$ הכוונה היא שלפונקציה זו יש נקודות קיצון ואין נקודות חיתוך עם ציר x, כאשר לפונקציה הנתונה אין נקודות קיצון ויש נקודות חיתוך עם ציר x.

עוד הזזות ושיקופים של $y = \frac{1}{x}$ (עמודים 47-52 בספר לתלמיד).

סעיף זה עוסק בהזזות ימינה או שמאלה לאורך ציר ה-x, של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

עסקנו בהזזות ימינה ושמאלה בפונקציות ריבועיות ופונקציות טריגונומטריות אבל לא יצרנו את הקשר בין ההזזה לתבנית. למשל, שרטטנו את הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x$ וראינו שהיא הזזה ימינה לאורך ציר x ב- 2 יחידות של $g(x) = x^2 - 4$ (כלומר $f(x) = g(x-2)$). התלמידים **לא** נתבקשו להזיז את $g(x)$ ב- 2 יחידות ולרשום את החוק.

בסעיף זה אנו מקשרים, בפעם הראשונה, בין התבניות של הפונקציה המקורית $f(x) = \frac{1}{x}$ והפונקציות המוזזות ימינה או שמאלה.

$f(x+a)$ היא הזזה של $f(x)$ ימינה a יחידות לאורך ציר x, עבור $a < 0$, או שמאלה עבור $a > 0$. הקושי העיקרי של התלמידים הוא לזהות את כיוון ההזזה, כי באופן אינטואיטיבי a חיובי מזוהה עם הזזה ימינה ו- a שלילי מזוהה עם הזזה שמאלה.

מהלך הסעיף

בהתחלה, הזזות הפונקציה מתבצעות בעזרת הגרף השקוף, כאשר החוק של הפונקציה המוזזת נתון ועל התלמידים לבדוק את ההתאמה בין הגרף המוזז והחוק הנתון. הבדיקה יכולה להיעשות בעזרת האסימפטוטה, בעזרת נקודת אי-ההגדרה, בעזרת נקודת חיתוך עם ציר y או בעזרת הצבת נקודות שמקיימות את החוק ונמצאות על גרף הפונקציה.

לאחר מכן מתבקשים התלמידים לבצע את ההזזה ולמצוא בעצמם את החוק המתאים.

תרגיל 1

מטרת התרגיל היא להראות שכיוון ההזזה הוא ימינה בניגוד לצפוי. בהזזה של $y=\frac{1}{x}$ ב- 2 יחידות ימינה (לאורך ציר x), מתקבל (בניגוד לצפוי) החוק $y=\frac{1}{x-2}$ ועל התלמידים לאמת בעזרת התכונות של הגרף המתקבל את התאמתו לחוק (נקודת אי-ההגדרה ומשוואת האסימפטוטה עוזרות להתאים), וזה בהבדל למה שעשו בהזזות לאורך ציר y , שם רשמו את החוק.

ב) הפונקציה לא מוגדרת עבור $x=2$.

ג) אסימפטוטה המקבילה לציר y: $x=2$. אסימפטוטה המקבילה לציר x: $y=0$.

ד) (0,-0.5) היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה g עם ציר y. אפשר בסעיף זה לקרוא את שיעורי הנקודה מהגרף ולאמת זאת על-ידי הצבה בתבנית.

לסיכום תרגיל זה רצוי לדבר על תכונות נוספות של הפונקציה g כמו: עליה/ירידה, נקודות חיתוך עם ציר x והיעדר נקודות קיצון.

תרגיל 2

מטרת התרגיל זהה לתרגיל 1 , רק שכאן (i) עוסקים בהזזה שמאלה.(ii) נקודת המוצא היא התבנית, בעזרתה בונים טבלה (סביב נקודת אי-ההגדרה), ובונים את גרף הפונקציה. (iii) לבסוף עוסקים בהזזה בעזרת הדף השקוף (לעומת תרגיל 1 שבו מזיזים תחילה) .

א) תחום ההגדרה של הפונקציה $x\neq -3$.

ב)

x	-3.5	-3.1	-3	-2.9	-2.5
y	-2	-10	לא מוגדרת	10	2

- כאשר ערכי x מתקרבים ל -3 משמאל , ערכי הפונקציה הולכים וקטֵנים.

כאשר ערכי x מתקרבים ל -3 מימין , ערכי הפונקציה הולכים וגדֵלים.

- משוואת האסימפטוטה : $x = -3$.

ג) נקודות נוספות שעל גרף הפונקציה : $(2,\frac{1}{5})$, $(1,\frac{1}{4})$, $(-1,\frac{1}{2})$, $(-2,1)$, $(-4,-1)$

ד) הפונקציה שהתקבלה היא הזזה שמאלה של $y=\frac{1}{x}$ ב- 3 יחידות.

תרגיל 3

תרגיל זה מיועד לטפח מיומנות של מציאת נקודות אי-הגדרה בתבניות של פונקציות מנה שונות. פרט לסעיף ג' נעסוק בפונקציות כאלה בהמשך, כאשר הנגזרת נתונה.

תחום ההגדרה : א) $x \neq 4$ ב) $x \neq 2$ ג) $x \neq -1$ ד) $x \neq \frac{1}{2}$

תרגילים

4. תרגיל זה דומה לתרגיל 2 אלא שאין כאן תמיכה של טבלה. כדי לבסס את ההרגל של בדיקת ההתאמה בעזרת נקודות אי-ההגדרה או נקודות אחרות. רצוי לדון בזאת בכיתה ככל הנדרש.

א) הפונקציה $y=\frac{1}{x-1}$ לא מוגדרת עבור $x = 1$. הגרף $y=\frac{1}{x}$ זז יחידה אחת לאורך ציר x .

ב) הפונקציה $y=\frac{1}{x+2}$ לא מוגדרת עבור $x = -2$. הגרף $y=\frac{1}{x}$ זז 2 יחידות שמאלה לאורך ציר x .

5. תרגיל דומה לתרגיל 3, העוסק במציאת תחום הגדרה של פונקציות מנה.

א) $x \neq -1$ ד) $x \neq 2$

ב) $x \neq -1$ ה) $x \neq 0$

ג) $x \neq -2$ ו) $x \neq 1$

6. בתרגיל זה עוסקים בשני סוגי ההזזות שטפלנו בהם בשני הסעיפים הקודמים (ימינה/שמאלה, למעלה/למטה) וגם בשילובן.

התלמידים צריכים לבצע את ההזזה (כמו בתרגיל 1) אך הפעם מתבקשים למצוא את החוק בעצמם. דרישה כזאת לא הייתה בתרגילים קודמים בגלל הקושי לבצעה, אך כאן, אחרי שהתנסו בהזזות ובחוקים ונרכשו כלים לבדיקת ההתאמה, קל להם יותר למצוא את החוקים.

א) $y = \frac{1}{x-2}$ ב) $y = \frac{1}{x} + 1$ ג) שילוב שני סוגי ההזזות: $y = \frac{1}{x-2} + 1$

מומלץ לדון בכיתה בטעויות האפשריות: בעוד שהזזה לאורך ציר y מבוטאת בתבנית כצפוי (חיובי- הזזה למעלה, שלילי- הזזה למטה), ההזזה לאורך ציר x לא. כדאי להמליץ לתלמידים לבדוק את תשובותיהם על-ידי הצבה של נקודות.

7. בתרגיל משלבים שיקוף והזזות ימינה ושמאלה של הפונקציה $y = \frac{1}{x}$.

בתרגיל זה ההתאמה בין חוק לגרף לא יכולה להתבסס רק על זיהוי נקודת אי ההגדרה שהיא זהה בפונקציות שבסעיפים (i) ו- (ii) וכן בפונקציות שבסעיפים

(iii) ו- (iv). אי לכך מתבקשת בדיקה נוספת, למשל בדיקה בעזרת הצבת שיעורי נקודות בתבנית.

תחום ההגדרה: (i) $x \neq -2$ (ii) $x \neq -2$ (iii) $x \neq 2$ (iv) $x \neq 2$.

התאמת חוק לגרף: (i) $\leftrightarrow$ ג, (ii) $\leftrightarrow$ ד, (iii) $\leftrightarrow$ א, (iv) $\leftrightarrow$ ב.

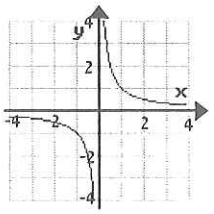
8. בתרגיל זה התלמידים צריכים ליישם את כל מיומנויות ההזזה שנלמדו עד כה.

א) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x \neq -2$.

ב) (i) הזזה שמאלה בשתי יחידות לאורך ציר x והזזה כלפי מטה ביחידה אחת לאורך ציר y.

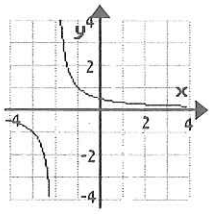
(ii) שרטוט הגרף: אפשר להיעזר בדף שקוף ולהניחו על מערכת הצירים כך שיתאר את החוק, או אפשר לשרטט את גרף הפונקציה לפי השלבים הבאים:

- שרטוט סקיצה של $y = \frac{1}{x}$. כדי להקל על השרטוט רצוי להציע לתלמידים להציב ולסמן נקודות "עוגן" למשל (1, 1) , (-1, -1) ולהיעזר בצירים כאסימפטוטות.

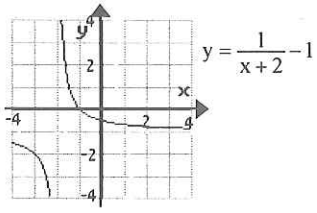


- שרטוט הפונקציה המוזזת: $y = \frac{1}{x+2}$: כדאי לזהות תחילה את נקודות אי- ההגדרה ($x = -2$) ובעזרתה את האסימפטוטה ולהזיז את

הנקודות $(1, 1)$, $(-1, -1)$ (שעל גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$) ב- 2 יחידות שמאלה. מתקבלות הנקודות : $(-1, 1)$, $(-3, -1)$.



- שרטוט גרף שהוא הזזה של $y = \frac{1}{x+2}$ ביחידה אחת כלפי מטה לאורך ציר y.



ג) $(0,-0.5)$ היא נקודת החיתוך עם ציר y, $(-1, 0)$ היא נקודת החיתוך עם ציר x .

ד) משוואות האסימפטוטות : $x = -2$, $y = -1$.

קצת "מתיחות" (עמודים 53-67 בספר לתלמיד).

הסעיף עוסק במשפחה של פונקציות מהצורה: $y=\frac{a}{x}$ כאשר $a>1$ מתקבלת מתיחה של גרף הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ לאורך ציר y, וכאשר $0<a<1$ מתקבל כיווץ לאורך ציר y. כאשר $a<-1$ מתקבל שיקוף בציר x ומתיחה של $y=\frac{1}{x}$, וכאשר $-1<a<0$ מתקבל שיקוף בציר x וכיווץ של $y=\frac{1}{x}$. בעצם, אפשר להתייחס לכיווץ לאורך ציר y, למשל $y=0.5\cdot\frac{1}{x}$, כאל מתיחה לאורך ציר x (כי $y=0.5\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$). כנ"ל למתיחה לאורך ציר y כאל כיווץ לאורך ציר x (כי $y=\frac{2}{x}=\frac{1}{0.5x}$).

במילה "מתיחות" אנו מתכוונים הן למתיחה והן לכיווץ של הפונקציה $y=\frac{1}{x}$.

בסעיף זה מתייחסים רק למתיחה וכיווץ לאורך ציר y. נוח יותר לגזור את הפונקציה $y=\frac{1}{2x}$ כאשר רושמים בצורה $y=0.5\cdot\frac{1}{x}$ או $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$.

מהלך הסעיף

מתחילים ב"מתיחה" של הפונקציה $y=\frac{1}{x}$. משרטטים את הגרף על-פי נקודות נתונות שמאפיינות את הגרף. בעזרת גרף שקוף של $y=\frac{1}{x}$ (או בעזרת $y=\frac{1}{x}$ המשורטטת) משווים בין גרף ה"מתיחה" לגרף של $y=\frac{1}{x}$ (תרגילים 1, 2).

אחרי הכרת הפונקציות מהמשפחה $y=\frac{a}{x}$, התלמידים לומדים על הנגזרת של משפחה זאת כמכפלה של קבוע בנגזרת של $y=\frac{1}{x}$. בהמשך חוקרים פונקציות $y=\frac{a}{x}$ הוא אחד מהמחוברים, או פונקציות רציונליות שניתן לרשום אותן כסכום של פונקציות שאחד מהמחוברים הוא $y=\frac{a}{x}$.

בסוף הסעיף פותרים בעיות קיצון בהן מתקבלות פונקציות שחקרו קודם.

תרגיל 1

משרטטים את גרף הפונקציה $y=\frac{2}{x}$ על-פי נקודות המתארות את החלק האופייני של הפונקציה. כדאי לדון עם התלמידים על בחירת הנקודות שבעזרתן

משרטטים גרף של הפונקציה. במרכז הטבלה מופיעה נקודת אי-ההגדרה ומכל צד נקודות הנמצאות על אחד הענפים של הפונקציה.

כדי לדייק יותר בשרטוט כדאי להוסיף תאור התנהגות של הפונקציה עבור ערכי x גדולים מאוד או קטנים מאוד, וכן לתאר את ערכי הפונקציה עבור ערכים קרובים ל- $x = 0$.

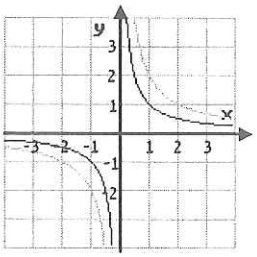
לבסוף, מסכמים יחד עם התלמידים את תכונות הפונקציה: אין נקודות קיצון, יורדת לכל $x > 0$ או $x < 0$, אין חיתוך עם הצירים, משוואות האסימפטוטית: $x = 0$, $y = 0$, הפונקציה חיובית עבור $x > 0$ ושלילית עבור $x < 0$, והפונקציה אי-זוגית.

למעשה התיאור הזה מתאים גם לפונקציה $y = \frac{1}{x}$ לכן אפשר לשאול: מה ההבדל בין שתי הפונקציות , והתשובה לשאלה היא הכנה לסעיף הבא.

א)

x	-4	-2	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1	2	4
y	-0.5	-1	-2	-4	-8	לא מוגדרת	8	4	2	1	0.5

ב) כאשר הגרפים $y = \frac{2}{x}$ ו- $y = \frac{1}{x}$ מונחים על אותה מערכת צירים ניתן להבחין בהבדלים הקטנים.



עבור $x > 0$ ערכי הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ קטנים מערכי הפונקציה $y = \frac{2}{x}$.

עבור $x < 0$, ערכי הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ גדולים מערכי הפונקציה $y = \frac{2}{x}$.

בעזרת שרטוט קוים ישרים מקבילים לציר y אפשר לראות כיצד באה לידי ביטוי ה"מתיחה". את מידת המתיחה המדויקת רואים בטבלה ולא בגרף.

אפשר להוסיף תרגיל בעזרת מחשב לשרטוט מספר פונקציות מהמשפחה $y = \frac{a}{x}$.

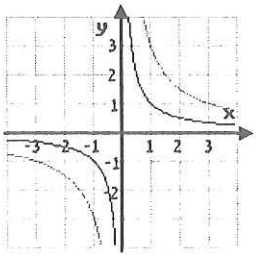
תרגיל 2

מטרת התרגיל לעסוק בגרפים של פונקציות שונות מהמשפחה $y=\frac{a}{x}$ ולהשוותם לגרף הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ המשורטט בכל אחת ממערכות הצירים. שרטוט של ארבע פונקציות (כולל הפונקציה משאלה 1) מאפשר להבחין בהשפעת הפרמטר a על הפונקציה $y=\frac{1}{x}$. כאשר $a>0$ השינוי בגרף בולט יותר לעין מאשר במקרים של $a<0$ שבהן קשה לראות את ההשפעה שלו על $y=\frac{1}{x}$ מאחר ומתבצעות כאן שתי פעולות "מתיחה" ושיקוף. מומלץ, בסעיף ג', לשרטט את הגרף של הפונקציה $y=-\frac{1}{x}$ כדי לראות שהפונקציה $y=-\frac{2}{x}$ היא מתיחה שלה.

גם כאן (כמו בשאלה 1 נעזרים בנקודות משני צידי נקודת אי ההגדרה

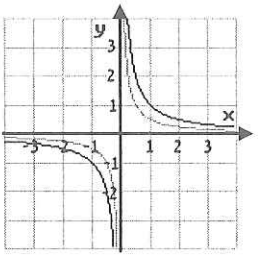
א) (3,1) ,(1,3), (0.75,4)

(-3,-1), (-1,-3), (-0.75,-4)



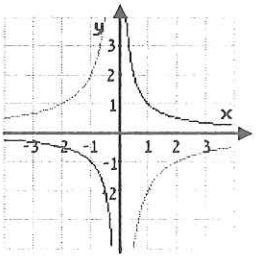
ב) (2,0.25) ,(1,0.5), (0. 5,1)

(-2,-0.25) ,(-1,-0.5), (-0. 5,-1)



ג) (4,-0.5) ,(2,-1), (1,-2),(0.5,-4)

(-4, 0.5) ,(-2, 1), (-1, 2),(-0.5,4)



תרגיל 3

התרגיל עוסק בנגזרת של הפונקציה $y=\frac{a}{x}$ מתבססים כאן על ההכללה של מה שהתלמידים יודעים על פונקציה מהצורה $y = a\cdot x^n$, כלומר שנגזרתה היא :

$y' = a\cdot(x^n$ של נגזרת$)$.

א) נגזרת הפונקציה $y=\frac{3}{x}$ היא : $y'=3\cdot(-\frac{1}{x^2})=-\frac{3}{x^2}$

ב) יש לרשום כפי שנעשה בסעיף א' ואז לגזור. לפניכם דוגמה .

$$y=\frac{-3}{x}=-3\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow y'=-3\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{3}{x^2}$$

אפשר להוסיף תרגיל גזירה מהצורה : $y=\frac{1}{2x}$.

$$y=\frac{1}{2x}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{2x^2}$$

תרגיל 4

תכונת הפונקציה $y=\frac{4}{x}$ נלמדות כאן תחילה על סמך הנגזרת (לעומת תרגילים 1 ו- 2 שבהן התרכזנו בשרטוט הגרף על-פי נקודות).

א) נגזרת הפונקציה $y=\frac{4}{x}$ היא : $y'=-\frac{4}{x^2}$.

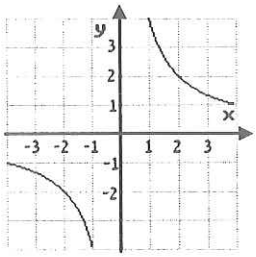
ב) אין לפונקציה נקודות קיצון כי הנגזרת אינה מתאפסת.

ג) הפונקציה יורדת בכל אחד מתחומי הגדרתה (עבור $x>0$, $x<0$).

ד) התכונות שהתקבלו מסעיפים א'- ג' עדיין לא מספיקות כדי לקבל תמונה שלמה של גרף הפונקציה , לכן נעזרים בנקודות.

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
y	-1	-2	-4	-8	לא מוגדרת	8	4	2	1

ד)



ה) משוואות האסימפטוטות :

$x = 0 \ , \ y = 0$.

תרגיל 5

התרגיל עוסק במיומנויות הגזירה של פונקציות שאחד מהמחוברים הוא : $\frac{a}{x}$

א) $y' = -\frac{4}{x^2} + 5$ ד) $y' = \frac{3}{x^2} + 2$

ב) $y' = -\frac{7}{x^2} + 6x$ ה) $y' = -\frac{4}{x^2} - 1$

ג) $y' = -\frac{6}{x^2} + 1$ ו) $y' = \frac{1}{x^2} + 12x$

אפשר להוסיף גם גזירה של פונקציות מהצורה : $y = \frac{6 + x^2}{x}$, $y = \frac{x^2 + 1}{2x}$

תרגיל 6

מתרגלים פתרון משוואות מסוג שיידרש בחקירות בהמשך.

א) $x = 6 \ , \ x = -6$ ד) $x = 2$

ב) $x = 2 \ , \ x = -2$ ה) $x = -2$

ג) אין פתרון ו) $x = 0.71 \ , \ x = -0.71$

בתרגילים 7-8 חוקרים פונקציות מהצורה $y = \frac{a}{x} + bx$. אם a. ו- b בעלי אותו סימן יש לפונקציה שתי נקודות קיצון ואין נקודות חיתוך עם ציר x. אם a. ו- b בעלי סימנים מנוגדים, אין לפונקציה נקודות קיצון ויש שתי נקודות חיתוך עם ציר x. כאן מתמקדים בהתנהגות הפונקציה בסביבת נקודת אי-ההגדרה ורק

אחר-כך בודקים נקודות קיצון. זה בשונה ממה שעשינו בתחילת החקירה של פונקציות מסוג זה (בסעיף "אחת מהמשפחה $f(x)=\frac{1}{x}$"), שם התמקדנו באפיון נקודות הקיצון .

בתרגיל 7 אין לפונקציה נקודות קיצון ויש נקודות חיתוך עם ציר x, ובתרגיל 8 יש לפונקציה נקודות קיצון ואין נקודות חיתוך עם ציר x.

ניתן להוסיף תרגילים בהם הפונקציות הן הזזה של הפונקציות $y=\frac{a}{x}+bx$ לאורך ציר y, כלומר פונקציות מן הצורה $y=\frac{a}{x}+bx+c$. גם לפונקציות אלו אפשר לבקש למצוא נקודות חיתוך עם ציר x.

תרגיל 7

א) תחום הגדרה של הפונקציה : $x\neq 0$.

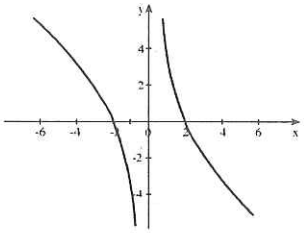
ב)

x	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5
y	-7.5	-39.9	לא מוגדרת	39.9	7.5

- כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x=0$ מימין, ערכי הפונקציה הולכים וגדלים.

ג) $(2,0)$, $(-2,0)$ הן נקודות החיתוך עם ציר x.

ה)



אין נקודת חיתוך עם ציר y.

ד) $y'=-\frac{4}{x^2}-1$ הנגזרת שלילית , לכן אין פתרון למשוואה $-\frac{4}{x^2}-1=0$, כלומר אין נקודות חשודות.

ו) משוואת האסימפטוטה : $x=0$.

ז) הפונקציה יורדת עבור $x>0$, $x<0$.

תרגיל 8

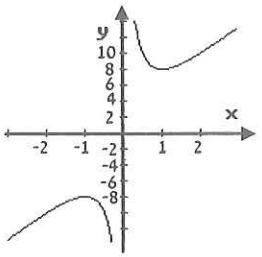
א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

ב)

x	-0.5	-0.01	0	0.01	0.5
y	-10	-400.04	לא מוגדרת	400.04	10

- בדומה לפונקציה שבתרגיל 7, כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 0$ מימין, ערכי הפונקציה הולכים וגדֵלים. כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 0$ משמאל , ערכי הפונקציה הולכים וקטֵנים.

ג , ד) בשונה מהפונקציה שבתרגיל הקודם ,
אין נקודות חיתוך עם הצירים,
אך יש שתי נקודות קיצון והן : (1, 8) נקודת מינימום, (-1, -8) נקודת מקסימום.



תרגילים 9- 10 הם הכנה לחקירה הנדרשת בתרגיל 11.

בתרגיל 9 מתרגלים כתיב של פונקצית מנה כסכום של פונקציות בהן ניתן לגזור כל אחד מהמחוברים. בתרגיל 10 מתרגלים פתרון של משוואות המתקבלות בחיפוש אחר נקודות חיתוך עם ציר x.

תרגיל 9

א) $y = \frac{2}{x} - 3$, $y' = -\frac{2}{x^2}$ ג) $y = 4 - \frac{2}{x}$, $y' = \frac{2}{x^2}$

ב) $y = \frac{6}{x} + 2x - 1$, $y' = -\frac{6}{x^2} + 2$ ד) $y = 6x^2 + \frac{2}{x}$, $y' = 12x - \frac{2}{x^2}$

תרגיל 10

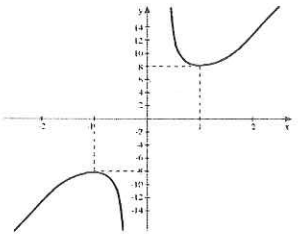
בתרגיל זה פותרים משוואות שהן מנה של שתי פונקציות. כדאי להדגיש שמנה שווה לאפס, כאשר המונה מתאפס בתנאי שהמכנה אינו מתאפס באותו ערך של x.

א) $x = -0.5$ ג) אין פתרון

ב) $x = 2$, $x = -2$ ד) $x = 4$, $x = -1$

תרגיל 11

בתרגיל זה יש חקירה שלמה ללא הדרכה לפישוט החוק ולכל אחד משלבי החקירה. כדי להשלים את שרטוט גרף הפונקציה ,בסעיף ד', יש צורך להוסיף נקודות המתארות את התנהגות הפונקציה בסביבת נקודת אי ההגדרה.



א) תחום ההגדרה : $x \neq 0$.

ב) אין נקודות חיתוך עם הצירים.

ג) $(1, 4)$ נקודת מינימום,

$(-1, -4)$ נקודת מקסימום.

תרגילים 12-14 הן בעיות קיצון. בכל אחת מהבעיות מתחילים בדוגמאות מספריות ויש הדרכה לבנית הפונקציה אותה יש לחקור כדי לפתור את הבעיה. באופן דומה עסקנו בבעיות קיצון קודמות בספרים אחרים: מסלולים היקפים ושטחים, פונקציות ותבניות ריבועיות ומבוא לאנליזה. רק כאן בנוסף התלמידים יכולים לגזור את הפונקציה ולכן יכולים לבצע את כל שלבי החקירה.

תרגיל 12

בבעיה זו מוצאים, מבין כל המלבנים ששטחם נתון (36 יחידות ריבועיות), את המלבן שהיקפו מינימלי. הבעיה הזו נחקרה בספר "מסלולים היקפים ושטחים" בעזרת גרף נתון, ובספר "מבוא לאנליזה" בעזרת הנגזרת הנתונה. אך כאן התלמידים מתבקשים לבצע את כל שלבי החקירה.

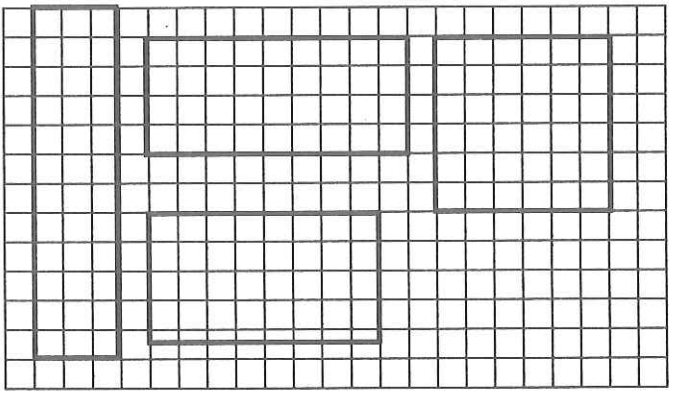
סעיפים א'-ב' מיועדים להתמודד עם הבעיה עצמה ולקבל תחושה של השתנות אורך צלעות המלבן ובעקבות זאת השתנות ההיקף של מלבנים בעלי שטח נתון. בסעיפים ג' - ד' בונים את פונקצית ההיקף וחוקרים אותה.

חשוב להדגיש את ההבדל בין התחום של הפונקציה המתקבלת לתחום של הבעיה ($x > 0$). הבחנה זאת באה לידי ביטוי בסעיף ד' ,כאשר מתבקשים למצוא

את אורך הצלע x עבורו מתקבל המלבן בעל ההיקף המינימלי, וכן לשרטט את המלבן המינימלי ,ואז יש לפסול את אחד הפתרונות כבלתי רלוונטי לנתוני הבעיה.

כדי לאפיין את הנקודה החשודה המתאימה לתחום הבעיה, תלמידים בוחרים נקודה מימין ונקודה משמאל ומסמנים במערכת צירים. ייתכן שבשלב הזה יהיו תלמידים שיסתכלו במהות הגדלים שמתקבלים בחישוב הנקודות מימין ומשמאל ויקבעו את אופיה של הנקודה החשודה, ללא צורך בסימון במערכת צירים.

א) משורטטים לדוגמה מספר מלבנים. רצוי לעודד תלמידים למצוא מלבנים שאורך צלעותיהם לא שלם (למשל 4.5,8) ,כדי להדגיש את האופי הרציף של הבעיה.

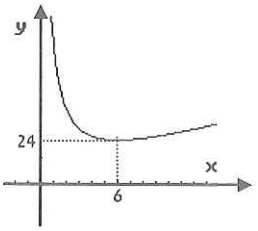


ב) צלע שנייה : 18 יחידות. היקף המלבן : 40 יחידות.

ג) הצלע השנייה : $\frac{36}{x}$, היקף המלבן : $k(x) = 2(x+\frac{36}{x}) = 2x+\frac{72}{x}$

ד) עבור $x = 6$ מתקבל ריבוע שהיקפו 24 יחידות, וזהו המלבן בעל ההיקף המינימלי.

בתרגיל לא מבקשים לשרטט את גרף הפונקציה , אך מומלץ להוסיף אותו במהלך הפתרון , כדי לתת תחושה להשתנות המלבנים.



תרגיל 13

בעיה זו זהה לבעיה של התרגיל הקודם : מציאת היקף מינימלי של צורות בעלות שטח נתון. אך הפעם חוקרים תחילה את השתנות אחת הצלעות כפונקציה של השנייה ($y=\frac{18}{x}$) . חקירה זאת מאפשרת לקבל, על אותה מערכת צירים, לא רק את גרף הפונקציה אלא את המלבנים עצמם. הקושי נובע מכך שאין אנו מחפשים מינימום של הפונקציה המשורטטת אלא של פונקציה אחרת , פונקצית ההיקף , אותה יש לבנות.

בסעיפים ג' - ה' בודקים דוגמאות פרטיות של מציאת הצלעות מהגרף הנתון, ומחשבים את השטח וההיקף. התרגיל נועד להדגיש, בעזרת נקודות בודדות, את הקשר בין השתנות אורכי הצלעות להיקפי המלבנים המתקבלים באותו גרף.

משרטוט מלבנים בגרף של $y=\frac{18}{x}$ מקבלים את התחושה שעבור x גדול מאד או x קרוב מאד ל- 0 ההיקפים גדולים מאד. לאחר מכן בונים את פונקצית ההיקף וחוקרים אותה (סעיף ו').

א) כאשר אורך אחת הצלעות 2 ס"מ, אורך הצלע השנייה 9 ס"מ.

כאשר אורך אחת הצלעות 4 ס"מ, אורך הצלע השנייה 4.5 ס"מ.

ב) $y=\frac{18}{x}$

ג) (i) $A(1,18)$. (ii) אורך האנך לציר y מייצג צלע שאורכה יחידה אחת.

(iii) אורך האנך לציר x מייצג צלע שאורכה 18 יחידות.

(iv) שטח המלבן 18 סמ"ר. (v) היקף המלבן 38 ס"מ.

ד) (i) B(6, 3). (ii) אורכי הצלעות: 6 ס"מ, 3 ס"מ. (iii) שטח המלבן 18 סמ"ר.

(iv) היקף המלבן 18 ס"מ.

ה) שטח המלבן 18 סמ"ר. ההיקף 73 ס"מ.

ו) (i) $M(x,\frac{18}{x})$ (ii) צלע אחת x, צלע שנייה $\frac{18}{x}$. (iii) ההיקף: $y=2x+\frac{36}{x}$.

(iv) $x=\sqrt{18}=$ 4.24 ס"מ המלבן המתקבל הוא ריבוע.

(v) ההיקף המינימלי: $4\cdot\sqrt{18}=$ 16.96 ס"מ.

תרגיל 14

בעיית הקיצון כאן עוסקת בהשתנות של שטח פנים של תיבה שנפחה נתון. בעיה דומה מופיעה בספר "מבוא לאנליזה", שם חוק הפונקציה וחוק הנגזרת נתונים. כדאי לחזור על נפח ושטח פנים של תיבה לפני שפותרים את השאלה.

א) כאשר אורך צלע הבסיס הוא 2 ס"מ, גובה התיבה 54 ס"מ. שטח פני התיבה: 440 סמ"ר.

ב) כאשר אורך צלע הבסיס הוא 2 ס"מ, גובה התיבה 24 ס"מ. שטח פני התיבה: 306 סמ"ר.

ג) גובה התיבה $\frac{216}{x^2}$. שטח פנים התיבה: $y=4(\frac{216}{x^2}\cdot x)+2x^2=\frac{864}{x}+2x^2$

ד) אם אורך צלע הבסיס 1 ס"מ, הגובה 216 ס"מ, שטח הפנים: 866 סמ"ר.

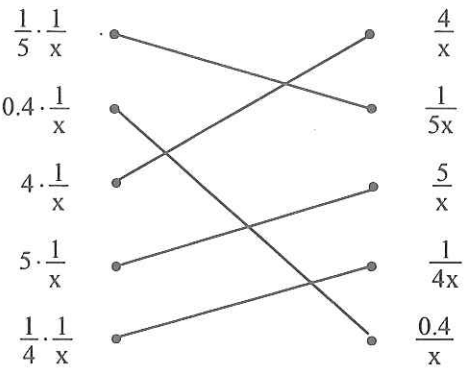
ה) שטח הפנים מינימלי 6 ס"מ = x, מקבלים קוביה.

ניתן לראות את הדמיון לשתי הבעיות המישוריות הקודמות. שם השטח (מימד שני) היה נתון, בנינו פונקצית היקף (מימד ראשון) וקיבלנו את הריבוע (המלבן המשוכלל) כמלבן בעל ההיקף המינימלי. כאן הנפח (מימד שלישי) נתון, בנינו את פונקצית השטח (מימד שני) וקיבלנו את הקוביה (התיבה המשוכללת) כתיבה בעלת השטח המינימלי.

תרגילים

תרגילים 15-19 עוסקים במיומנויות הנדרשות בחקירות.

15. מתרגלים מעבר מפונקציה מן הצורה $y=\frac{a}{x}$ ל- $y=a\cdot\frac{1}{x}$ ומן הצורה $y=\frac{1}{ax}$ ל $y=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}$ כהכנה לקראת גזירה.



16. מיישמים את המעבר של כתיבת המקדם לפני $\frac{1}{x}$ מתרגיל 15 וגוזרים.

א) $y'=-\frac{3}{x^2}$ ב) $y'=-\frac{2.3}{x^2}$ ג) $y'=-\frac{1}{2x^2}$ ד) $y'=-\frac{3}{4x^2}$ ה) $y'=-\frac{0.8}{x^2}$ ו) $y'=\frac{2}{3x^2}$

17. תרגיל גזירה עם סכום של פונקציות כאשר אחד המחוברים הוא מהצורה $\frac{a}{x}$.

א) $y'=\frac{5}{x^2}$ ב) $y'=-\frac{1}{2x^2}+3$ ג) $y'=\frac{4}{x^2}+4x$ ד) $y'=-\frac{6}{x^2}+1$

18. מתרגלים רישום כסכום וגוזרים.

א) $y=\frac{7}{x}+2$, $y'=-\frac{7}{x^2}$ ב) $y=3x-\frac{6}{x}$, $y'=3+\frac{6}{x^2}$ ג) $y=\frac{4}{5}-\frac{6}{5}x^2$, $y'=-\frac{12}{5}x$ ד) $y=\frac{4}{x}+4+6x$, $y'=-\frac{4}{x^2}+6$

19. מתרגלים פתרון של משוואות הדומות לאלה המתקבלות בחקירה.

א) $x = 1$, $x = -1$ ג) אין פתרון.

ב) $x = 2$, $x = -2$ ד) אין פתרון

תרגילים 20-24 הן שאלות הקשורות לנגזרת כאשר בתרגילים 20,21,24 נדרשת חקירה מלאה. תרגיל 25 הוא בעית קיצון.

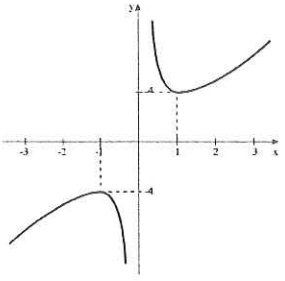
20. א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$

ב)

x	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5
y	-8.5	-40.01	לא מוגדרת	40.1	8.5

- כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 0$ משמאל, ערכי הפונקציה הולכים וקטנים.
- כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 0$ מימין, ערכי הפונקציה, הולכים וגדלים.

סקיצה:



ג) - אין נקודות חיתוך עם הצירים.

(2, 4), נקודת המינימום .

(-2, -4) נקודת המקסימום.

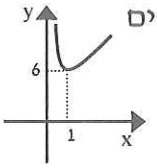
- $x = 0$ אסימפטוטה.

21. א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

ב) $y = \frac{1}{x} + 9x$, $y = -\frac{1}{x^2} + 9$ מינימום $(\frac{1}{3},6)$, מקסימום $(-\frac{1}{3},-6)$

22. א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

ב) $y = \frac{4}{x} + 2x^2$. $(1,6)$ נקודת מינימום . למרות שלא נדרשים לשרטט מומלץ לשרטט סקיצה של הענף הימני של הפונקציה הכולל את הנקודה החשודה.



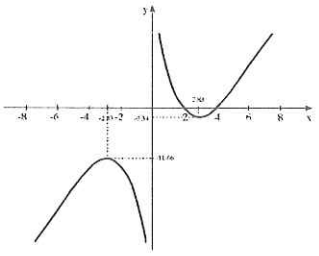
23. א) לפונקציה $y=\frac{3-2x^2}{x}$ אין נקודות קיצון מאחר והנגזרת $y'=-\frac{3}{x^2}-2$

שלילית לכל ערך של x בתחום ההגדרה לכן אינה מתאפסת.

ב) הנגזרת שלילית לכל ערך של x לכן הפונקציה יורדת בתחום $x > 0$

ובתחום $x < 0$.

24. א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$. ד)



ב) נקודות חיתוך עם ציר x : (4, 0) (2, 0) ,

אין נקודת חיתוך עם ציר y. (רצוי להדגיש

לתלמידים כיצד רואים זאת במשוואה.)

ג) (2.83 ,-0.34) מינימום, (-11.66 , -2.83)

מקסימום.

ה) תחומי עליה : $x < -2.83$, $x > 2.83$.

תחומי ירידה: $-2.83 < x < 0$, $0 < x < 2.83$.

25. א) משרטטים מלבנים המתאימים לבעיה.

ב) בניסיון למצוא מלבן שהיקפו קטן יותר , התלמידים מתנסים בהתקרבות

לנקודת המינימום.

ג) x אורך אחת הצלעות, $\frac{120}{x}$ אורך הצלע השנייה לכן ההיקף:

$$y = 2(\frac{120}{x} + x)$$

ד) מימדי החלקה בעלת ההיקף המינימלי הם: $(\sqrt{120},\sqrt{120})$ כלומר החלקה

היא ריבועית.

על משיק לפונקציה (עמודים 68 - 73 בספר לתלמיד).

מהלך הסעיף

בסעיף זה לומדים על משיק לפונקציות הקשורות עם הפונקציה $y=\frac{1}{x}$, ומתבססים על מה שתלמידים למדו: קריאת משוואה של ישר מתוך גרף, מציאת משוואת ישר, תכונת האי זוגיות של הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ והזזות לאורך ציר y.

בתרגילים עוסקים בשני כיוונים: מציאת משוואה של משיק בנקודה ומציאת נקודות על הגרף עם שיפוע נתון. שני הכיוונים מלווים בשרטוטים של הגרף למציאת המשוואה או לבדיקת המשוואה. מטרת השרטוט המלווה היא להדגיש את המושגים הקשורים במשימה.

בתחילת לימוד הנגזרת של הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ (בעמוד 20 בספר), עסקנו בקריאת שיפוע של המשיק המשורטט, בתחילת סעיף זה מחשבים את השיפוע מתוך הנגזרת, קוראים את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר y ורושמים את משוואת המשיק.

בשלב הבא, לאחר חזרה קצרה על מציאת משוואה של ישר על-ידי שיפוע ונקודה עוסקים בכל השלבים של מציאת משוואה של משיק: מציאת השיפוע ואחר-כך מציאת נקודת החיתוך עם ציר y.

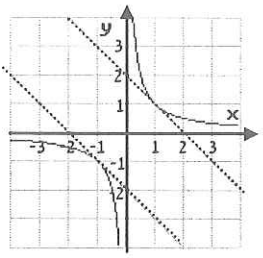
כמו כן, עוסקים במציאת משוואת משיק לפונקציות שהן הזזות של הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ ופונקציות אחרות הקשורות לפונקציה $y=\frac{1}{x}$.

תרגיל 1

התרגיל פותח בחישוב השיפוע בעזרת הנגזרת ושרטוט המשיק (על פי השיפוע שחושב). קוראים את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר y מתוך השרטוט ורושמים את משוואת המשיק.

א) $f'(1) = -1$, משוואת המשיק: $y = -x + 2$.

יהיו תלמידים שימצאו את נקודת ההשקה משיקולים של סימטריה ולא בעזרת האלגברה.



ב) נקודת השקה נוספת: (-1, -1),

משוואת המשיק: $y = -x - 2$.

ג) שני המשיקים מקבילים.

כדי לחזק את תכונת האי-זוגיות של הפונקציה, אפשר לבקש מהתלמידים שיתנו שיעור x של שתי נקודות נוספות על הגרף שבהן המשיקים מקבילים כמו: $x = -5$, $x = 5$.

תרגיל 2

בתרגיל זה משרטטים תחילה משיק בנקודה ואומדים את השיפוע. לאחר מכן מחשבים את השיפוע מתוך הנגזרת ובודקים את האומדן.

א) חשוב לבדוק שהשיפועים שמתקבלים הם מספרים בין -1 ל- 0 .

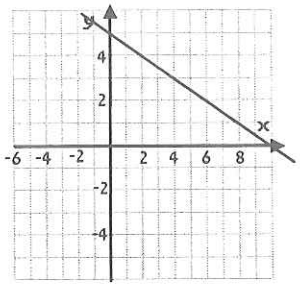
ב) $f'(-2) = -\frac{1}{4}$

תרגיל 3

התרגיל מיועד לחזרה על מציאת משוואה של ישר על פי נקודה ושיפוע, כהכנה למציאת משוואת משיק. החזרה בנויה על המהלך לפיו למדנו בגיאומטריה אנליטית: (i) מציאת משוואה כאשר הנקודה הנתונה נמצאת על ציר y. (ii) מציאת משוואה כאשר הנקודה קרובה לציר y . (iii) מציאת משוואה דרך נקודה שרחוקה מציר y. בשני המקרים האחרונים תלמידים מוצאים את ה"חסר" במשוואת הישר באחת משלוש הדרכים הבאות:

- שרטוט הישר וקריאה מהגרף את שיעורי נקודת החיתוך של הישר עם ציר y.
- הצבת שיעורי נקודה במשוואה $y = ax + \square$ (a הוא השיפוע הנתון), והשתלמות המספר החסר במשבצת.
- נעזרים בנקודה הנתונה ומתקדמים על-פי ערך השיפוע, עד שמגיעים לנקודת החיתוך עם ציר y.

להלן פתרון של סעיף ג' בשלוש הדרכים:



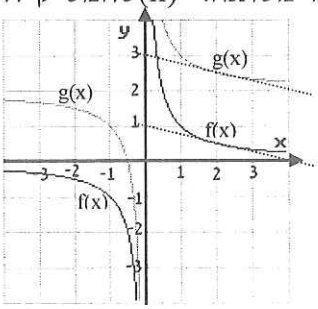
- משרטטים ואומדים שמשוואת המשיק היא $y = -0.5x + 5$. כדאי לעודד את התלמידים לקרוא מהגרף שיעורי נקודות ולהציב במשוואה.
- משוואת הישר היא: $y = -0.5x + \square$ נציב את הנקודה הנתונה במשוואה ונקבל $\square + 0.5 \cdot 4 = 3$, המספר המתאים במשבצת הוא 5.
- מהנקודה (4, 3) "נזוז" לכיוון ציר y על פי השיפוע הנתון: על כל יחידה שנזוז שמאלה יש להוסיף 0. יחידה לערך ה- y (בגלל השיפוע השלילי) כלומר נמצא ב- (3,3.5). ניתן להמשיך בקפיצות של יחידה על ציר x, או לחשב שארבע יחידות שמאלה על ציר x יעלו את שיעור y בשתי יחידות.

א) $y = 2x + 3$ ב) $y = -2x$ ג) $y = -0.5x + 5$ ד) $y = 3x - 4$

תרגיל 4

בתרגיל זה מוצאים את השיפוע מתוך הנגזרת, משלימים את שיעור y של הנקודה ומוצאים את משוואת הישר. בסעיפים ג'-ד', בנוסף למציאת המשיק מדגישים את העובדה ששיפוע המשיק של הגרף המוזז (בנקודה שיש לה אותו שיעור x אינו משתנה. אך נקודת החיתוך של המשיק עם ציר y זזה כמספר יחידות של תזוזת הפונקציה, במקרה זה ב- 2 יחידות כלפי מעלה.

רצוי להראות בצורה ויזואלית ,בעזרת מטול, את תזוזת הפונקציה והמשיק. הדגמה זאת מדגישה ויזואלית : (i) שהשיפוע אינו משתנה. (ii)שהמשיק זז באותו מספר יחידות.



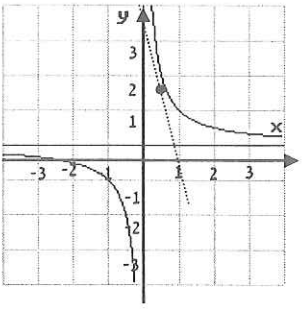
ב) $y = -0.25x + 1$.

ד) $g'(2) = -0.25$, $y = -0.25x + 3$.

ה) שני המשיקים מקבילים.

בסיום התרגיל אפשר להוסיף ולשאול מהי משוואת המשיק בנקודה $x = -2$, כדי להדגיש את תכונת האי-זוגיות של הפונקציה, כפי שנעשה בתרגיל 1 , או לחילופין לשאול באיזו נקודה נוספת יש לפונקציה משיק בעל אותו שיפוע.

אפשר להוסיף תרגיל המזכיר את הקשר בין $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{x}$ לדוגמה:



בשרטוט הגרף של $y = \frac{1}{x}$ ושל המשיק בנקודה בה $x = 0.5$.

- קראו את משוואת המשיק מהגרף ורשמו אותה.
- שרטט ו באותה מערכת צירים גרף של $y = -\frac{1}{x}$.
- רשמו מה לדעתכם צריכה להיות משוואת המשיק לפונקציה $y = -\frac{1}{x}$ בנקודה בה $x = 0.5$.
- בדקו את המשוואה שרשמתם על-ידי מציאת השיפוע ומשוואת המשיק.
- הוסיפו לשרטוט את המשיק לפונקציה $y = -\frac{1}{x}$ בנקודה בה $x = 0.5$.

תרגיל 5

מוצאים את משוואת המשיק של פונקציה הקשורה עם הפונקציה $y = \frac{1}{x}$. גם פה משרטטים את המשיק כדי להדגיש את הקשר בין המשיק לפונקציה.

א) $A(2, 2.5)$ ב) $f(2) = 0.75$ ג) $y = 0.75x + 1$ ד) $B(-1, -2)$, $y = -2$

בסיום התרגיל אפשר לשאול על משוואת המשיק בנקודות בהן $x = -2$, $x = 1$ כדי לנצל את תכונת האי-זוגיות של הפונקציה הנתונה. רצוי גם לדון במשמעות של משיק מקביל לציר x , כלומר הקשר עם נקודות קיצון.

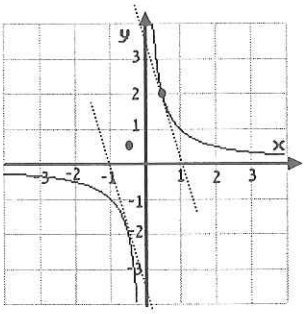
יש לשים לב שאפשר לתת לתלמידים למצוא משוואה של משיק לכל פונקציה הקשורה עם הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ (על-ידי סכום או מכפלה במספר), אבל לא תמיד ניתן לחקור כל פונקציה הקשורה עם הפונקציה, מכיוון שמציאת נקודות הקיצון

יכולה להיות כרוכה במציאת פתרונות למשוואה שלא ניתן לפתור אותה, כגון הפונקציה : $y = x^4 - \frac{1}{x} + 3x^2$

תרגיל 6

בתרגיל זה השיפוע נתון ויש למצוא נקודות מתאימות על הגרף. יש להניח "ישר" ששיפועו 0.25- שעובר דרך הראשית (או כל נקודה אחרת), ולהזיזו עד שישיק לפונקציה בנקודה בה x = 2 ובנקודה בה x = -2.

א ,ב) (2,0.5) , (-2,-0.5)



ג) (i) $-\frac{1}{x^2} = -4 \Rightarrow x = 0.5, x = -0.5 \Rightarrow A(0.5,2)$

(ii) נקודת השקה נוספת : (-0.5, -2).

גם כאן מופיע השרטוט כדי לחזק את הקשר בין מהלך הפתרון והתוצאה לגרף.

תרגיל 7

בתרגיל זה מחפשים נקודות על פי שיפוע נתון. זהו התרגיל היחיד במהלך ללא גרף אך בכל זאת יש תלמידים הנעזרים בגרפים המשורטטים בספר.

א) הנקודות בהן שיפוע הפונקציה הוא 9- הן : $(\frac{1}{3},3)$, $(-\frac{1}{3},-3)$.

ב) הנקודות בהן שיפוע הפונקציה הוא $-\frac{1}{9}$ הן : $(3,\frac{1}{3})$, $(-3,-\frac{1}{3})$.

ג) הנקודות בהן שיפוע הפונקציה הוא $-\frac{1}{5}$ הן : $(\sqrt{5},\frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\sqrt{5},-\frac{1}{\sqrt{5}})$.

ד) לא ייתכן לקבל משיק ששיפועו 2. בנימוק לתשובה רצוי לדון בסוג המשיקים המתקבלים תוך קישור לעובדה שהפונקציה יורדת בכל התחום. רצוי גם לקשור זאת לכך ששיפוע חיובי משמעותו לפתור משוואה מהסוג $-\frac{1}{x^2} = a$ (a חיובי) ואין פתרון למשוואה זו. כך שה"לא ייתכן מקבל ביטוי גרפי

(פונקציה יורדת , לכן השיפועים שליליים) וביטוי אלגברי (אין פתרון למשוואה).

תרגילים

התרגילים מיועדים לחזק את המיומנויות הקשורות לסעיף זה.

8. א) $y = -x - 5$ ב) $y = -9x + 11$ ג) $y = 2.875x + 1$

ד) $y = -0.25x + 3$ ה) $y = 2x - 6$

9. $y = -8x + 8$.

10. א) $(\frac{1}{3},6)$, $(-\frac{1}{3},-6)$, כדאי להדגיש שוב את תכונת האי-זוגיות .

ב) $y = -18x + 12$, $y = -18x - 12$. כדאי להדגיש את העובדה שהמשיקים מקבילים.

11. א) $(\frac{1}{2},3)$, $(-\frac{1}{2},-3)$ ב) $y = -2x + 4$, $y = -2x - 4$

12. $x = 0.5$, $x = -0.5$. אפשר לבקש למצוא את משוואות המשיקים בנקודות שמתקבלות. המשיקים בנקודות אלה הם מקבילים לציר x ומשוואותיהם:

$y = -8$, $y = 8$. בהמשך אפשר לשאול מה המשמעות לכך שהמשיקים מקבילים לציר x

13. תרגיל מסכם הכולל גם מציאת נקודת החיתוך של המשיקים. השרטוט נועד לתמוך במהלך האלגברי של הפתרון – הגרף כאן משמש כבקורת ל"הגיוניות" משוואות המשיקים ונקודת החיתוך שהתלמידים מוצאים.

משוואת המשיק בנקודה $A(1, 5.5)$ היא: $y = -3.5x + 9$. משוואת המשיק בנקודה $B(4, 4)$ היא: $y = 0.25x + 3$. נקודת החיתוך של שני המשיקים היא: $(1.6 , 3.4)$.

חקירה של פונקציות מנה נוספות עמודים 74 – 78בספר לתלמיד).

מהלך הסעיף:

בסעיף זה התלמידים מכירים תבניות של פונקציות מנה להן אסימפטוטה אנכית אך הן אינן הזזה, שקוף או מתיחה של $y=\frac{1}{x}$ והן לא פונקציות מהצורה :

$y=\frac{a}{x}+bx^2+cx+d$.

גם פונקציות כאלה אפשר לחקור בעזרת אותם כלי חקירה, אם רק יודעים את הנגזרת או את הנקודות החשודות. אין אנו מלמדים את מיומנות הגזירה של פונקציות כאלה, אך נותנים ב"מתנה" את הפונקציה הנגזרת. נתינת הנגזרת מאפשרת לחקור סוגי פונקציות מנה נוספים ומאפשרת יישום נוסף של כל כלי החקירה.

תרגיל 1

התלמידים חוקרים פונקצית מנה כאשר הנגזרת נתונה. הם מתחילים עם העניין המרכזי, מציאת נקודת אי-ההגדרה ומהשלב הראשון של החקירה נעזרים במערכת הצירים.

א) הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 1$. רישום כזה עוזר בשרטוט ה"מחיצה" בגרף . תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 1$.

ב) $(0, 0)$ היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים. יש להדגיש שזאת הנקודה היחידה על ידי הצבה של $x = 0$ (כדי למצוא נקודת חיתוך עם ציר y) ועל ידי פתרון המשוואה $\frac{x^2}{x-1}=0$ (כדי למצוא נקודת חיתוך עם ציר x).

ג) הנקודות החשודות $(0, 0)$ $(2, 4)$ וכדאי לסמנן במערכת הצירים. כדאי לתת הדרכה בשימוש במחשבון למציאת שיעור y למשל עבר $x = 2$:

2	x^2	(	2	-	1	)	=

אפשר להציע לתלמידים לחשב מונה בנפרד ומכנה בנפרד ואז לחלק.

(0.5, -0.5) (-1, -0.5) הן הנקודות משני צידי הנקודה (0, 0) ובעזרתן מגלים כי (0, 0) היא נקודת מקסימום.

(3, 4.5), (1.5, 4.5) הן הנקודות משני צידי הנקודה (2, 4) ובעזרתן מגלים כי (2, 4) היא נקודת מינימום

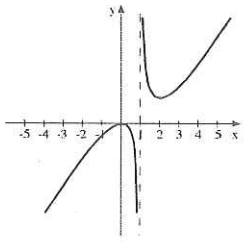
הגרף כמעט שלם אחרי סעיף זה.

ד)

x	0.9	0.99	1	1.01	1.1
y	-8.1	-98.01	לא מוגדרת	102.01	12.1

מכיוון שקשה לסמן את הנקודות בטבלה במערכת צירים על התלמידים לתאר את התנהגות הפונקציה. כאשר ערכי x מתקרבים ל $x = 1$ מימין, ערכי הפונקציה הולכים וגדלים . כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 1$ משמאל , ערכי הפונקציה הולכים וקטנים.

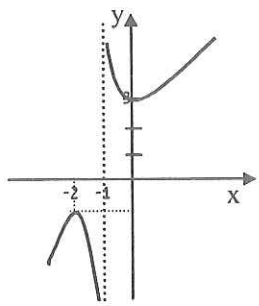
ה) משלימים את הגרף לפי התיאור מסעיף ד'.



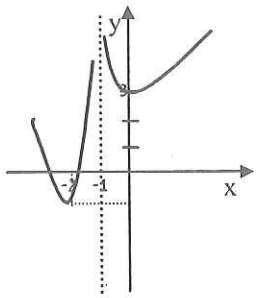
תרגיל 2

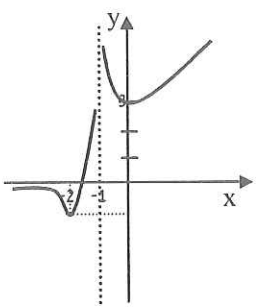
על מנת לקבל תמונה כללית ללא התערבות (או קושי בחישוב) משרטטים גרפים של פונקציות לפי תכונות בלבד, כי התבנית אינה ידועה ואי לכך אין אפשרות לחשב. כיוון שהתכונות הנתונות בתרגיל זה אינן מגדירות חד משמעית גרף מסוים, יתכנו תשובות נוספות, ורצוי לדון בהן. למשל ייתכנו נקודות קיצון נוספות, אסימפטוטות אופקיות ועוד. אם תלמידים אינם מביאים אותם בעצמם, רצוי להציע גרפים אחרים ולבחון אותם.

א) דוגמה לפתרון :



ב) דוגמאות לפתרון :



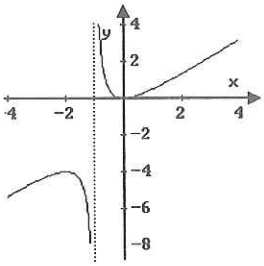


תרגיל 3

בתרגיל זה נתונה התבנית והנקודות החשודות, אותן יש לאפיין. גם אם לא נדרשת חקירה מלאה, נעזרים בהצבת נקודות וסימונן.

(0,0) נקודת מינימום.(-2,-4) נקודת מקסימום.

מצורף הגרף (למרות שלא נדרש), העוזר לאפיון הנקודות החשודות.



תרגיל 4

דומה לתרגיל 1 רק כאן לא נדרשים למצוא נקודות חיתוך עם הצירים.

א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq -2$.

ב) הנקודות החשודות הן : (0, 0) , (-4, -16).

(2 , -1) , $(1,\frac{2}{3})$ נקודות משני צידי הנקודה החשודה (0, 0), ולכן (0, 0) נקודת מינימום.

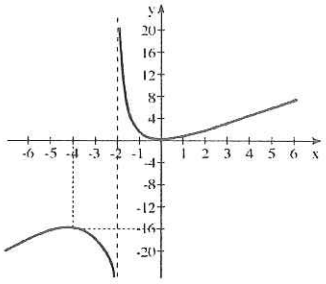
(-18 , -3) , $(-5,-16\frac{2}{3})$ נקודות משני צידי הנקודה החשודה (-16 ,-4), ולכן (-16 ,-4) נקודת מקסימום.

ג)

x	-2.5	-2.8	-2	-1.9	-1.5
y	-25	-88.2	לא מוגדרת	72	9

בכיתה כדאי לדון בהתנהגות הפונקציה כאשר לוקחים ערכי x קרובים ל- $x = -2$. משוואת האסימפטוטה : $x = -2$.

ד)



תרגילים

5. לפונקציה הנתונה יש שתי אסימפטוטות : שני הצירים. בתרגיל זה רואים את ההבדל בין אסימפטוטה אופקית לאסימפטוטה אנכית. בעוד שלא ייתכן שאסימפטוטה אנכית נחתכת על-ידי הגרף , אסימפטוטה אופקית כן . (הנקודה (2,0) היא נקודת חיתוך עם $y = 0$). האסימפטוטות נבדקות יחד בטבלה שבסעיף ג', יש נקודות ששיעור x שלהן קרוב $x = 0$ (כדי לבדוק שציר x אסימפטוטה) וכן נקודות ששיעור x שלהן רחוק מ- $x = 0$ כמו $x = -4$, $x = 5$ (כדי לבדוק שציר y אסימפטוטה). כדאי להציב נקודות נוספות כדי לראות טוב יותר את ההתקרבות לצירים.

בתרגיל זה מסומנת הנקודה החשודה $(4,-\frac{1}{8})$ מאחר ושעור y שלה מאוד קטן ותלמידים נוהגים לסמנה קרוב לציר x, לכן יש להם קושי להשלים את השרטוט בעזרת הנקודות משני צידי הנקודה החשודה, שהן קרובות יותר לציר x.

א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 0$.

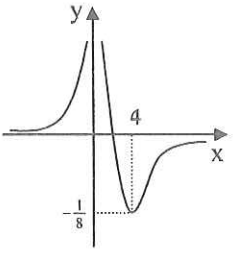
ב) $(-2, 0)$ היא נקודת חיתוך עם ציר x. אין נקודת חיתוך עם ציר y.

ג)

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	2	4	2
y	0.375	1	3	10	לא מוגדרת	6	0	-0.125	-0.12

טבלה זאת משמשת מספר מטרות: (i) השלמת הסקיצה. (ii) תחושה לגבי האסימפטוטות. (iii) אפיון סוג הקיצון.

ד) הנקודה החשודה $(4,-\frac{1}{8})$ היא נקודת מינימום.



ה) משוואות האסימפטוטות: $x = 0$, $y = 0$.

6. מטרת התרגיל לפתח כושר זיהוי סוג הפונקציה מתוך התבנית.

אחת האפשרויות להתאמה לנסות לראות שרק אחד מהגרפים קווי ולחפש אותו בתבניות, ולאחר מכן לראות שרק אחד מהגרפים פרבולה וכך להמשיך.

תגובות והתייחסויות אופייניות:

- ניסיון לכפול ב- 2 כדי לזהות את h(x) כקווית.
- זיהוי x^2 כפרבולה ללא התחשבות במקום הימצאותה.
- חיפוש אחר אסימפטוטות.

בדיון בכיתה אפשר להתייחס ל-

- תבניות כלליות ידועות (ax^2+bx+c , $ax+b$) .
- הצבת נקודות העוזרות להתאמה.
- הימצאות אסימפטוטות.

(i) $\leftrightarrow$ g(x)، (ii) $\leftrightarrow$ h(x)، (iii) $\leftrightarrow$ f(x)، (iv) $\leftrightarrow$ m(x)

גרף עם חור וצמצום שברים (עמודים בספר לתלמיד 79-85).

מהלך הסעיף

המטרה בסעיף זה להראות שבנקודת אי-ההגדרה אין בהכרח אסימפטוטה לפונקציה המקבילה לציר y. ישנם מקרים בהם נוצר "חור", וזה נותן גם הצדקה לבדיקה שעשינו בסביבת נקודת אי-ההגדרה.

נעסוק כאן בפונקציות פשוטות עם "חור": פונקציה קווית ופונקציה ריבועית. רק אחרי צמצום בפונקצית המנה הנתונה (לאחר ציון נקודת אי- ההגדרה), התלמידים מקבלים פונקציות מוכרות. לימוד סוגיה זאת מאפשר הזדמנות מתאימה לתרגל מיומנויות אלגבריות (פרוק לגורמים וצמצום), גם לגבי תבניות שאנו לא חוקרים.

תרגיל 1

אומנם הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$, אך החישוב המוכר של שעורי נקודות משני צידי $x = 0$ מראה כי ערכי y אינם הולכים וגדלים או קטנים (כפי שהיו רגילים) אלא מתקרבים ל- $y = 2$. בגלל קושי הסימון התלמידים לא מתבקשים לסמן את הנקודות במערכת צירים, אך מתבקשים לתאר את "ההתקרבות".

א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

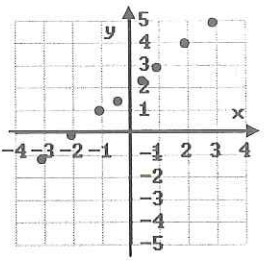
ב) (0.01,2.01) , (-0.1,1.9). , (-0.01,1.99) , (-0.1,2.1) .

כאשר מתקרבים ל- $x = 0$ ערכי הפונקציה מתקרבים ל-2 .

ג)

x	-3	-2	-0.5	-0.5	0	0.5	1	2	3
y	-1	0	1	10	לא מוגדרת	2.5	3	4	5

כיוון שכאן המספרים נוחים התלמידים מתבקשים לסמן את הנקודות כדי לקבל את תחושה שהגרף הוא קו ישר.



ד) הפירוק לגורמים והצמצום באים כאמצעי לאשר את מה שמסתמן בגרף. מתקבל הישר $y = x + 2$. מאחר והישר כבר משורטט נעזרים בישר שקוף ומניחים על הישר המשורטט.

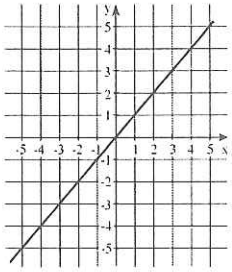
חשוב להדגיש שהפונקציות $y = x + 2$, $y = \frac{x^2 + 2x}{x}$ זהות בכל התחום פרט ל- $x = 0$, עבורה בפונקציה הראשונה מתקבל $y = 2$ ובפונקציה השנייה יש "חור".

יהיו תלמידים שיזהו את הישר ואף יציינו שהוא חותך את ציר y ב- 2 . רצוי להזכיר אז שהפונקציה אינה מוגדרת ב- $x = 0$, ולראות מה תגובת התלמידים. חלקם מזכירים שיש אסימפטוטה ואז רצוי להסב את תשומת ליבם לערכים הקרובים לאפס. באחת מהכיתות תלמיד אמר: " זה בסדר זו אסימפטוטה בנקודה. " משפט זה מראה שיש הבנה של משהו הדומה למוכר, אך שונה.

תרגיל 2

גם בתרגיל זה מתקבל ישר עם "חור". אך אין כאן את ההפתעה בקבלת ישר, מיד מצמצמים ומתקבלת תבנית של קו ישר.

התלמידים משרטטים את שתי הפונקציות וכדאי להדגיש שוב את ההבדלים.



א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 1$.

ב) $y = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$

ג) ברור מהצמצום שמתקבל הקו הישר $y = x$.

ההשוואה בין שתי הפונקציות מראה כי הן זהות פרט לנקודת אי-ההגדרה של הפונקציה הנתונה.

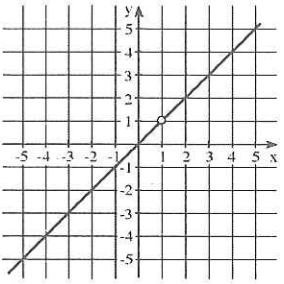
ב- $x = 1$ מתקבל "חור" בגרף הפונקציה המקורית ששיעוריו : $(1,1)$ (כי ערך הפונקציה המצומצמת ב- $x = 1$ הוא 1).

כדי לחזק ולהבהיר את הדמיון וההבדל בין שתי הפונקציות מתבקשים להציב בשתי התבניות מספר ערכים.

בפונקציה המצומצמת : $(3,3)$, $(1.1,1.1)$, $(1,1)$.

בפונקציה הנתונה : $(3,3)$, $(1.1,1.1)$, (אין $1,$) .

ד) שרטוט שני הגרפים (של המצומצמת - בסעיף א' ושל הנתונה - כאן) מדגיש את השווה והשוני בין שתי הפונקציות .



בתרגילים הבאים התלמידים משרטטים את הפונקציה המצומצמת ואחר כך "מתקנים" את הגרף על ידי יצירת ה"חור".

החקירה מבוססת על חקירה של פונקציות מוכרות (קווית או ריבועית) .

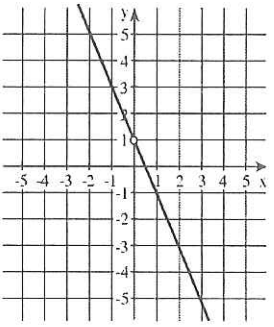
תרגיל 3

גם בתרגיל זה מתקבל קו ישר עם "חור".

א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

ב) $y = \frac{-2x^2 + x}{x} = \frac{x(-2x+1)}{x} = -2x + 1$

את הגרף משרטטים בעזרת נקודת החיתוך עם ציר y $(0, 1)$ והשיפוע (-2).



ג) ההבדל בין שתי הפונקציות בכך שהפונקציה הנתונה לא מוגדרת עבור $x = 0$.

התיקון שיש לעשות : לשרטט חור בנקודה $(0, 1)$. כדי למצוא את שעור y של החור יש להציב בפונקציה המצומצמת.

תרגיל 4

בתרגיל זה מתקבלת פונקציה ריבועית.

א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

ב) $y = \frac{x^3 + x^2}{x} = \frac{x(x^2 + x)}{x} = x^2 + x$.

ייתכן ותלמידים יפרקו לגורמים באופן הבא : $y = \frac{x^2(x+1)}{x} = x(x+1)$

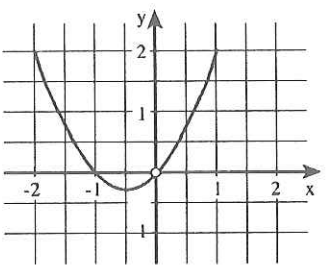
ואז יתקשו לראות שמתקבלת פונקציה ריבועית.

כדי לחקור נוח יותר לפתוח סוגרים ואז מקבלים : $y = x^2 + x$.

ג) אומנם גרף הפרבולה מוכר לתלמידים, יש כאן הדרכה לשרטוט הגרף של הפונקציה המצומצמת בעזרת הכלים שנלמדו באנליזה (גזירה, מציאת נקודה חשודה, בדיקה ואפיון). אך ניתן גם לחקור בעזרת כלים שנלמדו בפונקציה הריבועית (מציאת קודקוד ונקודות חיתוך עם הצירים).

$y' = 2x + 1$, $(-0.5, -0.25)$ נקודה חשודה, $(0, 0)$, $(-1,0)$ נקודות משני צידי הנקודה החשודה, לכן $(-0.5, -0.25)$ נקודת מינימום.

ד)



ה) מוצאים את שעורי החור, על ידי הצבה בתבנית של הפונקציה המצומצת $x =$ 0 ומתקבלת הנקודה : $(0, 0)$.

תרגילים

תרגילים 5, 6, 7 עוסקים במיומנויות אלגבריות של הוצאת גורם משותף.

תרגילים 8 ו- 9 עוסקים בשרטוט גרף עם "חור".

5. (i) א) $x \neq 0\ ,\ y = 5x$ ד) $x \neq -5\ ,\ y = \frac{1}{x+5}$

ב) $x \neq -7\ ,\ y = -1$ ה) $x \neq -3\ ,\ y = 1$

ג) $x \neq 2\ ,\ y = 5x$ ו) $x \neq 0\ ,\ y = x + 2$

(ii) חמש הפונקציות הקוויות המתקבלות אחרי הצמצום : א), ב), ג),ד),ה).

6. א) $3x^2(x - 2)$ או $x\,(3x^2 - 6x)$ ה) $x(1 + x^2 + x)$

ב) $3x\,(3x - 2)$ ו) $x(-x^2 + x + 1)$

ג) $5(1+x)$ ז) $5x^2(1 - 3x)$

ד) $x(-x + 1)$ או $-x(x-1)$ ח) $x(7+10x)$

7. א) $x \neq 1\ ,\ y = 2.5$ ד) $x \neq -0.5$, אי אפשר לצמצם.

ב) $x \neq -1\ ,\ y = 11x$ ה) $x \neq -2\ ,\ y = \frac{3x}{2}$

ג) $x \neq -3\ ,\ y = \frac{x}{2}$ ו) $x \neq 2\ ,\ y = \frac{5x^2}{3}$

רצוי לשאול על הגרף של חלק מהפונקציות למשל של : 7 ה)

8. א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \neq 0$.

ב) $y = \frac{3x^2 + 2x}{x} = \frac{x(3x+2)}{x} = 3x + 2$. התקבל הקו הישר $y = 3x+2$.

ג) הגרף המתאים לפונקציה המקורית הוא קו ישר עם "חור" בנקודה $(0,2)$ וזה מה שמבדיל אותו מהגרף ששורטט בסעיף ב'.

9. א) הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 1$.

ב) $y = \frac{3x^2 - 3x}{x - 1} = \frac{3x(x-1)}{x-1} = 3x$. התקבל הקו הישר $y = 3x$.

ג) הגרף המתאים לפונקציה המקורית הוא קו ישר עם "חור" בנקודה $(1,3)$ וזה מה שמבדיל אותו מהגרף ששורטט בסעיף ב'.

10. תרגיל זה מסכם את הפרק. מטפלים כאן הן בפונקציות שלגרף שלהן יש חור והן בפונקציות שהן הזזות או שקופים של הפונקציה הבסיסית שטופלה $y = \frac{1}{x}$.

הערה:

יש טעות בגרף המשורטט ב- (i) האסימפטוטה המקבילה לציר x היא $y = 1$ ולא כפי שמסומנת $y = 2.5$.

ניתן להיעזר בנקודות אי-ההגדרה כדי להתאים חוק לגרף. (i) ו- (ii) מתאימות לפונקציות שנקודת אי-ההגדרה היא ב- $x = 0$ השתיים האחרות ב- $x = 2$.

$(ii) \leftrightarrow f(x)$, $(i) \leftrightarrow h(x)$, $(iii) \leftrightarrow m(x)$, $(iv) \leftrightarrow g(x)$.

פרק ב: f ו- $\frac{1}{f}$

מבוא לפרק

בפרק זה לומדים לשרטט את הגרף של $\frac{1}{f}$ בעזרת התכונות של f.

- מגלים שישנן תכונות של f שנשמרות ב- $\frac{1}{f}$, למשל: חיוביות/שליליות.

- יש תכונות של f ש"מתהפכות" ב- $\frac{1}{f}$, למשל: בתחום בו f יורדת, $\frac{1}{f}$ עולה וההיפך; נקודת מקסימום (או מינימום) של f שאינה על ציר x היא נקודת מינימום (או מקסימום) של $\frac{1}{f}$.

- ישנן נקודות משותפות (הנקודות ששיעור y שלהן הוא 1 או 1-).

חשוב לציין שמתחילים בשרטוט $\frac{1}{f}$ על-פי נקודות מסוימות, ואחר כך חוקרים את התכונות.

הקושי המרכזי בשרטוט $\frac{1}{f}$ קשור בשרטוט האסימפטוטות המקבילות לצירים, שנובעות מנקודות החיתוך של f עם ציר x או מהשאיפה של f לאינסוף או לאפס.

כדי להתגבר על קושי זה, הפרק חולק לארבעה חלקים מדורגים. בשלושה החלקים הראשונים הפונקציה f נתונה בעזרת הגרף שלה (ללא החוקים) ובחלק הרביעי, f נתונה בעזרת החוק.

החלק הראשון (עמודים 86-97) עוסק במהות הקשר בין f ל-$\frac{1}{f}$, אותו מתחילים לבנות כאשר ערכי f רק חיוביים או רק שליליים (הפונקציה אינה חותכת את ציר x), וכאשר f מוגדרת בתחום סגור.

בחלק השני (עמודים 98 - 105) עוסקים בפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$ שהן עדיין רק חיוביות או רק שליליות, אך רציפות ומוגדרות בתחום שאינו סגור, כלומר ל-f

או ל- $\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה אופקית.

בחלק השלישי (עמודים 106 - 120) עוסקים בפונקציות f בעלות נקודות חיתוך עם ציר x. אי לכך ל- $\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה אנכית. מפאת הקושי באסימפטוטה אנכית, מתחילים גם כאן בפונקציות בתחום סגור. בדרך זו אנו מתמקדים בקושי אחד (מהלך שמאפיין את חומרי הלימוד בסדרת ש"י).

בחלק הרביעי (עמודים 121 – 140) עוסקים בשרטוט הגרף של פונקציה f ושל $\frac{1}{f}$ על-פי תבנית נתונה עבור f.

מהלך הפרק מאפשר חזרה הן על מושגים קודמים (נקודות קיצון, עליה/ירידה, חיובית/שלילית זוגית/אי-זוגית ואסימפטוטות), והן על מיומנויות (שרטוט על-פי תכונות, הצבה של נקודות בתוך של פונקציה וחישובים שונים בשברים). העיסוק בתכונות של הפונקציה מאפשר הסתכלות איכותית, והעיסוק במיומנויות ההצבה מאפשר הסתכלות נקודתית, ושניהם משולבים במהלך.

פונקציה המוגדרת בקטע סגור (עמודים 86 – 98 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

ארבע השאלות הראשונות משלבות מושגים מוכרים (נקודות קיצון) עם מושגים חדשים הקשורים בתחום סגור: נקודות קיצון שהן בקצה התחום הנתון.

בהמשך (תרגילים 5-8) לומדים לשרטט את גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$ מתוך גרף הפונקציה f על-פי נקודות, תוך שימוש במושגים החדשים שנלמדו, ובדיקת הקשר בין תכונות של $\frac{1}{f}$ לתכונות של f.

התרגול עד כה וסיכום התכונות של $\frac{1}{f}$ בהשוואה לתכונות של f (תרגיל 9), מנחה את התלמידים להסיק את תכונות של $\frac{1}{f}$ מתוך הגרף של f. לכן בתרגילים בהמשך, יש תלמידים המשרטטים את $\frac{1}{f}$ לפי תכונות.

חשוב לציין שבסעיף זה מטפלים בפונקציות שמקבלות רק ערכים חיוביים או רק ערכים שליליים.

מומלץ אחרי כל תרגיל לסכם יחד עם התלמידים את התכונות של הפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$

תרגיל 1

נתונה כאן פונקציה בתחום סגור. נקודת המוצא היא הידע קודם שיש לתלמידים. בניית המושגים החדשים נעשית, תוך כדי התקדמות בשאלה.

כתיבת התחום הסגור מופיע בשאלה בכתיב מילולי ובכתיב מתמטי. מומלץ לקבל תיאור מילולי כתשובה מלאה.

א) הפונקציה עולה בתחומים: $-2 < x < 1$ ו- $6 < x < 8$, כלומר בין -2 ל- 1 ובין 6 ל- 8.

ב) הפונקציה יורדת בתחום $1 < x < 6$.

ג) (1,6) נקודת מקסימום, (6,-3) נקודת מינימום וכן נקודות הקצה שהן נקודות קיצון הנוספות: (–2,1) נקודת מינימום, (8,2) נקודת מקסימום.

בגלל התחום הסגור אנו מרחיבים את ההגדרה של נקודות קיצון, שהיו מוגדרות כנקודות מעבר מעליה לירידה או להיפך, גם לנקודות שבסביבתן (אשר בתחום הסגור) הן "הגבוהות" ביותר או "הנמוכות" ביותר. הכוונה היא לנקודות הקצה וההסתכלות עליהן, בתרגיל זה ובתרגיל 2, היא רק ביחס לסביבתן הקרובה (במקרה זה הסביבה רק מצד אחד).

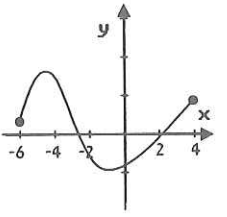
הערה: יש ספרים בהם מכלילים את נקודות הקצה בתוך תחומי העלייה/הירידה והן לא נחשבות כנקודות קיצון (אך יכולות להיות נקודות מקסימום מוחלט או מינימום מוחלט). בספר זה בחרנו לא להכליל את נקודות הקצה בתחומי העלייה/הירידה והן מוגדרות כנקודות קיצון.

המושגים נבנים בשפה אינטואיטיבית: נקודה גבוהה ביותר/נקודה נמוכה ביותר. כאן משתמשים בפעם הראשונה במושג "קטע סגור". בכיתות הניסוי לא מצאנו קשיים מיוחדים עם מושג זה. על מנת להדגיש שהכוונה היא לגרף בקטעהסגור מסומנות נקודות הקצה כנקודה מלאות מודגשת.

תרגיל 2

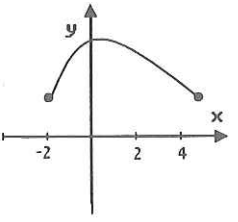
משרטטים פונקציות לפי תכונות תוך שילוב המושגים החדשים (נקודות קצה). כדאי להבהיר שמכאן והלאה נקודות קיצון כוללות את נקודות הקצה.

א)

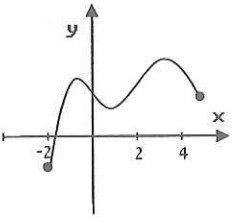


ב) התנאי הוא שנקודות הקצה הן נקודות מינימום, ולא נאמר דבר על מספר נקודות הקיצון. לכן ייתכנו אפשרויות רבות:

3 נקודות קיצון



5 נקודות קיצון

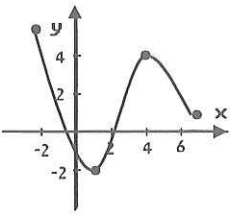


כדאי לשים לב שבתחום רציף וסגור לא ניתן לשרטט פונקציה שלה רק שתי נקודות מינימום, אך מכיוון שלא נתון שנקודות הקיצון הן יחידות, אפשר להגדיל את מספר נקודות הקיצון, רק שסה"כ מספר נקודות הקיצון יהיה אי-זוגי.

תרגיל 3

משרטטים פונקציה לפי תכונות ובודקים מי מבין כל נקודות הקיצון (כולל נקודות הקצה) היא ה"נמוכה" ביותר ו/או ה"גבוהה" ביותר בקטע הסגור.

א) דוגמה לגרף:



הערה: כאן נקודות הקיצון נתונות לכן מגוון התשובות האפשריות קטן יותר. ההבדל בין הגרפים היא ב"עקמומיות", אבל הצורה הכללית היא זו שנראת בשרטוט.

ב) נקודת המינימום ה"נמוכה" ביותר היא (1,-2) , כלומר היא מינימום מוחלט.

ג) נקודת המקסימום המוחלט היא : (–2,6).

תרגיל 4

מטרת התרגיל היא להראות שהמושג נקודות קיצון מוחלטות אינן קשורות רק לתחום סגור.

א) (-3,-2), (3,1) נקודות מינימום, (1,2) נקודת מקסימום.

ב) (-3,-2) נקודת מינימום מוחלט. אין נקודת מקסימום מוחלט.

תרגיל 5

בתרגיל לומדים לשרטט את הפונקציה $\frac{1}{f}$ על סמך הגרף של f. f מוגדרת בתחום סגור וערכיה חיוביים בכל התחום.

כדי לשרטט סקיצה של $\frac{1}{f}$ מחשבים תחילה את ערכי $\frac{1}{f}$ עבור ערכי x של הנקודות המודגשות על הגרף של f, מסמנים אותן (כפי שמומלץ בספר בצבע אחר), ומחברים אותן לקבלת הגרף. בהמשך משווים בין התכונות של $\frac{1}{f}$ עם התכונות של f הנתונה.

א) (2, 1) נקודת מינימום מוחלט, (6, 4.5) נקודת מקסימום מוחלט.

ב) (i) ערכי $\frac{1}{f}$ (בטבלה) נרשמו בשתי צורות:

- כשברי יחידה כדי לשמור על מה שעושים ($\frac{1}{f}$).
- כמספרים עשרוניים, כי נוח יותר לסמן את הנקודות בצורה זו במערכת צירים.

f	$\frac{1}{f}$
(-5,2)	$(-5,\frac{1}{2})$ [(-5,0.5)]
(-2,4)	$(-2,\frac{1}{4})$ [(-2,0.25)]
(0,2)	$(0,\frac{1}{2})$ [(0,0.5)]
(2,1)	(2,1)
(4,2)	$(4,\frac{1}{2})$ [(4,0.5)]
(6,4.5)	$(6,\frac{1}{4.5})$ [(6,0.22)]

ג) (i) נקודות משותפות לשני הגרפים הן הנקודות בהן ערך הפונקציה (שיעור y) הוא 1. יש רק אחת כזו והיא (2,1).

(ii) כיוון שכל ערכי f חיוביים, גם כל ערכי $\frac{1}{f}$ חיוביים. כדאי להדגיש שזה מתבטא בסקיצות של שתי הפונקציות, שתיהן מעל ציר ה-x.

(iii) $\frac{1}{f}$ עולה בתחום $2 < x < 2$ בו f יורדת.

בשאלה זו עוסקים רק בתחום ירידה של f. בשאלה הבאה עוסקים בתכונה ה"מתהפכת" הקשורה עם עליה של f. תכונת ההיפוך תשמש בהמשך כבסיס לשרטוט סקיצות של $\frac{1}{f}$ על סמך הגרף של f.

(iv) הנקודות $(-5,\frac{1}{2})$, $(2,1)$ הן נקודות מקסימום. והנקודות $(-2,\frac{1}{4})$, $(6,\frac{1}{4.5})$ הן נקודות מינימום של $\frac{1}{f}$.

$(2,1)$ היא מקסימום מוחלט ו- $(6,\frac{1}{4.5})$ היא מינימום מוחלט.

מומלץ, אחרי תרגיל זה ואחרי כל אחד מתרגילים 6-8, לסכם יחד עם התלמידים את התכונות של הפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$ ולארגן את הסיכום בטבלה. סיכומים אלו עשויים לעזור לתלמידים לענות על תרגיל 9, שבו יש התייחסות כללית לקשר בין שתי הפונקציות.

לאחר תרגיל זה אפשר לפתור תרגילים 13, 16.

תרגיל 6

לפונקציה f הנתונה יש שש נקודות קיצון ולכן אפשר להשתמש בהן כנקודות "עוגן" לשרטוט סקיצה של $\frac{1}{f}$ על-פי הקשרים שראו התלמידים בתרגיל הקודם בין f ל- $\frac{1}{f}$. למרות שנקודות הקיצון מספיקות לשרטט את הגרף של $\frac{1}{f}$ מתוך הגרף של f, נעזרים בנקודות נוספות (בסעיף ג') כדי להשלים את הגרף. סעיפים

ד'- ו' מתייחסים גם לתכונות האחרות של $\frac{1}{f}$, כדי להדגיש שוב את הקשר בין f ו- $\frac{1}{f}$.

א,ב) בטבלה להלן רשומים ערכי y של שתי הפונקציות בשני אופנים : כשברים פשוטים (כדי להדגיש את ההפיכות) וכמספר עשרוני (כדי שיהיה נוח לסמן).

כדאי לשים לב שיש שתי נקודות של f המאופינות כמינימום מוחלט.

סוג	f	$\frac{1}{f}$	סוג
מקסימום	$(-3,\frac{3}{2})$	$(-3,\frac{2}{3})$ $(3-3,0.67)$	מינימום
מינימום מוחלט	$(-2,\frac{1}{2})$	$(-2,2)$	מקסימום מוחלט
מקסימום מוחלט	$(1,5)$	$(1,\frac{1}{5})$ $(1,0.2)$	מינימום מוחלט
מינימום	$(3,2)$	$(3,\frac{1}{2})$ $(3,0.5)$	מקסימום
מקסימום	$(4,4)$	$(4,\frac{1}{4})$ $(4,0.25)$	מינימום
מינימום מוחלט	$(6,\frac{1}{2})$	$(6,2)$	מקסימום מוחלט

ג) על מנת לשרטט סקיצה "מדויקת" יותר ניתן לסמן נקודות נוספות כדי לקבוע את סוג "הירידה",ואת סוג "העלייה".

ד) יש שלוש נקודות משותפות אותן ניתן לזהות על-פי שיעור ה- y שלהן (שהוא 1). במקרה זה רצוי להסתפק בזיהוי הגרפי שלהן. לא מבקשים את שיעור x של הנקודות כי קשה לקרוא אותן מהגרף. כדאי להדגיש כי בנקודות בהן שיעור y משותף, שיעור x לא משתנה.

ה) f עולה בתחומים : $-2 < x < 1$, $3 < x < 4$, לעומת זאת $\frac{1}{f}$ יורדת באותם תחומים.

ו) ערכי $\frac{1}{f}$ בתחום הסגור הנתון הם חיוביים כפי שערכי f חיובים בתחום זה.

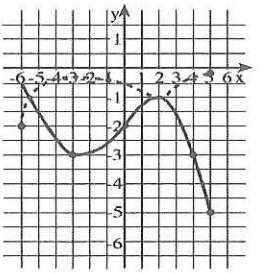
תרגיל 7

בתרגיל זה ערכי g שליליים בכל התחום, ולכן גם ערכי $\frac{1}{g}$ שליליים בכל התחום.

א, ב)

סוג	$\frac{1}{g}$	g	סוג
מקסימום מוחלט	$(-6,-2)$	$(-6,-\frac{1}{2})$	מינימום מוחלט
מינימום	$(-3,-\frac{1}{3})$ $(-3,-0.33)$	$(-3,-3)$	מקסימום
מקסימום	$(2,-1)$	$(2,-1)$	מינימום
מינימום מוחלט	$(5,-\frac{1}{5})$ $(5,-0.2)$	$(5,-5)$	מקסימום מוחלט

ג)



ד) (ii) הנקודות המשותפות : $(2,-1)$, $(-5.5,-1)$. (iii) שיעור y שלהן (-1).

דבר זה נובע מ ש- $\frac{1}{g(x)} = g(x)$ כאשר $g(x) = 1$ או $g(x) = -1$.

בסעיף זה מבקשים לרשום גם את שיעורי x של הנקודות המשותפות כי קל יחסית לקרוא אותם מהגרף .

ה) g יורדת בתחומים: $-6 < x < -3$, $2 < x < 5$. בתחומים אלו $\frac{1}{g}$ עולה.

ו) ערכי שתי הפונקציות שליליים.

תרגיל 8

לפונקציה f הנתונה יש נקודת מקסימום אחת (0,-0.5) בתחום הנתון, ולכן ל- $\frac{1}{f}$ יש נקודת מינימום אחת (0,-2).

לפונקציה f יש שתי נקודות מינימום שהן נקודות הקצה (-2,-4), (2,-4), ולכן ל- $\frac{1}{f}$ שתי נקודות מקסימום בקצה (-2,-0.25), (2, -0.25).

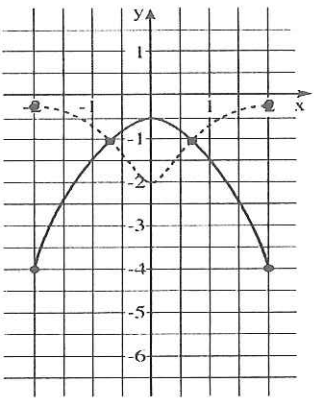
בעזרת נקודות הקיצון והנקודות המשותפות (לגרף של f ולגרף של $\frac{1}{f}$) משרטטים סקיצה של $\frac{1}{f}$.

א) הנקודות המשותפות מודגשות בשרטוט, בסעיף ג'.

ב) (-2,-4), (2,-4) נקודות מינימום של f. (0,-0.5) נקודת מקסימום של f.

(-2,-0.25), (2,-0.25) נקודות מקסימום של $\frac{1}{f}$. (0,-2) נקודת מינימום של $\frac{1}{f}$.

ג)



ד) (0,-2) נקודת מינימום מוחלט.

תרגיל 9

מטרת התרגיל היא לסכם את הקשרים בין התכונות של פונקציה f לתכונות של $\frac{1}{f}$, כאשר f מוגדרת בקטע סגור וכל ערכיה חיוביים או כל ערכיה שליליים.

בהמשך לומדים שקשרים האלה נשמרים גם כאשר התחום הוא לא סגור.

- אם עבור ערך מסוים של x יש ל- f נקודת **מינימום** (שאינה על ציר x) אז עבור אותו ערך של x יש ל- $\frac{1}{f}$ נקודת **מקסימום**.

- אם עבור ערך מסוים של x יש ל- f נקודת **מקסימום** (שאינה על ציר x) אז עבור אותו ערך של x יש ל- $\frac{1}{f}$ נקודת **מינימום**.

- תחומי **העלייה** של f הם תחומי **הירידה** של $\frac{1}{f}$.

- תחומי **הירידה** של f הם תחומי **העלייה** של $\frac{1}{f}$.

- בתחום בו f **חיובית**, גם $\frac{1}{f}$ **חיובית**.

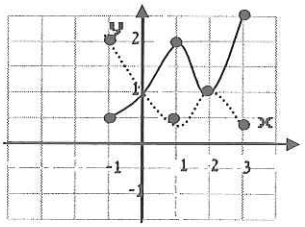
- בתחום בו f **שלילית**, גם $\frac{1}{f}$ **שלילית**.

- אם לפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$ יש נקודות משותפות, אז שיעור y שלהן 1 או 1-

תרגיל 10

בתרגיל זה התלמידים משרטטים גרף של פונקציה f על-פי תכונות, ובהמשך את הגרף של $\frac{1}{f}$. יתכן ותלמידים ישרטטו את $\frac{1}{f}$ על פי התכונות של f וללא הישענות על נקודות בודדות.

א, ג) להלן שרטוט אפשרי:



ב) נקודות מינימום הן אלה בהן שיעורי ה - x הוא 1- ו- 2. נקודות מקסימום הן אלה בהן שיעורי ה - x הוא 1 ו- 3.

ד) הפונקציה $\frac{1}{f}$ עולה בתחום $1 < x < 2$. ויורדת בתחומים $-1 < x < 1$, $2 < x < 3$.

לאחר תרגיל זה ניתן לפתור תרגילים 14, 15.

תרגיל 11

הפונקציה נתונה בתחום סגור ועולה בכל התחום. כדי לשרטט את $\frac{1}{f}$ נעזרים בנקודות הקיצון בקצה ובנקודות המשותפות ל- f ול- $\frac{1}{f}$ כנקודות "עוגן".

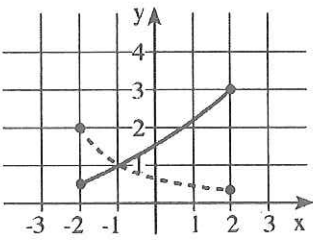
א) (-2,0.5) מינימום, (2,3) מקסימום.

ב) (-2,2) מקסימום, (2,0.33) מינימום.

ג) נקודה משותפת לשתי הפונקציות: (-1,1).

ד) נקודת חיתוך של h עם ציר y: $(0,\frac{3}{2})$. נקודת חיתוך של $\frac{1}{h}$ עם ציר y: $(0,\frac{2}{3})$.

ה)



ו) h עולה, $\frac{1}{h}$ יורדת.

ז) h ו- $\frac{1}{h}$ חיוביות.

מכיוון שהפונקציה מונוטונית עולה קל להיווכח גם בקשר נוסף בין התכונות של h לתכונות של $\frac{1}{h}$: בתחום בו ערכי h קטנים מ- 1 (כאן עבור $-2 < x < -1$), ערכי $\frac{1}{h}$ גדולים מ-1 ובתחום בו ערכי f גדולים מ-1 (כאן עבור $-1 < x < 2$), ערכי $\frac{1}{h}$

קטנים מ 1. בקשר הזה נשתמש בהמשך הפרק כאשר h מקבלת ערכים שהולכים ומתקרבים לאפס או כאשר h מקבלת ערכים גדולים מאד.

תרגיל 12

בהתאמת גרף של $\frac{1}{f}$ לגרף נתון של f, כדאי שתלמידים ינמקו לא רק מדוע בחרו בגרף מסוים, אלא מדוע הגרפים האחרים שלא נבחרו אינם מתאימים להיות הגרף של $\frac{1}{f}$.

גרף א' אינו מתאים כי ערכי הפונקציה שליליים.

על-פי הנקודות המשותפות אפשר לראות שגרף ב' אינו מתאים.

גרף ד' אינו מתאים מבדיקת נקודות מסוימות למשל, (-1,3) היא נקודת מקסימום של f ואילו $(-1,\frac{1}{2})$ היא נקודת מינימום בגרף ד', כאשר נקודת המינימום של $\frac{1}{f}$ היא $(-1,\frac{1}{3})$.

גרף ג' מתאים.

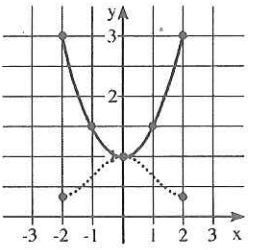
תרגילים

13. התרגיל דומה לתרגיל 5 , בשני התרגילים הפונקציה נתונה בתחום סגור והיא חיובית.

א,ב, ג)

סוג	$\frac{1}{f}$	f	סוג
מינימום מוחלט	$(-2,\frac{1}{3})$	$(-2,3)$	מקסימום מוחלט
	$(-1,\frac{2}{3})$ $(-1,,0.67)$	$(-1,\frac{3}{2})$	
מקסימום מוחלט	$(0,1)$	$(0,1)$	מינימום מוחלט
	$(1,\frac{2}{3})$ $(1,0.67)$	$(1,\frac{3}{2})$	
מינימום מוחלט	$(2,\frac{1}{3}) = (2,0.33)$	$(2,3)$	מקסימום מוחלט

(iii)

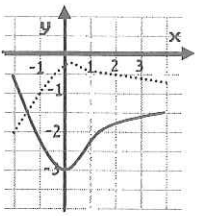


בסוף התרגיל כדאי להסב את תשומת לב התלמידים לעובדה, שאולי הרגישו קודם, שגם גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$ סימטרי ביחס לציר y, כפי שגרף של f סמטרי ביחס לציר y. כלומר המעבר מ- f ל- $\frac{1}{f}$ שומר על זוגיות הפונקציה. בהמשך נדון גם בתכונת האי-זוגיות.

14. תרגיל דומה לתרגיל 10 בכך שמשרטטים את f על-פי תכונות.

תלמידים יכולים לקבל ערכי f שונים בנקודות הקיצון ושיעורי x שונים בנקודות המשותפות.

להלן גרף אפשרי:

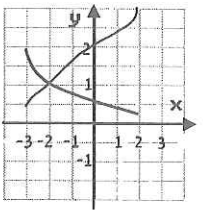


יש לשים לב שלא נתון כמה נקודות קיצון יש ל- f ולכן ייתכן גרף עם נקודות קיצון נוספות.

15. גם בתרגיל הזה משרטטים תחילה את הגרף של f לפי תכונות, ועל-פי הגרף או/ו התכונות של f משרטטים, באותה מערכת צירים, את הגרף של $\frac{1}{f}$.

לפונקציה f רק שתי נקודות קיצון ולכן הן בקצות הקטע הסגור, והן נקודות קיצון מוחלטות.

לשרטוט $\frac{1}{f}$ אפשר להשתמש בנקודות הקיצון ובנקודה המשותפת כנקודות "עוגן". להלן גרף אפשרי:

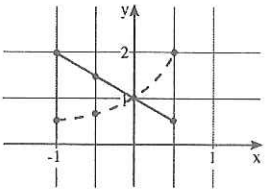


מאחר ולא רשום בתרגיל סוג הקיצון, כל אחד מהגרפים יכול להיות f והאחר $\frac{1}{f}$.

16.א) שיעורי הנקודות המודגשות שעל גרף הפונקציה g: (-1,2), (-0.5,1.5), (0,1), (0.5,0.5).

ב) שיעור הנקודות המתאימות שעל גרף הפונקציה $\frac{1}{g}$: (-1,0.5), (-0.5,0.67), (0,1), (0.5,2).

ג)



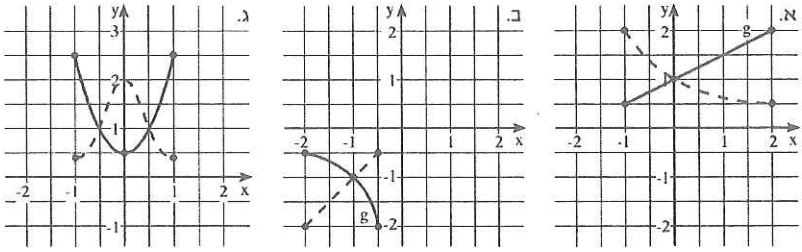
ד) $\frac{1}{g}$ אינה פונקציה קווית.

ה) g עולה , $\frac{1}{g}$ יורדת.

כדאי להדגיש את המסקנה המתקבלת כאן, שאם f היא פונקציה קווית שהשיפוע שלה שונה מאפס, אזי $\frac{1}{f}$ איננה פונקציה קווית. בתרגיל הבא (סעיף ב' נראה שאפשר לקבל $\frac{1}{f}$ קווית מפונקציה f שאינה קווית.

17. בעזרת תרגיל זה אפשר לסכם קשרים בין תכונות נוספות של f ו- $\frac{1}{f}$ שלא הודגשו במהלך הסעיף. הכוונה היא לכך:

- שאם f היא פונקציה קווית ששיפועה שונה מאפס, אז $\frac{1}{f}$ איננה קווית.
- שאפשר לקבל פונקציה $\frac{1}{f}$ שהיא פונקציה קווית כמו בסעיף ב'.
- שתכונת הסימטריות ביחס (לציר y כאן) או לכל ישר המקביל לציר y נשמרת במעבר מ- f ל- $\frac{1}{f}$.



אפשר בסיכום לשאול למשל: מה תהיינה התכונות של $\frac{1}{f}$ אם נזיז את הפרבולה בסעיף ג' ימינה או שמאלה?

ומה אם התחום לא סגור? (עמודים 98 -105 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה עוסקים בפונקציה f שמוגדרת לכל x וכל ערכיה חיוביים או כל ערכיה שליליים. הרעיון המרכזי בסעיף זה הוא ששאיפה לאינסוף של f הופכת להתקרבות של $\frac{1}{f}$ לאפס כלומר לציר x , שהוא אסימפטוטה של $\frac{1}{f}$. והיהפך, שאיפה של f לאפס הופכת לשאיפה של $\frac{1}{f}$ לאינסוף.

בסעיף זה הפונקציות f הן "פשוטות" (לכל היותר יש להן נקודת קיצון אחת), וזאת כדי להתמקד במסקנה העיקרית לעיל.

שני שלבים במהלך: תחילה בודקים את ההתנהגות של $\frac{1}{f}$ כאשר הערכים של f הולכים וגדלים (תרגילים 1-2), ולאחר מכן בודקים את התנהגות הפונקציה $\frac{1}{f}$ כאשר הערכים של f הולכים ומתקרבים לאפס משני הכיוונים של ציר x (תרגיל 3). תרגיל 4 הוא צירוף של שני השלבים . תרגיל 5 מהווה סיכום לסעיף זה בכך שתלמידים נדרשים לשרטט גרף של $\frac{1}{f}$ עבור פונקציות f שונות , ללא הדרכה.

תרגיל 1

f המשורטטת מוגדרת לכל x וערכיה הולכים וגדלים כאשר x הולך וגדל (או הולך וקטן). מתחילים בשרטוט של $\frac{1}{f}$ בעזרת נקודת הקיצון של f, בעזרת נקודות משותפות ובעזרת שתי נקודות נוספות (סעיפים א'-ג'). הסעיפים הבאים בשאלה מתיחסים לחידוש של גרף זה. בעזרת סעיף ד' לומדים שכאשר הנקודות על הגרף של f ששיעור y שלהן גדול (יחסית) , שיעור y של הנקודות על הגרף של $\frac{1}{f}$ קרוב לאפס. רצוי לסמן נקודות נוספות כדי לחוש את התופעה.

בסעיף ה' מנצלים את תכונת הסימטריה במעבר מ- f ל - $\frac{1}{f}$ כדי להשלים את השרטוט של $\frac{1}{f}$.

א) (0,2) נקודת מקסימום של $\frac{1}{f}$.

ב) בסעיף זה תלמידים מתבקשים רק להדגיש את הנקודות המשותפות. הנקודות נוחות לקריאה לכן אפשר גם לבקש מהתלמידים לרשום אותן: (-2,1), (2,1).

ג) שתי נקודות נוספות על $\frac{1}{f}$ מימין לנקודת הקיצון: (3,0.66) , (4,0.5).

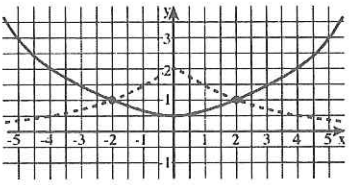
ד) הנקודות (6,0.25) , (7,0.17) על הגרף של $\frac{1}{f}$.

ה) i) הנקודות הסימטריות לנקודות הרשומות בסעיף ג': (-3,0.66), (-4,0.5).

ii) הנקודות נמצאות על הגרף של $\frac{1}{f}$. סעיף זה הכנה לסעיף הבא שבו אנו מכלילים שתכונת הסמטריות של f קיימת גם ב- $\frac{1}{f}$.

iii) לכל זוג נקודות סימטריות של f יש אותו שיעור y. לכן ישנן שתי נקודות מתאימות סימטריות של $\frac{1}{f}$ שלהן שיעור y הופכי לשיעור y של הנקודות הסימטריות של f.

ו)



תרגיל 2

התרגיל דומה לתרגיל 1 אלא שערכי הפונקציה f שליליים והסימטריה היא לגבי הישר x = 1.

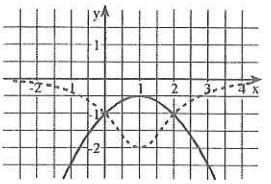
א) (1,-2) נקודת מינימום של $\frac{1}{f}$.

ב) גם פה קל לקרוא את הנקודות המשותפות : (2,-1) , (0,-1) ,לכן כדאי לבקש מתלמידים לרשום אותן.

ג) למשל : הנקודה (3,-0.4) מימין לנקודת הקיצון , והנקודה (-1,-0.4) משמאל לנקודת הקיצון .

ד) הנקודות (4,-0.2) , (-2,-0.2) על הגרף של $\frac{1}{f}$.

ה)



ו) ערכי f שליליים והם הולכים וקטנים כאשר ערכי x הולכים וגדלים (או הולכים וקטנים) , לכן ערכי $\frac{1}{f}$ שליליים והולכים וגדלים (ומתקרבים לאפס) כאשר ערכי x הולכים וגדלים (או הולכים וקטנים). מאחר וערכי הפונקציה שליליים, הם קרובים לאפס ולכן ציר x הוא אסיפטוטה.

תרגיל 3

בתרגיל זה לפונקציה f יש אסימפטוטה, ולכן ערכי $\frac{1}{f}$ ילכו ויגדלו כאשר ערכי x הולכים וגדלים או הולכים וקטנים. מתחילים בגילוי התכונה החדשה, ולהשלמת הגרף נעזרים בכלים שהכירו.

א) הערכים המתאימים לערכים של f הקרובים לאפס גדולים מאוד.

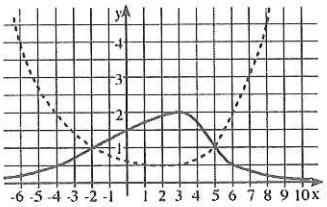
ב) (3,0.5) נקודת מינימום של $\frac{1}{f}$.

ג) הנקודות המשותפות לשתי הפונקציות : (1 , 5), (1 , 2-).

ד)

$\frac{1}{f}$	f
(-6,4)	(-6,0.25)
(-3,1.33)	(-3,0.75)
(-6,2)	(6,0. 5)
(8,4)	(8,0.25)

ה)



ו) כאשר ערכי x הולכים וגדלים או קטנים, ערכי הפונקציה $\frac{1}{f}$ הולכים וגדלים.

ז) $\frac{1}{f}$ יורדת עבור $x < 3$. היא עולה עבור $x > 3$.

תרגיל 4

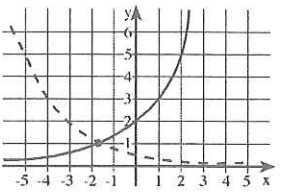
בתרגיל זה יש שילוב של תרגילים 1 ו- 3, מצד אחד ערכי f שואפים לאינסוף ככל שערכי x גדלים, ומצד שני ערכי f שואפים לאפס ככל שערכי x קטנים. ובכך רואים באותה פונקציה את היפוך התכונות וכיצד באות לידי ביטוי בגרף אחד.

א) (5,0.083), (-5,5) הן הנקודות על הגרף של $\frac{1}{f}$ המתאימות לנקודות (5,12), (-5,0.2) שעל הגרף של f .

ב) (0,0.5) היא נקודת החיתוך של $\frac{1}{f}$ עם ציר y.

ג) שיעור y של הנקודה המשותפת של שתי הפונקציות הוא 1 . במקרה זה לא נוח לקרוא שיעור x, ולכן אין דרישה לכך.

ד)

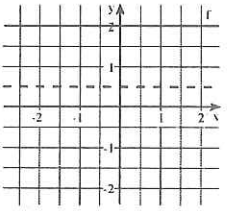


ה) ל- $\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה, ומשוואתה: $y = 0$.

תרגיל 5

משרטטים את $\frac{1}{f}$ במקרים שונים, ללא תמיכה בשלבי ביניים. תלמידים יכולים להיעזר בתכונות של f או בנקודות שעל הגרף של f. רבים מעדיפים לשרטט לפי תכונות.

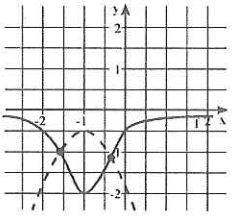
א) כאן התלמידים עוסקים לראשונה בפונקציה הקבועה. אפשר לשרטט את $\frac{1}{f}$ בעזרת נקודות מסוימות. כדאי לסכם שכאש f גם $\frac{1}{f}$ קבועה (פרט למקרה של $y = 0$)



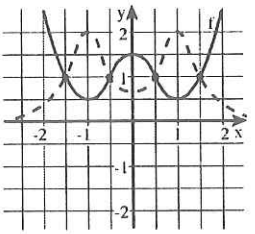
הפונקציה המתקבלת היא: $y = 0.5$.

ב) הגרף המתקבל דומה מאד לגרף שהתקבל בתרגיל 1, וגם פה ציר x הוא אסימפטוטה ל- $\frac{1}{f}$. אך כאן לשני הגרפים אין נקודות משותפות.

ג) הגרף המתקבל דומה מאד לגרף שהתקבל בתרגיל 3 אך הפעם ערכיה שליליים.



ד)



בשלב זה כדאי לסכם את התכונות שהתווספו, על אלה שנלמדו בסעיף הקודם. להלן נפרט רק את התכונות שהתווספו.

(i) הסימטריה נשמרת - אם f סימטרית אז $\frac{1}{f}$ סימטרית. תכונה זאת רואים בשלושה גרפים (א), (ב), (ד).

(ii) שאיפה לאינסוף ב- f הופכת לשאיפה לאפס ב- $\frac{1}{f}$. (גרפים (ב), (ד)) .

(iii) שאיפה לאפס ב- f הופכת לשאיפה לאינסוף ב- $\frac{1}{f}$ (גרף ג).

(iv) אם f קבועה אז $\frac{1}{f}$ קבועה (גרף (א)).

תרגילים

6. הגרף כאן דומה לגרף בתרגיל 2.

א) (0,-2) נקודת מינימום של $\frac{1}{f}$.

ב) הנקודות המשותפות ל- f ול- $\frac{1}{f}$: (-1,-1),(1,-1).

ג) הנקודות (2,-0.17), (3,-0.1) על הגרף של $\frac{1}{f}$, והן הנקודות המתאימות לנקודות (2,-6), (3,-10) שעל הגרף של f.

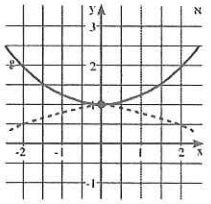
ד) הנקודות (-2,-0.17), (-3,-0.1) על הגרף של $\frac{1}{f}$ והן סימטריות לאילו הרשומות בסעיף ג'.

ו) (i) (-5,0.033).

(ii) ל- $\frac{1}{f}$ אין נקודת חיתוך עם ציר x.

(iii) ל- $\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה, ציר x. משוואת האסימפטוטה: $y = 0$.

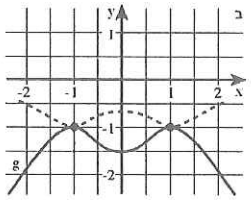
7. בתרגיל זה מספר גרפים.



(i) א) (0,1) נקודת מינימום של g ב) והיא נקודת מינימום מוחלט.

ג) (0,1) נקודת מקסימום מוחלט של $\frac{1}{g}$.

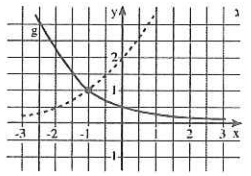
ד) משוואת האסימפטוטה: $y = 0$.



(ii) א) (1,1), (-1,-1) נקודות מקסימום ב) מוחלט של g.

ג) (1,-1), (-1,1) – נקודות מינימום מוחלט של $\frac{1}{g}$.

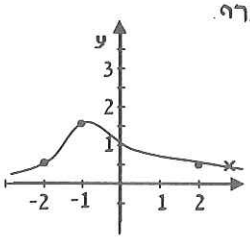
ד) משוואת האסימפטוטה: $y = 0$.



(iii) א), ג) אין לפונקציה נקודות קיצון ב) ולכן אין לפונקציה $\frac{1}{g}$ נקודות קיצון.

ד) ציר x הוא אסיפטוטה הן ל- g והן ל- $\frac{1}{g}$, אך עבור ערכי x שונים. משוואת האסימפטוטה: $y = 0$.

8. בתרגיל זה משרטטים תחילה את הגרף של f לפי התכונות הרשומות ובעזרתן רושמים את התכונות של $\frac{1}{f}$ ומשרטטים את הגרף.



א) גרף אפשרי ל- f:

ב) תכונות של $\frac{1}{f}$:

(i) מאחר ו - f מוגדרת לכל x וערכי - f חיוביים, הפונקציה $\frac{1}{f}$ מוגדרת לכל x וערכיה חיוביים.

(ii) גרף הפונקציה עובר דרך הנקודות: (-2,2), (2,2)

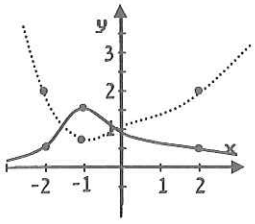
(iii) ערכי הפונקציה חיוביים.

(iv) אין לפונקציה אסימפטוטה.

(v) לפונקציה נקודת מינימום ב- $x = -1$.

(vi) הפונקציה יורדת עבור $x < -1$.

(vii) הפונקציה עולה עבור $x > -1$.



ומה אם הגרף חותך את ציר x? (עמודים 106 - 120 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה לומדים לשרטט גרף של $\frac{1}{f}$ כאשר גרף הפונקציה f חותך את ציר x.

גם כאן מתחילים עם פונקציה המוגדרת בתחום סגור. כדי להתמקד בנקודת החיתוך של f עם ציר x מתחילים עם פונקציה f שאין לה נקודות קיצון (שאינן נקודות קצה), ובהדרגתיות עוסקים בפונקציות עם תכונות נוספות (תחום סגור עם נקודות קיצון, תחום שאינו מוגבל עם קיצון ולבסוף כאשר ל-fשתי נקודות קיצון). תחילה משרטטים לפי נקודות (תרגילים 1-2) ובתרגילים הבאים משרטטים תוך כדי סיוע בידע שרכשו על התכונות המשתנות או נשמרות של $\frac{1}{f}$.

בסעיף זה משרטטים את הגרף של $\frac{1}{f}$ במערכת צירים נפרדת בגלל הסרבול בשרטוט סביב נקודה אי ההגדרה.

תרגיל 1

מתחילים את שרטוט הפונקציה $\frac{1}{f}$ בסימון נקודות הקצה שלה ובהמשך מחשבים נקודות בסביבת נקודת אי-ההגדרה ומתארים את התנהגות הפונקציה בסביבה זו (מימינה ומשמאלה של נקודת אי-ההגדרה). הגרף של $\frac{1}{f}$ נבנה בשלבים.

א) (6,3) , (-1,-2) הן נקודות הקצה של f .

(6,0.33), (-1, -0.5) הן נקודות הקצה של $\frac{1}{f}$.

ב) (i) (4,0) היא נקודת החיתוך של f עם ציר x.

(ii) לפונקציה $\frac{1}{f}$ אין נקודה המתאימה לנקודה (4,0) . ייתכן ויהיה צורך לדון עם התלמידים לגבי החילוק באפס.

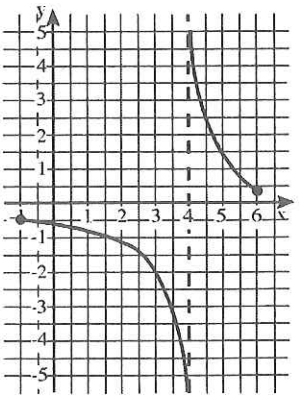
ג)

	f	$\frac{1}{f}$
B:	(3.5,-0.2)	(3.5,-5)
	(3.8,-0.1)	(3.8,-10)
	(4.1,0.1)	(4.1,10)
	(4.2,0.2)	(4.2,5)
A:	(4.5, 0.4)	(4.5, 2.5)

אחרי שמחשבים ומסמנים מספר ערכים ליד נקודת אי-ההגדרה, מתארים את התנהגות הפונקציה בסביבה של נקודה זו. ייתכן וכדאי להוסיף נקודות נוספות להן שיעור x קרוב יותר ל- 4. בעזרת הנקודות והסימון רואים שערכי הפונקציה מתקרבים לישר $x = 4$ משני צידי הישר ולכן מתקבלת כאן אסימפטוטה.

כדאי לסכם כאן שבעצם כל נקודת חיתוך של f עם ציר x (כאשר f רציפה בסביבתה) היא נקודת אי-הגדרה של $\frac{1}{f}$ ויש לה אסיפטוטה בנקודה זו. יש לציין שבהמשך כדאי להתחיל בשרטוט עם האסימפטוטה האנכית של $\frac{1}{f}$ שמתקבלת בנקודת החיתוך של f עם ציר x.

ד)



תרגיל 2

כמסקנה מתרגיל קודם מתחילים בשרטוט האסימפטוטה. לפונקציה הנתונה יש גם נקודת קיצון פרט לנקודות הקצה. בעזרת נקודת הקיצון, בעזרת נקודות הקצה והאסימפטוטה משרטטים סקיצה של הגרף המבוקש.

א) (i) (2,0) היא נקודת החיתוך של g עם ציר x.

(ii), (iii) אין ל- $\frac{1}{g}$ נקודה מתאימה . הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 2$

ולכן יש לה אסימפטוטה שמשוואתה: $x = 2$.

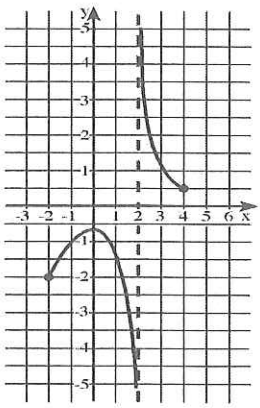
ב)

g	$\frac{1}{g}$
B: (1.5, -0.4)	(1.5, -2.5)
(1.8, -0.25)	(1.8, -4)
(1.9, -0.2)	(1.9, -5)
(2.1,0.2)	(2.1, 5)
(2.2,0.4)	(2.2, 2.5)
A: (2.5,0.5)	(2.5, 2)

ג) (0,-1.5) נקודת מינימום של g . (4,2), (-2,-0.5) הן נקודות מקסימום של g.

$(0,-\frac{2}{3})$ נקודת מקסימום של $\frac{1}{g}$. (4,0.5) , (-2,-2) הן נקודות מינימום של $\frac{1}{g}$.

ד)



תרגיל 3

בשני התרגילים הקודמים השרטוט של $\frac{1}{f}$ נעשה עַל-פי נקודות, בתרגיל זה שרטוט $\frac{1}{f}$ נעשה בעיקר על פי תכונות. מתחילים בשרטוט האסימפטוטה ואחר כך משרטטים כל ענף (מימין ומשמאל לאסימפטוטה) בנפרד.

א) הפונקציה $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת עבור $x = -3$.

ב) הנקודות המודגשות: $(-2.5,0.3),(-3.5,-0.2)$.

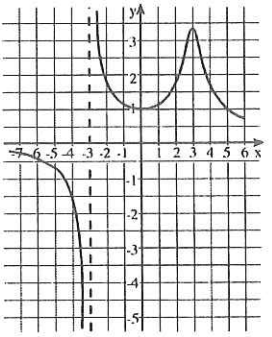
הנקודות המתאימות לנקודות המודגשות הנמצאות על $\frac{1}{f}$: $(-2.5,\frac{10}{3})$, $(-3.5,-5)$.

ג) $\frac{1}{f}$ יורדת משמאל לקו המפריד, וערכיה שליליים.

ד) נקודות קיצון של f: $(0,1)$ נקודת מקסימום, $(3,0.3)$ נקודת מינימום.

נקודות קיצון של $\frac{1}{f}$: $(0,1)$ נקודת מינימום, $(3,\frac{10}{3})$ נקודת מקסימום.

ה)



הערה: כאשר נקודת החיתוך של f עם ציר x היא נקודה עלייה אשר בסביבתה הפונקציה f עולה/יורדת מגמת הירידה/עלייה של $\frac{1}{f}$ נשמרת משמאל ומימין לאסימפטוטה. לעומת זאת כאשר נקודת החיתוך עם ציר x היא גם נקודת קיצון יש שינוי במגמת הפונקציה $\frac{1}{f}$ מימין ומשמאל לאסימפטוטה. אם ל- f יש מקסימום/מינימום אז $\frac{1}{f}$ יורדת/עולה משמאל ועולה/יורדת מימין.

בסעיף הבא, נעסוק בפונקציות f שיש להן נקודות קיצון שהן נקודות חיתוך עם ציר x. בסוג כזה של פונקציות "נשברת" התכונה שנקודת הקיצון של f היא נקודת קיצון של $\frac{1}{f}$. בגלל קושי זה, נדחה הטיפול להמשך.

תרגיל 4

בדומה לתרגיל הקודם, שרטוט $\frac{1}{h}$ נעשה על-פי תכונות, אך הפעם יש ל-h שתי נקודות חיתוך עם ציר x, ולכן ל-$\frac{1}{h}$ יהיו שתי אסימפטוטות.

א) הפונקציה $\frac{1}{h}$ אינה מוגדרת עבור $x = 3$, $x = -2$.

הנקודות המודגשות שעל h:

(-1.75,-0.2), (-2.25,0.2), (2.75,-0.2), (3.25,0.2).

ב) הנקודות המתאימות לנקודות המודגשות הנמצאות על $\frac{1}{h}$:

(-2.25,5), (-1.75,-5), (2.75,-5), (3.25,5).

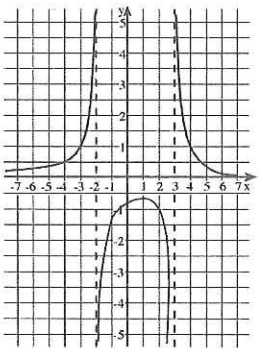
ג) (i) $\frac{1}{h}$ עולה משמאל ל- $x = -2$. (ii) $\frac{1}{h}$ חיובית משמאל ל- $x = -2$.

ד) (i) $\frac{1}{h}$ יורדת מימין ל- $x = 3$. (ii) $\frac{1}{h}$ חיובית מימין ל- $x = 3$.

ה) $(1,-\frac{2}{3})$ נקודת מקסימום של $\frac{1}{h}$.

ו) יש 4 נקודות משותפות: (-3,1), (-0.5,1), (2,-1), (4,1).

הגרף מתקבל בשלבים.



תרגיל 5

בתרגיל זה משרטטים את הפונקציה ההופכית של קו ישר ששיפועו שלילי. למרות שתלמידים נתקלו בתרגיל דומה , עדיין מופתעים מהעובדה ש- $\frac{1}{g}$ אינה קווית.

א) הפונקציה $\frac{1}{g}$ אינה מוגדרת עבור $x = 1$.

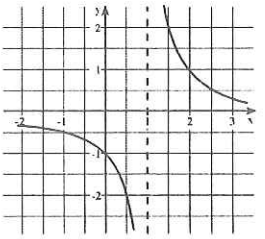
ב) (i) הנקודות המודגשות שעל g : $(1.25,0.25)$, $(0.75,-0.25)$.

הנקודות המתאימות לנקודות המודגשות הנמצאות על $\frac{1}{g}$:

$(0.75,-4),(1.25,4)$.

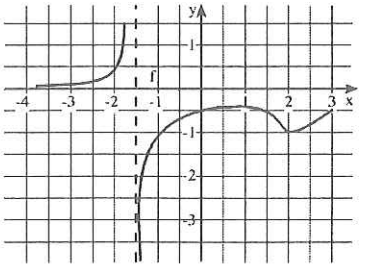
(ii) הנקודות המשותפות ל- g ול- $\frac{1}{g}$: $(2,1)$, $(0,-1)$.

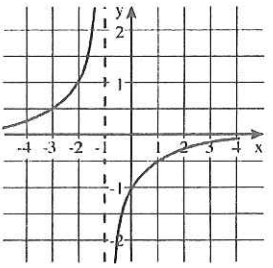
ג)



תרגיל 6

כיוון שאין בתרגיל זה הדרכה, התלמידים יכולים לבחור באחת מהדרכים שנלמדו : בעזרת נקודות (הגרפים משורטטים בתוך מערכת צירים שקל לקרוא את שיעורי הנקודות) או תכונות או שילוב של שתי הדרכים.

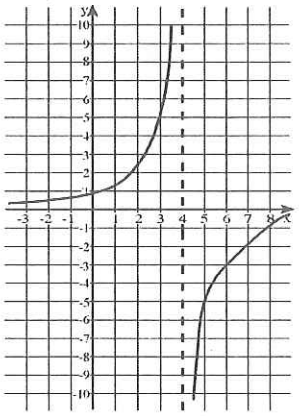




תרגילים

השאלות דומות לאילו שבמהלך. לכן נרשום רק את הפתרון לכל תרגיל.

7. א) הפונקציה $\frac{1}{g}$ אינה מוגדרת עבור $x = 4$.

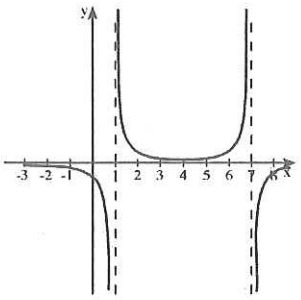


ב) $(4.5,-10)$, $(3.5,10)$ נקודות על גרף של $\frac{1}{g}$.

ג) $\frac{1}{g}$ חיובית ועולה משמאל לקו המפריד.

ד) $\frac{1}{g}$ שלילית ועולה מימין לקו המפריד.

8. א) נקודות החיתוך של h עם ציר x : $(7,0)$, $(1,0)$.



ב) הפונקציה $\frac{1}{h}$ אינה מוגדרת עבור $x = 1$, $x = 7$.

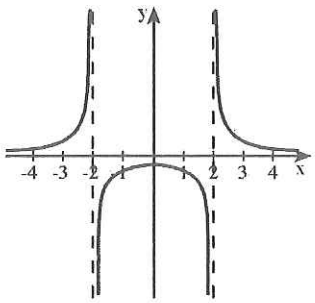
ג) $(4,0.2)$ נקודת מינימום.

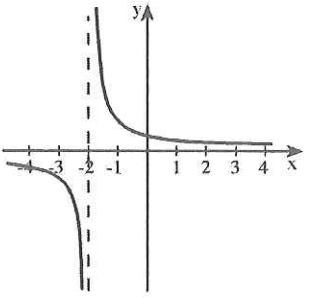
ד) (iii),(ii) $\frac{1}{h}$ יורדת ושלילית משמאל ל- $x = 1$.

ה) (iii),(ii) $\frac{1}{h}$ עולה ושלילית מימין ל- $x = 7$.

כדאי לדון גם בתחומי העלייה והירידה בין שתי האסימפטוות.

9.





שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$ כאשר ידוע החוק של f

(עמודים 121-140 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

סעיף זה עוסק בשרטוט גרף של $\frac{1}{f}$ כאשר f נתונה בצורה אלגברית. מתחילים בחזרה על התאמה של גרף לחוק של פונקציות מוכרות. בסעיף זה תלמידים משרטטים גם את f מכיוון שהחוק של f נתון.

בתרגילים 2-7 נעזרים במחשב לשרטוט הגרפים כשהמטרה היא לחזק את הקשר בין התכונות של f ו $\frac{1}{f}$. אין בפעילות המחשב פיתוח המיומנות של שרטוט הגרף.

בתרגילים 8-20 תלמידים משרטטים בעצמם גרף של לפונקציה f שהחוק שלה נתון. אי לכך גם תלמידים שעשו את פעילות מחשב מתבקשים לפתור תרגילים אלה.

עוסקים בפונקציה f ריבועית מכל הסוגים (כזו שאינה חותכת את ציר x עם, שחותכת את ציר x בשתי נקודות, וכזו הנוגעת בציר x בנקודה אחת כלומר, פונקציה ריבועית שהקודקוד שלה על ציר x.) וכן בפונקציה קווית.

בתרגילים שבמהלך מופיעות הפונקציות e^x ופונקצית השורש. במידה והתלמידים לא מכירים פונקציות אלה, יש לפסוח על השאלות האלה ולעסוק בהן מאוחר יותר.

תרגיל 1

בתרגיל זה מתאימים חוק לגרף כאשר החוקים מארבע משפחות שונות: פונקציה ריבועית, פונקציה קווית , פונקצית שורש ופונקציה מעריכית (e^x).

בהמשך הסעיף עוסקים גם בשרטוט של $\frac{1}{f}$ בפונקציות אלה .

החוק $y = e^x$ מתאים לגרף II. החוק $y = -2x - 1$ מתאים לגרף III.

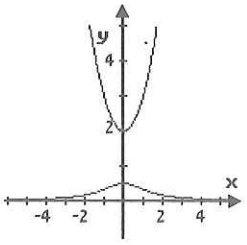
החוק $y = \sqrt{x}$ מתאים לגרף IV. החוק $y = x^2 - 4x$ מתאים לגרף I.

פעילות מחשב (תרגילים 7-2)

תרגילים אלה עוסקים רק בפונקציות ריבועיות. מתחילים מפונקציה ריבועית שהיא חיובית לכל x ועוברים לפונקציות שיש להן נקודות חיתוך עם ציר x. אין הפרדה בין המקרה בו הפונקציה הריבועית חותכת את ציר x בנקודה אחת ובין המקרה בו היא חותכת את ציר x בשתי נקודות, מכיוון שהתלמידים מקבלים את הגרף מהמחשב. מטרת התרגילים היא לחזק את הקשר בין התכונות של הפונקציה $\frac{1}{f}$ ביחס לתכונות של f.

תרגיל 2

א) משרטטים את שתי הפונקציות , f ו-$\frac{1}{f}$, במחשב באותה מערכת צירים.



ב) בסעיף זה חוזרים ומבליטים, על סמך הגרפים, את התכונות הנשמרות והתכונות המשתנות.

(i) נקודת הקיצון של f : (0,2) והיא נקודת מינימום.

נקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$: (0,0.5) והיא נקודת מקסימום.

(ii)

התחום	f	$\frac{1}{f}$
$x > 0$	עולה	יורדת
$x < 0$	יורדת	עולה

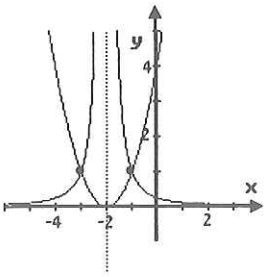
(iii) שתי הפונקציות חיוביות.

ג) בסעיף זה, בעזרת שינוי סקלות, רק הפונקציה $\frac{1}{f}$ "נשארת" על המסך. בעזרת הליכה על הגרף עוסקים בהתקרבות של הפונקציה לציר x. ייתכן ובשינוי סקלות מסוים הגרף יראה כמתלכד עם ציר ה- x. עניין זה כדאי להביא לדיון בכיתה, ולדבר על המגבלות של המחשב, שגם הוא מעגל את המספרים ולכן כשהמספרים מאוד קטנים, הם מעוגלים לאפס (כמובן יש גם את בעיית הרזולוציה של המחשב).

תרגיל 3

לפונקציה הריבועית יש נקודת קיצון שהיא גם נקודת חיתוך עם ציר x.

א)



ב) ל- $\frac{1}{g}$ יש אסימפטוטה אנכית ב- $x = -2$ (משורטט בקו מרוסק) כי (-2,0) היא נקודת חיתוך של g עם ציר x. אפשר להסתפק בנימוק זה מאחר ובסעיפים קודמים התלמידים נוכחו שכאשר ל - f יש נקודת חיתוך עם ציר x ל- $\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה אנכית.

ג) ציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של $\frac{1}{g}$ כי כאשר ערכי x הולכים וגדלים, מימין ל- (-2) אז ערכי g הולכים וגדלים, אך ערכי $\frac{1}{g}$ הולכים וקטנים. כאשר ערכי x הולכים וקטנים משמאל ל- (-2), ערכי g הולכים וגדלים, אך ערכי $\frac{1}{g}$ הולכים וקטנים.

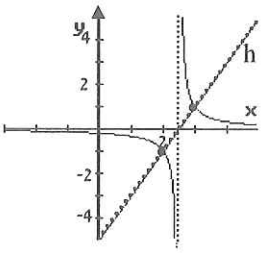
ד)

	g	$\frac{1}{g}$
נקודת קיצון	(-2,0)	אין
תחום עליה	$x > -2$	$x < -2$
תחום ירידה	$x < -2$	$x > -2$
נקודת חיתוך עם ציר y	(0,4)	(0,0.25)
נקודת חיתוך עם ציר x	(-2,0)	אין
משוואת אסימפטוטה אנכית	אין	$x = -2$
משוואת אסימפטוטה אופקית	אין	$y = 0$

ה) הנקודות המשותפות הן : (-3,1),(-1,-1) , הן מודגשות בגרף בסעיף א'.

תרגיל 4

א)

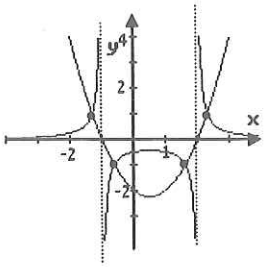


ב) הנקודות המשותפות לשני הגרפים : (2,-1),(3,1).

ג) תכונות שתי הפונקציות מסוכמות בטבלה.

	h	$\frac{1}{h}$
נקודת חיתוך עם ציר x	$x = 2.5$	אין
משוואת אסימפטוטה אנכית	אין	$x = 2.5$
תחום עלייה	עולה בכל התחום	אין
תחום ירידה	אין	יורדת בכל התחום

תרגיל 5



א) נקודות החיתוך של f עם ציר x: (2,0) , (-1,0). אלה הן נקודות אי-הגדרה של $\frac{1}{f}$: $x = 2$ ו- $x = -1$, והם אסימפטוטות של $\frac{1}{f}$.

ב) f חיובית בתחומים: $x > 2$ או $x < -1$. $\frac{1}{f}$ חיובית באותם תחומים.

f שלילית בתחום: $-1 < x < 2$. $\frac{1}{f}$ שלילית באותו תחום.

ג) לכל אחת מהפונקציות יש נקודת קיצון ב- $x = 0.5$. שיעור ה- y של נקודת הקיצון וסוג הקיצון שונה אצל כל אחת מהפונקציות.

(0.5,-2.25) נקודת מינימום של f . (0.5,-0.44) נקודת מקסימום של $\frac{1}{f}$.

ד) (i) f עולה בתחום $x > 0.5$, בתחום זה $\frac{1}{f}$ יורדת.

(ii) f יורדת בתחום $x < 0.5$, בתחום זה $\frac{1}{f}$ עולה.

ה) הנקודות המשותפות לשני הגרפים: (2.3,1), (-1.3,1), (1.62,-1), (-0.62,-1). חשוב לציין כי הנקודות המשותפות היחידות שיכולות להיות לשתי הפונקציות הן הנקודות בהן שיעור ה-y הוא 1 או -1 זאת מאחר ואילו הערכים היחידים כשמחלקים 1 בהם מתקבל אותו ערך.

עד עתה, כאשר ערכי x של הנקודות המשותפות לא היו נוחות לקריאה, התלמידים נדרשו לציין רק שיעור y של הנקודות המשותפות. אך כאן בעזרת התוכנה, התלמידים יכולים להלך על הגרפים ולקרוא את שיעורי הנקודות.

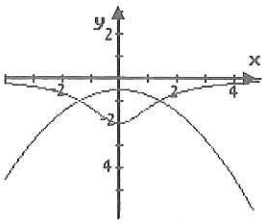
בתרגילים 6 ו- 7 תלמידים משרטטים תחילה במחברת את $\frac{1}{f}$ כאשר הגרף של f נתון ונעזרים במחשב ל"אימות" השרטוט ששרטטו במחברתם ביד.

תרגיל 6

א)

	$\frac{1}{f}$
נקודת קיצון	(0,2)
תחום עלייה	$x > 0$
תחום ירידה	$x < 0$
משוואת אסימפטוטה אופקית	$y = 0$

ב)



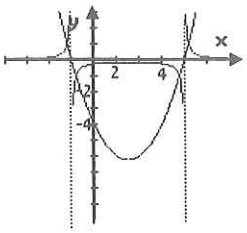
ה) שיעור ה- y של נקודות החיתוך של שני הגרפים הוא 1- .

תרגיל 7

א)

	$\frac{1}{f}$
נקודות קיצון	(1.5,-0.16)
תחומי עלייה	$-1 < x < 1.5$, $x < -1$
תחומי ירידה	$1.5 < x < 4$, $x > 4$
נקודת חיתוך עם ציר y	(0,-0.25)
נקודת חיתוך עם ציר x	אין
משוואות אסימפטוטות אנכיות	$x = -1$, $x = 4$
משוואת אסימפטוטה אופקית	$y = 0$

ב, ג)



ד) הנקודות המשותפות לשני הגרפים : (4.19,1),(-1.19,1) , (3.79,-1), (-0.79,-1).

התרגילים בהמשך הם ללא מחשב.

החל מתרגיל זה משרטטים שני גרפים : את הגרף המתאים לחוק של פונקציה f הנתונה ואת הגרף של $\frac{1}{f}$. תלמידים יכולים לבחור לשרטט את שתי הפונקציות באותה מערכת צירים כאשר אחת מהן צבועה או לשרטט אותן במערכות צירים נפרדות.

תרגיל 8

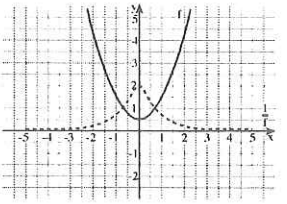
תרגיל זה מלווה בהדרכה מפורטת הן לשרטוט הגרף של f והן לשרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$. מתחילים עם פונקציה חיובית בכל התחום. למרות שהתלמידים, בשלב זה, יודעים לשרטט ללא נקודות, חשוב להזכיר שאפשר להיעזר בחישוב שיעורי נקודות וסימון בגרף.

א) (0,0.5) נקודת מינימום של f.

ג) (0,2) נקודת מקסימום של $\frac{1}{f}$.

ב, ד)

f	$\frac{1}{f}$
(-2,4.5)	(-2,0.22)
(-1,1.5)	(-1,0.67)
(1,1.5)	(1,0.67)



ה) (i) ל- $\frac{1}{f}$ אין נקודות חיתוך עם ציר x מאחר ואין מספר עבורו $\frac{1}{f}=0$. על מנת לקבל אפס ממנה של שני מספרים יש לחלק אפס במספר שאינו אפס, ובמקרים שאנו חוקרים, זה לא קורה כי תמיד יש 1 במונה.

(ii) ל $-\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה אופקית $x=0$. כדאי לבקש מהתלמידים שיתארו את ההתקרבות לאסימפטוטה.

(iii) החוק של $\frac{1}{f}$ הוא $\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}$. הדוגמאות המספריות להלן ממחישות את קיום האסימפטוטה. כאשר $x=10$, $y=0.0099$, כאשר $x=-10$, $y=0.0099$.

ו) $\frac{1}{f}$ עולה עבור $x<0$, והיא יורדת כאשר $x>0$.

תרגיל 9

תרגיל חזרה על שרטוט גרפים של פונקציות ריבועיות בעזרת נקודות חיתוך עם הצירים, קודקוד הפרבולה ונקודות נוספות אם יש צורך.

(i) נקודות חיתוך עם צירים: (0,-3), (3,0), (-1,0).

הקודקוד, נקודת מינימום: (1,-4).

(ii) נקודות חיתוך עם צירים: (0,6), (2,0), (-3,0).

הקודקוד, נקודת מקסימום: (-0.5,6.25).

(iii) נקודות חיתוך עם צירים: (0,4), (2,0).

הקודקוד, נקודת מינימום: (2,0).

(iv) נקודת חיתוך עם ציר y : (0,5) . אין נקודות חיתוך עם ציר x.

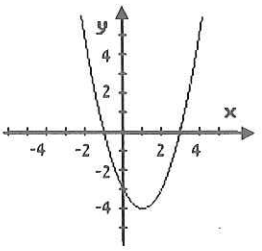
נקודת מינימום : (1,5,0.5).

תרגיל 10

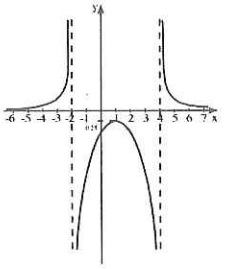
הפונקציה הריבועית חותכת את ציר x בשתי נקודות.

משרטטים את $\frac{1}{f}$ על פי f ועל פי הקשר בין התכונות של שתי הפונקציות.

א)



נעזרים בתכונות של f כדי לרשום את התכונות של $\frac{1}{f}$.



ב) $\frac{1}{f}$ לא מוגדרת עבור $x = -1$, $x = 3$.

ג) נקודת מקסימום : (1,-0.25).

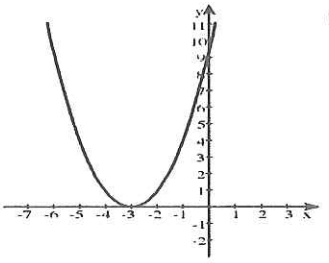
ד) $\frac{1}{f}$ יורדת וחיובית מימין ל- $x = 3$.

ו) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ (ii) (-6,0.022), (6,0.048).

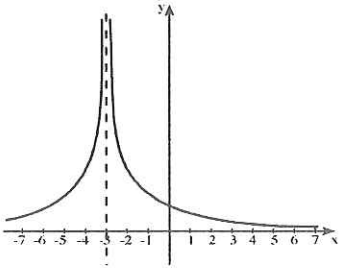
ז) יש 4 נקודות משותפות ,שתי נקודות ששיעור ה- y שלהן 1 ושתי נקודות ששיעור ה- y שלהן 1-.

תרגיל 11

א)



ג, ד)



ב) עבור $x = -3$ $\frac{1}{f}$ לא מוגדרת.

ג) $\frac{1}{f}$ יורדת וחיובית מימין לקו המפריד. (למעשה היא חיובית בכל התחום.)

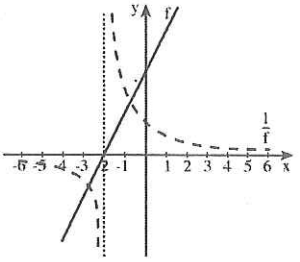
ה) משוואות האסימפטוטות : $x = -3$, $y = 0$.

ו) יש שתי נקודות משותפות, ששיעור y שלהן 1.

ז) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 6x + 9}$ (ii) $(4,0.02),(-7,0.06)$

תרגיל 12

בתרגיל זה משורטטות שתי הפונקציות באותה מערכת צירים.



ב) הפונקציה $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת עבור $x = -2$.

ג) הפונקציה יורדת ושלילית משמאל לקו המפריד.

ה) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x + 4}$

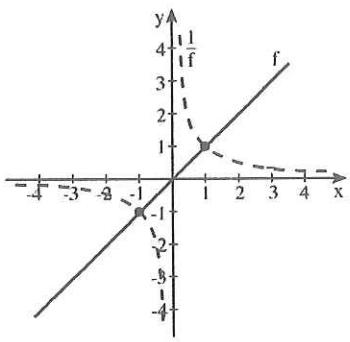
ו) $\frac{1}{f}$ אינה קווית, ניתן להסביר זאת בעזרת הצבה של נקודות והגרף.

בתרגילים 13 ו- 14 משרטטים את הפונקציות $\frac{1}{f}$ המוכרות לתלמידים מהפרק הראשון של ספר זה ($\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$) . הנושא החדש (שרטוט $\frac{1}{f}$ על-פי f) מאפשר תזרה על נושא שנלמד מנקודת מבט שונה. חזרה כזו עשויה לחזק את הקשר בין הנושאים השונים.

תרגיל 13

שני הגרפים (f , $\frac{1}{f}$) משורטטים באותה מערכת צירים כאשר מודגשות הנקודות המשותפות.

תרגיל זה מנחה את התלמידים לשרטט את הגרף של $\frac{1}{f}$ לפי תכונות.



שני הגרפים משורטטים בשלבים בסעיפים א),ב),ה).

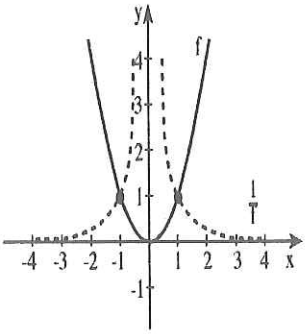
ג) $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת ב- $x = 0$.

ד) (i) משמאל לציר y הפונקציה $\frac{1}{f}$ שלילית ויורדת.

ו) חוק הפונקציה המתקבל : $\frac{1}{x}$.

ייתכן ותלמידים יזהו את $\frac{1}{f}$ כפונקציה מוכרת ויזכרו את צורת הגרף. אם לא, רצוי ליצור את הקשר עם מה שנלמד בפרק הראשון.

תרגיל 14



שני הגרפים משורטטים בשלבים בסעיפים א),ב),ד).

ג) $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת ב- $x = 0$.

ד) (i) הערכים של $\frac{1}{f}$ תמיד חיוביים, בגלל האיבר x^2 ולפי מה שלמדו על פונקציות הופכיות לפונקציות חיוביות.

ה) חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$ הוא : $\frac{1}{x^2}$.

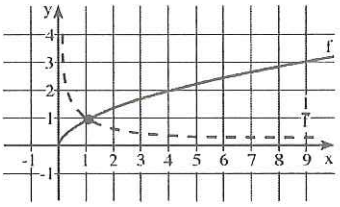
תרגיל 15

ניתן לדחות תרגיל זה לאחר לימוד פונקצית השורש בפרק הבא. אך כיוון שאין צורך בידע קודם, אפשר לפתור אותו בשלב זה, על-פי ההנחיות המפורטות.

שני הגרפים משורטטים בשלבים בסעיפים א,ג).

א) כדאי להנחות את התלמידים להשתמש במקש השורש שבמחשבון, להשלמת שיעורי הנקודות.

(0,0), (0.04,0.2), (0.64,0.8), (1,1), (3,1.73), (4,2).



ב) תכונות הפונקציה f:

- הפונקציה מוגדרת בתחום $x \geq 0$.
- הפונקציה עולה לכל x בתחום הגדרתה.
- $(0,0)$ היא נקודת החיתוך עם שני הצירים.
- הפונקציה חיובית בתחום $x > 0$.
- המינימום הוא ב- $(0,0)$.

ג) (i) $(0.04,5),(0.64,1.25),(1,1),(3,0.58),(4,0.5)$.

ד) תכונות הפונקציה $\frac{1}{f}$:

- הפונקציה מוגדרת בתחום $x > 0$.
- הפונקציה יורדת לכל x בתחום הגדרתה.
- אין נקודות חיתוך עם הצירים.
- הפונקציה חיובית בתחום $x > 0$.
- יש לה שתי אסימפטוטות $x = 0$, $y = 0$.

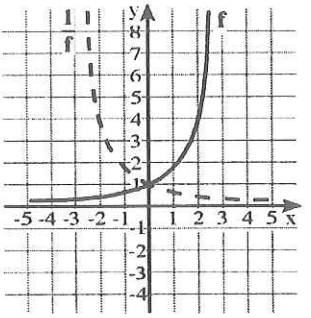
ה) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. (ii) $(0.09,3.33)$, $(9,0.33)$- מטרת חישוב נקודות אלו, להראות את ההתקרבות לאסימפטוטות.

תרגיל 16

בשונה מהתרגיל הקודם, אם לא נלמדה הפונקציה המעריכית (בספר "סדרות ופונקציות נוספות"), אין אנו ממליצים לפתור תרגיל זה בשלב זה. פעולת השורש מוכרה לתלמידים, מה שלא נכון לגבי הפונקציה $y = e^x$.

א) $(-5, 0.007)$, $(-2,0.13)$, $(0,1)$, $(1,2.72)$, $(2,7.39)$.

שני הגרפים משורטטים בשלבים בסעיפים א,ג).



ב) תכונות הפונקציה f :

- הפונקציה עולה לכל x.
- אין לפונקציה נקודות קיצון.
- (0,1) היא נקודת החיתוך עם ציר y.
- הפונקציה חיובית לכל x.
- ציר x אסימפטוטה.

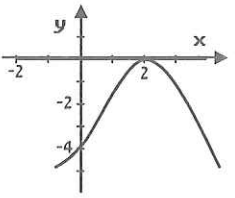
ג) (i) תכונות הפונקציה $\frac{1}{f}$:

- הפונקציה יורדת לכל x.
- הפונקציה חיובית לכל x.
- אין לפונקציה נקודות קיצון.
- (0,1) היא נקודת החיתוך עם ציר y.
- הפונקציה חיובית לכל x.
- ציר x אסימפטוטה.

ד) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x}$. (ii) (5,0.007), (0,1), (-2,7.39).

תרגיל 17

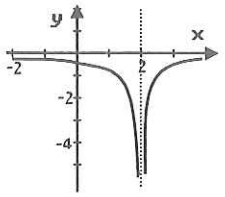
א) משרטטים תחילה את f לפי תכונות, ועל פי הגרף של f משרטטים את $\frac{1}{f}$.



ב) תכונות של $\frac{1}{f}$:

- (0,-0.25) היא נקודת חיתוך עם ציר y.
- ב- $x = 2$ הפונקציה לא מוגדרת.
- $x = 2$ היא משוואת האסימפטוטה.
- הפונקציה יורדת בתחום $x < 2$.
- הפונקציה עולה בתחום $x > 2$.

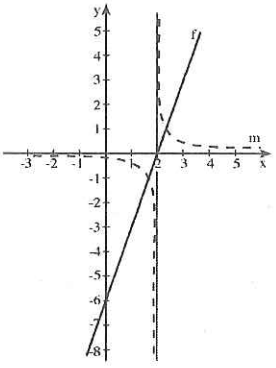
ג)

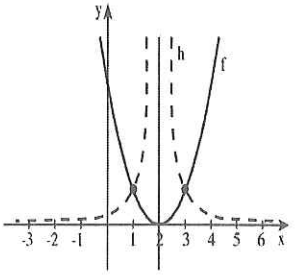


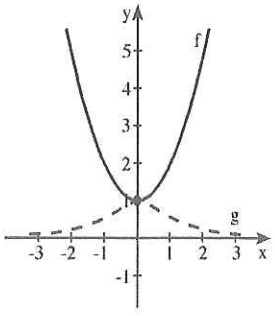
תרגילים 18-20

בתרגילים אלו אין הדרכה והתלמידים יכולים ליישם כאן את כל מה שלמדו בפרק זה: שרטוט לפי נקודות, לפי תכונות או שילוב של השניים.

הפונקציה f הרשומה בכל אחד מהתרגילים היא ריבועית או קווית.







התרגילים דומים לאלו שבמהלך. בתרגילים 21-24 , 26-28 הפונקציה f ריבועית, בתרגילים 29-30 הפונקציה f קווית ובתרגיל 25 הפונקציה היא : x^3.
בהמשך מובאים הפתרונות לכל תרגיל .

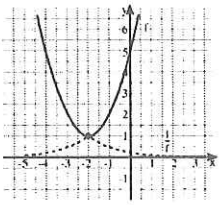
21. א) תכונות של f :

- (-2,1) נקודת מינימום.
- (0,5) נקודת חיתוך עם ציר ה- y.
- אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר x , לכן נרשום מספר נקודות נוספות: (-1,2), (-3,2), (-4,5).

ב) תכונות של $\frac{1}{f}$:

- (-2,1) נקודת מקסימום.
- (0,0.2) נקודת חיתוך עם ציר ה- y.
- אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר x.
- הפונקציה עולה בתחום $x < -2$, הפונקציה יורדת בתחום $x > -2$.

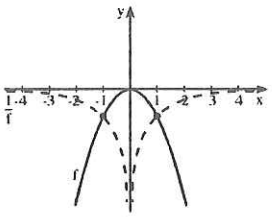
ג, ד)



ד) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+4x+5}$. (ii) (-6,0.06) , (4,0.03).

ה) כאשר ערכי x גדלים ערכי $\frac{1}{f}$ הולכים וקטנים.

22. א,ב) שני הגרפים משורטטים באותה מערכת צירים ומודגשות הנקודות המשותפות.

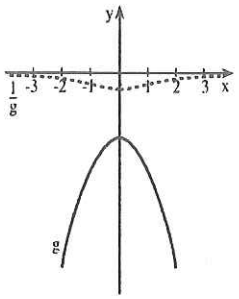


ג) $\frac{1}{f}$ לא מוגדרת עבור $x = 0$.

ד) ל- $\frac{1}{f}$ אין ערכים חיוביים, ניתן לנמק זאת בעזרת התבנית ($-x^2$ תמיד קטן או שווה לאפס ולכן $\frac{1}{-x^2}$ תמיד שלילי.) או בעזרת הגרף של $-x^2$ ששורטט בסעיף א' והקשר שבין f ל- $\frac{1}{f}$ אותו למדו התלמידים בפרק זה.

ה) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-x^2}$.

23. א) תכונות של g:



- (0,-2) היא נקודת הקיצון של g והיא גם
- נקודת חיתוך עם ציר y.
- אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר x לכן
- ממליצים לחשב נקודות נוספות.

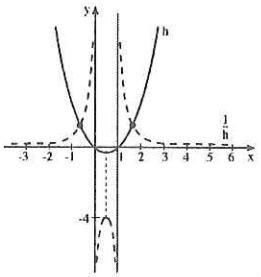
ב) תכונות של $\frac{1}{g}$:

(i) (0,-0.5) נקודת מינימום.

(ii) הפונקציה יורדת בתחום $x < 0$ ועולה בתחום $x > 0$.

(iii) הפונקציה שלילית לכל x.

24. א) תכונות של h:



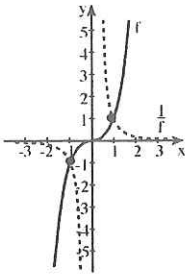
- (0.5,-0.25) נקודת מינימום.
- (1,0), (0,0) נקודות חיתוך עם הצירים.

ב) $\frac{1}{h}$ אינה מוגדרת עבור $x = 0$, $x = 1$.

ד) משוואות האסימפטוטות: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

ה) החוק: $\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x^2 - x}$.

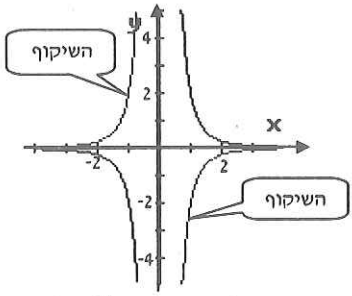
25. א, ב, ה) שני הגרפים משורטטים באותה מערכת צירים, ושתי הנקודות המשותפות מודגשות.



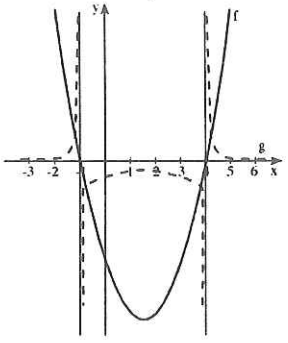
ג) $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת עבור $x = 0$.

ו) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3}$.

ז) משורטטים שני הגרפים: $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3}$ והשיקוף שלה בציר x. החוק המתאים לשיקוף הוא $-\frac{1}{x^3}$



26.



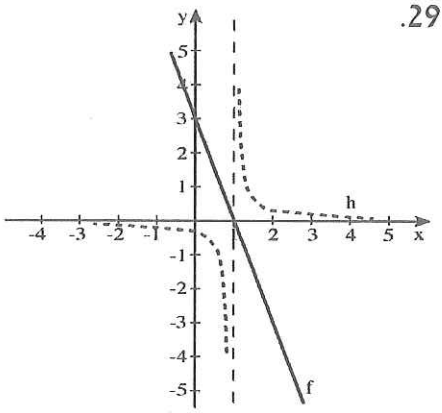
27. (-2,0.25) היא נקודת מינימום של $\frac{1}{f}$.

28. (6,-36) נקודת מינימום של f. (6,-0.03) נקודת מקסימום של $\frac{1}{f}$.

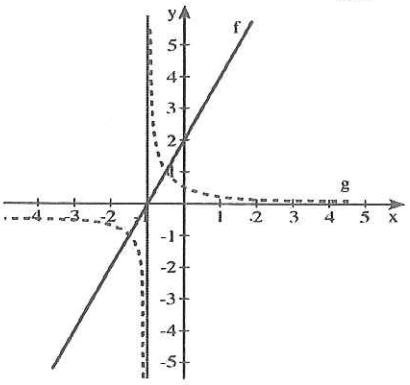
אפשר להוסיף שאלה : מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $y = \frac{1}{4x - x^2}$.

הכוונה שימצאו תחילה את נקודת הקיצון של $f(x) = 4x - x^2$, שהיא (2,4). לאחר מכן להיעזר בקשר בין תכונות הפונקציה f ל- $\frac{1}{f}$, ולהסיק שנקודת הקיצון של הפונקציה הנתונה היא : (2,0.25).

.29



.30



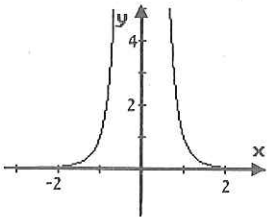
31. התאמת חוק לגרף :

א) (iii) ↔ , ב) (iv) ↔, ג) (i) ↔. ד) (ii) ↔.

תרגילים נוספים

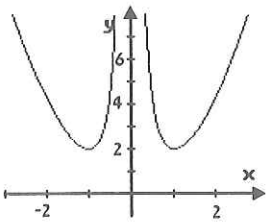
לאחר תרגול אינטנסיבי של f ו- $\frac{1}{f}$, ייתכן ונוצרה אצל התלמידים תחושה של גרפים שונים. עבור המתקדמים אפשר להוסיף את התרגילים הבאים, מצורפים גם הפתרונות.

1. לאחר שרטוט של $\frac{1}{f}$ התקבל הגרף הבא :



אך נעלם הגרף של f . התוכלו לשחזר אותו?

2. לאחר שרטוט של $\frac{1}{f}$ התקבל הגרף הבא:

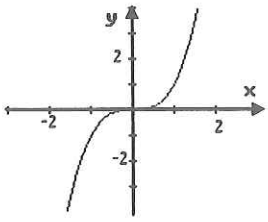


אך נעלם הגרף של f. התוכלו לשחזר אותו?

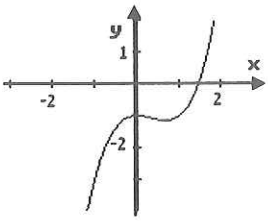
3. התאימו גרף של f לגרף של $\frac{1}{f}$.

הגרפים של f:

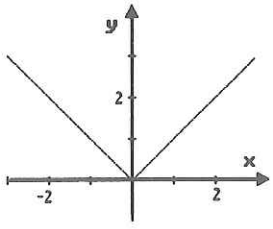
א)



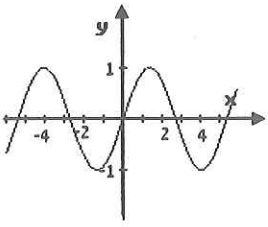
ב)



ג)

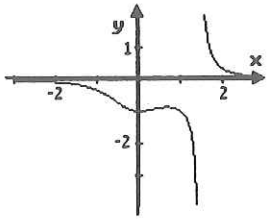


ד)

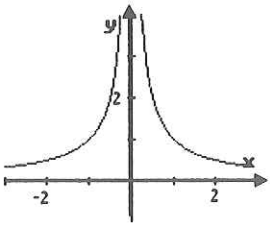


גרפים של $\frac{1}{f}$:

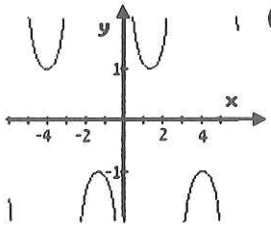
(i)



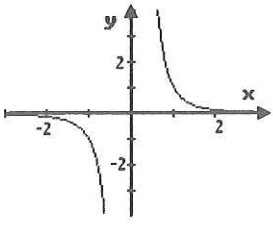
(ii)



(iii)



(iv)



4. שרטטו גרף של f וגרף של $\frac{1}{f}$ כך ש:

- אין לפונקציות נקודות קיצון.
- הן חיוביות.
- הנקודה המשותפת היא: $(0,1)$.

5. א) שרטטו גרף של $f(x) = x$.

ב) שרטטו גרף של $\frac{1}{f}$.

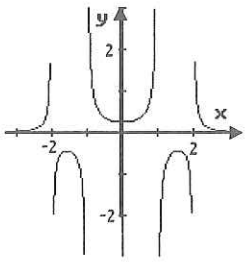
ג) שרטטו גרף של $g(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$

תרגיל זה ניתן לשרטט על פי תכונות ולבדוק בעזרת מחשב.

6. א) ישנו סוג אחד של פונקציות עבורן הגרף של f ושל $\frac{1}{f}$ מאותה צורה, תארו את הפונקציות.

ב) מצאו חוקים של פונקציות עבורן הגרף של f ושל $\frac{1}{f}$ זהים, שרטטו.

7. להלן גרף של $\frac{1}{f}$:

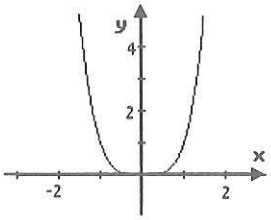


א) כמה נקודות חיתוך יש לפונקציה f עם ציר x?
ב) כמה נקודות קיצון ל- f?

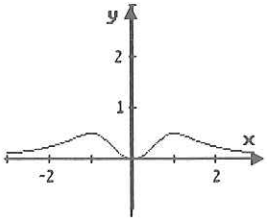
ג) האם יש אסימפטוטות ל- f? הסבירו.

תשובות לתרגילים הנוספים

1.

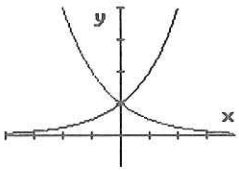


2.



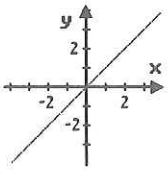
3. א) $(iv) \leftrightarrow$, ב) $(i) \leftrightarrow$, ג) $(ii) \leftrightarrow$. ד) $(iii) \leftrightarrow$.

4.

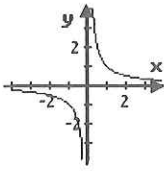


למעשה כל אחת מהפונקציות יכולה להיות f והשניה $\frac{1}{f}$.

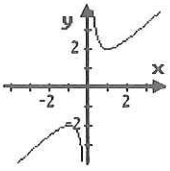
5. א)



ב)



ג)



6. א) הפונקציות הקבועות.

ב) $f(x) = 1$, $f(x) = -1$.

7. א) ארבע נקודות חיתוך:

ב) שלוש נקודות קיצון.

ג) אין אסימפטוטת ל- f.

אפשר גם לבקש לרשום בערך את נקודות הקיצון של f ואז גם את תחומי העלייה והירידה.

פרק ג: עוד משפחה של פונקציות

מבוא לפרק

פרק זה עוסק בעיקר בפונקצית השורש והוא כולל ארבעה סעיפים:

- **התאמה והתאמה הפוכה**: הסעיף מהווה הכנה לפונקצית השורש המתקבלת כהתאמה הפוכה לפונקציה ריבועית. עוסקים בנושא משלושה היבטים:
  א) גרפי, מקבלים התאמה הפוכה מגרף נתון בעזרת דף שקוף.
  ב) רואים את הקשר בין נקודות מתאימות של התאמות הפוכות: לכל נקודה (a , b) שעל גרף התאמה, הנקודה (b , a) על גרף ההתאמה ההפוכה.
  ג) חוק של התאמה הפוכה לפונקציה קווית.
  יישום הקשר בין התאמה להתאמה הפוכה נעשה גם עם הפונקציות המעריכיות בספר "סדרות ופונקציות אחרות".
  לתלמידים טובים ברמה זו או ברמת לימוד גבוהה יותר, אפשר להרחיב את הגישה שמוצגת בפרק ולעסוק גם: 1) בתנאים שהפונקציה הנתונה צריכה לקיים כדי שההתאמה ההפוכה תהיה פונקציה 2) בקשר בין תכונות של הפונקציה והפונקציה ההפוכה (למשל: לפונקציה הנתונה אין נקודות קיצון והיא או עולה או יורדת. יש תכונות שנשמרות: עלייה/ירידה, חיוביות /שליליות אך יש תכונות שמשתנות כמו: נקודת חיתוך עם ציר x "הופכת" לנקודת חיתוך עם ציר y).
- **פונקצית השורש**: $y = \sqrt{x}$, מוצגת כפונקציה הפוכה לפונקציה הריבועית $y = x^2$ בתחום בו $x \geq 0$. מקבלים את הגרף באותו אופן כפי שקבלו התאמה הפוכה בסעיף הקודם. הסעיף גם עוסק בפעולת השורש.
- **הזזה** (לאורך שני הצירים) ושיקוף בציר x של פונקצית השורש.
- **חקירה** של הפונקציה $y = \sqrt{x}$ בעזרת נגזרת.

התאמה והתאמה הפוכה (עמודים 141-149 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה עוסקים בקשר בין התאמה להתאמה הפוכה של גרפים שונים, לצורך זה נעזרים בדף שקוף. מומלץ להתרכז בקשר הזה מבלי לדון בשאלה האם התאמה הפוכה היא פונקציה אלא אם רמת הכיתה מאפשרת זאת.

במהלך שלושה שלבים:

בשלב ראשון (תרגילים 1-6) יוצרים התאמה הפוכה מההתאמה הנתונה בעזרת הגרף בשלמותו, כישות אחת.

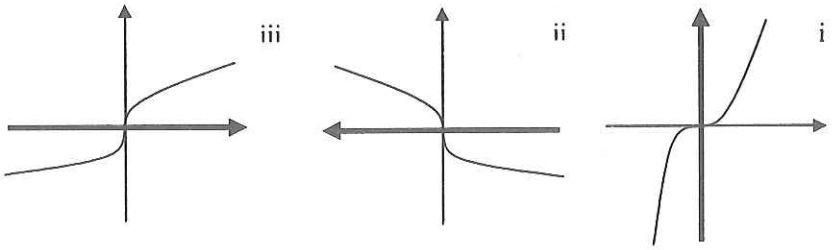
בשלב שני (תרגילים 7-8) יוצרים התאמה הפוכה בעזרת נקודות על ההתאמה ודנים בקשר בין שיעורי הנקודות של ההתאמה וההתאמה ההפוכה.

בשלב שלישי (תרגילים 9-11) מתייחסים לחוק ההתאמה ולחוק של ההתאמה ההפוכה של פונקציות קוויות.

תרגיל 1

התאמה הפוכה מוצגת כתוצאה של "החלפת" הצירים.

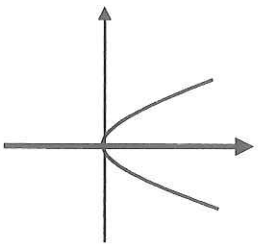
א) לקבלת גרף ההתאמה ההפוכה, מניחים תחילה את הדף השקוף על הגרף המשורטט, מסובבים אותו עד שמקבלים גרף שציריו מוחלפים, עם הקפדה על כיוונם (בשרטוט שלבים i+ii) , לכן סיבוב ב- 90^0 לא מספיק וצריך גם שיקוף. לבסוף מניחים את הגרף המתקבל במערכת הצירים הריקה. כדי להדגיש את ההחלפה בצירים, ציר y מודגש בשרטוט הנתון, ובמערכת הצירים הריקה (שעליה מניחים את ההתאמה ההפוכה) ציר x מודגש.

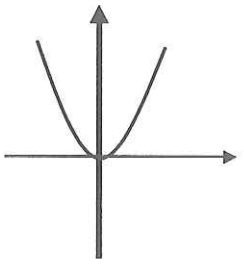


את התלמידים כדאי רק לכוון להחלפת הצירים ולשמירה על כיוונם, ולא להדגיש את הסיבוב והשיקוף, וזה כדי שיהיה להם משהו ויזואלי לבדיקה עצמית.

תרגיל 2

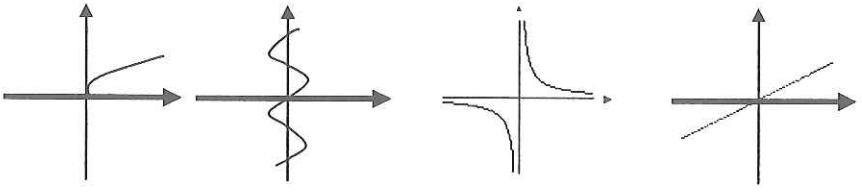
קבלת התאמה הפוכה, כמו בתרגיל זה, תשמש גם במעבר לגרף של פונקצית השורש. במקרה זה ההתאמה ההפוכה (שרטוט שמאלי) אינה פונקציה אך, כאמור, אין התייחסות מפורשת לזה.





תרגיל 3

מטרת התרגיל היא לבסס את המיומנות של "שרטוט" גרף התאמה הפוכה מגרף התאמה נתון של פונקציות שונות מוכרות: קו ישר , $y = \frac{1}{x}$, $y = \sin x$, ענף אחד של הפונקציה $y = x^2$.



כדאי לשים לב שישנם פונקציות שהן הפוכות לעצמן. עניין זה יתבהר לאחר שהתלמידים יעסקו גם ב"היפוך" נקודות של התאמות הפוכות ואז ירגישו באופן ברור שהשוויון $b = \frac{1}{a}$ שקול לשוויון $a = \frac{1}{b}$

תרגיל העוסק בהתאמות הפוכות של קווים ישרים, והוא מיועד גם להסב את תשומת לב התלמידים לקשר בין שיפוע של ישר והישר "ההפוך לו".

נעזרים בדף השקוף כדי ליצור התאמה הפוכה של קו ישר. קוראים את משוואות הישרים של שתי ההתאמות. את חוק ההתאמה ההפוכה קוראים מתוך הגרף. בפרק זה לא עוסקים כלל במציאת חוק התאמה הפוכה לחוק נתון. אך פשטות הפונקציות (החוק והגרף) מאפשרת השוואה בין התכונות של שתי ההתאמות והחוקים שלהן.

א) (i) - משוואת הישר המשורטט : $y = 2x - 2$.

- משוואת הישר של ההתאמה ההפוכה : $y = \frac{1}{2}x + 1$.

(ii) - משוואת הישר המשורטט : $y = -3x+3$.

- משוואת הישר של ההתאמה ההפוכה : $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

(iii) - משוואת הישר המשורטט : $y = x$.

- משוואת הישר של ההתאמה ההפוכה : $y = x$.

ב) כאשר הישר הוא פונקציה עולה (יורדת) אז גם הישר "ההפוך" הוא פונקציה עולה (יורדת). השיפועים הופכיים זה לזה, כלומר: מכפלת השיפועים שווה ל- 1.

אפשר לדבר גם על פונקציות קבועות. במקרה זה ההתאמות ההפוכות הם ישרים מקבילים לציר y .

ג) נקודות החיתוך עם ציר x (ציר y) של ההתאמה הנתונה "הופכת" להיות נקודת החיתוך עם ציר y (ציר x) של ההתאמה ההפוכה. אם הישר עובר דרך ראשית הצירים אז גם הישר "ההפוך" עובר דרך ראשית הצירים.

לתלמידים מתקדמים אפשר להוסיף שאלה, כהכנה לציר הסימטריה של התאמות הפוכות: האם ייתכנו המצבים ההדדים בין ישרים (נחתכים, מקבילים, מתלכדים) , גם בין ישר ל"הפוך" לו? אם כן, באילו מקרים?

(פתרון: מתלכדים כאשר : $y = x$, $y = -x$. מקבילים כאשר השיפוע 1 או -1 ו- $b \neq 0$. כדאי לשים לב שערכי b של שני הישרים מנוגדים. ישרים נחתכים,

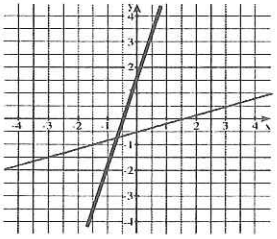
כאשר הישרים מקבילים לצירים או כאשר השיפועים שונים מ- 1 או מ- 1- .

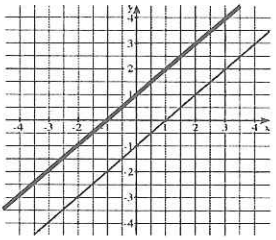
במקרה האחרון שני הישרים המתקבלים: $y = ax + b$, $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$,

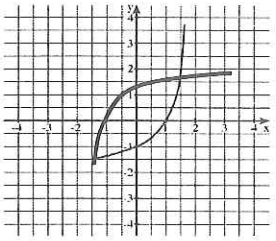
($a \neq 0,1$).

תרגיל 5

בתרגיל זה התלמידים נדרשים לשרטט, בפעם הראשונה, באותה מערכת צירים שבה משורטטת ההתאמה הנתונה, את ההתאמה ההפוכה ללא תמיכת גרף המשורטט על דף שקוף. רוב התלמידים מעתיקים את השרטוט על דף שקוף ויוצרים התאמה הפוכה, כפי שעשו בתרגילים הקודמים. תלמידים עם ראייה ויזואלית מפותחת מסוגלים לשרטט התאמה הפוכה ללא דף שקוף. אחרים עשויים להיעזר, לגבי הישרים, גם בקשר בין השיפועים שמצאו בשאלה הקודמת.

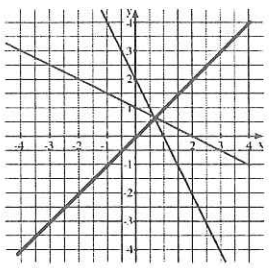


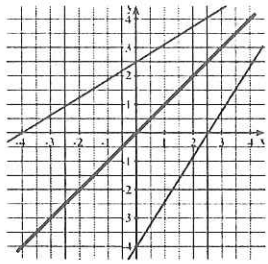


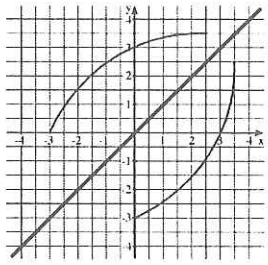


תרגיל 6

תרגיל זה מסב את תשומת לב התלמידים לסימטריה הקיימת בין הגרפים של שתי התאמות הפוכות ביחס לציר הסימטריה $y = x$. תכונה זאת בולטת יותר כאשר שני הגרפים משורטטים באותה מערכת צירים, והיא עשויה לעזור בבניית שרטוט התאמה הפוכה להתאמה נתונה.







אפשר להדגים את משמעות הסימטריה של שתי ההתאמות לגבי הישר $y = x$ בעזרת שרטוט שתי ההתאמות והישר $y = x$ על דף שקוף, ובעזרת קיפול (כפי שעשינו עם ציר הסימטריה בפונקציה הריבועית) רואים שהאחת "נופלת" על השנייה. כמו כן אפשר לקשר זאת לפונקציות בתרגיל 4 - (iii) וב- 3 - (ii), בהם הפונקציות הפוכות לעצמן.

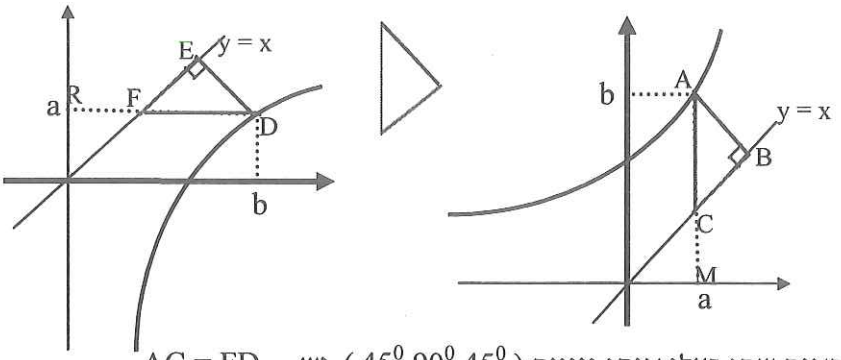
למורים:

כדי להסביר שכל שתי נקודות A (a,b) (שעל גרף ההתאמה), ו- D(b,a) (שעל גרף ההתאמה ההפוכה) הן סימטריות ביחס לישר $y = x$, נראה שהמרחק של כל אחת מהנקודות מהישר $y = x$, שווה .

יש להראות ש: $AB = DE$. נראה זאת בשלושה אופנים.

דרך א'

כדי להוכיח ש- AB = DE יש להוכיח שהמשולשים ABC , DEF חופפים.



קל לראות שהן בעלי אותן זוויות ($45^0, 90^0, 45^0$) וש- AC = FD

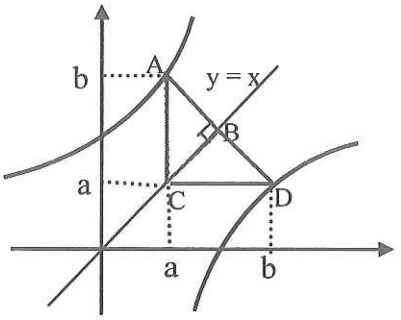
(כי RD = AM = b בגלל ההיפוך, ו- RF = CM כי הנקודות C, F על הישר y = x ו לכן, RD – RF = AM – C .

אפשר להראות לתלמידים מתקדמים הוכחה זאת במלואה, או להראות בעזרת שקפים שהמשולשים חופפים.

דרך ב'

שתי ההתאמות משורטטות על אותה מערכת צירים. במקרה זה נוצר משולש ACD שהוא ישר זווית ושווה שוקיים.

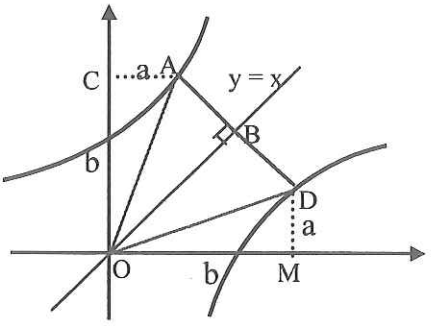
ומכאן AB = BD.



דרך ג'

משולשים OCA, OMD חופפים,

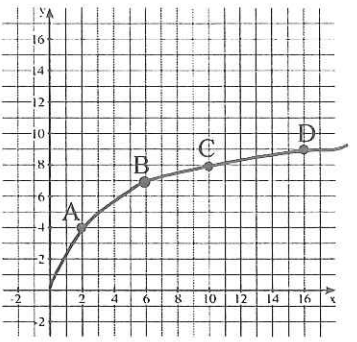
לכן OA = OD ומכאן AB = BD.

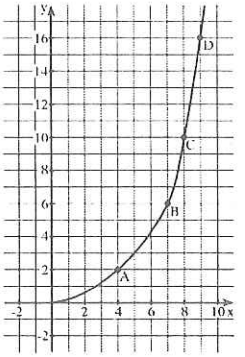


שאלה 7

שאלה זאת תומכת במעבר מהקשר בין הגרפים (של התאמה I וההתאמה ההפוכה לה II) לקשר בין נקודות מתאימות בשני הגרפים. מטרת השאלה היא להגיע למסקנה כי שיעורי נקודות מתאימות מוחלפים, למשל A(4,2) שעל גרף I מתאימה ל- A(2,4) שעל גרף II. את הקשר הזה בודקים על עוד 3 נקודות.

א,ב)





ג)

הנקודה	I	II
A	(4,2)	(2,4)
B	(7,6)	(6,7)
C	(8,10)	(10,8)
D	(9,16)	(16,9)

ד) בהתאמות הפוכות שיעורי הנקודות מוחלפים, כלומר הנקודה (a,b) בהתאמה "הופכת" לנקודה (b,a) בהתאמה ההפוכה.

בדיון על שאלה זאת אפשר לשאול, אילו נקודות נמצאות על שתי ההתאמות? כדאי גם לקשר לציר הסימטריה y = x. למעשה כל הנקודות ששיעור x שלהן שווה לשיעור ה- y, הן נקודות משותפות לשתי ההתאמות ולישר הסימטריה.

כדי להמחיש זאת כדאי לשרטט את שני הגרפים באותה מערכת צירים.

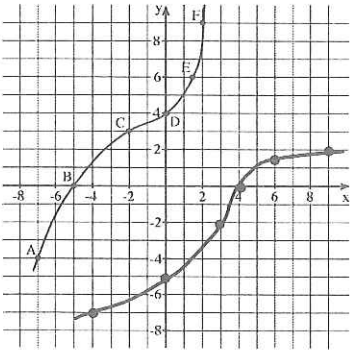
אפשר להחזיר את התלמידים לגרפים בתרגיל 6 – (ii) ולהדגיש את הנקודה המשותפת (0.75,0.75).

התרגילים מבוססים על המסקנה שהתקבלה בתרגיל 7 בשני אופנים:

i) קבלת נקודות שעל התאמה הפוכה ושרטוט הגרף על פיהן (תרגילים 8-9).

ii) בדיקת חוק של התאמה הפוכה שהיא קווית(תרגילים 10-11). התלמידים יכולים לשער (ולבדוק את ההשערה) את חוק ההתאמה ההפוכה כאשר ההתאמה היא קווית.

8.



נקודות על הגרף המשורטט	נקודות על הגרף ההתאמה ההפוכה
A(-7,-4)	(-4,-7)
B(-5,0)	(0,-5)
C(-2,3)	(3,-2)
D(0,4)	(4,0)
E(1.5,6)	(6,1.5)
F(2,9)	(9,2)

9. א) השלמת שיעורי הנקודות שעל גרף הפונקציה: $y = -3x + 4$:

(3,-5), (1,1), (0,4), (-1,7).

ב) השלמת שיעורי הנקודות המתאימות שעל גרף ההתאמה ההפוכה:

(-5,3), (1,1), (4,0), (7,-1).

לשתי ההתאמות יש נקודה משותפת (1,1) והיא גם על גרף הישר $y = x$.

אפשר לבקש מהתלמידים למצוא את חוק ההתאמה ההפוכה ($y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$)

ולבדוק שוב את הקשר בין השיפועים.

10. א) התלמידים משערים את חוק ההתאמה ההפוכה. הם יכולים לבדוק את השערתם באחת מהדרכים הבאות:

(i) שרטוט הישר ו"היפוכו" (בעזרת דף שקוף) ובדיקה שהגרף ה"הפוך" מתאים לחוק שרשמו.

(ii) לקחת מספר נקודות על הישר הנתון, "להפוך" אותן ולבדוק אם הן מקיימות את החוק שרשמו.

(iii) לבדוק אם שני הגרפים המתאימים סימטרים לגבי הישר $y = x$.

חוק ההתאמה ההפוכה: $y = \frac{1}{3}x$

ב) השלמת שיעורי הנקודות שעל גרף הפונקציה: $y = 3x$:

(2,6), (0,0), (-1,-3).

ג) השלמת שיעורי הנקודות שעל גרף ההתאמה ההפוכה:

(6,2), (0,0), (-3,-1). הנקודות מקיימות את החוק ב- א'.

11. א) החוק הרשום בסעיף (ii): $y = \frac{1}{2}x$ הוא חוק ההתאמה ההפוכה של $y = 2x$.

כדאי לדון מדוע החוקים האחרים לא מתאימים. חוק (iv) לא מתאים כי גרף של התאמה העובר דרך הראשית, גרף ההתאמה ההפוכה לה גם יעבור דרך הראשית. הישר הנתון הוא עולה, לכן הישר ה"הפוך" גם עולה, לכן חוקים (i) ו- (iii) לא מתאימים.

ב) בעזרת הגרף של ההתאמה ההפוכה, אפשר להיעזר בדרכי הבדיקה שהוזכרו קודם.

ג) סעיף זה נועד לחזור על אחת הבדיקות האפשריות.

A(1,2), לכן הנקודה המתאימה על ההתאמה ההפוכה: (2,1).

כתוספת אפשר לשאול: האם בין הישרים הרשומים יש זוג של ישרים "הפוכים"? (תשובה: i , iii).

פונקציית השורש (עמודים 150-154 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

הפונקציה מוצגת כהתאמה הפוכה ל - $y = x^2$ באותה גישה: בנית התאמה הפוכה בעזרת דף שקוף, קשר בין נקודות מתאימות של שתי ההתאמות והסמטריה של ההתאמות ההפוכות לגבי הישר $y = x$.

התלמידים משערים את הקשר בין שיעור y לשיעור x של ההתאמה הפוכה של $y = x^2$, הם מקבלים את חוק ההתאמה ההפוכה, מציבים בחוק שמקבלים ובודקים באמצעותו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

בהמשך מתמקדים בפונקצית השורש, מחשבים ערכים תוך שימוש בפעולת השורש וכן נעזרים במחשבון לחישובים.

תרגיל 1

התרגיל דומה לתרגיל 2 מהסעיף קודם. גם פה מתקבלת התאמה הפוכה בעזרת דף שקוף. הגרף משורטט במערכת צירים משובצת על מנת לתמוך בקריאה של נקודות וראית הקשר בין שיעורי נקודות מתאימות על הגרפים של ההתאמות ההפוכות.

ד) שתי נקודות ששיעור x שלהן 4: (4,2), (4,-2).

שתי נקודות ששיעור x שלהן 6: (6,2.5), (6,-2.5) (שיעור y בקירוב)

ה) את הטבלה ניתן להשלים בשתי דרכים: (i) בעזרת הגרפים של שתי ההתאמות. (ii) בעזרת החוק הנתון $y = x^2$ ובעזרת הידוע לתלמידים על שיעורי נקודות בהתאמות הפוכות.

הערה: מהסעיף הבא מתייחסים רק לענף החיובי של ההתאמה ההפוכה.

פונקציה מקורית $f(x) = x^2$	**פונקציה הפוכה**
(0,0)	(0,0)
(1,1)	(1,1)
(2,4)	(4,2)
(3,9)	(9,3)

ו) סעיף זה נועד לתמוך ביצירת הקשר בין שיעור y לשיעור x של ההתאמה ההפוכה g. ייתכן ותלמידים יציעו את פעולת השורש, או ינסחו זאת אחרת למשל: "נחפש מספר שאם נעלה אותו בריבוע יתקבל שיעור x הנתון". (144,12), (100,10), (25,5).

תרגיל 2

בתרגיל זה קוראים מגרף נתון של $g(x)=\sqrt{x}$ שיעורי y לא שלמים, ונעזרים במחשבון כדי לתת תשובה יותר מדויקת. $\sqrt{3}\approx 1.7$, $\sqrt{6}\approx 2.5$, $\sqrt{10}\approx 3.2$

תרגיל 3

בתרגיל זה מחשבים שורשים בעזרת מחשבון. המספרים שבתוך השורש הם חיוביים או אפס. בתרגיל 4 בודקים מה קורה לגבי מספרים שליליים.

א) $\sqrt{256}=16$ ב) $\sqrt{1024}=32$ ג) $\sqrt{5}\approx 2.23$

ד) $\sqrt{0.05}=0.22$ ה) $\sqrt{0}=0$ ו) $\sqrt{2.25}=1.5$

תרגיל 4

בתרגיל זה מנסים להסביר מדוע אין שורי ריבועי למספר שלילי. תלמידים מתבקשים להסביר את התשובה של המחשבון (Error) על ידי הגרף. כדאי גם לדון מדוע הגרף משורטט בתחום $x \geq 0$, תוך כדי אִזכור תכונות העלאה בריבוע והשורש.

א) בהפעלת המחשבון עם המקש $\sqrt{\ }$ על המספר 9- מופיעה על הצג המילה Error (או כל סימון אחר המורה על שגיאה).

ב) תרגיל זה נועד להבהיר טעויות אפשריות לגבי מיקום סימן המינוס (בתוך השורש ומחוץ לשורש).

i) $\sqrt{-81}$ חסר משמעות. ii) $-\sqrt{100} = -10$ iii) $\sqrt{-4}$ חסר משמעות.

ג) בפונקציה $g(x) = \sqrt{x}$ ניתן להציב רק מספרים אי-שליליים כלומר חיוביים ואפס.

תרגיל 5

מטרות החישוב והסדר של התרגילים הן:

- תרגול בחישוב השורש בעזרת מחשבון.
- תמיכה בראיית פונקצית השורש כפונקציה עולה. (כדאי לעזור לתלמידים להיווכח בזאת.)
- תמיכה בראיית תכונת השורש: עבור מספרים בין $0 < x < 1$, השורש "מגדיל", ועבור $x > 1$ השורש "מקטין". (כדי לראות את ההבדל יש חשיבות להקפיד על סדר החישוב מימין לשמאל). חישוב זה עוזר להסביר בשאלה 6 מדוע גרף השורש מעל לפונקציה הריבועית עבור $0 < x < 1$ ומתחתה עבור $x > 1$.

$\sqrt{0.16} = 0.4$, $\sqrt{0.25} = 0.5$, $\sqrt{0.4} = 0.63$, $\sqrt{0.5} = 0.71$, $\sqrt{0.6} = 0.77$

$\sqrt{0.7} = 0.84$, $\sqrt{0.8} = 0.89$, $\sqrt{0.9} = 0.95$, $\sqrt{0.99} = 0.99$, $\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{1.01} = 1.005$, $\sqrt{1.1} = 1.05$, $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$

תרגיל 6

בשאלה משורטטות שתי הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \sqrt{x}$ כולל ציר הסימטריה. מטרת התרגיל היא לשים לב באיזה תחום הגרף של g נמצא מעל f, ומתי הוא נמצא מתחת. העובדה ששורש של מספר גדול לפעמים מהמספר עצמו מפתיעה והבדיקה לכך נעשית בעזרת חישובים נומרים שנעשו בתרגיל 5.
בקשר בין הגרפים של פונקציה ופונקצית השורש שלה, עוסקים שוב בפרק על הפונקציות המורכבות.

תרגילים

בפתרון התרגילים 8,7 כדאי להדגיש את סדר הפעולות.

7. $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-3^2}$, $\sqrt{(-5)^3}$, $-\sqrt{-16}$, $-\sqrt{-4^2}$

8. א) 3.41 ב) 9.43 ג) חסר משמעות ד) 2.83 ה) 0.59 ו) 46..96 ז) 2.24 ח) -2.66 ט) –2.24

9. א) $g(9) = 3$ ב) $g(0) = 0$ ג) $g(0.25) = 0.5$ ד) $g(10) = 3.16$ ה) חסר משמעות ו) $g(125) = 11.18$

עוד על שורשים (עמודים 155 – 162 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

לאחר שהתלמידים הכירו את פונקצית השורש, לומדים על פונקציות נוספות המתקבלות על-ידי הזזה של הגרף של $g(x)=\sqrt{x}$ לאורך ציר y ולאורך ציר x, ושיקוף בציר x, כפי שנעשה עם משפחות של פונקציות אחרות (ריבועיות, טריגונומטריות ו- $y=\frac{1}{x}$).

תרגיל 1

כפי שעשינו בהזזות אחרות לאורך ציר y, גם כאן נעזרים בדף שקוף, משערים מהו חוק הגרף המוזז ובודקים בעזרת נקודה על הגרף המתקבל.
כדאי להדגים בכיתה את ההזזה בעזרת שקפים (שקף עם גרף הפונקציה, כפי שמופיע בספר ושקף נייד של הגרף בלבד). כדאי להדגיש נקודה על שני השקפים למשל: (9,3). בדיון כדאי להתייחס גם לנקודה שזזה.

ב) חוק הפונקציה המתקבל מהזזת גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$ ב- 2 יחידות למעלה לאורך ציר y הוא: $y=\sqrt{x}+2$.

ג) כדאי להמליץ לתלמידים לבדוק בעזרת נקודה ששיעוריה שלמים. למשל הנקודה (9,5) מקיימת את חוק הפונקציה: $\sqrt{9}+2=3+2=5$. כדאי להדגיש ששיעור y של הנקודה המקורית (9,3) עלה ב- 2 יחידות.

תרגיל 2

בתרגיל זה עוסקים בהזזה למטה לאורך ציר y ומתייחסים לנקודת המינימום שהיא נקודת קצה. אפשר, בסיום, להתייחס לתכונות נוספות של ההזזה שמשתנות או נשמרות ביחס לפונקציה $y=\sqrt{x}$.

ב) חוק הפונקציה המוזזת: $y=\sqrt{x}-3$.

ג) למשל הנקודה (4,-1) נמצאת על גרף ההזזה ומקיימת את החוק :

$$\sqrt{4}-3=2-3=-1$$

ד) (0,-3) היא הנקודה ששיעור y שלה הוא הקטן ביותר.

ה) את שיעורי נקודת החיתוך קוראים מהגרף ובודקים על-ידי הצבה בחוק.

(9,0) היא נקודת החיתוך של גרף ההזזה עם ציר x, כפי שמראה הבדיקה :

$$\sqrt{9}-3=3-3=0 .$$

מומלץ לשאול תלמידים כיצד מוצאים את נקודת החיתוך עם ציר x בעזרת החוק כלומר על-ידי פתרון המשוואה $\sqrt{x}-3=0$. כדי לפתור את המשוואה $\sqrt{x}=3$ אפשר לחפש מספר שהשורש שלו נותן 3, או להעלות בריבוע את שני האגפים.

תרגיל 3

ב) חוק הפונקציה המתקבל משיקוף בציר x של הגרף של $y=\sqrt{x}$ הוא :

$$y=-\sqrt{x} .$$

ג) כדאי להדגים גם פה בעזרת שקפים, להדגיש אחת מהנקודות, לקרוא את שיעורי הנקודה שהיא שיקוף של המודגשת, ולבדוק שהיא אכן מקיימת את חוק השיקוף.

ד) תחום ההגדרה של הפונקציה $y=-\sqrt{x}$ זהה לזה של $y=\sqrt{x}$ כלומר : $x \geq 0$.

רצוי להדגיש שתשובה זאת אפשר לקבל מהתבוננות בגרף או בחוק.

תרגיל 4

מזיזים את הפונקציה $y=-\sqrt{x}$ ומתייחסים לחלק מתכונות הפונקציה המתקבלת.

ב) חוק הפונקציה המוזזת : $y=-\sqrt{x}+1 .$

ג) למשל הנקודה (1,-2) מקיימת את החוק : $-\sqrt{9}+1=-3+1=-2$

ד) $(1,0)$ היא נקודת החיתוך של גרף ההזזה עם ציר x . ניתן למצוא את הנקודה באופנים שונים: לקרוא מהגרף ולבדיקה להציב בחוק, או לפתור את המשוואה: $-\sqrt{x}+1=0$ או $\sqrt{x}=1$.

ה) תחום ההגדרה של הפונקציה $x \geq 0$.

תרגיל 5

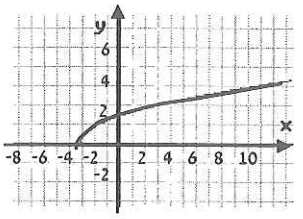
תרגיל זה עוסק בהזזה לאורך ציר x. במקרה זה יוצאים מהחוק בו מציבים ערכים, משרטטים את הגרף ומסיקים שהחוק מבטא הזזה לאורך ציר x (הזזה לאורך ציר y נלמדת מהזזת הגרף). ההבדל בטיפול בין סוגי ההזזות נובע במציאת ביטוי "אינטואיטיבי" להזזה לאורך ציר x.

מהלך זה זהה לגבי משפחות אחרות של פונקציות שנלמדו בעבר.

א) בהצבה של ערכי x, נעזרים במחשבון. (ההדרכה לשימוש במחשבון מזכירה לתלמידים כי יש להקיש על הכפתור "=" לפני ההקשה על פעולת השורש, אחרת השורש מופעל רק על 3 ולא על סכום המספרים: x+3. אפשר לדון עם התלמידים בתוצאה המתקבלת כשסדר זה אינו נשמר.)

x	-1	2	5	6	10	12
y	1.41	2.24	2.83	3	3.6	3.87

ב)



ג) כאשר מציבים $x = -3$ מקבלים 0. כאשר מציבים $x = -4$ מקבלים מספר שלילי מתחת לשורש ולכן הביטוי חסר משמעות, ו- $x = -4$ הוא מחוץ לתחום הגדרת הפונקציה.

ד) הפונקציה מוגדרת עבור $x \geq -3$, כלומר מספרים גדולים או שווים ל- 3-.

התלמידים נתקלים, בפעם הראשונה, בפונקצית שורש עם תחום הגדרה שונה מ- $x \geq 0$.

ה) לאחר שהושלם השרטוט, התלמידים יכולים להיעזר בדף השקוף כדי לתאר את $y = \sqrt{x+3}$ כהזזה ב- 3 יחידות שמאלה של הגרף של $y = \sqrt{x}$ לאורך ציר x. בהזזות לאורך ציר y והשיקופים על ציר x, הגרף השקוף שימש את גרף ההזזה או השיקוף, אך כאן הוא משמש את גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$.

תרגילים

תרגילים 6-8, 12 עוסקים בהזזות לאורך ציר y ובשיקוף על ציר x.

תרגילים 9-11 עוסקים בהזזות לאורך ציר x.

6. בניגוד לתרגילים קודמים נתונים הגרפים שהם הזזה ו/או שיקוף והתלמידים מתבקשים למצוא את החוק המתאים. כדאי להיעזר לבדיקה בדף השקוף ובהצבת נקודה.

א) $y = \sqrt{x} + 1$ ב) $y = \sqrt{x}$ ג) $y = -\sqrt{x}$

ד) $y = -\sqrt{x} + 2$ ה) $y = \sqrt{x} - 4$ ו) $y = -\sqrt{x} - 4$

7. יוצאים מגרף ההזזה, קוראים, בודקים ומתארים את ההזזה.

א) (1,0), (0,-1), (6, 1.45), (4,1).

ב) (9,2).

ג) הפונקציה המשורטטת היא הזזה כלפי מטה ביחידה אחת לאורך ציר y של גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$.

8. עוסקים בפונקציה מוזזת, כאשר מתואר כיוון ההזזה ונקודת חיתוך עם ציר y. למעשה כיוון ההזזה ונקודה על הגרף מתאר באופן יחיד את ההזזה.

א) (i) לאור הניסיון שרכשו תלמידים בהזזות, רובם מגיעים לחוק המתאים, ללא הזזה בפועל. במקרה זה ניתן לפסוח על סעיף זה. אך אם יש צורך,

ניתן לעשות את ההזזה בעזרת דף שקוף באחד מהשרטוטים של גרף הפונקציה $y=\sqrt{x}$.

(ii) חוק הפונקציה המוזזת: $y=\sqrt{x}+2$. רצוי לבקש תאור של ההזזה שבוצעה.

(iii) גרף הפונקציה המוזזת אינו חותך את ציר ה - x.

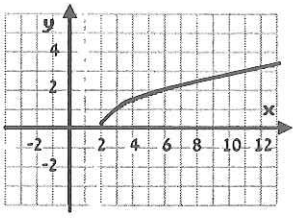
ב) (ii) חוק הפונקציה המוזזת: $y=\sqrt{x}-4$. רצוי לבקש תיאור של ההזזה שבוצעה.

(iii) גרף הפונקציה המוזזת חותך את ציר ה - x בנקודה (-4,0).

אפשר לדון, אחרי שני הסעיפים, בשאלה: באילו הזזות יתקבלו גרפים שחותכים את ציר ה- x?

ג) (ii) חוק הפונקציה המוזזת: $y=-\sqrt{x}-6$.

9. כמו בשאלה 5, תיאור ההזזה אחרי שרטוט הגרף (על-פי נקודות).



א) (2,0), (3,1), (6,2), (11,3).

ב) (9,2.65), (5,1.73), (2.25,0.5),
אי-אפשר להציב אפס.

ג) הזזה ימינה בשתי יחידות לאורך ציר x.

ד) הפונקציה מוגדרת עבור $x \geq 0$.

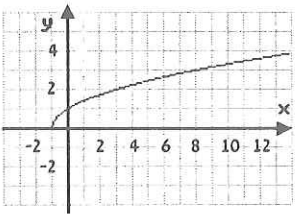
10. משרטטים את הגרף של $y=\sqrt{x+1}$ בעזרת נקודות חיתוך עם צירים (שיש לחשב), ובעזרת נקודות נוספות.

א) נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x: (-1,0). ניתן למצוא אותה על- ידי פתרון המשוואה $\sqrt{x+1}=0$, אותה ניתן לפתור על-פי הניתוח הבא: שורש של ביטוי הוא אפס כאשר הביטוי עצמו אפס, במקרה זה $x+1=0$.

ב) נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y: (0,1).

ג) (8,3), (5.2.45), (3,2), (2,1.73), אי-אפשר להציב 2-.

ד)



ה) הזזה שמאלה ביחידה אחת לאורך ציר x.

ו) הפונקציה מוגדרת עבור $x \geq -1$.

11. תרגיל זה עוסק בבלבול האפשרי בין חוקים המבטאים הזזות לאורך ציר y לבין חוקים המבטאים הזזות לאורך ציר x. התלמידים יכולים להתאים לפי הדרכים הבאות: I) מתוך הניסיון בתרגילים קודמים, יזהו את $y = \sqrt{x+2}$, עם הזזה שמאלה לאורך ציר x, ולכן יבחרו את (iii). II) בחירת נקודה אחת מהגרף, למשל (-2,0), או מספר נקודות והצבתן בחוקים.

א) החוק המתאים הוא $y = \sqrt{x+2}$.

ב) בהצבה בחוק מתקבלות הנקודות: (-2,0),(2,2).

12. תרגיל זה מטפל בשיקוף על ציר x ובהזזה לאורך ציר y.

בסעיף א' הנקודות להצבה נבחרו כך שהתלמידים מקבלים את התחושה שציר x הוא אסימפטוטה. סעיף ב' מטפל בבדיקה של השערה זאת.

א) (4,1), (5,0.76), (7,0.35), (8.5,0.084).

ב) (16,-1), (10,-0.162), (9,0). חיתוך עם ציר x מפריך את ההשערה שציר x הוא אסימפטוטה.

13. תרגיל זה מהווה מעין סיכום לנושא שיקופים והזזות לאורך הצירים. משורטטים גרפים של הזזות לאורך שני הצירים ושל שיקופים לציר x של הפונקציה $y = \sqrt{x}$ ויש להתאים חוק לגרף. כדאי לדון בנימוקים של הבחירה.

א) (iii) ↔ ב) (i) ג) (vi) ↔ ד) (v) ↔ ה) (ii) ↔ ו) (iv)

על שורשים ונגזרת (עמודים 163 – 171 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

הטיפול בנגזרת של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ מתבצע כמו בלימוד הנגזרת של $f(x)=\frac{1}{x}$. מתחילים בקריאת שיפועים בשתי נקודות ($x=4$, $x=1$). השוואה בין ערכי השיפועים בנקודות מביא לתחושה שהשיפועים הולכים וקטנים. חוק הנגזרת ניתן ובעזרתו בודקים כיצד החוק מבטא את הירידה בערכי השיפועים. בהמשך בודקים האם וכיצד ההזזות, המתיחות או השיקופים של הפונקציה משפיעים על חוק הנגזרת של הפונקציה (כדאי לשים לב שלא היו מתיחות בסעיף הקודם). כמו כן תוקרים פונקציות מהצורה: $y=a\sqrt{x}+bx$, או $y=a\sqrt{x}+bx^2$. יש גם תרגול בפתרון משוואות עם שורש, מלווה בהדרכה.

תרגיל 1

המטרה בתרגיל היא להגיע לנגזרת של פונקצית השורש. כפי שעשינו עד כה מתחילים במשמעות של הנגזרת (על-ידי קריאה של שיפועי משיקים), ומקשרים בין החוק של הפונקציה הנגזרת לתכונות הפונקציה.

א) מערכת הצירים המשובצת מאפשרת קריאת השיפועים של המשיקים מהגרף: $f'(1)=0.5$, $f'(4)=0.25$.

ב,ג) תרגול זה מבוסס על התחושה הויזואלית (מצורת הגרף) לפיה ככל שערכי x גדלים, שיפועי המשיקים הולכים וקטנים. בזוג הראשון ניתן להיעזר בגרף המשורטט ואפשר גם להניח ישר שקוף. את הנקודות של הזוג השני לא רואים בגרף, לכן כדי להשלים נכון את סימן האי-שוויון, יש להכליל תחילה (מתוך 4 הנקודות בסעיפים א' ו- ב') את קצב השינוי של השיפועים (ככל שערכי x גדלים השיפועים חיובים והולכים וקטנים).

$f'(80)>f'(100)$, $f'(8)>f'(10)$.

ד) לפי החוק האלגברי, הנגזרת תמיד חיובית (המונה והמכנה חיוביים) ולכן

הפונקציה עולה. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ לא יכולה אפס, לכן אין לפונקציה נקודות קיצון בתחום $x>0$. כדאי לשים לב שהנקודה $(0,0)$ היא נקודת קצה שהיא מינימום – אך אין מתייחסים לנקודה זו בתרגיל.

בסיום רצוי לבדוק את ערכי הנגזרת שהתקבלו מקריאת השיפועים (מסעיף א') עם הערכים המתקבלים על-ידי הצבה בחוק הנגזרת.

למורים:

כדאי לשים לב שהפונקציה מוגדרת בתחום $x \geq 0$, אך הנגזרת מוגדרת בתחום $x>0$.

תרגיל 2

מטרת התרגיל היא לראות שוב שהנגזרת של הזזה של פונקציה (והפעם פונקצית השורש) שווה לנגזרת הפונקציה עצמה. עושים זאת בשני אופנים: בעזרת דף שקוף עליו משורטטים הפונקציה $\sqrt{x}$ והמשיק לפונקציה בנקודה $x=4$ (סעיפים ב', ג') ובעזרת נגזרת של סכום פונקציות (סעיף ה').

א) כפי שראו בתרגיל הקודם (הן מהגרף והן מההצבה), מוצאים את שיפוע המשיק. שיפוע המשיק בנקודה בה $x=4$ הוא: 0.25.

ג) מקבלים אותו שיפוע כי רואים שההזזה לאורך ציר y אינה משנה את השיפוע. התלמידים "חשים" זאת בעזרת הדף השקוף, כמו שראו זאת בפונקציות אחרות למשל: $y=x^2+a$, $y=\frac{1}{x}+a$.

ד) המשיקים מקבילים.

ה) מסבירים זאת על-ידי נגזרת של סכום של פונקציות: $(\sqrt{x}+2)'$, כסכום הנגזרות. הנגזרת של שתי הפונקציות זהה, כי הנגזרת של הפונקציה המוזזת היא נגזרת של הפונקציה המקורית ועוד קבוע (שנגזרתו אפס).

ו) לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה ($x \geq 0$), שתיהן עולות, השיפועים שלהן שווים בנקודות שלהן אותו x (כלומר יש להן אותה נגזרת), לשתיהן יש נקודת מינימום ב- $x = 0$. שתיהן חיוביות בתחום $x > 0$.

ערכי שתי הפונקציות שונים (ערכי f גדולים או שווים לאפס, ערכי g גדולים או שווים ל- 2) , נקודת חיתוך עם הצירים ((0,0) נקודת חיתוך של f עם שני הצירים, (0,2) היא נקודת חיתוך של g עם ציר y והיא לא חותכת את ציר x), שיעור y של נקודת המינימום שונה.

תרגילים 3-4 עוסקים ב"מתיחות" של הפונקציה $\sqrt{x}$ מכמה היבטים: בתיאור הגרפי, בקשר בין התכונות של המתיחות עם הפונקציה עצמה ובקשר בין הנגזרות של המתיחות והפונקציה עצמה.

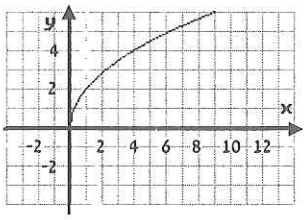
תרגיל 3

א) (0,0) היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y. הכפל ב- 2 אינו משנה את ערך הפונקציה עבור $x = 0$.

ב) הפונקציה מוגדרת בתחום $x \geq 0$. (הכפל ב- 2 אינו משנה את תחום ההגדרה).

ג)

x	0.25	1	2	3	4	9
g(x)	1	2	2.83	3.46	4	6



ד) שתי הפונקציות דומות בצורתן.

תכונות משותפות : תחום הגדרה $x \geq 0$, שתיהן עולות, לשתיהן נקודת מינימום בנקודה $(0,0)$, שתיהן חיוביות בתחום $x > 0$, $(0,0)$ נקודת החיתוך עם הצירים.

תכונות מבדילות: לאותו שיעור x מתאים y שונה , שיעור y של g הוא פי שניים מזה של f. השיפועים בנקודות שלהן אותו x שונה כאשר השיפוע בנקודה ב- g גדול יותר מהשיפוע בנקודה המתאימה ב- f (כלומר הנגזרות של שתי הפונקציות שונות), יש התייחסות מדויקת יותר בסעיף ה'.

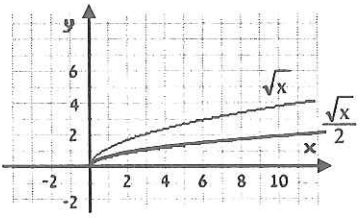
ה) לפונקציה g יש שיפוע גדול יותר מזה של f בנקודה בה $x = 4$. ניתן לראות זאת בגרפים עצמם , או אפשר להניח ישר משיק בנקודות.

ו) נגזרת הפונקציה $g(x) = 2\sqrt{x}$ היא : $g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\sqrt{x}$ חיובי לכל x בתחום , לכן גם $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$, לכן הפונקציה עולה .

ז) $f'(4) = 0.25$, $g'(4) = 0.5$.

תרגיל 4

א)



ב) $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$, $g'(9) == \frac{1}{4\sqrt{9}} = \frac{1}{12}$.

תרגיל 5

משוואת המשיק מתקבלת מקריאה מהגרף ונבדקת על-ידי הנגזרת.

א) שיפוע המשיק : 0.25 . משוואת המשיק : $y = 0.25x + 1$.

ב) (i) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Leftarrow$ $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

בעזרת הצבה של השיפוע והנקודה (4,2) מקבלים: $y = 0.25x + 1$.

תרגיל 6

התרגיל משלב זיהוי הזזות ומתיחות של $y=\sqrt{x}$ עם ערך השיפוע בנקודה ומשיקים בנקודה.

א) $(ii)\leftrightarrow f$, $(i)\leftrightarrow g$, $(iii)\leftrightarrow h$, $(iv)\leftrightarrow k$

ב) $f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$, $g'(4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{12}$, $h'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$,

$$k'(4)=3\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{3}{4}$$

ג) אפשר להקדים סעיף זה, לפני סעיף ב', כדי לקבל תחושה לגדלי השיפועים.

התלמידים נוכחים שוב, בעזרת הגרפים (ii) ו-(iii),ששיפוע של הזזה לאורך ציר y, לא משתנה.

תרגילים 7-8 עוסקים בשיפוע של המשיק של פונקציות שהן שילוב של מתיחה והזזה (תרגיל 7) או שיקוף והזזה (תרגיל 8). כאן (בשונה מתרגיל 6) קודם משרטטים את המשיק, מחשבים את השיפוע ובודקים שיש התאמה בין השרטוט לחישוב.

תרגיל 7

גם בתרגיל זה מקבלים את התחושה של שיפועים הולכים וקטנים.

א) (i) הפונקציה עולה בנקודה בה $x=9$ (למעשה עולה בכל התחום).

ב) $y'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Leftarrow$ $y'=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$.

תרגיל 8

א) (i) הפונקציה יורדת בנקודה בה $x=9$ (למעשה עולה בכל התחום).

ב) $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Leftarrow$ $y'=-\frac{1}{2\sqrt{9}}=-\frac{1}{6}$.

תרגילים 9- 10 עוסקים בטכניקה של גזירה ופתרון משוואות עם שורש . תרגילים אלה מהווים הכנה למיומנויות נחוצות לבעיות החקירה בהמשך (13-11).

תרגיל 9

בתרגיל גזירה של פונקציות עם שורש והצבה בנגזרת .

א,ב) (i) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-2$. ב-$x=1$, $y'=-1.5$, לכן הפונקציה יורדת בנקודה.

(ii) $y'=\frac{2}{2\sqrt{x}}-2$. ב-$x=1$, $y'=-1$, לכן הפונקציה יורדת בנקודה.

(הפונקציה בסעיף זה תוקנה ל- $y=2\sqrt{x}-x^2$).

(iii) $y'=-\frac{1}{4\sqrt{x}}$. ב-$x=1$, $y'=-0.25$, לכן הפונקציה יורדת בנקודה.

(iv) $y'=\frac{1}{6\sqrt{x}}$. ב-$x=1$, $y'=\frac{1}{6}$, לכן הפונקציה עולה בנקודה.

תרגיל 10

בתרגיל פותרים משוואות עם שורש. מאחר ותלמידים לא התנסו בפתרון משוואות עם שורש ,מובאת דוגמה. כדאי להדגים גם את פתרון המשוואה בסעיף ג' :

$$4\sqrt{x}-x=0 \qquad /+x$$
$$4\sqrt{x}=x \qquad \text{/ בריבוע ועלה}$$
$$16x=x^2 \qquad /-x^2$$
$$16x-x^2=0 \Rightarrow x(16-x)=0$$
$$x=0 \quad ,x=16$$

יש לבדוק את הפתרונות שהתקבלו בעזרת הצבה במשוואה המקורית. בכל פתרון משוואה מומלץ לבדוק, ובמיוחד במקרה זה מאחר, והעלאה בריבוע עלולה להוסיף פתרונות. למשל בסעיף אי אם פותרים אלגברית מתקבלים שני פתרונות $x=1$ ו- $x=-1$, אך רק הפתרון $x=1$ מקיים את המשוואה המקורית.

יש תרגילים ש"רואים" את הפתרון למשל בסעיף א', ואז אין צורך בפתרון אלגברי.

א) $x=1$ ב) $x=4$ ג) $x=0, x=16$ ד) $x=4$ ה) $x=\frac{1}{16}$ ו) $x=0.63$

תרגיל 11

תרגיל חקירה. מומלץ להזכיר לתלמידים לסמן את הנקודות המתקבלות בכל שלב של החקירה והגרף למעשה "מצטייר" בכל שלבי החקירה.

א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \geq 0$.

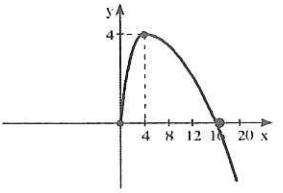
ב) כדי למצוא נקודות חיתוך עם ציר x יש לפתור את המשוואה $4\sqrt{x}-x=0$ שפתרנו בתרגיל הקודם. (16,0) ו- (0,0) הן נקודות החיתוך עם הצירים.

ג) נגזרת הפונקציה : $y'=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$ ($x>0$) כדי למצוא נקודות חשודות יש לפתור את המשוואה : $\frac{2}{\sqrt{x}}-1=0$. מהלך הפתרון דומה לדוגמה בתרגיל הקודם.

$x=4$ נקודה חשודה . נקודות החיתוך עם ציר x עוזרות לקבוע את סוג הקיצון ואין צורך בחישוב נקודות נוספות (בולט כאן יתרון הגישה שהוצעה לסמן בכל שלב כל נקודה) . (4,4) נקודת מקסימום .

ד) יש עוד נקודת קיצון שאינה מתקבלת מהנגזרת והיא (0,0) – זו נקודת מינימום.

ה) רוב הגרף משורטט . יש לשים לב שיש להמשיך את הגרף גם עבור $x>16$.



ו) לפונקציה יש נקודת מקסימום מוחלט בנקודה (4,4).

תרגיל 12

א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \geq 0$.

ב) $(0,0)$ נקודת חיתוך עם ציר y .

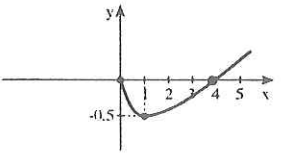
ג) לא מבקשים לחשב את נקודת החיתוך עם ציר x בגלל הקושי לפתור את המשוואה המתקבלת. עם תלמידים מתקדמים ניתן לפתור משוואה זו (בתרגיל 9 – סעיף ו' מופיעה משוואה דומה)

ד) נגזרת הפונקציה : $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

$x = 1$ נקודה חשודה . גם פה נקודות החיתוך עם ציר x $(0,0)$,$(4,0)$ עוזרות לקבוע את סוג הקיצון ואין צורך בחישוב נקודות נוספות . $(1,-0.5)$ נקודת מינימום.

יש עוד נקודת קיצון שאינה מתקבלת מהנגזרת והיא $(0,0)$ – זו נקודת מקסימום.

ה) רוב הגרף משורטט . יש לשים לב שיש להמשיך את הגרף גם עבור $x > 4$.



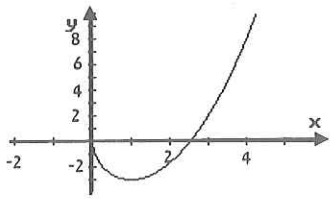
ו) לפונקציה יש נקודת מינימום מוחלט בנקודה $(2,-0.5)$.

תרגיל 13

כדי למצוא תחומי עלייה וירידה, נמצא תחילה נקודות קיצון. מומלץ לשרטט את הגרף (מצורף בממשך) למרות שלא נדרשים.

נגזרת הפונקציה : $y' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$. $(1,-3)$ נקודת מינימום (גם $(0,0)$ היא נקודת קיצון) – ניתן לקבוע את סוג הקיצון בעזרת הנקודות $(0,0)$, $(4,8)$.

הפונקציה עולה בתחום $x > 1$, הפונקציה יורדת בתחום בין $x = 0$ ל- $x = 1$.



תרגילים

תרגילים 14-15 , 17-19 עוסקים בשיפוע ומשוואת משיק של פונקציות עם שורש.

תרגילים 19-21 עוסקים בחקירה (לא בכולם נדרשת חקירה מלאה).

14. בסעיף : "פונקציית השורש" עסקנו בהתאמות ההפוכות : $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, בתכונותיהן ובקשר ביניהן. כאן ניתן היבט נוסף: שיפועי הפונקציות בנקודות מתאימות.

א) לפי הגרף רואים כי המשיק ל- f בנקודה בה $x = 2$ בעל שיפוע גדול יותר מאשר g. אפשר גם להניח ישר ולהעריך את גודל השיפועים.

ב) $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$. $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.35$.

ג) לפונקציה g יש שיפוע גדול יותר בנקודה $x = \frac{1}{4}$ מאשר לפונקציה f.

במקרה זה קשה יותר לראות את ההבדל בין השיפועים, כאן השיפוע של g גדול מהשיפוע של f. אפשר להיעזר בישר וגם אם ההשערה היא שגויה, ניתן לבדוק זאת בסעיף הבא.

ד) $f'(\frac{1}{4}) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $g'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$.

15. א) $f'(4) = \frac{1}{2}$ ב) משוואת המשיק: $y = \frac{1}{2}x + 2$

16. א) $y' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ב) $y' = -3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ג) $y' = \frac{1}{4\sqrt{x}} + 1$

17. נגזרת הפונקציה : $y'=\frac{3}{2\sqrt{x}}$. שיפוע הפונקציה בנקודה בה $x = 9$:

$y'(9)=\frac{3}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{2}$. משוואת המשיק : $y = 0.5x - 1.5$.

18. א) החוק של f מתאים לגרף (ii) והחוק של g מתאים לגרף (i).

ב) משוואת המשיק של הפונקציה f בנקודה בה $x = 4$: $y=\frac{1}{4}x+1$

משוואת המשיק של הפונקציה g בנקודה בה $x = 4$: $y=\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$.

שני המשיקים מוכרחים להיחתך כי הם לא מקבילים. הם נחתכים בנקודה (-4,0) למרות שלא רואים זאת בגרף.

19. נגזרת הפונקציה : $y'=4x-\frac{3}{\sqrt{x}}$. $y'(4)=4\cdot 4-\frac{3}{\sqrt{4}}>0$, הנגזרת חיובית לכן הפונקציה עולה.

20. נגזרת הפונקציה : $y'=2-\frac{1}{\sqrt{x}}$. לפונקציה שתי נקודות קיצון : $(\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$ נקודת מינימום , (0,0) נקודת מקסימום.

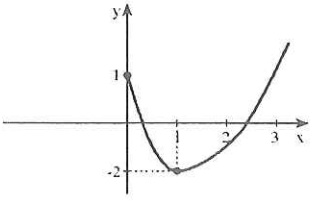
21. א) תחום ההגדרה של הפונקציה : $x \geq 0$.

ב) נגזרת הפונקציה : $y'=2x-4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x-\frac{2}{\sqrt{x}}$. ($x > 0$) .

(1,-2) נקודת מינימום , (0,1) נקודת מקסימום, (4,4) נקודת מקסימום.

ג) (3,3.07), המטרה בחישוב נקודה זאת היא לעזור לתלמידים לשרטט סקיצה . לפונקציה יש 2 נקודות חיתוך עם הצירים אך התלמידים לא יודעים לפתור את המשוואה המתאימה . נקודה זאת מראה שהגרף חותך את ציר x בנקודה בין $x = 1$ ל- $x = 3$. (אפשר בעזרת המחשבון להתקרב יותר לנקודה)

ד)



ה) בעזרת הסקיצה ניתן שהגרף חותך לראות את ציר x בשתי נקודות.

ו) כאשר x בין 0 ל- 1 הפונקציה יורדת, כאשר $x > 1$ הפונקציה עולה.

פרק ד: פונקציה מורכבת

מבוא לפרק

פרק זה עוסק בפונקציה מורכבת ובו ארבעה סעיפים:

- מהי פונקציה מורכבת? בסעיף זה מכירים את המושג "פונקציה מורכבת" ההיכרות יכולה להיעשות באחת משתי האפשרויות: תוך פעילות מחשב, וללא פעילות מחשב.
- נגזרת של פונקציה מורכבת. בסעיף זה לומדים למצוא נגזרת של פונקציה מורכבת מהצורה: $e^{f(x)}$, $\sqrt{f(x)}$, $\frac{1}{f(x)}$, $[f(x)]^n$, ומיישמים זאת במציאת משוואות של משיקים.
- חקירה של פונקציה מורכבת. נעזרים בגזירה שנלמדה בסעיף הקודם וחוקרים פונקציות מורכבות, גם בהקשר לבעיות קיצון
- אינטגרל של פונקציה מורכבת . חישוב שטחים מתחת לגרף של פונקציה מורכבת מהצורה: $e^{f(x)}$, $\sqrt{f(x)}$, $\frac{1}{f(x)}$, $[f(x)]^n$, כאשר $f(x)$ היא פונקציה קווית.

מהי פונקציה מורכבת? (עמודים 172-184 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף שני מהלכים אפשריים בלתי תלויים זה בזה: הראשון בעזרת מחשב באמצעות התוכנה Excel, (תרגילים 1-9, עמודים 172-180), והשני ללא מחשב (תרגילים 1-5 בהמשך, עמודים 181-183). שני התרגילים הראשונים בשתי הגרסאות זהים ובאמצעותם התלמידים פוגשים לראשונה את פעולת הרכבת פונקציות. אמנם תלמידים פגשו פונקציות כמו: $y=\sqrt{x+2}$, $y=\frac{1}{3x}$, אך לא התייחסו אליהן כאל פונקציות מורכבות.

מטרת שני התרגילים הראשונים היא ללמוד להרכיב פונקציה אחת משתי פונקציות נתונות: פונקציה שניה פועלת על הערכים של הפונקציה הראשונה. במדריך זה נשתמש בכינוי "פונקציה פנימית" ו"פונקציה חיצונית" כאשר הפונקציה החיצונית פועלת על ערכי הפונקציה הפנימית.

בתרגיל הראשון יש דוגמאות של פונקציות מורכבות. מומלץ שהמורה יקרא עם התלמידים את הדוגמאות וינתח אותן. בתרגיל השני התלמידים בונים פונקציה מורכבת משתי פונקציות נתונות.

בדרך כלל, במהלך הלימוד, נתונה הפונקציה המורכבת ועל התלמידים לפרק אותה לשתי פונקציות על מנת לבצע גזירה. פעולה זאת מהווה לפעמים קושי לכן, המהלך פותח בבניית פונקציות מורכבות משתי פונקציות נתונות, על מנת שהתלמידים יקבלו תחושה של פעולת ההרכבה לפני שהם נדרשים לזהות שתי פונקציות המרכיבות פונקציה שלישית.

המושג "פונקציה מורכבת" מוצג על סמך הדוגמאות אחרי תרגיל 5 במהלך עם המחשב ואחרי תרגיל 4 במהלך ללא מחשב.

פונקציה מורכבת בעזרת Excel

תרגיל 1

משותף לשני המהלכים (עמודים 172-173 ועמודים 181-182).

הפונקציה הפנימית (עליה בונים את הפונקציה המורכבת) זהה בכל אחת מארבעת הדוגמאות $f(x) = 3x^2 - 4$.

החלטנו לסמן ב- $f(x)$ את הפונקציה הפנימית וב- y את הפונקציה החיצונית.

כל אחת מהפונקציות החיצוניות הפועלות על ערכי הפונקציה הראשונה היא מתוך ארבע משפחות של פונקציות שנלמדו: $y = x^n$ (בדוגמה כאן $n=3$), $y = \frac{1}{x}$, $y = e^x$, $y = \sqrt{x}$.

תרגיל 2

בתרגיל התלמידים מיישמים את מה שקראו בתרגיל 1. הטיפול בתחום ההגדרה יורחב בסעיף הבא.

(i) א) $y = \frac{1}{5x-2}$ ד) $y = (5x^3 - 2)^2$

ב) $y = \sqrt{5x-2}$ ה) $y = \frac{1}{(6x-2)^2}$

ג) $y = (x - 5)^6$ ו) $y = e^{4-2x^2}$

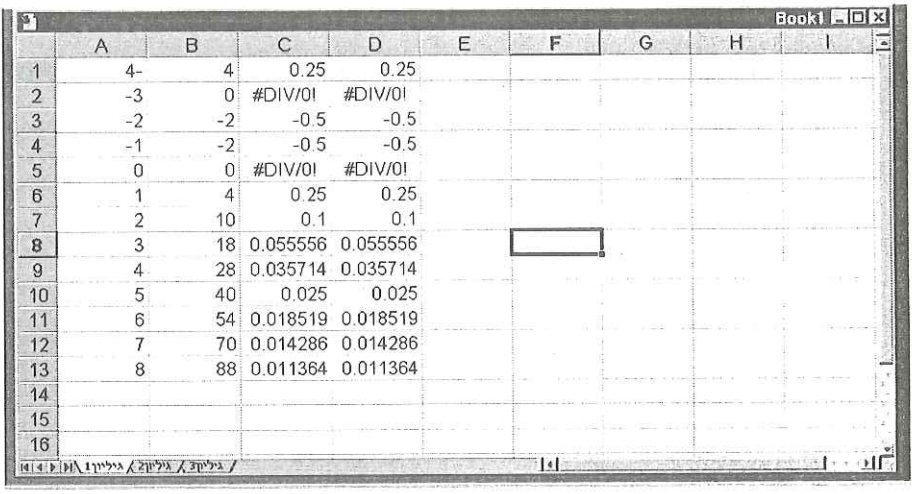
(ii) הפונקציה f מוגדרת לכל x. הפונקציה $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת עבור $x = \frac{2}{5}$.

בתרגילים 3-9 (בעזרת התוכנה Excel) כל תרגיל עוסק במשפחה אחרת של פונקציות. בעזרת התוכנה אפשר להתייחס אל הפונקציה המורכבת כיחידה אחת או כהרכבה של שתי פונקציות על-ידי קבלת אותם ערכים להצבה של שיעורי x שונים. המחשב מאפשר זאת עם פונקציות רבות שונות ושיעורי x רבים, וכך תומך בחיזוק המשמעות "התהליכית" של הפונקציה המורכבת.

בשני התרגילים 3-4 התחום עליו מפעילים את הפונקציה הוא בין $x = -4$ ל $x = 8$. המספרים מופיעים במחשב בטור A.

תרגיל 3

א,ב) נדגים את הפעילות בעזרת העתק של גיליון העבודה ב – Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	4-	4	0.25	0.25					
2	-3	0	#DIV/0!	#DIV/0!					
3	-2	-2	-0.5	-0.5					
4	-1	-2	-0.5	-0.5					
5	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!					
6	1	4	0.25	0.25					
7	2	10	0.1	0.1					
8	3	18	0.055556	0.055556					
9	4	28	0.035714	0.035714					
10	5	40	0.025	0.025					
11	6	54	0.018519	0.018519					
12	7	70	0.014286	0.014286					
13	8	88	0.011364	0.011364					
14									
15									
16									

ערכי x שמופיעים בטור A הם המספרים השלמים בין 4- ל - 8, אשר נבחרו מטעמי נוחות, אך כמובן ניתן לבחור מספרים אחרים.

על-פי הגדרת טור B, יופיעו בו הערכים המתקבלים על-ידי הפעלת הפונקציה הפנימית f ($f(x)= x^2+3x$) על המספרים המופיעים בטור A.

על פי הגדרת טור C, יופיעו בו הערכים המתקבלים מהפעלת הפונקציה החיצונית $y=\frac{1}{f}$ על המספרים שהתקבלו בטור B .

בטור D מפעילים ישירות את הפונקציה המורכבת: $y=\frac{1}{x^2+3x}$ על ערכי x שבטור A, במטרה להראות ששני התהליכים זהים, ולכן אפשר לחשב את ערכי הפונקציה בשני אופנים: כפונקציה בפני עצמה (כפי שהוגדר טור D) או כפונקציה המורכבת משתי פונקציות (טורים B ,C).

ג) (i) $y=\frac{1}{x^2+3x}$.

(ii) הפונקציה אינה מוגדרת בנקודות בהן $x = 0,-3$.

(iii) בכל אחד מהתאים C2, D2, C5, D5 מופיע ביטוי חסר משמעות

תרגיל 4

גם בתרגיל זה מתרגלים, בעזרת המחשב, את ההפעלה של פונקציה מורכבת בשני אופנים: כפונקציה בפני עצמה (כפי שהוגדר טור D) וכפונקציה המורכבת משתי פונקציות (טורים C ו- B).

ג) $y = (2x-4)^2$.

תרגיל 5

בתרגיל זה עוסקים ב"יצירת" פונקציה מורכבת משתי פונקציות ממשפחות שונות.

א) $y = \frac{1}{2x+5}$ ד) $y = (2x+5)^4$

ב) $y = \frac{1}{2x+5} + 5$ ה) $y = \sqrt{2x+5}$

ג) $y = \frac{1}{2(2x+5)}$ ו) $y = e^{2x+5}$

תרגיל 6

עד כה בנינו פונקציות בעזרת שתי פונקציות. מורכבות בתרגיל זה עוסקים בקושי המרכזי הקשור עם פונקציה מורכבת: פרוק פונקציה מורכבת לפונקציות (ממשפחות שונות) המרכיבות אותה.

א) $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$ ה) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

ב) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 5x \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$ ו) $\begin{cases} f(x) = x^3 - 2x \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

ג) $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$ ז) $\begin{cases} f(x) = 3e^x \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$

ד) $\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ y = [f(x)]^4 \end{cases}$

ח) $\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$

בתרגילים 7-9 הפונקציה המורכבת רשומה בשלמותה, והתחום עליו מופעלת הפונקציה הפנימית הוא מ – $x = -1$ עד $x = 6$. לכן טור A (המגדיר את תחום הפונקציה) זהה בכל שלושת התרגילים.

הקושי בכל אחד מהתרגילים הוא לזהות את $f(x)$.

תרגיל 7

א) $f(x) = x^2 - 5x \qquad y = e^{f(x)}$

תרגיל 8

תרגיל זה דומה לקודמיו, לכן לא פורטו הוראות לשימוש בתוכנה.

ב) $f(x) = 2x-4$

$y = [f(x)]^4$

תרגיל 9

הפונקציה החיצונית היא פונקצית השורש, לכן יש להתייחס לתחום ההגדרה. עד כה הפונקציות המורכבות בהן הופיע ביטוי במכנה אפשר היה לגלות בתאים המתאימים את שיעורי x שאינם בתחום ההגדרה מכיוון שהיו מקומות אחדים בלבד. אמנם תחום ההגדרה של פונקצית השורש מטופל בהרחבה בסעיף הבא, רצוי גם כאן לדון בכך. בגלל התוכנה תלמידים יעלו על מספרים בודדים עבורם הפונקציה לא מוגדרת ועלולים לשכוח שיש תחום רציף שבו הפונקציה לא מוגדרת ($x < 1$).

ב) $f(x) = 2x-2$

$y = \sqrt{f(x)}$

ד) (i) התלמידים רואים שערכי הפונקציה f (טור C) שליליים בתאים 1 ו- 2 ולכן בתאים: B1,B2,D1,D2 מקבלים ביטויים חסרי משמעות. כדאי לבקש כאן ערכים נוספים של x עבורם הפונקציה המורכבת אינה מוגדרת. הדוגמאות עוזרות לתלמידים להכליל לגבי תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ii) תחום ההגדרה של הפונקציה : $y = \sqrt{2x-2}$ הוא $x \geq 1$.

תלמידים שפתרו שאלות 1-9 עוברים לעמוד 184 בספר.

פונקציות מורכבות – ללא מחשב

כאמור, שני התרגילים הראשונים זהים לשני התרגילים במהלך עם המחשב, ראו לעיל.

תרגיל 3

גם המהלך כאן מבוסס על חישוב ערכי הפונקציה, אך בפונקציה אחת ובפחות ערכים. מתחילים בהצבת ערכים אחדים של x בפונקציה הפנימית (שורה שנייה בטבלה) ולאחר מכן מציבים את התוצאות המתקבלות בפונקציה החיצונית (שורה שלישית בטבלה). בהמשך רושמים ביטוי מפורש לפונקציה המורכבת ומציבים בו שיעור אחד של x (כאן $x = 3$) ומשווים עם התוצאה המתאימה שהתקבלה בטבלה.

א,ב)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
f	10	5	2	1	2	5	10	101
$\frac{1}{f}$	0.1	0.2	0.5	1	0.5	0.2	0.1	0.01

ג) (i) $y = \frac{1}{x^2+1}$

(ii) בהצבה של $x = 3$ בביטוי המפורש הרשום בסעיף (i) מתקבל הערך 0.1 שהוא זהה למספר הרשום בטבלה בשורה שלישית עבור $x = 3$.
כדאי להציב בביטוי המפורש ערכים נוספים מהטבלה, כדי שהתלמידים יראו שהתוצאות זהות בשתי דרכי החישוב.

כאמור, תרגילים 4-5 זהים לתרגילים 5-6 בעזרת המחשב וההסבר לגבי המושג פונקציה מורכבת מופיע בין שני התרגילים.

תרגילים

התרגילים נועדו הן לתלמידים שלמדו בעזרת פעילות המחשב והן לאלו שלמדו את הנושא ללא מחשב. בתרגיל 6 בונים את הפונקציה המורכבת ובתרגיל 7 מפרקים פונקציה מורכבת נתונה לשתי פונקציות.

6. א) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ ד) $y = e^{3x^2-2}$

ב) $y = \sqrt{3x^2 - 2} + 3$ ה) $y = 3e^{3x^2-2}$

ג) $y = \frac{1}{3x^2 - 2}$ ו) $y = e^{3(3x^2-2)}$

7. א) $\begin{cases} f(x) = 4 - 2x^2 \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$ ד) $\begin{cases} f(x) = -x \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

ב) $\begin{cases} f(x) = 4 - 2x \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$ ה) $\begin{cases} f(x) = 1 - 4x \\ y = [f(x)]^2 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$ ו) $\begin{cases} f(x) = 6 - x \\ y = [f(x)]^4 \end{cases}$

לאחר ההתנסות בפונקציות מורכבות, אפשר (לשיקול דעתו של המורה) לדון בכך שהרבה פונקציות שהם הכירו בעבר יכולות להיחשב כפונקציות מורכבות למשל: $y = \sqrt{x + 2}$, $y = \frac{1}{x - 2}$ וכו'. למעשה ניתן להסתכל גם על הפונקציה $y = 2x - 2$ כעל פונקציה מורכבת $f(x) = x$, $y = 2f(x) - 2$ (או $f(x) = x - 1$, $y = 2f(x)$). במקרים אלו כדאי לעסוק רק אם הם עולים מהתלמידים.

נגזרת של פונקציה מורכבת (עמודים 185 -192בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

הטיפול בנגזרת של פונקציה מורכבת מבוסס (כמו במשפחות שונות של פונקציות) על משמעות שיפוע משיק בנקודה.

בחרנו להתחיל בפונקציה מהצורה $e^{f(x)}$, כי קל יחסית לראות את הפונקציה הפנימית $f(x)$ של הפונקציה המורכבת. יחד עם זאת, אין אפשרות לבדוק (ולהסביר בעזרת הבדיקה) את הקשר בין הפונקציה הנגזרת של שתי הפונקציות לבין הנגזרת של הפונקציה המורכבת, כי המספרים המתקבלים בהצבה בתבנית $e^{f(x)}$ הם אי-רציונאליים וקשה להכליל מתוצאות כאלה. לעומת זאת, יש אפשרות לבדוק את נכונות הקשר המוצע כאשר מדובר בפולינום, וזה אכן נעשה בתרגיל 3.

בסעיף זה עוסקים רק במשוואת המשיק כיישום לנגזרת, ולא מטפלים בחקירה של פונקציה מורכבת, מאחר וחקירה מצריכה גם עיסוק בתחום ההגדרה של הפונקציה. כאן אנו מתמקדים בביסוס מיומנות גזירה של פונקציה מורכבת.

כדי לחזק את הפירוק של פונקציה מורכבת לשתי פונקציות ואת הקשר בין הנגזרות, עוברים על סוגים שונים של פונקציות: בתרגילים 3-6 עוסקים בפונקציות הפולינום, בתרגילים 7-10 בפונקציות מעריכיות, בתרגילים 11-15 בפונקציות השורש ובתרגילים 16-17 בפונקציה $\frac{1}{x}$.

תרגיל 1

התרגיל הוא תזכורת לקשר בין שיפוע המשיק בנקודה לבין נגזרת הפונקציה בנקודה. תחילה מחשבים ערכים של הפונקציה במספר נקודות. אנו מניחים שבשלב זה תלמידים יכולים להציב ולהשתמש במחשבון ללא ההדרכה בספר, אך רצוי לתת תמיכה בתלמידים הזקוקים לכך.

א) $f(1) = 2.72$, $f(0) = 1$, $f(-1) = 0.37$.

ב) (i) $f'(0) = 1$ (ii) משוואת המשיק בנקודה בה $x = 0$: $y = x + 1$.

תרגיל 2

בתרגיל זה עוסקים בקריאת השיפוע של משיק בנקודה לפונקציה מורכבת ובהשוואת הערך שקראו לערך המתקבל מהצבה בפונקציה הנגזרת הנתונה.

א) משורטט המשיק לפונקציה המורכבת e^{3x}, וקוראים את שיפועו . שיפוע המשיק בנקודה בה $x = 0$ הוא 3.

ב) $g'(0) = 3 \cdot e^0 = 3 \cdot 1 = 3$.

תרגיל 3

בתרגיל זה נותנים את הנגזרת של פונקציה מורכבת הקשורה לפולינום. מבקשים מהתלמידים לנסות לנסח את הקשר בין הנגזרת המוצגת לבין הנגזרת של שתי הפונקציות המרכיבות את הפונקציה המורכבת. כבדיקה, התלמידים מתבקשים לבטא את הפונקציה המורכבת (בעזרת פישוט) כסכום של פונקציות שיודעים לגזור. יש כאן למעשה אסטרטגיה שמלווה את התלמידים במשך כל הלימוד: התלמידים מקבלים נוסחה, מסבירים אותה ולבסוף בודקים. מהלך זה בא במקום ההוכחה, שהיא קשה לתלמידים הלומדים ברמה זו, אך הם יכולים להיות שותפים ב"עשיתי" החומר, על-ידי מתן הסבר ובדיקה.

א) $f(x) = x^2 + 3$

$y = [f(x)]^2$

ב) אם תלמידים מתקשים להסביר את הקשר אפשר להפנות אותם לדוגמה בהמשך, בה בולט יותר הקשר בין נגזרת הפונקציה המורכבת לנגזרות של שתי הפונקציות. יש לציין שהפונקציה שנבחרה בדוגמה אינה הפונקציה שבתרגיל, מכיוון שהפישוט המומלץ לעשות לבדיקת הקשר, הוא קשה ומסורבל.

כדאי לחזור גם לפונקציה המורכבת מתרגיל 2 ולראות שאכן הקשר הזה קיים גם שם.

ג) (i) ראשית כדאי לרשום את החזקה כמכפלה ואז לפתוח את הסוגריים.

$$y = (x^2 + 3)^2 = (x^2 + 3)(x^2 + 3) = x^4 + 3x^2 + 3x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9$$

$$y' = 4x^3 + 12x$$

(ii) אותו ביטוי מתקבל לאחר פישוט הנגזרת הרשומה בסעיף ב'.

תרגיל 4

בתרגיל מיישמים את הקשר שנלמד בתרגיל הקודם.

א) $(\square^6)' = 6\square^5 \cdot (\underset{\text{פנימית}}{\text{נגזרת הפונקציה}}) = 6\cdot\square^5\cdot 5 = 30\cdot\square$

כדי להבליט את הפונקציה החיצונית לא נרשמה במסגרת הפונקציה הפנימית.

ב) לפני הגזירה כדאי להשתמש במסגור כתמיכה לראיה גלובלית של תהליך הגזירה.

(i) $y' = -6(4 - 2x)^2$ (ii) $y' = 12x(3 + 2x^2)^2$

(iii) $y' = 5(1 + x)^4$ (iv) $y' = 2(2 - 2x)(2x-x^2)$

תרגיל 5

תרגיל זה מהווה מעין סיכום לארבעת התרגילים הקודמים, כי משלבים בו את טכניקת הגזירה של פונקציה מורכבת ואת משמעות הנגזרת.

א) (i) $f'(x) = 3(x - 1)^2 \Leftarrow f'(2) = 3$.

(ii) כפי ש"רואים" בגרף, זזים שתי יחידות ימינה ועולים 6 יחידות.

ב) משוואת המשיק: $y = 3x-5$.

תרגיל 6

בתרגיל זה מיישמים חוקי גזירה תוך מציאת משוואת המשיק ללא שרטוט.

משוואת המשיק: $y = 48x + 88$.

בתרגילים 7-10 מתרגלים גזירת פונקציות מורכבות מהצורה $y = e^{f(x)}$. אין אנו מפרידים בין טכניקת הגזירה למשמעות הנגזרת לכן כבר בתרגיל 8 עוסקים במשמעות הנגזרת בנקודה כשיפוע המשיק בנקודה. כמו כן מוצאים משוואות משיקים.

תרגיל 7

הערה: בכל התרגילים רשמנו את הנגזרת הפנימית כגורם השמאלי במכפלה ואת הנגזרת החיצונית כגורם הימני במכפלה. מומלץ שגם התלמידים ירשמו כך, כי הפונקציה הפנימית "נכנסת" בטעות למעריך של הפונקציה המורכבת.

גם פה מומלץ למסגר תחילה את הפונקציה הפנימית.

א) $y' = 5e^{5x}$ ד) $y' = 1.5e^{0.5x}$

ב) $y' = -2e^{-2x+5}$ ה) $y' = e^{x} - e^{-x}$

ג) $y' = -2xe^{-x^2}$ ו) $y' = 6e^{3x} + 12e^{-3x}$

תרגיל 8

א) $B(2,2.72)$, $A(0.5,0.13)$.

ב) $y' = 2e^{2x-3}$, $y'(2) = 5.44$, $y'(0.5) = 0.26$.

ג) השיפוע בנקודה B גדול יותר.

ד) אפשר לציין שהתשובה הגיונית מכיוון שגרף הפונקציה תלול יותר ב – B לעומת A. ניתן גם לבדוק את הגיוניות התשובה על ידי הנחת "ישר".

תרגיל 9

א) $A(1,-2)$ ב) $y' = -4xe^{x^2-1} \Leftarrow y'(1) = -4$.

ג) משוואת המשיק $y = -4x + 2$.

תרגיל 10

אין בתרגיל הדרכה למציאת משוואת המשיק. תלמידים המתקשים יוכלו להיעזר בהדרכה שבתרגיל הקודם.

משוואת המשיק : $y = -2x+1$.

התרגילים 11-12 מזכירים את הנגזרת של פונקצית השורש בה עסקו בפרק הקודם, וכאן ועוסקים במשמעות הנגזרת בנקודה כשיפוע המשיק. בתרגילים 13-15 גוזרים פונקציות מורכבות הקשורות עם פונקצית השורש ומוצאים משוואת משיק בנקודה.

תרגיל 11

שרטוט המשיק לא מאפשר את "קריאת המשוואה" אלא נועד לבדיקת הגיוניות החישוב.

א) $h(4) = 2$, $h'(4) = 0.25$ ב) משוואת המשיק: $y = 0.25x+1$

תרגיל 12

אחרי שהתלמידים תרגלו גזירה של פונקציות מורכבות משתי משפחות שונות, הם מתמודדים עם גזירה של משפחה נוספת ללא הדרכה. הם יכולים לבדוק (בסעיף ב') את הגיוניות חישוביהם בעזרת השרטוט. ניתן לקרוא את שיפוע המשיק המשורטט (0.5) בעזרת נקודות החיתוך עם הצירים: מתקדמים לאורך ציר x ב- 3 יחידות ועולים ב- 1.5 לאורך ציר y.

א) $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$.

ב) $g'(1) = 0.5$.

תרגיל 13

א) $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$ ג) $y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$ (אפשר לצמצם ב- 2)

ב) $y' = \frac{7-2x}{2\sqrt{7x-x^2}}$ ד) $y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

תרגיל 14

א) $g'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-4}}$ ב) $g'(2) = 3$ ג) משוואת המשיק: $y = 3x - 4$.

תרגיל 15

משוואת המשיק: $y = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$.

אפשר להציע לתלמידים לשרטט תחילה את גרף הפונקציה $y = \sqrt{x-8}$ (פונקציה שהכירו בפרק הקודם) לנסות לשער בקירוב את משוואת המשיק, לחשב ולבדוק שהתוצאות תואמות.

בתרגילים 16-17 עוסקים בפונקציות מורכבות מן הצורה $\frac{1}{f}$. בפרקים קודמים חקרנו פונקציות כאלה ללא שימוש בנגזרת, וכאן ניעזר בנגזרת של פונקציה מורכבת כדי למצוא את משוואת משיק.

תרגיל 16

א) $y' = -\frac{2}{(2x-5)^2}$

ב) $y' = -\frac{6x}{(x^2+1)^2}$

ג) $y' = -\frac{6}{(3x)^2}$

ד) $y' = -\frac{3}{(3x+4)^2}$

ה) $y' = 5 \cdot (-\frac{1}{(x^2)^2}) \cdot 2x = -\frac{10}{x^3}$

ו) $y' = -2 \cdot (-\frac{1}{(x^3)^2}) \cdot 3x^2 = \frac{6}{x^4}$

הערה לסעיף ג': אפשר לפתור אחרת, לא כפונקציה מורכבת.

$$y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3}\frac{1}{x} \Leftarrow y' = \frac{2}{3}(-\frac{1}{x^2}) = -\frac{2}{3x^2}$$

תרגיל 17

א) A(1,-0.5) ב) $y' = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \Leftarrow y'(1) = 0.25$.

ג) משוואת המשיק: $y = 0.25x - 0.75$.

תרגילים

18. א) $y' = (8x-2)e^{4x^2-2x}$

ב) $y' = -4e^{-2x} + 12e^{4x}$

ג) $y' = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} + 3x^2$

ד) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

ה) $y' = -\frac{3 \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{6x}{(4-x^2)^2}$

ו) $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(3+2x)^2}$

ז) $y' = \frac{x}{2\sqrt{4+x^2}} + 3$

ח) $y' = -\frac{1}{2} + \frac{-1}{6\sqrt{9-x}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{9-x}}$

19. א) $f'(x) = -3(x+2)^2 \Leftarrow f'(-3) = -3$

ב) ניתן לראות שעל כל התקדמות של שתי יחידות על ציר x, **יורדים** 6 יחידות על ציר y, לכן השיפוע 3-.

אפשר לבקש גם את משוואת המשיק ולבדוק שנקודת החיתוך עם ציר y אכן ב- 8-.

20. א) $y = -4x$

ב) $y = -0.75x + 1.75$

ג) $y = 0.5x - 0.25$

ד) $y = -4x + 21$

חקירה של פונקציות מורכבות (עמודים 193-210 בחוברת לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה עוסקים בחקירה של פונקציות מורכבות מהצורה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ (כאשר $f(x)$ היא פונקציה קווית או ריבועית) בשני אופנים: ללא הנגזרת ועם הנגזרת. בחקירה ללא הנגזרת מודגש הקשר בין ערכי g לבין ערכי f ושרטוט הפונקציה g נעשה על-פי הערכים של f. חקירת הפונקציה בדרך השנייה מתבססת על מיומנות הגזירה. הגזירה והחקירה של פונקציות מורכבות הם שני נושאים לא קלים. כדי להקל על התלמידים אנו מטפלים בכל קושי בנפרד (בסעיף הקודם עסקנו במיומנות של גזירה בלבד, ובסעיף זה מטפלים בחקירה).
הסעיף מתחיל בבדיקת תחום הגדרה של פונקציות שונות בעזרת הגרף, תוך הפעלת שיקולים ולא בעזרת פתרון אלגברי. בגלל הקושי למצוא תחום הגדרה של פולינום ממעלה גבוהה מ- 2, בחרנו את הפונקציה הפנימית כפולינום ממעלה שנייה לכל היותר.
נעסוק בסעיף זה גם בפונקציות מורכבות שאינן קשורות עם פונקצית השורש וכן בפונקציות מורכבות שמוגדרות לכל x.

יחד עם החקירה פותרים בעיות קיצון הקשורות עם הפונקציה $y=\sqrt{f(x)}$. כל בעיות הקיצון בפרק זה: מבוססות על פונקצית המרחק. לפני שרטוט הגרף כדאי לדמיין את ה"סיפור" או להשתמש בתוכנה המתארת את התופעה.
בפרק ז' יש בעיות קיצון נוספות שלא שולבו בסעיפים האחרים, כדי לא להעמיס על הסעיף כאן, וכן כדי לעסוק בסוגים נוספים של בעיות ופונקציות.

תרגיל 1

התרגיל עוסק בתחום הגדרה של פונקציות מורכבות שונות.
מטרת התרגיל להבחין בין שלושה סוגים של פונקציות:

i) פונקציות מורכבות המוגדרות לכל x.

ii) פונקציות שאינן מוגדרות רק עבור מספר סופי וקטן של ערכים של x (בדרך כלל פונקציות רציונליות). iii) פונקציות שאינן מוגדרות עבור מספר אינסופי של ערכים של x (בדרך כלל פונקציות שורש).

א) הפונקציות המוגדרות לכל x: $g(x)$, $n(x)$, $l(x)$, $q(x)$.

ב) הפונקציה המוגדרת לכל המספרים פרט לערך אחד: $m(x)$. היא אינה מוגדרת עבור $x = 6$.

ג) הפונקציה המוגדרת לכל המספרים פרט לשני ערכים: $p(x)$. היא אינה מוגדרת עבור $x = 3$ ו- עבור $x = -4$.

ד) הפונקציות הנותרות: $f(x)$, $h(x)$. כדאי בכיתה, לגבי כל פונקציה, לבקש מהתלמידים למצוא מספרים שעבורם הפונקציה אינה מוגדרת. אין צורך בשלב זה לבקש את תחום ההגדרה, אלא אם זה עולה מהתלמידים.

תרגיל 2

הפונקציה $f(x)$ מתוארת בעזרת הגרף בלבד ולא נתון החוק שלה. בעזרת נקודות על הגרף הנתון, מתבקשים התלמידים לשרטט את גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$. קוראים את שיעורי הנקודות המודגשות ובודקים לגבי כל נקודה אם ניתן לחשב את ערך g שלה, אם כן מחשבים ומסמנים. זו למעשה הכנה לקראת מציאת תחום הגדרה של פונקציה מורכבת הקשורה עם שורש. תוך כדי בדיקה מזהים את הנקודות המשותפות. ייתכן שתלמידים לא ישימו לב לכך שהגרף של g המתקבל כאשר ערכי f גדולים מ - 1 הוא מתחת לגרף של f ולעומת זאת כאשר ערכי f קטנים מ- 1 הוא מעליו. במקרה זה מומלץ לקיים דיון בעזרת דוגמאות: להציב מספר ערכים של x בין 3 ל - 4 (או בין 6.5 ל - 6-) ואז רואים שהגרף של g מתקבל בתחומים אלה מעל הגרף של f. (כי שורש של מספר חיובי קטן מאחד גדול מהמספר. תכונה זו מפתיעה ולכן יש חשיבות להציב מספר ערכים כדי לבדוק את העובדה הזו.) הבדלים אלה יטופלו שוב בתרגיל 7. עד תרגיל 7 משרטטים את הגרף של פונקציה מורכבת במערכת צירים נפרדת מהמערכת בה

משורטטת הפונקציה הפנימית, לכן הנושא לא מטופל בשאלות 3-6 .

א) עבור הנקודות הבאות שעל גרף הפונקציה f:

(4,0), (3,1), (1,4), (-2,6), (-5,3), (-6,1), (-6.5,0).

ניתן לחשב ערכים של g והם:

(4,0), (3,1), (1,2), (-2,2.45), (-5,1.73), (-6,1), (-6.5,0).

ב) הנקודות המשותפות לשתי הפונקציות: (4.0), (3,1), (-6,1), (-6.5,0).

רצוי לדון למה נקודות אלה משותפות לשני הגרפים.

תרגיל 3

מתמקדים במציאת תחום ההגדרה של פונקציה מן הצורה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ כאשר f היא פונקציה קווית. לצורך מציאת התחום נעזרים בגרף של f (כפי שעשו בתרגיל 2).

א) (i) $x \geq -3$ (ii) $x \geq 0$ (iii) $x \leq 4$ (iv) $x \geq -2$

ב) - (iii) $\leftrightarrow g(x)$, (ii) $\leftrightarrow m(x)$, (iv) $\leftrightarrow h(x)$, (i) $\leftrightarrow n(x)$

- תחום ההגדרה של g: $x \leq 4$, תחום ההגדרה של m: $x \geq 0$,

תחום ההגדרה של h: $x \geq -2$, תחום ההגדרה של n: $x \geq -3$.

תרגיל 4

לצורך שרטוט של פונקצית השורש המורכבת נעזרים בפונקציה הנגזרת. מוצאים תחילה את תחום ההגדרה של הפונקציה g על-פי השרטוט של הפונקציה הקווית f. התלמידים יכולים למעשה בשלב זה לשרטט את גרף הפונקציה g בעזרת נקודות של f (כפי שעשו בשאלה 2). הם גם נדרשים למצוא את הנגזרת כדי שיראו את הקשר בין תכונות הפונקציה לפונקציה הנגזרת. הם מגלים שהנגזרת אינה מתאפסת (אין לה נקודות קיצון המתקבלות מהנגזרת, אך יש להתייחס לנקודת הקיצון המתקבלת בקצה תחום ההגדרה, $x = 3$).

בסעיף ד'-ה' מחשבים ערכים אחדים של הפונקציה g ובעזרתם רואים שהגרף אינו קו ישר. כדאי להסב את תשומת ליבם של התלמידים לנקודות המשותפות וכן למיקום של הגרף של g ביחס ל- f כאשר ערכי f קטנים מ- 1 (עבור x בין 3 ל- 4), וכאשר ערכי f גדולים מ- 1 (עבור x גדול מ- 4).

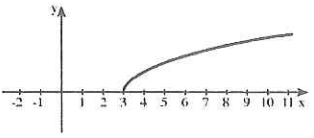
א) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x \geq 3$

ב) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

ג) (3,0) היא נקודת מינימום. נקודה זו אינה מתקבלת מתוך הנגזרת אלא היא קצה של תחום.

ד) (3.5,0.7), (4,1), (7,2), (8,2.24).

ה)



תרגיל 5

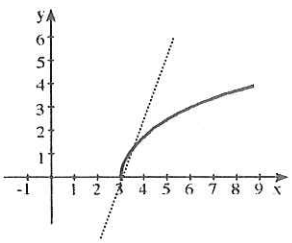
חוקרים ומשרטטים משרטטים פונקציה מורכבת נוספת ללא הדרכה, כאשר מציינים את שלבי החקירה.

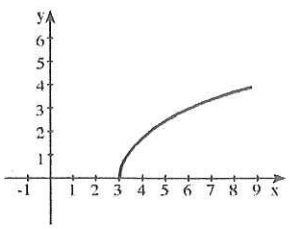
א) כדאי להמליץ שתלמידים ישרטטו תחילה את הפונקציה הקווית, כדי למצוא את תחום ההגדרה. $x \geq 3$

ב) נקודת החיתוך עם ציר x: (3,0).

ג) נקודת הקיצון היא נקודת הקצה: (3,0) .

ד) ה)

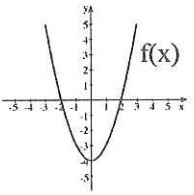




בתרגילים 6-8 חוקרים פונקציה מורכבת $g(x)=\sqrt{f(x)}$ בעזרת הגרף של f כאשר f ריבועית. בתרגיל 9 חוקרים בעזרת הנגזרת, ובהמשך תלמידים בוחרים את דרך החקירה.

תרגיל 6

גם כאן מתחילים במציאת תחום ההגדרה ונעזרים בערכי הפונקציה f כדי לשרטט את g. תחום ההגדרה של g מפוצל.



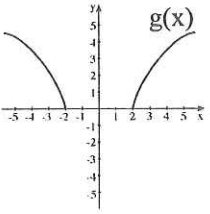
א) נקודות חיתוך עם הצירים:

(0,-4), (2,0), (-2,0).

נקודת מינימום: (0,-4).

ב) התחומים בהם הפונקציה f חיובית

או אפס: $x \geq 2$ או $x \leq -2$.



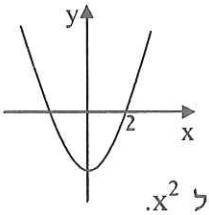
ג) תחום ההגדרה של g: $x \geq 2$ או $x \leq -2$.

ד) בשרטוט הסקיצה של g אותה משרטטים בעזרת הגרף של f.

תרגיל 7

בתרגיל זה מתמקדים בהבדלים בין הפונקציה "הפנימית" f לפונקציה המורכבת h כאשר ערכיהן חיוביים וקטנים מ - 1 לעומת ההבדלים כאשר ערכיהן גדולים מ - 1.

בסעיפים ב' ו-ג' התלמידים משערים השערה ובודקים את נכונותה בעזרת חישוב של נקודות. בסעיף ב' בוחרים את הגרף המתאים לפונקציה המורכבת וכדי לאמת את הבחירה מציבים בסעיף ג' מספר נקודות לבדיקה.



א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \geq 2$ או $x \leq -2$.

כדי להגיע לתחום ניתן להיעזר בסקיצה של גרף הפונקציה: $y = 0.5x^2 - 2$ את הסקיצה ניתן לשרטט בעזרת נקודות החיתוך. עם ציר x ובעזרת סימן המקדם של x^2.

ב) גרף ii מתאים לפונקציה הנתונה.

כדאי לבקש תחילה הסבר עבור הגרפים שאינם מתאימים.

גרף (i) לא מתאים כי הגרף משורטט גם עבור ערכים בהם הפונקציה לא מוגדרת. גרפים (ii), (iii) כן משורטטים בתחום המתאים וכדי להסביר מדוע גרף (ii) מתאים אפשר להחזיר את התלמידים לשאלה 2 סעיף ד'. כאשר ערכי הפונקציה f בין 0 ל- 1 הגרף של g "מעל" הגרף של f.

ג) (i) $f(3)=2.5$, $f(2.3)=0.645$, $f(2)=0$, $f(1)=-1.5$.

$h(3)=1.58$, $h(2.3)=0.803$, $h(2)=0$, $h(1)$ חסר משמעות.

תרגיל 8

בתרגיל הקודם התלמידים רק התבקשו לציין איזה גרף מתאים לחוק הפונקציה המורכבת ללא התייחסות לנקודות המשותפות. בתרגיל זה מוצאים את הנקודות המשותפות בעזרת הגרף ומאמתים את ערכיהם על-ידי הצבה (אין הכוונה לפתור את המשוואה $x^2 - 2.5x + 1=1$ למרות שתלמידים יודעים לפתור משוואה כזו). בעזרת הנקודות המשותפות רושמים את התחומים המתאימים.

א) $(0.5,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(2.5,1)$.

ב) (i) כאשר ערכי f בין 0 ל- 1, g "מעל" f.

(ii) כאשר ערכי f גדולים מ- 1, f "מעל" g.

תרגיל 9

בתרגיל זה עוסקים בפונקצית שורש המוגדרת לכל x.

מכוונים את התלמידים למצוא נקודות קיצון לפי הנגזרת. למעשה התלמידים יכולים לחקור, כפי שעשו בתרגילים הקודמים: לשרטט את הפונקציה הריבועית שבתוך השורש ובעזרתה לחקור את הפונקציה המורכבת, אך כאן רצינו שתלמידים ילמדו גם להשתמש בנגזרת לחקירת פונקציה. בהמשך התלמידים יכולים לבחור את אחת משתי הדרכים לחקירת פונקציה מורכבת.

א) ישנם תלמידים שיפשטו ויקבלו : $2x^2-8x+16$. ביטוי זה דורש חקירה נוספת כדי לקבוע מתי הוא חיובי. אך אפשר לכוון את התלמידים להפעיל שיקולים כמו : $x^2 \geq 0$ לכל ערך של x וגם הביטוי $(x-4)^2 \geq 0$ לכל x, לכן עבור כל ערך שנציב במקום x, בפונקציה הפנימית נקבל ערך גדול מאפס.

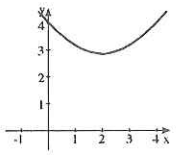
למורים :

ערכי הפונקציה בתוך השורש הם חיוביים ולא אפס, כי שני הביטויים לא יכולים להתאפס עבור אותו ערך של x.)

כדאי לשים לב שערכי הפונקציה גדולים או שווים ל- 8 ולכן הערך המינימלי של $f(x)$ הוא $\sqrt{8} \approx 2.83$. (הערה זאת ניתן לומר גם לתלמידים.)

ב) $f'(x) = \frac{4x-8}{2\sqrt{(4-x)^2+x^2}} = \frac{2x-4}{\sqrt{(4-x)^2+x^2}}$

ג)



(2,2.83) נקודת מינימום.

תרגיל 10

בסעיפים א' ו – ב' תלמידים בודקים את תחום ההגדרה של הפונקציה בעזרת שרטוט הפונקציה הפנימית. אין הדרכה לגבי המשך החקירה.

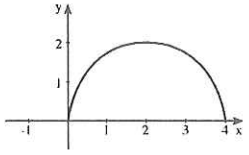
ב) תחום ההגדרה : x בין 0 ל- 2 ,כולל 0 ו- 2 $(0 \leq x \leq 2)$.

ג) נקודות חיתוך עם צירים (0,0), (4,0).

ד) נקודת מקסימום : (2,2).

נקודות מינימום : (0,0), (4,0).

ה)



כדאי לציין בכיתה שהפונקציה מתחת לשורש מקבלת ערך מקסימלי 4 ב- $x = 2$, ולכן g תקבל ערך מקסימלי $\sqrt{4} = 2$ עבור אותו ערך ל x.

בתרגילים 11-14 פותרים בעיות קיצון בהן מתקבלות פונקציות הקשורות עם $y=\sqrt{f(x)}$. בשלב ראשון התלמידים בודקים מקרים פרטיים בעזרת שרטוט

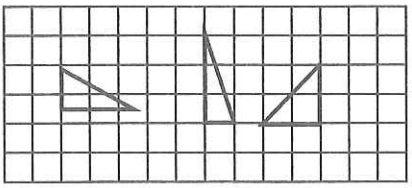
ידני ו/או במחשב ואחר כך בונים את הפונקציה, חוקרים אותה ועונים על השאלה.

ברוב הבעיות מקשרים בין שלושה ייצוגים: הייצוג הנומרי (מקרים פרטיים), הייצוג בתבנית (החוק) והייצוג הגרפי.

תרגיל 11

בבעיית קיצון זאת תתקבל הפונקציה המורכבת שהופיעה בתרגיל 9, לכן בעצם אין צורך בחקירת הפונקציה ויש להתרכז בקשר בין הסיפור והגרף.

א) המקרים הפרטיים שהתלמידים משרטטים על דף משובץ נותנים את התחושה של השתנות אורך כל ניצב כאשר סכום אורכי הניצבים קבוע ושווה ל - 4. כמו כן סעיף זה מחזק את הקשר לסיפור הבעיה.



ב) (i) ביטויים לאורכי הניצבים: x ,4-x. ביטוי ליתר: $\sqrt{x^2+(4-x)^2}$.

(ii) אומנם הפונקציה מוגדרת לכל x, התחום המשמעותי לבעיה הוא בין 0 ל- 4.

ג) (i) אורך היתר הקצר ביותר מתקבל עבור x = 2. (ii) אורכי הצלעות: 2,2, 2.83. (iii) משולש שווה שוקיים.

תרגיל 12

בסעיפים א'-ג' בודקים מקרים פרטיים כדי לתת את התחושה של אופי החישוב הנדרש למציאת תבנית כללית לזמן. את החישובים הקשורים למקרים הפרטיים תלמידים מבצעים בהדרגה בעזרת הדרכה: מחשבים תחילה את המרחק ואחר-כך בעזרת המרחק מחשבים את הזמן המתאים.

א) 2 ק"מ בים ו- 6 ק"מ ביבשה לכן המרחק: 8 ק"מ. זמן ההפלגה בים $\frac{2}{3}$ שעות

וזמן ההליכה ביבשה $\frac{6}{4}$ שעות, לכן סה"כ הזמן 2.17 שעות.

ב) המרחק: 6.83 ק"מ. הזמן: 1.94 שעות.

ג) הזמן: 1.95 שעות.

ד) $BM = \sqrt{x^2+4}$, $y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{6-x}{4}$.

ה) עבור $x = 2.27$ מתקבל הזמן הקצר ביותר.

לאחר שמוצאים את המרחק x חוזרים לסיפור ומבקשים לסמן בערך את הנקודה המתאימה למספר המתקבל על הרציף - וזאת כדי לקשר עם סיפור הבעיה שהתחיל עם תיאור ויזואלי של הרציף והדייג.

ו) המרחק הקצר ביותר הוא המרחק בין B לרציף השווה ל- $\sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$.

מסלול זה שונה מהמסלול הקצר ביותר מבחינת הזמן, וזאת בגלל המהירויות השונות בים וביבשה

תרגיל 13

בתרגיל יש שני חלקים העוסקים בסיטואציות דומות. בחלק הראשון עוברים מהשתנות הצורה על-ידי השתנות נומרית, ישירות לגרף בעזרת מחשב (ללא תווך אלגברי). בחלק השני נעזרים בכלים נומרים ואנליטים כדי להסביר את הגרף המתקבל. הקוטר והמשיק הם כעין הקבלה לצירים בחלק השני. בחלק הראשון בודקים השתנות המרחק של נקודה הנעה על מעגל מנקודה נתונה "על אנך", ובחלק השני בודקים השתנות מרחק נקודה הנעה על פרבולה מנקודה נתונה על ציר y.

בגלל מגבלות התוכנה "הנדסה בתנועה" הנקודה נעה על מעגל ולא על פרבולה. (בחלק השני חקרנו פרבולה ולא מעגל כי עוסקים בפונקציות).

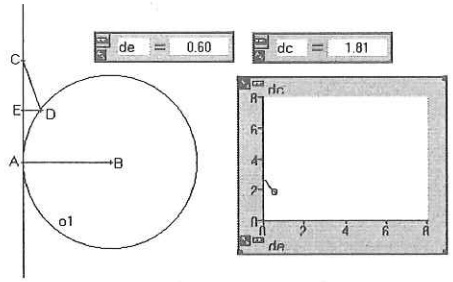
חלק ראשון

כאן החקירה נעשית בעזרת המחשב. התוכנה "הנדסה בתנועה" מאפשרת לראות רצף של מקרים, ובמקביל לראות את השתנות של הגרף.

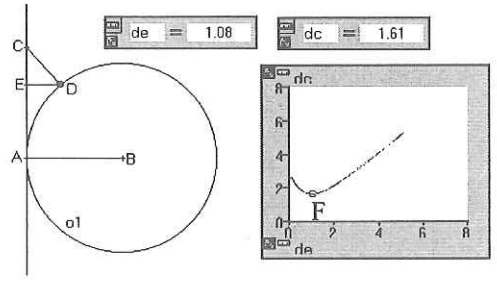
יש לשים לב, כדי שהגרף יצטייר עבור DE קרוב לאפס, יש להזיז את D קרוב לישר. מומלץ לא להתקרב יותר מידי כי אז יהיה קשה "לתפוס" את D (בגלל בעיות התוכנה).

להלן שלושה שלבים של ביצוע השרטוט בעזרת המחשב .

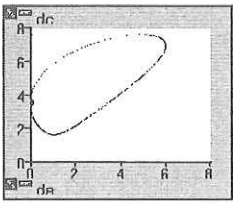
א) שיעורי הנקודה המודגשת בגרף הם (0.6,1.81)



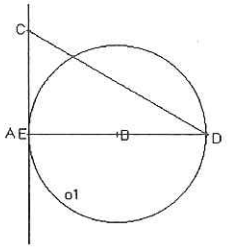
ב) משורטט הגרף כאשר מודגשת נקודת המינימום F(1.08,1.61)



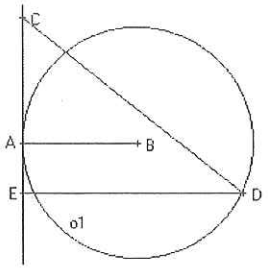
ג) לאחר סיבוב שלם של הנקודהD הגרף נראה כך.



כדי להבין את צורת הגרף כדאי להסתכל על הגרף המצטייר תוך כדי הזזת D.



נסתכל תחילה על השתנות DE, התחום שלו בין 0 ל- 6 יחידות. במקרה המשורטט E נופלת על A.



לאחר מכן, כאשר הנקודה D ממשיכה במסלול על המעגל, היא מתקרבת ל- E, ולכן DE קטן, אז הגרף מצטייר משמאל לימין עד שמגיע לאפס ומקבלים גרף בצורת בלון.

DC הולך וגדל אחרי נקודת המינימום עד שמתלכד עם הקוטר ולאחר מכן קטן.

למורים:

התשובה עד כה אינה מסבירה את צורת הגרף (למשל, אין כאן הסבר למה הגרף לא סימטרי). התשובה רק מאמתת בגרף נתונים של תחום, טווח, עלייה וירידה, אך לא על ההשתנות עצמה. חשוב לדעת שהתשובה שניתנה היא מה שמצפים מהתלמידים, אך היא אינה התשובה המדויקת לשאלה בספר.

למעשה מתקבלות שתי פונקציות. כדי לקבל את החוקים המתאימים נשרטט מעגל במערכת צירים כך ש- AC הוא ציר y , AB ציר x, ונקודה A היא ראשית הצירים.

משוואת המעגל $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

ניתן לבודד את y ולקבל : $y = \pm\sqrt{9-(x-3)^2} = \pm\sqrt{6x-x^2}$

נקודה C היא נקודה נתונה ששיעוריה (0,c)

D(x,y) - נקודה הנעה על המעגל .

כאשר D "מעלי" ציר x נקבל את הפונקציה :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{6x-x^2} - c)^2}$$

כאשר D "מתחת" לציר x נקבל את הפונקציה :

$$g(x) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{6x-x^2} + c)^2}$$

הערה:

במידה ונחליף את הצירים כלומר - AC ציר x , AB ציר y, נקבל פונקציות יותר פשוטות.

חלק שני

כאן בודקים מקרים פרטיים בשרטוט, בונים את הפונקציה וחוקרים אותה.

הערה: אם עושים את פעילות המחשב מומלץ לשנות את האותיות: לרשום C במקום A ו- D במקום B, כך קל יותר לראות את ההקבלה בין שני חלקי הבעיה. את DE מחליף למעשה שיעור x של נקודה D, ואת המעגל מחליפה הפרבולה.

בבעיה כאן יש שתי פונקציות: הפונקציה $f(x) = x^2+2$ ופונקציית המרחק ולכן יש כאן קושי נוסף.

כפי שציינו אנו משתדלים לקשר בין הבעיה לשרטוט הגרף המתאים. בחלק מהבעיות התלמידים משרטטים בעצמם ובחלק השרטוט נתון. במקרה זה, הבעיה קשורה לגרף, כדי להקל ולמנוע אי בהירויות וקשיים, הגרף משורטט (בסעיף ב') והתלמידים נדרשים רק לסמן את נקודת המינימום.

א) (i) B(3,11), AB = 4.24; B(1,3), AB = 5.1; B(-2,6), AB = 2.83.

(ii) $g(x) = \sqrt{x^4 - 11x^2 + 36}$

(iii) המרחק AB הוא מינימלי עבורה x = 2.35, x = -2.35

תרגיל 14

בתרגיל זה נעזרים בנקודות המתקבלות ממקרים פרטיים כחלק מבניית הגרף של פונקצית המרחק. הדבר שונה מהבעיה הקודמת, שם המקרים הפרטיים הובילו לבניית חוק הפונקציה עצמה.

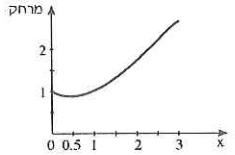
א) (0.25,0.5), המרחק: 0.9. (1,1) המרחק: 1. (2.25,1.5), המרחק: 1.95.

לאחר החישובים כדאי לשאול את התלמידים אם לפונקצית המרחק יהיה מינימום או מקסימום (וזאת לשאול לפני החקירה ושרטוט הגרף). זאת כדי שהתלמידים ידמיינו את תנועת הנקודה ואת המרחק שהוא מתקצר תחילה וגדל אחר.

ב) (i) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$,

(ii) נקודת מינימום: (0.5,0.87).

(iii)



תרגילים

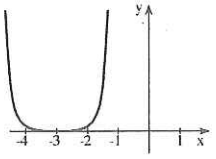
בתרגילים 16,15 חוקרים פונקציות מהצורה $[f(x)]^n$ על ידי הדרכה למציאת תכונות המפורטות בכל תרגיל.

בתרגילים 17, 18 חוקרים פונקציות מהצורה $e^{f(x)}$. החקירה נעשית על-ידי התכונות הרשומות בתרגילים הקודמים, ובנוסף יש התייחסות לאסימפטוטות.

תרגילים 19-23 מתייחסים לפונקצית השורש מהצורה: $\sqrt{f(x)}$ עם דגש על תחום ההגדרה, כאשר הפונקציות הפנימיות הן פונקציות קוויות או ריבועיות.

תרגילים 24-25 הן בעיות קיצון דומות לאלו שבמהלך .

15. א) נקודות חיתוך עם הצירים: (0,81), (-3,0). ג)

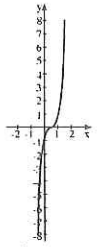


ב) (-3,0) נקודת מינימום.

ד) הפונקציה עולה עבור $x > -3$.

הפונקציה יורדת עבור: $x < -3$.

16. א) נקודות חיתוך עם הצירים: (0,-1), (0.5,0). ג)

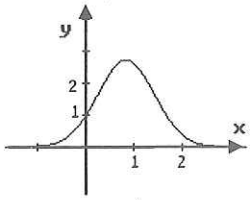


ב) לפונקציה אין נקודות קיצון.

ד) הפונקציה שלילית עבור $x < 0.5$.

כדאי להתייחס לעובדה שהפונקציה עולה כל התחום.

17. (i) א) נקודת חיתוך עם הצירים: (0, 1). ג)



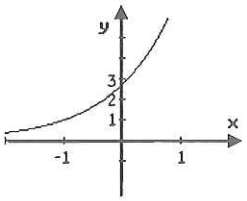
ב) (1,2.72) נקודת מקסימום.

ד) הפונקציה עולה בתחום $x < 1$.

הפונקציה יורדת בתחום $x > 1$.

(ii) גרף הפונקציה אינו חותך את ציר x מ אחר ש- e בחזקת כל מספר תמיד חיובי ולכן לא מתאפס.

18. א) נקודת חיתוך עם הצירים: (0, 2.72). ג)



ב) אין נקודת קיצון.

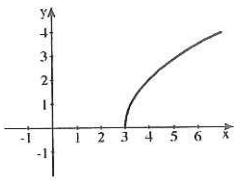
ד) הפונקציה עולה בכל התחום.

19. א) $x \geq 0$ ב) $x \leq 12$ ג) $x \geq -4$ ד) $x \leq 2.5$

20. א) $x \geq 3$, $x \leq -3$ ב) $x \geq 0$, $x \leq -3$ ג) לכל x.

ד) $0 \leq x \leq 6$ ה) $x \geq 5$, $x \leq -1$ ו) $-1 \leq x \leq 4$

21. א) (i) תחום ההגדרה: $x \geq 3$.



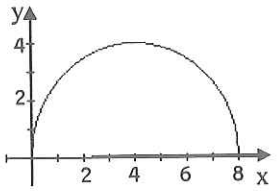
(ii) נקודת חיתוך עם הצירים: (3,0).

(iii) (3,0) נקודת מינימום (היא נקודת קצה).

(iv)

(v) הפונקציה עולה לכל x בתחום.

ב) (i) תחום ההגדרה: $0 \leq x \leq 8$.



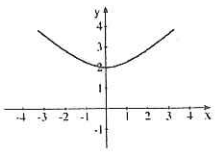
(ii) נקודת חיתוך עם הצירים: (8,0), (0,0).

(iii) (4,4) נקודת מקסימום.

(iv) (8,0), (0,0) נקודות מינימום.

(v) m עולה בתחום $0 < x < 4$. ויורדת בתחום $4 < x < 8$.

ג) (i) תחום ההגדרה: כל x.



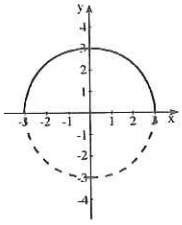
(ii) נקודת חיתוך עם הצירים: (0,2).

(iii) (0,2) נקודת מינימום.

(iv)

(v) h יורדת בתחום $x < 2$. ועולה בתחום $x > 2$.

22. א) הגרף הרציף של g.



ב) הגרף מקווקו של -g.

ג) תחום ההגדרה של -g: $-3 \leq x \leq 3$ והוא זהה לתחום ההגדרה של g.

בכיתות מתקדמות אפשר להראות שקיבלנו מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 9$.
אפשר גם להראות שניתן לקבל משוואה זו מחוק הפונקציה הנתונה (על-ידי רישום y במקום g והעלאה בריבוע את שני האגפים). לא הצענו להתייחס למעגל המתאים בתרגיל 21 ב' מאחר ומתקבל שם מעגל שמרכזו לא בראשית הצירים. מתקבלת משוואת מעגל לא "מסודרת" והתלמידים לא יודעים ל"סדר" אותה.

23. א) $g(x)$, $m(x)$ מתאימים לגרף (ii).

$h(x)$, $k(x)$ מתאימים לגרף (iii).

$v(x)$, $n(x)$ מתאימים לגרף (i).

ב) תחום ההגדרה של $g(x)$, $m(x)$: $x \geq 4$, $x \leq 0$.

תחום ההגדרה של $h(x)$, $k(x)$: $0 \leq x \leq 4$.

תחום ההגדרה של $v(x)$, $n(x)$: $x \geq 4$.

24. א) 7.62 ס"מ.

ד) ביטויים לאורכי הצלעות: x, $10-x$.

(i) ביטוי לאורך האלכסון: $y = \sqrt{x^2 + (10-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$.

(ii) אורך האלכסון יהיה מינימלי עבור $x = 5$.

תחום הפונקציה הוא כל המספרים, (רואים זאת מהביטוי השמאלי של האלכסון) אך תחום הבעיה הוא בין $x = 0$ ל- $x = 10$.

25. א) $A(0,1) \Leftarrow AM = 2$.

$B(1,2) \Leftarrow BM = 1.41$.

$C(4,3) \Leftarrow CM = 2.83$.

ב) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

ג) $(1.5,2.22)$ היא הנקודה הנמצאת במרחק הקטן ביותר מ- M.

אינטגרל של פונקציה מורכבת (עמודים 211 - 215 בספר לתלמיד)

עד כה עסקנו בחקירה של פונקציה מורכבת ועל בסיס לימוד זה והידע באינטרלים עוסקים כאן באינטגרל של פונקציה מורכבת. אפשר ללמוד סעיף זה רק לאחר שלמדו את הסעיפים הקודמים באינטגרלים.

הסעיף הזה מופיע בספר אינטגרלים בעמודים 106 - 102. במידה ולא למדו את נושא האינטגרלים יש לדלג עליו.

מהלך הסעיף

בסעיף זה ארבעה חלקים. בכל אחד משלושת החלקים, התלמידים גוזרים תחילה פונקציות מורכבות ומגזירה זו מגיעים למסקנה כי נגזרת הפונקציה מכילה כגורם את המקדם של הפונקציה הקווית.

חלק ראשון (תרגילים 1 - 3): בודקים אינטגרלים על-ידי גזירה, ומכאן מגיעים למסקנה שבמציאת אינטגרל של פונקציה מורכבת $y = e^{f(x)}$, כאשר $f(x)$ קווית יש לחלק במקדם של x.

חלק שני (תרגילים 4 - 6): גוזרים פונקציות מהצורה $y = [f(x)]^n$, כאשר $f(x)$ פונקציה קווית, ושוב מגיעים למסקנה שבחישוב האינטגרל יש לחלק ב- $f'(x)$.

חלק שלישי (תרגילים 7 - 9): גוזרים פונקציות מהצורה $y = \frac{1}{[f(x)]^2}$, בודקים אינטגרלים על-ידי גזירה, ומחשבים אינטגרלים של פונקציות מורכבות כאלה.

חלק רביעי (תרגילים 10 - 14): מחשבים שטחים הכלואים בין גרפים של פונקציות מורכבות, ציר x וגבולות נתונים.

תרגיל 1

בתרגיל זה גוזרים פונקציות מורכבות מהצורה $y = e^{f(x)}$, $f(x)$ פונקציה קווית.

א) $y' = 2e^{2x+3}$ ג) $y' = -2e^{-2x+1}$

ב) $y' = 3e^{3x}$ ד) $y' = -1e^{-x}$

תרגיל 2

בתרגיל זה האינטגרלים נתונים, ויש לבדוק על-ידי גזירה. בסעיף ג' התלמידים מחשבים בעצמם את האינטגרל, ובודקים את התשובה שלהם על-ידי גזירה.

ג) $\int e^{-x+2}dx = -e^{-x+2} + c$

בסוף התרגיל כדאי לסכם יחד כיצד למצוא אינטגרל של פונקציה $y = e^{f(x)}$, כאשר $f(x)$ קווית. יש תלמידים המסיקים בעצמם כי האינטגרל הוא הפונקציה הנתונה עצמה מחולקת במקדם של x בפונקציה הקווית $f(x)$. בתרגיל 4 רואים שאי אפשר להסתמך על מסקנה זו בפונקציות מורכבות אחרות. מסיבה זו ייתכן וכדאי להתחיל עם תרגילים 4, 5, 6.

תרגיל 3

א) $\int e^{4x}dx = -\frac{e^{4x}}{4} + c$

ב) $\int e^{3+2x}dx = \frac{e^{3+2x}}{2} + c$

ג) $\int 3e^{-x+1}dx = -3e^{-x+1} + c$

ד) $\int 2e^{2x+3}dx = e^{2x+3} + c$

ה) $\int -4e^{-x+2}dx = 4e^{-x+2} + c$

ו) $\int (2e^{-2x+1} + 2x)dx = -e^{-2x+1} + x^2 + c$

תהליך דומה לזה שנעשה בשלושת התרגילים הראשונים נעשה כאן בשלושת התרגילים הבאים, לגבי פונקציה מהצורה $y = [f(x)]^n$.

תרגיל 4

מטרת התרגיל היא להיזכר איך גוזרים פונקציה מהצורה $y = [f(x)]^n$.

א) $y' = 8(2x + 3)^3$ ג) $y' = -5(3 - x)^4$

ב) $y' = 15(5x - 1)^2$ ד) $y' = -6(2 - 3x)$

תרגיל 5

א) בסעיף זה בודקים אינטגרלים נתונים על-ידי גזירה. כדאי כאן להסביר בעזרת הדוגמה, ש"המספר 2 שבמכנה" מופיע כדי שבעת הגזירה הוא יצטמצם עם "הנגזרת הפנימית" של הפונקציה המורכבת $y = (2x + 4)^3$, ונקבל את הפונקציה הנכונה.

ב) $\int (5 - 2x)^4dx = \frac{(5 - 2x)^5}{-10} + c = -\frac{(5 - 2x)^5}{10} + c$

ג) $\int (0.5x + 1)^3dx = \frac{(0.5x + 1)^4}{2} + c$

תרגיל 6

כדאי לבקש מהתלמידים לבדוק את האינטגרלים שלהם על-ידי גזירה.

א) $\int (3-x)^3 dx = \frac{-(3-x)^4}{4} + c$

ב) $\int (4x+1)^4 dx = \frac{(4x+1)^5}{20} + c$

ג) $\int (x+4)^5 dx = \frac{(x+4)^6}{6} + c$

ד) $\int (0.1x-2)^3 dx = \frac{5(0.1x-2)^4}{2} + c$

ה) $\int (x-1)^4\, dx = \frac{(x-1)^5}{5} + c$

ו) $\int (-2x+3)^2 dx = \frac{(-2x+3)^3}{-6} + c$

ז) $\int (7-3x)^5 dx = \frac{(7-3x)^6}{-18} + c$

ח) $\int (3-0.5x)^4 dx = \frac{-2(3-0.5x)^5}{5} + c$

בשלושת התרגילים הבאים מבצעים תהליך דומה לזה שנעשה קודם, לגבי פונקציות מהצורה $y = \frac{1}{[f(x)]^2}$.

תרגיל 7

מטרת התרגיל היא להיזכר איך גוזרים פונקציה מהצורה $y = \frac{1}{f(x)}$.

א) $y' = \frac{-2}{(2x+4)^2}$

ב) $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$

ג) $y' = \frac{1}{(-x+1)^2}$

ד) $y' = \frac{-1}{2(0.5x-2)^2}$

תרגיל 8

מטרת התרגיל היא בדיקת האינטגרל באמצעות גזירה.

כדאי, בסיכום סעיף א', לשאול מה מקור המספר 2 בתוצאת האינטגרל $\frac{1}{(2x+1)} + c$.

באופן דומה בסעיף ב', לשאול מדוע מופיע הסימן השלילי לפני התוצאה.

כך להדגיש את הקשר בין הגזירה שעשו לצורך הבדיקה ובין מציאת האינטגרל של פונקציה כזו.

תרגיל 9

מטרת התרגיל היא מציאת אינטגרל על סמך מה שנעשה בשני התרגילים הקודמים.

בשני הסעיפים הראשונים אפשר לבקש בדיקה על-ידי גזירה.

א) $\int -\frac{1}{(3x-2)^2}\,dx = \frac{1}{3(3x-2)} + c$

ב) $\int \frac{1}{(x-4)^2}\,dx = \frac{-1}{x-4} + c$

ג) $\int \frac{1}{(0.5x-3)^2}\,dx = \frac{-2}{0.5x-3} + c$

ד) $\int \frac{-2}{(3x+1)^2}\,dx = \frac{2}{3(3x+1)} + c$

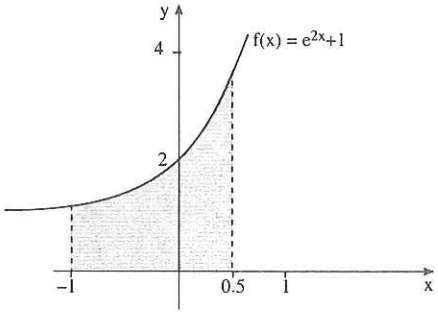
ה) $\int \frac{1}{2(2x-1)^2}\,dx = \frac{-1}{4(2x-1)} + c$

ו) $\int \frac{-1}{(2x)^2}\,dx = \frac{1}{4x} + c$

בתרגילים הבאים (10 - 14) מיישמים חישוב אינטגרלים כאלה לחישובי שטח.

תרגיל 10

בתרגיל זה מחשבים אינטגרל של הפונקציה המורכבת $e^{2x}+1$, בין הגבולות $x=-1$ ו- $x=0.5$.



$$\int_{-1}^{0.5}(e^{2x}+1)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

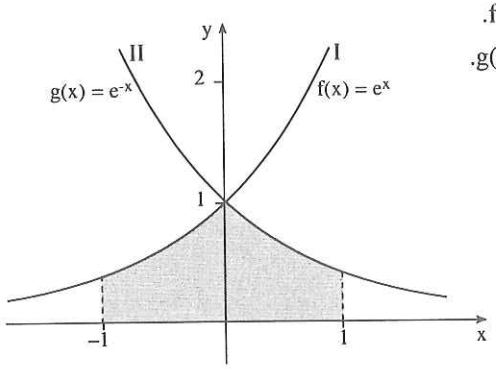
$$= \frac{e}{2} + 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} \approx 2.8$$

תרגיל 11

תרגיל זה משלב חיבור שטחים עם אינטגרל של פונקציה מורכבת.

א) גרף I הוא גרף הפונקציה $f(x)$.

גרף II הוא גרף הפונקציה $g(x)$.



ב) $\int_{-1}^{0} e^x dx = 1 - \frac{1}{e} = 0.63$

$$\int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{e} - (-1) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63$$

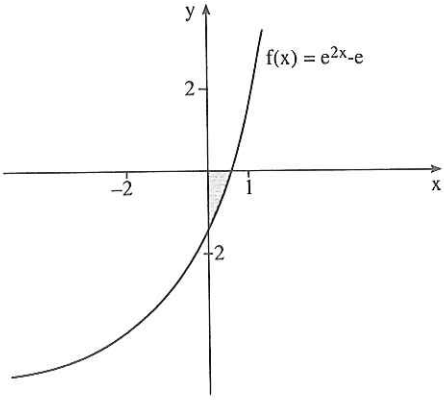
השטח הצבוע הוא $2 - \frac{2}{e} \approx 1.26$

אפשר להשתמש בשיקולי סימטריה ולייעל את החישוב, ובכך להימנע מאינטגרל של פונקציה מורכבת.

תרגילים

12. בתרגיל זה מחשבים שטח הנמצא מתחת לציר x של פונקציה מורכבת.

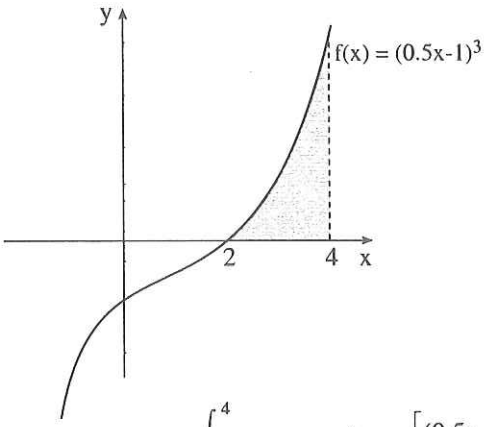
א) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x: $(0.5, 0)$.



ב) $\int_0^{0.5} (e^{2x} - e)dx = -\frac{1}{2}$

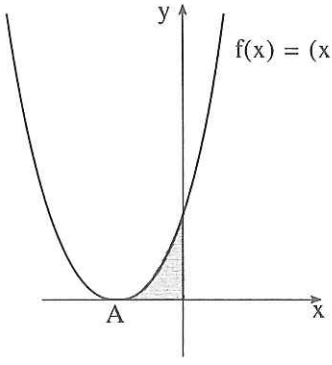
לכן גודלו של השטח הצבוע הוא $\frac{1}{2}$.

13. בתרגיל זה מחשבים שטח בין פונקציה מורכבת וציר x בתחום בו הפונקציה חיובית.



$$\int_2^4 (0.5x-1)^3 dx = \left[\frac{(0.5x-1)^4}{4\cdot 0.5}\right]_2^4 = \frac{1}{2}$$

14. נקודת הפגישה בין גרף הפונקציה f(x) וציר x היא A(–1 , 0).
השטח הצבוע הוא:



$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (x+1)^4 dx =$$

$$= \left[\frac{(x+1)^5}{5}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} \approx 0.194$$

פרק ה: הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

מבוא לפרק

פרק זה עוסק בקשר ובמעבר בין גרף של פונקציה לגרף הנגזרת שלה, ובמעבר מגרף של הפונקציה הנגזרת לגרף הפונקציה.

לימוד הנושא, בעזרת דוגמאות, מבוסס על המושג "קצב שינוי של פונקציה" שנלמד בעבר, (בספרים: "מבוא לאנליזה", סדרות) ועל הקשר בין "קצב שינוי של פונקציה" עם מושג הנגזרת בעזרת (קשר המבוסס על דוגמאות מוחשיות).

מתחילים עם שרטוט גרף של פונקצית הנגזרת על סמך גרף של פונקציה בלבד (החוק שלה לא ידוע), למרות שלצורך חקירה של פונקציה מעוניינים בקשר ההפוך של שרטוט גרף של פונקציה לפי גרף של נגזרתה. שני הכיוונים קשים לתלמידים אך המעבר מהפונקציה לנגזרתה קל יותר, וזו הסיבה לסדר שנקבע.

בהמשך משתמשים במיומנות של שרטוט גרף של הפונקציה הנגזרת, כדי להגיע לגרפים משוערים של נגזרות של פונקציות אותם התלמידים לא למדו.

קצב שינוי של פונקציה (מ- f ל- f')

(עמודים 216 - 238 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה משרטטים את הגרף של f' בעזרת התכונות שמתקבלות מהגרף של f. השרטוט מתבצע לאחר "תרגום" של נקודות הקיצון של f לנקודות חיתוך עם ציר x של f', עלייה וירידה של f לחיוביות ושליליות של f'. תרגומים אלו אינם קלים לתלמידים.

כדי להתגבר על הקושי מתחילים עם שאלות המתארות סיטואציות מוחשיות שבהם עוסקים בקצב שינוי (תרגילים 1-2) ומשרטטים גרף של קצב השינוי (הנגזרת). לאחר מכן משרטטים גרפים של פונקציות לפי התכונות: חיובית, שלילית ונקודות אפס, (מיומנויות שנדרשות לשרטוט גרף של פונקצית הנגזרת), (תרגילים 4-5) .

בהמשך רושמים, בשורת חיצים, את התכונות של הפונקציה הנגזרת (נקודות אפס, חיוביות/שליליות) מתחת לשורת חיצים המתארת את התכונות של הפונקציה (נק' קיצון, עלייה/ירידה).

המהלך כולל תרגילים אופצונליים המתבססים על שימוש במחשב (בתרגילים 6-11 עובדים בעזרת המחשב תרגילים מתאימים ללא המחשב 12-19).
לנוחיות המורים, התרגילים של המהלך מפנים לתרגילים המתאימים שאפשר לפתור לתרגול. ההתאמה נעשתה לפי אופי ההדרכה שבתרגיל, ולגבי חלק מהתרגילים גם לפי דמיון הגרפים.
כמו כן בתרגילים שאחרי המהלך מצוין לגבי כל תרגיל למי הוא מתאים במהלך (וזאת לנוחיות הקורא).

תרגיל 1

בתרגיל ישנן שאלות הבודקות את הבנת הגרף (קריאת נקודות סעיפים א',ג') וישנן שאלות התומכות בשרטוט גרף נגזרת.

א) גובה המים לאחר 3 שניות 1 ס"מ, לאחר 6 שניות 4 ס"מ, לאחר 13 שניות 17 ס"מ.

ב) כלי 1 מתאים לגרף המשורטט, כי ככל שעובר הזמן עליית המים מהירה יותר וזה ייתכן רק אם הכלי הולך וצר בצורה הדרגתית.

ג) (i) גובה הכלי 20 ס"מ.

(ii) אחרי קצת פחות מ-10 שניות יגיעו המים למחצית מגובה הכלי.

(iii) המים לא מגיעים למחצית מגובה הכלי לאחר מחצית זמן המילוי מכיוון שמחצית זמן המילוי היא 7 שניות. נתון זה תומך במסקנה של השאלה הקודמת שהכלי הולך וצר.

ד) (i) גובה המים עלה 0.5 ס"מ במשך השניה השלישית.

גובה המים עלה 1.5 ס"מ במשך השניה השביעית.

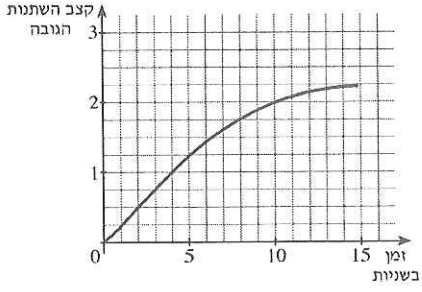
גובה המים עלה 2 ס"מ במשך השניה האחת עשרה.

(ii) קצב השתנות גובה המים בכלי הולך וגדל.

ה)

זמן מתחילת המדידה	2.	3	5	7	10	12	13
קצב השתנות הגובה	0.5	2.1	1.25	1.7	2	2.1	2.2

ו) כדאי לבקש מהתלמידים, שיתארו תחילה במילים את הגרף לפני שהם משרטטים אותו.



תרגיל 2

גם בתרגיל זה משרטטים גרף של השתנות בתחום סגור, אך כאן יש לפונקציה המשורטטת שתי נקודות קיצון בהן הנגזרת מתאפסת.

בתרגיל זה, לאחר שרטוט גרף השינוי, יוצרים את הקשר בין תכונת העלייה/ירידה של הפונקציה לבין חיוביות/שליליות של גרף קצב השינוי.

א) הטמפרטורה הייתה 15 מעלות לאחר שעה, 11.5 שעות ו - 18 שעות.

ב) הטמפרטורה הגבוהה ביותר היתה לאחר 5 שעות ולאחר 20 שעות.

ג) (i) בתחילת המדידה הייתה הטמפרטורה הנמוכה ביותר שהיא 8^0.

(ii) נקודת המינימום הנוספת (בה השיפוע הוא אפס) היא (15,10), כלומר 10^0 כעבור 15 שעות.

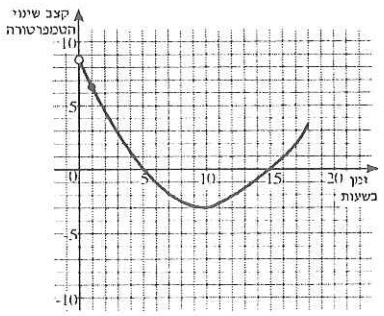
ד) בחמש שעות הראשונות למדידה, הטמפרטורה עולה. בעשר השעות הבאות הטמפרטורה יורדת, בחמש שעות האחרונות הטמפרטורה עולה.

ה)

זמן בשעות	1	3	4	5	7	10	13	15	18
קצב שינוי הטמפרטורה	6.5	3	1.3	0	-2	-3	-1.5	0	3.5

כדאי לדון בכיתה במשמעות הערכים השליליים.

ו) (i)



(ii) פונקצית קצב השינוי מקבלת ערכים חיוביים כאשר הטמפרטורה עולה, אך הערכים הולכים וקטנים כאשר העלייה מתמתנת.

(iii) פונקצית קצב השינוי מקבלת ערכים שליליים כאשר הטמפרטורה יורדת.

(iv) פונקצית קצב השינוי מקבלת את הערך אפס כאשר הטמפרטורה עוברת מעלייה לירידה.

(v) פונקצית קצב השינוי מקבלת את הערך אפס כאשר הטמפרטורה עוברת מעלייה לירידה.

תרגיל 3

משרטטים גרף המתאר את קצב השינוי של פונקציה בעזרת ה"ישר", הפעם ללא קשר עם סיטואציה.

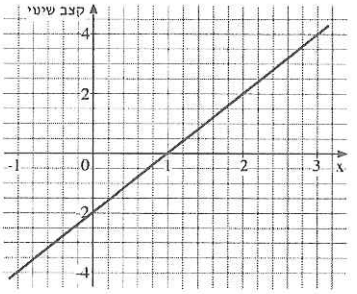
א) עד $x = 1$ הפונקציה יורדת. ב - $x = 1$ לפונקציה נקודת מינימום. עבור $x > 1$ הפונקציה עולה.

ב)

x	-1	0	0.5	1	1.5	2	3
קצב השינוי	-4	-2	-1	0	1	2	4

נקבל גם תשובות שאינן שלימות ומתקרבות לערכים שרשומים בטבלה הנ"ל. בהמשך תהיה הזדמנות לתלמידים לבדוק את דיוק הערכים.

ג)



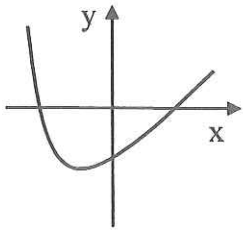
ד) $f'(x) = 2x - 2$. אפשר לבקש מהתלמידים שיתארו במילים מה המשמעות של חוק הנגזרת (הכוונה שיראו שקצב השינוי משתנה באופן קבוע)

אפשר כאן לפתור תרגיל 20.

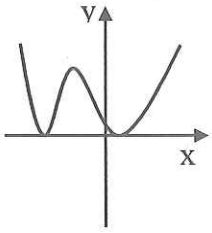
תרגיל 4

מטרת התרגיל לתרגם תכונות חיובית/ שלילית, מתאפסת, המתוארות במילים או בעזרת חיצים לגרף (ללא התייחסות לתחום הפונקציה). תלמידים שונים יציעו סקיצות שונות.

א) שרטוט לדוגמה :



ב) שרטוט לדוגמה :

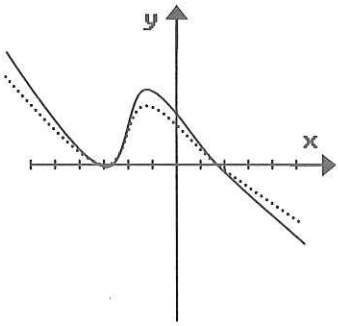


אפשר לבקש מהתלמידים לחזור לסעיף א' ולרשום את רצף התכונות בעזרת שורת חיצים.

תרגיל 5

גם כאן משלבים שרטוט גרף של פונקציה לפי תכונות ,אך הפעם התכונות הן : חיובית/שלילית , התאפסות ותחומי הפונקציה מוגדרים. (ולכן מרחב הסקיצות האפשריות קטן יותר).

משורטטות שתי דוגמאות :



בתרגילים 6-11 עובדים בעזרת מחשב, על פי המהלך הבא :

א) משרטטים גרף על פי החוק הנתון.

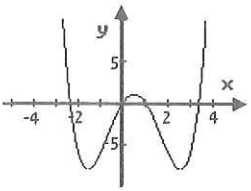
ב) רושמים על פי הגרף המשורטט, בעזרת שורת חיצים, את תכונות הפונקציה.

ג) רושמים את תכונות השיפועים בשורת חיצים (מתחת לקודמת) על פי הילוך על הגרף.

ד) משרטטים גרף איכותי של הנגזרת בעזרת התכונות שנרשמו. ה) מחשבים את הנגזרת ובודקים את השרטוט האיכותי בעזרת שרטוט של הנגזרת המתקבל במחשב .

תרגיל 6

א) (i)



(ii) תכונות f: יורדת עד $x = -1.56$ ← מינימום ב- $x = -1.56$ ← עולה בין -1.56 ל- 0.5 ← מקסימום ב- $x = 0.5$ ←

עולה מ- $x = 2.56$ ← מינימום ב- $x = 2.56$ ← יורדת בין 0.5 ל- 2.56 ←

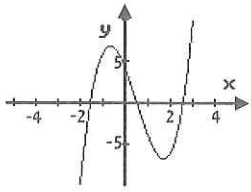
ב) תכונות f: שלילית עד $x = -1.56$ ← מתאפסת ב- $x = -1.56$ ← חיובית בין -1.56 ל- 0.5 ← מתאפסת ב- $x = 0.5$ ←

חיובית מ- $x = 2.56$ ← מתאפסת ב- $x = 2.56$ ← שלילית בין 0.5 ל- 2.56 ←

ג) בסעיף זה התלמידים משרטטים סקיצה של גרף הנגזרת על סמך התכונות שרשמו בסעיף ב' ובודקים את התאמת הגרף ששרטטו בסעיפים הבאים.

א) נגזרת הפונקציה הנתונה : $f'(x) = 0.5(4x^3 - 6x^2 - 14x + 8)$. בספר רשומה התחלת הנגזרת על מנת שלא יפתחו סוגרים - טכניקה אלגברית שמיותרת כאן.

ה)



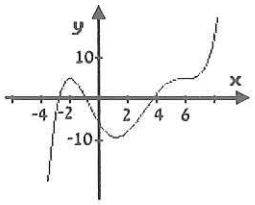
ו) שני הגרפים משורטטים , של f ושל f ' , באותה מערכת צירים . התלמידים יכולים לבדוק, בעזרת הילוך על גרף הפונקציה f, ששיפוע המשיק הוא אפס בנקודות הקיצון, ונקודות הקיצון "הופכות" להיות נקודות חיתוך עם ציר x של הפונקציה f '.

בהמשך הפעילות במחשב, התלמידים יכולים לבחור בין מציאת הפונקציה הנגזרת (אם אפשר) ושרטוט גרף הפונקציה הנגזרת בעזרתה או בעזרת רישום f '.

תרגיל 7

בתרגיל זה קשה לגזור את הפונקציה הנתונה ולכן מלמדים את התלמידים לשרטט את גרף הפונקציה הנגזרת בעזרת רישום f '(x) .

א) (i) יש להקפיד ברישום הפונקציה הנתונה בעזרת f(x)= (ולא y =), כי זה מאפשר לשרטט במחשב את הנגזרת על ידי רישום f '(x).



(ii) תכונות f :

עולה מ- $x = 1.2$ → מינימום ב- $x = 1.2$ → יורדת בין 2- ל- 1.2 → מקסימום ב- $x = -2$ → עולה עד $x = -2$ →

ניתן לראות מהגרף תכונה נוספת של הפונקציה שבנקודה בה $x = 6$ הנגזרת מתאפסת.

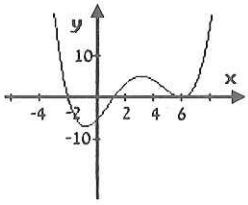
ב) תכונות f :

מתאפסת ב- $x = 1.2$ → חיובית בין 2- ל- 1.2 → מתאפסת ב- $x = -2$ → חיובית עד $x = -2$ →

חיובית מ- $x = 6$ → מתאפסת ב- $x = 6$ → חיובית בין 1.2ל- 6 →

ד) התלמידים לא מתבקשים לגזור את הפונקציה הנתונה בגלל מורכבותה.

ה)

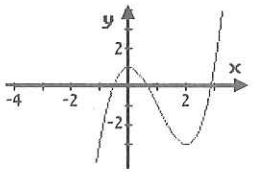


בסוף התרגיל אפשר להציע שתלמידים ישרטטו גרף של פונקציה נגזרת של הזזות של הפונקציה הנתונה או שיקוף שלה .תרגול זה מדגיש את העובדה

שהזזה לאורך ציר y אינה משפיעה על גרף הנגזרת וגרף נגזרת השיקוף היא שיקוף של הפונקציה הנגזרת.

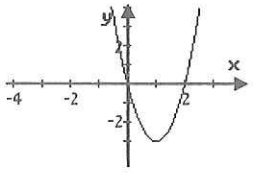
תרגיל 8

א) (i)



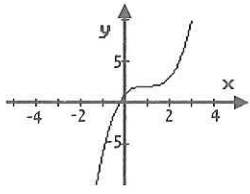
(ii) תכונות f: עולה מ- $x=2$ ← מינימום ב- $x=2$ ← יורדת בין 0 ל- 2 ← מקסימום ב- $x=0$ ← עולה עד $x=0$ ←

ג)

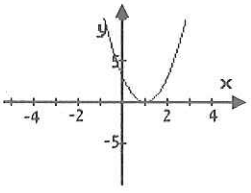


תרגיל 9

א)



ג)

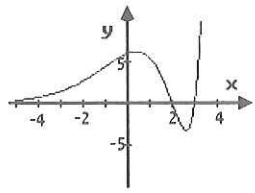


ב) שיפוע המשיק בנקודה $x=1$ הוא אפס.

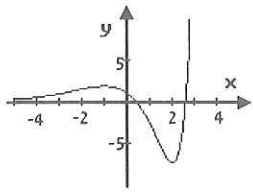
יש לציין שבמקרה זה f' חיובית פרט לנקודה אחת (בה $x=1$), שבה היא שווה לאפס. התלמידים יכולים לגזור את הפונקציה כפונקציה מורכבת, מתקבלת פונקציה ריבועית : $f'(x)=3(x-1)^2$ וכך הם יכולים לבדוק שזה אכן הגרף.

תרגיל 10

א)



ב)

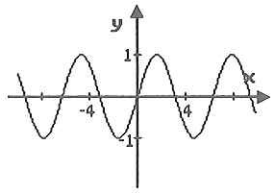


תרגיל 11

בתרגיל בודקים מה קורה לתכונת המחזוריות של פונקציה במעבר לנגזרת, לשם כך נבחרה פונקצית הסינוס.

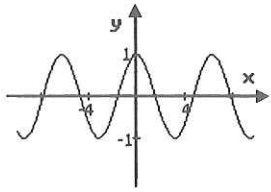
מאחר ומדובר בנגזרת של פונקציה טריגונומטרית, הפונקציה צריכה להיות מוגדרת ברדיאנים (ולא במעלות).

א)



ב) הפונקציה הנגזרת מחזורית כי בכל מחזור מתקבלת אותה צורה של גרף, לכן השיפועים שווים.

ד)



ה) הפונקציה הנגזרת היא הפונקציה: $y' = \cos x$

בתרגילים 12-15 משרטטים גרף של נגזרת לפי גרף נתון.

תרגיל 12

א) תכונות f:

$x = 0 \rightarrow$ מקסימום ב-

$\rightarrow$ בין 3- ל- 0 עולה

$x = -3 \rightarrow$ מינימום ב-

$x = -3 \rightarrow$ יורדת עד

עולה מ- $x = 3$

מינימום ב- $x = 3 \rightarrow$

יורדת $\rightarrow$ בין 0 ל- 3

ב) תכונות f ' :

$x = 0 \rightarrow$ מתאפסת ב-

$\rightarrow$ בין 3- ל- 0 חיובית

$x = -3 \rightarrow$ מתאפסת ב-

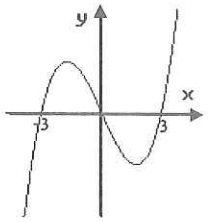
$x = -3 \rightarrow$ שלילית עד

חיובית מ- $x = 3$

מתאפסת ב- $x = 3 \rightarrow$

שלילית $\rightarrow$ בין 0 ל- 3

ג)



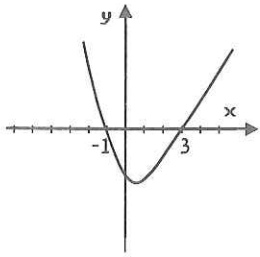
כדאי להתייחס לעובדה שכאשר הפונקציה הנגזרת היא פונקציה אי-זוגית, הפונקציה הנתונה היא פונקציה זוגית. בתרגיל 14 בודקים האם תכונת הזוגיות "מתהפכת" לאי-זוגית.

תרגיל 13

א) תכונות f: עולה מ- $x=3$ → מינימום ב- $x=3$ → יורדת בין 1- ל- 3 → מקסימום ב- $x=-1$ → עולה עד $x=-1$

תכונות f': חיובית מ- $x=3$ → מתאפסת ב- $x=3$ → שלילית בין 1- ל- 3 → מתאפסת ב- $x=-1$ → חיובית עד $x=-1$

ב)



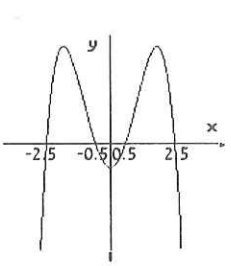
אפשר כאן לפתור תרגיל 21

תרגיל 14

א) תכונות f': שלילית עד $x=-2.5$ → מתאפסת ב- $x=-2.5$ → חיובית בין 2.5- ל- 0.5- → מתאפסת ב- $x=-0.5$ → שלילית בין 0.5- ל- 0.5 →

חיובית מ- $x=2.5$ → מתאפסת ב- $x=2.5$ → חיובית בין 0.5 ל- 2.5 → מתאפסת ב- $x=0.5$ →

ב)



גם כאן כדאי להתייחס לכך שכאשר הפונקציה הנתונה היא אי-זוגית, הפונקציה הנגזרת היא זוגית

למורים:

לפי ההגדרה, פונקציה אי-זוגית מקיימת: $f(-x) = -f(x)$.

נגזור את שני האגפים: $f'(-x)(-1) = -f'(x)$ [באגף שמאל מתקבלת פונקציה מורכבת שהנגזרת של הפונקציה הפנימית היא (-1)], ולכן $f'(-x) = f'(x)$ כלומר, הפונקציה הנגזרת זוגית.

באותו אופן ניתן להוכיח שאם הפונקציה הנתונה זוגית אז הפונקציה הנגזרת היא אי-זוגית.

כדאי לשים לב שאם f' אי-זוגית אז f זוגית, אבל אם f' זוגית, f לאו דווקא אי-זוגית בגלל קבוע האינטגרציה. למעשה f זוגית רק אם היא עוברת דרך הראשית.

אפשר כאן לפתור תרגיל 22.

תרגיל 15

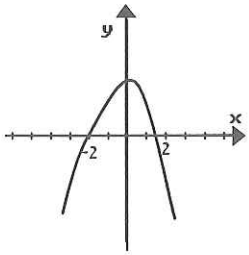
א) תכונות f:

יורדת, מ-	מקסימום ב-	עולה	מינימום ב-	יורדת עד
$x = 1.5$	$\rightarrow x = 1.5 \rightarrow$	בין 2- ל- 1.5 $\rightarrow$	$x = -2 \rightarrow$	$x = -2 \rightarrow$

תכונות f':

שלילית מ-	מתאפסת ב-	חיובית	מתאפסת ב-	שלילית עד
$x = 1.5$	$\rightarrow x = 1.5 \rightarrow$	בין 2- ל- 1.5 $\rightarrow$	$x = -2 \rightarrow$	$x = -2 \rightarrow$

ב) משורטטת סקיצה של הנגזרת.



למורים:

בשרטוט סקיצה של הנגזרת.

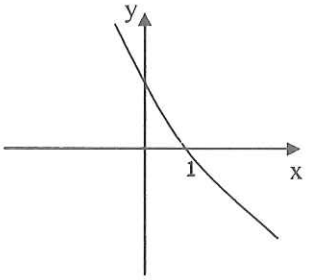
לא הקפדנו על ערך השיפוע אלא רק על הסימן.

תרגיל 16

לפונקציה יש נקודת קיצון אחת ולכן לנגזרת יש רק נקודת אפס אחת. כיוון שנקודת הקיצון היא נקודת מקסימום, גרף הנגזרת הוא גרף יורד.

א) נקודת החיתוך של הגרף של f' עם ציר x היא : $(1,0)$.

ב) תכונות f' : חיובית עד $x=1$ → מתאפסת ב- $x=1$ → שלילית מ- $x=1$



אפשר כאן לפתור תרגילים 23-25.

תרגיל 17

לפונקציה יש נקודה בה השיפוע אפס אך היא אינה נקודת קיצון.

א) ערך הנגזרת בנקודה בה $x=1$ היא אפס.

ב) כדי לשרטט את גרף הנגזרת מסמנים תחילה את הנקודה $(1,0)$ ומשלימים את הגרף לפי תכונות הנגזרת. גרף הנגזרת המתקבל דומה לגרף שהתקבל בתרגיל 9.

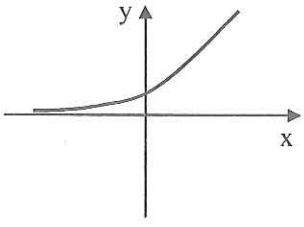
אפשר להוסיף עוד סעיפים לתרגיל זה :

- שרטטו את גרף השיקוף בציר x של הגרף המשורטט.
- שרטטו את גרף הנגזרת.

תרגיל 18

לפונקציה אין נקודת קיצון ויש לה אסימפטוטה. הפונקציה הנגזרת דומה לפונקציה הנתונה וגם לה יש אסימפטוטה.

א,ב) סימן השיפוע לאורך גרף הפונקציה הוא חיובי, והולך וגדל ככל ששיעור x גדל, לכן הפונקציה הנגזרת עולה בכל התחום.



אפשר כאן לפתור תרגיל 27.

למורים:

משורטט גרף הנגזרת שהוא פחות תלול מאשר הגרף הנתון. אך מאחר ואין ערכים על ציר y ייתכן וגרף הנגזרת תלול יותר. בפונקציות מערכיות מהצורה $y = a^x$, גרף פונקציה הנגזרת דומה לגרף הפונקציה עצמה. כאשר $1 < a < e$ גרף הנגזרת תלול פחות מגרף מהפונקציה. אך כאשר $a > e$ גרף הנגזרת תלול יותר מגרף הפונקציה עצמה. עניין זה נבדק בפעילות מחשב שישית בספר "סדרות ופונקציות נוספות"- מהדורה מורחבת . להלן דוגמאות.

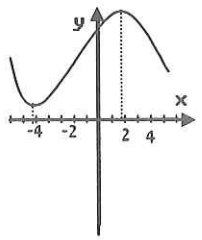
עבור $a = 1$ מקבלים פונקציה קבועה ולכן הנגזרת מתאפסת לכל x.

עבור $1< a < e$ מקבלים הנגזרת שלילית כי הנגזרת של $y = a^x$ היא: $y' = \ln a \cdot a^x$ ו- $\ln a < 0$ בתחום זה.

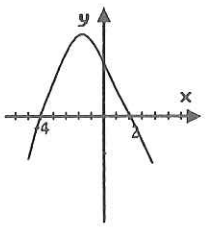
תרגיל 19

בתרגיל זה מתחילים בשרטוט גרף של פונקציה f על-פי תכונות, ועל סמך הגרף של f המתקבל משרטטים את הגרף של 'f.

א)



ב) תכונות 'f: שלילית עד $x = -4$ → מתאפסת ב- $x=-4$ → חיובית בין 4- ל- 2 → מתאפסת ב- $x =2$ → שלילית מ- $x = 2$



אפשר כאן לפתור תרגיל 26.

להלן נביא פתרונות לתרגילים השונים מאלה שבמהלך לעיל. עבור תרגילים דומים לאלה שבמהלך נציין זאת. ההתאמה היא לפי "כמות" ההדרכה, ולפעמים גם לפי תכונות הפונקציות.

20. התרגיל עוסק בשרטוט גרף של קצב השינוי. התרגיל דומה לתרגילים 3,2.

21. עוסק בכתיבת שתי שורות החיצים (של f ושל f') ושרטוט הגרף f'. אפשר לפתור אחרי תרגילים 12-13 (הדמיון בהדרכה).

22. עוסק בשרטוט גרף הפונקציה f' בעזרת הגרף של f וכתיבת שורת חיצים עבור f'. אפשר לפתור אחרי תרגיל 14 (הדמיון בהדרכה).

23,25. אפשר לפתור אחרי תרגילים 15-16.

24. א) נקודות החיתוך של f' עם ציר x: $(2,0)$, $(4,0)$.

תכונות f': שלילית מ- $x=4$ $\rightarrow$ מתאפסת ב- $x=4$ $\rightarrow$ חיובית בין 2 ל- 4 $\rightarrow$ מתאפסת ב- $x=2$ $\rightarrow$ שלילית עד $x=2$

ב) הפונקציה הנגזרת שלילית בתחומים: $x<2$, $x>4$.

הפונקציה הנגזרת חיובית בתחום: בין $x=2$ ל- $x=4$.

26. תחילה משרטטים את גרף הפונקציה f לפי התכונות הרשומות. אפשר לפתור אחרי תרגיל 19.

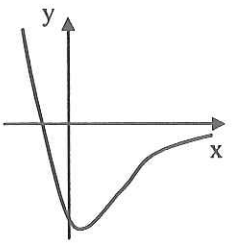
27. אפשר לפתור אחרי תרגיל 18. כאן לא ברור אם לפונקציה יש אסימפטוטה.

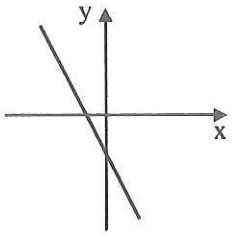
28. בתרגיל מתאימים לגרף פונקציה נתונה את גרף הנגזרת. רצוי לדון בשיקולי התלמידים. מאחר ועודדנו לסמן תחילה בגרף הפונקציה הנגזרת את הנקודות המתאימות לנקודות הקיצון. ייתכן ותלמידים יבדקו, בכל אחד מהגרפים, את נקודת החיתוך של הנגזרת עם ציר x, במקרה זה $(-1,0)$. לפי שיקול זה, גרף (ii) לא מתאים. לאחר מכן מתאימים בין עליה של f לחיוביות של f' ובין הירידה של f לשליליות של f'. מאחר והפונקציה גם יורדת וגם עולה, הגרף היחיד עם ערכים שליליים וחיוביים הוא גרף (iii). דרך אחרת להתאמה היא לשרטט תחילה את גרף הנגזרת ולבחור את הגרף הדומה לגרף ששרטטו.

תרגיל נוסף:

אפשר לבקש מהתלמידים לשרטט גרף של נגזרת שיש לה נקודת חיתוך ב- (-1,0) והיא גם חיובית וגם שלילית והגרף אינו מתאים להיות גרף הנגזרת של הפונקציה הנתונה.

דוגמאות לפתרון:





מגרף הנגזרת f' לגרף הפונקציה f (עמודים 239-247 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

הסעיף עוסק בתכונות הפונקציה המתקבלות מגרף הנגזרת. מתרגמים תכונות דרך משמעות נגזרת הפונקציה ובעזרתן משרטטים את גרף הפונקציה. מהלך זה אינו פשוט, לפיכך מוצעת כאן אותה תמיכה כפי שהוצעה בסעיף הקודם. גם כאן נעזרים בשורות החיצים כדי לערוך הקבלה בין התכונות של הפונקציה ונגזרתה. תחילה רושמים שורת החיצים עבור f' ובודקים את נקודות הקיצון, כלומר את הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת.

בפרקים הקודמים ובסעיף הקודם של פרק זה, נוכחו התלמידים שלכל הפונקציות שהן הזזות לאורך ציר y של f, יש אותה נגזרת (כלומר לפונקציות מהצורה $f(x) + c$, כאשר c קבוע, יש אותה נגזרת). לכן חשוב לציין שיש גרפים רבים המתאימים לפונקצית f, אותם ניתן לשרטט לפי הגרף הנתון של f'. וגרפים אלה נבדלים זה מזה בקבוע.

כמו כן יש לשים לב לכך שמשרטטים סקיצה ולכן לא מקפידים על מידת התלילות.

תרגיל 1

תרגיל זה מהווה חזרה על תרגילים שניתנו בסעיף הקודם: מגרף הפונקציה לומדים על תכונות הפונקציה ומהן לומדים על תכונות הנגזרת.

המטרה בתרגיל הוא להדגיש את הקשר בין תכונות הפונקציה לתכונות הפונקציה הנגזרת. כאמור, השימוש בחיצים נועד לתמוך במעבר בין תכונות הפונקציה לתכונות הנגזרת.

תכונות f: עולה עד $x = 2 \rightarrow$ מקסימום ב- $x = 2 \rightarrow$ יורדת בין 2 ל- 6 $\rightarrow$ מינימום ב- $x = 6 \rightarrow$ עולה מ- $x = 6$

תכונות f': חיובית $x = 2 \rightarrow$ מתאפסת ב- $x = 2 \rightarrow$ שלילית בין 2 ל- 6 $\rightarrow$ מתאפסת ב- $x = 6 \rightarrow$ חיובית מ- $x = 6$

תרגיל 2

בתרגיל זה מנסים לראשונה לקבל את תכונות הפונקציה ואת הגרף שלה על סמך הנגזרת שלה. המהלך "מפורק" לשלבים: תחילה מזהים את שיעורי x של הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת, (כלומר, הנקודות החשודות של f). לאחר מכן, בעזרת שורות החיצים, רושמים את תכונות הפונקציה הנגזרת. לבסוף, מתרגמים את תכונותיה לתכונות הפונקציה f.

א) שיעור x של הנקודות עבורן הנגזרת מתאפסת: $x = -2$, $x = 3$. כלומר, אלה שיעור x בהן יתכנו נקודות קיצון ל- f.

ב)

תכונות f' :	חיובית עד $x = -2$	מתאפסת ב- $x = -2$	שלילית בין 2- ל- 3	מתאפסת ב- $x = 3$	חיובית מ- $x = 3$
תכונות f :	עולה עד $x = -2$	מקסימום ב- $x = -2$	יורדת בין 2- ל- 3	מינימום ב- $x = 3$	עולה מ- $x = 3$

כדאי להדגיש בכיתה שהתכונה עלייה (ירידה) נובעת מהתכונה של הנגזרת הרשומה מעל שהיא חיובית (שלילית) , אך כדי להסיק האם הנקודה היא נקודת קיצון יש להסתכל גם על שתי התכונות שמימינה ומשמאלה.

ג) לפי שורת החיצים עבור f, ניתן לראות שב- $x = -2$ יש לפונקציה מקסימום וב- $x = 3$ יש לפונקציה מינימום.

ניתן לפתור תרגיל וומעמוד 244.

תרגיל 3

על סמך נקודת החיתוך היחידה של f' עם ציר x, מזהים שלפונקציה יש נקודת קיצון יחידה. נעזרים בשורות החיצים כדי להסביר שנקודה זו היא נקודת מינימום.

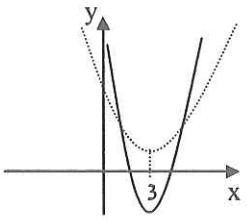
א)

תכונות f' :	שלילית עד $x = 3$	מתאפסת ב- $x = 3$	חיובית מ- $x = 3$
תכונות f :	יורדת עד $x = 3$	מינימום ב- $x = 3$	עולה מ- $x = 3$

משמאל ל- $x = 3$ הפונקציה f יורדת ומימין לה הפונקציה עולה ולכן ב- $x = 3$ יש לפונקציה נקודת מינימום.

ב) בשרטוט של f' אין שנתות על ציר y לכן לא ניתן לקבוע את מידת התלילות, אלא רק את סימן השיפוע. מכיוון שהגרף של f' הוא קו ישר ניתן לקבוע ש"מידת התלילות" עבור $x > 3$ שווה לזו עבור $x < 3$, ולמעשה מתקבלת פרבולה.

משורטטים שני גרפיים אפשריים:



תרגיל 4

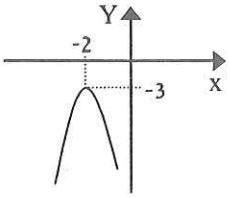
בתרגיל זה משרטטים את הפונקציה f לפי תכונות הנגזרת, ללא שרטוט f'. על התלמידים לזהות תחילה את הקשר בין $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) עם עליה של f (עם ירידה של f).

רצף התכונות הרשומות מחליף את שורת החיצים של f' , אך בכל זאת ממליצים לרשום את שתי שורות החיצים שמקלים על חלק מהתלמידים לשרטט סקיצה של f.

תכונות f' :	שלילית מ-	מתאפסת ב-	חיובית עד	
	$x = -2$	$x = -2$ →	$x = -2$ →	
תכונות f :	יורדת מ-	מקסימום ב-	עולה עד	
	$x = -2$	$x = -2$ →	$x = -2$ →	

א) לפונקציה f יש נקודת מקסימום ב- $x = -2$.

ב) אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר x מאחר ולפונקציה יש נקודת מקסימום יחידה ששיעור y שלה שלילי. תרגום התכונות לשרטוט ממחיש כי אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר x.



אפשר לבקש מהתלמידים לשנות את שיעורי נקודת הקיצון כך שלפונקציה:

- תהיינה שתי נקודות חיתוך עם ציר x.
- תהיה נקודת חיתוך אחת עם ציר x.

כיוון שלא "משתמשים" בתכונה $f'(-2) = 0$ לשרטוט הפונקציות האלה רצוי לבקש לאחר השרטוט שיבדקו אם אכן התכונה הזו מתקיימת.

תרגיל 5

כמו בתרגיל קודם, גם בתרגיל זה רשומות התכונות של f'. כדי לרשום את תכונות הפונקציה f נוח להשתמש ברישום בחיצים ולרשום את תכונותיה מתחת לתכונות של f'.

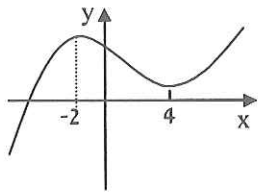
תכונות f':

$x = 4$	→	חיובית מ-	$x = 4$	→	מתאפסת ב-	בין 2- ל- 4	→	שלילית
$x = 4$	→	עולה מ-	$x = 4$	→	מינימום ב-	בין 2- ל- 4	→	יורדת

$x =-2$	→	חיובית עד	$x =- 2$	→	מתאפסת ב-	$x = 4$	→	שלילית
$x =- 2$	→	עולה עד	$x =- 2$	→	מקסימום ב-	$x = 4$	→	יורדת

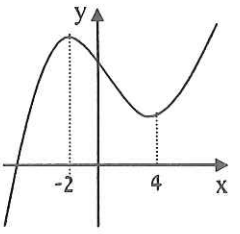
תכונות f:

שרטוט אפשרי:

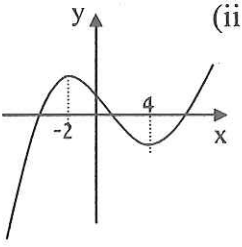


ניתן לקבל כל גרף ששיעור y של נקודות הקיצון שונה וגם מידת תלילות שונה.
אפשר לאסוף מהתלמידים את השרטוטים ולדון בתכונות הפונקציות שהתקבלו והקשר לתכונות הנגזרת הנתונה.
אפשר גם להציג מספר שרטוטים אפשריים לגרף ולבקש מהתלמידים לאמת אותם עם הנתונים. לדוגמה:

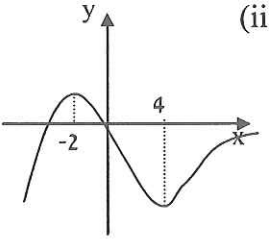
(i



(ii



(iii



תרגיל 6

א) לפונקציה יש שתי נקודות חשודות בנקודות בהן הנגזרת מתאפסת והן נקודות קיצון. הנגזרת מתאפסת ב- $x = 2$ ו- $x = -2$. ב- $x = -2$ יש לפונקציה נקודת מקסימום וב- $x = 2$ יש לפונקציה נקודת מינימום.

ב) ישנן שלוש דרכים להתאמה:

- לצאת מהגרף הנתון, עם המסקנה שנקודות הקיצון הן ב- $x = 2$ ו- $x = -2$, ולבדוק בשיטתיות לגבי כל גרף f, אם אלו נקודות הקיצון, עם התייחסות לסוג הקיצון.

גרף (i) אינו מתאים מאחר ויש נקודת קיצון נוספת ב- $x = 0$, וגם סוג נקודות הקיצון לא מתאים.

גרף (ii) אינו מתאים. לפונקציה המשורטטת יש אומנם נקודות קיצון באותם שיעורי x, אך סוג הקיצון לא מתאים.

גרף (iii) אינו מתאים מאחר ולפונקציה יש נקודת קיצון אחת ב- $x = 0$. הגרף למעשה זהה לגרף הנגזרת המשורטט.

אפשר לקבל את הגרפים (iv), (vi) כמתאימים, מאחר ולפונקציה המתאימה יש נקודות קיצון ב- $x = 2,-2$. אך גרפים אלה לא מתאימים בגלל קצב השינוי, אך כאמור לא מקפידים בשרטוט f על קצב השינוי. למעשה גרף (vi) הוא הזזה לאורך ציר y של גרף (iv).

גרף (v) מתאים, הן בגלל נקודות הקיצון וגם קצב השינוי שלו מתאים לערכי f' המשורטטת.

בכיתות טובות אפשר לדון בהבדל בין הגרפים (v), (iv).

- לצאת מהגרפים של f, לזהות את שיעורי x של נקודות הקיצון, לבדוק תחילה אם הפונקציה f' מתאפסת עבור אותם ערכי x. במידה וכן לבדוק שסוג הקיצון מתאים לסימן הנגזרת.

- אפשר לשרטט את גרף הפונקציה הנגזרת של הפונקציות f.

הערה:

ניתן לשרטט גרפים נוספים מתאימים שהם הזזה של גרף (v) לאורך ציר y.

למורים:

הגרפים שנבחרו נבעו משגיאות שנצפו אצל תלמידים. למשל: גרף (iii) ניתן כי גרף הפונקציה זהה לגרף הנגזרת, ובגרף (ii) יש החלפה בין איפיונן של נקודות הקיצון.

תרגיל 7

בדומה לתרגיל קודם גם כאן תלמידים מתאימים לגרף f ' הנתון, גרף של f.

הגרפים המתאימים הם (ii) ו - (iv) . אין בתרגיל זה בעיה לגבי ההתאמה עם קצב השינוי (כפי שהיה בתרגיל הקודם) כי אין שנתות על ציר y.

ניתן לפתור תרגיל 14 , 18.

תרגיל 8

מהלך הפתרון דומה לתרגילים הקודמים: קודם מזהים את הנקודות החשודות של f (בעזרת נקודות החיתוך של f ' עם ציר x), ולאחר מכן משרטטים את הגרף של f. כאן בפעם הראשונה, אחת מהנקודות החשודות (x = 6) אינה נקודת קיצון, כי הפונקציה אינה משנה את סימנה אחרי שהיא מתאפסת ב- x = 6 .

א) שיעורי x של הנקודות החשודות : x = 2 , x = 6. כדי לבדוק אם הנקודות הן קיצון כדאי לרשום שורות חיצים העוזרות להבין מדוע הנקודה בה x = 6 אינה נקודת קיצון.

תכונות f ' : שלילית מ- x = 6 → מתאפסת ב- x = 6 → שלילית בין 2 ל- 6 → מתאפסתב- x = 2 → חיובית עד x = 2

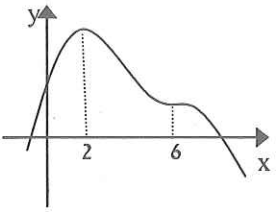
תכונות f : יורדת מ- x = 2 → מקסימום ב- x = 2 → עולה עד x = 2

הנקודה בה $x = 2$ היא נקודת מקסימום .

אומנם הנגזרת מתאפסת בנקודה בה : $x = 6$, אך היא אינה נקודת קיצון.

(למעשה הפונקציה יורדת בנקודה בה $x = 6$).

ב)

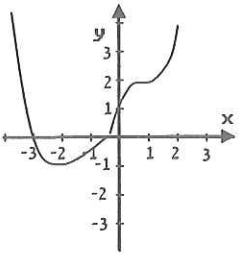


ג) הפונקציה יורדת עבור $x > 2$.

ניתן לפתור תרגיל 16,15.

תרגיל 9

משרטטים את הפונקציה לפי ערכים נתונים של f כולל הנקודות החשודות. זהו המהלך שלפיו חקרו פונקציות עד עכשיו: מזהים את הנקודות החשודות ומאפיינים אותן בעזרת ערכים של הפונקציה.



א) יש שתי נקודות חשודות, אך רק נקודת קיצון אחת.

השרטוט עוזר לענות על שני הסעיפים.

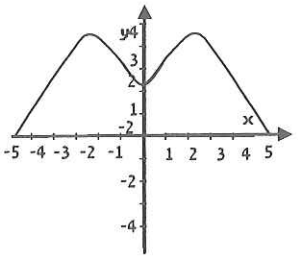
ב) (-2,-1) היא נקודת מינימום.

תרגיל 10

בתרגיל זה משרטטים פונקציה f לפי תכונות של ' f ונתונים ותכונות של f.

בעזרת התכונה של הסימטריות ביחס לציר y משלימים את השרטוט גם בתחום $x \le 0$.

א)



ב) לפונקציה חמש נקודות קיצון. ב- $x = -5$, $x = 0$, $x = 5$ הן נקודות מינימום, וב- $x = -2$, $x = 2$ הן נקודות מקסימום.

ניתן לפתור תרגיל 19

תרגילים

בתרגילים חוזרים ומתרגילים את החומר שנלמד במהלך הסעיף.

בתרגיל 11 משרטטים גרף של f על סמך גרף נתון של f'. אפשר לפתור אחרי תרגיל 2.

בתרגילים 12 ו- 13 חוקרים את הפונקציות f ו- f' ומשרטטים את f. אפשר לפתור אותם אחרי תרגילים 3-5.

בתרגילים 14 ו- 18 מזהים גרף של f על סמך גרף של f' נתון. אפשר לפתור אחרי תרגילים 6-7.

בתרגילים 15 ו- 16 משרטטים גרף של f על סמך גרף של f' נתון. אפשר לפתור אחרי תרגיל 8.

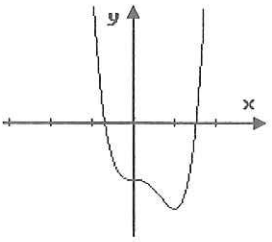
בתרגיל 19 חוקרים את הפונקציה f על פי גרף הפונקציה הנתון f'. אפשר לפתור אחרי תרגיל 10.

17. בתרגיל פונקציה f' שונה מכל הפונקציות הנגזרות שהיו במהלך הסעיף. הגרף של f' היא פונקציה קבועה לכן גם הפונקציה f עצמה היא קו ישר ששיפועו 2. הפונקציות f שיכולות להתאים שונות זו מזו עד כדי קבוע. למעשה מתקבלת משפחת הישרים: $y = 2x + b$.

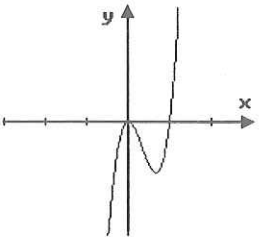
תרגיל נוסף למתקדמים:

משורטטים שני גרפים:

א)



ב)



אחד הגרפים הוא של פונקציה f והשני של f'.

הביאו נימוקים רבים ככל האפשר כדי לקבוע איזהו הגרף של f ואיזה של f'.

המטרה בתרגיל זה הוא לא רק לזהות, אלא לנמק על בסיס כל מה שיודעים ולהביא נימוקים שונים.

פרק ו' - מכפלה של פונקציות

מבוא לפרק

בפרק זה ארבעה סעיפים.

בסעיף הראשון - **גרפים של מכפלה של פונקציות** – מטפלים במשמעות מכפלה של פונקציות בקבוע או בפונקציה מהצורה $f(x) = x$ או $f(x) = \sqrt{x}$. בודקים אילו תכונות נשמרות, אילו משתנות וכיצד.

בסעיף השני - **נגזרת שלמכפלת פונקציות** - לומדים לגזור פונקציות המוצגות כמכפלה של שתי פונקציות. סעיף זה מהווה הכנה לסעיף הבא.

בסעיף השלישי - **חקירה של מכפלת פונקציות** - בסעיף שלושה חלקים : בחלק הראשון מטפלים בחקירה של מכפלה של פולינום עם פונקציה מעריכית, בחלק השני מטפלים בחקירה של מכפלה עם פונקצית שורש, ובחלק השלישי מטפלים בפונקציות מכפלה נוספות.

בסעיף הרביעי - **משוואת משיק** - מחשבים שיפוע בנקודה של פונקצית מכפלה ורושמים משוואת משיק.

בשלב זה של הלימוד התלמידים מכירים משפחות רבות של פונקציות ובתוכם פונקציות מכפלה מבלי שאלה כונו כך (למשל: $f(x) = 3x^2$, $h(x) = (4x-2)^2$, ועוד). פרק זה בנוי על ידע זה ומרחיב אותו בכך שעוסקים בהשתנות של תכונות רבות בפונקציות השונות, כתוצאה ממכפלתם בפונקציות אחרות.

גרפים של מכפלה של פונקציות (עמודים 248-255 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בסעיף זה בודקים את ההשתנות של תכונות של פונקציה נתונה כאשר כופלים אותה במספר חיובי, במספר שלילי, בפונקציה $y = x$ ובפונקציה $y = \sqrt{x}$.

תחילה בודקים את השפעת המכפלה על נקודות בודדות, ולאחר מכן מכלילים לגבי השתנות הפונקציה כולה. הבדיקה נעשית על גרף נתון. בנוסף בודקים בעזרת מחשבון גרפי או מחשב, את הגרפים ששרטטו.

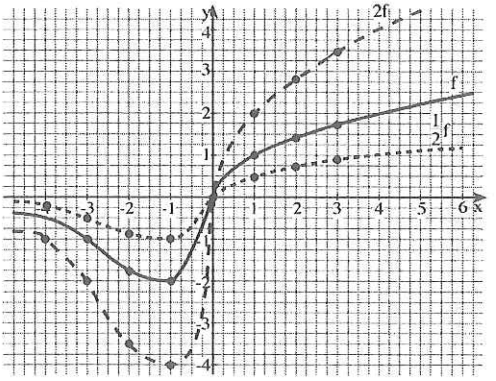
קל לראות את ההשפעה של מכפלה של פונקציה בקבוע, אך לא תמיד ברורה ההשפעה של המכפלה של פונקציה בפונקציה $y = x$ או בפונקציות מורכבות יותר. מגיעים למסקנה, שכדי לחקור פונקציות שהן מכפלה, יש צורך ללמוד לגזור פונקציות כאלה ולחקור אותן בעזרת הנגזרת.

לנוחיות, סימנו את כל הפונקציות הנתונות ב- f ואת פונקציות המכפלה ב- g.

תרגיל 1

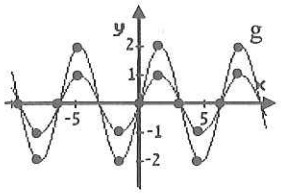
א) בודקים את ההשפעה של הכפלת פונקציה f הנתונה במספר חיובי (למשל: 2 ו – 0.5) בצורה גרפית בלבד. תחילה מסמנים את הנקודות המתאימות לנקודות המודגשות על גרף הפונקציה הנתונה f ובעזרתן משלימים את השרטוט של $2f$ ו - $0.5f$. סימון הנקודות הבודדות של גרף המכפלה נותן תחושה כיצד משתנה צורת הגרף כולו.

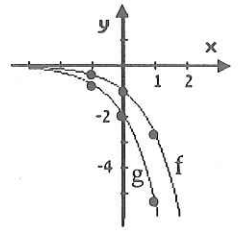
(iii),(ii),(i)



(iv) ראשית הצירים היא הנקודה היחידה שנשארת במקומה בגלל ההכפלה באפס.

ב,ג) השרטוט במחשב (או במחשבון גרפי) נועד לבדיקת גרף g שהתלמידים משרטטים.





ד) מסכמים את התכונות של המכפלה במספר קבוע חיובי ביחס לפונקציה נתונה כלשהי:

התכונות שנשמרות:

- תחומי עלייה וירידה.
- שיעורי x של נקודות הקיצון.
- נקודות חיתוך עם ציר x.
- התחומים בהם הפונקציה חיובית, שלילית.
- מחזוריות.
- סימטריה לגבי ציר y.

תכונות שמשתנות:

- קצב שינוי.
- נקודת החיתוך עם ציר y, פרט לנקודה (0,0).
- ערכי הפונקציה וערכי נקודות הקיצון (פרט לנקודות האפס).

תרגיל 2

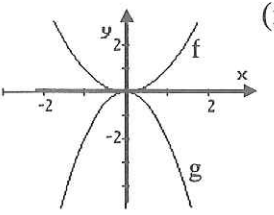
בתרגיל זה בודקים את ההשפעה של הכפלה של פונקציה נתונה במספר שלילי. תחילה מכפלה ב- 1- ולבסוף ב- 2-. למעשה תלמידים רואים שהכפלה ב- 1- הוא למעשה שיקוף הפונקציה בציר x.

ג) גם כאן, לאחר בדיקת הגרפים בעזרת מחשב או מחשבון גרפי, מסכמים את התכונות של המכפלה ביחס לפונקציה נתונה כלשהי:

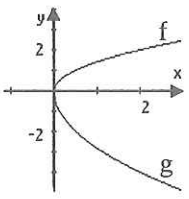
- התחומים בהם הפונקציה עולה/יורדת מתחלפים.
- שיעורי x של נקודות הקיצון נשמרים. אך אפיון נקודות הקיצון מתהפך.
- קצב השינוי נשמר בערך מוחלט (כאשר כופלים ב- 1-).
- נקודות החיתוך עם ציר x לא משתנות אך סימן שיעור ה- y של נקודת החיתוך עם ציר y (פרט לנקודה (0,0)) מתהפך.
- חיוביות/שליליות: מתהפכת.
- מחזוריות: נשמרת.
- סימטריה לגבי ציר y: נשמרת.

ד) התלמידים מתבקשים רק לשרטט גרפים שהן מכפלה ב- (2-) של הפונקציות הנתונות. כאן לא מתבקשים להתייחס לתכונות בגלל הקושי לתאר את השינוי המושפע הן מהמתיחה לאורך ציר y (הכפלה ב- 2) והן מהשיקוף.

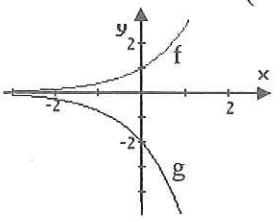
(i)



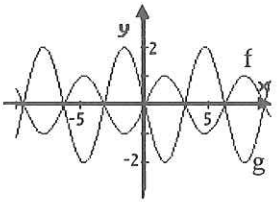
(ii)



(iii)



(iv)



תרגיל 3

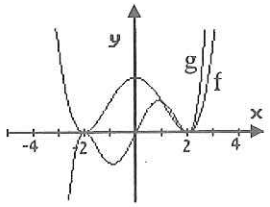
בתרגיל זה בודקים השתנות פונקציות כתוצאה מהכפלתן ב- x. הכפלה זו יוצרת שינויים רבים לכן ניתנת כאן הדרכה מפורטת והדרגתית לגבי התכונות שנשמרות והתכונות שמשתנות. בגלל השינויים הרבים אין התלמידים נדרשים

לשרטט את גרף המכפלה בעצמם, אלא הם חוקרים את ההשתנות, ומשרטטים את גרף המכפלה בעזרת המחשב (או מחשבון גרפי) ובודקים את נכונות התכונות שרשמו.

א) נקודת החיתוך עם ציר x נשמרות ומתווספת הנקודה (0,0) , שהיא למעשה גם נקודת חיתוך עם ציר y. אפשר להכליל שגרף של כל פונקציות מכפלה שאחד הגורמים הוא x, עובר דרך ראשית הצירים.

ב) (i) מכיוון שהפונקציה $y = x$ חיובית עבור $x > 0$, הפונקציה $g(x) = xf(x)$ אינה משנה את סימנה בתחום זה (נשארת חיובית). במילים אחרות הגרף יימצא ברביע הראשון.

(ii) מכיוון שהפונקציה $y = x$ שלילית עבור $x < 0$, הפונקציה g משנה את סימנה בתחום זה. הפונקציה $f(x) \geq 0$ בכל התחום, לכן $x \cdot f(x) \leq 0$ עבור $x < 0$. כלומר הגרף יימצא ברביע השלישי.

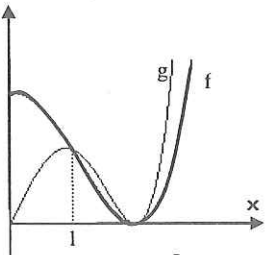


(בסעיף (iii) יש הגדלה של הרביע הראשון).

(iii) בנוסף לבדיקת התכונות בגרף שהתקבל, ניתן לדון בשאלה מתי הגרף של f מעל של g ומתי הוא מתחתיו. למעשה כאשר כופלים את f בערכי x בתחום $0 < x < 1$, ערכי g יהיו קטנים מערכי f ולכן הגרף של g יתקבל מתחת לגרף של f. לעומת זאת כאשר $x > 1$ הגרף של g מעל הגרף של f

(פרט לנקודת ההתאפסות)

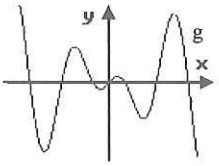
חשוב לציין כי הניתוח לעיל מתאים לפונקציה f חיובית או אפס.

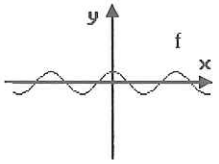


ג) תכונת הזוגיות/אי-זוגיות נבדקת בעזרת הגרפים של f ו g מהסעיפים הקודמים וגם על פונקציות נוספות מוכרות (פונקציות הסינוס והקוסינוס ופונקציות החזקה). מטרת התרגיל היא להסיק שהכפלת פונקציות אלה ב- x הופכת זוגיות לאי- זוגיות ולהיפך.

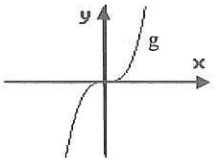
(i) f היא פונקציה זוגית והכפלתה ב- x "הופכת אותה" לפונקציה אי-זוגית

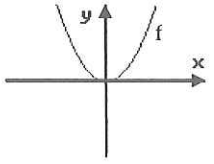
(ii) $f(x) = \cos x$ היא פונקציה זוגית והפונקציה $g(x) = x\cos x$ היא פונקציה אי-זוגית.



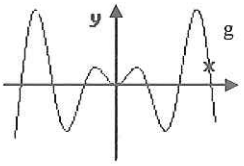


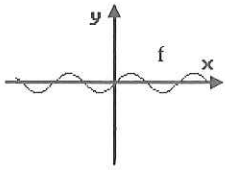
(iii) $f(x) = x^2$ היא פונקציה זוגית והפונקציה $g(x) = x \cdot x^2$ היא פונקציה אי-זוגית.



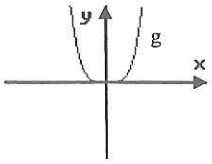


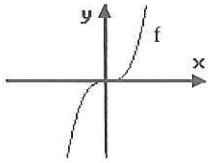
(iv) $f(x) = \sin x$ היא פונקציה אי-זוגית והפונקציה $g(x) = x\sin x$ היא פונקציה זוגית.





(v) $f(x) = x^3$ היא פונקציה אי-זוגית והפונקציה $g(x) = x \cdot x^3$ היא פונקציה זוגית.

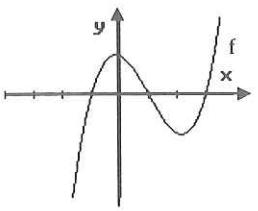


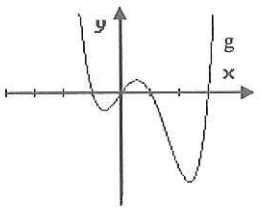


אפשר גם לבדוק את תכונת הזוגיות/ האי- זוגיות לגבי פונקציות קוויות למשל: $f(x) = 3$, $f(x) = 2$.

ד) בודקים מה קורה לנקודות הקיצון כתוצאה מהכפלה ב - x. בסעיף ג' רואים שנקודות הקיצון משתנות בכל 4 זוגות הפונקציות, ובאופן בולט רואים זאת בסעיפים iii ו- v ששם בפונקציה הזוגית יש נקודת קיצון ובפונקציות האי-זוגיות אין נקודות קיצון. מתקבל שנקודות הקיצון משתנות או נעלמות.

(i), (ii)



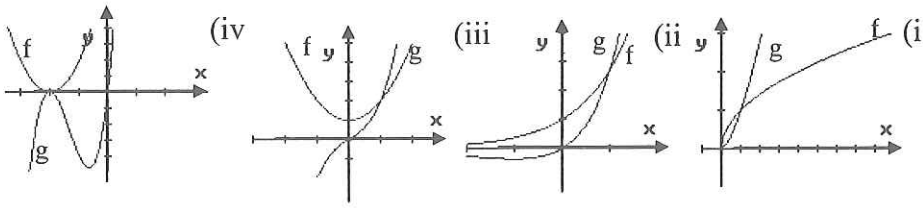


ה) בסיכום המימצאים אפשר לעבור על התכונות השונות תוך כדי הסתכלות על כל הפונקציות השונות שהופיעו.

- נקודות חיתוך עם הצירים: נקודות החיתוך עם ציר x נשמרות ומתווספת (0,0) (אלא אם כן היא כבר הייתה) שהיא גם נקודת החיתוך עם ציר y.
- חיוביות/שליליות: סימן הפונקציה בתחום $x > 0$ נשמר וסימן הפונקציה בתחום $x < 0$ מתהפך.
- זוגיות ואי זוגיות: אם f(x) זוגית, אז הפונקציה $x \cdot f(x)$ אי-זוגית ולהפך.
- נקודות קיצון: משתנות (ולכן אין טעם להתייחס לעלייה/ירידה).

תרגיל 4

סיכום התכונות לעיל יכול לשמש בסיס לשרטוט הסקיצות של $g(x) = xf(x)$ על סמך הגרף של f. תלמידים יכולים להיעזר בסימון נקודות מסוימות ולבסוף לבדוק בעזרת מחשב בסעיף הבא.



כדאי גם לדון בנקודות החיתוך של שתי הפונקציות f ו- g: הן נחתכות בנקודה בה $x = 1$, וכן בנקודות החיתוך של f עם ציר x. בחלק מהגרפים רואים זאת (i, ii, iii) ואז ניתן לשאול האם גם הגרפים בסעיף iv נחתכים ב- $x = 1$.

תרגיל 5

מכפילים את פונקצית השורש בעצמה. הפעם פונקצית המכפלה המתקבלת פשוטה יותר ($y = x$), ודבר זה עשוי להפתיע. לאחר שמתקבל הגרף של המכפלה במחשב, כדאי לתת נימוק בעזרת החוק.

בתרגילים 6 – 8, מתרגילים מכפלה של ביטויים אלגבריים, פתיחת סוגריים ופישוט וזאת כהכנה לסעיף הבא. התרגול נעשה בהדרגה כפי שיוסבר בכל אחד מהתרגילים.

תרגיל 6

תרגיל זה עוסק רק בפעולה אחת: כפל של שתי חזקות בעלי אותו בסיס, או **חיבור** של חזקות זהות.

א) x^5 ב) $2x^9$ ג) $3x^5$ ד) $3x^5$ ה) $3x^2 + x^3$ ו) $x^3 + x^2 + 2x$

תרגיל 7

בחלק מהתרגילים יש שילוב שתי הפעולות, במטרה להבחין בין פעולות אלו ולטפל בשגיאות פישוט נפוצות.

א) $8x^5$

ב) לא ניתן לפשט, אך ניתן לרשום כמכפלה של שתי פונקציות: $x\,(x^2 + x)$.

ג) לא ניתן לפשט - (שגיאה נפוצה: חיבור הביטויים הראשונים (x^2+x^3) ל- x^5 וחיבור לביטוי שנותר).

ד) $x^3 + x^3 = 2x^3$ ה) $x^3 + x^4$ ו) $x^5 + x^6$

תרגיל 8

א) $2x^4 + 2x + 3x^4 + 12x^2 = 5x^4 + 12x^2 + 2x$

ב) $6x^6 - 3x^2 + 8x^6 + 16x^3 = 14x^6 + 16x^3 - 3x^2$

ג) $4x^4 + 2x + 8x^3 + 4 + 6x^4 + 24x^3 = 10x^4 + 32x^3 + 2x + 4$

ד) $6x^3 - 2x + 3x^2 - 1 + 6x^3 + 6x^2 = 12x^3 + 9x^2 - 2x - 1$

ה) $2x^3 + 6x^2 + x^2 + 3x = 2x^3 + 7x^2 + 3x$

ו) $2x^5 + x^4 + 4x^4 + 2x^3 = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3$

נגזרת של מכפלת פונקציות (עמודים 256-260 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

בתחילת הסעיף מראים שלא ייתכן שנגזרת של מכפלה של פונקציות היא מכפלת הנגזרות (בניגוד לחיבור פונקציות). לשם כך נעזרים בשרטוט של גרף הנגזרת לפי גרף הפונקציה הנתונה (כפי שלמדו בפרק הקודם: "הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת") בהמשך מציגים את החוק לגזירת פונקציה שהיא מכפלה, ובודקים את נכונות החוק על פונקציות פולינום. (כי עבורן אפשר לגזור לאחר פישוט הפונקציה ללא צורך בנגזרת של מכפלה).

תרגיל 1

א) כדי לשרטט את הגרף את f' לפי הגרף של f, נעזרים בתכונות הנגזרת (כדאי לרשום שורות חיצים עבור f ו-f')

תכונות f: עולה מ- $x=-1$ מינימום ב- $x=-1 \rightarrow$ יורדת עד $x=-1 \rightarrow$

תכונות f': חיובית מ- $x=-1$ מתאפסת ב- $x=-1 \rightarrow$ שלילית עד $x=-1 \rightarrow$

בעזרת שורת החיצים עבור f' רוב התלמידים משרטטים פונקציה שהיא עולה וחותכת את ציר x ב- $x=-1$.

ב) (i) מכפלת הנגזרות היא $e^x \cdot 1$, כלומר e^x.

(ii) תלמידים עסקו בגרף הפונקציה $y=e^x$, ורצוי להזכיר את תכונותיו כשאחת מהן שהגרף אינו חותך את ציר x, ולכן ניתן להסיק שנגזרת של המכפלה אינה מכפלת הנגזרות.

ג) על התלמידים לבדוק איזו פונקציה מתאימה להיות נגזרת של $y=xe^x$, תוך התייחסות לתכונות של f'. הבדיקה נעשית בעזרת מחשב.

לא ייתכן שהנגזרת היא e^x כי גרף זה לא חותך את ציר x (כפי שקיבלו בסעיף א').

לא ייתכן שהנגזרת היא $x \cdot e^x$ כי גרף זה חותך את ציר x בראשית הצירים ולא ב-$x = 1$. יש חשיבות למסיח זה מאחר והוא שולל את האפשרות שהפונקציה שווה לנגזרתה (כפי שמתקבל במקרה של הפונקציה $y = e^x$)

גרף (iii) מתאים.

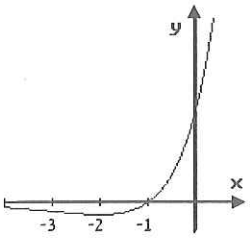
גרף iv לא מתאים למרות שהוא חותך את ציר x ב-$x = 1$. כדאי כאן להתייחס לכך שהשיפועים לא גדלים באותו קצב, ולכן לא ייתכן שגרף הנגזרת היא פונקציה קווית.

למורים:

למעשה f' אינה פונקציה עולה לכל x אלא יש לה נקודת קיצון עבור $x = -2$:

$f'(x) = e^x + xe^x$, ונגזרת של f' (כלומר f'') $f''(x) = 2e^x + xe^x$, כלומר f'' מתאפסת עבור $x = -2$.

למעשה גרף הנגזרת נראה כך:



תרגיל 2

הפונקציה הנתונה היא פולינום. המהלך דומה לתרגיל 1 רק כאן יש אפשרות לבדוק את הפונקציה הנגזרת הנבחרת על-ידי פתיחת סוגריים וגזירה.

א) הנגזרת מתאפסת ב- $x = -1.58$, $x = 0$, $x = 1.58$. בדרך כלל התלמידים רושמים $x = -1.5$, $x = 0$, $x = 1.5$ וזאת בגלל הקושי לדייק. מומלץ לקבל תשובה זו או כל תשובה קרובה.

להלן שורת חיצים עבור הנגזרת:

f': שלילית עד $x = -1.58$ → מתאפסת ב- $x = -1.58$ → חיובית בין -1.58 ל-0 → מתאפסת ב- $x = 0$ → שלילית בין 0 ל-1.58 →

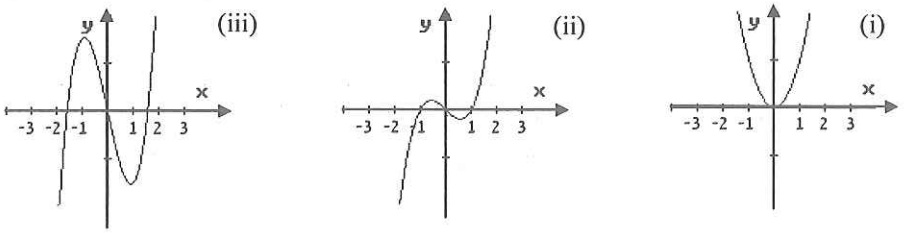
חיובית מ- $x = 1.58$ → מתאפסת ב- $x = 1.58$

ב) בעזרת המחשב בוחרים את החוק המתאים לגרף הנגזרת ששרטטו בסעיף א'.

גם פה המסיח הראשון הוא מכפלת הנגזרות וברור שהגרף של $2x \cdot 2x$ אינו מתאים. לגרף זה יש רק נקודת חיתוך אחת עם ציר x, כאשר אמורות להיות שלוש נקודות.

הגרף של $2x \cdot (x^2-1)$ אינו מתאים. יש אומנם שלוש נקודות חיתוך עם ציר אך הן שונות מאלו שנרשמו בסעיף א'.

גרף (iii) היחיד שיכול להתאים.



ב) התלמידים גוזרים פונקציה זו לאחר שפותחים סוגריים:

$$f(x) = x^4 - x^2 - 4x^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 10x$$

ד) בפישוט החוק הרשום בסעיף ב'- (iii) מקבלים אותו חוק נגזרת.

בסיכום התרגיל חשוב להדגיש שוב שנגזרת מכפלה אינה מכפלת הנגזרות.

אחרי התרגיל ניתן הכלל לגזירת מכפלה של פונקציות. עבור תלמידים רבים ניסוח מילולי קל יותר. רצוי לציין שההסבר לכלל זה מסובך ולכן איננו מובא כאן.

תרגיל 3

מאמתים את הכלל לגזירה של מכפלה בעזרת פונקציה פשוטה: $f(x) = x^2 \cdot x^3$

א) קודם גוזרים לפי הכלל ולאחר מכן מפשטים:

$$f'(x) = 2x \cdot x^3 + 3x^2 \cdot x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$$

ב) קודם מפשטים ולאחר מכן גוזרים: $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$.

בתרגיל זה התלמידים לא נדרשים לפשט בעצמם פישוט זה, כדי להתמקד כאן בעובדה שמתקבלת אותה נגזרת, בשתי הדרכים. רצוי להדגיש שתרגיל זה בא כדי להווכח בנכונות הכלל במקרים שאנחנו יכולים לבדוק בעצמנו. אך בהמשך נשתמש בכלל רק במקרים שאין בידינו דרך אחרת. ניתן לבדוק את הכלל גם על מקרים פשוטים אחרים כמו: $f(x) = 2x$, $f(x) = x \cdot x$, $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

תרגיל 4

חוזרים לחוק הפונקציה בתרגיל 1, גוזרים את החוק בעזרת הכלל ובודקים את התאמת חוק הנגזרת.

$$y = x \cdot e^x \quad \Leftarrow \quad y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

ממליצים כאן למסגר כל אחת מהפונקציות במכפלה, כי זה מקל על הגזירה.
בהמשך יש תרגול של הכלל על פונקציות שונות.

תרגיל 5

תרגול של גזירת מכפלה של פולינומים המאפשר שוב לבדוק את הכלל.
בשורה הראשונה, בכל סעיף, גוזרים לפי חוק נגזרת המכפלה ולאחר מכן מפשטים את הנגזרת. בשורה שנייה, מפשטים תחילה את הפונקציה הנתונה ולאחר מכן גוזרים.

א)

$$y = \boxed{(x^2 - 1)}\boxed{(x^3 + 4)}$$

$$y' = 2x(x^3 + 4) + 3x^2(x^2 - 1) = 2x^4 + 8x + 3x^4 - 3x^2 = \underline{5x^4 + 8x - 3x^2}$$

$$y = x^5 + 4x^2 - x^3 - 4 \quad \Rightarrow \quad y' = \underline{5x^4 + 8x - 3x^2}$$

ב)

$$y = \boxed{x^3}\boxed{(2x^4 - 2)}$$

$$y' = 3x^2(2x^4 - 2) + 8x^3x^3 = 6x^6 - 6x^2 + 8x^6 = \underline{14x^6 - 6x^2}$$

$$y = 2x^7 - 2x^3 \quad \Rightarrow \quad y' = \underline{14x^6 - 6x^2}$$

ג) $y = \boxed{(2x^3 - 1)}\boxed{(x^2 + 5)}$

$y' = 6x^2(x^2 + 5) + 2x(2x^3 - 1) = 6x^4 + 30x^2 + 4x^4 - 2x = \underline{10x^4 + 30x^2 - 2x}$

$y = 2x^5 + 10x^3 - x^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad y' = \underline{10x^4 + 30x^2 - 2x}$

ד) $y = \boxed{(x^2 - x)}\boxed{(x^3 - 4)}$

$y' = (2x-1)(x^3 - 4) + 3x^2(x^2 - x) = 2x^4 - 8x - x^3 + 4 + 3x^4 - 3x^3 = \underline{5x^4 - 4x^3 - 8x + 4}$

$y = x^5 - x^4 - 4x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad y' = \underline{5x^4 - 4x^3 - 8x + 4}$

תרגיל 6

(i) תרגול של גזירת מכפלה כאשר אחת מהפונקציות היא פונקצית השורש.

א) $y = \boxed{x}\cdot\boxed{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow y' = 1\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

ב) $y = \boxed{\sqrt{x}}\boxed{(x^2 + x)} \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) + (2x + 1)\sqrt{x} = \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} + (2x + 1)\sqrt{x}$

ג) $y = \boxed{(\sqrt{x} - 1)}\boxed{(\sqrt{x} + 1)} \quad \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x} - 1)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$

ד) $y = \boxed{(\sqrt{x} - x)}\boxed{(\sqrt{x} + x)} \quad \Rightarrow y' = (\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1)\cdot(\sqrt{x} + x) + (\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1)\cdot(\sqrt{x} - x)$

$= \quad \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} - x + \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} - x = 1 - 2x$

(ii) מפישוט הפונקציה הרשומה בסעיף ג' מקבלים : $y = x-1$ והנגזרת שלה $y' = 1$ וזו אותה נגזרת. כמו כן ניתן לפשט סעיף ד' ל - $y = x - x^2$ והנגזרת שלה $y = 1-2x$.

תרגיל 7

תרגול של גזירת מכפלה כאשר אחת מהפונקציות היא הפונקציה המעריכית e^x.

א) $y = \boxed{2x}\cdot\boxed{e^x} \Rightarrow y' = 2\cdot e^x + 2x\cdot e^x$

ב) $y = \boxed{\sqrt{x}}\cdot\boxed{e^x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^x + e^x\cdot\sqrt{x}$

ג) $y = \boxed{x^3}\boxed{e^x} \Rightarrow y' = 3x^2\cdot e^x + e^x\cdot x^3$

ד) $y = \boxed{e^x}\boxed{(x^2 - 4)} \Rightarrow y' = e^x\cdot(x^2 - 4) - 2x\ e^x$

ה) $y = \boxed{(e^x + 4)}\cdot\boxed{2x} \Rightarrow y' = e^x\cdot 2x + 2\cdot(e^x + 4)$

ו) $y = \boxed{e^x}\boxed{(3 - 2x)} \Rightarrow y' = e^x\cdot(3 - 2x) - 2\ e^x$

ז) $y = \boxed{(1 - 2x^2)}\cdot\boxed{e^x} \Rightarrow y' = -4x\cdot e^x - e^x\cdot(1 - 2x^2)$

ח) $y = \boxed{(e^x + 2)}\cdot\boxed{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = e^x\cdot\sqrt{x} + (e^x + 2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

תרגיל 8

במקרים בהם יכולים לגזור בדרכים שונות (על-פי ידע קודם על נגזרות או על-פי נוסחת נגזרת של מכפלה), מומלץ שתלמידים יזהו מקרים אלה ויבחנו את כדאיות שתי הדרכים. ממליצים זאת כי יש נטייה לתלמידים, לאחר לימוד נגזרת של מכפלה, לגזור גם פונקציה המוכפלת בקבוע על-פי הכלל. כאשר משתמשים בכלל במקרה זה, תלמידים נוטים לשגות בגלל שמקבלים שהביטוי הראשון מתאפס.

התרגיל הבא ממשיך לטפל בזיהוי פונקציות בהן אין ברירה אלא להשתמש בנוסחת נגזרת של מכפלה.

א) $f'(x) = 3\cdot 6x^5 = \underline{18\ x^5}$

ב) $f'(x) = 0\cdot x^6 + 6x^5\cdot 3 = \underline{18x^5}$

תרגיל 9

תלמידים ממיינים את הפונקציות לכאלה שלא הכרחי לגזור בעזרת כלל נגזרת מכפלה (פונקציות שהן מכפלה בקבוע או מכפלה של פולינומים) וכאלה שחייבים לגזור בעזרת הכלל.

א) (ii) $y = \boxed{2x}\cdot\boxed{e^x} \Rightarrow y' = 2\cdot e^x + e^x\cdot 2x$

(iv $y = \boxed{e^x}\cdot\boxed{(1-x)} \Rightarrow y' = e^x\cdot(1-x) - e^x$

ב) (i) $y = 3x^4 \Rightarrow y' = 12x^3$

(iii) $y = x^2(1-x) = x^2 - x^3 \Rightarrow y' = 2x - 3x^2$

(v) $y = 20x^5 \Rightarrow y' = 100x^4$

(vi) $y = 3x^3 + 3x - 4x^2 - 4 \Rightarrow y' = 9x^2 + 3 - 8x$

הערה:

כדאי לשים לב שבסעיף (iv) ניתן לפתוח את הסוגריים ולקבל: $e^x - xe^x$ ולגזור כסכום. אך אז ניתקל במחובר (xe^x) שאותו ניתן לגזור רק בעזרת כלל נגזרת של מכפלה.

חקירה של מכפלת פונקציות (עמודים 261-270 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

הסעיף מחולק ל - 3 תת סעיפים, כל אחד מתמקד בסוג אחר של פונקציות:

- חקירה של מכפלה עם פונקציה מעריכית.
- חקירה של מכפלה עם פונקציית שורש.
- חקירה של מכפלה עם הפונקציה $\frac{1}{x}$.

בכל תת סעיף עוסקים בטכניקה המתאימה לסוג הפונקציה אותה חוקרים, טכניקה הקשורה למציאת נקודות חשודות או/ו חיתוך עם הצירים. בנוסף, במרבית התרגילים, מפורטים שלבי החקירה, ובחלק מהם מקשרים בין החישובים והגרף.

חקירה של מכפלה עם פונקציה מעריכית

תרגיל 1

מטרת התרגיל היא לראות את הקשר בין נקודת הקיצון שרואים על הגרף הנתון, עם הנקודות בהן מתאפסת הפונקציה הנגזרת.

א) מתוך הגרף רואים שהנקודה A היא נקודת מינימום ולכן ערך הנגזרת בה הוא אפס.

ב) בעזרת הנגזרת מוצאים שיעור x של נקודת המינימום A.

(i) $f'(x) = 3\cdot e^x + 3x\cdot e^x$

(ii) את התאמת הביטוי של מה שמקבלים מהגזירה לביטוי שרשום ניתן לבדוק בשני אופנים:

- פתיחת הסוגריים של הביטוי הנתון והשוואתו למה שקיבלו מהגזירה.
- פירוק לגורמים של הביטוי (הכולל גורם של פונקציה מעריכית) שמקבלים ב- (i) והשוואתו לביטוי שרשום בספר.

בדרך כלל תלמידים בשלב זה בוחרים את האפשרות הראשונה בגלל פשטותה. כיוון שעל התלמידים לדעת לפרק לגורמים, ישנם בהמשך תרגילים נוספים העוסקים בפרוק לגורמים.

(iii) את שיעור x של הנקודה A מוצאים על-ידי איפוס הנגזרת בצורתה: $f'(x) = 3\cdot e^x(1+x)$ בה קל יותר לראות שזה קורה עבור $x = -1$.

(iv) שיעור y של הנקודה A הוא $-\frac{3}{e}$ שזה בקירוב -1.1 .

ג) המכפלה $3\cdot e^x(1+x)$ מתאפסת כאשר אחד מגורמי המכפלה הוא אפס, הפונקציה e^x חיובית לכל x ולכן הנגזרת כאן מתאפסת רק כאשר $x + 1 = 0$, מכאן $x = -1$.

רצוי לקשר בין הפונקציה הנתונה לפונקציה בתרגיל 1 בסעיף הקודם (עמוד 256). הפונקציה כאן ($3xe^x$) היא מתיחה פי 3 בכיוון ציר x של הפונקציה שם (xe^x).

תרגיל 2

פירוק לגורמים הוא בסיס למציאת פתרונות למשוואות המתקבלות מאיפוס הנגזרת. בתת סעיף זה כל אחת מהמשוואות כוללת את הגורם e^x וזאת כדי להדגיש כי הוא תמיד חיובי, כלומר יש לחפש ערכי x המאפסים את הגורמים האחרים. התרגול כאן נועד לפתח מיומנות זאת.

התרגיל הראשון הוא חזרה על ביטוי עליו עבדו בתרגיל הקודם.

א) $3e^x + 3xe^x = 3e^x(1 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

ב) $2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2\ ,\ x = 0$

ייתכן ותלמידים יזהו רק את e^x כגורם משותף ואז יקבלו $e^x(2x + x^2) = 0$.

רצוי לדון בכיתה גם על אפשרות זאת.

ג) $e^x(2 + 4x) - 4e^x = 0$. להלן שלבי הפתרון:

$2e^x + 4x\,e^x - 4e^x = 0$ (פתיחת סוגרים).

$4x\,e^x - 2e^x = 0$ (כינוס איברים).

$2e^x(2x - 1) = 0$ (פירוק לגורמים).

$x = 0.5$

ניתן גם לא לפתוח תחילה סוגריים, אלא לפרק לגורמים באופן הבא:
$e^x(2 + 4x - 4)$ ואז לפתור. מומלץ לעשות זאת על-פי דעת התלמידים.
בכיתות מתקדמות אפשר להציע דרך נוספת לפתרון: $e^x(2 + 4x) = 4e^x$,
ניתן לצמצם ב- e^x (כי הוא שונה מאפס) ולקבל ישירות $2 + 4x = 4 \Leftarrow$
$x = 0.5$

ד) $2x - 2x\,e^x = 2x\,(1 - e^x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.
למעשה גם הגורם בסוגריים מתאפס, אך גם הוא מתאפס עבור $x = 0$.

ה) $e^x - x\,e^x = e^x\,(1 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

ו) $e^x\,(1 + x^2) - 2xe^x = e^x + e^x\,x^2 - 2xe^x = e^x(1 + x^2 - 2x) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 1$

תרגיל 3

התרגיל עוסק בגזירה ובפתירת משוואות. גוזרים לפי כלל הנגזרת של מכפלת פונקציות ופותרים בעזרת פירוק לגורמים כפי שפתרו בתרגיל 2.

א) $y = 2x \cdot e^x \quad \Rightarrow y' = 2e^x + 2x\,e^x$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2e^x + 2x\,e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2e^x\,(1 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

ניתן לקשור פונקציה זאת לפונקציות קודמות מהמשפחה הזאת בהן קיבלנו נקודת קיצון ב- $x = -1$. כדאי להזכיר שמתיחה או כיווץ אינה משנה את ערך x של נקודת הקיצון.

ב) $y = 3x^2 \cdot e^x \quad \Rightarrow y' = 6xe^x + 3x^2\,e^x$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 6xe^x + 3x^2\,e^x = 3xe^x\,(2 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\ ,\ x = -2$

ג) $y = (1 - x) \cdot e^x \quad \Rightarrow y' = -e^x + (1 - x)\,e^x = -e^x + e^x - x\,e^x = -x\,e^x$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad -x\,e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

ד) $y = e^x \cdot (x - 4) \quad \Rightarrow y' = e^x \cdot (x - 4) + e^x = xe^x - 4e^x + e^x = x\,e^x - 3e^x$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,e^x - 3e^x = e^x \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad x = 3$

ה) $y = e^x \cdot (x^2 - 3) \quad \Rightarrow y' = e^x \cdot (x^2 - 3) + 2xe^x = x^2e^x - 3e^x + 2xe^x$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2e^x - 3e^x + 2xe^x = e^x\cdot(x^2 - 3 + 2x) \quad \Rightarrow \quad x = -3 \ , x = 1$

ו) בתרגיל זה אחד מגורמי המכפלה הוא פונקציה מורכבת .

$y = x^2\cdot e^{3x} \quad \Rightarrow y' = 2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x}$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x} = xe^{3x}(2 + 3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ , \ x = -\frac{2}{3}$

בתרגילים הבאים חוקרים פונקציות כאשר יש הנחיות מדורגות.

תרגיל 4

בתרגיל יש הדרכה בשימוש בטכניקה שנלמדה בשני התרגילים הקודמים לצורך מציאת נקודות חשודות. בנוסף יש סדרת הקשות למחשבון למציאת שיעור y .

א) $y = e^x\cdot(x^2 - 8) \quad \Rightarrow \ y' = e^x\cdot(x^2 - 8) + 2xe^x = x^2e^x - 8e^x + 2xe^x$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2e^x - 8e^x + 2xe^x = e^x\cdot(x^2 - 8 + 2x) \quad \Rightarrow \quad x = -4 \ , x = 2$

כדאי גם כאן לציין ש- e^x חיובי.

ב) $f(-4) = 8e^{-4} = 0.146$

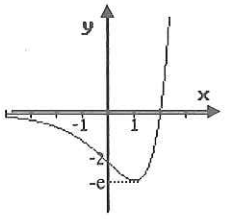
ג) $f(2) = -4e^2 = -29.56$

בתרגילים 5-6 מוצאים נקודות קיצון ומציעים להיעזר במערכת צירים למרות שלא נדרש כאן הגרף. לנוחיות המורה מובא כאן הגרף המתאים לכל תרגיל.

תרגיל 5

א) $y = e^x\cdot(x - 2) \quad \Rightarrow y' = e^x\cdot(x - 2) + e^x = xe^x - 2e^x + e^x = x\,e^x - e^x$

$y' = 0 \ \Rightarrow \quad x\,e^x - e^x = e^x\cdot(x - 1) \quad \Rightarrow \quad x = 1$



הנקודה החשודה : $(1, -e) \approx (1, -2.72)$.

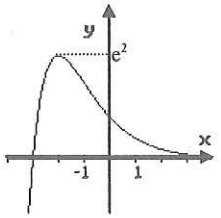
ב) נקודות נוספות, למשל : $(2,0)$ נמצאת מימין לנקודה החשודה , $(0,-2)$ לשמאלה. רצוי לסמן נקודות אלה במערכת צירים ולהיווכח כי הנקודה החשודה היא אכן נקודת מינימום.

תרגיל 6

$y = (x + 3)\cdot e^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - (x + 3)\cdot e^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} - 3e^{-x} = -x\,e^{-x} - 2e^{-x}$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad -x\,e^{-x} - 2e^{-x} = -e^{-x}(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

הנקודה החשודה : $(-2,e^2) \approx (-2,7.39)$ והיא נקודת מקסימום.

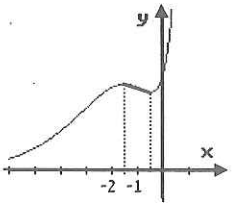


תרגילים 7-8 עוסקים בעלייה וירידה בנקודה, ומשלבים בדיקת הגיוניות התשובה עם נקודות הקיצון של הפונקציה.

תרגיל 7

א) $y = (4x^2 + 3)\cdot e^x \Rightarrow y' = 8xe^x + (4x^2 + 3)\,e^x = 8xe^x + 4x^2\,e^x + 3e^x$

$y' = 0 \Rightarrow 8xe^x + 4x^2\,e^x + 3e^x = e^x(8x + 4x^2 + 3) = 0$



$\Rightarrow x = -1.5\,,\ x = -0.5$

$(-1.5,2.68)$ נקודת מקסימום.

$(-0.5,2.43)$ נקודת מינימום.

ב) $f'(-1) = -0.37 \Leftarrow$ הפונקציה יורדת ב- $x = -1$.

ניתן לראות זאת גם מהגרף, הנקודה נמצאת בין שתי נקודות הקיצון, (החלק המודגש בגרף).

תרגיל 8

א) $f'(x) = e^{2x} + 2e^{2x}(x - 1)$.

$f'(-1) = -3e^{-2} < 0 \Leftarrow$ הפונקציה יורדת ב- $x = -1$.

$f'(4) = 7e^8 > 0 \Leftarrow$ הפונקציה עולה ב- $x = 4$.

ב) מכיוון שיש לפונקציה נקודה בה היא עולה ($x = 4$) ויש נקודה בה היא יורדת ($x = -1$), ומכיוון שהיא מוגדרת לכל x, יש לפחות x אחד עבורו יש מעבר מירידה לעלייה, כלומר יש לפחות נקודת קיצון אחת. לא ניתן לקבוע על-פי החישובים בסעיף א' את מספר נקודות הקיצון, לשם כך יש למצוא את כל הנקודות החשודות (כלומר לבדוק מתי הנגזרת מתאפסת).

בתרגילים 9-10 מבצעים חקירה שלימה.

תרגיל 9

א) $y = 3x^2 \cdot e^x \quad \Rightarrow y' = 6xe^x + 3x^2 e^x$

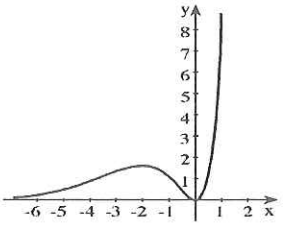
$y' = 0 \quad \Rightarrow 6xe^x + 3x^2 e^x = 3xe^x(2 + x) = 0 \quad \Rightarrow x = 0\,,\ x = -2$

$(0,0)$ היא נקודת מינימום, $(-2,1.62)$ היא נקודת מקסימום.

ב) $(0,0)$ היא נקודת החיתוך היחידה של הפונקציה עם ציר x, כי הפונקציה מתאפסת רק כאשר $x^2 = 0$ (כלומר $x = 0$).

ג) $(-6,0.27)$, $(-10,0.014)$, $(-15,0.0002)$. בעזרת הנקודות ניתן לראות שערכי הפונקציה הולכים וקטנים ומתקרבים לאפס, ולכן יש אסימפטוטה שמשוואתה $y = 0$.

ד) הגרף למעשה נבנה בכל שלבי החקירה .



בכתה אפשר להתייחס לכך שערכי הפונקציה חיוביים פרט לנקודה אחת (הראשית), ולקשר תכונה זאת לתבנית הנתונה.

תרגיל 10

א) נקודת חיתוך עם ציר y: $(0,-3)$.

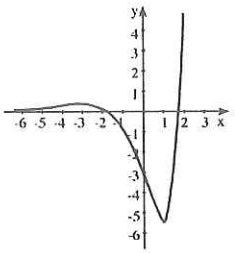
נקודות חיתוך עם ציר x: $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$.

ב) $y' = e^x \cdot (x^2 - 3) + 2xe^x = x^2e^x - 3e^x + 2xe^x$

$y' = 0 \Rightarrow x^2e^x - 3e^x + 2xe^x = e^x \cdot (x^2 - 3 + 2x) = 0 \Rightarrow \quad x = -3 \ , x = 1$

(1,-5.44) נקודת מינימום, (-3,0.3) נקודת מקסימום.

ג)



תרגילים

11. א) $x = 1.41 \ , x = -1.41$ ב) $x = 1$

ג) $x = 0 \ , x = 2$ ד) $x = -2 \ , x = 1$

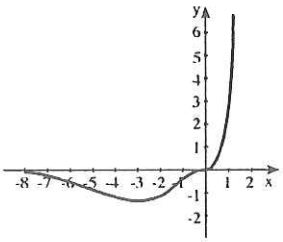
12. א) (i) נקודת חיתוך עם ציר y : (0,0).

(ii) $y' = 3x^2e^x + x^3e^x \Rightarrow$ (0,0) , (-3,-1.34) נקודות חשודות.

(-3,-1.34) נקודת מינימום.

(iii) (-7,-0.31) , (-8,-0.17), (-20,-0.00001) בעזרת הנקודות ניתן לראות שערכי הפונקציה הולכים וקטנים ומתקרבים לאפס ולכן משוואת האסימפטוטה $y = 0$.

(iv)



(v) הפונקציה יורדת בתחום $x < -3$ ועולה בתחום $x > -3$.

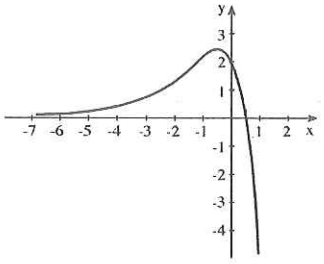
ב) (-3, 1.34) נקודת מקסימום של פונקצית השיקוף.

13. א) נקודת חיתוך עם ציר y : (0,2). נקודת חיתוך עם ציר x : (0.5,0).

ב) $y' = -4e^x + e^x(2 - 4x)$. (-0.5,2.43)נקודת מקסימום.

ג) (-4,0.33), (-6,0.067), (-10,0.002). בעזרת הנקודות ניתן לראות שערכי הפונקציה הולכים וקטנים ומתקרבים לאפס ולכן משוואת האסימפטוטה $y = 0$.

ד)



למורים:

למרות שהגורם הפולינומיאלי (2-2x) הולך וגדל ככל שמקטינים את x, ערכי הפונקציה הולכים וקטנים ושואפים לאפס בגלל הגורם המעריכי. ככל שמקטינים את x הפונקציה המעריכית שואפת לאפס מהר יותר מכל פונקציה פולינומיאלית.

14. בתרגיל יש שני זוגות של גרפים שהם שיקוף אחד של השני. זיהוי אחד מהזוגות מוביל לזיהוי הזוג השני, לכן יש כאן למעשה שתי התאמות ולא ארבע.

חשוב לציין ששתי פונקציות דומות הופיעו בתרגילים קודמים בסעיף זה: חוק (א) בתרגיל 1, וחוק (ג) הוא מתיחה של החוק בתרגיל 9.

א) (iii) $\Leftrightarrow$ ב) (iv) $\Leftrightarrow$ ג) (ii) $\Leftrightarrow$ ד) (i)

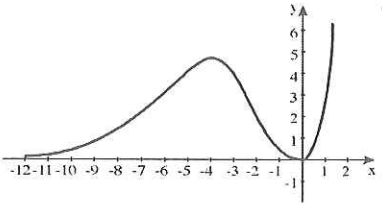
15. א) (0,0) היא נקודת החיתוך עם שני הצירים.

ב) (0,0) נקודת מינימום, (-4,4.69) נקודת מקסימום.

ג) ציר x אסימפטוטה.

משוואת האסימפטוטה $y = 0$.

ד)



ה) הפונקציה עולה בתחומים: $x < -4$, $x > 0$.

הפונקציה יורדת בתחום: $-4 < x < 0$.

הערה:

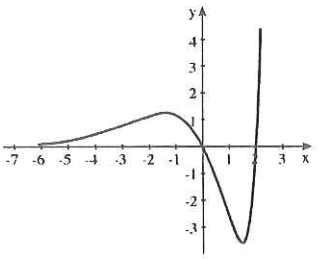
עד כה התלמידים נפגשו עם מספר פונקציות מהמשפחה: $y = a \cdot x^n \cdot e^x$, לכן כדאי להשוות ביניהן. כאשר n זוגי (תרגילים 9 ,15) הגרפים דומים מאוד (בשיעור x של נקודות הקיצון ולכן בתחומי עלייה וירידה, בנקודות החיתוך עם הצירים). הם שונים רק בקצב השינוי. אפשר להשוותם לפונקציה מאותה משפחה בה n אי-זוגי (תרגיל 12).

16. א) (0,0) היא נקודת החיתוך עם שני הצירים

ב) (-1.41,1.17) נקודת מקסימום, (1.14,-3.41) נקודת מינימום.

ג) ציר x אסימפטוטה. משוואת האסימפטוטה $y = 0$.

ד)



ה) הפונקציה עולה בתחומים: $x < -1.41$, $x > 1.41$.

הפונקציה יורדת בתחום: $-1.41 < x < 1.41$.

חקירה של מכפלה עם פונקציית שורש

בסעיף זה עוסקים בחקירה של פונקציות שהן מכפלה של $\sqrt{x}$ בפונקציות פולינום, שהן לכל היותר ממעלה שנייה (מכיוון שיש קושי בפתירת משוואות עם פולינום ממעלה גבוהה יותר). כמו כן חוקרים מכפלה של $\sqrt{x}$ בפונקציה מעריכית.

כיוון שתחום ההגדרה בפונקציות כאלה הוא $x \geq 0$ יש תמיד נקודת קיצון עבור $x = 0$. חשוב לציין שהפונקציה אינה גזירה עבור $x = 0$.

תרגיל 1

בתרגיל פותרים משוואות הדומות לאלו המתקבלות בחקירה של פונקציות עם שורש, הן במציאת נקודות חשודות והן במציאת נקודות חיתוך עם ציר x.

בתהליך פתרון המשוואות נדרשת ההכפלה בגורם הכולל גם $\sqrt{x}$, על מנת "להיפטר" ממכניה. על-ידי כך מתקבלת משוואה קלה לפתרון והיא ממעלה ראשונה או שנייה. תחום ההגדרה של המשוואה המתקבלת (ליניארית או ריבועית) הוא לכל x, כאשר תחום ההצבה של המשוואה הנתונה (בה יש שורשים) הוא עבור ערכים חיוביים בלבד. לכן מומלץ לבדוק את תחום ההגדרה על-פי התבנית המקורית.

בתרגיל המודרך מתקבלת משוואה ממעלה ראשונה, לכן כדאי גם להדגים בכיתה פתרון נוסף כמו בסעיף ד', בו מתקבלת משוואה ריבועית. מאחר ויש רק תרגיל אחד מסוג זה נציע פה תרגיל אחר, הכולל פתרון מלא :

$$\sqrt{x}(x+2)+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-4x-12)=0 \qquad /\cdot 2\sqrt{x}$$

$$2x(x+2)+x^2-4x-12=0$$

$$2x^2+4x+x^2-4x-12-=0$$

$$3x^2-12=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad , \quad x=-2$$

רק הפתרון $x=2$ מתאים בגלל תחום ההצבה של המשוואה.

(ii) מהצבה של $x = -0.5$ במשוואה הנתונה, מתקבל ביטוי לא אפשרי (מספר שלילי בתוך השורש), לכן למשוואה אין פתרון.

א) $x = 4$ ב) אין פתרון ג) $x = \frac{4}{3}$

ד) $x = 1$ (מתקבל פתרון נוסף, $x = -1$ אך יש לבטלו בגלל תחום ההצבה של המשוואה).

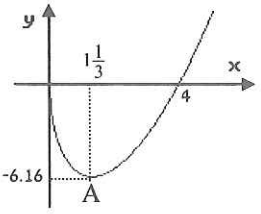
תרגיל 2

חוקרים פונקציה שהיא מכפלה של $\sqrt{x}$ בפונקציה קווית.
הגרף נתון ללא ערכים על הצירים ועל התלמידים לקשר בין הנקודות שהתקבלו מחישוביהם לגרף הנתון.

א) לתלמידים יש נטייה לפתוח סוגריים, ורצוי לדון אתם על הכדאיות של צעד זה, ולהיווכח פעם נוספת כי ביטוי בצורת מכפלה מקל במציאת פתרון המשוואה המתקבלת. במקרה זה $x - 4 = 0$, $2\sqrt{x} = 0$ ולכן נקודות החיתוך עם ציר x : $(4,0)$, $(0,0)$.

נקודת החיתוך עם ציר y : $(0,0)$.

ב) כדי למצוא שיעורי נקודה A יש צורך לגזור:



$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}}(x-4) + 2\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}(x-4) + 2\sqrt{x}$$

בפתרון המשוואה: $\frac{1}{\sqrt{x}}(x-4) + 2\sqrt{x} = 0$ מתקבל

רק פתרון אחד $x = 1\frac{1}{3}$, ולכן $A(1\frac{1}{3}, -6.16)$.

תרגיל 3

בתרגיל חוקרים פונקציה שהיא מכפלה של פונקצית השורש ופונקציה מעריכית, לכן לצורך פתרון המשוואה יש כאן גם את הטכניקה של הוצאת גורם משותף (כפי שעסקו בתת הסעיף הקודם).

א) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x \geq 0$.

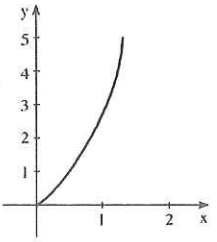
ב) נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,0)$. כדאי להדגיש שוב - e^x חיובי לכל x.

ג) נגזרת הפונקציה : $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x+e^x\cdot\sqrt{x}$. הנגזרת מתאפסת עבור $x = -0.5$,

אך ערך זה הוא מחוץ לתחום ההגדרה של הפונקציה.

ד) מאחר ותחום ההגדרה הוא $x \geq 0$, והפונקציה חיובית ועולה בכל התחום, יש לפונקציה נקודת מינימום ב- (0,0), שהיא נקודת קצה.

ה)



תרגילים

4. א) (i) (0,0) , (-3,0).

(ii) (0,0) , (3,0), הפתרון $x = -3$ אינו בתחום המשוואה.

(iii) (0,0)

(iv) (0,0) , (3,0)

(v) (0,0) , (3,0)

(vi) (0,0) , (1.61,0)

ב) החוקים שיכולים להתאים לגרף : (ii) , (iv), (v), (vi) , מאחר ולכולם יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x, כאשר אחת מהנקודות היא ראשית הצירים והשנייה בעלת שיעור x חיובי.

ג) כדי לבחור את החוק המתאים אפשר לגזור ולמצוא נקודת מינימום, אך התלמידים (וגם אנו) לא יודעים לפתור את כל המשוואות המתקבלות, לכן יש להפעיל שיקולים אחרים.

החוקים (ii), (v), (vi) לא מתאימים, כי לפונקציות יש ערכים הקטנים מ- 4-. החוק (iv) מתאים, כדאי לגזור ולבדוק שאכן ערך הפונקציה בנקודת המינימום הוא 4-.

בבדיקה נוספת, אפשר להיעזר בדמיון של גרף זה לגרף המשורטט בתרגיל 2, והחוק הרשום ב- (iv) היחיד שדומה לו.

אפשר גם לשרטט את כל הפונקציות במחשב, ולהלך על הגרפים.

5. א) $x = 1$ ב) אין פתרון ג) $x = \frac{1}{6}$ ד) $x = 1$ (יש לבטל את הפתרון $x = -0.5$ לא מתאים כי תחום ההצבה הוא: $x > 0$).

6. למעשה הפונקציה דומה לאלו הרשומות בשאלות 2 ו- 4 והגרף המשורטט יכול לתאר פונקציה זו.

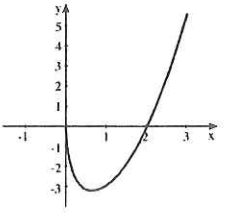
א) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x \geq 0$.

ב) נקודת חיתוך עם ציר y: (0,0), נקודות חיתוך עם ציר x: (0,0) , (2,0).

ג) נגזרת הפונקציה: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-6) + 3\sqrt{x}$, מהשוואת הנגזרת לאפס מתקבלת הנקודה החשודה (0.7,-3.27). על סמך נקודות החיתוך עם ציר ה- x ניתן לקבוע את סוגה: נקודת מינימום.

מתקבלת נקודת קיצון נוספת בקצה התחום, (0,0) היא נקודת מקסימום. כדאי להתייחס כאן גם לנקודה (0.7,-3.27) שהיא נקודת מינימום מוחלט. בעזרת הגרף ניתן לראות ש- (0,0) אינה נקודת מקסימום מוחלט.

ד)



ה) הפונקציה עולה עבור $x > 0.7$, הפונקציה יורדת עבור $0 < x < 0.7$.

7. א) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x \geq 0$.

ב) נקודת חיתוך עם ציר y: (0,0). נקודות חיתוך עם ציר x: (0,0), (3,0).

ב) נגזרת הפונקציה : $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-x^2)+(3-2x)\sqrt{x}$, מהשוואת הנגזרת לאפס

מתקבלת הנקודה החשודה (1.8,2.9). על סמך נקודות החיתוך עם ציר ה- x ניתן לקבוע את סוגה : נקודת מקסימום.

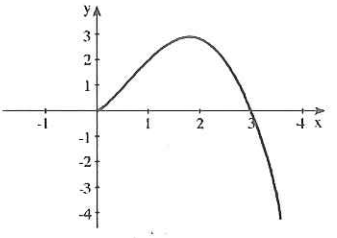
בפתרון המשוואה מקבלים גם $x = 0$, אך הנגזרת אינה מוגדרת עבור $x = 0$.

למרות זאת (0,0) היא נקודת קיצון נוספת (מינימום) כי היא נקודת קצה.

למורים :

רב התלמידים לא מבטלים את $x = 0$ בהשוואת הנגזרת לאפס. אך הפונקציה כן מוגדרת בנקודה זאת, היא נקודת קצה ולכן קיצון. במקרה זה ייתכן ותלמידים לא יבינו במה טעו ולא מומלץ לדון בכך.

ד)



ה) הפונקציה עולה עבור $0 < x < 1.8$, הפונקציה יורדת עבור $x > 1.8$.

8. אין נקודות קיצון עבור $x > 0$ כי הנגזרת : $y'=\frac{2}{2\sqrt{x}}(x^2+2x)+(2x+2)\sqrt{x}$

איננה מתאפסת בתחום זה (בפתרון המשוואה מקבלים : $x=-\frac{4}{3}$ ו- $x = 0$).

אך כאשר x=0 מתקבלת נקודת קיצון (0,0) שהיא נקודת קצה והיא מינימום.

פונקציות מכפלה נוספות

בסעיף זה חוקרים מכפלה של $\frac{1}{x}$ בפונקציות שונות. לצורך החקירה התלמידים נדרשים לפתור משוואות המתקבלות בשלבי החקירה. גם כאן פתרון משוואות אלה מבוסס על פירוק לגורמים כלומר על הוצאת גורם משותף לצורך קבלת מכפלה. ההדרכה והתמיכה לצורך זה ניתנת בתרגילים עצמם.

תרגיל 1

א) הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$.

ב) אין לפונקציה נקודת חיתוך עם ציר y מאחר ו- $x \neq 0$.

כדי למצוא נקודת חיתוך עם ציר x יש לפתור את המשוואה: $\frac{e^x}{x} = 0$. מנה זו מתאפסת כאשר המונה מתאפס, אך e^x חיובי לכל x, לכן אין נקודות חיתוך עם ציר x.

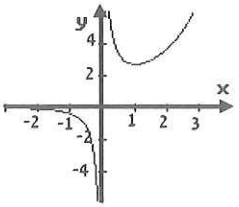
ג) כדי לגזור יש לרשום את הפונקציה כמכפלה של שתי פונקציות.

$y' = e^x \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{1}{x^2}) \cdot e^x$. כדי לפרק לגורמים מומלץ בספר להשאיר את הנגזרת בצורה זו, כמכפלות. יש שני גורמים משותפים: e^x, $\frac{1}{x}$ וכתוצאה מהוצאתם מחוץ לסוגריים מתקבל הביטוי הרשום בספר, או כל ביטוי "ביניים" אחר כמו $e^x(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ או $\frac{1}{x}(e^x - e^x\frac{1}{x})$. כאשר הנגזרת נרשמת כהפרש מנות, כדאי לפתור את המשוואה על-ידי הכפלה ב - x^2 (המכנה משותף) והוצאת e^x כגורם משותף: $\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} = 0 \Leftarrow xe^x - e^x = 0$.

בכל אחת, מהדרכים תלמידים יוכלו למצוא את הנקודה בה הנגזרת מתאפסת.

ד) פתרון המשוואה: $e^x \cdot \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x}) = 0$ הוא $x = 1$. לכן, $(1,e)$ היא נקודת היא

מינימום. לקביעת סוג הקיצון ניתן להיעזר בחישוב נקודות נוספות. למשל, בנקודה (0.5,3.4) משמאל ל- (1,e) ובנקודה (2,3.8) מימינה.



ה) התכונות שהתקבלו עד כה לא מספיקות לשרטוט הגרף בכל תחום ההגדרה, יש צורך בעוד מידע, כמו זה שניתן בסעיף ו', כדי להשלים את הסקיצה.

ו) כדי להגיע למשוואות האסימפטוטות יש להיעזר באסטרטגיה של הצבת מספרים שנלמדה בתחילת הפרק. משוואות האסימפטוטות: $x = 0$, $y = 0$.

תרגיל 2

כאשר פונקציות מופיעות בצורה של מנה, כפי שרואים כאן בתרגיל, יש לכתוב אותן כמכפלה של $\frac{1}{x}$ בפונקציה אחרת, לצורך מציאת הנגזרת. אפשר לגוון את התרגיל אם מוסיפים ושואלים האם הפונקציה עולה/יורדת בנקודה מסוימת.

א) $y = 2e^x \cdot \frac{1}{x} \quad \Leftarrow \quad y' = 2e^x \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{1}{x^2}) \cdot 2e^x$

(אפשר גם לרשום כך: $y' = \frac{2e^x}{x} - \frac{2e^x}{x^2}$).

ב) $y = \frac{e^x}{2x} + x \quad \Leftarrow \quad y' = e^x \cdot \frac{1}{2x} + (-\frac{1}{2x^2}) \cdot e^x + 1$

ג) $y = (e^x + 1) \cdot \frac{1}{x} \quad \Leftarrow \quad y' = e^x \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{1}{x^2}) \cdot (e^x + 1)$

ד) $y = (e^x + x^2) \cdot \frac{1}{x} \quad \Leftarrow \quad y' = (e^x + 2x) \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{1}{x^2}) \cdot (e^x + x^2)$

ה) $y = (2e^x + x^3) \cdot \frac{1}{x} \quad \Leftarrow \quad y' = (2e^x + 3x^2) \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{1}{x^2}) \cdot (2e^x + x^3)$

ו) $y = (e^x + 1) \cdot (\frac{1}{x} + 1) \quad \Leftarrow \quad y' = e^x \cdot (\frac{1}{x} + 1) + (-\frac{1}{x^2}) \cdot (e^x + 1)$

תרגיל 3

א) תחום ההגדרה של הפונקציה $x \neq 0$.

ב) נקודת החיתוך עם ציר x: $(-0.5,0)$.

ג) $y' = e^x(\frac{1}{x}+2)+(-\frac{1}{x^2})\cdot e^x$.

את המשוואה המתקבלת מהשוואת הנגזרת לאפס ניתן לפתור בשני אופנים:

(i) הוצאת גורם משותף תחילה $(e^x(\frac{1}{x}+2-\frac{1}{x^2})=0)$ ופתרון המשוואה

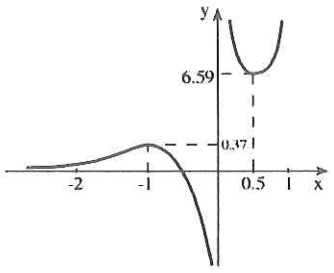
$$\frac{1}{x}+2-\frac{1}{x^2}=0$$

(ii) לפתוח סוגרים, לכפול ב- x^2 ולפרק לגורמים, בסוף התהליך מתקבלת המשוואה: $2x^2 + x - 1 = 0$. פתרונות המשוואה $x = 0.5$, $x = -1$.

נקודות הקיצון: $(-1,0.37)$ מקסימום. (נקודת החיתוך עם ציר x והנקודה $(-2,0.2)$ עוזרות לקבוע את סוג הקיצון.)

$(0.5,6.59)$ מינימום. (הנקודות: $(3,8.15)$, $(0.25,7.7)$ עוזרות לקבוע את סוג הקיצון.)

ד)



תרגילים

4. א) $x = 1$ ב) $x = -0.77$, $x = 0.43$ ג) $x = \frac{1}{3}$ ד) $x = -0.5$, $x = 0.5$

5. א) תחום ההגדרה $x \neq 0$.

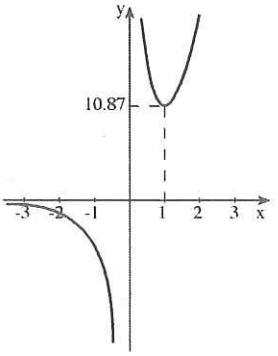
ב) אין נקודות חיתוך עם הצירים.

ג) נכתוב את הפונקציה כמכפלה: $y = 4e^x \cdot \frac{1}{x}$.

נגזרת הפונקציה: $y' = 4e^x \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{1}{x^2}) \cdot 4e^x$

מהשוואת הנגזרת לאפס מתקבל $x = 1$ כפתרון של המשוואה. לכן, $(1,10.87)$ היא נקודת מינימום.

ד)



ה) הפונקציה עולה בתחום $x > 1$.

הפונקציה יורדת בתחומים: $x < 0$, $0 < x < 1$.

6. א) תחום ההגדרה $x \neq 0$.

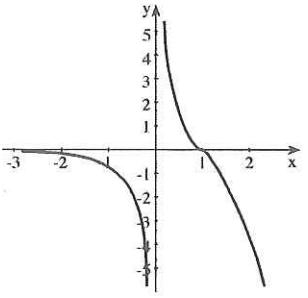
ב) $(1,0)$ נקודת חיתוך עם ציר x.

ג) נגזרת הפונקציה: $y' = e^x \cdot (\frac{1}{x} - 1) + (-\frac{1}{x^2}) \cdot e^x$.

מהשוואת הנגזרת לאפס ופישוט מתקבלת המשוואה: $x^2 - x + 1 = 0$

ולה אין פתרון , לכן אין נקודות קיצון.

ד)



ה) הפונקציה עולה בתחומים: $x < 0$, $x > 0$ (כלומר בכל תחום הגדרתה).

משוואת משיק (עמודים 271-274 בספר לתלמיד)

מהלך הסעיף

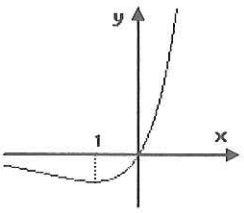
בעבר תלמידים למדו למצוא משוואת משיק בעזרת גרף ובעזרת הנגזרת, כאשר נשמר הקשר בין שיפוע המשיק לשיפוע גרף הפונקציה. בסעיף זה מוצאים משוואות משיקים לפונקציות שהייצוג שלהן כמכפלה של פונקציות כאלו שנלמדו בפרק זה. כדי למצוא את שיפועים של המשיקים נעזרים בנגזרת של מכפלה.

בשאלה הראשונה משתמשים בשרטוט של כל סוג של פונקציות : עם e^x ועם $\sqrt{x}$ כדי לבדוק את הקשר בין שיפוע המשיק או משוואת המשיק, לשיפוע גרף הפונקציה וכן לבדיקת הגיוניות התוצאה שמתקבלת כמשוואת המשיק. בגלל מורכבות הפונקציות אנו מציעים להיעזר במחשב/מחשבון גרפי.

תרגיל 1

תרגיל זה עוסק בשיפועים שונים מבחינה איכותית (אפס, חיובי, שלילי) ומבחינה כמותית- חישוב ערך השיפוע. תחילה בעזרת חוק הפונקציה מוצאים נגזרת, קובעים מתי הנגזרת מתאפסת, ומשרטטים את המשיק לגרף. לאחר מכן מוצאים נקודות בהן השיפוע חיובי/שלילי, תוך שילוב החוק והגרף.

אין שנתות על הצירים ולכן מתבקשים למצוא תחילה את שיעור x שעבורו הנגזרת מתאפסת, בעזרת זאת והשרטוט אפשר לדעת מתי הנגזרת חיובית/שלילית ולענות על סעיף ב'.



א) $f'(x) = 0$. $f'(x) = 3\cdot e^x + 3x\cdot e^x$

לכן $3\cdot e^x + 3x\cdot e^x = 0$. לאחר הוצאת גורם משותף

$3\cdot e^x (1+ x) = 0$. מכאן $x = -1$.

לפי הגרף רואים שנקודת הקיצון היא מינימום.

ב) מסעיף א' ומהשרטוט ניתן להסיק שבכל נקודה על הגרף בה $x > 1$, השיפוע חיובי. כמו כן בכל נקודה על הגרף בה $x < 1$, השיפוע שלילי.

בסעיפים הבאים יש אותה מטלה אך בניסוח ובסימון שונה.

ג) שיפוע המשיק בה $x = -3$ הוא 0.3-.

ד) $f'(3) = 241.03$.

תרגיל 2

בתרגיל משתמשים במשמעות של ערכי השיפועים המתקבלים כדי לבדוק תכונות נוספות של הפונקציה. מחשבים את השיפועים בשתי נקודות ובודקים אם יש לפונקציה נקודות קיצון, גם בלי לשרטט את הפונקציה.

את התוצאות ניתן לרשום בעזרת e, או כמספרים.

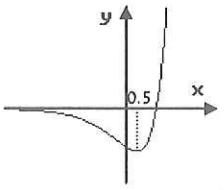
א) $(2, e^2)$ או $(2,7,39)$, $f'(2) = 3e^2 > 0 \Leftarrow f'(x) = e^x(2x-3) + 2e^x$.

ב) $(-1, -5e^{-1})$ או $(-1,-1.84)$, $f'(-1) = -3e^{-1} < 0$.

ג) - לפונקציה יש נקודת קיצון כי לפי סעיף א' יש נקודת עלייה ולפי סעיף ב' יש נקודת ירידה, והפונקציה מוגדרת לכל x. (כלומר יש תחום שבו הפונקציה עולה וכן תחום שבו הפונקציה יורדת), לכן יש לפחות נקודה אחת שהיא מעבר מירידה לעלייה. במקרה זה נקודת הקיצון היא יחידה כי הנגזרת מתאפסת רק עבור $x = 0.5$. הנקודה $(0.5,-3.3)$ היא נקודת מינימום כי מסעיף א' התקבל שהפונקציה יורדת עבור $x = -1$ ולכן יורדת בתחום $x < 0.5$, ולפי סעיף ב' התקבל שהפונקציה עולה עבור $x = 2$, ולכן עולה בתחום $x > 0.5$.

- עבור כל ערך $x < 0.5$ נקבל שיפוע שלילי, מספיק לרשום ערך אחד.

על סמך נתונים אלה ניתן לשרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



תרגיל 3

בתרגיל זה מוצאים משוואת משיק, לאחר שמחשבים שיפועים בנקודות שונות.

א) לקביעת סימן הנגזרת ניתן להיעזר באחת מהדרכים הבאות:

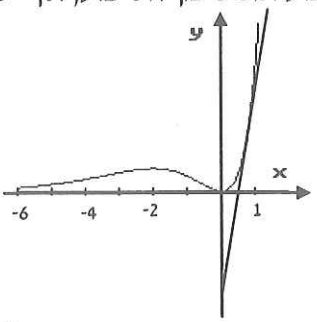
(a) להציב כל אחת מהנקודות בנגזרת הפונקציה: $f'(x) = 2xe^x + e^x x^2$

(i) $f'(-0.5) = -0.75e^{-0.5} < 0$ (ii) $f'(0) = 0$ (iii) $f'(1) = 3e > 0$.

(b) למצוא שיעורי x עבורם הנגזרת מתאפסת : $x = -2$, $x = 0$, ובעזרת הגרף ניתן לקבוע שסימן הנגזרת ב- $x = -0.5$ הוא שלילי וב- $x = 1$ הוא חיובי.

הערה:

אומנם אפשר להניח ישרים בנקודות הנתונות ולקבוע את סימן השיפוע, אך יש לאשר זאת גם בדרך האלגברית.



ב) $f'(1) = 3e = 8.15$

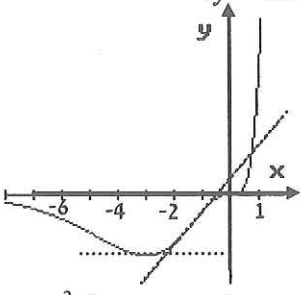
ג) במציאת שיפוע המשיק ומשוואת המשיק של פונקציה הקשורה עם e^x מקבלים לרוב מספרים לא שלמים ולכן יש הדרכה למציאת משוואת משיק.

שיעור y של הנקודה : $e \approx 2.72$. משוואת המשיק $y = 8.15x - 5.43$

חשוב להדגיש שנקודת ההשקה משותפת לגרף ולמשיק.

תרגיל 4

א) משוואת המשיק בנקודה בה $x = -1$: $y = 0.74x + 0.37$.



ב,ג) משורטטת הפונקציה ושני המשיקים

בנקודה $x = -1$ ובנקודה $x = -3$.

משוואת המשיק בנקודה בה $x = -3$ היא:

$y = 1.34$.

סעיף נוסף לתרגיל זה : רשמו את משוואות המשיקים לפונקציה : $y = -x^3e^x$ בנקודות בהן $x = -1$, $x = -3$.

תרגיל 5

א) נגזרת הפונקציה : $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.5x - 2) + 0.5 \cdot \sqrt{x}$.

שיפוע המשיק בנקודה בה x =1 הוא 0.25- . שיעורי הנקודה (1,-1.5).

משוואת המשיק: $y = -0.25x - 1.25$.

ג) ניתן למצוא נקודה בה השיפוע חיובי בכמה אופנים:

- למצוא תחילה את נקודת הקיצון ולבחור נקודה מימינה (שיעור x של נקודת הקיצון: $x = \frac{4}{3}$ ולפי הגרף זו נקודת מינימום.
- לבחור נקודה שמימין לנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר x שקל למצוא אותה למשל, $x = 4$.
- לבחור נקודה עם שיעור x גדול במיוחד.

תרגילים

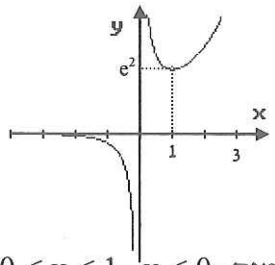
בתרגילים ישנן מכפלות עם פונקציות נוספות כמו: $\frac{1}{x}$ ופונקציות מורכבות.

6. גם פה כאשר עוסקים בפעם הראשונה במכפלה עם $\frac{1}{x}$ מופיע שרטוט הפונקציה, ובודקים בעזרתו את הגיונית התשובות.

נגזרת הפונקציה: $y' = e^x \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{1}{x^2}) \cdot e^x$.

א) (i) משוואת המשיק בנקודה בה $x = 2$: $y = 1.85x$.

(ii) משוואת המשיק בנקודה בה $x = 1$: $y = e \approx 2.72$. בכיתה אפשר לדון בשאלה מאיזה סוג יכולה להיות נקודה זאת. ניתן לבדוק בסעיף הבא.



סעיף נוסף לתרגיל:

היעזרו בגרף הפונקציה הנתונה ובידקו אם יש נקודה נוספת על גרף הפונקציה בה השיפוע הוא 1.85.

(תשובה: אין נקודה נוספת בה השיפוע 1.85 כי בתחומים: $x < 0$, $0 < x < 1$ הפונקציה יורדת , ובתחום $x > 1$, קצב השינוי הולך וגדל.)

7. א) שיעורי הנקודה: (2,5.66). נגזרת הפונקציה: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 + 2x \cdot \sqrt{x}$.

לכן שיפוע המשיק בנקודה זו הוא 7.07 ומשוואת המשיק בנקודה

$y = 7.07x - 8.49$.

8. א) שיעורי הנקודה: (4,24). נגזרת הפונקציה: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2 - 4) + 2x \cdot \sqrt{x}$.

לכן שיפוע המשיק בנקודה זו הוא 19 ומשוואת המשיק $y = 19x - 52$.

9. א) נגזרת הפונקציה: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2 - x) + (2x - 1) \cdot \sqrt{x}$.

משוואת המשיק בנקודה בה $x = 2$: $y = 4.95x - 7.07$.

ב) נגזרת הפונקציה: $y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot (3x^3 - x + 2) + (9x^2 - 1) \cdot 2\sqrt{x}$.

משוואת המשיק בנקודה בה $x = 1$: $y = 20x - 12$.

בתרגילים 10-11 אחת מהפונקציות היא מורכבת.

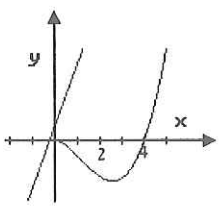
10. נגזרת הפונקציה: $y' = e^{2x} + (x + 7) \cdot 2\, e^{2x}$.

משוואת המשיק בנקודה בה $x = -1$: $y = 1.76x + 2.57$.

11. נגזרת הפונקציה: $y' = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (-2x) \cdot (2x + 4) + 2 \cdot \sqrt{4 - x^2}$.

משוואת המשיק בנקודה בה $x = -1$: $y = 4.62x + 8.08$.

12. משתמשים במחשב להבין שוב את משמעות המשיק.



מגרף הפונקציה ניתן לראות כי אפשר להעביר משיק מקביל לישר הנתון בנקודה אחת בלבד.

גם בעזרת הילוך עם משיק מקבלים במחשב, בחלון מידע, שניתן להעביר רק משיק אחד כזה.

משוואת המשיק: $y = 4x - 16$ ונקודת ההשקה היא: (4,0).

פרק ז : מבחר בעיות קיצון (עמודים 275-305 בספר לתלמיד)

מבוא

בעיות הקיצון משולבות בספר זה בפרקים הקודמים: בפרק א'- פונקציות מנה, ובפרק ב'- פונקציה מורכבת וכן בספרים אחרים מסדרת ש"י כמו: "מסלולים היקפים ושטחים", "מבוא לאנליזה". לשילוב בעיות קיצון שתי מטרות: האחד להראות שימוש בכלים המתמטיים שבעזרתם לומדים לחקור בעיות מחיי היומיום, והאחרת, חקירת בעיות קיצון הקשורות לסיפור, מאפשרת בדיקת האלגוריתם לחקירה על-ידי הגיוניות התוצאות המתקבלות.

בפרקים הקודמים בספר זה שולבו מספר בעיות קיצון, ובפרק זה נרחיב ונעסוק בבעיות מסוגים נוספים.

למהלך פתרון שני שלבים:

בשלב הראשון, התלמידים בודקים מקרים פרטיים בעזרת שרטוט ידני או/ו במחשב, כשהמטרה היא להתיידד עם הבעיה ולהבין את משמעותה על בסיס דוגמאות. בשלב השני "בונים" את הפונקציה, חוקרים אותה ועונים על שאלות כלליות.

ברוב הבעיות מקשרים בין המקרים הפרטיים (המיוצגים בעזרת חישובים נומריים וציורים) עם החוק, הגרף וסיפור הבעיה.

גם כאן (כפי שנעשה בפרקים קודמים), חלק מהבעיות נחקרות בשתי גרסאות: בעזרת מחשב וללא מחשב.

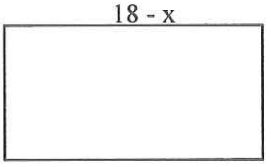
פרק זה מופיע ללא תמרורים, כי השאלות שונות זו מזו ומורים יכולים לשלב שאלות מפרק זה גם בפרקים הקודמים על-פי הפונקציה המתקבלת לחקירה.

שאלה 1

מטרת השאלה היא לבדוק איזה מלבן, מתוך כל המלבנים שהיקפם 36 יחידות, הוא בעל שטח מקסימלי ואיזה בעל שטח מינימלי.

א) אפשר לשרטט מלבנים שונים. מומלץ לבקש מהתלמידים לשרטט גם מלבנים שאורך אחת מצלעותיו אינו מספר שלם. לדוגמה: מלבן שצלעותיו 5.5, 12.5 ושטחו 68.75 יחידות ריבועיות.

ב) אחת הצלעות 5 יחידות, לכן אורך הצלע השנייה 13 יחידות ושטח המלבן 65 יחידות ריבועיות.



ג) אחת הצלעות x, הצלע השנייה 18-x.

שטח המלבן מבוטא בעזרת הפונקציה:

$$s(x) = x(18 - x)$$

ד) למציאת השטח המקסימלי יש לחשב נקודות קיצון לפונקצית השטח. כדי לגזור כדאי קודם לפשט את חוק הפונקציה, למרות שניתן גם לגזור כמכפלה.

$$s(x) = 18x - x^2 \quad \Leftarrow \quad s'(x) = 18 - 2x$$

שיעור x של הנקודה החשודה הוא 9. במקרה זה $s(9) = 81$, ולמלבן צורת ריבוע. את הבדיקה אם הנקודה בה $x = 9$ היא נקודת מקסימום או נקודת מינימום, אפשר לעשות בעזרת המקרים הפרטיים שנבחרו בסעיף א'. מתקבל שהיא נקודת מקסימום, כלומר השטח הוא מקסימלי. מכאן מתקבלת מסקנה גיאומטרית חשובה, שמבין כל המלבנים בעלי אותו היקף, הריבוע הוא בעל השטח המקסימלי.

ה) לאחר שמצאו את נקודת המקסימום בסעיף הקודם, מסמנים אותה בגרף המופיע כאן כדי להדגיש את הקשר בין הגרף לסיפור, שיעורי הנקודה B הם (9,31). שיעורי הנקודות A ו - C מבטאים מלבן ששטחו אפס, כלומר כאשר החוט נמתח כך שהוא בעצם רק צלע אחת על כל האורך.

ו) בסעיף זה עוסקים באותה שאלת חקירה כאשר היקף המלבן הוא 48 יחידות. אין הכוונה לחזור על כל שלבי החקירה. אנו מצפים, שלאחר ההתנסות הראשונה עם מלבן שהיקפו 36 יחידות בו קיבלו שהריבוע עם אותו היקף (שצלעו 9 יחידות) הוא בעל השטח המקסימלי, ישתמשו במסקנה זו כדי

להסיק גם כאן, שהריבוע שצלעו 12 יחידות הוא בעל השטח המקסימלי וגודלו של שטח זה הוא 144 יחידות שטח. כמו כן מצפים שתלמידים יראו שגם כאן מתקבלת פרבולה אלא שנקודות הקצה הן (0,0) ו - (24,0) (המתארות מלבנים ששטחם אפס) וגובה הנקודה המקסימלית יגיע ל – 144.

למורים:

שתי השאלות בתרגיל זה הם שני מקרים פרטיים מתוך משפחה של מקרים בהם נתון היקף של מלבן (a) וצריך למצוא את מידות המלבן ששטחו מקסימלי. במקרה זה חוקרים את פונקציה השטח עם פרמטר a (ההיקף הנתון): $s(x) = x(\frac{a}{2} - x)$. השטח המקסימלי מתקבל עבור ריבוע שצלעותיו $\frac{a}{4}$. הכללה זאת מומלצת בכיתות מתקדמות.

שאלה 2

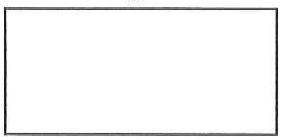
בשאלה זאת השטח נתון וחוקרים את השתנות ההיקף. מומלץ לתת לתלמידים להתנסות בציור מלבנים רבים, כדי לקבל את התחושה של ההשתנות ושל סוג נקודות הקיצון. כלומר שההיקף משלב מסוים הולך וגדל ויש רק היקף מינימלי. הבנה זאת משמשת בסיס ליצירת הגרף ולבדיקת ההתאמה של התבנית וכבסיס לממצאי החקירה. במידה והתנסות זאת לא ממחישה עבור התלמידים את אופי ההשתנות, ניתן להמשיך ולחזור על כך בסעיף ז'.

א) אפשר לשרטט מלבינים שונים. מומלץ גם כאן לבקש מהתלמידים לשרטט גם מלבנים שאורך אחת מצלעותיו אינו מספר שלם. לדוגמה: מלבן שצלעותיו 4.5, 8 והיקפו 25 יחידות ריבועיות.

ב) אחת הצלעות 18 יחידות, לכן אורך הצלע השנייה 2 יחידות והיקף המלבן 40 יחידות

ג) הפונקציה המתארת את ההיקף היא:

$\frac{36}{x}$

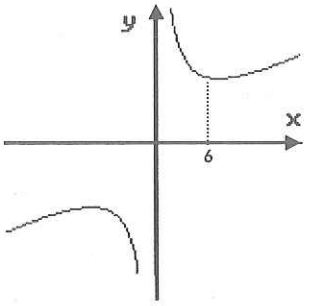


x

$p(x) = 2(\frac{36}{x} + x)$.

ד) נגזרת פונקצית ההיקף: $p'(x) = 2(-\frac{36}{x^2} + 1)$.

מקבלים שאורך אחת הצלעות של המלבן בעל ההיקף המינימלי הוא 6 יחידות. בסעיף הבא התלמידים יבדקו שבעצם גם פה מתקבל ריבוע.

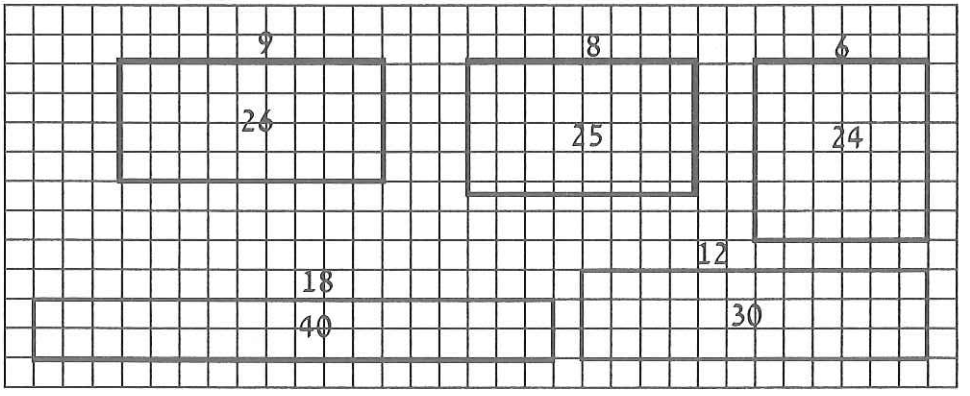


הגרף המתאים לפונקציה הוא :
חשוב להדגיש החלק המתאים לנתוני הבעיה (היקף חיובי) הוא רק עבור $x > 0$.

ה)בסעיף זה חוזרים למשמעות הסיפור ומשרטטים את המלבן המתאים לנקודת הקיצון. במקרה זה מקבלים מלבן שהוא ריבוע, צלעו 6 יחידות והיקפו 24 יחידות.

ו) ההיקף המינימלי הוא 24 יחידות.

ז) לא ניתן לקבל מלבן שהיקפו מקסימלי. אפשר לנמק זאת הן בעזרת הגרף והן בעזרת שרטוט של מלבנים שאורך אחת הצלעות הולכת וגדלה ולכן גם ההיקף ילך ויגדל. בהמשך, משורטטים מלבנים ובתוך כל מלבן רשום ההיקף.



למורים:

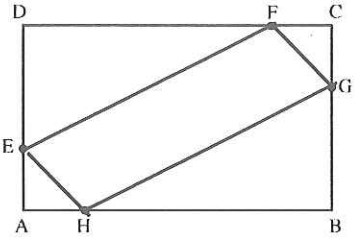
גם שאלה זו, כמו השאלות הקודמות, היא מקרה פרטי מתוך משפחה של מקרים בהם שטח של מלבן נתון (b) וצריך למצוא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי. במקרה זה חוקרים את פונקצית ההיקף עם פרמטר b (השטח הנתון): $p(x) = 2(x + \frac{b}{x})$. השטח המינימלי מתקבל עבור ריבוע שצלעותיו $\sqrt{b}$. הכללה זאת מומלצת בכיתות מתקדמות.

בשאלה 5 (עמוד 288) מתקבלת פונקציה מאותה משפחה.

שאלה 3

בפתרון הבעיה שלושה שלבים:

- שרטוט מקרים פרטיים וחישוב, שרטוט מקביליות שונות בתוך מלבן נתון וחישוב שטחיהן.
- חקירת הבעיה באמצעות מחשב, בעזרת התוכנה "הנדסה בתנועה". המחשב מאפשר לבנות רצף של מקרים פרטיים, וממחיש את ההשתנות בדרך דינמית.
- חוקרים את הבעיה בעזרת בניית הפונקציה ושרטוט הגרף המתאים, ומאמתים את מה שהתקבל בעזרת מחשב (כולל הגרף).



א) המרובע הוא מקבילית כי התקבלו שני זוגות ל משולשים חופפים ולכן $EH = FG$ ולכן $EF = HG$.

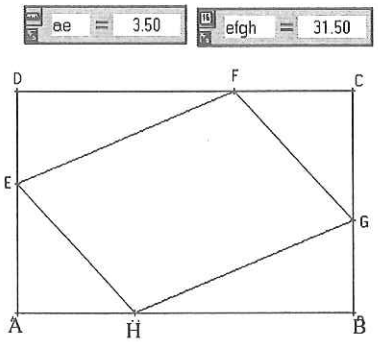
ב) נחשב את שטח המקבילית על-ידי ההפרש בין שטח המלבן הנתון ושטחי המשולשים ישרי הזווית בפינות המלבן:

$10{\cdot}6 - (4{\cdot}8 + 2{\cdot}2) = 60 - 36 = 24$ (למעשה מכל שני משולשים ישרי זווית חופפים מתקבל מלבן, האחד שצלעותיו 4·8 והשני 2·2.)

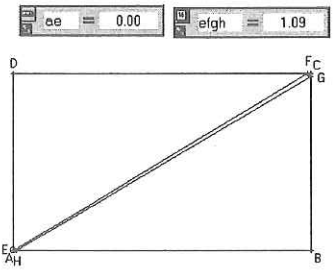
ג) שטח המקבילית: $10{\cdot}6 - (3{\cdot}7 + 3{\cdot}3) = 60 - 30 = 30$

ד) שטח המקבילית: $10{\cdot}6 - 6{\cdot}6 = 60 - 36 = 24$

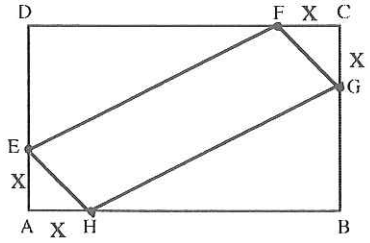
ה) חוקרים את הבעיה על-ידי מחשב בעזרת התוכנה "הנדסה בתנועה" (ניתן להיעזר בכל תוכנה של גיאומטריה דינמית) ובודקים גם את המקרים הפרטיים שבסעיפים הקודמים.



בשרטוט נקודה E עבורה השטח גדול יותר מכל המקרים שחישבנו קודם.
(במקרה זה AE = 3.5)



ו) בשרטוט נקודה E שעבורה השטח הוא אפס. (במקרה זה AE = 0)
הערה: השטח צריך להיות אפס, אך בגלל בעיות התוכנה השטח הרשום:
1.09. וגם הצלעות לא מתלכדות.



ז) הפונקציה המתארת את שטח המקבילית:

$$s(x) = 60 - [x^2 + (6-x)(10-x)]$$

ולאחר פישוט מתקבלת הפונקציה:

$$s(x) = 16x - 2x^2$$

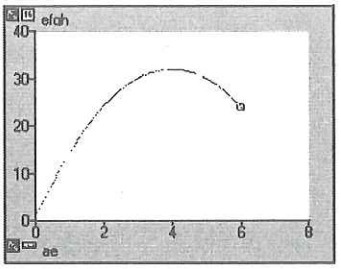
ונגזרת הפונקציה : $s'(x) = 16 - 4x$

הנקודה החשודה כאן מתקבלת עבור $x = 4$. שטח המקבילית במקרה זה הוא 32 יחידות ריבועיות.

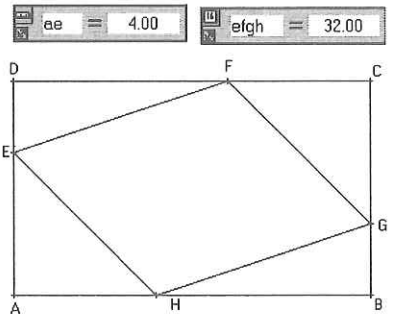
בעזרת המקרים הפרטיים שנבדקו בסעיפים הקודמים קובעים שהנקודה החשודה היא נקודת מקסימום, כלומר כאשר $x = 4$ מתקבלת המקבילית בעלת השטח המקסימלי, ושטחה שווה ל- 32 יחידות ריבועיות.

ח) מתקבל גרף כמו בציור וכדאי לדון על:

- מגבלות התחום. (התחום הוא בין 0 ל- 6).
- מקרים בהם מתקבלות מקביליות עם אותו שטח.



ט) משורטטת המקבילית לה השטח מקסימלי.

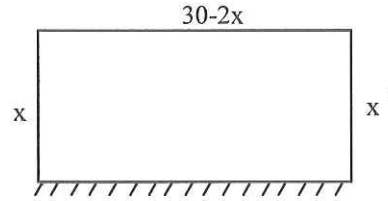


שאלה 4

בשאלה זו אין הדרכה כפי שהיתה בשאלות הקודמות, אך מומלץ להציע לתלמידים לבדוק קודם מספר מקרים פרטיים. בדיקה כזו עוזרת להבין את השאלה, לבנות את הפונקציה המתאימה ולחקור אותה.

הגדר מורכבת משלוש צלעות ששתיים מהן שוות. אפשר לבחור את המשתנה x באחת מהאפשרויות הבאות:

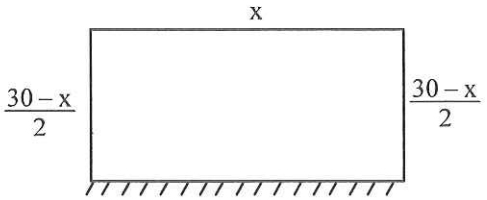
(i) כל אחת מהצלעות השוות תסומן ב- x.



הפונקציה המתארת את שטח החלקה:

$s(x) = (30 - 2x)x$.

(ii) הצלע השונה תסומן ב- x.



הפונקציה המתארת את שטח החלקה: $s(x) = \frac{30-x}{2} \cdot x$.

בכל מקרה יש לפשט תחילה את פונקצית השטח ולמצוא נקודת קיצון בעזרת הנגזרת או בעזרת הנוסחה למציאת קודקוד של פונקציה ריבועית. חשוב לבקש מהתלמידים להתייחס גם לתחום הבעיה. את התחושה לגבי תחום הבעיה תלמידים יכולים לקבל בבחירת המקרים הפרטיים כמומלץ בתחילת השאלה או בשלב של סימון הצלעות.

ממדי החלקה בעלת השטח המקסימלי הם: 7.5 מ', 7.5 מ', 15 מ' ושטחה 112.5 מ"ר.

שאלה 5

בתרגיל נתון שטח חלקה מלבנית (16מ"ר) ובודקים מתי מתקבל מלבן שהיקפו מינימלי. תלמידים הזקוקים להדרכה יוכלו להיעזר בשלבים המפורטים עבור שאלה 2 (עמוד 277 בספר) ולבנות מספר חלקות מלבניות ששטחן 16 מ"ר, ובעזרתם לבנות את פונקצית ההיקף של המלבנים.

מתקבלת הפונקציה: $p(x) = 2(x + \frac{16}{x})$

מתוך חקירת פונקצית ההיקף מקבלים שהחלקה בעלת ההיקף המינימלי היא ריבוע שאורך צלעה 4 מ'. ההיקף המינימלי הוא 16 מ'.

שאלה 6

גם בשאלה זו בודקים תחילה מקרים פרטיים, מסמנים אותם במערכת צירים לקראת שרטוט גרף הפונקציה. חישובים אלה עוזרים להגיע לחוק הפונקציה המתארת את השטח המיועד לדפוס.

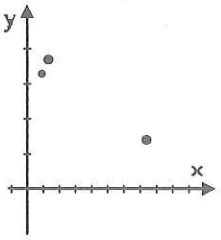
א) כאשר $AB = 15$ ס"מ, מתקבל $CD = 40$ ס"מ, ולכן אורך הצלעות של המלבן המיועד להדפסה הוא: 11 ס"מ ו- 34 ס"מ ושטחו 374 סמ"ר.

ב) אורך הצלע AB צריך להיות גדול מ- 4 ס"מ וקטן מ- 100 ס"מ (כי יש להוריד את השוליים בשתי הצלעות של הדף). בחירה הגיונית עבור AB מתקשרת עם תחום ההגדרה של פונקצית השטח המיועד להדפסה, אותה בונים בסעיף ה'. לדוגמה: $AB = 10$ ס"מ, והשטח הדף המיועד להדפסה יהיה 324 סמ"ר.

ג) כאשר $AB = 75$ ס"מ, מתקבל $CD = 8$ ס"מ, אורך צלעות המלבן המיועד להדפסה הוא: 71 ס"מ ו- 2 ס"מ ושטחו 142 סמ"ר.

במכוון בחרנו ערך קטן יחסית ל- AB (15) וערך יחסית גדול ל- AB (75), כדי שהתלמידים יקבלו תחושה של תחום הבעיה.

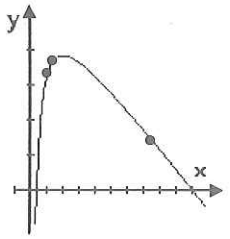
ד)



ה) אם $AB = x$, נקבל $CD = \frac{600}{x}$. ממידי השטח המיועד להדפסה:

$x - 4$, $\frac{600}{x} - 6$, ופונקציית השטח: $s(x) = (x-4)(\frac{600}{x} - 6)$.

ו) תחום הבעיה: $4 \le x \le 100$.



כדי לגזור כדאי לפתוח סוגרים ומקבלים:

$$s(x) = 624 - 6x - \frac{2400}{x} \Leftarrow s'(x) = -6 + \frac{2400}{x^2}$$

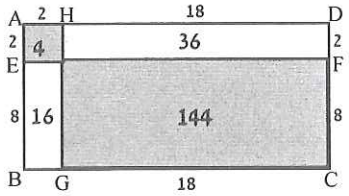
מתקבלות שתי נקודות חשודות, אך רק אחת מהן מתאימה לתחום הבעיה, הנקודה (20,384) היא נקודת המקסימום.

ז) שרטוט מדגים על-פי הערכים שהתקבלו בנקודת המקסימום ממחיש לתלמיד מתקבל כאן מלבן שאורך צלעותיו: 20 ס"מ, 30 ס"מ וממדיו של השטח המודפס 16ס"מ, 24ס"מ.

מכיוון שתחום הבעיה הוא תחום סגור, בין 4 ל- 100 כדאי להתייחס לנקודות הקצה עבור $x = 4$ ו- $x = 100$. בכל אחד משני מקרים אלה מתקבלת נקודת מינימום בה השטח הוא אפס.

שאלה 7

השאלה מוצגת כמשחק ואפשר לפתוח בשאלת השערה עבור איזו בחירה מקבלים שני המתחרים אותם שטחים? השערה זאת תיבדק במהלך הפתרון.
כדאי לרשום בשרטוט את הנתונים, את אורכי הקטעים והשטחים שהם מחשבים.

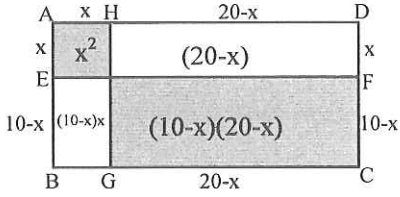


א) השטח הצבוע: 148 סמ"ר,
והשטח הלא צבוע: 52 סמ"ר.

למעשה אפשר לחשב את השטח הלא צבוע בשני אופנים:

- באופן ישיר: $2\cdot 8 + 2\cdot 18$
- על ידי החסרת השטח הצבוע משטח המלבן: 200-148.

ב) השטח הצבוע: 128 סמ"ר והשטח הלא צבוע: 72 סמ"ר



ג) כדי לרשום את התבניות, מומלץ לרשום את הביטויים המתאימים בשרטוט.
הפונקציה g המתארת את השטח הצבוע:

$$g(x) = x^2 + (20 - x)(10 - x)$$

ואחרי פישוט מתקבלת הפונקציה: $g(x) = 2x^2 - 30x + 200$

לפונקציה h המתארת את השטח הלא צבוע אפשר להגיע בשני אופנים:

- על-ידי חישוב שטחי שני המלבנים הלא צבועים:

$$h(x) = (20 - x)x + (10 - x)x$$

- על ידי חיסור של השטח הצבוע משטח המלבן ABCD (200):

$$h(x) = 200 - (2x^2 - 30x + 200)$$

בשני המקרים מתקבלת הפונקציה: $h(x) = 30x - 2x^2$.

ד) בסעיף הקודם רשמנו את הפונקציות המתארות את שני השטחים. מתחילים בשאלת המקסימום לגבי השטח הלא צבוע, אותו מוצאים בעזרת הנגזרת

של הפונקציה h או על-ידי מציאת הקודקוד של הפונקציה הריבועית המתארת את הפונקציה h. השטח המקסימלי הלא צבוע (112.5 סמ"ר) מתקבל כאשר בוחרים AE = 7.5.

אפשר לשאול את התלמידים: מתי לדעתם מתקבל שטח צבוע מקסימלי. (המקסימום מתקבל בקצה התחום) השערתם תיבדק בסעיפים הבאים, בעזרת הגרף.

ייתכן ותלמידים יגיעו למסקנה כי השטח הצבוע המכסימלי מתקבל במקרה בו השטח הלא צבוע מינימלי אשר מתקבל בקצה התחום של הפונקציה h.

ה) המשך חקירת הבעיה נעשה בעזרת הגרפים של שתי הפונקציות המשורטטות. לפונקציה g מתאים הגרף שנקודה B עליו, ולפונקציה h מתאים הגרף שהנקודה A עליו.

הנקודה A היא נקודת המקסימום של הפונקציה h המתארת את השטח הלא צבוע ושיעוריה חושבו בסעיף ד' A(7.5,112.5).

הנקודה B היא נקודת המינימום של השטח הצבוע ושיעוריה: B(7.5,87.5).

משמעות הנקודות C ו-D היא הבחירה של AE שעבורה שני השטחים יהיו שווים: במקרה זה מתקבל "תיקו" במשחק. שיעורי הנקודות הם: C(5,100) D(10,100). כדאי לדון עם התלמידים על כך ששיעור x של הנקודה C מתארות למעשה מצב שבו AE שנבחרה היא מחצית הצלע AB ושיעור x של הנקודה D (הערך של AE בנקודה D) היא מחצית הצלע AD, עובדה שמצביעה על כך שהמלבן חולק לשני חלקים השווים בשטחם (וייתכן שתלמידים התייחסו לזה בתחילת התרגיל כפי שהומלץ).

ו) סעיף זה מתייחס לנקודות החיתוך של שני הגרפים עם ציר y:

נקודת החיתוך של g עם ציר y מתארת שטח צבוע מקסימלי המתקבל כאשר AE = 0, במקרה זה השטח הוא 200 סמ"ר.

נקודת החיתוך של h עם ציר y מתארת שטח לא צבוע מינימלי שהוא 0. ברור שכאשר השטח הצבוע הוא מקסימלי אז השטח הלא צבוע הוא מינימלי וזה נכון גם לגבי הנקודות A ו-B שראינו בסעיף ה'.

ז) על-פי הגרף עבור בחירה של AE בין 5 ל- 10 (במקרה זה הגרף של h מעל הגרף של g) נותנת יתרון למשתתף שלא צובע. עבור בחירה של AE בין 0 ל- 5 יש יתרון למשתתף הצובע (ואפשר לכלול את הבחירה של 0 גם במשחק).

שאלה 8

סעיף א' עוסק באפיון צורת חלקות הגינה: כל חלקה היא משולש ישר זווית ושווה שוקיים. תלמידים למדו לזהות תכונות גיאומטריות בלימודי הטריגונומטריה או/ו הגיאומטריה האנליטית.

א) ניתן להסביר את סוג המשולש על-פי תכונת אלכסוני הריבוע שהם מאונכים, שווים זה לזה וחוצים זה את זה. ואז לחשב את הזוויות. אפשר גם להיעזר בתכונה של האלכסונים החוצים את הזוויות, ולכן כל זווית בת 45^0.

ב)(i) לשיקול דעתו של המורה: ניתן לדון בכיתה בשאלה למה משולש DAM הוא שווה שוקיים (זווית DMA ישרה כי EDML מלבן. זווית A שווה ל- 45^0, לפי סעיף א', לכן זווית ADM שווה ל- 45^0, ולכן המשולש שווה שוקיים).

אם MD = 3, MA = 3 לכן LM = 10, ולכן שטח הדשא 30 מ"ר.

(ii) אם MD = 7, שטח הדשא 14 מ"ר.

ג) אם MD = x, הפונקציה המתארת את שטח הדשא: $s(x) = (16 - 2x)\cdot x$.

מתקבלת פונקציה ריבועית, ניתן לחקור אותה בעזרת הנגזרת או בעזרת הידע שיש לתלמידים על פונקציה ריבועית.

עבור בחירה של x = 4 יתקבל שטח מקסימלי שגודלו: 32 מ"ר.

כדאי לדון עם התלמידים על המשמעות של התוצאה שהתקבלה. השטח שכל בית קיבל לגינה הוא 64 מ"ר ולכן השטח המקסימלי המוקצב לדשא (בצורת מלבן חסום במשולש) הוא מחצית משטח החלקה.

שאלות 9-11 ו- 13-14 עוסקות במרחב.

שאלה 9

השאלה מופיעה בספר פונקציות של מכון ויצמן מסדרת מתימחשב וייתכן שתלמידים כבר ראו את השאלה הזו. השאלה נכנסה גם כאן כדי שתלמידים יעזרו בכלים באנליזה לצורך חקירתה. כדי להמחיש את התיבות המתקבלות אפשר להביא לכיתה תיבות אחדות, כולל הדוגמאות המשורטטות בשלושת הסעיפים הראשונים של השאלה.

א) אורך בסיס התיבה הוא 8 יחידות ונפח התיבה 128 יחידות נפח.

ב) אורך בסיס התיבה הוא 10 יחידות ונפח התיבה 100 יחידות נפח.

ג) אורך בסיס התיבה הוא 4 יחידות ונפח התיבה 64 יחידות נפח.

ד) בעזרת המקרים הפרטיים שנבדקו רושמים את הפונקציה:

$v(x) =(12 - 2x)^2x$, ולאחר פישוט: $v(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

ה) אם $x = 2$ מתקבלת תיבה שמימדיה הם: 2, 8, 8 בעלת הנפח המקסימלי: 128 יחידות נפח.

ו) תחום הבעיה: x בין 0 ל-6, אי לכך יש לצבוע את חלק הגרף המתאים לתחום זה.

אפשר לדון בכיתה לגבי המקרים הגבוליים: כאשר $x = 0$, גובה התיבה הוא 0, לכן הנפח 0 (אפשר לראות זאת בעזרת הצבה בנוסחה, או בעזרת הריבוע המשורטט). כאשר $x = 6$ אורך צלע בסיס התיבה הוא 0, לכן נפח התיבה הוא 0. (גם במקרה זה ניתן להיעזר בנוסחה או בשרטוט).

שאלה 10

א) עבור אורך צלע הבסיס 2 ס"מ, הגובה הוא 27 ס"מ וסכום שטחי חמשת הפאות 220 סמ"ר.

עבור אורך צלע הבסיס 3 ס"מ, הגובה הוא 12ס"מ וסכום שטחי חמשת הפאות 153 סמ"ר.

עבור אורך צלע הבסיס 6 ס"מ, הגובה הוא 3 ס"מ וסכום שטחי חמשת הפאות 108 סמ"ר.

ב) x צלע בסיס הקופסה, גובה הקופסה: $h(x)=\frac{108}{x^2}$. סכום שטחי חמשת הפאות: $s(x)=x^2+\frac{432}{x}$ (גם כאן כדאי לשרטט תיבה ולרשום בה את הביטויים המתאימים.)

כאן שואלים רק על השטח המינימלי. אפשר להפנות את תשומת ליבם של התלמידים לתבנית הפונקציה כדי לדון מדוע אין מקסימום לפונקציה.

על סמך אופי התבנית המתארת את הפונקציה: עבור ערכי x קטנים מ - 1 החלק הדומיננטי בתבנית הוא $\frac{432}{x}$ ומתקבלים ערכים שהולכים וגדלים ככל שמתקרבים ל - 0 מימין. עבור ערכי x גדולים, החלק הדומיננטי בתבנית הוא x^2 ומתקבלים ערכים שהולכים וגדלים עבור ערכי x שגדלים.

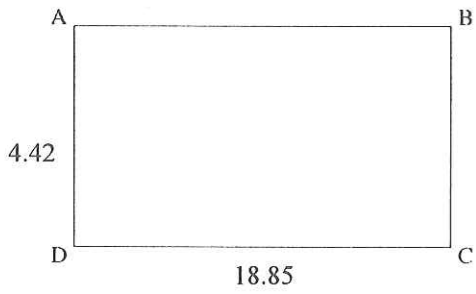
שאלה 11

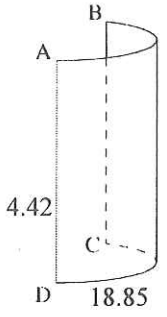
בשאלה מתקבלת פונקציה שדומה לפונקציה בשאלה הקודמת רק הגוף הוא גליל. יש כאן תזכורת למציאת שטח מעטפת של גליל בגלל השוני במציאתו מזה של מעטפת של מנסרה.

א) בסעיף זה מחשבים בשלבים ותוך הדרכה את הגובה של הגליל, את היקף הבסיס, את שטח המעטפת ובסוף את שטח הפנים.

(i) הגובה הוא: 4.42 ס"מ. (ii) היקף בסיס הקופסה 18.85 ס"מ.

(iii)





שטח המעטפת: 83.32 סמ"ר. (בספר כתוב ס"מ).

(iv) סכום שטחי הבסיסים: 56.55 סמ"ר, שטח הפנים: 139.87 סמ"ר (הכולל בסיסים + מעטפת).

ב) גם כאן המטרה היא שתלמידים יחשבו את שטח הפנים בשתי דוגמאות נוספות. אין כאן הדרכה אבל תלמידים יכולים להיעזר בהדרכה שניתנה בסעיף א'.

רדיוס: 5 ס"מ	רדיוס: 2 ס"מ
גובה: 1.59ס"מ	גובה: 9.95 ס"מ
שטח המעטפת: 49.95 סמ"ר	שטח המעטפת: 125 סמ"ר
שטח הפנים: 207.08 סמ"ר	שטח הפנים: 150.13 סמ"ר

ג) הפונקציה המתקבלת עבור הגובה: $f(x)=\frac{125}{\pi\cdot x^2}$

הפונקציה המתקבלת עבור שטח הפנים: $s(x)=2x^2+\frac{250}{x}$

ד) עבור $x=2.71$ מתקבל השטח המינימלי שהוא 138.4 סמ"ר.

ה) החלק המתאים בגרף לשאלה הוא בתחום $x>0$.

שאלה 12

תרגול של משוואות עם שורש. בגלל השורש יש הגבלה של תחום ההצבה. אין צורך למצוא את תחום ההצבה, כדאי לפתור ולבדוק את הפתרונות על-ידי הצבה במשוואה הנתונה.

א) $x=2$ (הפתרון $x=-1$ אינו מתאים).

ב) $x=4$.

ג) $x=4\ ,\ x=-4$.

ד) $x=5$ (הפתרון $x=-1$ אינו מתאים).

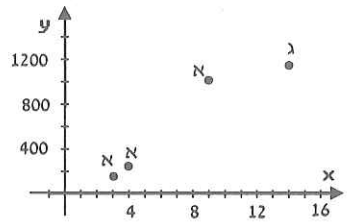
שאלה 13

בשאלה מתייחסים לנפחם של חרוטים שונים בעלי אותו אורך של הקו היוצר (15 ס"מ).

א) (i) גם פה (כמו במקרים קודמים) כדאי להמליץ לתלמידים לרשום בשרטוטים של החרוטים את הגדלים שחשבו.

$r=3$ ס"מ	$r=4$ ס"מ	$r=9$ ס"מ
$h=14.7$ ס"מ	$h=14.46$ ס"מ	$h=12$ ס"מ
$v=138.51$ סמ"ק	$v=242.23$ סמ"ק	$v=1017.88$ סמ"ק

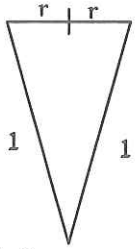
(ii) שלושת הנקודות המתאימות לסעיף (i) מסומנות באות א.



כדאי להסב את תשומת ליבם של התלמידים ליחידות שנבחרו על ציר y, זה יכול לעזור לתלמידים לבחור את היחידות על ציר y בתרגיל הבא.

(iii) מנצלים את הדוגמאות הפרטיות כדי שתלמידים יחשבו על משמעות המספרים והקשר בין הדוגמאות הפרטיות. המקרים הפרטיים נותנים תחושה שכמות הגלידה תלך ותגדל אך מיד אחרי זה יש בדיקה בעזרת החקירה.

ב) מכיוון שצריכים לבנות חרוט שאורך הקו היוצר הוא נתון (15) , נסתכל על החתך הצירי של החרוט:



ולכן, ערכי הרדיוס שאפשר לבחור הם בין 0 ל- 15.

ג) הנפח המתקבל כאן עבור רדיוס 14 ס"מ הוא 1105.31 סמ"ק, וזה מחזק את ההשערה השגויה שהפונקציה כל הזמן עולה. (הנקודה מסומנת באות (ג) בשרטוט בסעיף א')

ד) רדיוס בסיס העליון x לכן כמות הגלידה: $g(x)=\frac{1}{3}\pi\cdot x^2\cdot\sqrt{225-x^2}$.

ה) הפונקציה המתקבלת היא מורכבת מבחינת הגזירה, כי היא מכפלה של הפונקציות: x^2 ו- $\sqrt{225-x^2}$, כאשר הפונקציה האחרונה היא פונקציה מורכבת ולכן סעיף זה מסומן כאתגר.

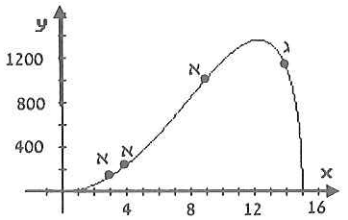
מומלץ להגיע לפונקציה הנגזרת יחד עם התלמידים:

$$g'(x)=\frac{1}{3}\pi(2x\sqrt{225-x^2}+\frac{1}{2\sqrt{225-x^2}}(-2x)\cdot x^2)$$

המקסימום מתקבל כאשר הרדיוס הוא 12.25ס"מ עבורו הנפח 1360.35 סמ"ק. מכאן שהנקודה שהתקבלה עבור רדיוס 14 ס"מ היא נקודת ירידה ולא נקודת עליה.

הערה:

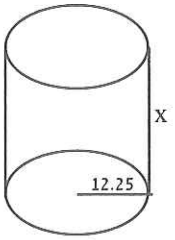
כאן, לאחר קבלת חוק הפונקציה אפשר לחזור ולראות שוב את תחום ההגדרה כפי שהתקבל לפי הסיפור בסעיף ב'.



ו) כדי למצוא את גובה הגליל יש לפתור את המשוואה:

$$1360.35=\pi\cdot 12.25^2\cdot x$$

גובה הגליל הוא 2.88 ס"מ.



שאלה 14

כאן מתייחסים לחרוט כגוף סיבוב כפי שנעשה בהנדסת המרחב. השאלה דומה לשאלה הקודמת אלא שכאן גובה החרוט משתנה (x) ולכן הפונקציה אותה חוקרים היא פולינום.

א) מתקבל חרוט שהקו היוצר שלו 13 יחידות. אפשר להדגים, כפי שנעשה בהנדסת המרחב, על-ידי הכנת דגל כמו שמשורטט בספר.

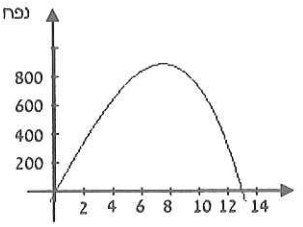
ב) (i) 753.98 יחידות נפח.

(ii) 879.65 יחידות נפח.

(iii) 722.57 יחידות נפח.

ג) התחום מתקבל מהגבלות על הצלעות של משולש ישר הזווית ABC (מאותם נימוקים שניתנו בשאלה קודמת). גובה החרוט יכול להיות בין $x = 0$ ל- $x = 13$.

ד)



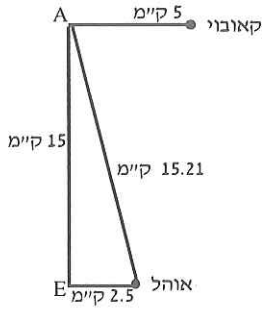
ה) נפח גוף הסיבוב : $v(x) = \frac{1}{3}\pi(169 - x^2) \cdot x$

ו) הגובה עבורו מתקבל הנפח המקסימלי הוא 7.5 יחידות והנפח המקסימלי הוא 885.54 יחידות נפח.

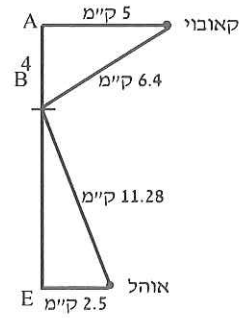
שאלה 15

כמו בשאלות קודמות גם כאן בודקים מקרים פרטיים המלווים בשרטוט המסלולים השונים ובחישובים מתאימים ובסעיף ד' רושמים את הפונקציה המתארת את המסלול.

א) המרחק הוא 20.21 ק"מ.



ב) מרחק 17.68 ק"מ



ג) המרחק 16.92 ק"מ.

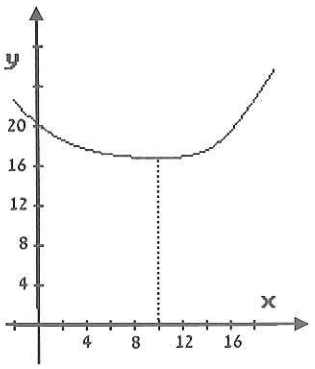
ד) (i)
$$m(x)=\sqrt{25+x^2}+\sqrt{2.5^2+(15-x)^2}=$$
$$=\sqrt{25+x^2}+\sqrt{x^2-30x+231.25}$$

(ii) נגזרת הפונקציה:
$$m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{25+x^2}}\cdot 2x+\frac{1}{2\sqrt{x^2-30x+231.25}}\cdot(2x-30)$$

כאשר $x=10$ מתקבל מרחק מינימלי והוא 16.77 ק"מ.

כדאי להתייחס גם בבעיה זו לתחום ההגדרה למרות שלא נשאלים, וכן להוסיף שרטוט (להלן) ולקשר לגדלים השונים שחושבו.

הגרף המתאים:



ה) פתרון שאלה זו נותן פתרון ויזואלי (ללא שימוש בנגזרת) קבלת שיעור x של המסלול המינימלי של הקאובוי, מהסעיף הקודם. כמובן שמתקבלת אותה תשובה.

שאלה 16

בשאלה זו נתונה הפונקציה שמתארת את עלות הבניה.

א) עלות הבניה עבור בנין עם קומה אחת היא $800,000.

עלות הבניה עבור בנין עם שתי קומות היא $900,000.

עלות הבניה עבור בנין עם שלוש קומות היא $1,050,000.

עלות הבניה עבור בנין עם ארבע קומות היא $1,250,000.

ב) בשאלה חוקרים את הפונקציה המתארת את העלות הממוצעת לכל קומה. מכנים פונקציה זו באות g והיא מתקבלת מהפונקציה f על-ידי חילוק ב - x (מספר הקומות).

(i) עלות ממוצעת לקומה עבור בנין עם קומה אחת $800,000.

עלות ממוצעת לקומה עבור בנין עם שתי קומות $450,000.

עלות ממוצעת לקומה עבור בנין עם שלוש קומות $350,000.

עלות ממוצעת לקומה עבור בנין עם ארבע קומות $312,000.

(ii) העלות הממוצעת המינימלית מתקבלת עבור בנין עם חמש או שש קומות.

ג) הגרף הוא בדיד כי מספר הקומות x הוא מספר שלם.

הגרף מפתיע כי יש תחושה שככל שמספר הקומות רב יותר העלות הממוצעת לקומה היא נמוכה יותר. אבל מתוך הגרף רואים שיש עליה אחרי חמש ושש קומות, כפי שהתקבל בסעיף הקודם. יחד עם זאת העליה היא מתונה מאד ביחס לשאר הגרף וייתכן שהסיבה היא שאין הבדל גדול בעלויות כאשר עוברים קומה מסוימת, במקרה זה השישית, כי ממילא צריך להעלות את כל חומרי הבניה, ומערך ההעלאה כבר נבנה לצורך הקומות הקודמות.

שאלות 17-19

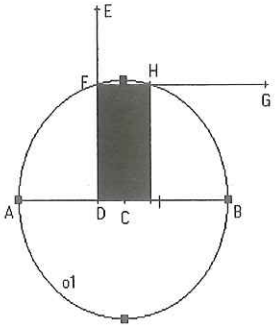
בשאלות אלה ,כמו בשאלה 13 מעמוד 203 בפרק "פונקציה מורכבת", יש שני חלקים לחקירה, בכל חלק חוקרים בעיות דומות: עם המחשב וללא המחשב. גם כאן, החלק הקשור במחשב נעשה בתוך מעגל בגלל מגבלות התוכנה. הקושי בשאלות אלה שיש התייחסות לשתי פונקציות: הפונקציה הנתונה והפונקציה שבונים לחקירה.

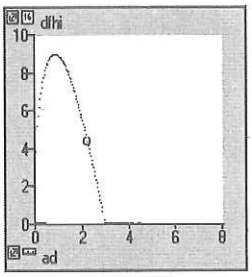
שאלה 17

חלק ראשון:









חלק שני:

גם כאן, כמו בשאלות אחרות, מתחילים בבדיקת מקרים פרטיים במטרה להבין את השאלה, ולהיעזר בהם כדי לבנות את הפונקציה לחקירה שבמקרה זה פונקצית השטח של המלבן.

א) B(8,0). מציאת שיעורי הנקודה עוזרת בחישוב המקרים הפרטיים, לבניית פונקצית השטח ולמציאת תחום הבעיה (ראה סעיף ה' להלן).

ב) (i) 42 יחידות שטח (ii) 48 יחידות שטח (iii) 30 יחידות שטח

על-פי התוצאות שהתקבלו, אפשר להניח שיש בחירה עבורה מתקבל שטח מקסימלי ואכן בזה עוסקת השאלה בסעיף ד'.

א) צלע המלבן הנמצאת על ציר x : $8 - 2x$

הצלע השנייה של המלבן מתקבלת משיעור y המתאים ל- x : $-x^2 + 8x$

ולכן הפונקציה המתארת את שטח המלבן היא:

$$s(x) = (8 - 2x)(-x^2 + 8x)$$

ד) עבור $x = 1.69$ מתקבל שטח המקסימלי. השטח הוא 49.27 יחידות שטח.

ה) החלק שמתאים לגרף השאלה הוא עבור x בין 0 ל- 4. בנקודה עבורה $x = 4$ מתקבל מלבן ששטחו אפס, למעשה הצלע נופלת על ציר הסימטריה. עבור x

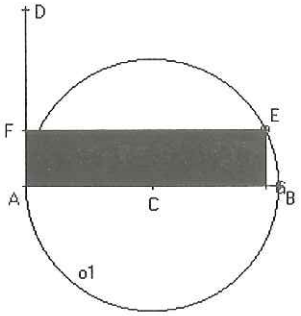
בין 4 ל-8 לא מתקבל מלבן, מתקבלים ערכים שליליים בביטוי של הצלע הראשונה המבוטאת על-ידי $8 - 2x$.

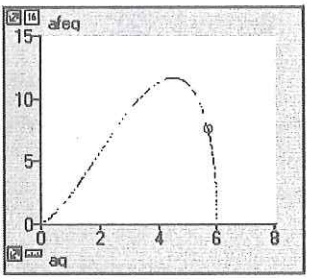
שאלה 18

חלק ראשון:









חלק שני:

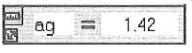
א) (i) 16 יחידות שטח (ii) 32 יחידות שטח (iii) 25 יחידות שטח

ב) פונקציה השטח: $s(x) = x(6x - x^2)$

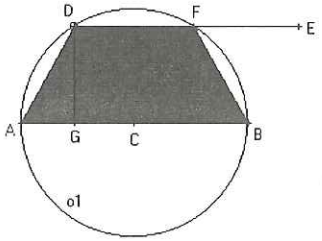
ג) עבור $x = 4$ מתקבל שטח מקסימלי. השטח המקסימלי הוא 32 יחידות שטח.

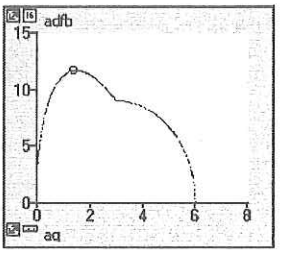
שאלה 19

חלק ראשון:





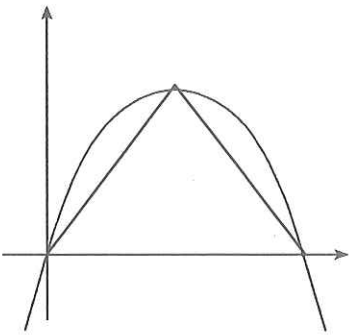




חלק שני:

א) (i) 128 יחידות שטח (ii) 144 יחידות שטח

ב) שרטוט המקרה הגבולי בו הטרפז הוא משולש:



שטח המשולש הוא 62.5 יחידות שטח.

ג) (i) שטח הטרפז: $s(x) = \frac{1}{2}(20 - 2x)(10x - x^2)$

(ii) x יכול לקבל את הערכים בין 0 ל- 5.

ד) עבור $x = 3\frac{1}{3}$ מתקבל שטח מקסימלי. השטח המקסימלי הוא 148.15 יחידות שטח.

שאלה 20

א) C(-4,0) , B(4,0).

ב) כאשר שיעור x של A הוא 2 יחידות, גובה הטרפז הוא 12 יחידות ושטח הטרפז 72 יחידות שטח.

כאשר שיעור x של A הוא 3 יחידות, גובה הטרפז הוא 7 יחידות ושטח הטרפז 49 יחידות שטח.

ג) כאשר שיעור x של A הוא x , גובה הטרפז הוא $16-x^2$ ושטח הטרפז:

$$s(x) = \frac{1}{2}(8+2x)(16-x^2)$$

ד) השטח המקסימלי מתקבל כאשר שיעור x של A הוא. $1\frac{1}{3}$. השטח המקסימלי הוא 75.85 יחידות שטח.

ה) שיעורי הנקודות המודגשות:

שיעורי נקודת החיתוך עם ציר y: $(0,64)$.

שיעורי נקודת החיתוך עם ציר x: $(4,0)$.

שיעורי נקודת המקסימום: $(1\frac{1}{3},75.85)$.