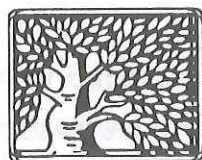
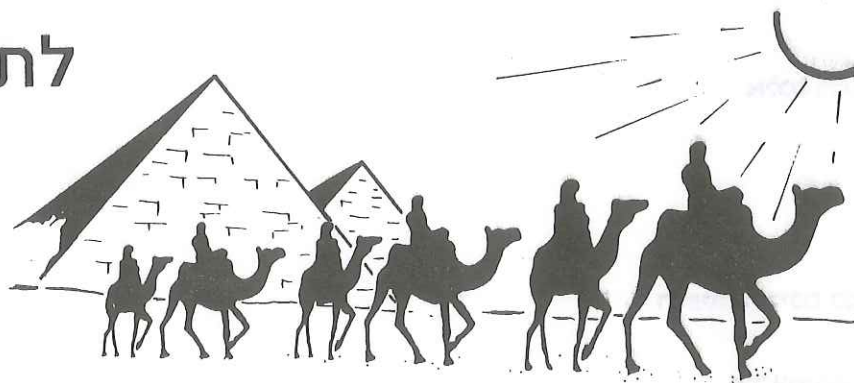


סדרות

לתלמיד



המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

חובר על-ידי:

ציפורה רוניק

ייעוץ:

אלכס פרידלנדר

הדפסה ועריכה במחשב:

יעל עמנואל-אדרי

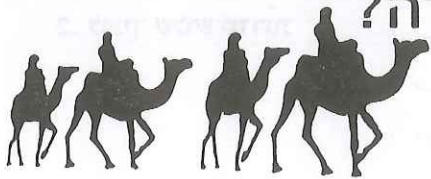
© מכון ויצמן למדע

חומר ניסוי לשימוש פרוייקט התיגבור במתמטיקה

במימון עיריות כפר-סבא ורעננה

תשנ"ב - 1992

מהי סידרה?



1. לפניך מספר סדרות.

מצא את האיבר הבא.

מצא, אם תוכל, את האיבר ה-20 וה-21.

א) 2, 4, 6, 8, 10, ____

ב) -1, 1, -1, 1, -1, ____

ג) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ____

ד) 1, $2x$, $3x^2$, $4x^3$, ____

ה) 4, 2, 0, -2, -4, -6, ____

ו) 1, 10, 11, 100, 101, ____

ז) 1, 4, 9, 16, 25, ____

ח) 2, 6, 12, 20, 30, ____

ט) $\textcircled{1}$, \ominus , $\textcircled{1}$, \ominus , $\textcircled{1}$, ____

סידרה היא אוסף מסודר של איברים, כך שאפשר לדעת מיהו האיבר הראשון, מיהו השני וכך הלאה.

את האיבר הראשון מסמנים ב- a_1 , את האיבר השני מסמנים ב- a_2

ואת האיבר ה- n ב- a_n .

סידרה יכולה להכיל מספר סופי או אינסופי של איברים.

2. לפניך שלוש סדרות 1, 2, 3, ____, ____, ____, ...

1, 2, 3, ____, ____, ____, ...

1, 2, 3, ____, ____, ____, ...

א) הוסף שלושה איברים, בכל פעם לפי חוקיות אחרת.

ב) תן לחברך למצוא את האיבר השביעי בסידרה.

ג) כמה איברים, לדעתך, יש לתת בסידרה כדי שנדע בביטחון את חוקיות הסידרה?

3. רשום שתי סדרות שונות המתחילות באותם שלושה איברים.

הוסף לכל סידרה הסבר מילולי שבעזרתו אפשר יהיה להמשיך את הסידרה.

איך אפשרות לדעת את חוקיות הסידרה בהנתן מספר סופי של איברים, אלא אם כן אלה הם כל איברי הסדרה.

יותר מכך, סידרה אינה חייבת להיות בעלת חוקיות ברורה.

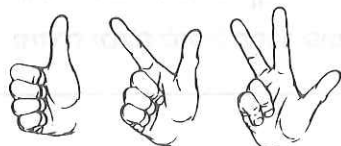
לדוגמא, אוסף כל התוצאות של הטלת קוביה בזו אחר זו היא גם סידרה:

3, 5, 2, 6, 5, 1, 4, 1, ...

ובדאי שבסידרה זו איננו יכולים לדעת מה יהיו האיברים הבאים עד אשר נטיל את הקוביה.

לכן, במקרה של סידרה בעלת חוקיות מסוימת, עלינו להביע אותה בדרך כזו שלא יהיה ספק מיהם איברי הסידרה.

אחת הדרכים להביע חוקיות של סידרה מספרית היא לרשום תבנית מספר המביעה את החוקיות.





4. רשום ארבעה איברים ראשונים בסדרות הכאות ומצא גם את a_8 .

(א) $a_n = 1 + 3n$ (ה) $a_n = n^2 - 1$

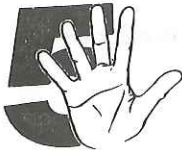
(ב) $a_n = 3^n$ (ו) $a_n = 50 - n$

(ג) $a_n = 24 \cdot (-1)^n$ (ז) $a_n = n!$

(חשב במחשבון בעזרת המקש $x!$ ונסה לנחש את חוקיות הסידרה).

(ד) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (ח) $a_n = \begin{cases} n^2 & \text{אם } n \text{ אי זוגי} \\ n & \text{אם } n \text{ זוגי} \end{cases}$

- בדוק לגבי כל סידרה אם a_{24} הוא איבר של הסידרה. אם כן, נסה לקבוע את מקומו בסידרה.



5. הסידרה 5, 10, 15, 20

היא סידרת המספרים המתחלקים ב-5.

(א) השלם: התבנית המתאימה לה במשתנה n היא $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

כאשר מציבים בתבנית את 1 במקום n מקבלים כתוצאה 5.

מסמנים: $a_1 = 5$, ופרושו: במקום הראשון בסידרה עומד האיבר 5.

כאשר מציבים בתבנית את 4 מקבלים כתוצאה $\underline{\hspace{2cm}}$.

מסמנים: $a_{\underline{\hspace{1cm}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ופרושו: במקום ה- $\underline{\hspace{2cm}}$ בסידרה עומד

האיבר $\underline{\hspace{2cm}}$.

(ב) חשב: $a_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_{\underline{\hspace{1cm}}} = 55$

(ג) האם a_8 שייך לסידרה?

(ד) האם 8 שייך לסידרה?

6. נסה לרשום תבניות לסדרות הבאות:

(א) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

(ב) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

(ג) $6, 11, 16, 21, 26, \dots$ (רמז: העזר בתרגיל 5)

(ד) $5, 7, 9, 11, 13, \dots$

(ה) $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

(ו) $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$



7. עבדו בזוגות!

(א) כל אחד מבני הזוג רושם לעצמו תבנית מן הסוג

$$a_n = \square \cdot n + \triangle$$

מחשב את חמשת האיברים הראשונים בסידרה המתאימה ומראה רק רשימה זו לבן הזוג (בלי להראות לו את התבנית). המשימה של בן הזוג היא לנחש את התבנית.

(ב) כל אחד מבני הזוג רושם לעצמו תבנית ממעלה שניה ב-n, מן הסוג

$$a_n = \square \cdot n^2 + \triangle \cdot n + \bigcirc$$

מחשב את חמשת האיברים הראשונים בסידרה המתאימה ומראה רק רשימה זו לבן הזוג (בלי להראות לו את התבנית). המשימה של בן הזוג היא לנחש את האיבר השישי של הסדרה.

9. האם המספר 100 שייך לסדרות הבאות? אם כן, באיזה מקום הוא עומד? (נניח, כי החוקיות בסדרות בהן לא רשומה תבנית היא זו הנראית לעין).

(א) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

(ב) $4, 8, 12, 16, \dots$

(ג) $4, 7, 10, 13, 16, \dots$

(ד) $a_n = 2^n$

(ה) $a_n = n(n + 1)$

(ו) $a_n = n^2 - 21$

(ז) $a_n = 4n^2$

10. (א) רשום שלוש סדרות נוספות אשר המספר 100 שייך להן.

(ב) רשום שלוש סדרות נוספות אשר המספר 100 אינו שייך להן.



סידרה המוגדרת לפי כלל נסיגה

עד כה הבענו את החוקיות של סידרה בעזרת תבנית התלויה במקומו של האיבר בסידרה. ישנן דרכים אחרות להביע את החוקיות של סידרה.

1. נתונה הסידרה 2, 5, 14, 41, 122, ...

(א) נסה לנחש חוקיות לסידרה ומצא לפיה את האיבר השישי.

(ב) נתונה החוקיות: כדי לקבל את האיבר העוקב לאיבר מסויים בסידרה, הכפל אותו ב-3 וחסר מהתוצאה 1.

מצא לפי חוקיות זו את האיבר השישי בסדרה. השווה עם סעיף א'.

את החוקיות שנסחנו בתרגיל 1 ב' רושמים כך: $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 1$

2. מצא סידרה שונה מן הסידרה בתרגיל 1, אך בעלת אותה חוקיות.

החוקיות $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 1$ אינה מגדירה סידרה יחידה.

כדי להגדיר את הסידרה של תרגיל 1, יש לרשום

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 1 \end{cases}$$



הכלל שבעזרתו הגדרנו את הסדרה נקרא כלל נסיגה. התוכל להסביר שם זה?

3. החוקיות של סידרה מסוימת נתונה על-ידי כלל הנסיגה הבא:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n - 2$$

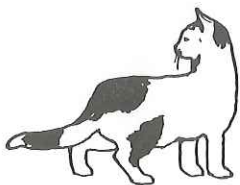
כמו כן, ידוע כי בסידרה זו $a_7 = 20$

מצא a_6 , a_{10} , a_8

4. רשום חמישה איברים ראשונים בסדרות הבאות המוגדרות על-פי כלל נסיגה.

דוגמא: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$ הכלל במילים: כל איבר שווה לסכום של האיבר

הקודם לו והמספר המציין את מקום האיבר הקודם.



$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

הסידרה: 5, 6, 8, 11, 15, ...

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+2}{n} \end{cases} \quad (\text{ה})$$

5. נתונה הסידרה הבאה המוגדרת על פי תבנית.

$$3, 6, 9, 12, 15, \dots, 3n, \dots$$

ונתונות הסדרות הבאות המוגדרות על-פי כלל נסיגה.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+1}{n} \end{cases}$$

האם שלוש הסדרות שוות? נסה להסביר.

בתרגיל הקודם נוכחנו לדעת, כי אפשר להגדיר סידרה על-ידי כללי נסיגה שונים.



6. נסה למצוא כלל נסיגה שונה לסדרות הבאות:
הדרכה: מצא תחילה מספר איברים בסידרה.

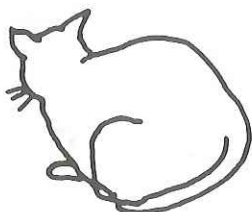
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+2}{n+1} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases} \quad (\text{ג})$$

7. לפניך סדרות הנתונות בעזרת תבנית.

רשום מספר איברים בכל סדרה ונסה להביע אותה באמצעות כלל נסיגה (אל תשכח לרשום את האיבר הראשון).



$$a_n = 3 \cdot (-1)^{n+1} \quad (\text{א})$$

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n \quad (\text{ב})$$

$$a_n = 3n + 2 \quad (\text{ג})$$

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1} \quad (\text{ד})$$

$$a_n = \frac{81}{3^{n-1}} \quad (\text{ה})$$

$$a_n = b^{2n} \quad (\text{ו})$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot b^{2n-1} \quad (\text{ז})$$

$$a_n = n! \quad (\text{ח})$$

$$a_n = 2^n \cdot x^n \quad (\text{ט})$$

8. לפניך סדרות הנתונות באמצעות כלל נסיגה.

רשום מספר איברים בכל סדרה ונסה להביעה באמצעות תבנית.

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -a_n \end{cases} \quad (\text{ב})$$

ד. ידוע כי קבוצת המספרים הרייטלית היא סגורה.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases} \quad (ג)$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases} \quad (ד)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases} \quad (ה)$$

9. בדוק אם הסדרות הבאות הנתונות על-פי תבנית מקיימות את כלל הנסיגה הרשום על-ידך.

אם כן, הוכח. אם לא, הראה דוגמא נגדית.

דוגמא:



$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_n = n^2 \\ 1, 4, 9, \dots \end{matrix}$$

הוכחה: $a_n = n^2$

↓

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)^2 \\ a_{n+1} &= n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{לכן:} \\ \text{ובהצבת 1 בתבנית:} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases} \quad a_n = 5n - 1 \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases} \quad a_n = n^2 + 3 \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n \end{cases} \quad a_n = 2n \quad (\text{ג})$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1 \end{cases} \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{ד})$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \end{cases} \quad a_n = n + 1 \quad (\text{ה})$$

10. סידרה מסוימת מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2n \end{cases}$$

מצא את ההפרש $a_{21} - a_{20}$.

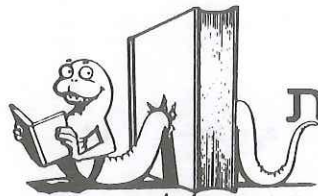
11. מלא את הטבלה הבאה:

<u>כלל נסיגה</u>	<u>כלל לפי תבנית</u>	<u>איברים ראשונים</u>
------------------	----------------------	-----------------------

-3, -1, 1, 3, 5, ...

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 2 \end{cases}$$

$a_n = 10 - 4n$



סדרות מילוליות

1. בחדר נמצאים n אנשים שיש להם יום הולדת. כל אדם נותן לכל אדם אחר מתנה.

נסמן ב- a_n את מספר המתנות שניתנו לפי מספר האנשים n שהיו.

(א) השלם:

$$a_1 = \underline{0} \quad a_2 = \underline{\quad} \quad a_3 = \underline{\quad} \quad a_4 = \underline{\quad} \quad a_5 = \underline{\quad}$$

(ב) כמה מתנות נוספות ניתנו, אם היו בחדר 10 אנשים ובא אדם נוסף.

(ג) רשום כלל נסיגה עבור הסידרה: $a_{n+1} = a_n + \underline{\quad}$

(ד) נסה להסביר את כלל הנסיגה במלים.

(ה) ידוע כי אם בחדר 100 אנשים אז ניתנות 9900 מתנות. כמה מתנות ינתנו בין 101 אנשים?

(ו) רשום תבנית למספר המתנות שניתנו על ידי n אנשים.

(ז) כמה מתנות ינתנו בין 20 איש. רשום בכתב סדרות: $a \underline{\quad} = \underline{\quad}$

(ח) כמה אנשים בחדר אם נתנו 992 מתנות? רשום בכתב סדרות: $a \underline{\quad} = \underline{\quad}$

(ט) האם המספר 144 שייך לסדרת מספר המתנות? נמק.

(י) מהו המספר הקרוב ביותר ל-144 ושייך לסידרה?

2. בחדר נמצאים n אנשים כל אחד לוחץ את ידו של כל אחד מן האחרים.
 נסמן ב- a_n את מספר לחיצות הידיים שבין n אנשים.

(א) השלם:

$$a_1 = \underline{0} \quad a_2 = \underline{\quad} \quad a_3 = \underline{\quad} \quad a_4 = \underline{\quad}$$

(ב) נכנס אדם נוסף לחדר. כמה לחיצות ידיים נוספו על הלחיצות הקודמות?
 רשום כלל נסיגה:

$$a_{n+1} = \underline{\quad}$$

(ג) הוסף תנאי התחלה כדי להביע את הסידרה המתארת את מספר לחיצות הידיים של כל מספר של אנשים.

(ד) רשום תבנית ב- n למספר לחיצות הידיים של n אנשים:

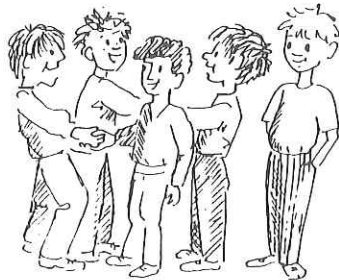
$$a_n = \underline{\quad}$$

(ה) בדוק אם שתי הסדרות שרשמת שוות.

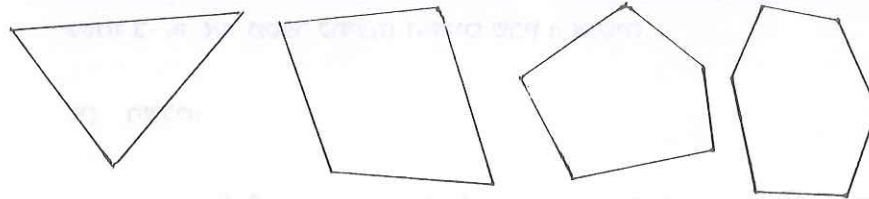
הדרכה: מצא מן התבנית את a_{n+1} .

(ו) מצא אל פי התבנית את מספר לחיצות הידיים, אם היו בחדר 20 איש.

(ז) מצא על-פי סעיף ו' ועל-פי כלל הנסיגה את מספר לחיצות הידיים, אם היו בחדר 21 איש.



3. (א) שרטט את כל האלכסונים במצולעים הבאים.



(ב) מייצג את מספר האלכסונים במצולע בעל n צלעות ($n \geq 3$) השלם:

$$a_3 = \underline{\quad\quad} \quad a_4 = \underline{\quad\quad} \quad a_5 = \underline{\quad\quad} \quad a_6 = \underline{\quad\quad}$$

(ג) ידוע כי מספר אלכסוניו של מעושר הוא 35.

מצא על-פי זה את מספר האלכסונים של מצולע בעל 11 צלעות.

(ד) השלם את כלל הנסיגה:

$$a_{n+1} = a_n + \underline{\quad\quad\quad}$$

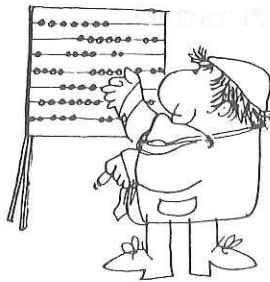
(ה) מצא תבנית למספר האלכסונים של מצולע בעל n צלעות.

בדוק תשובתך לסעיף ד).

(ו) כמה אלכסונים יש למצולע בעל 20 צלעות?

(ז) מהו מספר הצלעות הקטן ביותר של מצולע שמספר אלכסוניו עולה על

1000?



פסק זמן

בחרוים פה לפניכם
ארבע סדרות נציג לכם.
נא בדקו את הסדרות
מי מביניהן שוות?



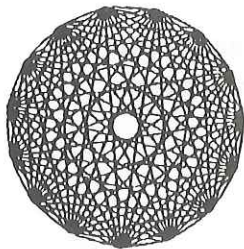
(א) כל תלמיד מבין המסיימים
נתן את תמונתו לכל האחרים.
למספר התלמידים
מספר התמונות שניתנו נתאים.

(ב) אנשים בטקס נפגשו.
כל שניים ידיים לחצו.
למספר האנשים
מספר לחיצות הידיים נתאים.

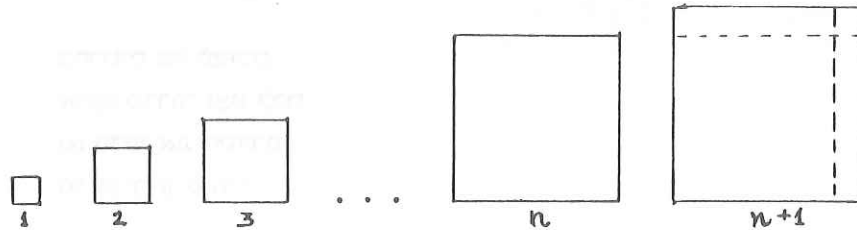


(ג) התאמה שלישית קלה,
מתבצעת במצולע.
למספר הקודקודים,
מספר האלכסונים נתאים.

(ד) מספר נקודות על דף נצייר,
וכל שתיים בקטע נחבר.
ועתה נוכל להתאים
למספר הנקודות את מספר הקטעים.



4. לפניך סדרת ריבועים שאורך צלעותיהם המספרים הטבעיים (בס"מ).



נסמן ב- a_n את שטחי הריבועים.

כדי לקבל את הריבוע הבא בסידרה, עלינו להוסיף ס"מ אחד לכל צלע של הריבוע שצלעו n ס"מ.

(א) רשום חמישה איברים בסידרה.

(ב) רשום כלל נסיגה עבור שטח הריבוע החדש, אם ידוע שטח הריבוע הקודם. נסה להעזר בשרטוט.

(ג) רשום תבנית לסידרה המתארת את שטחי הריבועים.

(ד) בדוק אם שתי הסדרות המתקבלות אכן שוות.

(ה) האם 1200 שייך לסידרת השטחים?

(ו) מה אורכי הצלעות של שני ריבועים סמוכים בסידרה, אם הפרש שטחיהם הוא 37 סמ"ר.

(ז) האם קיימים שני ריבועים סמוכים בסידרה אשר הפרש שטחיהם 50 סמ"ר? נמק.

5. חיידקים מתרבים על ידי חלוקה ל-2, כל שעה. a_n היא סידרה המתארת את מספר החיידקים שהתרבו מחיידק אחד אחרי n שעות.

(א) רשום כלל נסיגה עבור מספר חדש של חיידקים והוסף לו תנאי התחלה.

(ב) רשום חמישה איברים בסידרה.

(ג) רשום תבנית לסידרה המתארת את מספרי החיידקים.

(ד) בדוק אם שתי הסדרות המתקבלות אכן שוות.

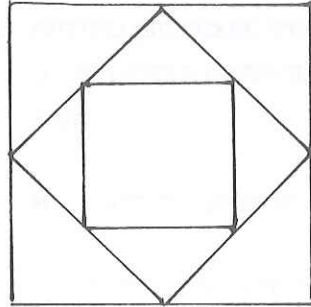


(ה) לבדיקת תרבות של חיידקים מסוג זה מחכים שתי יממות.

מהו בערך מספר החיידקים המתפתחים מחיידק אחד אחרי שתי יממות?

(ו) אחרי 10 שעות התרבו מחיידק אחד 1024 חיידקים. כמה חיידקים יתרבו מאותו חיידק אחרי 12 שעות?





6. לפניך ריבוע שצלעו 4 יחידות.
 בתוך הריבוע חסמו ריבוע נוסף
 שקודקודיו על אמצעי הריבוע
 הראשון ובתוכו חסמו ריבוע
 נוסף, וכן הלאה.
 נסמן ב- a_n את סידרת שטחי
 הריבועים.

(א) רשום את הסידרה באמצעות כלל נסיגה.

(ב) רשום חמישה איברים בסידרה.

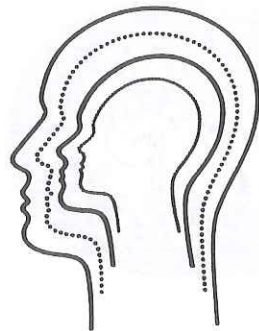
(ג) רשום תבנית עבור הסידרה.

(ד) מהו המספר הראשון בסידרה הקטן מ- $\frac{1}{100}$?

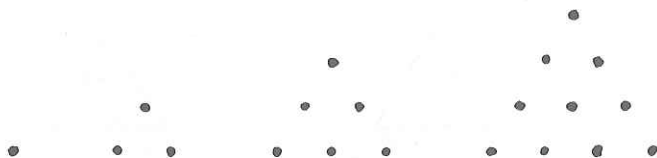
(ה) נבחר מן הריבועים הנתונים רק את אלה שצלעותיהם מקבילות זו לזו בהתאמה (החל בראשון).

— מה הקשר בין סידרה זו לסידרה הקודמת?

— נסה לרשום כלל נסיגה ותבנית לשטחי הריבועים בסידרה זו.

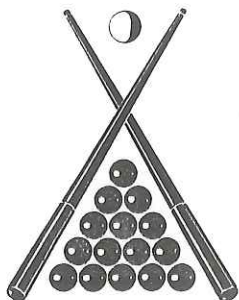


7. לפניך סידרה של נקודות.

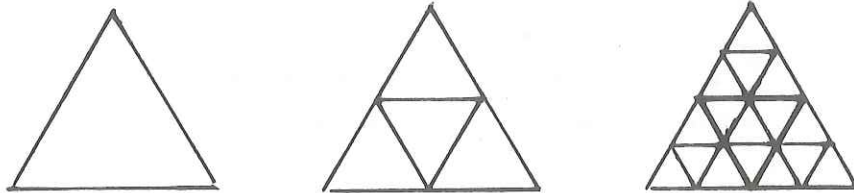


נסמן ב- a_n את סידרת מספר הנקודות במקום ה- n .

- (א) רשום את הסידרה באמצעות כלל נסיגה.
- (ב) עבור איזה איבר בסידרה יהיה ההפרש בין איבר לקודמו 20? כמה נקודות במקום זה?
- (ג) רשום תבנית לסידרה.
- (ד) התוכל למצוא באיזה מקום בסידרה עומד משולש נקודות שמספר נקודותיו 155?
- (ה) רשום מספר איברים בסידרה ומצא באילו מקומות בסידרה עומדים מספרים זוגיים ובאילו מקומות, אי-זוגיים. נסה לנמק על פי כלל הנסיגה או על פי התבנית.
- (ו) התוכל למצוא בין הבעיות הקודמות בעיה בעלת אותו כלל נסיגה? הסבר.



8. לפניך סדרות של משולשים. בכל שלב מעבירים את שלושת הקטעים המחברים את אמצעי הצלעות בכל משולש.



(א) מצא כלל נסיגה למספר המשולשים הקטנים בכל שלב.

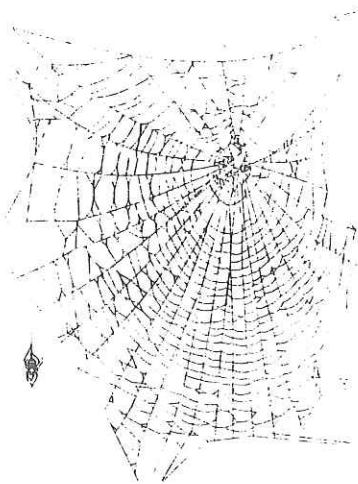
(ב) מצא תבנית למספר המשולשים הקטנים בכל שלב.

(ג) מהו מספר המשולשים הקטנים במשולש העומד במקום ה-6.

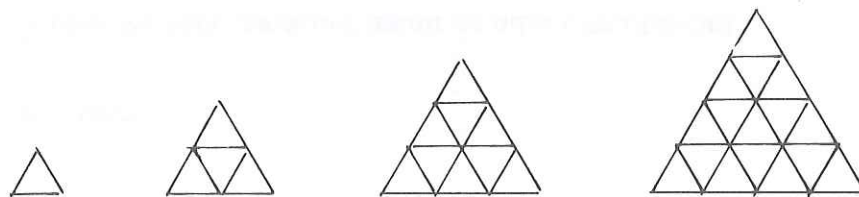
(ד) באיזה שלב יעלה בפעם הראשונה מספר המשולשים הקטנים על 1000?

(ה) שטח המשולש הראשון הוא יחידה אחת.

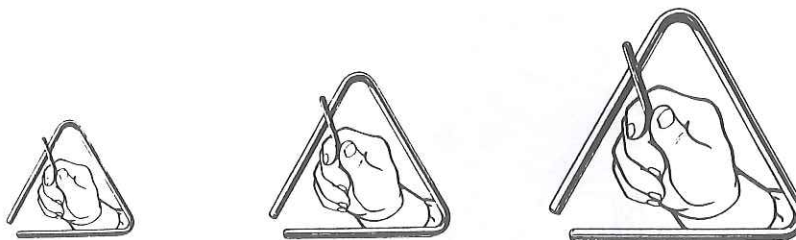
רשום כלל נסיגה לסידרת שטחי המשולשים הקטנים בכל שלב.



9. לפניך סידרת המשולשים הבאה:



- (א) מצא כלל נסיגה למספר המשולשים הקטנים בכל שלב.
- (ב) מצא מבין הדוגמאות הקודמות דוגמא נוספת בעלת אותו כלל נסיגה.
- (ג) הסידרה של תרגיל 8 היא סידרה חלקית לסידרה זו. נסה למצוא באילו מקומות של סידרה זו עומדים איברים של הסידרה מתרגיל 18
- (ד) אורך צלע המשולש הראשון הוא יחידה אחת. רשום תבנית וכלל נסיגה להיקפי המשולשים הגדולים בכל שלב.
- (ה) האם קיים משולש גדול בעל היקף של 1000 יחידות? נמק.



10. בשלולית n צפרדעים העומדים בתור כדי לקבל נשיקה מן הנסיכה.
 a_n מציין את מספר האפשרויות השונות של סידור הצפרדעים בתור.

(א) השלם:

$$a_1 = \underline{\quad\quad\quad} \quad a_2 = \underline{\quad\quad\quad} \quad a_3 = \underline{\quad\quad\quad} \quad a_4 = \underline{\quad\quad\quad}$$

(ב) בא לשלולית צפרדע חדש.

בכמה אפשרויות ניתן לצרף את החדש לתור?

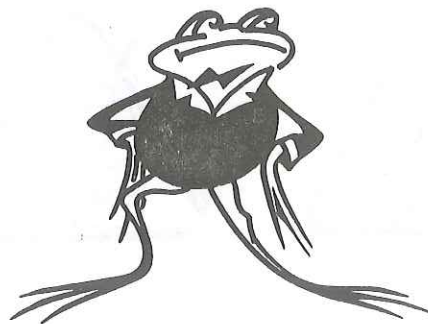
(ג) תן הסבר לכלל הנסיגה של הסידרה $a_{n+1} = a_n \cdot (n + 1)$.

(ד) היו בשלולית 20 צפרדעים. בא לשלולית צפרדע חדש.

פי כמה גדל מספר האפשרויות לסדר תור בין הצפרדעים?

(ה) כמה צפרדעים צריכים להיות בשלולית כדי שמספר האפשרויות לסידורם

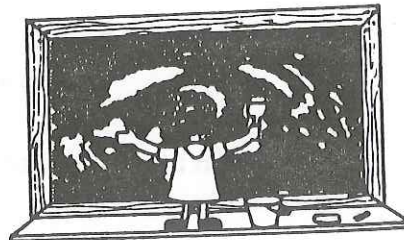
בתור יעלה על 100?

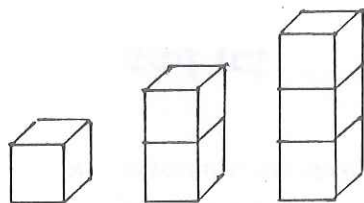


פסק זמן

- (א) שלושה תורנים המורה מינתה כדי שידאגו לנקיון הכיתה, להרמת הכסאות, ולהבאת גירים, וישביעו בכך את רצון המורים.
- (ב) וכיוון שמן התורנים אף אחד את ניקוי הכיתה לא אהד, ולכל אחד מן התורנים התחשק דוקא להביא גירים,
- (ג) החליטו על הצדק לשמור ולפיכך ארגנו להם תור. וכדי למנוע בעיות רשמו את כל האפשרויות.
- (ד) וכל יום בלי להניד עפעף התחלפו על פי הדף. ועתה, אתם אמרו תוך כמה ימים הרשימות נגמרו?
- (ה) הודיעה המורה בפנים חמורות: "על התורנים גם הלוח לנקות". וכדי להרגיע את המסכנים, שלחה תורן נוסף אל התורנים.
- (ו) ארבעת התורנים שנית ישבו לארגן תור חדש חשבו. הרשימה אז השתנתה לכמה ימים, אמור אתה?
- (ז) בכיתה המקבילה שמעו על הרעיון הנפלא. אך כיוון ששם רבים הלכלכנים, הם זקוקים להרבה תורנים.
- (ח) ישבו החבריה זמן רב, אך לא הספיק להם הדף. כי גם אם נספור שבתות וחגים תספיק הרשימה לשנתיים ימים. (720 יום)

אמרו אתם מה מספר התורנים?

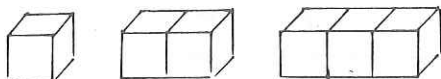




11. דני בנה מגדלים מקוביות ושפך עליהם צבע (הצבע לא הגיע אל הפאה התחתונה שעליה עומד המגדל).

(א) רשום את מספר הפאות הצבועות בכל פעם עבור חמשת המגדלים הראשונים.

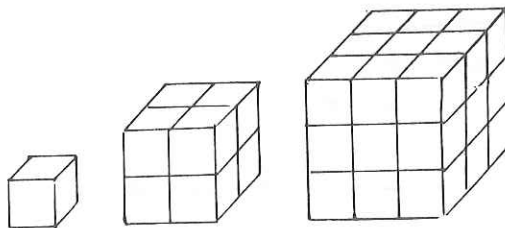
(ב) רשום תבנית וכלל נסיגה לסידרה.



(ג) דני בנה סידרת "רכבות" מקוביות ושוב שפך על הרכבות צבע.

רשום תבנית וכלל נסיגה לסידרה המביעה את מספר הפאות הצבועות.

(ד) דני בנה סידרת קוביות ופעל באותה דרך כמו בפעמים הקודמות. רשום גם הפעם תבנית וכלל נסיגה לסידרה המביעה את מספר הפאות של הקוביות הקטנות הצבועות.



(ה) בסופו של דבר נצבעו במגדל הגבוה ביותר פחות מ-100 פאות. מכמה קוביות קטנות לכל היותר נבנה המגדל?

(ו) חזור על סעיף (ה) עם הרכבת הארוכה ביותר ועם הקוביה הגדולה ביותר (זהירות!).

(ז) שאל עוד שתי שאלות על הסדרות שבתרגיל זה ותן לחברך לענות עליהן.

12. שוליות הקוסם קסם שהמים יישאבו לתוך הדלי מאליהם וימלאו את החבית. הוא לא ידע להפסיק את הקסם וקצב שאיבת המים גבר מרגע לרגע.

בכל דקה נשאבו ב-50% יותר דליים מאשר בדקה הקודמת. המים שנשאבו בדקה הראשונה מלאו בדיוק דלי אחד.

א) רשום 5 איברים בסידרה המתארת את מספר הדליים שנשאבו בכל דקה.

ב) רשום כלל נסיגה עבור מספר הדליים שנשאבו בדקה מסויימת.

ג) התבית מכילה 100 דליים. אחרי איזו דקה התחילו המים להציף את הבית?

ד) שוליות הקוסם אינו יודע לשחות. מתי התחיל לטבוע?



סידרה חשבונית וסידרה הנדסית

1. (א) נתונה הסידרה 5, 8, 11, 14, 17, ...

בסידרה זו, ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא מספר קבוע.
הגדר סידרה זו בעזרת כלל נסיגה.

(ב) מצא את המספר העשירי בסידרה.

סידרה בה ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא מספר קבוע נקראת
סידרה חשבונית.

מסמנים את ההפרש הקבוע ב-d (מהמילה difference – הפרש)
ולכן הגדרת הסידרה על-פי כלל נסיגה תהיה:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$$

2. נתונה סידרה חשבונית שבה $a_1 = a$ והפרשה d.
השלם באמצעות a, d ו-n בלבד:

$$a_1 = \underline{\quad\quad} \quad a_2 = \underline{\quad\quad} \quad a_3 = \underline{\quad\quad} \quad a_4 = \underline{\quad\quad} \quad \dots \quad a_{10} = \underline{\quad\quad}$$

$$a_n = \underline{\quad\quad\quad\quad\quad}$$



3. נתונה סידרה חשבונית שבה $a_1 = 7$ ו- $d = 5$.

(א) רשום חמישה איברים בסידרה.

(ב) מצא את האיבר העשירי בסידרה.

(ג) רשום על-פי תרגיל 2 תבנית לסידרה.

(ד) מצא את a_{10} על-פי התבנית (השווה תוצאה עם סעיף ב.).

4. (א) נתונה הסידרה $2, 6, 18, 54, 162, \dots$ בסידרה זו המנה בין כל איבר לקודמו הוא מספר קבוע. הגדר סידרה זו באמצעות כלל נסיגה.

(ב) מצא את האיבר העשירי בסידרה.

(ג) סידרה בה המנה בין כל איבר לקודמו הוא מספר קבוע נקראת **סידרה הנדסית**. מסמנים את המנה הקבועה ב- q (מהמילה quotient – מנה).

רשום הגדרה לפי כלל נסיגה לסידרה הנדסית שבה $a_1 = a$ והמנה הקבועה היא q :

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

5. נתונה סידרה הנדסית שבה $a_1 = a$ ומנתה q השלם באמצעות a, q ו- n בלבד.

$$a_1 = \underline{\hspace{2cm}} \quad a_2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad a_3 = \underline{\hspace{2cm}} \quad a_4 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \dots \quad a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a_n = \underline{\hspace{2cm}}$$

6. נתונה סידרה הנדסית שבה $a_1 = 2$ ומנתה $q = 2$.

(א) רשום חמישה איברים בסידרה.

(ב) מצא את האיבר העשירי בסידרה.

(ג) רשום על-פי תרגיל 5 תבנית לסידרה.

(ד) מצא את a_{10} על-פי התבנית (השווה תוצאה עם סעיף ב').

7. לפניך מספר סדרות. בהנחה שהחוקיות היא זו הנראית לעין, סמן חי על-יד סידרה חשבונית, חי על-יד סידרה הנדסית ו- \times על-יד סידרה שאינה חשבונית ואינה הנדסית.

9, 17, 25, 33, ... (א)

$\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{40}, \dots$ (ב)

5, 5, 5, 5, 5, ... (ג)

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ (ד)

1, -1, 1, -1, 1, -1, ... (ה)

0, 6, 12, 18, ... (ו)

0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, ... (ז)

$\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \dots$ (ח)

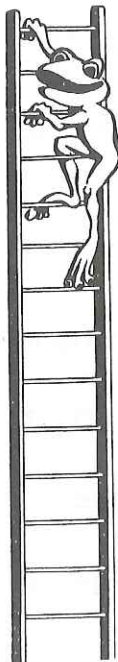
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ (ט)

-0.3, -0.6, -0.9, -1.2, ... (י)

12, -4, $\frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, \dots$ (יא)

0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ... (יב)

1 - 0.9, 1 - 0.99, 1 - 0.999, ... (יג)



8. כל אחת מהסדרות הבאות היא סידרה חשבונית או סידרה הנדסית.
 רשום את האיבר הבא בכל סידרה.

(א) $3a - 2b, 4a - b, 5a, 6a + b, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$

(ב) $a \neq 0 \quad a, -1, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a^2}, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$

(ג) $(a - b)^2, (a - b)(a^2 - b^2), (a - b)^2 (a + b)^2, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$

(ד) $(a - b)^2, a^2 + b^2, (a + b)^2, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$

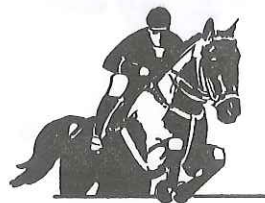
(ה) $(a + 1)^2(a - 1), (a^2 - 1)^2, (a + 1)^2(a - 1)^3, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$

(ו) $\frac{1}{ab}, 1, ab, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$

(ז) $-ab, 0, ab, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$

(ח) $-6a, 6a, 18a, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$

(ט) $-6, 6a, -6a^2, \underline{\hspace{2cm}}, \dots$



9. כל אחת מהסדרות הבאות היא חשבונית או הנדסית.

באיזה מקום בסידרה נמצא האיבר הרשום לידה?

(א) $\frac{1}{b}, 1, b, \dots, b^7$

(ב) $-3m, -m, m, \dots, 7m$

(ג) $a - b, 2a, 3a + b, \dots, 10a + 8b$

(ד) $a - b, a^2 - b^2, (a - b)(a + b)^2, \dots, (a^2 - b^2)(a + b)^3$

(ה) $\frac{a}{b}, 1, \frac{b}{a}, \dots, \frac{b^5}{a^5}$

(ו) $\frac{a}{b}, \frac{a + b}{b}, \frac{a + 2}{b}, \dots, \frac{a + 5b}{b}$

(ז) $1, \frac{a - 1}{a}, \frac{a - 2}{a}, \dots, 1 - \frac{6}{a}$

10. הכנס בין שני המספרים הבאים מספרים נוספים, כך שהסידרה המתקבלת תהיה סידרה חשבונית.

(א) $2, _, _, _, 30$

(ב) $-3, _, _, _, 13$

(ג) $-2, _, _, _, -1$

(ד) $-100, _, _, _, _, 100$



11. מבין הסדרות הבאות, זוהי את הסדרות החשבוניות וההנדסיות ומצא עבור הסדרות שזיהית את האיבר השביעי.
 (א) סידרת הנקודות הבאה:

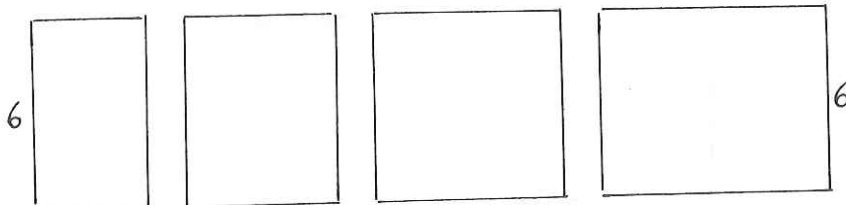


(ב) סכומי השורות במשולש פסקל:

										שורה 0
				1						שורה 1
			1	1						שורה 2
		1	2	1						שורה 3
	1	3	3	1						שורה 4
	1	4	6	4	1					שורה 5
	1	5	10	10	5	1				שורה 6
	1	6	15	20	15	6	1			שורה 7
1	1	7	21	35	35	21	7	1		שורה 8
1	1	8	28	56	70	56	28	8	1	

(ג) סידרת פיבונצ'י: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

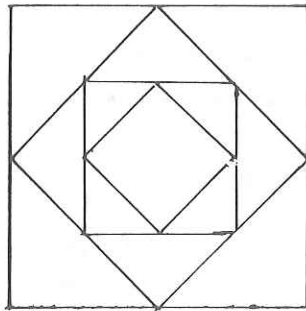
(ד) סידרת שטחי המלבנים שאחת מצלעותיהן 6 ס"מ והצלע השנייה גדלה ב-1 ס"מ בכל פעם.



ה) סידרת היקפי המלבנים מסעיף ד).

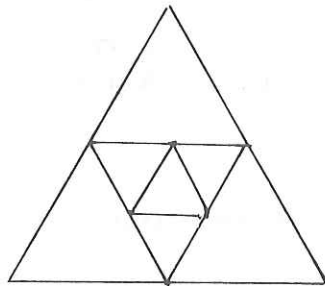
ו) סידרת שטחי הריבועים שצלעם גדל ב-1 בכל פעם.

ז) סידרת היקפי הריבועים מסעיף ו).



ח) סידרת השטחים של הריבועים המשורטטים כאן, כאשר שטח הריבוע הגדול הוא A.

ט) סידרת ההיקפים של הריבועים הנייל (לתלמידים שלמדו משפט פיתגורס).



י) סידרת השטחים של המשולשים המשולשים כאן, כאשר שטח המשולש הגדול הוא A.

יא) סידרת ההיקפים של המשולשים הנייל, כאשר אורך הצלע המשולש הגדול הוא a.

יב) הסידרה היסודית של בסיס עשר.



סידרה נקראת עולה אם כל איבר גדול מקודמו,
 נקראת יורדת אם כל איבר קטן מקודמו,
 ונקראת קבועה אם כל איבריה שווים.

12. סמן \checkmark על-ידי סידרה עולה \checkmark על-ידי סידרה יורדת, \times על-ידי סידרה קבועה
 ו- \square על-ידי סידרה שאינה מקיימת אף אחד משלושת התנאים.

(א) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

(ב) $2, -4, 8, -16, \dots$

(ג) $-30, -27, -24, -21, \dots$

(ד) $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

(ה) $-2, -5, -8, -11, \dots$

(ו) $-2, -3, -4.5, -6.25, \dots$

(ז) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \dots$



13. (א) תן דוגמא משלך, אם הדבר אפשרי, לסידרה חשבונית עולה, לסידרה חשבונית יורדת ולסידרה חשבונית שאינה עולה, אינה יורדת ואינה קבועה.

(ב) תן דוגמא משלך, אם הדבר אפשרי, לסידרה הנדסית עולה, לסידרה הנדסית יורדת ולסידרה הנדסית שאינה עולה, אינה יורדת ואינה קבועה.



$$14. \text{ נתונה סידרה חשבונית} \begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$$

(א) מה צריכים לקיים a ו- d כדי שהסדרה תעלה?

(ב) האם סידרה חשבונית יכולה להיות לא עולה, לא יורדת ולא קבועה? נמק.

$$15. \text{ נתונה סידרה הנדסית} \begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

(א) רשום במשבצות הטבלה לפי הנתונים עולה, יורדת, קבועה.

$a \backslash q$	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$a < 0$			
$a > 0$			

(ב) האם סידרה הנדסית יכולה להיות לא עולה, לא יורדת ולא קבועה? אם כן, תן דוגמא.

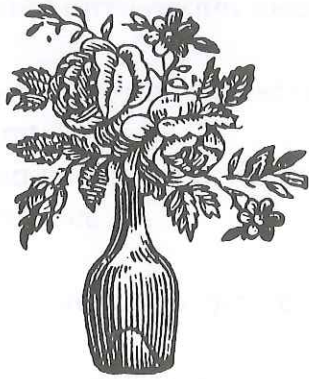
(ג) ברר לעצמך מה קורה לסידרה בכל המקרים שלא הובאו בטבלה.

16. הוכח, כי סידרה שתבניתה $a_n = 4n - 7$ היא סידרה חשבונית.

שים לב! הוכחה חייבת להיות כללית, לגבי כל n ולא מספיק להראות, כי התכונה מתקיימת לגבי מספר איברים של סדרה חשבונית.

הדרכה: השתמש בהגדרה לפי כלל נסיגה של סידרה חשבונית.

17. הוכח, כי סידרה שתבניתה $a_n = n^2 + 2n$ אינה סידרה חשבונית. האם היא סידרה הנדסית? הוכח!



פסק זמן

נערה בחופשה
עבודה לה חפשה.
לחנות פרחים נגשה
להיות שליחה בקשה.

(א) "לפי בחירתך בכל יום מראש,
אחת מהשתיים תוכלי לדרוש.
אפשרות ראשונה" לה אמר המוכר,
"15 ש"ח לכל זר".

(ב) "אפשרות שניה אם תבחרי,
עבור הזר הראשון שתמסרי
התשלום יהיה מועט:
אגורה אחת בלבד.

אך 2 אגורות לזר השני,
4, אם את השלישי תתני,
8 אגורות לזר הבא שתובילי
וכך הלאה התשלום תכפילי".

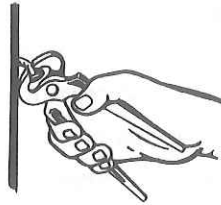
אילו רציתם להיות שליחים,
ולהחליט הייתם צריכים.
מה הייתם למוכר משיבים,
איזו אפשרות אתם מעדיפים?



18. נתונה סידרה חשבונית שאיבריה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ והפרשה d.

אילו מהפעולות הבאות על כל איבר יוצרות סידרה חדשה שגם היא חשבונית?
נמק.

אם הסידרה החדשה חשבונית, מצא את הקשר בין הפרשה להפרש הסידרה המקורית.



(א) הוספת מספר קבוע לכל איבר.

(ב) הכפלת כל איבר במספר קבוע.

(ג) העלאת כל איבר בריבוע.

(ד) מחיקת כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

(ה) מחיקת כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

(ו) סידרת ההופכיים לאיברי הסידרה הנתונה.

19. נתונה סידרה הנדסית שאיבריה $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ ומנתה q.

אילו מהפעולות של תרגיל 18 יוצרות סידרה חדשה שגם היא הנדסית? נמק.
אם הסידרה החדשה הנדסית, מצא את הקשר בין מנתה לבין מנת הסידרה הנתונה.

20. נתונה הסידרה:

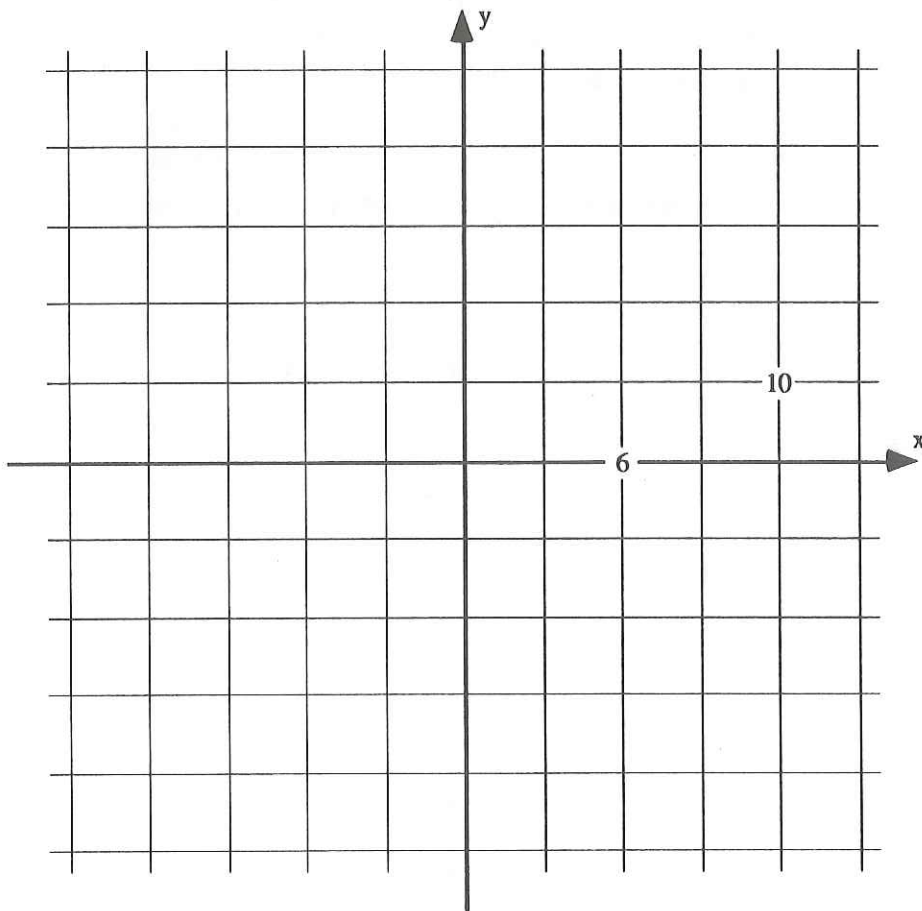
$$2, 5 \cdot 3, 8 \cdot 3^2, 11 \cdot 3^3$$

(א) רשום את האיבר הבא בסידרה.

(ב) נסה למצוא תבנית לסידרה.

סדרות במערכת צירים

1. לפניך מערכת צירים. כל יחידה 1 ס"מ. נתונה תבנית המספר $3x - 2y$.
בחר נקודה במערכת הצירים. לדוגמא: $(4, 1)$.
הצב את שיעוריה בתבנית המספר. בדוגמא שלנו: $3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$.
רשום את תוצאות ההצבה על הנקודה שאת שיעוריה בחרת.



מלא באופן זה את כל הלוח.
שים לב! אם תעבוד באופן שיטתי (לאורך שורות או בטורים), תגלה שנחסכה
לך עבודה רבה.

2. לפניך לוח כמו שהתבקשת להכין בשאלה 1.

- (א) מצא את מקום הצירים.
- (ב) מה תוכל לומר על סדרות המספרים הרשומים לאורך שורות בלוח?
הסבר.
- (ג) מה תוכל לומר על סדרות המספרים הרשומים לאורך טורים בלוח?
הסבר.
- (ד) התוכל למצוא בלוח סדרות נוספות?
- (ה) הנח סרגל שקוף על הלוח בכיוון כלשהו. האם אחד משולי הסרגל עובר דרך מספרים המהווים סידרה חשבונית? אם כן, מהו הפרשה?
- (ו) מצא על הלוח אוסף מספרים המסודרים על ישר והמהווים סידרה חשבונית שהפרשה 7.
- כמה אוספים כאלה תוכל למצוא? מה המשותף לכולם?

-24	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9
-22	-19	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11
-20	-17	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13
-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15
-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17
-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19
-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21
-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20	23
-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	25
-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
-4	-1	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29

3. א) הצב בתבנית המספר $3x - 2y$ במקום x ו- $(y + 1)$ במקום y ופשט.
 מה הקשר בין התבנית שקיבלת לבין התבנית המקורית?
 תן על-פי חישוב זה הוראות כדי למצוא בלוח סידרה חשבונית
 שהפרשה 4.

ב) הצב בתבנית המספר $3x - 2y$ במקום x ו- $(y - 3)$ במקום y ופשט.
 מה הקשר בין התבנית שקיבלת לבין התבנית המקורית?
 מצא סדרות הקשורות לחישוב זה.

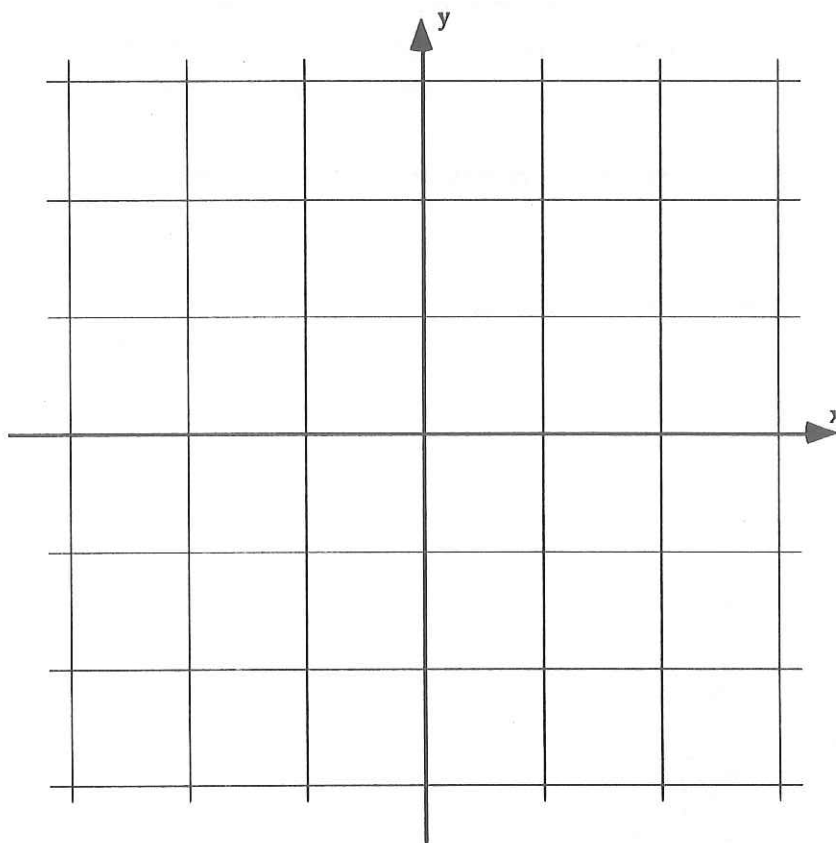
ג) תן הוראות למציאת אוסף מספרים לאורך ישר המהווים סידרה חשבונית קבועה.

ד) תן הוראות למציאת אוסף מספרים לאורך ישר המהווים סידרה חשבונית יורדת. הכלל.



4. לפניך מערכת צירים ותבנית המספר $2^x \cdot 3^y$.
 הצב גם הפעם את שיעוריה של כל נקודה בעלת שיעורים שלמים בתבנית
 הנתונה ורשום את תוצאות ההצבה על הנקודה שבחרת.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^0 = 1 \quad \text{זכור!}$$



5. (א) מה תוכל לומר על סדרות המספרים הרשומים לאורך שורות במערכת

הצירים? התוכל להסביר מדוע זה קורה?

$$\text{זכור! } 2^{x+1} = 2^x \cdot 2$$



(ב) חזור על השאלה לגבי טורים במערכת הצירים.

(ג) התוכל למצוא בלוח סדרות נוספות?

(ד) הנח על מערכת הצירים סרגל שקוף בכיוון כלשהו.

עובר דרך מספרים המהווים סידרה.

מהו המספר הבא בסידרה זו? בדוק על ידי הצבה בתבנית המספר?

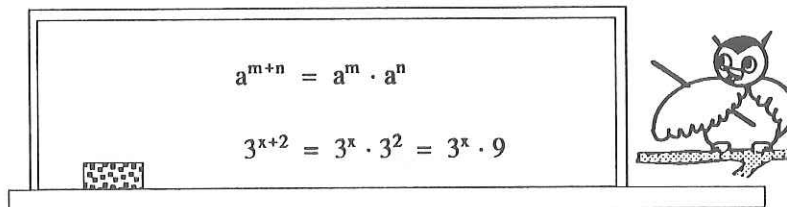
(ה) התוכל למצוא במערכת הצירים סידרה הנדסית שמנתה 12? הסבר.

6. (א) הצב בתבנית המספר $2^x \cdot 3^y$,

במקום x ו- $(y+2)$ במקום y ופשט.

מה הקשר בין התבנית שקיבלת לתבנית המקורית?

תן הוראות למציאת סידרה הנדסית שמנתה 18.



(ב) מצא במערכת הצירים סידרה הנדסית שמנתה $\frac{2}{3}$.

(ג) התוכל למצוא בלוח סידרה הנדסית שמנתה 1.5? הסבר.

(ד) תן הוראות למציאת סידרה הנדסית שמנתה 108.

(ה) באילו כיוונים תמצא בלוח סדרות הנדסיות עולות? יורדות? הסבר באופן מתמטי.

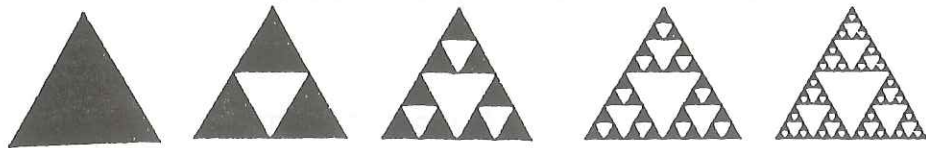
שטיחים מחוררים ופתיחים עוקצניים



השטיח המחורר של Sierpinski

"נוציא את האמצעי" של משולש שווה-צלעות על-ידי חיבור אמצעי צלעותיו והסרת המשולש הפנימי (ראה שרטוט).

נחזור על הפעולה הזאת, כאשר בכל שלב "נוציא את האמצעי" של המשולשים הנותרים (ראה שרטוט).



1. נניח, כי שטח של המשולש המקורי, הלא מחורר הוא יחידה אחת.

(א) מצא את שטחי השטיח בחמשת השלבים הראשונים.

(ב) מהו היחס בין שטחי השטיח בשני שלבים סמוכים?

(ג) רשום נוסחת נסיגה לסידרת שטחי השטיח.

(ד) רשום תבנית לסידרה.

(ה) בשלב מסויים היה שטח השטיח בערך 0.1 יחידה.

באיזה שלב זה קרה?

מה היה שטחו של השטיח בשלב הקודם?

(ו) באיזה שלב יתפוס לראשונה שטח השטיח פחות מאחוז אחד משטח המשולש המקורי?

2. נניח, כי היקף המשולש המקורי, הלא מחורר הוא יחידה אחת.

א) מצא את היקפי השטיח בחמשת השלבים הראשונים.
ההיקף כולל, כמובן, גם את שולי החורים הנוצרים.

ב) מהו היחס בין היקפי השטיח בשני שלבים סמוכים?

ג) רשום נוסחת נסיגה לסידרת היקפי השטיח.

ד) רשום תבנית לסידרה.

ה) באיזה שלב יהיה היקף השטיח באורך של כ-5 יחידות (כלומר, פי 5 מהיקף המשולש המקורי)?

ו) באיזה שלב יעבור לראשונה היקף השטיח את האורך של 1,000 יחידות?

3. נניח, כי נמשיך את תהליך "הוצאת האמצע" פעמים רבות למדי.

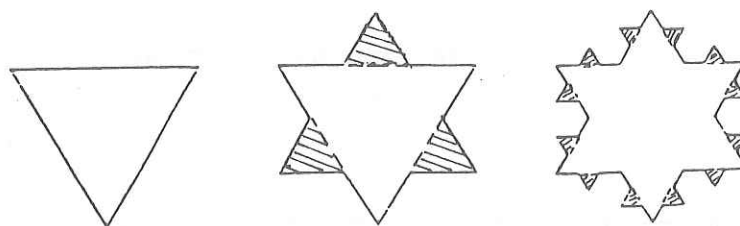
מה יקרה, לדעתך, לשטחו של השטיח?

מה יקרה, לדעתך, להיקפו של השטיח?

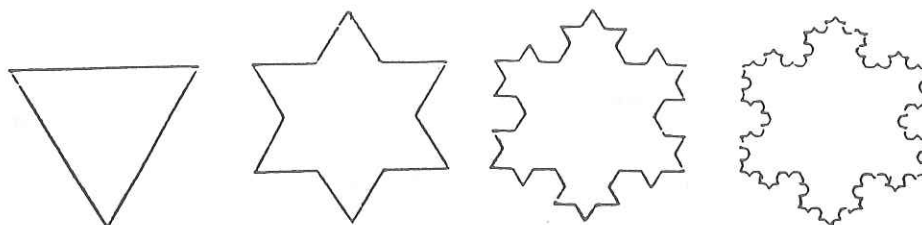


פתיתי שלג עוקצניים

"נבנה קוצים" על צלעותיו של פתית קודם על-ידי הצמדת משולשים שווים-צלעות שאורך צלעותיהם הוא $\frac{1}{3}$ מאורך הצלע של הפתית הקודם. "קוצים" אלה בנויים על השליש האמצעי של כל צלע (ראה שרטוט).



נחזיר על פעולה זאת, כאשר בכל שלב "נבנה קוצים" על צלעותיו של הפתית הקודם (ראה שרטוט).



1. נניח, כי הפתית המקורי הוא משולש שווה-צלעות שהיקפו יחידה אחת.

- (א) מצא את היקפי הפתית בחמשת השלבים הראשונים.
- (ב) מהו היחס בין היקפי הפתית בשני שלבים סמוכים?
- (ג) רשום נוסחת נסיגה לסידרת היקפי הפתית.
- (ד) רשום תבנית לסידרה.
- (ה) בשלב מסויים היה היקף הפתית בערך 10 יחידות. באיזה שלב זה קורה?
- מה היה היקף הפתית בשלב הקודם?
- (ו) באיזה שלב יעבור לראשונה היקף הפתית את האורך של 1,000 יחידות?

2. נניח, כי שטח המשולש המקורי הוא יחידה אחת.
מצא את שטחי הפתית בארבעת השלבים הראשונים.
(הערה: נוח לרשום את השטחים כסכום של "תוספות").

3. נניח, כי נמשיך את תהליך "בניית הקוצים" פעמים רבות למדי.

(א) מה יקרה, לדעתך, להיקף הפתית?

(ב) מה יקרה, לדעתך, לשטח הפתית?



