שלוש יחידות

סדרות ופונקציות נוספות

מהדורה מורחבת

מהדורת עיצוב

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

שלוש יחידות

סדרות ופונקציות נוספות

מהדורה מורחבת

מהדורת עיצוב

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

יוצא לאור במסגרת
המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט
מיסודם של
משרד החינוך התרבות והספורט, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

מהדורה ראשונה, 1995
מהדורת עיצוב מורחבת, 2000
דפוס ניידט בע"מ

חובר על-ידי:

נורית הדס

אורלי גוטליב

ייעוץ:

אברהם הרכבי

מיכאל קורן

צוות ניסוי:

שרה קירו

רחל בוהדנא

אורלי גוטליב

הדפסה ועריכה:

יעל עמנואל-אדרי

פעילויות מחשב:

אבי טל

שרטוטים:

חגית עפרוני

עיצוב והפקה:

אגי (רחל) בוקשפן

לתלמיד

ספר זה מיועד לתלמידים הלומדים לקראת 3 יחידות.
נקודת המוצא היא ההכרות שיש לך, עם נושא הסדרות מלימודיך בשנים קודמות ובעיקר ממבחנים פסיכומטריים שונים ומשעשועונים.
נושא הסדרות משתלב בנושא האנליזה. בעקבות לימוד פרק א' העוסק בסדרות, תלמד להכיר, בפרק ב', שתי משפחות חדשות של פונקציות, הפונקציות המעריכיות והפונקציות הלוגריתמיות.
בגירסה חדשה זו הושלמו תתי נושאים הקשורים בתכנית הלימודים של שלוש יחידות כגון: גידול ודעיכה ומשוואות מעריכיות.
כמו-כן בגירסה זו נוספו פעילויות מחשב.

אודותיו נאונה לכיתות י"ב תשנ"ה בבית הספר ויצ"ו ברמזבות, בביה"ס הכללי בקרית מלאכי ובבית הספר האזורי בגבעת ברנר, על שיעול הפעולה והנכונות שגילו כאשר למדו מגירסת הניסוי של הספר. תגובותיהם והערותיהם עזרו לנו רבות בעיצוב הגירסה הנוכחית.

תוכן עניינים

באור סמלים:

תרגיל "מפתח" - לדיון		תרגיל אתגר	
עבודה עצמית		סיכום	
שים לב		תזכורת	
מחשבון		הכנה	

פרק א' – סדרות

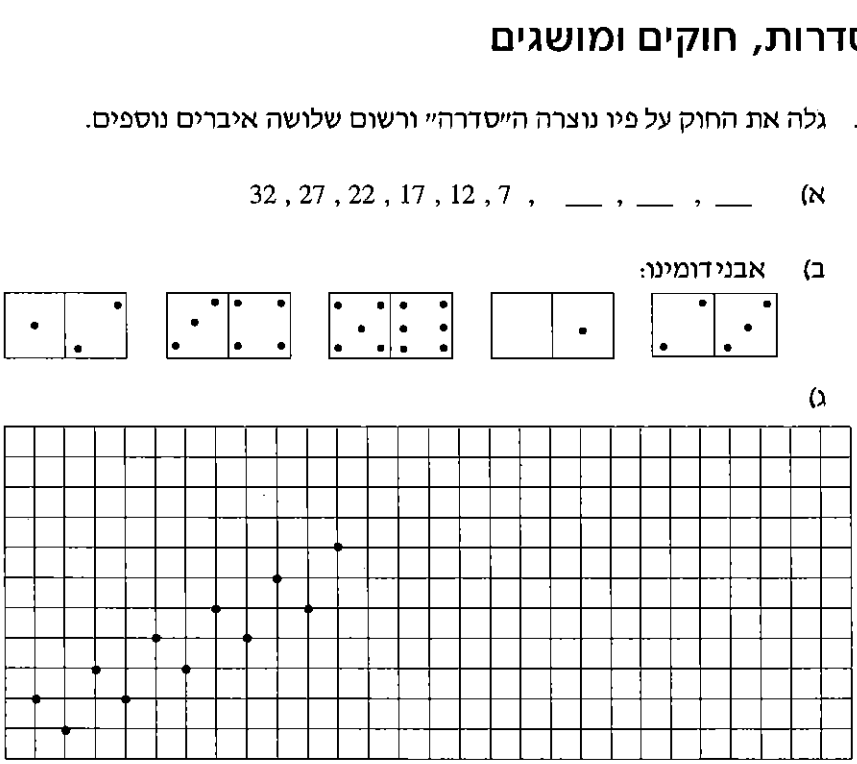
סדרות, חוקים ומושגים

1. גלה את החוק על פיו נוצרה ה"סדרה" ורשום שלושה איברים נוספים.

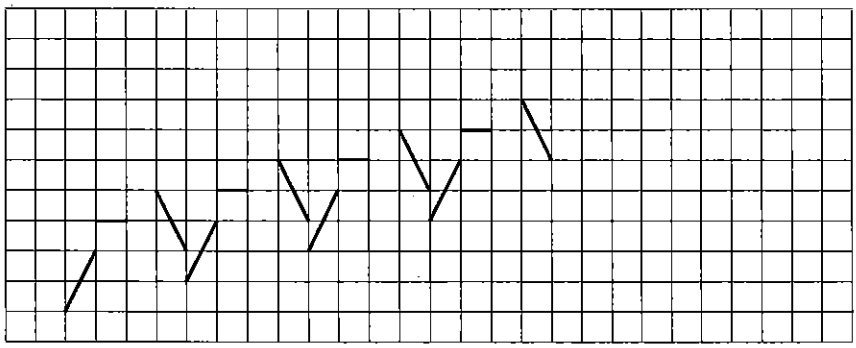
א) 7 , 12 , 17 , 22 , 27 , 32 , ___ , ___ , ___

ב) אבני דומינו:

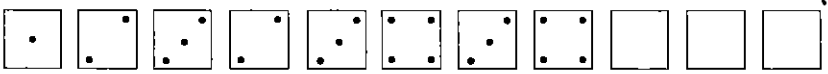
ג)



ד)



ה)



כפי שראית בדוגמאות, **סדרה** היא שורה של מספרים צורות, ציורים...
בדרך כלל, סדרה נבנית על פי חוק. המספרים, הצורות, הציורים... נקראים **איברי הסדרה**.

בתרגיל 1 היה עליך לגלות את החוק כדי להמשיך את הסדרה. בתרגיל הבא החוק (גן)

2. א) רשום שבעה איברים נוספים של סדרה, שהאיבר הראשון שלה 2 וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי תוספת 3.

2 , ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

ב) רשום שמונה איברים ראשונים של סדרה, שהאיבר הראשון שלה 2 וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי כפל ב 3.

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

במה דומות שתי הסדרות, שרשמת בסעיפים א' ו ב' ובמה הן שונות?

ג) רשום שישה איברים ראשונים של סדרה, שהאיבר הראשון שלה 128 וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי חילוק ב 2.

___ ___ ___ ___ ___ ___

ד) רשום שישה איברים ראשונים של סדרה, שהאיבר הראשון שלה 196 וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי חילוק ב 2.

___ ___ ___ ___ ___ ___

במה דומות שתי הסדרות, שרשמת בסעיפים ג' ו ד' ובמה הן שונות?

ה) רשום שישה איברים ראשונים של שתי סדרות שונות זו מזו שיש להן אותו חוק.

___ ___ ___ ___ ___ ___

___ ___ ___ ___ ___ ___

ו) רשום שישה איברים ראשונים של סדרה, שהאיבר **השני** שלה 3 וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי תוספת 4.

אחת הדרכים ליצור סדרה, היא לקבוע את החוק ואת האיבר הראשון (או איבר אחר בסדרה).

לכל איבר יש **מקום** בסדרה.

למשל בסדרה ... 15 , 13 , 11 , 9 , 7 , 5 , 3 , 1 האיבר 9 מופיע במקום **החמישי** ובמקום **התשיעי** יופיע האיבר 17.

3. א) המשך את הסדרה ומצא את האיבר העשירי.

$-5\ ,\ -1\ ,\ 3\ ,\ 7\ ,\ \ldots$

ב) רשום במילים מהו החוק על פיו נבנתה הסדרה?

ג) האם 27 הוא איבר בסדרה? אם כן, באיזה **מקום** הוא מופיע ?

ד) האם 42 הוא איבר בסדרה? אם כן, באיזה **מקום** הוא מופיע?

4. המשך את סדרת ההפרשים ואחר כך המשך את הסדרה המקורית.

א)

1 2 4 7 11 __ __

1 2 3 4 __ __ __

ב)

3 2 3 1 3 0 3 __ __ __

-1 1 -2 2 -3 3 __ __ __

לעתים מגיעת סדרת ההפרשים של איברי הסדרה מסיימת בגילוי החוק ומאפשרת להמשיך את הסדרה הנתונה.

תרגילים

5. הוסף שני איברים לכל סדרה ורשום את החוק במילים.

א) 2 , 6 , 10 , 14 , 18 , 22 , 26 , ___ ___

ב) 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 , ___ ___

ג) 1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , 22 , 29 , ___ ___

ד) 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , ___ ___

6. – אסף טען, שאם לשתי סדרות אותו חוק, אז לשתיהן אותם איברים בדיוק.

– איילת טענה, שיתכנו שתי סדרות, שאין להן אף איבר משותף ובכל זאת יש להן אותו חוק.

– חגית טענה, שאם יש לשתי סדרות אותו חוק, אז לפחות חלק מהאיברים של שתי הסדרות שווים.

מי צודק? נמק בעזרת דוגמאות.

7. א) רשום חמישה איברים ראשונים של שתי סדרות שונות, שהחוק שלהן: כל איבר מתקבל מקודמו על ידי תוספת 2.

ב) רשום חמישה איברים ראשונים של שתי סדרות שונות, שהחוק שלהן: כל איבר מתקבל מקודמו על ידי כפל ב 2 ותוספת 1.

8. א) רשום שתי סדרות **שונות**, שיש להן אותו איבר ראשון.

ב) רשום שתי סדרות **שונות**, שיש להן אותם שני איברים ראשונים.

ג) רשום שתי סדרות **שונות**, שיש להן אותו חוק.

9. האיבר הראשון של סדרה הוא 3 וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי הורדת 1 וכפל ההפרש ב 2.

א) רשום את שמונה האיברים הראשונים של הסדרה.

ב) האם המספר 130 הוא איבר בסדרה? אם כן מה מקומו?

ג) האם 12 הוא איבר בסדרה? אם כן, מה מקומו?

ד) האם 300 הוא איבר בסדרה? אם כן, מה מקומו?

10. המשך את סדרת ההפרשים ואחר כך המשך את הסדרה המקורית.

א) הסדרה 2 3 6 11 18 27 __ __

ההפרשים 1 3 5 7 9 __ __

ב) הסדרה 12 11 9 6 2 -3 -9 __

ההפרשים -1 -2 __ __ __ __ __

ג) הסדרה 1 3 7 15 31 __ __

ההפרשים 2 4 8 16 __ __

ד) הסדרה 2 __ __ __ __ __ __ __

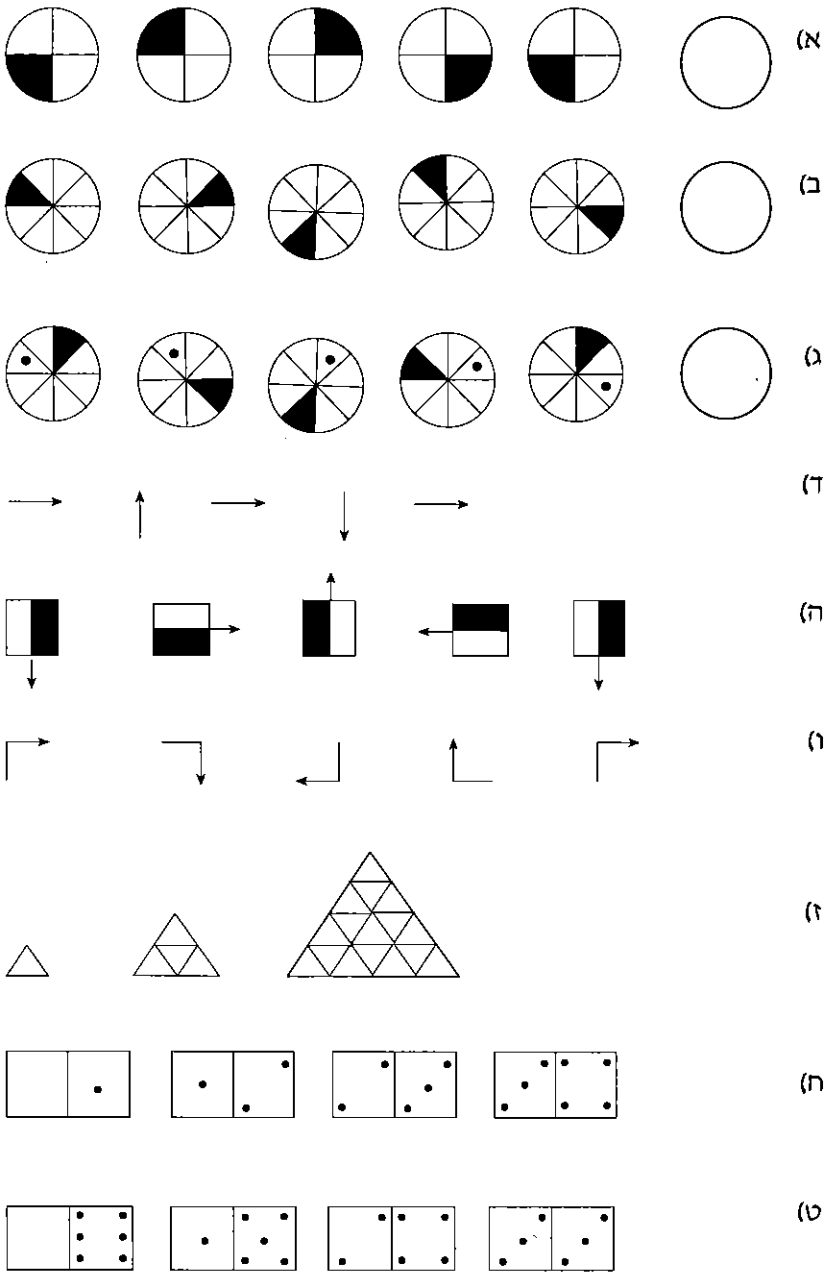
ההפרשים 15 13 11 9 __ __ __

ה) החוק של סדרת ההפרשים: כל הפרש גדול ב 2 מקודמו

הסדרה 5 __ __ __ __

ההפרשים 3 __ __ __ __

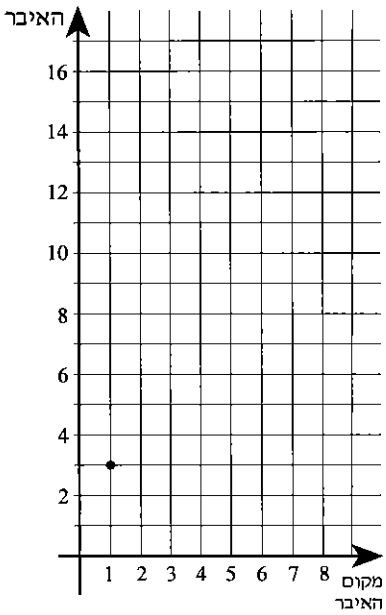
11. גלה את החוק והוסף איבר לכל סדרה.



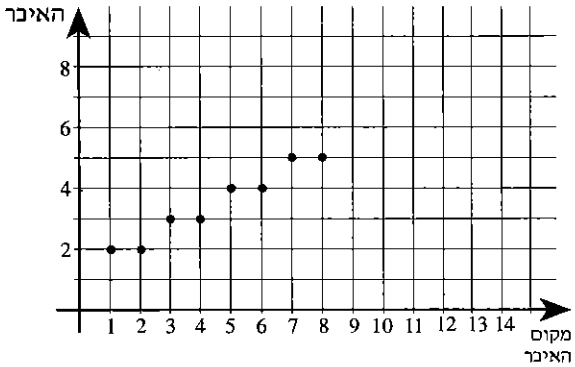
סדרות ותאורן

אפשר לתאר סדרה של מספרים גם בעזרת גרף. על ציר x נייצג את **מקומם של האיברים** ועל ציר y את **האיברים עצמם**.
הגרף שיתקבל הוא גרף של נקודות.

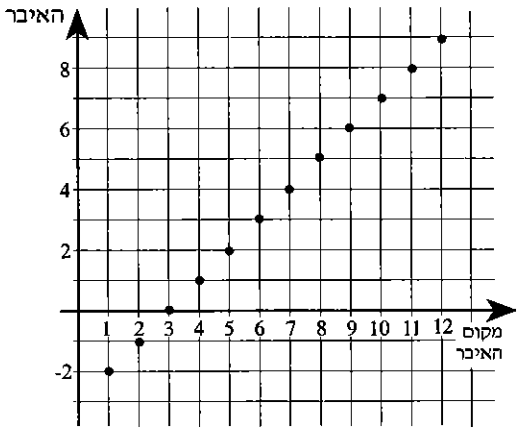
1. א) במקום **הראשון** בסדרה ... , 9 , 7 , 5 , 3 מופיע 3 .
הנקודה (1, 3) מסומנת במערכת הצירים.
במקום **השני** מופיע 5 סמן במערכת הצירים את הנקודה (2, 5).
במקום **השלישי** בסדרה מופיע 7.
סמן את הנקודה במערכת הצירים.
המשך את איברי הסדרה עד המקום השמיני, רשום וסמן אותם במערכת הצירים.



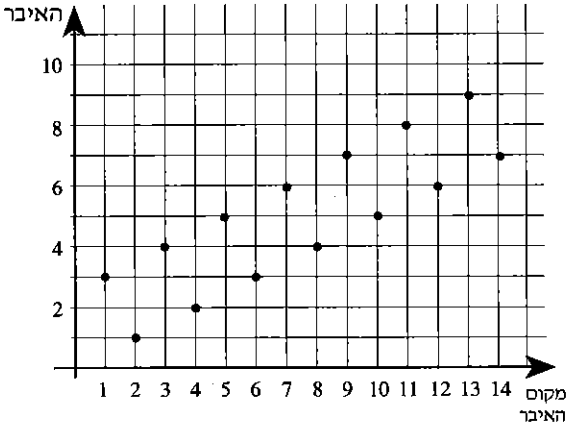
ב) המשך את הגרף המתאים לסדרה הבאה, עד המקום ה 12 .
... 5 , 4 , 4 , 3 , 3 , 2 , 2



2. א) רשום 20 איברים ראשונים של הסדרה המתוארת בגרף.

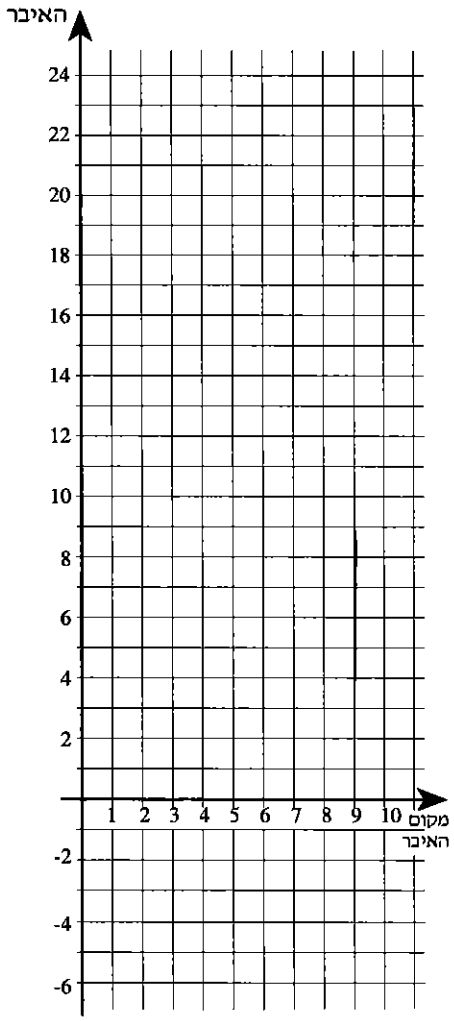


ב) רשום 16 איברים ראשונים של הסדרה המשורטטת בגרף, ורשום גם את סדרת ההפרשים.

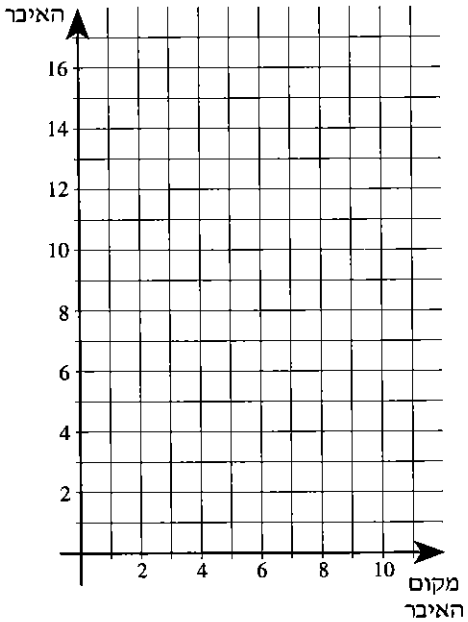


ע"ע 3. המשך כל סדרה לפי הכתוב בסעיף, וסמן את האיברים במערכת הצירים:

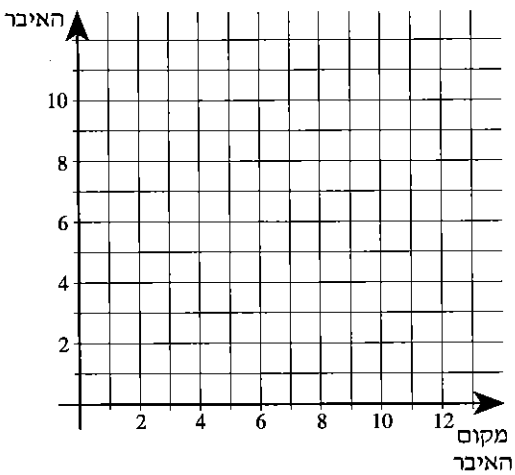
א) עד המקום השמיני $-5, -1, 3, 7, 11, \ldots$



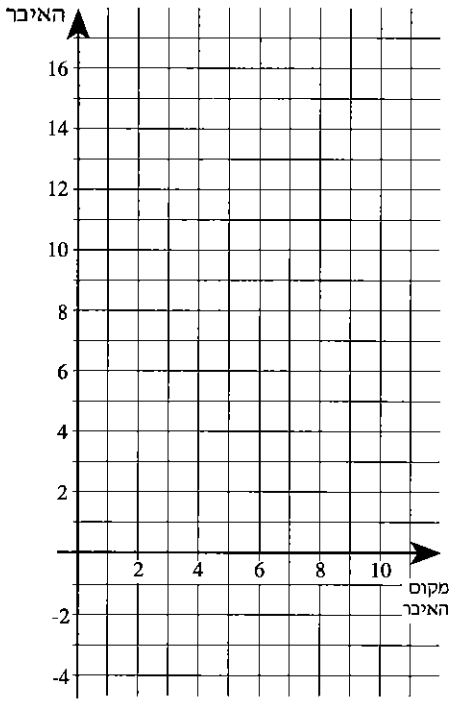
ב) עד המקום השביעי $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , 4 , ...



ג) עד המקום העשירי 0 , 3 , 2 , 5 , 4 , 7 , 6 . . .



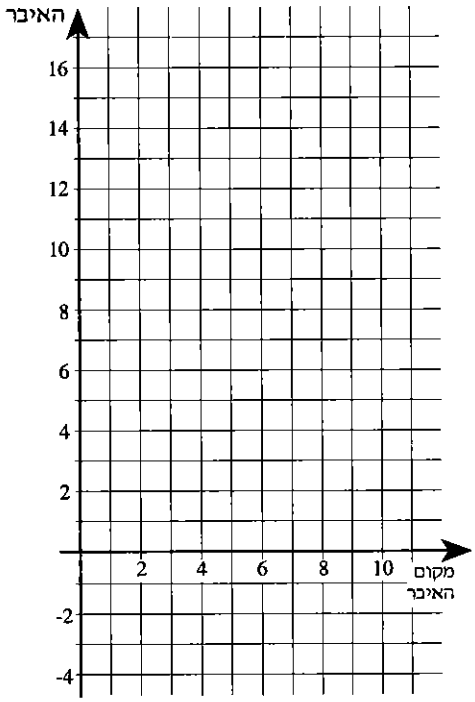
4. א) רשום שמונה איברים ראשונים של סדרה שהאיבר הראשון שלה 3– וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי תוספת 2.
סמן את האיברים במערכת הצירים.



ב) רשום שמונה איברים ראשונים של סדרה שהאיבר הראשון שלה 1 וכל איברי מתקבל מקודמו על ידי תוספת 2.
סמן בצבע אחר את האיברים במערכת הצירים הנ"ל.

ג) רשום שמונה איברים של שתי סדרות שונות להן אותו חוק ואיבר ראשון שונה.

סמן נקודות מתאימות במערכת הצירים. (לכל סדרה צבע משלה.)



ד) מה תוכל לומר על גרפים של שתי סדרות שיש, להן אותו חוק ואיבר ראשון שונה?

נהוג לסמן את איברי הסידרה בצורה: $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots\ldots$

המספר מציין את מקומו של האיבר בסדרה.

5. א) המשך את הסדרה:

-14 , -11 , -8 , -5 , -2 , ___ ___ ___ ___

ב) השלם:

$a_{10} =$ $a_7 =$ $a_1 =$ $a_3 = -8$

$a_{12} =$ $a_8 =$ $a_6 =$ $a_4 =$

6. א) בסדרה נתון $a_1 = -1$ וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי כפל ב 2 והורדה של 1.

רשום שישה איברים **ראשונים** של הסדרה.

השלם: $a_7 =$

$a_{10} =$

ב) בסדרה נתון $a_3 = 5$ וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי תוספת 3.

רשום שישה איברים **ראשונים** של הסדרה.

7. נתון: $a_1 = -14$ $a_4 = 1$

$a_2 = -9$ $a_5 = 6$

$a_3 = -4$ $a_6 = 11$

רשום שמונה איברים ראשונים של הסדרה.

-14 , ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

תרגילים

8. המשך את הסדרות (שים לב להפרשים).

א) 1 2 5 10 17 26 37 __ __

1 3 5 7 __ __ __ __

ב) 5 13 20 26 31 35 __ __

8 __ __ __ __ __ __

ג) -10 -8 -4 2 10 20 __ __

2 __ __ __ __ __ __

ד) 50 , 49 , 47 , 44 , 40 , 35 , __ __

ה) 1 , 3 , 7 , 15 , 31 , __ __

ו) −3 , 0 , 5 , 12 , 21 , 32 , __ __

9. השלם ומצא בכל סדרה את a_8.

א) $a_8 =$ 1 , 3 , ___ ___ ___ , 11 , ___ ___

ב) $a_8 =$ $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, ___ ___ ___ ___

ג) $a_8 =$ -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , ___ ___ ___

ד) $a_8 =$ 0 , 1 , 3 , 6 , ___ , 15 , ___ ___

ה) $a_8 =$ 1 , 3 , 7 , 13 , 21 , ___ ___ ___

ו) $a_8 =$ ___ -3 , -1 , 2 , 6 , 11 ___

10. א) $a_1 = 2$ וכל איבר בסדרה מתקבל מקודמו על ידי העלאה בריבוע.
מצא את a_3 ואת a_5.

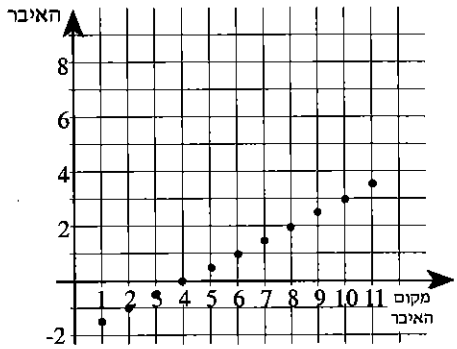
ב) $a_3 = 4$ וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי תוספת 2 .
מצא את a_4, את a_5, ואת a_1.

ג) $a_1 = 3$ וכל איבר מתקבל על ידי חיבור האיבר הקודם עם מקומו של האיבר הקודם. מצא את a_2, את a_3, ואת a_4.

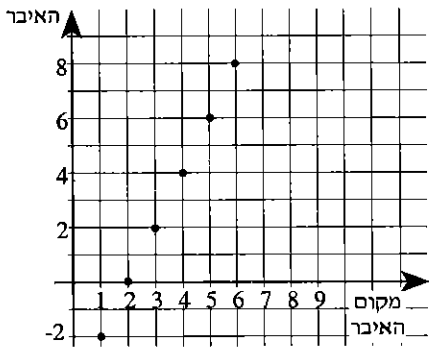
ד) $a_2 = 8$ וכל איבר מתקבל מקודמו על ידי חילוק ב 2 .
מצא את a_5, את a_6, ואת a_1.

11. רשום את איברי הסדרה על פי הגרף והוסף 3 איברים.

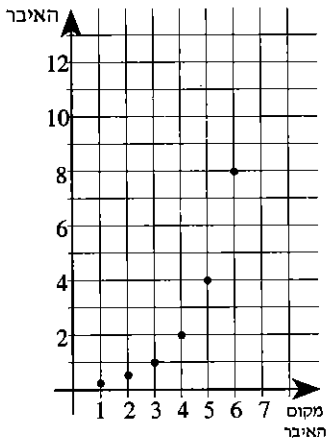
א)



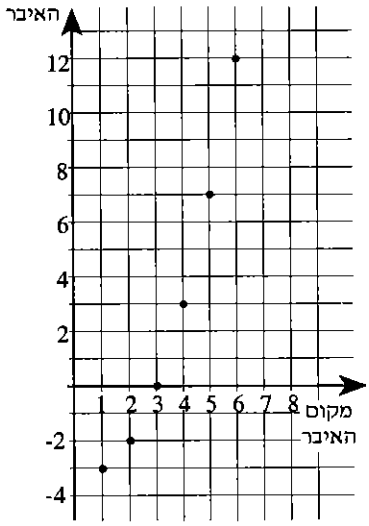
ב)



ג)



ד)



12. יוסי קיבל מכתב מדודתו העשירה ברטה.

יוסי היקר!

כעת הגעתי לגיל 65 ואני חיה בנוחות ובאושר. ברצוני לתת לך חלק מכספי.
תוכל לבחור באחת מהאפשרויות.

אפשרות 1: אתן לך השנה $1000, בשנה הבאה $1100 וכן הלאה, בכל שנה ב $100 יותר, מבשנה הקודמת.

אפשרות 2: אתן לך השנה $2000, בשנה הבאה $1900 וכך הלאה, בכל שנה ב $100 פחות, מבשנה הקודמת.

אפשרות 3: אתן לך השנה $100, בשנה הבאה פי 1.5 מסכום זה (100·1.5) וכך הלאה, בכל שנה פי 1.5 מבשנה הקודמת.

אפשרות 4: אתן לך השנה $8, בשנה הבאה $16, בשנה שלאחריה $32 וכך הלאה, בכל שנה פי 2 מבשנה הקודמת.

כמובן שהסכם זה יהיה תקף כל עוד אני בחיים. הודע לי בהקדם את החלטתך.

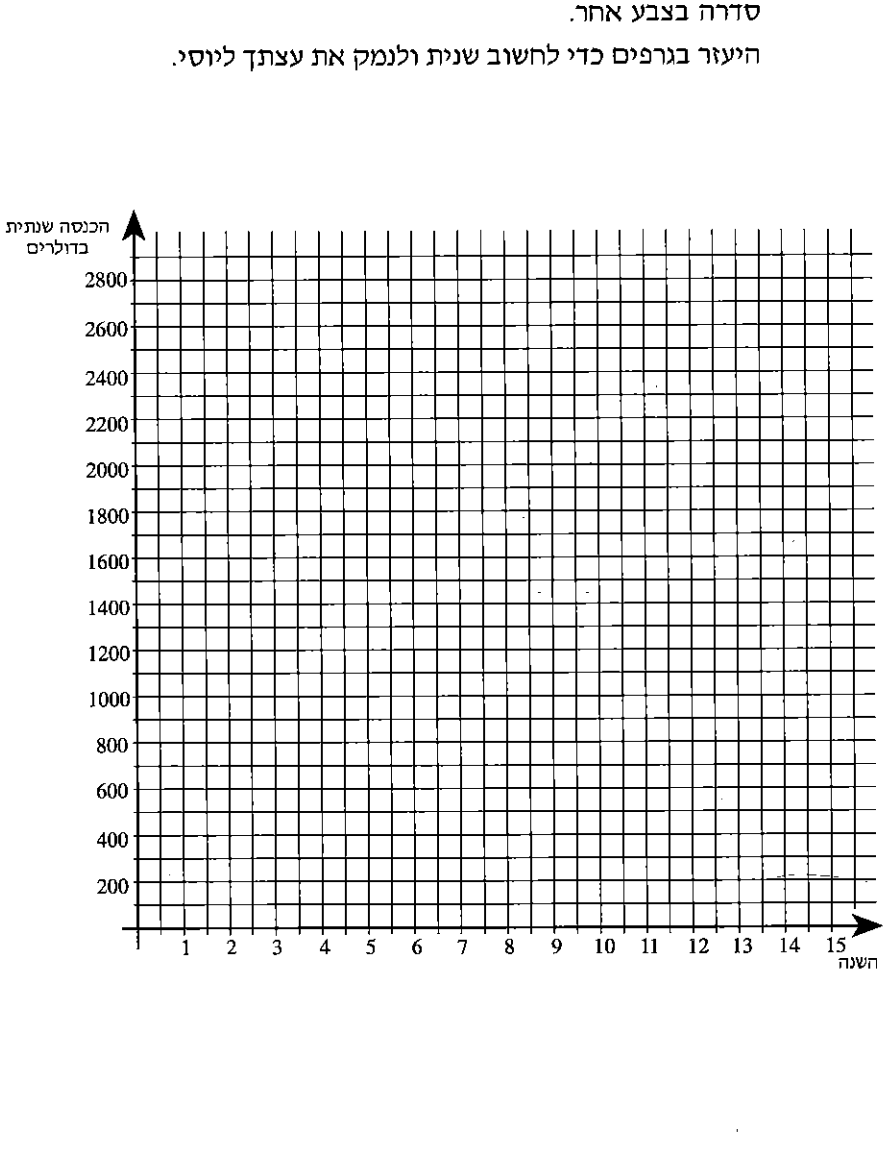
באהבה דודה ברטה.

יוסי הוא בזבזן. כלומר, בכל שנה ודאי יוציא את כל הכסף שיקבל באותה שנה. לכן מה שמעניין אותו, זו ההכנסה השנתית ולא הסכום המצטבר.

א) רשום את הסדרות השונות ויעץ ליוסי במה לבחור.

ב) סמן במערכת הצירים, נקודות המתאימות לכל אחת מהסדרות, כל סדרה בצבע אחר.

היעזר בגרפים כדי לחשוב שנית ולנמק את עצתך ליוסי.



רישום החוק

1. במפגש שנתי של חבורת "יחי הרושם" נהוג שכל משתתף שמגיע, לוחץ את ידי כל אלה שהגיעו לפניו.

מס' הלחיצות

א) – כמה לחיצות ידיים התבצעו בין 3 הראשונים? $a_3 =$ ___

– כמה לחיצות נוספו, כשהגיע הרביעי?

– כמה לחיצות היו בסך הכל, בין ארבעת הראשונים? $a_4 =$ ___

– כמה לחיצות נוספו, כשהגיע החמישי?

– כמה לחיצות היו בסך הכל, בין חמשת הראשונים? $a_5 =$ ___

ב) רשום את הסדרה של מספר לחיצות ידיים. והמשך

איש אחד	2 אנשים	3 אנשים	4 אנשים	5 אנשים			
0	___	___	___	___	___	___	___

ג) רשום את החוק במילים.

אפשר לרשום זאת בקיצור:

$a_n =$ [האיבר הקודם] + [מספר האנשים שבאו לפניו]

(מספר הלחיצות שהיו) (מספר הלחיצות שנוספו)

– רשום במילים מה המשמעות של $a_9 = 36$.

– מצא, על פי a_9, את a_{10} ואת a_{11} .

2. נתון:

$$a_2 = a_1 + 3$$
$$a_3 = a_2 + 3$$
$$a_4 = a_3 + 3$$

בקיצור נרשום:

$$a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 3$$

כאשר a_n הוא האיבר במקום n (כלשהו) בסדרה.

א) הרישום הזה מאפיין חוק של סדרה. רשום את החוק במילים.

ב) בטא בעזרת האיבר הקודם:

$a_7 =$

$a_8 =$

ג) רשום שתי סדרות שונות, שמתאימות לחוק.

ע"ע 3. חוק של סדרה הוא $a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot 4$

א) בטא כל איבר בעזרת האיבר הקודם.

$a_2 = a_1 \cdot 4$

$a_3 =$

$a_5 =$

$a_{10} =$

$a_{100} =$

ב) רשום חמישה איברים ראשונים של סדרה, המקיימת את החוק אם ידוע: $a_1 = 1$.

כפי שראית גם בסעיף הקודם, כדי להגדיר סדרה יש לדעת את החוק ולפחות איבר אחד של הסדרה (למשל את ערכו של a_1).

ג) השלם את החוק על פי הסדרה

$1 , 4 , 7 , 10 , 13 , \ldots$ $\qquad a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} +$

עי"ע 4. רשום את החוק של כל סדרה, באופן דומה לרשום בתרגילים הקודמים.

א) $-3 , -1 , 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , \ldots$ $\qquad a_n =$

ב) $1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , \ldots$ $\qquad a_n =$

ג) $2 , 7 , 12 , 17 , 22 , 27 , 32 , \ldots$ $\qquad a_n =$

ד) $81 , 27 , 9 , 3 , 1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \ldots$ $\qquad a_n =$

עי"ע 5. רשום חמישה איברים ראשונים של כל סדרה.

א) $a_1 = 2$ $\qquad a_n = \dfrac{6}{\boxed{\text{האיבר הקודם}}}$

ב) $a_1 = 34$ $\qquad a_n = \frac{1}{2} \cdot \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 1$

ג) $a_1 = 3$ $\qquad a_n = 10 - \boxed{\text{האיבר הקודם}}$

6. גובהו של צמח מטפס, גדל בכל חודש ב $1\frac{1}{2}$ מ'. גובהו ברגע מסוים היה $\frac{1}{2}$ מ'.

א) רשום שישה איברים ראשונים של סדרת הגבהים של הצמח.

$\frac{1}{2}$, 2 — — — —

ב) השלם את רישום החוק המתאר כיצד מתקבל כל איבר מקודמו.

$a_n =$

עי"ע 7. לטאה נמצאת בגובה $1\frac{1}{2}$ מ' על עמוד חלק.
בכל פעם היא מטפסת לגובה כפול מזה שבו היא נמצאת ואז, בעת המנוחה, גולשת $\frac{1}{2}$ מטר למטה.

א) רשום שישה איברים ראשונים של סדרת הגבהים שלה. (כל איבר מתאר את מקומה לאחר העליה והגלישה).

$1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ — — — —

ב) השלם את רישום החוק המתאר כיצד מתקבל כל איבר מקודמו

$a_n =$

תרגילים

8. רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

א) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot 3 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} : 2 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} - 4 \end{cases}$

ד) $\begin{cases} a_3 = 2 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 7 \end{cases}$

ה) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot 2 \end{cases}$

9. נתון חוק של סדרה: $a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot 17$

א) השלם: $a_4 = a_3 \cdot$ ____ $a_{25} =$

$a_{10} =$ $a_2 =$

$a_{19} =$ $a_{200} =$

ב) רשום חמישה איברים ראשונים של סדרה, המקיימת את החוק.

10. רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

א) $a_1 = 4$ $\qquad a_n = \dfrac{1}{\boxed{\text{האיבר הקודם}}}$

ב) $a_3 = 7$ $\qquad a_n = -\boxed{\text{האיבר הקודם}}$

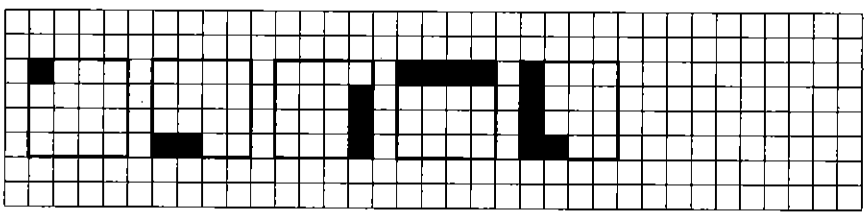
ג) $a_2 = 10$ $\qquad a_n = \dfrac{1}{\boxed{\text{האיבר הקודם}}}$

ד) $a_1 = 1$ $\qquad a_n = 2 \cdot \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 1$

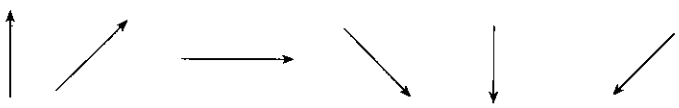
ה) $a_1 = 0$ $\qquad a_n = 2 \cdot \left(\boxed{\text{האיבר הקודם}} + 1\right)$

11. הוסף שני איברים לכל סדרה.

א)



ב)



המשך

ג)

ד)

ה)

ו)

בסימן טוב

נתונה סדרה כלשהי $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

1. האיבר **הקודם** ל- a_7 הוא a_6.
   - איזה איבר **קודם** ל a_{1000} ?
   - איזה איבר **עוקב** ל a_9 ? (האיבר שאחרי a_9.)
   - איזה איבר **עוקב** ל a_{100} ?
   - איזה איבר **עוקב** ל a_n ?
   - איזה איבר **קודם** ל a_n ?

2. סדר את האיברים בשורה, לפי מקומם הסידורי.

a_{n-2} , a_{n+1} , a_n , a_{n+2}

3. השלם, בסדרה כלשהי:

א) a_{n+1} עוקב ל _____ .	ד) a_n קודם ל _____ .
ב) a_{n-2} קודם ל _____ .	ה) a_{n-1} קודם ל _____ .
ג) a_n עוקב ל _____ .	ו) a_{n+2} עוקב ל _____ .

4. במקום לרשום חוק של סדרה בצורה: $a_n = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot 4$

אפשר לרשום את החוק באמצעות הסימון של האיבר והאיבר הקודם לו:

$a_n = a_{n-1} \cdot 4$ או השלם: $a_{n+1} = \boxed{} \cdot 4$

אפשר גם לרשום בצורות נוספות. השלם: $a_{n+2} = \boxed{} \cdot 4$

$a_{n+7} = \boxed{} \cdot 4$

בספר זה נרשום ברוב המקרים בצורה $a_{n+1} = a_n \cdot 4$

(בספרים אחרים תמצא גם שימוש בסימון $a_n = a_{n-1} \cdot 4$)

ע"ע 5. רשום בעזרת הסימון החדש.

א) $a_{n+1} = \boxed{\text{האיבר הקודם}} - 4$

ב) $a_{n+1} = \boxed{\text{האיבר הקודם}} \cdot 5 + \boxed{\text{מקומו הסידורי של האיבר הקודם}}$

ג) $a_{n+1} = \boxed{\text{האיבר הקודם}} + \boxed{\text{האיבר הקודם לקודם}}$

ע"ע 6. רשום את החוק בעזרת $\boxed{\text{האיבר הקודם}}$

דוגמה: החוק: $a_{n+1} = a_n + 7$ פירושו $a_{n+1} = \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 7$

א) $a_{n+1} = a_n \cdot 2$

ב) $a_{n+1} = (a_n)^2$

ג) $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

ע"ע 7. א) רשום בעזרת $\boxed{\text{האיבר הקודם}}$ את החוק: $a_{n+1} = a_n - 3$.

ב) רשום חמישה איברים ראשונים של סדרה המקיימת את החוק, אם $a_1 = 4$.

ג) רשום חמישה איברים ראשונים של סדרה המקיימת את החוק, אם $a_1 = 10$.

ד) רשום חמישה איברים ראשונים של סדרה המקיימת את החוק, אם $a_1 = 18$.

ע"ע 8. בסדרה נתון:

$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n \end{cases}$$

רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

הגדרת סדרה באמצעות חוק, המתאר איך מתקבל כל איבר מקודמו, וציון ערכו של a_1, או איבר אחר בסדרה, נקראת הגדרת סדרה באמצעות **כלל נסיגה.**
a_1 נקרא גם **תנאי התחלה.**

בהמשך תראה שלעתים יש צורך ביותר מאיבר אחד להגדרת סדרה בעזרת כלל נסיגה.

ע"ע 9. חשב את חמשת האיברים הראשונים של כל סדרה.

א) $\begin{cases} a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \\ a_1 = 10 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 - 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

תרגילים

10. א) מי האיבר הקודם ל a_{n+5} ?

ב) מי האיבר העוקב ל a_{n-1}?

ג) מי האיבר הקודם ל a_{n+1}?

11. רשום נכון, או לא נכון.

א) 7 מציין את **מקומו** של a_7 בסדרה.

ב) אם $a_8 = 7$, אז 7 מציין את **מקומו** של האיבר השמיני בסדרה.

ג) בכל סדרה a_8 **עוקב** ל a_7.

ד) לא יתכן **שמקומו** של איבר יהיה שווה לערכו של האיבר.

ה) $a_3 + a_2$ הוא סכום של שני איברים **עוקבים** בסדרה.

ו) אם $a_4 = 5$, אז 5 מציין את **ערכו** של האיבר הרביעי בסדרה.

ז) a_{3+1} הוא האיבר במקום הרביעי בסדרה.

ח) $a_3 + 1$ הוא האיבר במקום הרביעי בסדרה.

12. רשום את החוק בכתיב סמלים (ללא מלים).

דוגמה: $a_{n+1} = 2 \cdot \boxed{\text{האיבר הקודם}} + 3$ כתיב סמלים: $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3$

א) $a_{n+1} = 2 \cdot \left(\boxed{\text{תאיבר הקודם}} + 3\right)$

ב) $a_{n+1} = \boxed{\text{סכום של האיבר הקודם ל } a_{n+1} \text{ והעוקב ל } a_{n+1}}$

ג) $a_{n+1} = \boxed{\text{האיבר הקודם}}^{2}$

ד) $a_{n+1} = \boxed{\text{מכפלת שני האיברים הקודמים ל } a_{n+1}}$

13. חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

א) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 9 \\ a_1 = -3 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} a_{n+1} = 3 \cdot (a_n + 2) \\ a_1 = -2 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 2 \\ a_1 = -2 \end{cases}$

ד) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \\ a_1 = 10 \end{cases}$

ה) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_1 = 3 \end{cases}$

ו) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (n+1) \\ a_1 = 3 \end{cases}$

14. א) חשב את שמונה האברים הראשונים של הסדרה

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

1 , __ , __ , __ , __ ...

ב) רשום איבר ראשון וחוק אחר, כך שתתקבל אותה סדרה.

החל ממקום זה ניתן לשלב את פעילות מחשב 1 בעזרת Excel: כלל נסיגה, המופיעה בעמודים 227-230.

15. רשום כלל נסיגה לסדרה (רשום גם מהו a_1)

דוגמה: $1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , \ldots$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

א) $3 , 7 , 11 , 15 , 19 , 23 , \ldots$

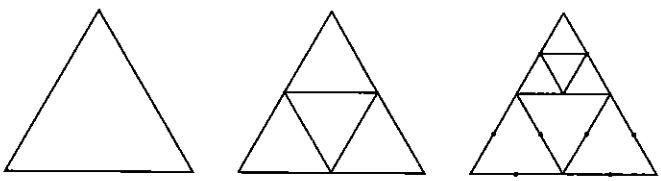
ב) $1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , \ldots$

ג) $7 , 4 , 1 , -2 , -5 , -8 , \ldots$

ד) $81 , 27 , 9 , 3 , 1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \ldots$

16. כל צורה מתקבלת מהצורה הקודמת לה על ידי חיבור אמצעי הצלעות של כל משולש, שנוצר בשלב קודם.

א) השלם את השרטוט השלישי.



ב) המשך את הסדרה המתארת את מספר המשולשים החופפים בכל צורה

1, 4, ___ ___ ___ ___ ___

ג) רשום כלל נסיגה.

כללי נסיגה שונים

ע"ע 1. חוק של סדרה כלשהי הוא $a_{n+1} = 2a_n + 1$

בטא על פי החוק, בעזרת האיבר הקודם. **דוגמה:** $a_7 = 2a_6 + 1$

(i) א) $a_8 =$ ג) $a_{100} =$

ב) $a_2 =$ ד) $a_{\square} = 2a_3 + 1$

(ii) נתון כי $a_7 = 12$ חשב את a_8 ואת a_6.

ע"ע 2. חוק של סדרה כלשהי הוא: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n + 4$.

השלם. (רשום בעזרת האיבר הקודם.)

א) $a_7 =$ ג) $a_{11} =$

ב) $a_2 =$ ד) $\_\_\_ = \frac{1}{2} \cdot a_3 + \_\_\_$

ע"ע 3. חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

א) $\begin{cases} a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 \\ a_1 = 5 \end{cases}$ ד) $\begin{cases} a_{n+1} = 2 - a_n \\ a_1 = 8 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} a_{n+1} = -(a_n + 2) \\ a_1 = 3 \end{cases}$ ה) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \\ a_1 = -5 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n \\ a_1 = 4 \end{cases}$ ו) $\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{a_n} \\ a_1 = 2 \end{cases}$

4. כל אדם שבא מביא מתנה לכל הנוכחים בחדר. a_n מייצג את מספר המתנות, שהצטברו עד שבא האדם ה-n.

א) כשבא האדם השמיני: $a_8 = a_7 + \_\_\_$

כשבא האדם התשיעי: $a_9 = a_8 + \_\_\_$

$a_{10} =$

החוק: $a_{n+1} =$

ב) חשב. (שים לב, הראשון שבא לא צריך להביא מתנה כלל), כלומר $a_1 = 0$.

$a_2 = 0 + 1 = 1$

$a_3 = a_2 + \_\_\_ = 1 + \_\_\_ =$

$a_4 =$

$a_5 =$

$a_6 =$

$a_7 =$

ע"ע 5. חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

א) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_1 = 5 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - n \\ a_1 = 30 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (n+1) \\ a_1 = 10 \end{cases}$

ד) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

6. א) כמה מספרים שונים (בני 2 ספרות) ניתן לרשום בעזרת הספרות 1 , 2? (כל ספרה פעם אחת). נסמן ב a_2 .

ב) כמה מספרים שונים (תלת ספרתיים), ניתן לרשום בעזרת הספרות 1, 2, 3? (כל ספרה פעם אחת) . נסמן ב a_3 .

ג) כמה מספרים שונים (ארבע ספרתיים), ניתן לרשום בעזרת הספרות 1, 2, 3, 4? (כל ספרה פעם אחת) נסמן ב a_4 .

(חשוב תחילה, בכמה מקומות ניתן לשלב את 4 בכל מספר שרשמת בסעיף ב'.)

המשך

ד) כמה מספרים שונים (חמש ספרתיים) ניתן לרשום בעזרת הספרות 1, 2, 3, 4, 5? (כל ספרה פעם אחת). $a_5 =$

ה) רשום כלל נסיגה מתאים. $a_{n+1} =$

7. נתון:

$a_1 = 2$

$a_2 = 4$

(כל איבר שווה לסכום שני האיברים שלפניו). $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$

א) השלם:

$a_3 = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6$

$a_4 = a_2 + a_3 =$

$a_5 =$

$a_6 =$

$a_7 =$

$a_8 =$

ב) רשום סדרה אחרת, שמקיימת את החוק $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$.

תרגילים

8. חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

א) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 7 \\ a_1 = 12 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} a_{n+1} = 2 \cdot a_n \\ a_1 = 2 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{100}{a_n} \\ a_1 = 20 \end{cases}$

ד) $\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

9. חוק של סדרה הוא $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. השלם:

א) $a_3 = a_2 + \_\_\_\_$

ב) $a_{10} = \_\_\_\_\_$

ג) $a_7 = \_\_\_\_ + a_5$

ד) $\_\_\_\_\_ = a_{11} + a_{10}$

10. חשב את חמשת האיברים הראשונים.

א) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 7 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n + 1 \\ a_1 = 4 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (n+1) \\ a_1 = 0 \end{cases}$

ד) $\begin{cases} a_{n+1} = a_{n-1} + a_n \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$

11. רשום כלל נסיגה לסדרה.

א)

$a_1 = \mathbf{1}$

$a_2 = 1 + \mathbf{2}$

$a_3 = 1 + 2 + \mathbf{3}$

$a_4 = 1 + 2 + 3 + \mathbf{4}$

$a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + \mathbf{5}$

$\vdots$

$a_{n+1} =$

ב)

$a_1 = \mathbf{1}$

$a_2 = 1 \cdot \mathbf{2}$

$a_3 = 1 \cdot 2 \cdot \mathbf{3}$

$a_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{4}$

$a_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \mathbf{5}$

$\vdots$

$a_{n+1} =$

12. א) במסגרת שבוע אימוני כושר, מבצע כל מתאמן במחלקה א', 8 כפיפות מרפקים ביום ראשון.

בכל יום עליו לבצע 2 כפיפות פחות מכפליים הכפיפות שביצע ביום הקודם!

כמה כפיפות מרפקים יבצע ביום חמישי, לפני שיצא לחופשה?

ב) במחלקה אחרת קיים **אותו חוק** אך ביום ראשון היה עליהם לבצע מספר אחר של כפיפות מרפקים.

ביום שלישי בצעו 22 כפיפות.

כמה כפיפות מרפקים בצעו ביום ה'?

כמה כפיפות מרפקים בצעו ביום א'?

ג) הגדר את הסדרות בעזרת כלל נסיגה.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \\ a_1 = \end{cases}$$

13. א) – הוסף שני איברים לסדרת השרטוטים.

– רשום מתחת לכל שרטוט, את מספר העיגולים בשרטוט והוסף עוד שני איברים לסדרת המספרים שהתקבלה.

– רשום כלל נסיגה מתאים.

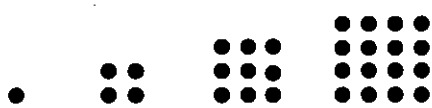
רמז: רשום תחילה כל איבר בעזרת קודמו.

$a_2 = a_1 + \_\_\_$

$a_3 =$

סדרה זו נקראת סדרת **המספרים המשולשים.**

ב) – הוסף שני איברים לסדרת השרטוטים.



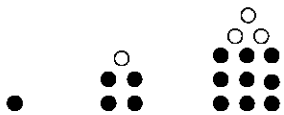
- רשום מתחת לכל שרטוט, את מספר העיגולים שבשרטוט והוסף שני איברים לסדרת המספרים שהתקבלה.

- מה יהיה לדעתך, מספר העיגולים באיבר **העשירי** בסדרה?

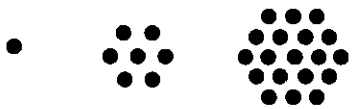
סדרה זו נקראת סדרת **המספרים הריבועיים**.

ג) – שרטט איבר נוסף בכל אחת מהסדרות הבאות.
- רשום, מתחת לכל שרטוט, את מספר העיגולים בשרטוט ונסה להוסיף עוד שני איברים לסדרת **המספרים** שהתקבלה.

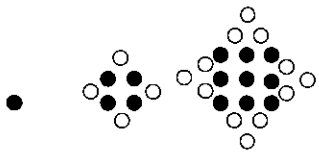
מספרים מחומשים



מספרים משושים



מספרים מכוכבים



החל ממקום זה ניתן לשלב את פעילות מחשב 2 בעזרת Excel: כלל נסיגה וגרף, המופיעה בעמודים 231-236.

סדרה לפי מקום

1. א) חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$$

מאוד לא נוח לחשב את a_{100} על פי האופן הנ"ל.

ב) חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

המשך:

$a_{\boxed{n}} = 4 \cdot \boxed{n} - 3$

$a_{\boxed{1}} = 4 \cdot \boxed{1} - 3 =$

$a_{\boxed{2}} = 4 \cdot \boxed{2} - 3 =$

$a_{\boxed{3}} =$

$a_{\boxed{4}} =$

$a_{\boxed{5}} =$

האם קבלת אותם חמישה איברים ראשונים כמו בסעיף א'?

חשב: $a_{100} =$

אפשר להוכיח, שבסעיף א' וב' הוגדרה אותה סדרה. בסעיף א' בנית כל איבר של הסדרה על פי קודמו, בסעיף ב' יכולת למצוא איברים בסדרה בלי קשר אם מצאת, או לא מצאת, איברים אחרים בה.

הגדרת סדרה, המבוססת על מקומו של האיבר בסדרה בלבד, נקראת הגדרה על פי **מקום.**

בדרך כלל קשה יותר למצוא את התבנית להגדרה על פי מקום, אך אם היא נתונה, קל יותר לחשב על פיה.

2. הכלל לפי מקום של סדרה הוא $a_{\boxed{n}} = 5 \cdot \boxed{n} - 3$

א) חשב את ששת האיברים הראשונים.

$a_{\boxed{1}} = 5 \cdot \square - 3 =$ המשך!

$a_{\boxed{2}} = 5 \cdot \square - 3 =$

$a_{\boxed{3}} =$

$a_{\boxed{4}} =$

$a_{\boxed{5}} =$

ב) רשום את האיברים בשורה והוסף עוד 3 איברים.

2 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

ג) חשב: $a_9 =$ $a_{50} =$ $a_{100} =$

ד) רשום כלל נסיגה לסדרה הנ"ל.

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

3. ע"ע

א) חשב את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה:

$a_{\boxed{n}} = 2^{\boxed{n}}$ $a_{\boxed{3}} =$

$a_{\boxed{1}} = 2^{\boxed{1}}$ $a_{\boxed{4}} =$

$a_{\boxed{2}} = 2^{\boxed{2}}$ המשך!

ב) רשום את האיברים בשורה והוסף עוד 3 איברים

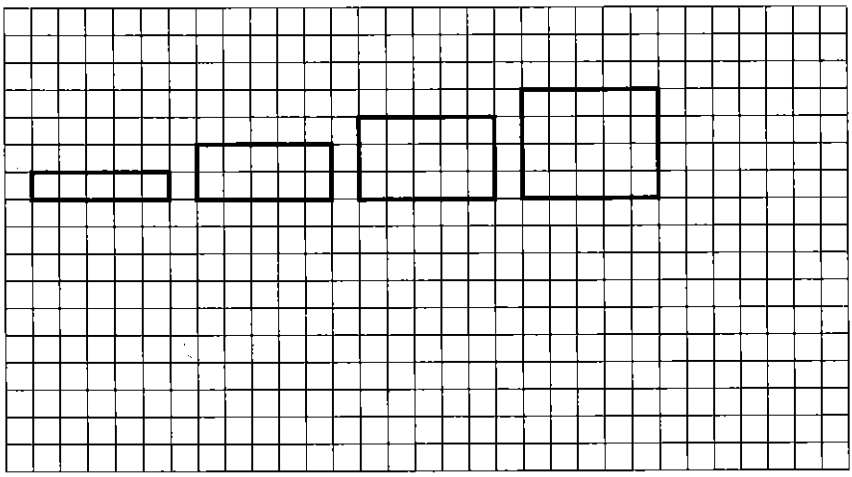
2 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

ג) חשב את a_8 ואת a_{20}.

רשום כלל נסיגה לסדרה הנ"ל.

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

4. א) המשך ובנה מלבנים נוספים ורשום בכל מלבן את שטחו (יחידת המידה משבצת).



ב) רשום את סדרת המכפלות המתארות את השטחים של המלבנים המשורטטים, והוסף לה איברים, שאינם משורטטים.

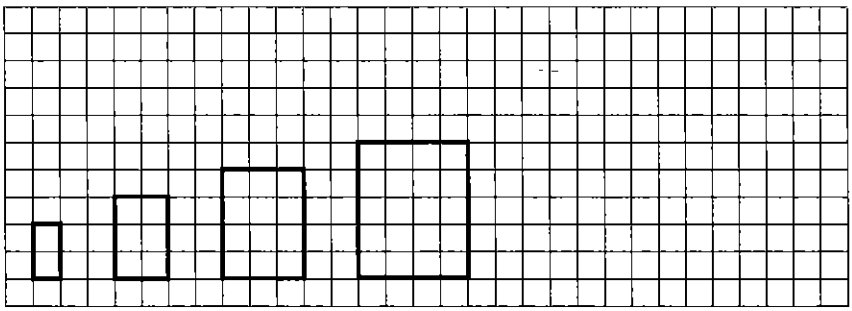
$5\cdot1$ $5\cdot2$ ___ ___ ___ ___ ___

ג) רשום תבנית לפי מקום (בעזרת n).

ד) רשום כלל נסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

5. א) המשך ובנה מלבנים נוספים, רשום על הצלעות את אורכן ובתוך המלבן את שטחו. (יחידת המידה משבצת).



ב) רשום איברים ראשונים של סדרת השטחים:

1 · 2 2 · 3 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

ג) רשום תבנית מתאימה לפי מקום (בעזרת n).

ד) רשום שנית את סדרת השטחים לאחר חישוב ומצא גם את סדרת ההפרשים.

השטחים: 2 , 6 , ___ ___ ___ ___ ___ ___

סדרת ההפרשים: 4 ___ ___ ___ ___ ___ ___

ה) תאר במילים, בעזרת ההפרשים, איך מתקבל כל איבר מקודמו בסדרה המקורית.

בסדרה זו קל למצוא את איברי הסדרה ואולי גם לקבוע את חוק הסדרה על פי המקום, אך קשה יותר לרשום כלל נסמה.

תרגילים

6. א) חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

$a_{\boxed{n}} = 5 + 2 \cdot \boxed{n}$

$a_{\boxed{1}} = 5 + 2 \cdot \boxed{}$

$a_{\boxed{2}} = 5 + 2 \cdot \boxed{}$

$a_3 =$

$\vdots$

ב) רשום את האיברים בשורה והוסף עוד 3 איברים.

____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

ג) רשום איך מתקבל כל איבר מהאיבר **הקודם** לו.

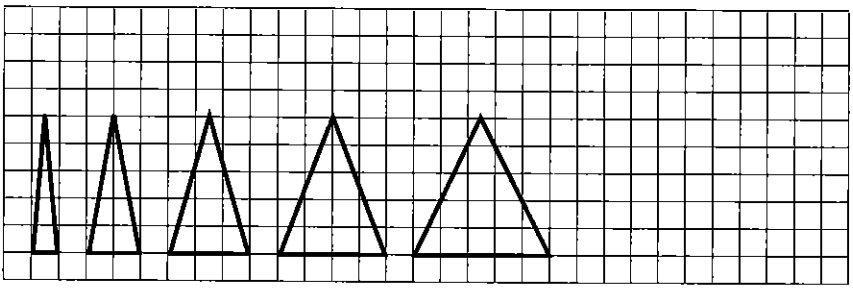
ד) רשום כלל נסיגה.

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

ה) לפי איזו הגדרה נוח יותר לחשב את a_9? חשב.

לפי איזו הגדרה נוח יותר לחשב את a_{100}? חשב.

7. א) חשב את שטחי המשולשים ורשום כל שטח מתחת לשרטוט.



ב) שרטט משולש נוסף ורשום את שטחו.

ג) רשום כלל לפי מקום, לסדרת השטחים של המשולשים.

ד) הוסף עוד שלושה איברים לסדרת השטחים.

ה) איך מתקבל כל איבר מקודמו?

רשום כלל נסיגה.

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

8. א) חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה

$a_n = 3 \cdot 2^n$

$a_{\boxed{1}} = 3 \cdot 2^{\square}$ המשך!

$a_{\boxed{2}} = 3 \cdot 2^{\square}$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_5 =$

ב) רשום את האיברים בשורה והוסף עוד 2 איברים.

ג) רשום איך מתקבל כל איבר מקודמו.

ד) רשום כלל נסיגה

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

9. א) חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה:

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$$

ב) רשום את האיברים בשורה והוסף עוד שני איברים.

ג) – איך מתקבל כל איבר מקודמו?

– רשום כלל נסיגה

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

ד) נסה לרשום תבנית **אחרת** לסדרה לפי מקום.

10. א) חשב את ששת האיברים הראשונים של הסדרה:

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n + 1}$$

ב) רשום תבנית **אחרת** לסדרה, לפי מקום.

ג) רשום כלל נסיגה לסדרה.

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

11. בכל סעיף שתי הגדרות של סדרה. חשב ארבעה איברים ראשונים ובדוק אם שתי ההגדרות מגדירות אותה סדרה.

	לפי מקום	כלל נסיגה
א)	$a_n = 5n - 1$	$\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$
	__ __ __ __	__ __ __ __
ב)	$a_n = 2n$	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 2 \end{cases}$
	__ __ __ __	__ __ __ __
ג)	$a_n = 7 - 3n$	$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases}$
	__ __ __ __	__ __ __ __

12. א) החוק לפי מקום של סדרה הוא: $a_n = 4 - 3n$.

חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

ב) רשום את האיברים בשורה והוסף עוד שלושה איברים.

ג) רשום כלל נסיגה $\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$

ד) חשב את $a_{20} =$ $a_{70} =$

13. החוק לפי מקום של סדרה הוא: $a_n = 2 \cdot 3n$

א) חשב את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

ב) רשום את האיברים בשורה והוסף שלושה איברים לסדרה.

____ ____ ____ ____ ____ ____

ג) – רשום איך מתקבל כל איבר מקודמו.

– רשום את הסדרה בעזרת כלל נסיגה $\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$

ד) חשב את a_{12} ואת a_{15} .

14. א) $a_n = n^2 + n$ חשב את a_1 , a_2 , a_3 , a_{10} .

ב) $a_n = \frac{n+4}{2}$ חשב את a_1 , a_4 , a_{12} .

ג) $a_n = (n-1)(n+2)$ חשב את $a_1 , a_2 , a_{10} , a_{15}$.

ד) $a_n = n(n+1)(n+2)$ חשב את a_1 , a_2 , a_{10} .

15. א) חשב את שמונת האיברים הראשונים של הסדרה $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

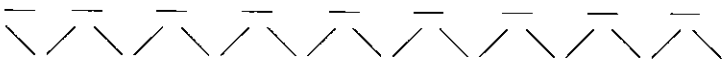
$$a_{\boxed{1}} = \frac{\square(\square - 1)}{2}$$

$$a_{\boxed{2}} = \frac{\square(\square - 1)}{2}$$

המשך

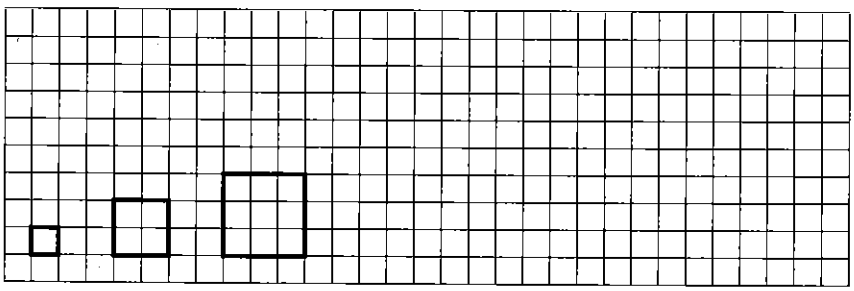
.
.
.

רשום את האיברים בשורה ורשום גם את סדרת ההפרשים.



ב) באחד הסעיפים הקודמים עסקת בשאלת לחיצות הידיים של חבורת "יחי הרושם". הסדרה המקורית כאן מתארת את מספר לחיצות הידיים (החל מהראשון שהגיע לכנס). מה מתארת סדרת ההפרשים?

16. א) המשך ובנה ריבועים נוספים, רשום על הצלעות את אורכן ובתוך הריבוע את שטחו (יחידת המידה משבצת).



ב) רשום תבנית לסדרת השטחים (לפי n).

ג) רשום סדרה של היקפי הריבועים

____ ____ ____ ____ ____ ____

ד) רשום תבנית לסדרת ההיקפים.

ה) רשום כלל נסיגה לסדרת ההיקפים

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

17. א) המשולש, שלפניך, נקרא משולש פסקל. השלם את שורה 7 .

מספר השורה											
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	___	___	___	7	1			
8	1	___	___	___	___	___	___	8	1		
9	1	___	___	___	___	___	___	___	___	1	
10	1	___	___	___	___	___	___	___	___	___	1

החוקיות היא: כל מספר מתקבל על ידי חבור שני המספרים הסמוכים בשורה, שמעליו.

ב) השלם את משולש פסקל עד לשורה העשירית.

ג) חשב את הסכום של כל שורה ורשום את סדרת הסכומים.

1 , 2 , 4 , ___ ___ ___ ___ ___

ד) רשום כלל נסיגה לפיו ניתן למצוא את האיברים של סדרת הסכומים.

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

ה) רשום בשורה את איברי "האלכסון" המסומן ב A . איזה מספר יהיה "באלכסון" זה בשורה ה- 20?

מספר השורה											
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	___	___	___	7	1			
8	1	___	___	___	___	___	___	8	1		
9	1	___	___	___	___	___	___	___	___	1	
10	1	___	___	___	___	___	___	___	___	___	1

ו) רשום בשורה את איברי אלכסון B. הוסף 3 איברים **ונסה** לרשום כלל נסיגה לסדרה זו.

ז) רשום בשורה את איברי האלכסון C. נסה להוסיף 3 איברים לסדרה זו.

שים לב! תרגול נוסף של הנושאים כלל נסיגה וכלל לפי מקום תוכל למצוא בסוף פרק א' עמודים 129 .

מכאן ניתן לשלב את פעילות מחשב 3 בעזרת Excel: כלל לפי מקום, בעמודים 237-242.

סדרה חשבונית

1. א) רשום חמישה איברים ראשונים של כל סדרה.

(i) $a_n = 5 + 2n$

(ii) $a_n = 3n - 1$

(iii) $a_n = 10 - 2n$

ב) רשום כלל נסיגה לכל סדרה.

ג) מה התכונה המשותפת לכל הסדרות האלה?

סדרות כאלה נקראות סדרות חשבוניות

בסדרה חשבונית, כל איבר מתקבל מקודמו על ידי "תוספת" קבועה.

בסעיף זה נלמד למצוא חוק על פי מקום סידורי, עבור סדרות מסוג זה.

2. לפניך סדרות, המוגדרות באמצעות כללי נסיגה. קבע אלו מהן חשבוניות.

א) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot 3$

ב) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = a_n - 3$

ג) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$

ד) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 10 - a_n$

– האם יש לדעת את ערכו של a_1, כדי לקבוע אם סדרה היא חשבונית?

3. א) קבע מהי התוספת הקבועה בסדרה

2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , 20 , ...

כדי לקבוע את ערכו של איבר כלשהו על פי האיבר הראשון והתוספת הקבועה, יש לדעת כמה פעמים הוספנו 3 במעבר מהאיבר הראשון (2) ועד לאיבר זה.

ב) – כמה פעמים 3 נוספו במעבר מ $a_1 = 2$ ועד ל a_4?

– כמה פעמים 3 נוספו במעבר מ $a_1 = 2$ ועד ל a_6?

– כמה פעמים 3 נוספו במעבר מ $a_1 = 2$ ועד ל a_{20}?

ג) כמה פעמים 3 נוספו במעבר מ a_1 ל a_n בסדרה?

4. א) קבע מהי התוספת הקבועה בסדרה:

-5 , -3 , -1 , 1 , ...

– כמה פעמים יש להוסיף ל a_1 את התוספת הקבועה, כדי לקבל את a_{10}?

– חשב את a_{10}.

– חשב את a_{17}.

ב) השלם:

$a_{25} = -5 + \square \cdot 2 =$

$a_{30} = -5 + \square \cdot 2 =$

$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 2 =$ הסבר ופשט.

5. א) קבע מהי התוספת הקבועה בסדרה:

12 , 17 , 22 , 27 , ...

ב) השלם:

$a_{10} = 12 + \square \cdot 5 =$

$a_{27} = 12 + \square \cdot 5 =$

$a_{100} = 12 + \square \cdot 5 =$

ג) פשט את החוק לפי מקום:

$a_n = 12 + (n - 1) \cdot 5 =$

הצב בתבנית שקבלת $n = 100$ ובדוק אם אכן התקבל a_{100} .

6. א) קבע מהי "התוספת" הקבועה בסדרה: 7 , 2 , −3 , −8 , −13 , −18

ב) השלם: $a_7 = 7 + 6 \cdot \square$

ה"תוספת"הקבועה

$a_{10} = 7 + 9 \cdot \square$

ג) פשט את החוק לפי מקום:

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-5) =$

התוספת הקבועה יכולה להיות מספר **חיובי, שלילי** או **אפס**.

ד) רשום 5 איברים של סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון 2 וה"תוספת" הקבועה 0.

ע"ע 7. האיבר הראשון בסדרה חשבונית 3 והתוספת הקבועה 6.

השלם:

$a_5 = 3 + \square \cdot 6 =$

$a_{10} = 3 + \square \cdot 6 =$

פשט את החוק לפי מקום:

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 6 =$

8. האיבר הראשון בסדרה חשבונית 3. נסמן את התוספת באות d.

השלם:

$a_5 = 3 + \square \cdot d$

$a_7 = 3 + \square \cdot d$

התבנית: $a_n = 3 + (\quad) \cdot d$

ע"ע 9. האיבר הראשון של סדרה חשבונית 1 והתוספת הקבועה d .

א) השלם: $a_5 =$

$a_{10} =$

$a_{100} =$

.
.
.

ב) התבנית: $a_n =$

10. נסמן את התוספת הקבועה של סדרה חשבונית ב -d.

השלם:

$a_5 = a_1 + \square \cdot d$

$a_7 =$

$a_{10} =$

$a_n =$

בתרגילים הקודמים ראית, שניתן להכליל עוד יותר ולמצוא נוסחה, המאפשרת מציאת חוק לפי מקום **לכל** סדרה חשבונית.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$$

או במילים: כדי לקבל איבר כלשהו בסדרה חשבונית, יש להוסיף לאיבר הראשון את ה"תוספת" הקבועה מספר פעמים הקטן ב 1 ממקומו של האיבר.

ע"ע 11. בטא את איברי הסדרה החשבונית בעזרת a_1 ו d.

$a_5 = a_1 +$

$a_7 =$

$a_9 =$

$a_{19} =$

$a_{50} =$

ע"ע 12. בסדרה חשבונית נתון $a_1 = 3$.

א) בטא את a_{10} ואת a_{20} בעזרת d.

ב) חשב את a_{10} ואת a_{20} אם $d = 7$.

ע"ע 13. מצא תבנית (בעזרת n) של כל אחת מהסדרות הבאות.

דוגמה: $a_1 = 10$

$d = 7$

פשט: $a_n = 10 + (n - 1) \cdot 7 =$

א) $a_1 = 3$, $d = 10$

ב) $a_1 = -2$, $d = 8$

ג) $a_1 = 12$, $d = -3$

ד) $a_1 = 17$, $d = -3$

תרגילים

14. אלו מהסדרות הבאות הן סדרות חשבוניות.

א) $-7, -6, -4, -1, 3, 8, 14, \ldots$

ב) $100, 88, 76, 64, 52, 40, 28, \ldots$

ג) $1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

ד) $1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 11, 11, \ldots$

ה) $5, 8, 7, 10, 9, 12, 11, 14, 13, 16, \ldots$

ו) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$

ז) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots$

ח) $5, 7.5, 10, 12.5, 15, 17.5, \ldots$

15. i) קבע האם כלל הנסיגה מתאים לסדרה חשבונית.

א) $a_{n+1} = 10 - \frac{a_n}{2}$

ב) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}$

ג) $a_{n+1} = 2a_n + 10$

ד) $a_{n+1} = a_n + 4$

ה) $a_{n+1} = a_n + 100$

ו) $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$

ii) רשום כלל נסיגה נוסף, המתאים לסדרה חשבונית.

16. בטא את איברי הסדרה החשבונית בעזרת a_1 ו d .

$a_2 =$ $\qquad$ $a_{10} =$

$a_3 =$ $\qquad$ $a_{27} =$

$a_7 =$ $\qquad$ $a_{30} =$

17. מצא בכל סדרה חשבונית את a_2 , a_3 , a_{10} , a_{100}.

א) $a_1 = 4$, $d = 7$

ב) $a_1 = -3$, $d = 3$

ג) $a_1 = 3$, $d = -5$

ד) $a_4 = 12$, $d = 3$

18. i) רשום תבנית לכל סדרה חשבונית (לפי n).

דוגמה: $a_1 = 2$, $d = 7$ המשך: $a_n = 2 + 7(n - 1) = \ldots$

א) $a_1 = -2$, $d = 8$

ב) $a_1 = -10$, $d = -4$

ג) $a_1 = 12$, $d = 4$

ד) $a_1 = -1$, $d = 1.5$

ii) רשום כלל נסיגה לסדרה שבסעיף ג'.

iii) נסה לרשום תבנית לסדרה חשבונית אחרת. חשב מספר איברים ובדוק אם היא אכן חשבונית.

19. i) רשום תבנית לכל סדרה (לפי n).

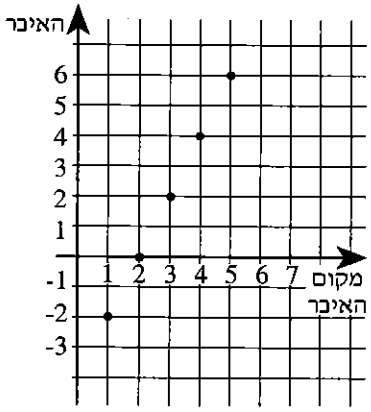
א) $a_1 = 3$
$d = 5$

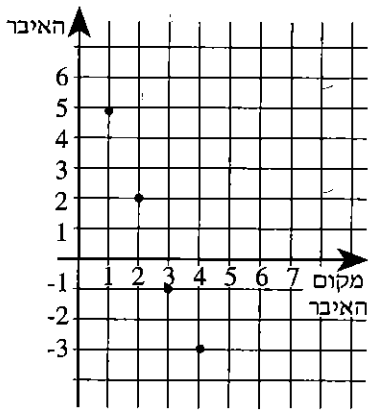
ב) $a_1 = -10$
$d = 5$

ii) בחר a_1 שונה מאשר בסעיפים הקודמים ורשום תבנית לסדרה שלישית שהתוספת הקבועה בה 5 $(d = 5)$.
רשום את החוק של כלל הנסיגה המתאים לשלוש הסדרות הנ"ל.

20. במחנה אימונים מבצעים בכל יום 8 כפיפות בטן יותר מאשר ביום הקודם.
ביום שישי ביצעו 47 כפיפות.
א) כמה יבצעו ביום העשירי לאימון?
ב) כמה כפיפות ביצעו ביום הראשון?

21. כל סדרה חשבונית נתונה בעזרת תאורה גרפית.
מצא, בכל סדרה, תבנית לפי מקום ומצא גם את האיבר ה- 20.





22. רשום, לכל אחת מהסדרות החשבוניות, תבנית לפי מקום ומצא את האיבר ה- 25 .

א) $-12, -5, 2, 9, 16, 23, \ldots$

ב) $15, 11, 7, 3, \ldots$

עוד על סדרה חשבונית

1. מצא $x, y, \ldots$ כך שהמספרים יהוו סדרה חשבונית.

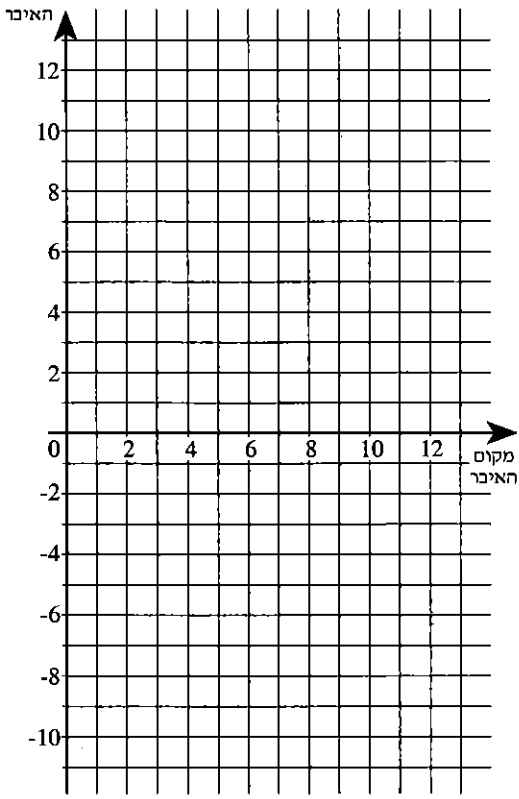
א) $5, x, 11$ ג) $2, x, y, z, 30$

ב) $1, x, y, 13$ ד) $-1, x, y, w, z, 9$

2. א) בסדרה חשבונית מצא את d ואת ששת האיברים הראשונים של הסדרה.

-10 , ___ , -4 , ___ , ___ , ___

סמן את הנקודות המתאימות במערכת הצירים והוסף עוד 3 נקודות המתאימות לסדרה.



ב) מצא 6 איברים ראשונים של סדרה חשבונית בה $a_1 = -2$, $a_4 = 7$

- סמן את הנקודות המתאימות במערכת הצירים.
- במה שונה ובמה דומה סדרה זו לסדרה שבסעיף א'? איך מתבטא הדמיון והשוני בגרפים של שתי הסדרות.

ג) כיצד מאופיינת ה"תוספת" הקבועה (d) בגרף המתאר את הסדרה?

3. א) בסדרה חשבונית נתון: ____ , ____ , ____ , 22 , 8 , ____ , ____

השלם את שבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

– רשום תבנית לסדרה (לפי n).

ב) בסדרה חשבונית נתון: $a_2 = 7$ $a_4 = 20$

רשום בשורה את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

ג) בסדרה חשבונית נתון: $a_3 = 4$ $a_5 = 0$

– מצא את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

– רשום תבנית לסדרה (לפי n).

4. א) בטא את איברי הסדרה החשבונית בעזרת a_1 ו d .

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

ב) – בטא את סכום שני האיברים הראשונים של הסדרה, בעזרת a_1 ו d .

– בטא את הסכום של האיבר השני והשלישי בעזרת a_1 ו d .

– בטא את הסכום של האיבר השלישי והרביעי בעזרת a_1 ו d .

– בטא את סכום ארבעת האיברים הראשונים בעזרת a_1 ו d .

5. סכום שני האיברים הראשונים של סדרה חשבונית הוא 9 וסכום האיבר השני והשלישי הוא 7.

א) האם לדעתך, הסדרה עולה או יורדת? נמק.

ב) נסה לרשום את איברי הסדרה ובדוק אם הסדרה מקיימת את הנתונים.

ג) – השלם רישום של הנתונים באופן אלגברי:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \\ \end{cases}$$

– רשום את שתי המשוואות כך ש a_1 ו d יהיו המשתנים היחידים ופתור.

– רשום את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה.

ע"ע 6. סכום שני האיברים הראשונים של סדרה חשבונית 8 וסכום האיברים השלישי והרביעי שלה 24.

א) רשום את הנתונים בכתיב אלגברי.

ב) רשום משוואות בהן d ו a_1 משתנים יחידים. (היעזר בביטויים שרשמת בתרגיל 4 ב'.)

ג) פתור ומצא את d ו a_1.

ד) רשום תבנית לסדרה (לפי n).

7. באיזה **מקום** נמצא האיבר הרשום בסוף הסדרה החשבונית?

א) $-4, -1, 2, \ldots\ldots\ldots, 23$

ב) $7, 3, -1, \ldots\ldots\ldots, -25$

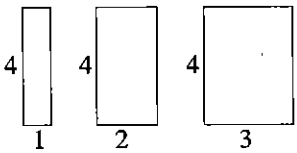
ג) $3,\ 3+d,\ 3+2d,\ 3+3d\ldots\ldots\ldots,\ 3+12d$

ד) $a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \ldots\ldots\ a_1+15d$

ה) $m, 2m, 3m, \ldots\ldots\ldots, 12m$

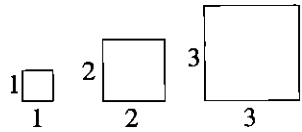
תרגילים

8. רשום שישה איברים בכל סדרה וקבע אם היא חשבונית. אם כן, ציין מהי התוספת הקבועה.



א) שטחי המלבנים.
(אחת הצלעות גדֵלה ביחידה.)

ב) היקפי המלבנים בסדרה שבסעיף א'.



ג) היקפי הריבועים.
(צלע הריבוע גדֵלה ביחידה.)

ד) שטחי הריבועים שבסעיף ג'.

ה) מספר הנרות שמדליקים בכל אחד מימי החנוכה.

9. לפניך סדרות המוגדרות בעזרת תבנית.

i) סמן ב (ח) סדרות שנראות לך כחשבוניות.

ii) חשב חמישה איברים ראשונים של כל סדרה וקבע אלו מהסדרות הן חשבוניות.

א) $a_n = n^2$

ב) $a_n = 5 - 2n$

ג) $a_n = 2^n$

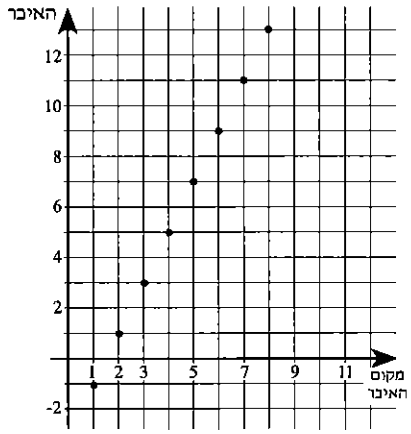
ד) $a_n = n$

ה) $a_n = -n$

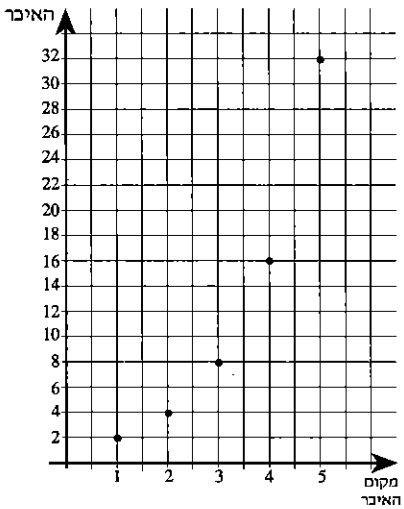
ו) $a_n = 4n - 1$

10. "קרא" מהגרף את איברי הסדרה ורשום אותם.
רשום 3 איברים נוספים, וקבע אם הסדרה חשבונית.

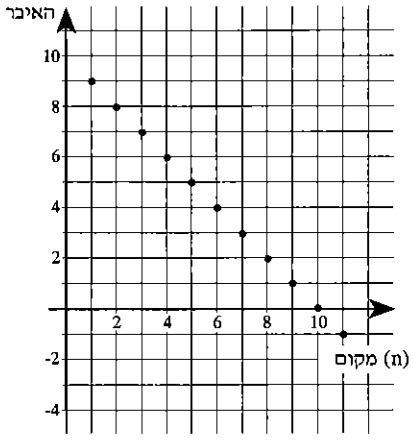
א)



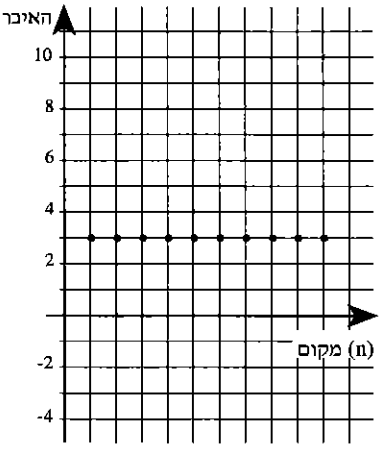
ב)



ג)

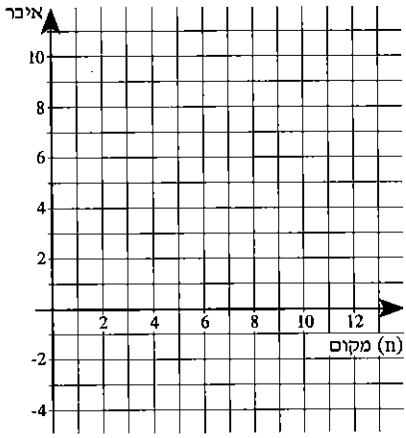


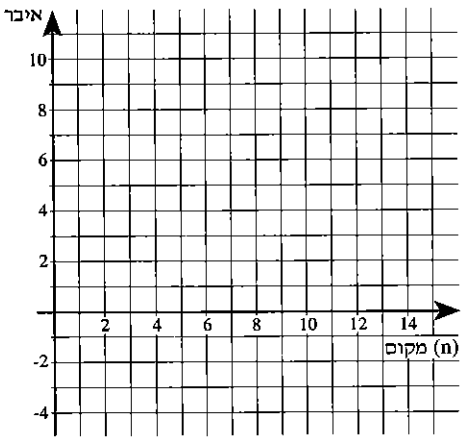
ד)



11. א) שרטט גרף כלשהו של סדרה חשבונית.
(שונה מהמשורטטות לעיל).

ב) שרטט גרף של סדרה **שאינה** חשבונית.
(שונה מהמשורטטות לעיל).





12. האיבר החמישי של סדרה חשבונית הוא -5. האיבר השלישי של הסדרה הוא 1.

א) מצא את האיבר הרביעי.

ב) מצא את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

ג) מצא תבנית לסדרה.

13. האיבר השלישי של סדרה חשבונית הוא 8 והאיבר השישי הוא 17.

א) כמה פעמים נוסף d במעבר מהאיבר השלישי לשישי?

ב) מצא את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה.

ג) מצא תבנית לסדרה: $a_n =$

14. א) האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא -2 והתוספת הקבועה 4.
באיזה מקום בסדרה נמצא איבר שערכו 14?

ב) האם יש בסדרה איבר שערכו 35? נמק.

ג) האם יש בסדרה איבר שערכו 105-? נמק.

15. א) $a_1 = 5$ $d = 3$ האם קיים בסדרה איבר שערכו 38?
אם כן, קבע באיזה מקום, אם לא, נמק.

ב) $a_1 = -1$ $d = -2$ האם קיים בסדרה איבר שערכו 11?
אם כן, קבע באיזה מקום, אם לא, נמק.

ג) $a_2 = 2$ $d = -3$ האם קיים בסדרה איבר שערכו -28 ?
אם כן, קבע מה מקומו, אם לא, נמק.

ד) $a_3 = 1$ $d = -5$ האם קיים בסדרה איבר שערכו -10 ?
אם כן, קבע מה מקומו, אם לא, נמק.

16. בסדרה חשבונית נתון $d = 3$ $a_n = 50$.

א) מה ערכו של a_{n-1} ? מה ערכו של $a_n - 1$?

ב) מה ערכו של a_{n-2} ? מה ערכו של $a_n - 2$?

ג) מה ערכו של a_{n+1} ? מה ערכו של $a_n + 1$?

ד) מה ערכו של a_{n+2} ? מה ערכו של $a_n + 2$?

17. סכום האיברים השני והחמישי בסדרה חשבונית הוא 80. סכום האיברים השישי והשביעי בסדרה זו, הוא 122.

א) הבע את a_2 ואת a_5 בעזרת a_1 ו-d, ורשום משוואה.

ב) הבע את a_6 ואת a_7 בעזרת a_1 ו-d, ורשום משוואה.

ג) פתור את מערכת המשוואות שהתקבל בסעיפים א' ו-ב' ומצא את a_1 ואת d .

18. בסדרה חשבונית האיבר השני גדול פי 8 מהאיבר הראשון.
סכום האיבר השלישי והשישי הוא 102.
מצא את a_1 ו-d .
(כדי לבצע זאת, הבע את a_2, a_3 ו-a_6 בעזרת a_1 ו-d, רשום משוואות מתאימות לנתונים, ופתור.)

19. ספורטאי מבצע כפיפות מרפקים לקראת תחרות בתרגילי כושר.
ביום הראשון הוא מבצע 20 כפיפות ובכל יום ב 2 כפיפות יותר מאשר ביום הקודם לו.

א) כמה כפיפות יבצע ביום העשירי? וביום ה 14?

ב) - האם הגיוני לחשב במקרה זה את a_{50}?
- עד איזה איבר יש לדעתך, הגיון בחישוב איברי הסדרה **כסדרה חשבונית**? הסבר.

20. נהג מכונית לוחץ על הבלמים. לפני הלחיצה הוא עובר 20 מ׳ בכל שניה ובעת הבלימה הוא עובר ב 4 מ׳ פחות מאשר בשניה הקודמת.

- רשום את סדרת המרחקים שעברה המכונית מרגע הלחיצה על הבלמים עד שהמכונית נעצרה.
- כמה שניות עברו עד שהמכונית נעצרה?
- חבר ומצא מה המרחק שעוברת המכונית במשך כל השניות האלה.

21. שחיין שוחה בכל יום ב 4 בריכות יותר מאשר ביום הקודם, עד ליום ה 20.
ביום הראשון לאימון שחה 40 בריכות.
כמה שחה ביום העשירי?
כמה שחה ביום ה 20?

22. איילת וגליה רוכבות כל יום על אופניים. בשבוע הראשון רכבו בכל יום 4 ק״מ. בכל שבוע הוסיפו מספר שווה של ק״מ.
כמה ק״מ עליהן להוסיף בכל שבוע, אם הן רוצות להגיע בשבוע השביעי לרכיבה של 16 ק״מ ביום?

23. בתחרות מחלקים עשרה פרסים. הזוכה בפרס הראשון מקבל 100,000 ש״ח והזוכה במקום העשירי מקבל 23,500 ש״ח.
סדרת הפרסים היא חשבונית.
בכמה ש״ח קטן כל פרס מקודמו?

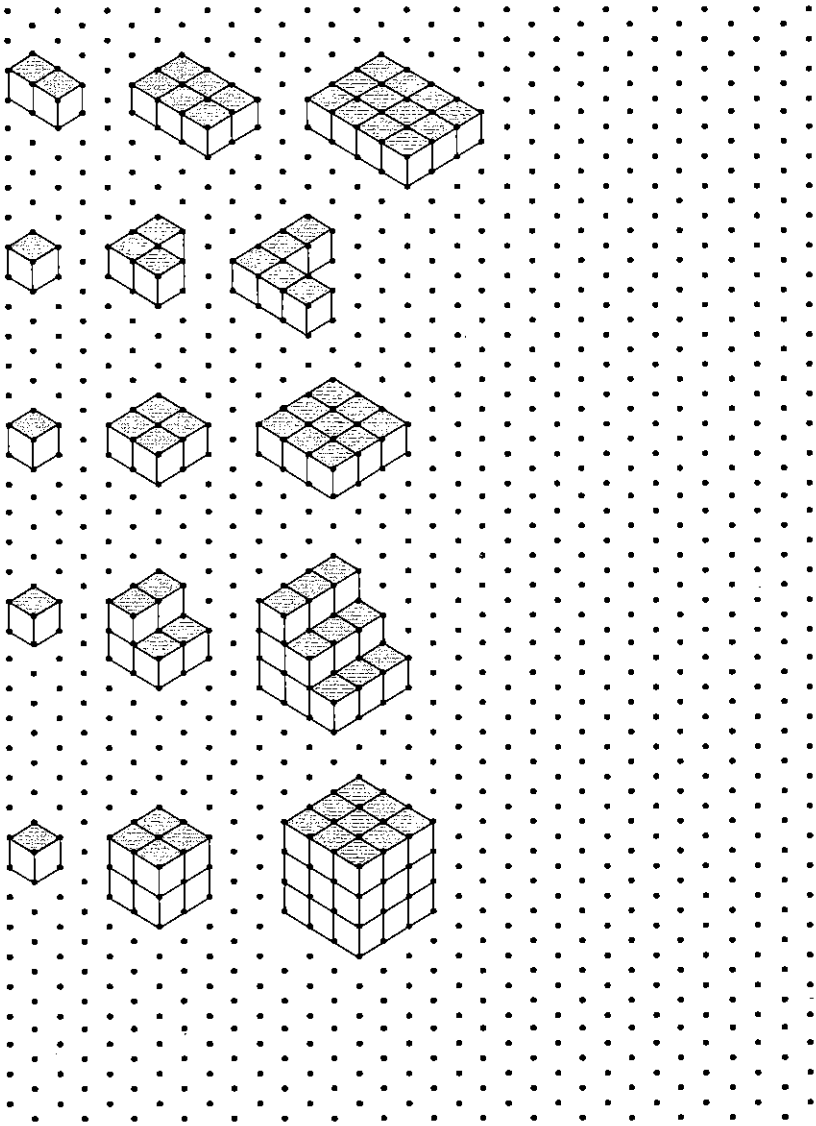
24. בסדרה חשבונית נתון: $a_3 = 1$ $a_8 = 8.5$
מצא את עשרת האיברים הראשונים של הסדרה.

25. מכונית אחת עוברת 24 מ׳ בשניה הראשונה לבלימה ובכל שניה ב 3 מ׳ פחות מאשר בקודמת.
מכונית שניה עוברת 28 מ׳ בשניה הראשונה לבלימה ובכל שניה ב 4 מ׳ פחות מאשר בקודמת.
לאיזו משתי המכוניות זמן בלימה קטן יותר?
(חשב כמה שניות עוברות עד שכל אחת מהמכונית נעצרת.)

26. i) כמה קוביות במבנה הרביעי? נסה לשרטט.

ii) רשום את סדרת המספרים המתאימים למספרי הקוביות ונסה, להוסיף עוד שלושה איברים. האם יש מבין הסדרות האלה סדרות חשבוניות? אם כן, אלו.

iii) רשום לשלוש סדרות (מתוך החמש) נוסחת נסיגה או תבנית לפי מקום.



סכומים של סדרות

1. לאסף יש שנה עד לגיוס לצה"ל. הוא החליט לעבוד 10 חודשים במפעל של אביו, כדי לחסוך כסף.
האב הציע לו לבחור באחת משלוש השיטות לקבל משכורת.

א) לקבל 2000 ש"ח בכל חודש.

ב) לקבל 1000 ש"ח בחודש הראשון ובכל חודש ב 200 ש"ח יותר.

ג) לקבל 200 ש"ח בחודש הראשון 200 ש"ח בחודש השני ובכל חודש לאחר מכן משכורת השווה לסכום שתי המשכורות הקודמות.

באיזו מהשיטות יחסוך אסף סכום גדול ביותר?

סכום n האיברים הראשונים של סדרה מסומן ב- S_n .
למשל, סכום עשרת האיברים הראשונים יסומן ב- S_{10} .

ע"ע 2. רשום כסכום של איברים.

א) $S_5 = a_1 + a_2 + ...$

ב) $S_7 =$

ג) $S_1 =$

ד) $S_8 = S_5 + ...$

ה) $S_{10} = S_7 + ...$

ו) $S_{12} = S_{11} + ...$

ע"ע 3. לפניך סדרות. השלם את השורה לעשרת האיברים הראשונים, ומצא את S_5 ואת S_8.

א) $-1 , 4 , 9 , 14 , 19 , ...$

ב) $1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ...$

ג) $1 , 2 , 4 , 8 , 16 , ...$

ד) $1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , ...$

ה) $1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , ...$

ע"ע 4. בסדרה חשבונית $a_1 = 3$
$d = 4$

א) חשב את חמשת האיברים הראשונים.

ב) חשב את S_2 , S_3 , S_4 , S_5.

ע"ע 5. רשום נכון/או לא נכון ותקן, במקרה שמה שרשום אינו נכון.

א) $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

ב) $S_2 = a_1 \cdot a_2$

ג) $S_1 = a_1$

ד) $S_3 = S_2 + a_3$

ה) $S_5 = S_4 + a_4$

ו) $S_6 = S_4 + a_4 + a_5$

ז) $S_8 = S_6 + a_7 + a_8$

ע"ע 6. א) השלם את עשרת האיברים הראשונים של הסדרה.

$1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , ...$

ב) חשב את S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6 , ורשום אותם בשורה.

ג) נסה, ללא חיבור האיברים, לנחש את ערכם של S_8 , S_{10} , בדוק על ידי חיבור האיברים.

7. א) המשך עד a_{12}

$1 , 2 , 3 , 4 , ...$

ב) חשב את S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6 , S_7 .

ג) רשום את סדרת הסכומים בשורה והמשך לרשום עוד 3 איברים בסדרת הסכומים.

$1 , 3 , ...$

ד) בסעיפים קודמים פגשת סדרה זו הנקראת סדרת המספרים המשולשים. רשום כלל נסיגה

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_{n+1} = \end{cases}$$

ע"ע 8. היכן כדאי יותר לעבוד?

בפיצריה "פִּיצַרֶלָה", מקבל נער המביא פיצות לבתים, 8 ש"ח על כל משלוח.
בפיצריה "תוֹמֵתוי", מקבל נער המביא פיצות לבתים, 5 ש"ח על המשלוח הראשון, באותו יום, ושקל אחד יותר על כל משלוח נוסף.

א) מי הרוויח יותר אם מכל פיצריה נשלחו 5 משלוחים?

ב) מי הרוויח יותר אם מכל פיצריה נשלחו 8 משלוחים?

ג) האם קיים מספר משלוחים עבורו שני הנערים ישתכרו אותו מחיר?

תרגילים

9. השלם לששת האיברים הראשונים וחשב את S_6 .

א) $1 , 3 , 9 , 27 , \ldots$

ב) $16 ,12 , 8 , 4 , \ldots$

ג) $2 , 3 , 5 , 8 , 12 , \ldots$

10. השלם על פי הדוגמא: $S_3 = S_2 + \boxed{a_3}$

א) $S_4 = S_3 + \square$

ב) $S_5 = S_4 + \square$

ג) $S_5 = S_3 + \square + \square$

ד) $S_5 - S_4 = \square$

ה) $S_{10} - a_{10} = \square$

11. חשב את ארבעת האיברים הראשונים בכל סדרה ומצא את S_4.

א) סדרה חשבונית: $a_1 = 2$
$d = 3$

ב) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 3 \end{cases}$

ג) $a_1 = 1$
$a_2 = 2$

וכל איבר, החל מ a_3, הוא סכום שני האיברים הקודמים.

ד) $a_1 = 2$
$a_{n+1} = a_n \cdot n$

ה) $a_n = n^2 - n$

12. א) רשום שמונה איברים של הסדרה $a_1 = 1$
$a_{n+1} = 2 \cdot a_n$

ב) חשב את S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6 .

ג) מצא את S_8 בעזרת S_6.

13. רשום **בעזרת** איברי הסדרה

דוגמה: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

א) $S_5 =$

ב) $S_8 = S_6 +$

ג) $S_1 =$

ד) $S_2 =$

14. הסדרה $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \cdots$ היא סדרה חשבונית. בטא בעזרת a_1 ו d :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d) =$

$S_3 =$

$S_4 =$

$S_5 =$

$S_6 =$

$\vdots$

$S_{10} =$

15. א) השלם ורשום תבנית לסדרה של סכומי השורות "במשולש פסקל".

מספר השורה		הסכום
"שורה 0"	1	0
שורה 1:	1 1	2
שורה 2:	1 2 1	4
שורה 3:	1 3 3 1	8
שורה 4:	1 4 6 4 1	—
שורה 5:	1 5 10 10 5 1	—
שורה 6:	1 6 15 20 15 6 1	—
שורה 7:	1 7 21 ___ ___ ___ 7 1	—
שורה 8:	1 ___ ___ ___ ___ ___ ___ 8 1	—
שורה 9:	1 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ 1	—
שורה 10:	1 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ 1	—

ב) מה יהיה סכום המספרים בשורה ה 12?

ג) מצא את התבנית לסכום המספרים בשורה: $S_n =$

עוד סדרה

1. לפני 800 שנה הציג פיבונצ'י את הבעיה הבאה:

החל מחודשיים לאחר הלידה מתחיל כל זוג ארנבות ללדת. נניח שבכל חודש הם מולידים זוג חדש.

אלה שאוזניהם מסומנות הם בעלי כושר לידה לחודש הבא.

מס' זוגות

זה עתה נולדו: $a_1 = 1$

לאחר חודש: $a_2 = 1$

לאחר חודשיים: $a_3 = 2$

לאחר 3 חודשים: $a_4 =$ ___

לאחר 4 חודשים: $a_5 =$ ___

לאחר 5 ח': $a_6 =$ ___

לאחר 6 חודשים: $a_7 =$

א) השלם את השורה "לאחר 6 חודשים".

ב) המשך את הסדרה של מספר הזוגות: רשום את ערכיהם של a_7, a_8, a_9 בטור משמאל.

> סדרה מסוג זה, שכבר פגשת בעבר, נקראת **סדרת פיבונצ'י** מסתבר שיש תופעות רבות בטבע שמתאימות לסדרה כזו, למשל סידור הגרעינים על חמניה, או סידור ה"עלים" על איצטרובל.

ג) המשך את סדרת פיבונצ'י עד האיבר ה 12.

1 , 1 , 2 , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ ,

ד) השלם ורשום במילים את החוק שבסדרת פיבונצ'י.

$a_5 = a_3 + a_4$

$a_8 =$

$a_{10} =$

$a_{n+1} =$

ה) רשום כלל נסיגה מתאים:

ע"ע 2. נסה להוסיף שני איברים לכל סדרה, וקבע אלו מהסדרות מקיימות את כלל הנסיגה של סדרת פיבונצ'י.

א) $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

ב) $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \ldots$

ג) $2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, \ldots$

ד) $1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots$

3. סכומים של סדרות פיבונצ'י:

בטא את S_4 , S_5 בעזרת a_1 ו a_2 לפי הדוגמא של S_3 .

דוגמה: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + \overbrace{a_1 + a_2}^{a_3} = 2a_1 + 2a_2$

ע"ע 4. המשך עד שיתקבל ביטוי ל S_{14} בעזרת $a_3, a_5, a_7, \ldots$ (איברים במקומות אי זוגיים

$\overbrace{a_1 + a_2}^{a_3} + \overbrace{a_3 + a_4}^{a_5} +$

ע"ע 5. השלם כך שתתקבל סדרה על פי כלל פיבונצ'י:

א) ___ , ___ , ___ , 5 , ___ , 2

ב) ___ , 7 , ___ , 3 , ___

ג) 3 , ___ , 7 , ___

ד) ___ , 2 , 9 , ___ , ___

תבנית לסכום של סדרה (חשבונית)

לעיתים אפשר למצוא תבנית לסכום של סדרה (S_n) לפי n.
נראה זאת בתרגילים הבאים.

למשל:

1. א) השלם ורשום תבנית לסכום סדרת המספרים האי-זוגיים.

$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 3 =$
$S_3 = 1 + 3 + 5 =$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 =$
$S_5 =$
$S_6 =$

התבנית: $S_n =$

ב) מה יהיה סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה?

2. א) רשום בשורה, שמונה איברים ראשונים של הסדרה.

$a_n = 2^n$

ב) מצא את $S_1 , S_2 , S_3 , \ldots$
ורשום את סדרת הסכומים בשורה.

ג) רשום שמונה איברים ראשונים של הסדרה $S_n = 2 \cdot (2^n - 1)$ והשווה עם סדרת הסכומים שרשמת בסעיף ב'.

בשני התרגילים ראית שבמקרים מסויימים **קיימת** תבנית לפי מקום לא רק לאיבר של הסדרה אלא גם **לסכום** n האיברים הראשונים של סדרה.

בסעיף זה תלמד למצוא תבנית לסכום של n האיברים הראשונים של **כל סדרה חשבונית** (S_n).

3. א) רשום מעל כל קשת את סכום האיברים המחוברים בקשת.

3 , 7 , 11 , 15 , 19 , 23 , 27 , 31 , 35 , 39

ב) כמה זוגות כאלה יש בסדרה בת עשרה איברים?

ג) מה הסכום של כל עשרת האיברים?

4. (ע"ע) א) המשך את הסדרה החשבונית עד a_{12}.

-2 , 1 , 4 ,

ב) חבר "בקשת" ומצא סכום של האיבר הראשון והאחרון, השני והלפני אחרון וכו'.

ג) כמה זוגות כאלה יש בסדרה בת 12 האיברים?

ד) מה ערכו של S_{12} ?

5. בסדרה חשבונית נתון: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{20} = 41 \end{cases}$

א) חשב: $a_1 + a_{20} =$

ב) כמה זוגות, שערכם שווה ל $a_1 + a_{20}$ יווצרו, אם נחבר את כל האיברים בזוגות: את האיבר האחרון עם הראשון, את השני עם הלפני אחרון וכו'...

ג) מצא את S_{20}.

ד) נסה להסביר מדוע הסכום של כל זוג כזה בסדרה קבוע ושווה ל 44 .

ע"ע 6. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 2$

$a_{30} = 89$

- כמה זוגות יווצרו אם נחבר את כל האיברים בזוגות: הראשון עם האחרון, השני עם הלפני אחרון וכו'?
- מה יהיה הערך של כל זוג כזה.
- מה הסכום של 30 האיברים?

7. בסדרה חשבונית מספר זוגי של איברים.

n מבטא את מספר איברי הסדרה.

כמה זוגות יווצרו אם נחבר את כל איברי הסדרה בזוגות: הראשון עם האחרון, השני עם הלפני אחרון וכו'?

ראית שעבור סדרה חשבונית עם מספר זוגי של איברים מתקיים:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

8. א) רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה החשבונית.

3 , 10 , _____ , _____ , _____

ב) חבר ומצא את S_5 .

ג) הצב את a_1 ואת a_5 וחשב: $S_5 = (a_1 + a_5) \cdot \frac{5}{2} =$

ד) המשך את הסדרה הנ"ל עד a_9 וחשב על ידי חיבור את S_9.

הצב וחשב $S_9 = (3 + a_9) \cdot \frac{9}{2} =$

9. א) רשום את שבעת האיברים הראשונים של סדרה חשבונית בה

$a_1 = 8$

$d = 5$

ב) מצא את S_7.

ג) האם לאחר הצבה בנוסחה וחישוב $S_7 = (a_1 + a_7) \cdot \frac{7}{2}$, מתקבלת התוצאה שקיבלת בסעיף ב'?

הנוסחה שמצאת לחישוב סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית, עבור n זוגי, מתאימה למעשה למציאת **כל** סכום של סדרה חשבונית.

$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$ n טבעי.

ע"ע 10. בסדרה חשבונית נתון:

$a_1 = 8$

$a_9 = 48$

חשב את S_9.

ע"ע 11. בסדרה חשבונית נתון:

$a_1 = 12$

$a_{12} = 30$

חשב את S_{12}.

12. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 2$
$d = 3$

מצא את a_{15} ואת S_{15}.

(תזכורת: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$)

13. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 10$
$d = -3$

א) מצא את a_{10} ואת S_{10}.

ב) מצא את a_{100} ואת S_{100}.

14. בתרגיל 1, בסעיף זה, מצאת תבנית לסכום n המספרים **האי-זוגיים הראשונים** למעשה זו סדרה חשבונית.

א) מה ערכם של a_1 ושל d? מצא גם את a_{10}.

ב) מצא את S_{10} לפי: $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$

ג) מצא את S_{10} על פי התבנית $S_n = n^2$ (שמצאת בתרגיל 1 בסעיף זה).
האם קבלת אותה תוצאה כמו בסעיף ב'?

ד) חשב את S_{20} לסדרה זו.

15. א) מצא את S_{20} עבור הסדרה של המספרים הטבעיים:

$1 , 2 , 3 , ...$

$S_{20} =$

ב) מצא את S_{40} ואת S_{100} .

ג) נסה לבטא את S_n (סכום n המספרים הטבעיים הראשונים).

בסעיף ג' מצאת נוסחה לפי מקום בעזרתה ניתן לקבל את המספרים המשולשים: $1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21 , ...$. כלומר, סדרת הסכומים של המספרים הטבעיים, זו סדרת המספרים המשולשים.

16. שירה מרוויחה בשבוע הראשון לעבודתה 200 ש"ח ובכל שבוע ב- 50 ש"ח יותר מאשר בשבוע הקודם. שירה עבדה 12 שבועות.

א) כמה הרוויחה בשבוע האחרון לעבודתה?

ב) כמה הרוויחה ב 12 השבועות האלה?

ג) כמה הרוויחה בחודש האחרון? (4 השבועות האחרונים)?

17. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 3, ו- $s_{10} = 120$.

חשב את a_{10} ואת d .

18. באולם ספורט יש 40 מקומות בשורה הראשונה, ובכל שורה יש 10 מקומות יותר מאשר בשורה הקודמת.

א) חשב את מספר המקומות בשורה **החמישית** ובשורה **העשירית**.

ב) באולם 50 שורות.
חשב את a_{50} ואת S_{50} .

ג) מה מתאר a_{50}?
מה מתאר S_{50}?

ד) מה מתאר a_n בסדרה זו? מה מתאר n?

תרגילים

19. א) רשום סדרה למספר הנרות שמשתמשים בשמונת ימי החנוכה (כולל השמשים).

$2 , ...$

ב) מצא את a_8 ואת S_8 .

20. חשב את a_{10} ואת S_{10} בסדרות החשבוניות.

א) $a_1 = -2$
$a_{10} = 55$

ב) $a_1 = 10$
$d = 8$

ג) $a_1 = -3$
$a_2 = 6$

ד) $a_2 = 7$
$a_3 = 15$

21. כמה ירוויח נער במשך 6 חודשים, אם בחודש הראשון הוא מקבל שכר של 1000 ש"ח ובכל חודש 200 ש"ח יותר מבחודש הקודם?

22. בשורה הראשונה באמפיתאטרון יש 20 מושבים ובכל שורה ב 4 מושבים יותר.
באמפיתאטרון יש סך הכל 24 שורות.
חשב את מספר המקומות באמפיתאטרון. (חשב תחילה את מספר המקומות בשורה האחרונה, a_{24}).

23. נהג של קטר רכבת רואה מרחוק חבילה מונחת על הפסים ומפעיל את הבלמים.
בשניה הראשונה של הפעלת הבלמים עוברת הרכבת 28 מ'.
בכל שניה אחר כך 4 מ' פחות מבשניה הקודמת.
א) אחרי כמה שניות נעצרה הרכבת?
ב) מה המרחק שעברה הרכבת בכל השניות האלה? (S_n).
ג) כשהפעיל נהג הקטר את הבלמים, היתה הרכבת במרחק 120 מ' מהחבילה. האם הספיקה לעצור לפני החבילה? אם כן, כמה מטרים לפניה?

24. גוף נע מנקודה A לנקודה B. בשניה הראשונה עבר הגוף 4 מטרים ובכל שניה אחר כך 3 מטרים יותר מאשר בשניה הקודמת.
א) כמה מטרים עבר הגוף בשניה ה 12?
ב) מה המרחק בין A ל- B (כמה מטרים עבר הגוף בכל 12 השניות)?

25. איילת ונועה רוצות לצאת לטיול בחו"ל. כל אחת עבדה 8 חודשים כדי לממן את הטיול.
איילת הרויחה בחודש הראשון 1200 ש"ח ובכל חודש 100 ש"ח יותר מאשר בחודש הקודם.
נועה הרויחה 1500 ש"ח בכל חודש.
מי מהן חסכה סכום כסף גדול יותר?

26. מכונית מגבירה את מהירותה. בשניה הראשונה להגברת המהירות עברה המכונית 15 מ׳ ובכל שניה עברה ב 1.5 מ׳ יותר מאשר בשניה הקודמת.

א) כמה מטרים עברה המכונית בשניה הרביעית?
כמה מטרים עברה המכונית בשניה העשירית?

ב) מה מתאר a_n בסדרה זו? (n מייצג את מספר השניות.)
באיזו שניה עברה המכונית מרחק של 27 מ׳?

ג) מה מתאר s_n בסדרה זו?

ד) כמה מטרים עברה המכונית סך הכל במשך 12 השניות הראשונות?

27. האיבר הראשון של סדרה חשבונית הוא 2. ידוע גם כי סכום 30 האיברים הראשונים הוא 1800. מצא את a_{30} ואת d .

28. האיבר השנים עשר של סדרה חשבונית הוא 4 –. $S_{12} = 150$.

מצא את a_1 ואת d .

29. דן עבד בחנות ספרים וקיבל שכר באופן הבא:
בשבוע הראשון קיבל 200 ש״ח על עבודתו. בכל שבוע קיבל בסכום קבוע יותר מאשר בשבוע הקודם. דן עבד 8 שבועות.

סה״כ קבל דן 3280 ש״ח.

א) כמה קיבל דני בשבוע השמיני.

ב) מה היתה התוספת הקבועה בכל שבוע?

30. רותי ואיילת קיבלו בקיץ עבודה למשך 12 יום כל אחת יכלה לבחור בתנאי תשלום.

איילת בחרה לקבל ביום הראשון 40 ש"ח ובכל יום בסכום קבוע יותר מאשר ביום הקודם לו.

רותי בחרה לקבל בכל יום 150 ש"ח.

א) כמה הרוויחה רותי?

ב) מה צריכה להיות התוספת הקבועה שתקבל איילת על מנת שתרויח כמו רותי?

31. בסדרה חשבונית סכום האיבר הראשון והחמישי 100. מצא את האיבר השלישי.

32. בסדרה חשבונית נתון: $a_2 + a_{29} = 60$

א) מצא את $a_1 + a_{30}$.

ב) חשב את S_{30}.

33. בסדרה חשבונית נתון: $a_{10} = 32$

א) חשב את $a_1 + a_{19}$.

ב) חשב את S_{19}.

מציאת n על פי S_n ו- a_n

1. בסדרה חשבונית $a_1 = 2$ $d = 3$

א) חשב את a_2 , a_{10} , a_{100} .

ב) בטא את a_n בעזרת n, ופשט.

ג) באיזה מקום נמצא איבר שערכו 599?

ע"ע 2. בטא את a_n בעזרת n, ופשט.

א) $a_1 = 3$
$d = 2$

ג) $a_1 = -5$
$a_2 = -3$

ב) $a_1 = 7$
$d = -4$

ד) $a_2 = -3$
$a_3 = -9$

3. האיבר השלישי של סדרה חשבונית 6 והתוספת הקבועה 4 .

א) מהו האיבר הראשון של הסדרה?

ב) חשב את a_5 ואת a_{12}.

ג) בטא את a_n.

ד) בטא את הסכום S_n. (היעזר בביטוי שקיבלת בסעיף ג'.)

ה) כמה איברים יש לחבר כדי שהסכום יהיה 576?

4. בסדרה חשבונית: $a_1 = 3$, $d = 4$.

א) בטא את a_n בעזרת n, ופשט.

ב) בטא את S_n באמצעות n . (היעזר בביטוי שקיבלת בסעיף א'.)

ג) חשב כמה איברים צריך לחבר כדי שהסכום יהיה 820?

תרגילים

5. האיבר הראשון של סדרה חשבונית 7 וה"תוספת" הקבועה 4 – .

א) בטא את a_n .

ב) בטא את הסכום S_n .

ג) כמה איברים יש לחבר כדי שהסכום יהיה 315– .

6. בשורה הראשונה של אולם תיאטרון 50 מקומות ובכל שורה ב 6 מקומות יותר מאשר בשורה הקודמת.

א) חשב את מספר המקומות בשורה **החמישית** ובשורה **העשירית**.

ב) מה מתאר a_n בסדרה זו? מה מתאר n?
בטא את a_n בעזרת n.

ג) מה מתאר S_n בסדרה זו?

ד) בטא את S_n .

ה) ידוע שיש באולם 2140 מקומות. מה מספר השורות?

7. בסדרה חשבונית $a_1 = 68$ ו- $S_{30} = 300$.
מצא את a_{30} ואת d .

קצת על חזקות ועל מחשבונים (תזכורת והכנה)

חזקה, עם מעריך טבעי, (1, 2, 3, ...) היא קיצור כתיבה לכפל של גורמים שווים.

1. השלם:

א) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{\square}$

ב) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\square}$

ג) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^{\square}$

ד) $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{\square}$

2. העזר בפעולת הכפל $\boxed{\times}$ במחשבון, וחשב.

א) $5^4 =$

ב) $0.1^2 =$

ג) $1.5^8 =$

ד) $(-2)^5 =$

ה) $(0.5)^2 =$

ו) $(-4)^6 =$

3. בדוק באיזו חזקה מדובר (בצע במחשבון וספור את הגורמים).

א) $4^{\square} = 16384$

ב) $5^{\square} = 625$

ג) $7^{\square} = 16807$

ד) $10^{\square} = 1000000$

ה) $2.5^{\square} = 39.0625$

ו) $1.1^{\square} = 1.4641$

4. א) בין אלו שתי חזקות של 10 נמצא המספר 725? $10^{\square} < 725 < 10^{\square}$

ב) בין אלו שתי חזקות של 5 נמצא המספר 250? $5^{\square} < 250 < 5^{\square}$

ג) בין אלו שתי חזקות של 3 נמצא המספר 250? $3^{\square} < 250 < 3^{\square}$

ד) בין אלו שתי חזקות של 10 נמצא המספר250? $10^{\square} < 250 < 10^{\square}$

בביטוי 3^5 המספר 3 הוא בסיס החזקה ו 5 מעריך החזקה .

ובאופן כללי: בתבנית a^n , a הוא **בסיס החזקה** ו n **מעריך החזקה**
התבנית a^n תקרא **חזקה**.

דוגמה: בסיס החזקה 7 ומעריך החזקה 3. התרגיל הוא: 7^3 .

5. א) בסיס החזקה 5 ומעריך החזקה 3, מה התרגיל?

ב) בסיס החזקה 3 ומעריך החזקה 5, מה התרגיל?

ג) בסיס החזקה 10 ומעריך החזקה 2 , מה התרגיל?

ד) בסיס החזקה 8 ומעריך החזקה 1, מה התוצאה?

ה) בסיס החזקה 2 ומעריך החזקה 10, מה התרגיל?

ו) רשום תרגיל, שאם נחליף בו את הבסיס במעריך, תתקבל אותה תוצאה?
התוכל לרשום תרגיל נוסף כזה?

6. במחשבון יש כפתור המאפשר חישוב חזקה באופן ישיר $\boxed{x^y}$.

א) חשב:

7	x^y	3	=

התרגיל: 7^3

ב) חשב:

2	x^y	11	=

התרגיל: _____

ג) חשב:

$11^3 =$ $\qquad$ $9^{10} =$

$(-5)^7 =$ $\qquad$ $1.7^8 =$

7. רשום כחזקה.

דוגמה: $2^3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ (שים לב $2 = 2^1$)

א) $2^5 \cdot 2^2 =$

ב) $3^3 \cdot 3 =$

ג) $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3 =$

ד) $a^4 \cdot a =$

ה) $a^{12} \cdot a^{30} =$

ו) $a^n \cdot a^4 =$

ז) $a^3 \cdot a^k =$

ח) נסח במילים כלל המתאים לכפל של חזקות עם **אותו בסיס**.

ט) השלם: $a^n \cdot a^k = a^{\square}$

$2 = 2^1$ $\qquad$ $3 = 3^1$ $\qquad$ $a = a^1$

י) השלם: $a^n \cdot a = a^{\square}$

8. רשום כחזקה

דוגמה: $\frac{7^5}{7^2}=\frac{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}{7\cdot 7}=7^3$

א) $\frac{8^3}{8}=$

ב) $\frac{10^6}{10^3}=$

ג) $\frac{a^7}{a^2}=$ $a\neq 0$

ד) $\frac{b^8}{b}=$ $a\neq 0$

ה) $\frac{a^{30}}{a^{10}}=$ $a\neq 0$

ו) נסח במילים כלל **לחילוק** חזקות עם **אותו בסיס**.

ז) השלם $\frac{a^m}{a^k}=a^{\square}$ $(m>k)$ $a\neq 0$

9. בטא כחזקה.

א) $3^2\cdot 3^7\cdot 3=3^{\square}$

ב) $a\cdot a^8=a^{\square}$

ג) $6^5\cdot 6^{\square}=6^9$

ד) $\frac{5^3}{5^2}=5^{\square}$

ה) $\frac{a^4}{a}=a^{\square}$ $a\neq 0$

ו) $\frac{8^6}{8^{\square}}=8^4$

תרגילים

10. פרק לגורמים ראשוניים ורשום כחזקה.

דוגמה: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

א) $200 =$

ב) $375 =$

11. רשום את מעריך החזקה:

$7^{\square} = 2401$

$(-1.5)^{\square} = 11.390625$

$10^{\square} = 10{,}000$

12. א) בין אלו שתי חזקות של 10 נמצא המספר 1250? $10^{\square} < 1250 < 10^{\square}$

ב) בין אלו שתי חזקות של 10 נמצא המספר 15,200? $10^{\square} < 15{,}200 < 10^{\square}$

ג) בין אלו שתי חזקות של 10 נמצא המספר 750? $10^{\square} < 750 < 10^{\square}$

ד) בין אילו שתי חזקות של 10 נמצא המספר 150,000?

ה) מה הקשר בין מספר הספרות במספר, לחזקות של 10 ביניהן נמצא המספר?

13. בטא כחזקה.

א) $a^7 \cdot a =$

ב) $2^{12} \cdot 2^2 =$

ג) $3^5 \cdot 3^7 \cdot 3^2 =$

ד) $7^{12} \cdot 7^5 \cdot 7^3 =$

ה) $8^n \cdot 8^3 \cdot 8^4 =$

ו) $12^n \cdot 12^k =$

ז) השלם: $6^5 \cdot 6^{\square} = 6^{12}$

ח) השלם: $a^8 \cdot a^{\square} \cdot a^2 = a^{15}$

ט) $7^8 \cdot 7^{\square} \cdot 7^3 = 7^{12}$

14. בטא כחזקה.

א) $\frac{5^{18}}{5^5} =$

ב) $\frac{2^{13}}{2^2} =$

ג) $\frac{4^9}{4^3} =$

ד) $\frac{a^{12}}{a^4} =$

ה) $\frac{6^3 \cdot 6^4}{6} =$

ו) $\frac{x^7 \cdot x^3}{x} =$

ז) $\frac{7^5 \cdot 7}{7^2} =$

ח) $\frac{x^2 \cdot x^3}{x^4} =$

15. א) רשום כחזקה של 3 (השלם את המעריך).

$9 = 3^{\square}$ $\qquad$ $729 = 3^{\square}$

$81 = 3^{\square}$ $\qquad$ $19683 = 3^{\square}$

ב) רשום כחזקה של 2 (השלם את המעריך).

$64 = 2^{\square}$ $\qquad$ $128 = 2^{\square}$

$4 = 2^{\square}$ $\qquad$ $16384 = 2^{\square}$

$4096 = 2^{\square}$ $\qquad$ $2 = 2^{\square}$

16. השלם.

דוגמה: $675 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^{\boxed{3}} \cdot 5^{\boxed{2}}$

א) $72 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$ $\qquad$ ד) $5000 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$

ב) $432 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$ $\qquad$ ה) $2025 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

ג) $225 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$ $\qquad$ ו) $2700 = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

17. רשום כמכפלת חזקות של 2, ו/או 3, ו/או 5 .

א) $625 =$ $\qquad$ ד) $2000 =$

ב) $648 =$ $\qquad$ ה) $10125 =$

ג) $375 =$ $\qquad$ ו) $1800 =$

לקו שבר יש גם תפקיד של סוגריים לכן, אפשר לחשב מונה ומכנה לחוד ואז לחלק, או להשתמש ברישום סוגריים במחשבון: $3^5 \cdot 2^3 : (4^2 \cdot 5) = \frac{3^5 \cdot 2^3}{4^2 \cdot 5}$

18. א) חשב: $\frac{3^5 \cdot 2^3}{4^2 \cdot 5} =$

ב) $\frac{5.2^3 \cdot 4^3}{0.4 \cdot 5^2} =$

ג) $\frac{19}{0.3^2 \cdot 7} =$

ד) $\frac{5^4 + 4^3}{18^2} =$

ה) $\frac{12^3}{4.5^2 + 7^3} =$

מספרים גדולים במחשבון

1. א) רשום את המספר

דוגמה: $10^2 = 100$

$10^4 =$

$10^7 =$

$10^8 =$

ב) בצע במחשבון ורשום מה מופיע על המצג

$10^4 =$

$10^9 =$

$10^{13} =$

$10^{18} =$

ג) שער, ללא מחשבון, מה יופיע על המצג.

$10^{15} =$ ☐

$10^{25} =$ ☐

בדוק בעזרת המחשבון.

ד) בצע במחשבון תרגיל כך שתקבל על המצג את הרשום במסגרת ורשום את התרגיל.

1. ^{22}

1. ^{34}

ה) האם תוכל לקבל על המצג את 10^{123}?

ו) מהי חזקת העשר הגבוהה ביותר שניתן לקבל על צג המחשבון? רשום תרגיל כך שתקבל מספר זה, ובדוק בעזרת המחשבון.

2. א) חשב במחשבון.

על המצג

$10^5 \cdot 10^7 = \boxed{} = 10^{\boxed{}}$

$10^{13} \cdot 10^8 = \boxed{} = 10^{\boxed{}}$

$10^{23} \cdot 10^{14} = \boxed{} = 10^{\boxed{}}$

ב) רשום כחזקה ושער איזו תוצאה תתקבל על המצג.

$10^{20} \cdot 10^9 =$

$10^{13} \cdot 10^{25} =$

בדוק.

3. בדוק כמה ספרות במספר.

א) 10^7

ב) 10^{12}

ג) $\boxed{1.\quad 14}$

ד) $\boxed{1.\quad 43}$

בתרגילים הבאים תראה כיצד אפשר בעזרת "הספרות הקטנות" לכתוב גם מספרים גדולים שאינם חזקות של 10.

ה) בדוק החל מאיזו חזקה של 10 המחשבון **שלך** עובר לכתיב מדעי:

$10^7 = \quad 10^8 = \quad 10^9 = \quad ...$

4. השלם:

	על המצג	ללא מחשבון	התרגיל
	3.7^{10}	37,000,000,000	$37 \cdot 10^9$
א)			$7 \cdot 10^{10}$
ב)			$5 \cdot 10^8$
ג)			$32 \cdot 10^{10}$
ד)			$3.5 \cdot 10^8$
ה)			$0.67 \cdot 10^{11}$

ע"ע 5. רשום תרגיל כך שתתקבל על המצג התוצאה הרשומה במסגרת.

א) התוצאה 2.3^{12} התרגיל: בדוק.

ב) התוצאה $1.^{10}$ התרגיל: בדוק.

ג) התוצאה $7.^{20}$ התרגיל: בדוק.

ד) רשום תרגיל נוסף שתוצאתו כמו זו שבסעיף ג'.

6. השלם.

	התרגיל שעל המצג	על המצג	
דוגמה:	$7 \cdot 10^9$	$7.^{09}$	$70 \cdot 10^8$
א)			$700 \cdot 10^8$
			$7000 \cdot 10^8$
			$70{,}000 \cdot 10^8$

התוצאה על המצג היא תמיד מספר בין 1 ל- 10 מוכפל בחזקה של 10.

המשך ←

	התרגיל שעל המצג	על המצג
ב)		
	$3.5 \cdot 10^8$	
	$35 \cdot 10^8$	
	$350 \cdot 10^8$	

"הספרות הקטנות" מציינות כמה צעדים ימינה צריכה הנקודה העשרונית ל"זוז".

7. א) חשב במחשבון ורשום את התוצאה במסגרת.

$0.27 \cdot 10^{15}$	$2.7 \cdot 10^{25}$	$27 \cdot 10^{14}$	$270 \cdot 10^8$

ב) כתיב של איזה מספר לא "השתנה"?

ג) כתיב של איזה מספרים לא "ישתנה" כשנבצע את הפעולה במחשבון?

$36 \cdot 10^9$, $0.36 \cdot 10^8$, $360 \cdot 10^{10}$, $3.6 \cdot 10^3$

8. ע"ע רשום מה יופיע על המצג כשתבצע את התרגיל במחשבון ובדוק.

א)	$30 \cdot 10^{12}$	3. □
ב)	$500 \cdot 10^{15}$	
ג)	$8000 \cdot 10^{10}$	
ד)	$7.2 \cdot 10^{12}$	
ה)	$720 \cdot 10^{15}$	
ו)	$1952 \cdot 10^{13}$	

תרגילים

9. רשום את התוצאה כחזקה של 10 ורשום איך תראה התוצאה במחשבון (לא תמיד תופיע התוצאה במחשבון בכתיב חזקות).

א) $10^5 \cdot 10^7 = 10^{\square} = \square$

ב) $10^{15} \cdot 10^3 = 10^{\square} = \square$

ג) $100 \cdot 10^{17} = 10^{\square} = \square$

ד) $10^{31} \cdot 10 = 10^{\square} = \square$

ה) $10^5 \cdot 10^4 \cdot 10^7 = 10^{\square} = \square$

ו) $\frac{10^7}{10^2} = 10^{\square} = \square$

ז) $\frac{10^{12}}{10^4} = 10^{\square} = \square$

ח) $\frac{10^{18} \cdot 10^2}{10^{10}} = 10^{\square} = \square$

ט) $\frac{10^7 \cdot 10^{12}}{10^3} = 10^{\square} = \square$

י) $\frac{10^8 \cdot 10^{10}}{10} = 10^{\square} = \square$

10. כתוב את המספר ללא כתיב חזקות.

דוגמה: $3.65 \cdot 10^3 = 3650$

$2.7 \cdot 10^3 =$

$12.56 \cdot 10^5 =$

$0.05 \cdot 10^4 =$

11. מצא את המספר השונה בכל שורה.

א)	$0.02 \cdot 10^{12}$	$200 \cdot 10^8$	$0.2 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{11}$
ב)	$5.6 \cdot 10^6$	$0.056 \cdot 10^9$	$560 \cdot 10^4$	5,600,000

12. השלם.

	על המצג	תרגיל	ללא מחשבון
א)		$9 \cdot 10^{11}$	
ב)		$4.7 \cdot 10^8$	
ג)			78,000,000
ד)	2.4^{13}		
ה)	6.5^{09}		

13. רשום במסגרת = או ≠ כך שיתקבל פסוק נכון.

א) $10 \cdot 10^{11} \quad \square \quad 10^{11}$

ב) $560 \cdot 10^{8} \quad \square \quad 5.6 \cdot 10^{10}$

ג) $2.7 \cdot 10^{3} \quad \square \quad 2700$

ד) $2.7 \cdot 10^{3} \quad \square \quad 27 \cdot 10^{4}$

14. חשב במחשבון. רשום מה מופיע על המצג ואת המספר בכתיב חזקות.

א) $5^{15} = \boxed{3.05\ 10} = \square \cdot 10^{\square}$

ב) $3^{20} = \boxed{} = $

ג) $7.2^{12} = \boxed{} = $

15. א) סמן את המספרים השווים ל- $\boxed{5.\ 12}$

$50 \cdot 10^{11}$ $\quad 12^{5}$ $\quad 5{,}000{,}000{,}000{,}000$ $\quad 5 \cdot 10^{12}$

5^{12} $\quad 5.12$

ב) סמן את המספרים השווים ל- $\boxed{3.5\ 03}$

$3.5 \cdot 10^{3}$ $\quad 35 \cdot 10^{3}$ $\quad 3.5^{3}$ $\quad 35000$ $\quad 3500$

16. רשום תרגיל כך שתתקבל על המצג התוצאה הרשומה במסגרת.

א)	התוצאה:	1.5^{12}	התרגיל:
ב)	התוצאה:	2.53^{10}	התרגיל:
ג)	התוצאה:	7.645^{11}	התרגיל:
ד)	התוצאה:	8.1111^{10}	התרגיל:

ה) רשום תרגיל נוסף שתוצאתו כמו בסעיף ד'.

סדרה הנדסית

1. הוסף שלושה איברים לכל סדרה ורשום כלל נסיגה.

א) $2 , 6 , 18 , \ldots$

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = a_n \cdot \square \end{cases}$$

ב) $0.01 , 0.1 , 1 , 10 , \ldots$

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

ג) $64 , 32 , 16 , 8 , \ldots$

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

ד) $1 , -2 , 4 , -8 , \ldots$

$$\begin{cases} a_1 = \\ a_{n+1} = \end{cases}$$

בכל הסדרות בתרגיל 1, כלל הנסיגה היה מהצורה $a_{n+1} = a_n \cdot \square$

כלומר, כל איבר בסדרה (החל ב a_2) מתקבל מקודמו על ידי כפל באותו מספר. נסמן את הגורם הכופל הקבוע ב q ואז: $\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$

סדרה כזו נקראת **סדרה הנדסית**.

ע"ע 2. קבע אם הסדרה הנדסית.
אם כן, רשום את ערכו של q (הכופל הקבוע).

א) $2 , 8 , 32 , 128 , 512 \quad \ldots$

ב) $1 , 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , 3.5 \quad \ldots$

ג) $-1 , 2 , -4 , 8 , -16 , 32 \quad \ldots$

ד) $10 , 100 , 1000 , 10{,}000 , 100{,}000 \quad \ldots$

ה) $100 , 200 , 300 , 400 , 500 , 600 \quad \ldots$

ו) $5 , 5^2 , 5^3 , 5^4 , 5^5 \quad \ldots$

ז) $8 , 4 , 2 , 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} \quad \ldots$

ע"ע 3. השלם, כך שתתקבל סדרה הנדסית (6 איברים בכל סדרה).

א) 3 , ___ , 12 , ___ , 48 , ___

ב) 2 , ___ , 200 , . . .

ג) ___ , ___ , 50 , 250 , ___ , ___

ד) 2 , ___ , ___ , 16 . . .

4. א) השלם כך שתתקבל סדרה **הנדסית**. 2 , ___ , 8

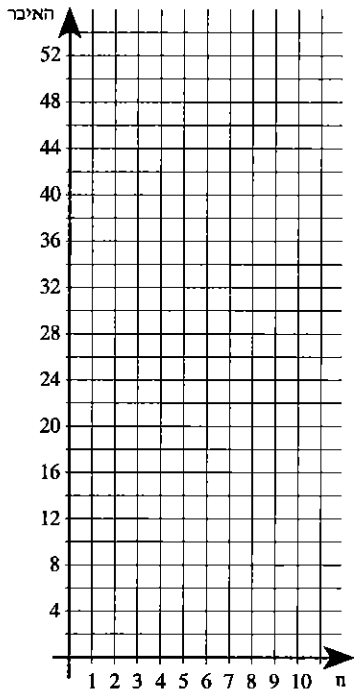
ב) השלם כך שתתקבל סדרה **חשבונית**. 2 , ___ , 8

ג) השלם כך שתתקבל סדרה **הנדסית**. 1 , ___ , ___ , 64

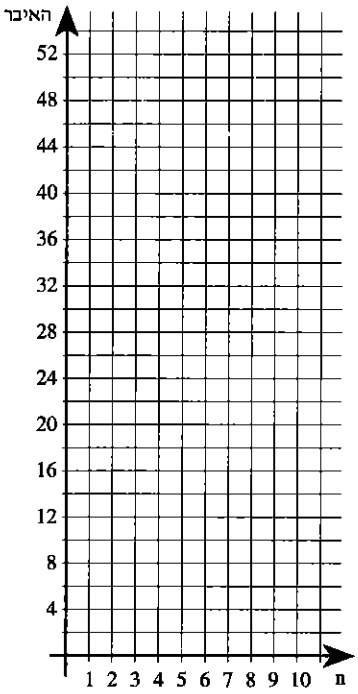
ד) השלם כך שתתקבל סדרה **חשבונית**. 1 , ___ , ___ , 64

עי"ע 5. השלם לשישה איברים בכל סדרה, קבע אם הסדרה הנדסית. וסמן במערכת הצירים.

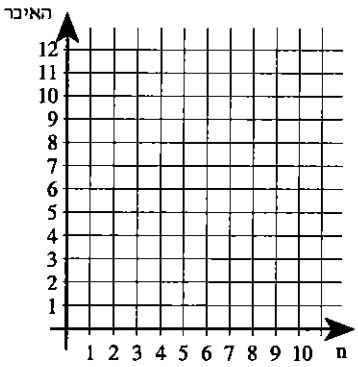
א) 1 , 2 , 4 , 8 , ___ , ___



ב) 48 , 24 , 12 , 6 , ___ , ___



ג) −1 , 1 , 3 , 5 , ___ , ___



6. א) בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 3$

(הגורם הכופל) $q = 2$

מצא את: $a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_5 =$

ב) בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 3$

בטא את האיברים בעזרת q.

דוגמה: $a_2 = 3q$

$a_3 = 3 \cdot q^2$

$a_4 =$

$a_5 =$

ג) השלם. $a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 =$

$a_5 =$

$a_6 =$

.

$a_{30} =$

ד) – כמה פעמים מופיע הגורם q בתבנית של a_8?

– כמה פעמים מופיע הגורם q בתבנית של a_{50}?

באופן כללי: בסדרה הנדסית $a_n = a_1 \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ פעמים}} = a_1 \cdot q^{n-1}$

ע"ע 7. חשב את a_6 של הסדרה ההנדסית, לפי הנתונים חשב את S_6.

א) $a_1 = 1$, $q = 3$

ב) $a_1 = 0.5$, $q = 4$

ג) $a_1 = 2$, $q = -3$

ד) $a_2 = 10$, $q = 3$

8. לסדרה חשבונית ולסדרה הנדסית אותו איבר ראשון: $a_1 = 6$.

א) בטא את a_5 של הסדרה **ההנדסית** בעזרת q .

בטא את a_5 של הסדרה **החשבונית** בעזרת d .

ב) חשב את a_8 של הסדרה **ההנדסית** אם $q = 2$.

חשב את a_8 של הסדרה **החשבונית** אם $d = 2$.

ג) חשב את a_5 של הסדרה ההנדסית אם $q = 3$.

מצא מה צריך להיות ערכו של d בסדרה החשבונית כדי ש a_5 בסדרה החשבונית יהיה זהה ל a_5 שמצאת (של הסדרה ההנדסית).

9. בסדרה הנדסית נתון: $\begin{cases} a_1 + a_2 = 8 \\ a_3 + a_4 = 72 \end{cases}$

א) רשום את הנתונים בעזרת a_1 ו-q .

ב) הוצא גורם משותף (גדול ביותר) מאגף שמאל של כל משוואה.

ג) חלק אגפי שמאל ואגפי ימין של שתי המשוואות:

_____ = _____

מצא את q ואת a_1 (שים לב: יש שתי תשובות אפשריות).

ד) רשום את ארבעת האיברים של הסדרה. (שתי אפשרויות).

ומצא בכל מקרה את S_4.

ע"ע 10. האיבר השלישי בסדרה הנדסית הוא 8, וההפרש בין האיבר הרביעי לאיבר השלישי הוא 32. חשב את q ואת a_1 .

תרגילים

11. רשום (ה) ליד כל סדרה **הנדסית**.
רשום (ח) ליד כל סדרה **חשבונית**.
רשום (א) ליד כל סדרה **אחרת** (שאינה חשבונית או הנדסית).

א) 0.2 , 2 , 20 , 200 , 2000 , 20,000 . . .

ב) 2 , 12 , 22 , 32 , 42 , 52 . . .

ג) 2 , – 20 , 200 , – 2000 , 20,000 . . .

ד) 2 , 10 , 12 , 20 , 22 , 30 , 32 . . .

ה) 2 , – 2 , 2 , – 2 , 2 , – 2 , 2 . . .

12. א) השלם כך שתתקבל סדרה **הנדסית**.

2 , ___ , 50

–2 , ___ , – 50

3 , ___ , ___ , 81

1 , ___ , ___ , 1000

ב) השלם כך שתתקבל סדרה **חשבונית**.

2 , ___ , 50

– 2 , ___ , – 50

3 , ___ , ___ , 81

1 , ___ , ___ , 1000

לפתרון התרגילים הבאים תוכל להיעזר בדרישת הסדרה בשורה באופן הבא: סימון האיברים שאינם ידועים בקו _ ושיבוש האיברים הנתונים במקומות המתאימים, או בהוק לפי מקום $(a_n = a_1 q^{n-1})$

13. א) בסדרה הנדסית נתון: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ q = 4 \end{cases}$

חשב את a_8 ואת a_9.

ב) בסדרה הנדסית נתון: $\begin{cases} a_3 = 9 \\ a_4 = 27 \end{cases}$

השלם את שורת האיברים עד ל a_8. ___ , ___ , 9 , 27 , ___ , ...

14. בסדרה הנדסית נתון $a_3 = 50$ $a_5 = 1250$

רשום: ___ , ___ , 50 , ___ , 1250

מצא את q , את a_4 ואת a_1.

15. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 4$
$q = 3$

באיזה מקום בסדרה נמצא איבר שערכו 2916?

16. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = -2$
$q = 7$

- באיזה מקום בסדרה נמצא איבר שערכו 4802 –?
- האם יש בסדרה איבר שהוא מספר אי זוגי? נמק.

17. בסדרה הנדסית נתון: $\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_4 = 2.5 \end{cases}$

א) מצא את ערכו של q, a_2 ו a_3.

ב) באיזה מקום נמצא איבר שערכו 0.625?

18. גודלו של כתם שמן כיום הוא 2304 מ״ר. בשל טיפול להכחדתו, גודל הכתם הולך וקטן בכל שנה פי 0.75 .

א) השלם את סדרת גדלי הכתם מדי שנה

כיום

_____ , _____ , _____ , 2304 , _____ , _____

ב) מה יהיה גודלו של כתם השמן כעבור שנה, כעבור 4 שנים?

ג) מה היה גודל הכתם לפני שנה?

ד) מה היה גודל הכתם לפני שנתיים?

ה) האם לדעתך, הכתם יכחד אי פעם?

19. סכום האיברים השלישי והחמישי בסדרה הנדסית הוא 20 וההפרש בין האיבר השלישי לחמישי הוא 12.
מצאו את חמשת איברי הסדרה. (שים לב! יש שתי תשובות אפשריות.)

סדרות חשבוניות והנדסיות בצוותא

1. א) המשך ורשום 5 איברים כך שתתקבל סדרה **הנדסית** .

3 , 6 , __ , __ , __ .

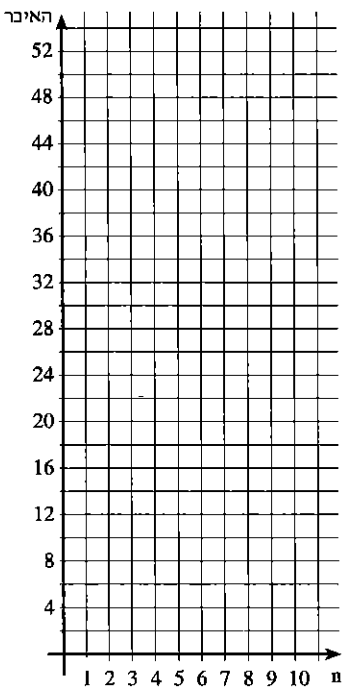
שרטט במערכת הצירים.

ב) המשך ורשום 5 איברים כך שתתקבל סדרה **חשבונית.**

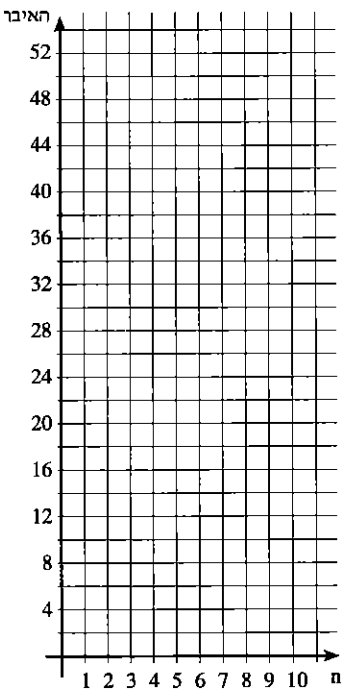
3 , 6 , __ , __ , __.

שרטט במערכת הצירים.

ב)

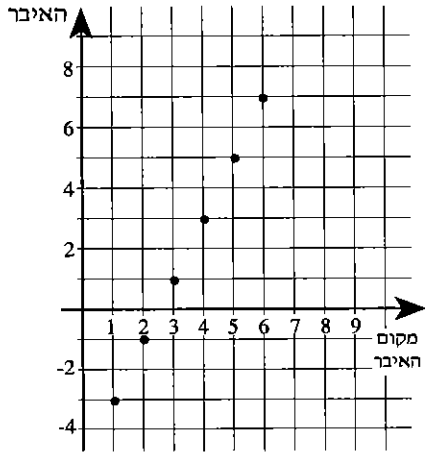


א)

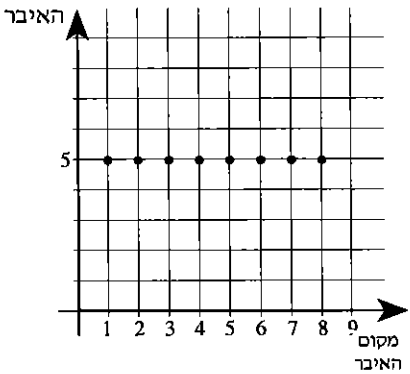


2. – רשום את איברי הסדרה על פי הגרף, והוסף 3 איברים.
– רשום (ה) ליד כל סדרה הנדסית.
– רשום (ח) ליד כל סדרה חשבונית.
– רשום כלל נסיגה או חוק לפי מקום לכל סדרה.

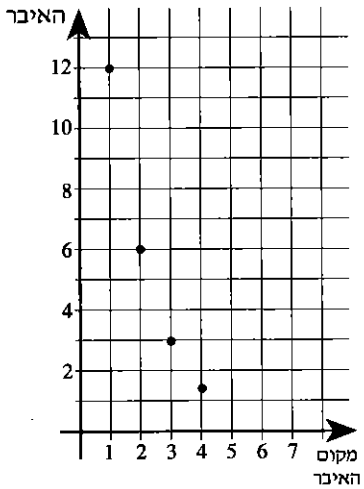
א)



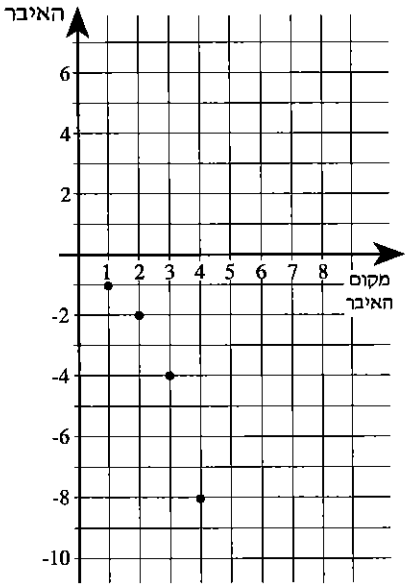
ב)



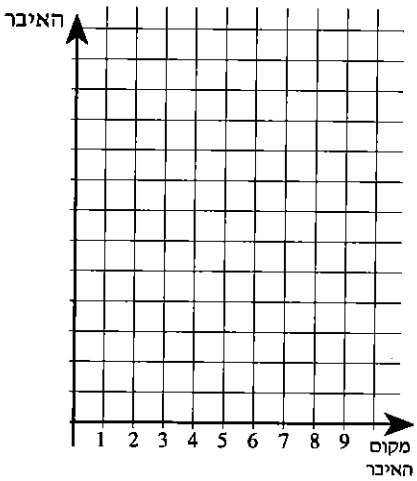
ג)



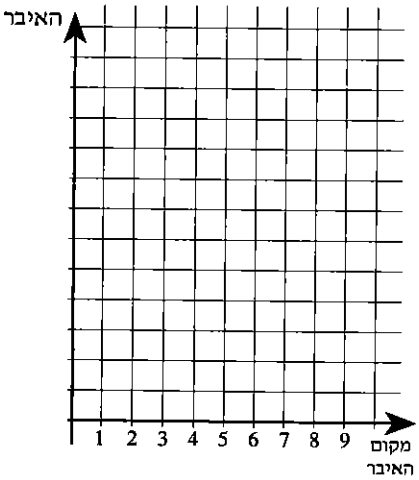
ד)



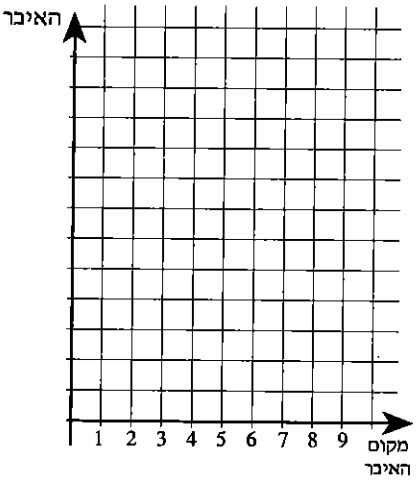
3. א) שרטט גרף שיתאר סדרה **הנדסית** (רשום יחידות על ציר y).



ב) שרטט גרף שיתאר סדרה **חשבונית** (רשום יחידות על ציר y).



ג) שרטט גרף שיתאר סדרה **שאינה** הנדסית ואינה חשבונית (רשום יחידות על ציר y).



4. השלם כך שתתקבל סדרה **הנדסית** ורשום לכל סדרה כלל נסיגה.

א) 10 , ___ , 160 , ___

ב) 12 , ___ , 3 , ___

ג) 2 , – 3 , ___ , –6.75

ד) 6 , ___ , ___ , 1296

5. השלם כך שתתקבל סדרה **חשבונית** ורשום לכל סדרה כלל נסיגה.

א) 2 , ___ , 8 , ___

ב) 12 , ___ , 2 , ___

ג) 4 , ___ , ___ , 13

6. א) בטא את האיבר המבוקש של הסדרה **ההנדסית** בעזרת הכופל q והאיבר הראשון.

דוגמה: $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$a_7 =$ $\qquad$ $a_{100} =$

$a_{51} =$ $\qquad$ $a_{10} =$

ב) נתון כלל נסיגה: $a_{n+1} = a_n \cdot 7$

– השלם: $a_5 = a_1 \cdot$ ___ $\qquad$ $a_{100} = a_1 \cdot$ ___

– מה ערכו של q ?

7. בטא את האיבר המבוקש של הסדרה **החשבונית** בעזרת התוספת הקבועה d והאיבר הראשון.

דוגמה: $a_4 = a_1 + 3d$

$a_7 =$ $\qquad$ $a_{10} =$ $\qquad$ $a_{72} =$

8. רשום איזה איבר מיוצג בכל סדרה הנדסית, מהו a_1 ומהו הכופל הקבוע.
(כל איבר רשום בצורה: $a_n = a \cdot q^{n-1}$)

א) $a_{\square} = 3 \cdot 5^8$ $\qquad$ ג) $a_{\square} = 5 \cdot 2^{11}$

ב) $a_{\square} = 2 \cdot (-3)^7$ $\qquad$ ד) $a_{\square} = 7^{10}$

9. א) רשום איזה איבר מיוצג בכל סדרה הנדסית.

$a_{\square} = a_1 \cdot q^{12}$ $\qquad$ $a_{\square} = a_1 \cdot q^8$

ב) רשום איזה איבר מיוצג בכל סדרה חשבונית.

$a_{\square} = a_1 + 4d$ $\qquad$ $a_{\square} = a_1 + 100d$

10. א) איבר ראשון של סדרה **הנדסית** הוא 3 והכופל הקבוע הוא 4.
חשב את a_5.

ב) איבר ראשון של סדרה **חשבונית** הוא 3 והתוספת הקבועה 4.
חשב את a_5.

11. א) בסדרה הנדסית נתון: $\begin{cases} a_1 = 10 \\ q = 2 \end{cases}$

באיזה מקום נמצא איבר שערכו 160?

ב) בסדרה חשבונית נתון: $\begin{cases} a_1 = 10 \\ d = 2 \end{cases}$

באיזה מקום נמצא איבר שערכו 160?

12. צמח מטפס גדֵל בגיונגל. בכל שבוע גובהו הוא פי 1.2 מגובהו בשבוע הקודם.
בסוף השבוע הראשון מאז הנביטה היה גובהו 4 ס"מ.
מה יהיה גובהו בס"מ בסוף השבוע העשירי?
מה יהיה גובהו בס"מ בסוף השבוע העשרים?

13. צמח מטפס בגן ציבורי גדל בכל שבוע ב- 2 ס"מ.
גובהו בסוף השבוע הראשון (לאחר השתילה) 4 ס"מ.
מה יהיה גובהו בס"מ בסוף השבוע העשירי?
מה יהיה גובהו בס"מ בסוף השבוע העשרים?

תרגילים

14. בסדרה **הנדסית** נתון $a_1 = 1.5$ $a_3 = 24$.

א) חשב את q ואת a_7.

ב) ידוע ש $a_9 = 98304$. מצא את a_{10}?

ג) ידוע $a_{12} = 6{,}291{,}456$. מצא את a_{11}.

ד) רשום כלל נסיגה לסדרה זו.

15. בסדרה **חשבונית** נתון: $a_1 = 4$, $a_5 = 44$.

א) חשב את d ואת a_{10} .

ב) רשום כלל נסיגה לסדרה זו.

16. בסדרה הנדסית נתון $a_1 = 3$ וסכום שני האיברים הראשונים 15 .

מצא את q, (מצא תחילה את a_2).

רשום ארבעה איברים ראשונים של סדרה זו.

17. שלוש סדרות מוגדרות בעזרת כלל נסיגה.

i) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$ ii) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 4 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$

א) מצא בכל סדרה את a_5 .

ב) אחת מהסדרות **הנדסית** מצא בסדרה זו את a_6.

ג) אחת מהסדרות **חשבונית** מצא בסדרה זו את a_{20} .

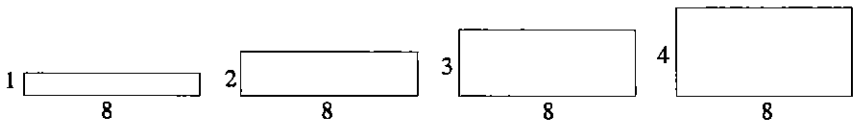
18. נתון $a_{n+1} = a_n \cdot 4$

האיבר השני בסדרה הוא 12 .

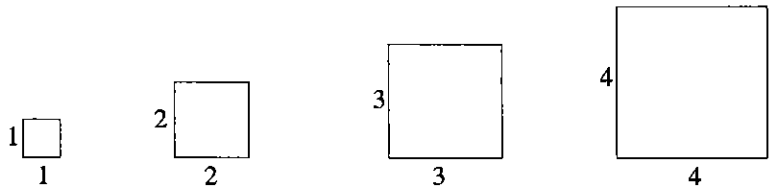
מצא את a_1 ואת a_{10} .

19. א) רשום סדרת מספרים המתארת את שטחי המלבנים, מהמלבן הראשון ועד **לשמיני**, בכל אחת מהסדרות המשורטטות.

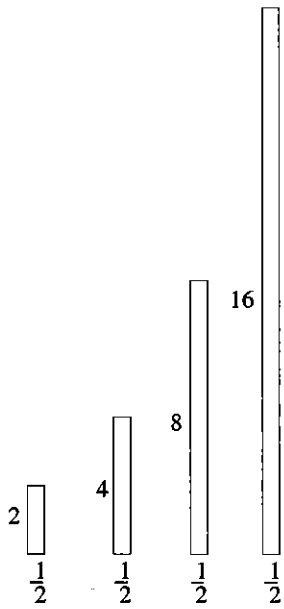
(i) אורך אחת הצלעות גדֵל ביחידה.



(ii) אורך כל צלע גדֵל ביחידה.



(iii) אורך אחת הצלעות גדֵל פי 2.



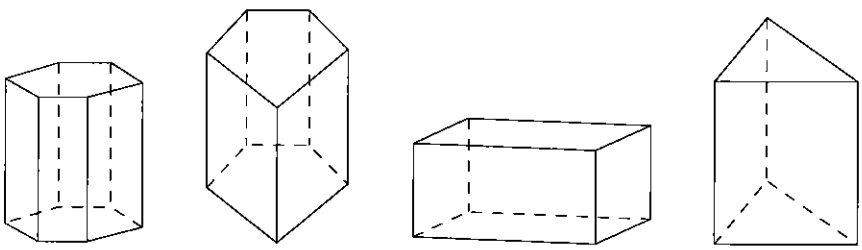
ב) איזו מהסדרות חשבונית ואיזו הנדסית?

ג) – האיברים של איזו סדרה גדֵלים "מהר ביותר"?
– החל מאיזה מקום השטחים המתוארים על ידי סדרה זו, גדולים מהשטחים המתוארים על ידי הסדרות האחרות?

ד) רשום חוק לפי מקום לכל סדרה.

ה) – רשום סדרת מספרים שתתאר את היקפי המלבנים בכל סדרה. (עד למלבן השמיני).
– נסה לרשום חוק לכל סדרה.

20. ביחידה הנדסת המרחב, ספרת את מספר האלכסונים במנסרות עם בסיסים שונים.
איילת ספרה בדרך מסוימת ורשמה מתחת לכל מנסרה את מספר אלכסוניה.



הבסיס משולש	הבסיס-מרובע	הבסיס-מחומש	הבסיס-משושה
0	$4 \cdot 1$	$5 \cdot 2$	$6 \cdot 3$

א) נסה להסביר את דרך הספירה שלה.

ב) כמה אלכסונים במנסרה שבסיסה מצולע בעל:
7 צלעות? 8 צלעות? 9 צלעות? 10 צלעות?

תרגול נוסף בנושאים כלל נסיגה וכלל לפי מקום

ע"ע 1. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = 5 - 7n$.

א) מצא את a_{10} , a_{27}.

ב) האם המספר 2 נמצא בסדרה? אם כן, מצא את מקומו, אם לא, נמק.

ג) האם המספר 100- נמצא בסדרה? אם כן, מצא את מקומו, אם לא נמק.

ד) האם המספר 1000- נמצא בסדרה? אם כן, מצא את מקומו, אם לא נמק.

ע"ע 2. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = -3 + 2n^2 - 5n$,

א) מצא את a_1, a_4, a_{10} בסדרה.

ב) באיזה מקום בסדרה נמצא המספר 429?

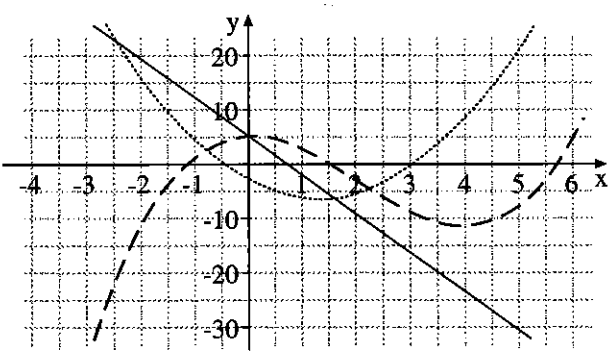
3. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = \frac{n^3}{2} - 3n^2 + 5$.

א) מצא את שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב) באיזה מקום בסדרה נמצא המספר 5?

4. לפניך גרפים של 3 פונקציות (תחום ההגדרה כל המספרים).

$$f(x) = 5 - 7x \ , \quad g(x) = -3 + 2x^2 - 5x, \quad h(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 5$$



א) התאם גרף לחוק. נמק.

ב) אם נקח כתחום הגדרה את המספרים הטבעיים הרי שכל פונקציה תתאים לאחת מ- 3 הסדרות שהופיעו בתרגילים 1 ,2 ,3.

(i) סמן בכל גרף נקודה המתאימה לאיבר החמישי בסידרה.

(ii) האם קיימים בסדרות האלה, איברים שערכם אפס?
אם כן, מה מקומו הסידורי של כל איבר כזה? היעזר בגרף ובדוק על ידי הצבה.

(iii) האם יש איברים משותפים לשתיים מהסדרות האלה? אם כן, רשום באיזה סדרות ומה המקום הסידורי של האיבר המשותף.
(הצב ובדוק.)

ע"ע 5. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = \frac{1}{2}n - 11$

א) האם יש איבר בסדרה ששווה לאפס? אם כן, מצא את מיקומו, אם לא נמק.

ב) מצא החל מאיזה מקום איברי הסדרה הם חיוביים.

6. נתונה סדרה לפי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = -7 \end{cases}$$

א) חשב את ששת האיברים הראשונים בסדרה.

ב) – רשום חמישה איברים ראשונים בסדרת ההפרשים.

הסדרה: -7 _ _ _ _ _

סדרת ההפרשים: _ _ _ _ _

– מצא את החוק לפי מקום של סדרת ההפרשים.

– הסבר את הקשר בין החוק שמצאת לבין כלל הנסיגה הנתון.

ג) – באיזה מקום בסדרה נמצאים איברים עוקבים שהפרשם 106?

– האם הפרש של שני איברים עוקבים בסדרה יכול להיות 125? הסבר.

7. נתונה סדרה לפי כלל הנסיגה: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n \end{cases}$

א) מצא חמישה איברים ראשונים בסדרה.

ב) מצא פי כמה גדול האיבר החמישי מהאיבר הרביעי.

ג) מצא פי כמה גדול האיבר התשיעי מהאיבר השמיני.

ד) מצא באיזה מקום נמצא האיבר שגדול מקודמו פי 22.

8. רשום בכתיב מתמטי ומצא את ארבעת האיברים הראשונים בכל סדרה.

א) האיבר הראשון בסדרה הוא 3 והאיבר השני -2, וכל איבר הוא מכפלת שני האיברים הקודמים לו.

ב) האיבר הראשון בסדרה הוא -2 וכל איבר הוא מכפלת האיבר הקודם במקומו הסידורי של האיבר הקודם.

ג) האיבר הראשון בסדרה הוא 10 וכל איבר הוא מכפלת מקומו הסידורי של האיבר באיבר הקודם לו.

9. לכל סדרה מטור א' מתאימה סדרה זהה בטור ב'.
התאם בין הסדרות.

טור א'		טור ב'
א) $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$	(i)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$
ב) $a_n = n^2 - n + 2$	(ii)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n \end{cases}$
ג) $a_n = 4n - 2$	(iii)	$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 2n \end{cases}$
ד) $a_n = n(1+n)$	(iv)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2(n+1) \end{cases}$

10. נתונה הסדרה ההנדסית: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$

א) מצא את a_3, a_2 בסדרה.

ב) מצא מספר x כך שהסדרה $a_1 + x,\ \ a_2,\ \ a_3 + x$ תהיה סדרה חשבונית.

11. נתון החוק לפי מקום של הסדרה: $a_n = n^2 - 2n$.

א) מצא את האיברים $a_6,\ a_7,\ a_8$ בסדרה.

ב) מצא מספר x עבורו הסדרה $a_6 + x,\ a_7,\ a_8$ תהיה סדרה חשבונית.

12. רשום נכון או לא נכון ונמק. במקרה שהביטוי לא נכון, תקן לביטוי נכון.

א) $S_3 = a_1 + S_2$

ב) $S_3 = a_4 + S_7$

ג) $S_{10} = S_9 + a_{10}$

ד) $S_3 = S_2 + S_1$

ה) $a_8 = S_8 - S_7$

ו) $a_3 = S_4 - S_3$

13. נתונה נוסחת הסכום של סדרה: $s_n = n^2 + 2n - 4$.

א) מצא את a_1

ב) מצא את S_5, S_4 ואת a_5.

תרגילים

14. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = 2n + 1$.

א) באיזה מקום בסדרה נמצא המספר 323?

ב) האם המספר 588 נמצא בסדרה? אם כן, מצא את מקומו, אם לא נמק.

15. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 8n$.

א) חשב את a_{12} , a_{10}.

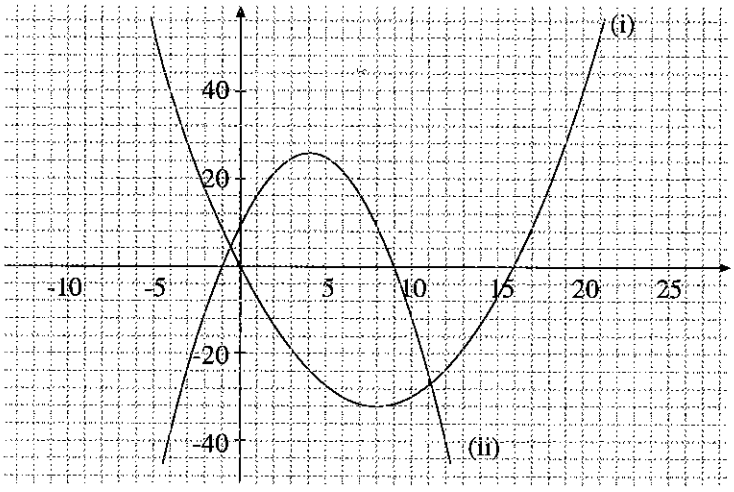
ב) האם המספר 0 נמצא בסדרה? אם כן, מצא את מקומו אם לא, נמק.

ג) באיזה מקום בסדרה נמצא המספר 40?

16. לפניך גרפים של הפונקציות (תחום ההגדרה כל המספרים)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x$$

$$g(x) = -x^2 + 8x + 9$$



א) התאם גרף לחוק הפונקציה ונמק.

ב) אם נקח כתחום הגדרה את המספרים הטבעיים הרי שכל פונקציה תתאים לאחת משתי סדרות.

רשום אותן: $f: \ a_n =$

$g: \ a_n =$

ג) סמן בכל גרף נקודה המתאימה ל a_6.

ד) האם קיימים איברים שערכם אפס בסדרות האלה? אם כן מה מקומם הסידורי? בדוק.

ה) האם יש איבר משותף לשתי הסדרות האלה? אם כן, מה מקומו הסידורי? הצב ובדוק.

17. נתון החוק לפי מקום של סדרה: $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

א) מצא את ששת האיברים הראשונים בסדרה.

ב) באיזה מקום נמצא כל אחד מהאיברים הבאים: $\frac{1}{462}$, $\frac{1}{110}$?

18. נתונה סדרה לפי כלל הנסיגה:
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n \end{cases}$$

א) מצא את חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

ב) מצא מספר x עבורו סדרת המספרים $a_3 + x, a_4, a_5$ תהיה סדרה הנדסית, נמק.

19. נתונה סדרה לפי כלל הנסיגה:
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \end{cases}$$

א) מצא את חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

ב) מצא, פי כמה קטן האיבר החמישי מהאיבר הרביעי.

ג) מצא, באיזה מקום נמצא איבר שקטן מקודמו פי 7.

20. נתונה נוסחת הסכום של סדרה: $S_n = 2(n-8)^2$.

א) מצא את a_1.

ב) מצא את S_2 ואת a_2 של הסדרה.

ג) מצא את a_3 ואת a_4 של הסדרה.

ד) כמה איברים בסדרה יש לחבר כדי ש- $S_n = 18$? הסבר את תשובתך.

לקראת הפונקציה המעריכית

1. תכנית חסכון "המטמון" פרסמה דו"ח. הדו"ח קובע שבשנים האחרונות כל סכום שמושקע בתכנית גדֵל פי 1.2 בכל שנה.
בשנה הראשונה היו לאסף 1000 ש"ח.
הסכום שיש לו כעת, בשנה העשירית?
(הצעה: רשום את שורת איברי הסדרה).

2. סכום כסף המושקע בבנק גדֵל ב 10% במשך שנה.

א) סכום של 200 הושקע בבנק. מה יהיה ערכו אחרי שנה?
ב) **פי כמה** גדל הסכום של 200 ש"ח במשך השנה?
ג) **פי כמה** יגדל **כל** סכום במשך שנה?
בסוף השנה הראשונה היה הסכום של משקיע אחר 12,100 ש"ח.
ד) מה יהיה הסכום **בסוף** השנה השניה? **ובסוף** השנה השלישית?
ה) מה יהיה הסכום **בסוף** השנה העשירית?
(רשום את איברי הסדרה בשורה.)
ו) מה היה הסכום **בתחילת** השנה הראשונה?

3. א) אחוז הריבוי הטבעי במדינה מסוימת הוא 10%.
במדינה זו כיום 3,200,000 תושבים.
- מה מספר התושבים הצפוי לאחר שנה?
- מה מספר התושבים הצפוי לאחר שנתיים?
- מה מספר התושבים הצפוי לאחר 7 שנים?

ב) אחוז הריבוי הטבעי במדינה אחרת הוא 15%.
a_0 מייצג את מספר התושבים במדינה זו כיום.
- רשום ביטוי למספר התושבים לאחר שנה.
- רשום ביטוי למספר התושבים לאחר שנתיים.
- רשום ביטוי למספר התושבים לאחר 7 שנים.
- רשום ביטוי למספר התושבים לאחר n שנים.

ובאופן כללי: אם a_0 מייצג כמות מסוימת **בתחילת** התהליך של גידול מעריכי (בו בכל פעם נכפלת הכמות בגורם קבוע), q הוא גורם הגידול ו- a_n הכמות לאחר n פרקי זמן, נקבל כי $a_n = a_0q^n$

תהליך החישוב והנוסחה שקיבלתם כאן (ובתרגילים הקודמים) דומה לתהליך החישוב ולנוסחת האיבר הכללי בסדרה הנדסית. אך יש לשים לב, שכאן כל איברי הסדרה פרט לנתון עצמו, מתייחסים למספר התושבים **בסוף השנה** בה מדובר, ואילו הנתון מתייחס **לתחילת השנה** הראשונה.

4. א) מספר המעטפות שממיין עובד מתחיל בשעה, בבית דפוס, גדֵל בכל יום פי 1.5. ביום הראשון מיין 64 מעטפות בשעה.
כמה ימיין ביום החמישי?

ב) כתם נפט אובחן בגודל 64 מ״ר. הכתם גדֵל פי 1.5 בכל שעה.
- מה יהיה גודל כתם השמן בסוף השעה הראשונה?
- מה יהיה גודל כתם השמן בסוף השעה השניה?
- מה יהיה גודל כתם השמן בסוף השעה החמישית?

ג) במה דומות השאלות בשני הסעיפים ובמה הן שונות?

5. ערכה של מכונית יורד בכל שנה ב- 8%. מחיר מכונית חדשה הוא 90,000 ש״ח.
א) מה יהיה ערך המכונית אחרי שנה?
ב) פי כמה קטן ערך המכונית במשך השנה?
ג) פי כמה יקטן ערך המכונית בכל שנה?
ד) מה יהיה ערך המכונית אחרי 6 שנים?

תרגילים

6. מכל חיידק טֶטָנוס בודד מתקבלים במשך דקה אחת 2 חיידקים.
בתחילת התהליך היו בצלוחית 1000 חיידקים.
כמה יהיו לאחר 5 דקות?
כמה יהיו לאחר 10 דקות?
כמה יהיו לאחר שעה?

7. צמח מתפשט ושטחו גדֵל פי 1.5 במשך חודש.

בסוף החודש השלישי היה שטחו 18 מ״ר. השלם: ___ , 18 , ___ , ___ , ___

- מה היה שטחו בסוף החודש הראשון?
- מה היה שטחו בתחילת החודש הראשון?
- מה יהיה שטחו בסוף החודש ה- 12?

8. אדם לקח הלוואה ובכל שנה הקטין את חובו ב 10%. בתחילת השנה הראשונה היה חובו 20,000 ש״ח.

א) מה יהיה חובו **בסוף** השנה הראשונה?

ב) פי כמה קטן החוב במשך שנה?

ג) כפי שמצאת בסעיף א׳ היה חובו **בסוף** השנה הראשונה 18,000 ש״ח.
מה יהיה גודל החוב **בסוף** השנה השלישית.

ד) מה יהיה החוב **בסוף** השנה העשירית.

ה) בדוק לאחר כמה שנים יהיה החוב לראשונה קטן מ- 10,000 ש״ח.

9. כדי לנקות מי שתייה מוסיפים כלור למים. ככל שהחיידקים נמצאים זמן רב יותר במגע עם הכלור נותרים פחות חיידקים.

במשך דקה נכחדים 26% מהחיידקים שהיו.

a מייצגת את כמות החיידקים ברגע הזרמת הכלור.

א) רשום ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר דקה.

ב) – רשום ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר 5 דקות.
– האם, לאחר 5 דקות נותרו יותר או פחות מ- 10% מהחיידקים שהיו בתחילה?

ג) – רשום ביטוי למספר החיידקים שנותרו לאחר רבע שעה.
– האם, לאחר רבע שעה, נותרו יותר או פחות מ-1% מהחיידקים שהיו בתחילה?

ד) כעבור כמה דקות ישארו לראשונה פחות מחצי אחוז ממספר החיידקים שהיו בתחילה?

פרק ב' – מסדרות לפונקציה מעריכית

ומה "לפני האיבר הראשון"?

ע"ע 1. א) השלם איברים בסדרה.

___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , 27 , 9 , 3

ב) באיזה מקום נמצא 6561?

ג) השלם: $a_{\square} = 729$.

ד) איזה מספר נמצא במקום העשירי?

ה) השלם: $a_5 =$ ___.

ו) האם המספרים הבאים נמצאים בסדרה? אם כן, רשום באיזה מקום.
אם לא, נמק.
81 , 324522 , 1 , −81 , 297 , 729

ע"ע 2. השלם איברים בסדרה.

א) ___ , ___ , ___ , ___ , 64 , 32 , 16 , 8 , ___ , ___ , ___ , ___

ב) , ___ , ___ , ___ , 5 , 25 , 125 , 625 , ___ , ___ , ___ , ___

3. א) הוסף 2 איברים לסדרה.

___ , ___ , 343 , 49 , 7

ב) אם תמשיך את הסדרה שמאלה, מה יהיה האיבר **לפני** 7?

ג) מהו האיבר הקודם לזה שרשמת בסעיף ב'?

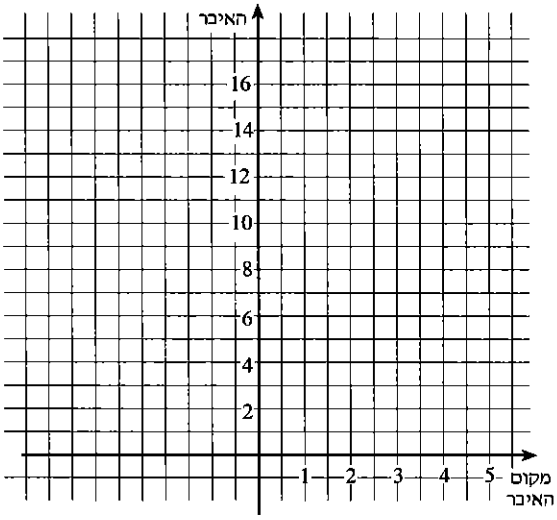
אם קבענו שבסדרה מסוימת $a_1 = 7$ קבענו שאין בסדרה זו איברים לפני 7.
יחד עם זאת, ניתן להמשיך את הסדרה שמאלה (כפי שוודאי עשית). בתרגילים הבאים ננסה לתת משמעות ל"מקום" של איברים אלה.

4. א) השלם איברים בסדרה.

מקומו של האיבר: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

האיבר בסדרה: 2 , 4 , 8 , ___ , ___ , ___

ב) סמן במערכת הצירים את ארבעת האיברים הראשונים.



ג) – המשך את הסדרה **שמאלה** ואת "מקומם" של האיברים האלה.

המקום: 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , ___ , ___ , ___

האיברים: 64 , 32 , 16 , 8 , 4 , 2 , ___ , ___ , ___

– רשום את ה"מקומות" גם על ציר x. (משמאל לאפס.)

– הוסף נקודות מתאימות במערכת הצירים.

עד לתרגיל זה ראית גרף של סדרה רק עבור ערכי x שלמים וחיוביים, וזאת מאחר ומקומו של איבר בסדרה נרשם בעזרת מספרים שלמים חיוביים.

ד) – מה הוא האיבר ב"מקום 3–"?

– מה הוא ה"מקום" המתאים ל $\frac{1}{16}$?

– מה הוא האיבר ב"מקום 0"?

החוק המתאים לסדרה בתרגיל הקודם הוא 2^x. עד כה הכרת את הגדרת החזקה ככפל של אותו גורם ולכן x בביטוי 2^x היה תמיד שלם וחיובי.
מגדירים חזקה גם עבור מעריך שלילי, או אפס, באופן שמתאים להמשך הסדרה שמאלה ולגרף הנקודות ששרטטת.

5. השלם.

מקום האיבר: ___ ___ ___ ___ 0 ___ ___ –3 –4

האיבר כחזקה: ___ , 2^3 , 2^2 , 2^1 , ___ , ___ , ___ , 2^{-3} , 2^{-4}

האיבר: 16 , 8 , 4 , 2 , 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ___ , ___

מקום האיבר: ___ ___ ___ 0 ___ –2 ___ ___

האיבר כחזקה: ___ , ___ , ___ , ___ , 10^{-1} , ___ , ___ , ___

האיבר: 1000 , 100 , 10 , 1 , $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ___ , ___

ע"ע 6. השלם.

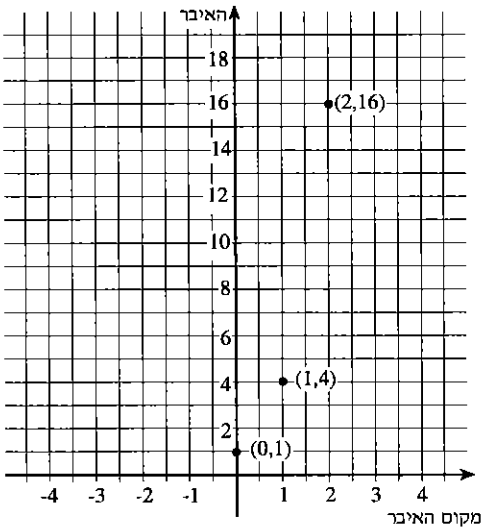
האיבר כחזקה: ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , 5^{-2} , ___

האיבר: 125 , 25 , 5 , 1 , ___ , ___ , ___

ע"ע 7. במערכת הצירים שלפניך מסומנות שלוש נקודות.

א) ציין איזה מהחוקים הבאים מתאים לנקודות המסומנות

$y = 2^x$ $y = 4^x$ $y = 8^x$



ב) מצא: – מהו האיבר ב"מקום 4"?

– מהו האיבר ב"מקום 1–"?

– מהו האיבר ב"מקום 2–"?

– מהו האיבר ב"מקום 3–"?

ג) האם לדעתך יכול להיות בסדרה זו איבר שלילי? הסבר.

ד) האם לדעתך יכול להיות בסדרה זו איבר שערכו 0? הסבר.

ע"ע 8. רשום כשבר וחשב את ערך המכנה.

דוגמה: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

א)	$4^{-2} =$	ד)	$8^{-1} =$
ב)	$7^{-1} =$	ה)	$12^{-2} =$
ג)	$10^{-2} =$	ו)	$4^{-3} =$

ע"ע 9. א) נתונה סדרה הנדסית: $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8} \ldots$ מצא את q .

ב) נתונה סדרה הנדסית: $5^3, 5, 5^{-1}, \ldots$
רשום שני איברים נוספים בכתיב חזקות ו"בכתיב שברים".

בסעיף זה ראית כיצד ניתן להרחיב את פעולת החזקה למעריך אפס ולמעריך שלילי.

עבור כל a חיובי

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1$$

תרגילים

10. חוק של סדרה הוא 3^x .

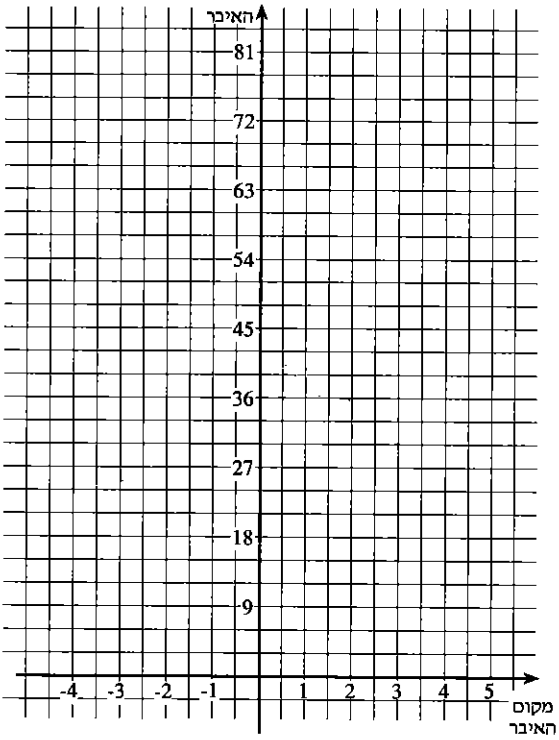
א) השלם.

מקום האיבר: 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , ___ , ___ , ___

האיבר: ___ , ___ , ___ , ___ , 9 , 3 , ___ , ___ , ___

האיבר כחזקה: ___ , ___ , 3^4 , 3^3 , 3^2 , 3^1 , ___ , ___ , 3^{-2}

ב) סמן במערכת צירים את איברי הסדרה ואת מקומם על הציר **האופקי**.

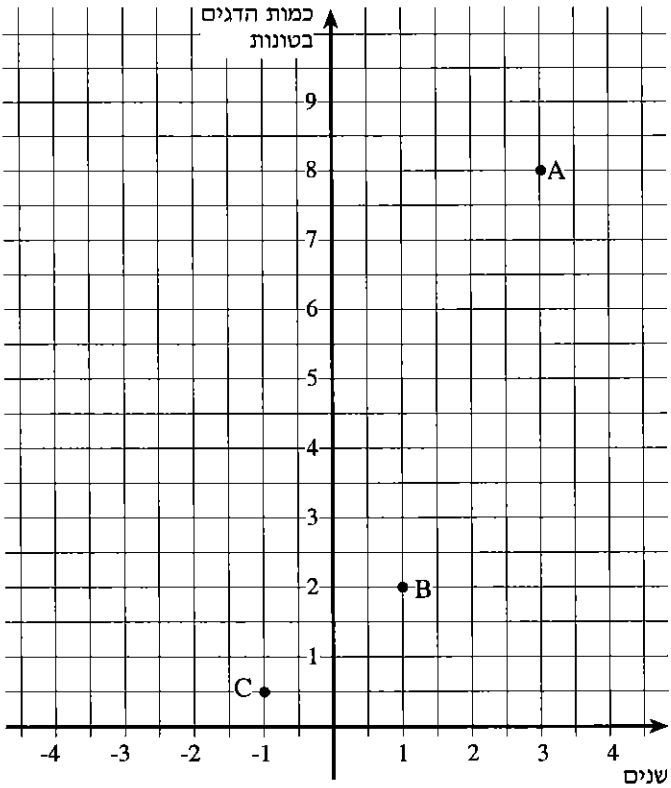


11. בבריכה לגידול דגים יש היום 1 טון של דגי קרפיון. בכל שנה גדֵלה כמות הדגים בבריכה פי 2 .

הנקודות בגרף מתארות את תהליך הגידול של הדגים בבריכה.

א) השלם: משמעות הנקודה A היא, שלאחר 3 שנים כמות הדגים בבריכה תהיה _____ טון.

מה המשמעות של הנקודות B ו C?



ב) השלם את הטבלה:

כעבור/לפני ... שנים			1	0	−1		
משקל הדגים בבריכה (בטונות)					1/2		

ג) כתוב אמת או שקר:

- בעוד שנתיים תגדל כמות הדגים פי 2.
- לפני שנה היתה מחצית מכמות הדגים של היום.
- בעוד שלוש שנים תגדל כמות הדגים פי 8.

12. רשום כשבר וחשב.

דוגמה: $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

א) $6^{-1} =$ ב) $4^{-2} =$ ג) $3^{-2} =$

ד) $10^{-2} =$ ה) $5^{-3} =$ ו) $3^{-1} =$

13. רשום כחזקה עם מעריך שלם (חיובי או שלילי).

א) $125 =$ ד) $\frac{1}{10^5} =$

ב) $10{,}000 =$ ה) $\frac{1}{216} =$

ג) $\frac{1}{5^3} =$ ו) $\frac{1}{81} =$

14. השלם. פרק תחילה את המונה והמכנה לגורמים הרשומים מימין לסימן השוויון.

א) $144 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$

ב) $\frac{1}{144} = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$

ג) $500 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$

ד) $\frac{1}{5000} = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$

ה) $\frac{1}{2025} = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

ו) $\frac{81}{128} = \frac{3^{\square}}{2^{\square}}$

ז) $\frac{10125}{64} = \frac{3^{\square} \cdot 5^{\square}}{2^{\square}}$

ח) $1 = 5^{\square}$

15. פתור. (מצא את x.)

א) $2^x = 64$

ב) $3^x = \frac{1}{3}$

ג) $3^x = 81$

ד) $4^x = \frac{1}{4}$

ה) $5^x = \frac{1}{625}$

ו) $3^x = \frac{1}{243}$

ז) $6^x = 1$

ח) $7^x = \frac{1}{343}$

ט) $10^x = 0.0001$

י) $8^x = 1$

16. א) $2^{2x} = 16$ מצא את 2^{-x} .

ב) $3^{2x} = \frac{1}{9}$ מצא את 3^{x} ואת 3^{-x} .

ג) $5^{-2x} = 25$ מצא את 5^{-x} ואת 5^{x} .

17. א) $3^{x} = 9$ למה שווה 3^{-x} ?

למה שווה $(\frac{1}{3})^{x}$?

למה שווה $(\frac{1}{3})^{-x}$?

ב) $3^{x} = \frac{1}{9}$ למה שווה 3^{-x} ?

למה שווה $(\frac{1}{3})^{x}$?

למה שווה $(\frac{1}{3})^{-x}$?

ג) $3^{x} = 2$ למה שווה 3^{-x} ?

למה שווה $(\frac{1}{3})^{x}$?

למה שווה $(\frac{1}{3})^{-x}$?

ד) $3^{x} = a$ בטא את 3^{-x} בעזרת a.

בטא את $(\frac{1}{3})^{x}$ בעזרת a .

בטא את $(\frac{1}{3})^{-x}$ בעזרת a .

18. א) כדי לחשב באמצעות מחשבון את 5^{-2} הקש

5	x^y	2	+/−	=

ב) שער מה תהיה התוצאה ובדוק בעזרת המחשבון.

i) $2^{-2} =$ iv) $0.5^{-1} =$

ii) $5^{-1} =$ v) $0.1^{-1} =$

iii) $\frac{1}{8^{-1}} =$ vi) $0.2^{-1} =$

ג) פתור.

i) $0.1^x = 0.0001$ iii) $5^x = 0.2$

ii) $10^x = 0.0001$ iv) $2^x = 0.5$

חוקי חזקות ומעריך שלם

1. בסעיף הקודם למדת את הכלל:

$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$ כאשר m גדול מ- k .

$a \neq 0$, k, m שלמים חיוביים.

רשום כחזקה.

א) $\frac{5^{12}}{5^7} =$

ב) $\frac{10^{12}}{10^6} =$

ג) $\frac{a^m}{a^3} =$ $(m > 3)$

ד) $\frac{a^{13}}{a^k} =$ $(k < 13)$

2. נבדוק כעת אם החוק מתקיים עבור m קטן מ- k .

השלם. $a \neq 0$

א) i) $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} = a^{\square}$

ii) $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{\square}$

ב) i) $\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{\qquad} =$

ii) $\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} =$

ג) i) $\frac{a^5}{a^5} = 1$

ii) $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^{\square}$

חזקה עם מעריך שלילי מוגדרת כך שחוקי החזקות עבור מעריך טבעי חלים גם עליה. כלומר, עבור כל m ו k שלמים:

$$a \neq 0 \qquad \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$$

אפשר להראות שגם החוק $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ נכון עבור כל מעריך שלם.

ע"ע 3. רשום כחזקה של 2 או 3 ואחר כך כשבר.

דוגמה: $2^5 \cdot 2^{-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

א) $\frac{2^3 \cdot 2^{-1}}{2^8} =$

ב) $\frac{3^4 \cdot 3^{-2}}{3^2} =$

ג) $\frac{2}{2^{-3}} =$

ד) $\frac{2^3 \cdot 3^{-2}}{3^2 \cdot 2} =$

תרגילים

4. בטא כמכפלת חזקות של 3 ושל 5 .

א) $\frac{75 \cdot 125}{27 \cdot 45} =$

ב) $\frac{225 \cdot 3^6}{3^7 \cdot 81} =$

5. רשום במשבצת סימן מתאים: = או ≠ .

א) $\frac{2^{-3}}{2^3} \square 1$

ב) $2^{-3} \square \frac{1}{2^3} \square \left(\frac{1}{2}\right)^3$

ג) $\frac{1}{3^4} \square 3^{-4}$

ד) $1 \square \frac{2^{-3} \cdot 2^6}{2^3}$

ה) $-6^3 \square 6^{-3}$

ו) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \square 2^{-4}$

6. פשט. $a \neq 0 \ , \ b \neq 0 \ , \ c \neq 0$

א) $\frac{a^{-3} \cdot a^8}{a^2} =$

ב) $\frac{a^4 \cdot b^3 \cdot a^{-2}}{a^3 \cdot b^{-2}} =$

ג) $\frac{a^2 \cdot c^5 \cdot a^{-3}}{a \cdot c^{-4}} =$

ד) $\frac{a^5}{a^5} =$

ה) $\frac{a^3}{a^{-7}} =$

ו) $\frac{a^7}{a^{-7}} =$

7. פתור את המשוואות.

א) $2^x = \frac{1}{4}$

ב) $5^x = \frac{1}{125}$

ג) $3^x = 1$

ד) $10^x = \frac{1}{10000}$

ה) $10^x = 0.000001$

ו) $2^x = \frac{1}{64}$

8. בטא כמכפלה או כמנה בה אחד הגורמים הוא 2^x .

דוגמאות: $2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = \frac{2^x}{4}$, $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$

א) $2^{x-5} =$

ב) $2^{x-3} =$

ג) $2^{x+1} =$

ד) $2^{1-x} =$

ה) $2^{-x+1} =$

ו) $4 \cdot 2^{x-2} =$

9. בטא כל איבר כמכפלה או כמנה בה אחד הגורמים הוא 3^x ואחר כך פתור.

דוגמה:

$$3^{x-1} + 3^{x+1} = 30$$

הביטוי:

$$\frac{1}{3} \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x = 30$$

$$3\frac{1}{3} \cdot 3^x = 30$$

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

א) $2^{x-3} + 2^{x-1} = 20$

ב) $4^x + 4^{x+3} = 260$

ג) $2 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+2} = -24$

ד) $3^{x-1} + 2 \cdot 3^{x+1} = 57$

ה) $10^2 \cdot 10^x = 1000$

ו) $10^3 \cdot 10^x = \frac{1}{10}$

מספרים "קטנטנים" במחשבון

1. א) כתוב כשבר עשרוני.

$\frac{1}{10} =$

$\frac{1}{100} =$

$\frac{1}{1000} =$

$\frac{1}{100,000} =$

ב) השלם.

	על המצג	שבר עשרוני	שבר פשוט
דוגמה:	0.1	0.1	$\frac{1}{10}$
			$\frac{1}{100}$
			$\frac{1}{1000}$
			$\frac{1}{10,000}$
			$\frac{1}{100,000}$

המחשבון רושם מספרים חיוביים קטנים מאוד בעזרת "הספרות הקטנות" מימין, במקום כשבר עשרוני. למשל: מיליארד $\frac{1}{1,000,000,000}$ רשום בצורה 1. $^{-09}$

ג) בדוק במחשבון שלך, החל מאיזה מספר יופיעו על המצג "הספרות הקטנות" ... , $\frac{1}{1,000,000}$, $\frac{1}{100,000}$, $\frac{1}{10,000}$, $\frac{1}{1000}$

ד) שעֵר כיצד יִרשמו במחשבון המספרים הבאים.

התרגיל	על המצג
$\frac{1}{10,000,000}$	
$\frac{1}{10^{12}}$	

בדוק במחשבון שלך.

ע"ע 2. רשום תרגיל כך שעל המצג תתקבל התוצאה הרשומה במסגרת, ורשום גם כשבר העשרוני.

התוצאה	תרגיל	שבר עשרוני
1. -10		
1. -12		
1. -08		

ע"ע 3. בצע את התרגיל במחשבון והעתק לדף את התוצאה שהתקבלה.

$10^{-1} =$, $10^{-5} =$, $10^{-3} =$

4. א) רשום איך יראה המספר על המצג. הקש את המספר ואחר כך הקש [=]

המספר	על המצג
0.53	
0.053	
0.0053	
0.00053	

ב) רשום מספר, כך שתתקבל על המצג התוצאה הרשומה במסגרת.

התוצאה: 4.6^{-05} המספר:

התוצאה: 5.21^{-04} המספר:

ע"ע 5. רשום כיצד ירשמו המספרים הבאים במחשבון.

$0.000006 =$

$0.000072 =$

$0.0000085 =$

$0.000851 =$

$25 \cdot 10^{-5} =$

$0.02 \cdot 10^{-9} =$

6. איך ישתנה מקום הנקודה העשרונית כשנעבור מ- 5.3^{-03} לשבר עשרוני רגיל?

7. חשב במחשבון והשלם.

התרגיל	על המצג	שבר עשרוני
$\frac{3.2}{800{,}000}$		
$\frac{1.5 \cdot 0.35}{50{,}000}$		
$\frac{20 \cdot 0.4}{640{,}000}$		
$0.025 \cdot 0.325$		
$\frac{3.2}{47{,}500}$		

תרגילים

8. רשום איך יראו המספרים הבאים על מצג המחשבון.

$0.00025 =$

$0.000025 =$

$356 \cdot 10^{-7} =$

9. השלם את הטבלה.

התרגיל	על המצג	שבר עשרוני
$\frac{6.27}{1200} =$		
$\frac{5.3 \cdot 45}{30000} =$		
$2^{-6} =$		
$2^{-7} =$		
		0.000789
$12.4^{-3} =$		
		0.0001111

10. כתוב כשבר עשרוני את התוצאה על המצג.

התוצאה: 1.37^{-04} המספר:

התוצאה: 1.78^{-08} המספר:

11. שעֵר איך יִרשמו המספרים הבאים במחשבון, רשום ובדוק.

0.00037 =

0.00000001 =

0.005761 =

0.0000056 =

12. רשום < או > או = כך שיתקבל פסוק אמת.

i) א) $2.7 \cdot 10^{-5}$ ☐ $27 \cdot 10^{-6}$

ב) $2.7 \cdot 10^{-3}$ ☐ $2.7 \cdot 10^{-4}$

ג) $2.7 \cdot 10^{-4}$ ☐ $27 \cdot 10^{-3}$

ii) א) $2.7 \cdot 10^{5}$ ☐ $2.7 \cdot 10^{6}$

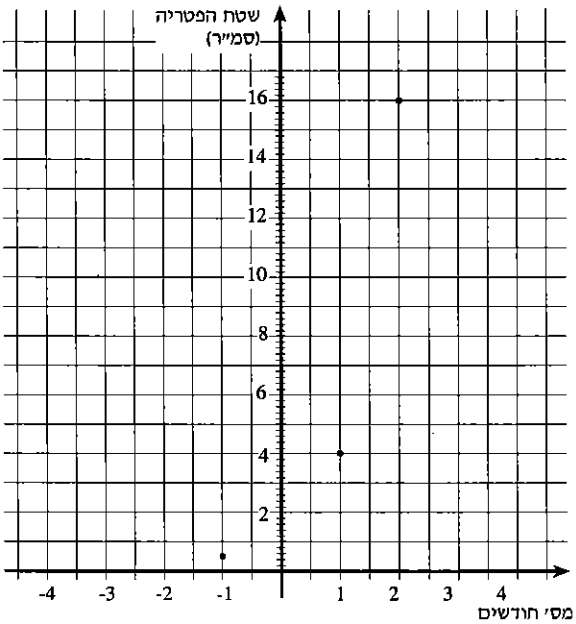
ב) $27 \cdot 10^{4}$ ☐ $2.7 \cdot 10^{5}$

ג) $270 \cdot 10^{3}$ ☐ $0.027 \cdot 10^{6}$

מעריך חזקה לא שלם

במקום תרגילים 1-6 להלן תוכל לבצע את פעילות מחשב 4 בעזרת מתמטיא : הפונקציה המעריכית, בעמודים 243-247.

1. במערכת הצירים שלפניך מתואר תהליך גידול פטריות במעבדה.
בכל חודש גדֵל שטח הפטריות פי 4 מהחודש הקודם.



א) רשום את חוק הגידול.

ב) חבר את הנקודות בקו (ללא קפיצות).

ג) מה המשמעות של $4^{0.5}$ מבחינת השאלה וקרא את הערך מהגרף.

בדוק:

4	x^y	0.5	=

ד) קרא מתוך הגרף את הערך $4^{1.5}$ ובדוק בעזרת המחשבון.

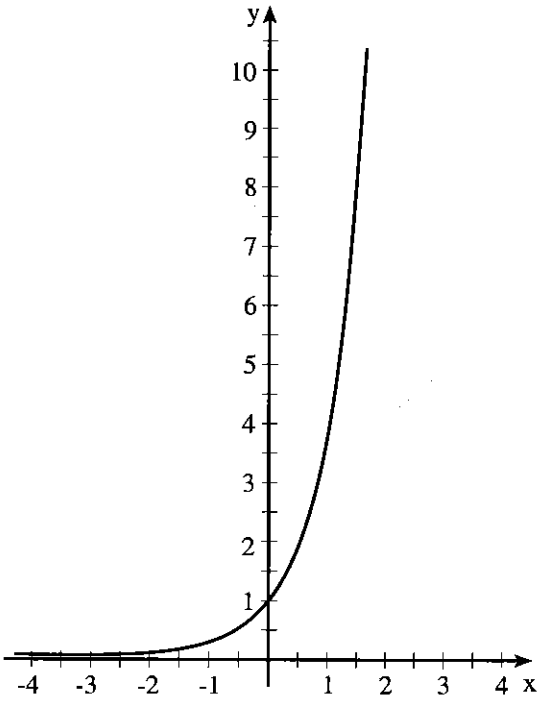
ה) השלם בעזרת המחשבון: $4^{2.5} =$ $4^{-1.5} =$

ו) מה המשמעות של $4^{-1.5}$ מבחינת השאלה?

באופן דומה אפשר לחשב את 4^x עבור כל x

ז) חשב: $4^{1.1} =$ $4^{0.2} =$ $4^{-0.3} =$

ע"ע 2. לפניך הגרף של הפונקציה $y = 4^x$



א) – מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y?

– האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

– האם הפונקציה עולה או יורדת בכל התחום?

ב) חשב בעזרת המחשבון.

$4^{-3} =$

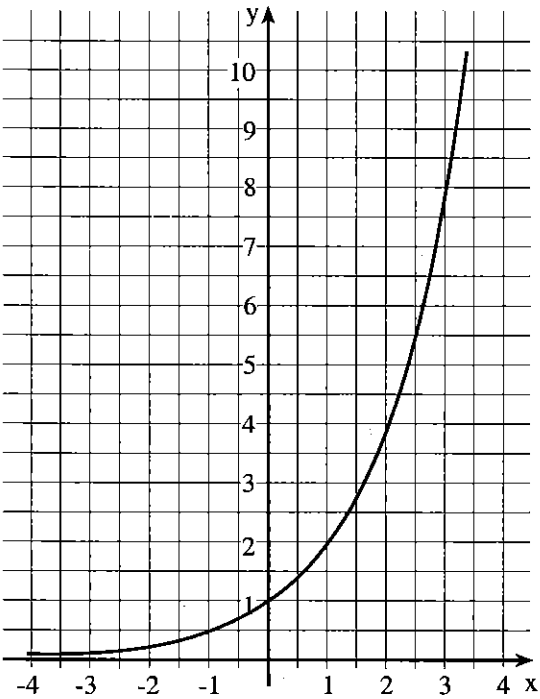
$4^{-4} =$

$4^{-4.5} =$

ערכי הפונקציה $y = 4^x$ הולכים ומתקרבים לציר x כש-x קטן.

ציר x הוא **אַסִימְפְּטוֹטָה** של הפונקציה $y = 4^x$.

3. לפניך גרף הפונקציה $y = 2^x$.



א) – מה נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y?
– האם יש לפונקציה נקודת קיצון?
– האם הפונקציה עולה או יורדת בכל תחום?
– האם יש לפונקציה אסימפטוטה? אם כן, מהי?

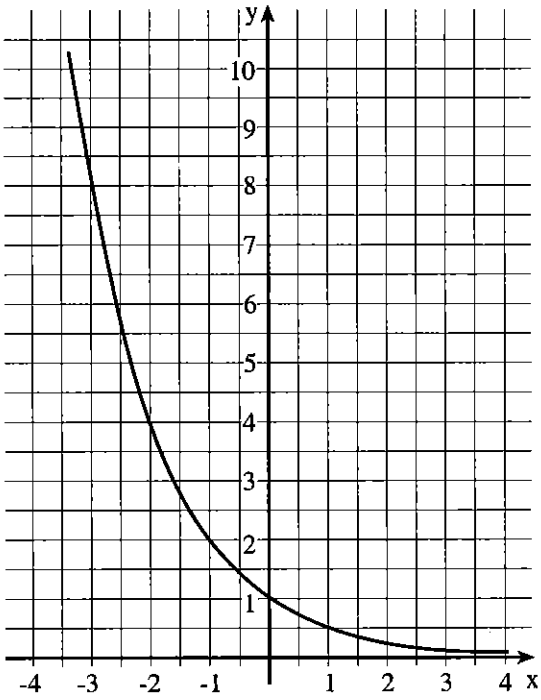
ב) פתור בערך, בעזרת הגרף. (מצא את ערכו של x).

$2^x = 3$

$2^x = 10$

$2^x = 0.8$

4. לפניך גרף הפונקציה $y = 0.5^x$.



א) – מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y?
– האם יש לפונקציה נקודת קיצון?
– האם הפונקציה עולה או יורדת בכל תחום?
– האם יש לפונקציה אסימפטוטה? אם כן, מהי?

ב) פתור בערך בעזרת הגרף.

i) $0.5^x = 3$ ii) $0.5^x = 10$ iii) $0.5^x = 0.8$

ג) גזור מהדף השקוף בסוף החוברת את "גרף שקוף 1א" והנח אותו במערכת הצירים שבתרגיל זה, כך שיתאר את גרף הפונקציה $y = 2^x$.
איך אפשר לקבל אחד מהם בעזרת השני?

המשך

ד) השלם: ____ = $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

סמן נקודה מתאימה על הגרף המתאים והשלם $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^{\square}$

(כלומר, מצא עבור איזה ערך של x, יתקבל הערך $\frac{1}{4}$ על הגרף השקוף של 2^x).

השלם:

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2^{\square}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^{\square}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{\square}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^{\square}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^{\square}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^{\square}$

ע"ע 5. רשום במשבצת סימן מתאים: = או ≠ .

א) $5^2 \ \square \ \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

ב) $3 \ \square \ \left(\frac{1}{3}\right)^1$

ג) $7^{-2} \ \square \ \left(\frac{1}{7}\right)^2$

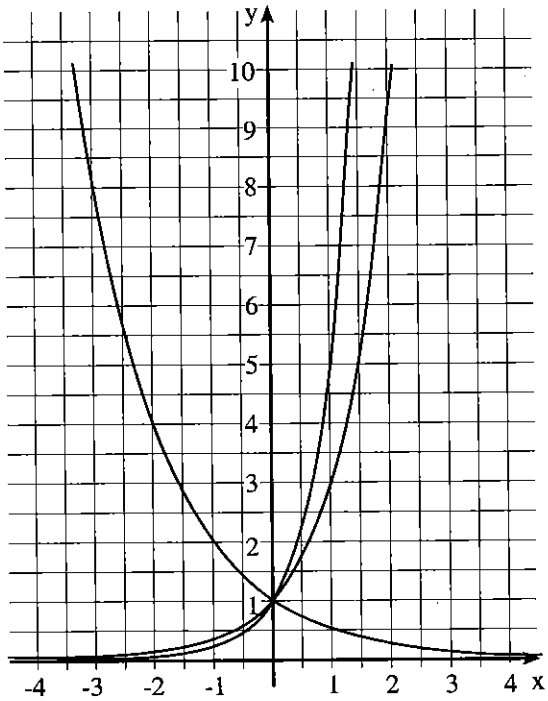
ד) $5^{-2} \ \square \ (-5)^2$

ה) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \ \square \ 4^2$

ו) $5^{-3} \ \square \ \left(\frac{1}{5}\right)^3$

6. לפניך הגרפים של הפונקציות 3^x , 5^x ו 0.5^x .

א) התאם חוק לכל פונקציה ורשום על הגרף המתאים.



ב) הצב בכל פונקציה $x = 1$, חשב ובדוק אם התאמת נכון.

ג) עבור איזה ערך של x מתקיים: $0.5^x = 5^x = 3^x$?

פונקציה מהצורה $y = a^x$ $a > 0$ נקראת **פונקציה מעריכית**.

תרגילים

7. שרטט על פי התכונות הרשומות, (אם אפשר).

א) פונקציה שיורדת בכל התחום וחותכת פעמיים את ציר x.

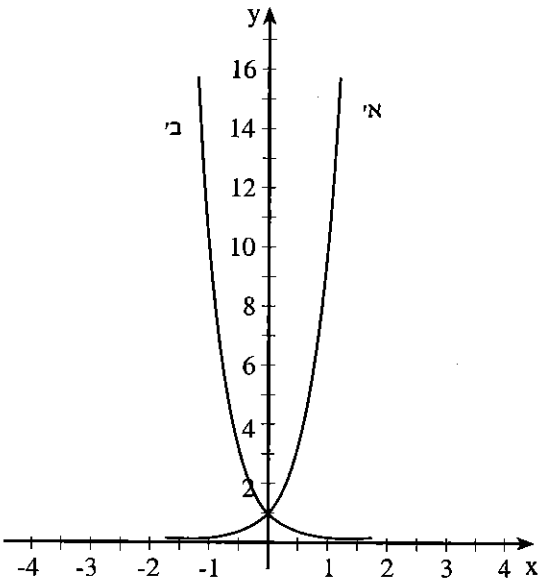
ב) פונקציה שיורדת בכל התחום ופוגשת פעם אחת את ציר x.

ג) פונקציה שיורדת בכל התחום ואינה חותכת את ציר x.

ד) פונקציה שעולה בכל התחום ולא חותכת את ציר x.

8. לפניך גרפים של הפונקציות 10^x ו 0.1^x .

א) התאם חוק לכל פונקציה ורשום על הגרף המתאים.



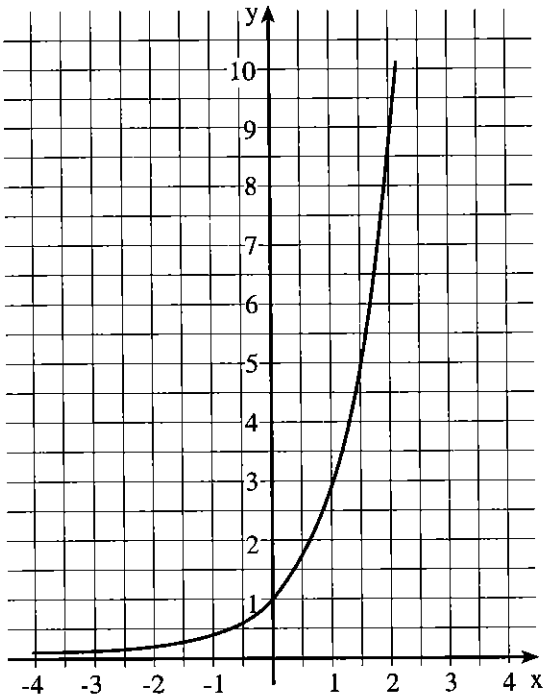
ב) מהי נקודת החיתוך של שתי הפונקציות?

ג) נקודה A(1, ____) על גרף א' והנקודה B(–1,) על גרף ב'. השלם את השיעור השני של הנקודות על פי החוק המתאים וסמן את הנקודות על הגרפים.

ד) איך תקבל את הגרף של 0.1^x מהגרף של 10^x?

9. לפניך גרף של הפונקציה $y = 3^x$.

א) הנח את הגרף השקוף 1א' באותה מערכת צירים, כך שיתאר את הפונקציה $y = 2^x$.



– רשום שלושה ערכים של x עבורם $3^x > 2^x$.

– רשום (אפשר במילים), עבור אלו ערכים של x $3^x > 2^x$.

ב) הנח, באותה מערכת, את גרף שקוף 2א' (המתאים ל 3^x) כך שיתאר את הפונקציה $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

היעזר בגרפים ומצא בערך, את ערכו של x .

i) $3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

ii) $3^{-0.5} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

iii) $3^{0.5} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

iv) $3^{1.5} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

10. א) לפניך גרף של הפונקציה $y = 3^x$.

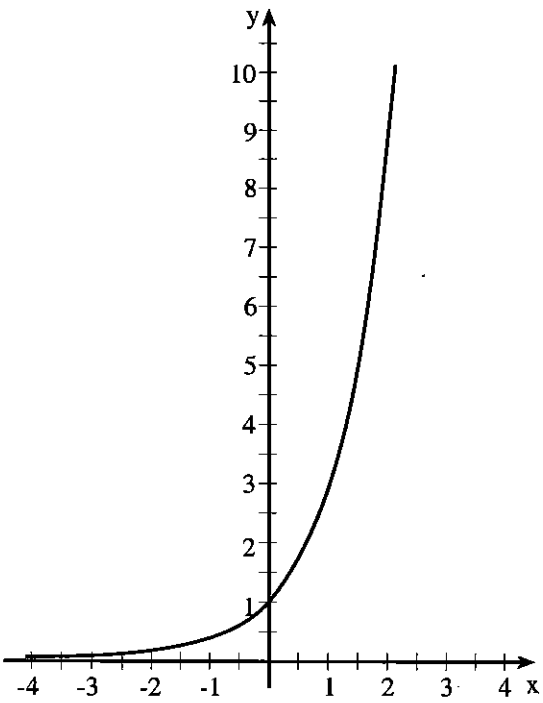
שרטט בערך, בצבעים שונים את הגרפים של הפונקציות: (כולם באותה מערכת צירים).

$$y = 2^x$$

$$y = 4^x$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$y = 0.5^x$$



11. פתור את המשוואות.

א) $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

ב) $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{5}$

ג) $5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

ד) $10^x = \left(\frac{1}{10}\right)^{0.5}$

ה) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^0$

ו) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 = 5^x$

ז) $0.5^x = 2^{-2}$

ח) $(0.1)^x = 10^{-2}$

גידול ודעיכה

ע"ע 1. מכונה בבית חרושת לגפרורים מאבדת 20% מערכה בכל שנה.
ערכה של המכונה כיום הוא 60,000 ש"ח.

א) מה יהיה ערכה של המכונה בעוד שנה?

ב) מה יהיה ערכה של המכונה בעוד 3 שנים?

ג) מה יהיה ערכה של המכונה בעוד 3.5 שנים?

ד) מה יהיה ערכה של המכונה בעוד 7 שנים ו- 3 חודשים?

2. אחוז הריבוי הטבעי של התושבים במדינה מסויימת גדל באופן שלאחר 25 שנה גדלה האוכלוסיה פי 2 .

א) נמצא פי כמה גדלה האוכלוסיה בכל שנה בדרך הבאה:
נסמן ב- a_0 את גודל האוכלוסיה כיום ואז תתקבל המשוואה:

$$a_0q^{25} = 2a_0$$
$$\Downarrow$$
$$q^{25} = 2$$

שער מספר מתאים כלשהו (למשל 1.1) ובצע במחשבון: $1.1^{25} =$
שנה את המספר שבחרת עד שתמצא מספר קרוב ל- 2 עד כדי ספרה אחת לאחר הנקודה: $\boxed{}^{25} = 2$

ב) מהו אחוז הריבוי הטבעי במדינה זו?

ג) בטא בעזרת a_0, את גודל האוכלוסיה לאחר 37 שנים, ומצא פי כמה בערך, גדלה האוכלוסיה במשך 37 שנים.

ע"ע 3. מצא את q במשוואות הבאות (היעזר בניסוי ובדיקה).

א) $q^{20} = 7$ ב) $q^{3.5} = 10$ ג) $q^{1.5} = 3$

תוכל לפתור את תרגיל 10 בהמשך.

4. גם את n ממשוואה שצורתה $q^n = \square$, כאשר q ידוע, נמצא בעזרת ניסוי:

דוגמה: $1.1^n = 3$

$1.1^6 = 1.77$ קטן מדי

המשך לנסות $1.1^{10} =$

⋮

5. אחוז הריבוי הטבעי במדינה מסויימת הוא 5%.

א) פי כמה גדלה האוכלוסיה בשנה אחת?

ב) גודל האוכלוסיה כיום 2,500,000 תושבים.
לאחר כמה שנים יהיו במדינה 10,000,000 תושבים.
רשום משוואה מתאימה.

ג) לאחר שתגיע לביטוי מהצורה $\square^n = \bigcirc$
מצא את n בעזרת ניסוי.

6. כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בכל שנה ב- 0.2 מכמות החומר שהיתה.

א) כמה ישאר מ- 50 גרם חומר רדיואקטיבי אחרי שנה?

ב) פי כמה תקטן כמות החומר לאחר שנה?

ג) כמה ישאר מהחומר לאחר שנתיים?

ד) כמה ישאר מהחומר לאחר 10 שנים?

ה) לאחר כמה שנים ישארו 25 גרם של החומר?

7. כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בכל שנה ב- 2% .
בתחילה היו במעבדה 60 גרם מהחומר.

א) אחרי כמה שנים ישארו 30 גרם של החומר?

ב) אחרי כמה שנים ישארו 15 גרם של החומר?

ג) כמות של חומר רדיואקטיבי אחר, קטנה בכל שנה ב- 3%.
אחרי כמה שנים תשאר **מחצית** מכמות החומר?
(ייצג את כמות החומר כיום ב- a_0, רשום משוואה ופתור).

כדי לאפיין את מהירות הפירוק של חומר רדיואקטיבי משתמשים במושג "זמן מחצית חיים".

זמן **מחצית החיים** של חומר רדיואקטיבי הוא הזמן העובר עד שנשארת מחצית הכמות.

ד) מהו זמן **מחצית החיים** של החומר שנזכר בסעיף א'?
מהו זמן **מחצית החיים** של החומר שנזכר בסעיף ג'?

ע"ע

8. זמן מחצית החיים של אֶרופיום 125 הוא 15 ימים.
(כמות החומר קטנה בצורה מעריכית).
א) מצא פי כמה קטנה כמות החומר בכל יום?
ב) בכמה אחוז קטנה כמות החומר בכל יום?
ג) מצא כמה נשאר מ- 100 גרם של אֶרופיום 125 אחרי 10 ימים?

תרגילים

9. דני רצה למכור את מכוניתו שנקנתה לפני 8 שנים, והסתבר לו שערכה ירד למחצית מערכה בזמן הקניה.
א) פי כמה ירד ערכה של המכונית בכל שנה, אם קצב ירידת הערך מעריכי?
ב) בכמה אחוז ירד ערכה בכל שנה?

10. הריבוי הטבעי של ארנבות בשמורת טבע מסוימת הוא 25% בכל חודש.
אחרי כמה שנים יוכפל מספר הארנבות בשמורת הטבע?

11. המשקל של חומר רדיואקטיבי ירד ב- 0.4 ממשקלו במשך 15 שעות.

א) מצא פי כמה קטנה כמות החומר בכל שעה.

ב) מהו זמן מחצית החיים של חומר זה?

12. זמן מחצית החיים של פחמן 15 הוא 2.5 שעות.

אחרי כמה שעות תשאר $\frac{1}{4}$ מכמות החומר?

(מצא תחילה פי כמה קטנה כמות החומר בכל שעה.)

מה פירוש ב"חזקת" חצי?

1. חשב בעזרת המחשבון.

$4^{0.5} =$

$9^{0.5} =$

$25^{0.5} =$

נסה להשלים ללא מחשבון.

$36^{0.5} =$

$100^{0.5} =$

בדוק.

2. א) האם תוכל למצוא את $289^{0.5}$ תוך שימוש במקש שונה מ- $\boxed{x^y}$? בדוק בעזרת $\boxed{x^y}$.

ב) רשום בעזרת פעולה אחרת.

$256^{0.5} =$

$10000^{0.5} =$

3. חשב.

א) $64^{0.5} =$

ב) $0.25^{\frac{1}{2}} =$

ג) $1000^{\frac{1}{2}} =$

ד) $8.2^{0.5} =$

ע"ע 4. העבר קו בין תרגילים שתוצאתם זהה.

$9^{0.5}$	•	•	$3^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{27}$	•	•	9
$\sqrt{3}$	•	•	$27^{0.5}$
$\sqrt{81}$	•	•	3^{1}

ע"ע 5. רשום את התרגילים הבאים בעזרת חזקה.

א) $\sqrt{1000} =$ ב) $\sqrt{256} =$

ג) $\sqrt{121} =$ ד) $\sqrt{x} =$

באופן כללי: $a^{0.5} = \sqrt{a}$

הכרת את פעולת השורש כשעסקת בפונקציה ריבועית וחישבת שורשים כשפתרת משוואות ריבועיות.
כמו-כן ראית את פונקצית השורש, $\sqrt{x}$, כפונקציה הפוכה ל- x^2 .
כעת חזרנו לפעולת השורש וראינו שהיא ניתנת לביטוי כחזקה.

סימן השורש משמש גם כסוגריים. כלומר, מבצעים תחילה את הפעולה הרשומה מתחת לשורש, במידה ויש כזו.

6. חשב.

א) $\sqrt{16+9} =$

ב) $\sqrt{100-64} =$

ג) $\sqrt{\frac{100}{4}} =$

7. ומה עם חוקי החזקות עבור מעריך $\frac{1}{2}$?
פתור ובדוק שוויון תוצאות בכל זוג.

א) $9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} =$ $\quad 9^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} =$

ב) $64^{1} \cdot 64^{0.5} =$ $\quad 64^{1.5} =$

ג) $\frac{25^{1}}{25^{\frac{1}{2}}} =$ $\quad 25^{\frac{1}{2}} =$

8. ומה עם מעריך $-\frac{1}{2}$? פשט ופתור.

דוגמה: $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

א) $64^{-\frac{1}{2}} =$

ב) $\frac{100^{\frac{1}{2}}}{100^{1}} =$

ג) $36^{-\frac{1}{2}} =$

ד) $\frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} =$

בתרגילים 7 ו 8 ראית שחוקי החזקות $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

עבור מעריכים שלמים, מתקיימים גם עבור מעריך $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ וכו'.

9. פתור.

א) $4^x = 2$

ב) $3^x = \sqrt{3}$

ג) $100^x = \frac{1}{10}$

ד) $7^x = \sqrt{7}$

תרגילים

10. רשום בעזרת סימן השורש $\sqrt{}$ וחשב.

א) $64^{0.5} =$

ב) $169^{0.5} =$

ג) $(12^{0.5})^2 =$

ד) $6.25^{\frac{1}{2}} =$

ה) $(13^2)^{0.5} =$

ו) $144^{0.5} =$

11. רשום במשבצת = או ≠ כך שתתקבל טענה נכונה.

א) $(\sqrt{5})^2 \;\square\; 5$

ב) $\sqrt{5^2} \;\square\; 5$

ג) $\sqrt{9 \cdot 25} \;\square\; 3 \cdot 5$

ד) $\sqrt{9 + 25} \;\square\; 3 + 5$

ה) $\sqrt{9} + \sqrt{25} \;\square\; 3 + 5$

ו) $\sqrt{25 - 9} \;\square\; 5 - 3$

ז) $\sqrt{\frac{25}{9}} \;\square\; \frac{5}{3}$

ח) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} \;\square\; \frac{5}{3}$

ט) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$

12. נחש ובדוק במחשבון.

א) $\square^{1/2} = 4$

ב) $\sqrt{\square} = 3$

ג) $\sqrt{\square} = 16$

ד) $\square^2 = 16$

ה) $81^{\square} = 9$

ו) $\sqrt{\sqrt{\square}} = 3$

13. רשום כחזקה של 2 או 3 .

א) $\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^2}{2^3} =$

ב) $\frac{3^{-2} \cdot 3^{1\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3} =$

ג) $\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} =$

ד) $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{1}{2}}} =$

ה) $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^1} =$

ו) $\frac{3^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^2} =$

14. פתור את המשוואות.

א) $8^x = \sqrt{8}$

ב) $10^x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

ג) $81^x = 9$

ד) $8^x = \frac{1}{\sqrt{8}}$

ה) $5^x = \sqrt{5}$

ו) $9^x = \frac{1}{\sqrt{9}}$

15. א) $2^x = 16$ למה שווה 2^{-x}?

למה שווה $\sqrt{2}^{\,x}$?

למה שווה $(\frac{1}{2})^x$?

למה שווה $(\frac{1}{4})^x$?

ב) $3^x = a$ בטא את 3^{-x} בעזרת a .

בטא את $\sqrt{3}^{\,x}$ בעזרת a .

בטא את $3^{\frac{1}{2}x}$ בעזרת a .

ג) $4^x = a$ למה שווה $(\frac{1}{4})^x$?

למה שווה 4^{-x}?

למה שווה 2^x?

16. בטא כל איבר כמכפלה או כמנה בה אחד הגורמים הוא 5^x .

דוגמה: $5^{x+\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \cdot 5^x$

א) 5^{x+2}

ב) 5^{2-x}

ג) $5^{x-\frac{1}{2}}$

ד) $5^{-x+\frac{1}{2}}$

ה) $5^{-x-\frac{1}{2}}$

ו) $5^{x+1\frac{1}{2}}$

17. בטא כל איבר בו מופיע x כמעריך חזקה, כמכפלה או כמנה בה אחד הגורמים הוא a^x ואחר כך פתור.

דוגמה: $2 \cdot 9^x + 9^{x+\frac{1}{2}} = 45$

הביטוי: $2 \cdot 9^x + 3 \cdot 9^x = 45$

$5 \cdot 9^x = 45$

$9^x = 9$

$x = 1$

א) $4^{x+\frac{1}{2}} + 4^{x+2} = 72$

ב) $9^{x-\frac{1}{2}} + 9^{x+\frac{1}{2}} = 270$

ג) $2 \cdot 9^{x+1\frac{1}{2}} + 9^{x+1} = 63$

ד) $5^{-x} + 5^x = 5\frac{1}{2}$

בטא תחילה בעזרת 5^x: $\frac{1}{5^x} + 5^x = 5\frac{1}{5}$

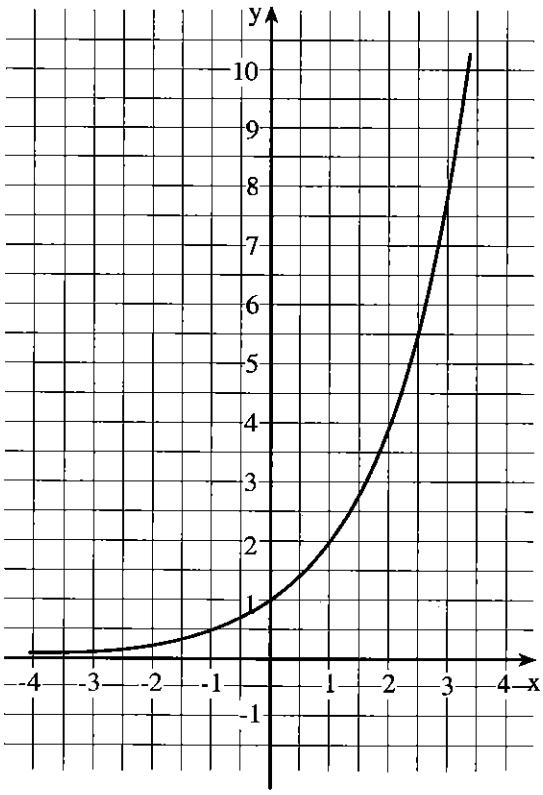
הצב $5^x = y$, רשום משוואה ופתור.

ה) $2^{x+2} - 2^{2-x} = 15$

הזזות ושיקופים

1. לפניך גרף של $y = 2^x$.

הנח את גרף שקוף 1ב' (בלי ציר x) על הגרף המשורטט.



א) הזז את הגרף השקוף 3 יחידות כלפי מעלה, (לאורך ציר y). רשום את החוק של הפונקציה המוזזת.

ב) השלם על פי החוק שרשמת, את שיעור y של הנקודה, ובדוק אם הנקודה (□ , 1) נמצאת על הגרף המוזז.

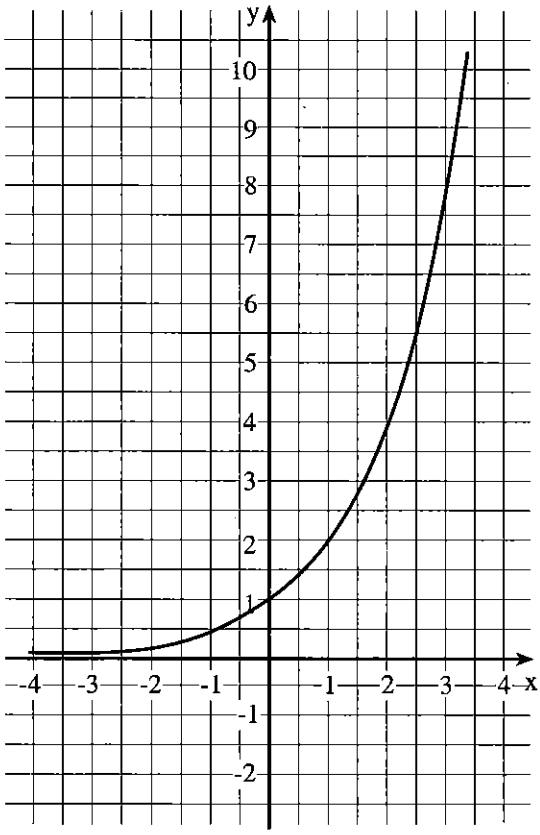
ג) השלם על פי החוק שרשמת, את שיעור y של הנקודה ובדוק אם הנקודה (□ , 0) נמצאת על הגרף המוזז.

ד) מהי האסימפטוטה של הפונקציה המוזזת?

ה) האם לפונקציה המוזזת יש נקודת קיצון?

ע"ע 2. הנח את גרף שקוף 1ב' על גרף הפונקציה $y = 2^x$ שבשרטוט, הזז את הגרף השקוף כך שתתקבל הפונקציה הרשומה והשלם את הטבלה.

הפונקציה	נקודת חיתוך עם ציר x	נקודת חיתוך עם ציר y	אסימפטוטה
א) $y = 2^x + 1$			
ב) $y = 2^x + 3.5$			
ג) $y = 2^x - 1.5$			



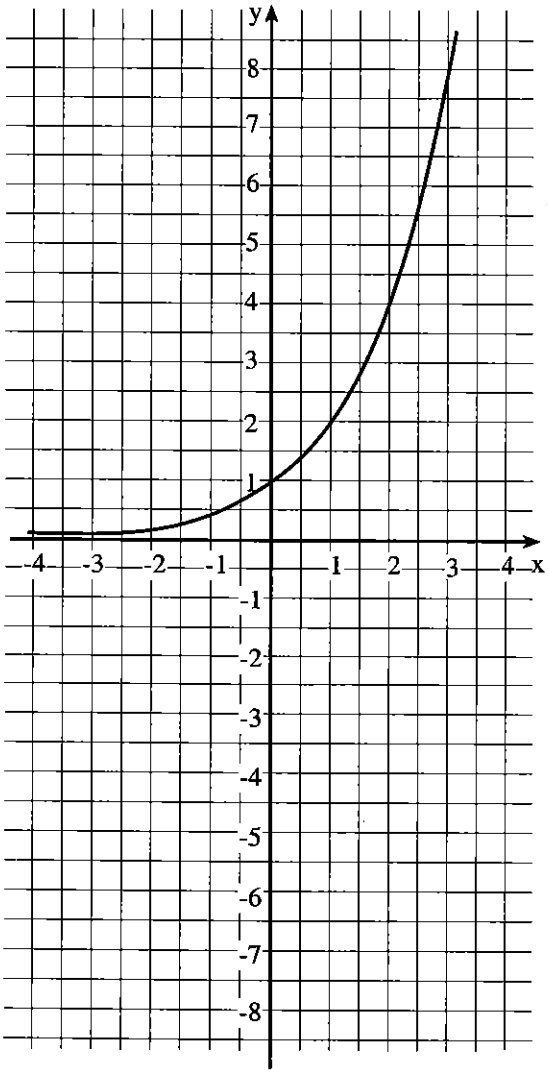
3. הנקודה (0, 1) נמצאת על גרף הפונקציה $y = 2^x$.

א) לאן תזוז נקודה זו אם נזיז את גרף הפונקציה 4 יחידות למעלה, לאורך ציר y?

ב) לאן תזוז הנקודה (0, 1) אם נזיז את גרף הפונקציה $y = 2^x$ ב 3 יחידות למטה, לאורך ציר y?
מה חוק הפונקציה המוזזת?

4. לפניך הגרף של $y = 2^x$.

הנח את גרף שקוף 1א' על הגרף המשורטט ושקף אותו בציר x (ציר x קו מראה).



א) רשום את החוק של גרף השיקוף.

ב) הצב x = 1 בחוק שרשמת ובדוק האם (1 , ☐) נמצאת על גרף השיקוף.

ג) מהי נקודת החיתוך של גרף השיקוף עם ציר y? הצב בחוק שרשמת ובדוק.

ד) האם הפונקציה שהתקבלה עולה או יורדת בכל התחום?

5. א) חשב $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \qquad 2^{-1} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \qquad 2^{-2} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \qquad 2^{-3} =$

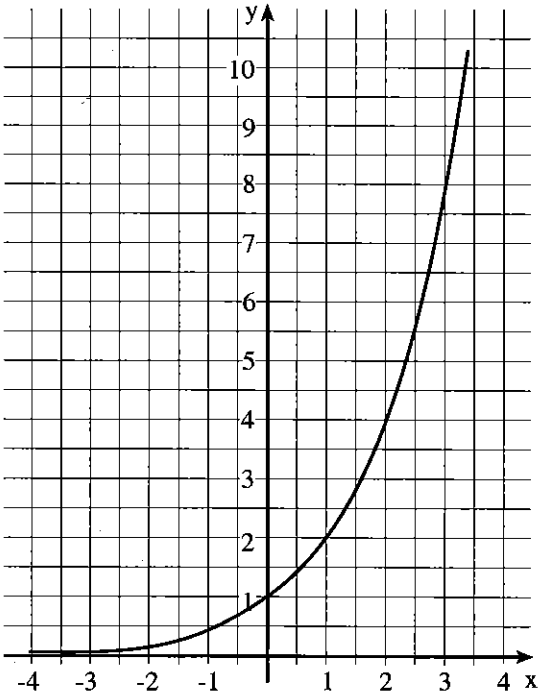
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \qquad 2^{-4} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \qquad 2^{-5} =$

ב) ובאופן כללי השלם: $2^{-x} =$

ג) כדי לקבל את הגרף של $y=2^{-x}$, הנח את גרף שקוף 1א' על הגרף של 2^x ושקף אותו **בציר y**.

ד) בסעיף "מעריך חזקה לא שלם" משורטט גרף של $y = 0.5^x$ השווה עם גרף השיקוף שהתקבל כאן.



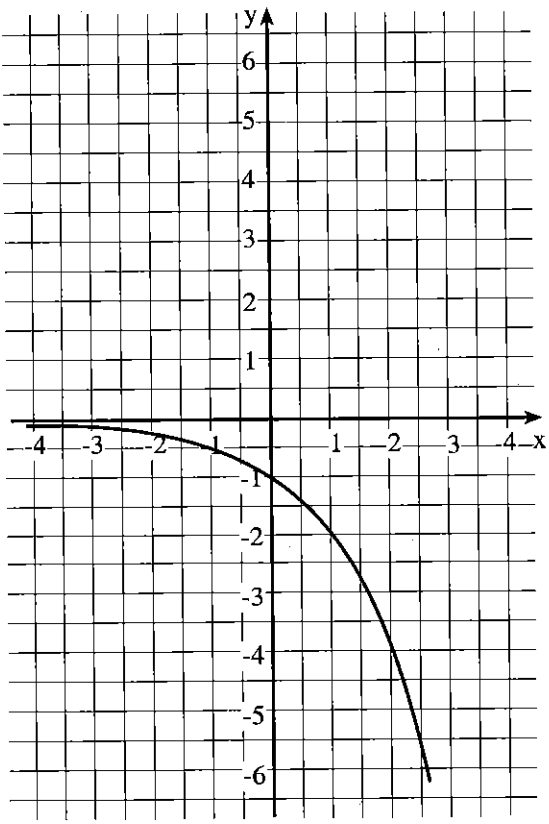
בסעיף "מה לפני האיבר הראשון" ראית כי $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

כאן ראית $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ ואכן $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

כאן ניתן לשלב את פעילות מחשב 5 בעזרת מתמטיx: על הזזות ושיקופים, עמודים 248-253.

תרגילים

6. לפניך גרף של $y = -2^x$.



הנח את גרף שקוף 1ב' כך שיתלכד עם הגרף של $y = -2^x$.

א) הזז את הגרף השקוף 2 יחידות כלפי מעלה, לאורך ציר y.
רשום את החוק של הפונקציה המוזזת.

ב) הצב $x = 1$ בחוק שרשמת והשלם (1 , ☐) .
בדוק אם הנקודה נמצאת על הגרף של הפונקציה המוזזת.

ג) הצב בחוק הפונקציה שרשמת $x = 2$ והשלם (2 , ☐).
בדוק אם הנקודה שהתקבלה נמצאת על גרף הפונקציה.

7. הצב בכל פונקציה $x = 2$ וחשב.

א) $y = 2^x - 0.5$

ב) $y = 0.5^x + 2$

ג) $y = x^3 + 2.5$

ד) $y = x^{0.5} + 2x$

ה) $y = -2^x + 3$

ו) $y = 3 \cdot 2^x$

8. כתוב במילים כיצד מתקבל הגרף של כל פונקציה מהגרף של $y = 5^x$.

דוגמה:

$y = 5^x + 1$: הזזה של גרף הפונקציה ביחידה אחת, כלפי מעלה.

א) $y = 5^x - 10$

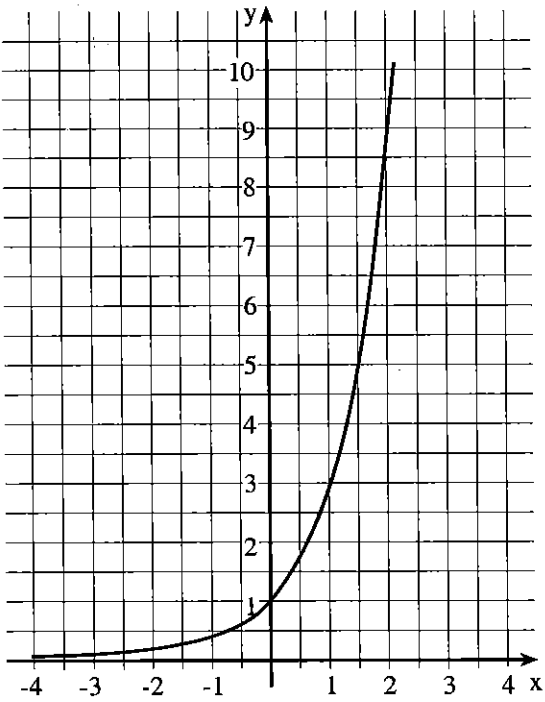
ב) $y = -5^x$

ג) $y = -5^x + 2$

ד) $y = 5^x$

ה) $y = 5^{-x} + 1$

9. לפניך גרף הפונקציה $y = 3^x$.



הנח את גרף שקוף 2ב׳. המתאים לפונקציה $y = 3^x$, על הגרף המשורטט.

א) רשום את נקודת החיתוך של הפונקציה הזו עם ציר y.

ב) הזז כלפי מעלה את הגרף השקוף כך שיעבור דרך $(1, 5)$.
רשום את חוק הפונקציה שהתקבלה.

10. השלם וחשב.

דוגמה: $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

$10^{-2} = 0.1^{\square} =$

$10^{\square} = 0.1^3 =$

$10^{\square} = 0.1^4 =$

$10^{-7} = 0.1^{\square} =$

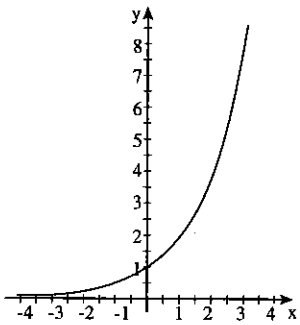
ובאופן כללי השלם: $10^{-x} =$

11. התאם גרף לפונקציה.

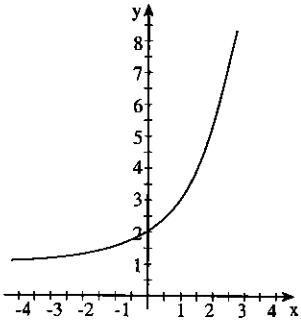
א) $y = 2^x + 1$ ג) $y = 2^x - 2$ ה) $y = 2^x$

ב) $y = 0.5^x - 1$ ד) $y = 3^x$

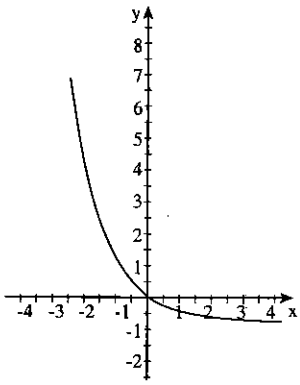
(i



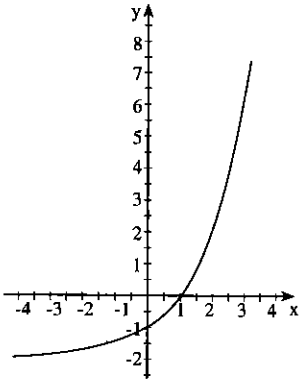
(ii



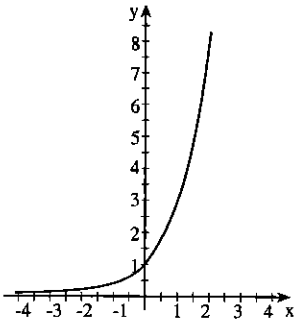
(iii



(iv



(v



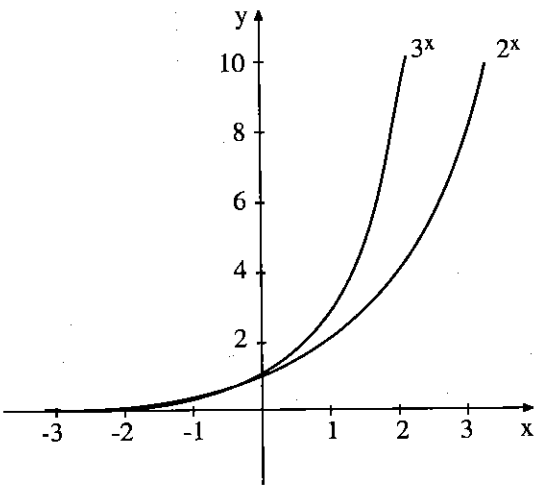
לבדיקה הצב $x = 1$ בכל אחד מהחוקים, ובדוק אם הנקודה שאת שיעוריה חישבת, נמצאת על הגרף המתאים.

אחת מהמשפחה

במקום תרגילים 1-2 אפשר לבצע פעילות מחשב 6 בעזרת מתמטיא: נגזרת של פונקציה מעריכית, עמודים 254-257.

1. לפניך שתי פונקציות מעריכיות $y = a^x$ עבורן $a > 1$.

א) רשום את תכונותיהן.



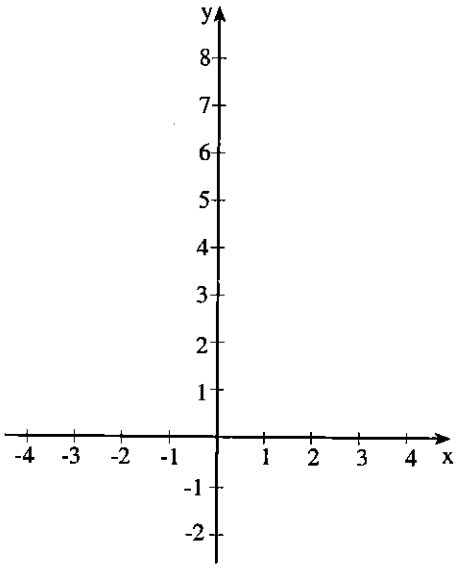
ב) רשום שתי פונקציות נוספות השייכות למשפחה זו ($y = a^x$ $a > 0$).

ג) מה תוכל לומר על **הסימן של שיפוע** גרף הפונקציה בנקודות שונות?

ד) מה תוכל לומר על **השיפוע** של גרף הפונקציה כאשר ערך x גדֵל?

2. הפונקציה הנגזרת מתארת את שיפועי הפונקציה המקורית בכל נקודה.
לפי מה שוודאי רשמת, בתרגיל הקודם, השיפועים חיוביים לכל ערך של x וגדלים כש x גדל, לכן הפונקציה הנגזרת, **חיובית ועולה** לכל ערך של x.

– שרטט גרף של פונקציה כזו, שהיא חיובית לכל x ועולה לכל x .



שרטטת ודאי פונקציה הדומה לפונקציה המעריכית עצמה, ואכן הפונקציה הנגזרת דומה לפונקציה עצמה. קיימת פונקציה מעריכית **השווה בדיוק** לנגזרת שלה. פונקציה זו חשובה במתמטיקה ובפיזיקה. לכן, תוכל למצוא אותה במחשבון. סימונה e^x כאשר e מספר (בין 2 ל 3).

3. א) להכרת המספר e הקש:

1	e^x

(ברוב המחשבונים יש להקיש INV כדי לחשב את e^x.)

ב) השלם ספרות $e = e^1 = 2.7$ __ __ __ __ __ __ __ __ __

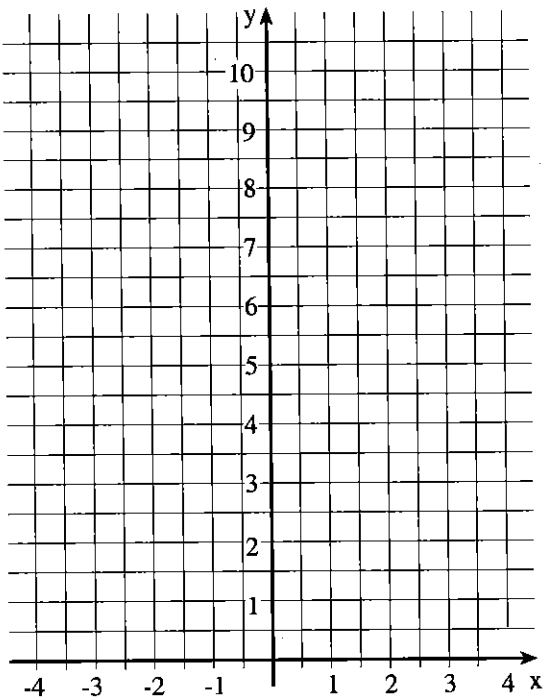
ג) חשב את e^3:

3	e^x

ד) חשב את $e^{0.5}$.

4. השלם את טבלת הערכים של הפונקציה $y = e^x$, סמן את הנקודות ושרטט את גרף הפונקציה.

x	−2	−1	−0.5	0	1	1.5	2	2.5
$y = e^x$								



כפי שנזכר לעיל, הנגזרת של הפונקציה $y = e^x$ שווה לפונקציה עצמה.
כלומר, הנגזרת של הפונקציה $y = e^x$ היא: $y' = e^x$.

5. גזור את הפונקציות.

א) $y = 3 \cdot e^x$

ב) $y = e^x + 3$

ג) $y = e^x + x$

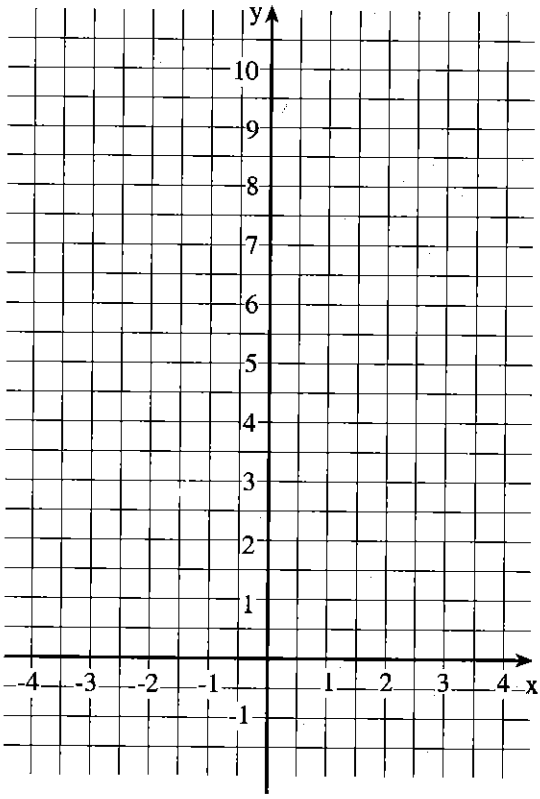
ד) $y = e^x + x^2$

ה) $y = 2e^x - 3x$

ח) $y = 2x^2 - e^x$

6. חקור את הפונקציה $y = e^x - x + 2$ על פי השלבים הבאים:

א) מצא את נקודת החיתוך עם ציר y , וסמן אותה במערכת הצירים.



ב) גזור את הפונקציה, מצא נקודה חשודה וסמן במערכת הצירים.

ג) חשב שיעורי נקודות משני צידי הנקודה החשודה, סמן אותן במערכת הצירים, וקבע מאיזה סוג נקודת הקיצון. השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

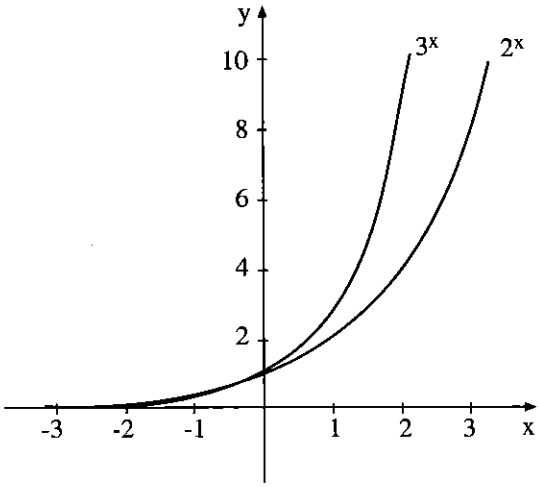
כדי לחשב $e^{-1} + 3$ הקש:

1	+/−	e^x	+	3	=

ד) מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה?

תרגילים

7. לפניך הגרפים של הפונקציות: $y = 2^x$ ו- $y = 3^x$.
שרטט בערך את הגרף של $y = e^x$ באותה מערכת צירים.



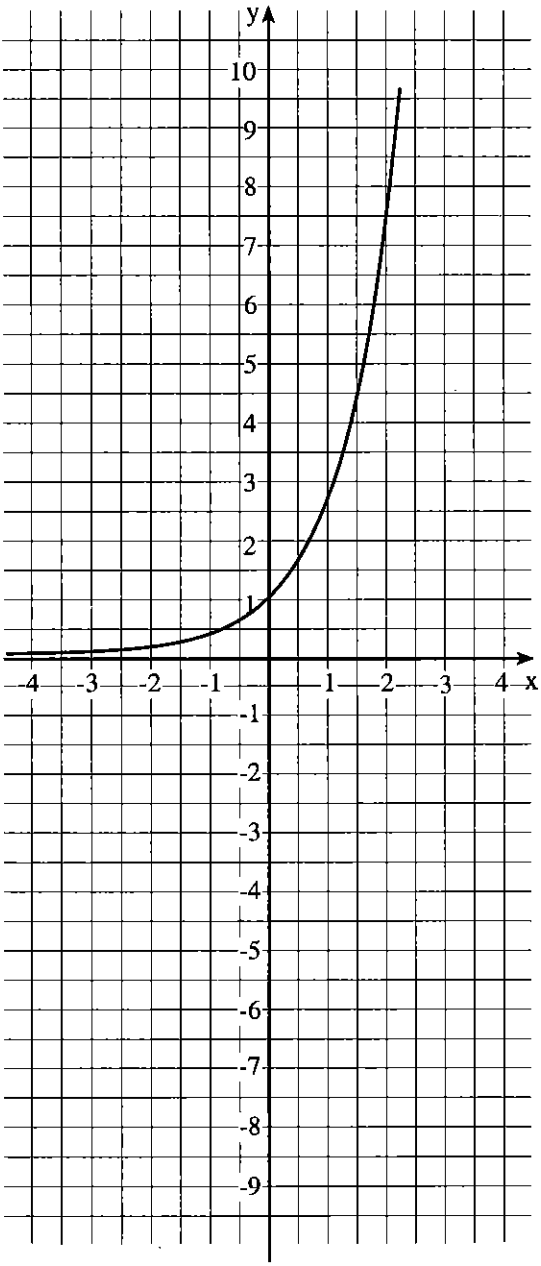
8. א) חשב.

$e^{0.5} =$ $\qquad$ $e^{-1} =$ $\qquad$ $e^{5} =$ $\qquad$ $e^{4} =$

ב) חבר מספרים שווים.

e	e^0
$\frac{1}{e^2}$	e^{-1}
$\frac{1}{\sqrt{e}}$	e^{-2}
$\frac{1}{e}$	$e^{0.5}$
$\sqrt{e}$	$e^{-0.5}$
1	e^1

9. לפניך גרף הפונקציה e^x .



לביצוע ההוראות היעזר בגרף שקוף 3 שבסוף החוברת (מתאים ל-e^x).

- רשום בכל מקרה, את חוק הפונקציה המתקבלת.

- הצב $x = 1$ ובדוק אם הנקודה על גרף הפונקציה.

א) הזז 2 יחידות כלפי מעלה.

ב) הזז 3 יחידות כלפי מטה.

ג) שקף בציר x.

ד) שקף בציר y.

10. פתור, בערך, על פי הגרף, אם קיים פתרון, הצב ובדוק.

א) $e^x = 12$

ב) $e^x = 4$

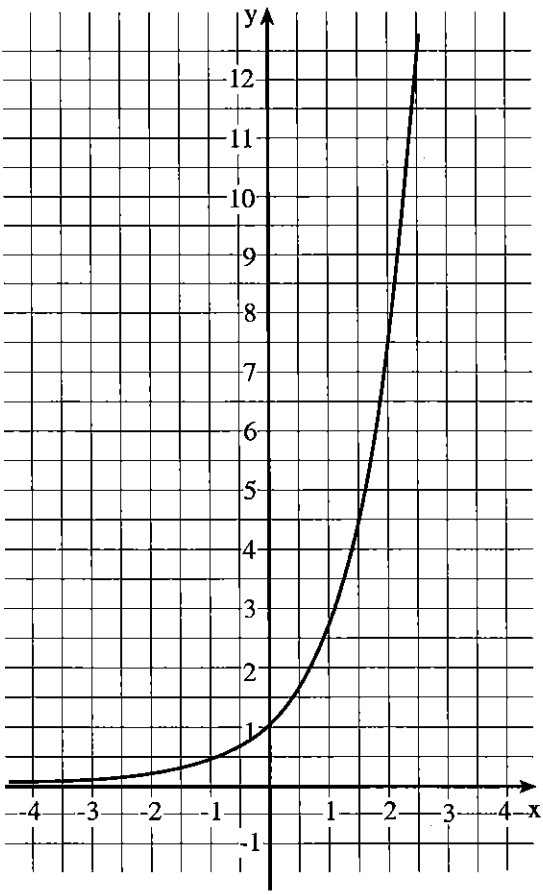
ג) $e^x = 2$

ד) $e^x = 1$

ה) $e^x = \frac{1}{2}$

ו) $e^x = 0$

ז) $e^x = -1$



11. א) – מהו פתרון המשוואה $e^x = e$?

– בין אילו שני מספרים שלמים נמצא פתרון המשוואה $e^x = 2$?
בדוק בעזרת המחשבון.

ב) – מהו פתרון המשוואה $e^x = \frac{1}{e}$?

– בין אלו שני מספרים שלמים נמצא פתרון המשוואה $e^x = \frac{1}{4}$?
בדוק בעזרת המחשבון.

12. מצא נגזרת של כל פונקציה.

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

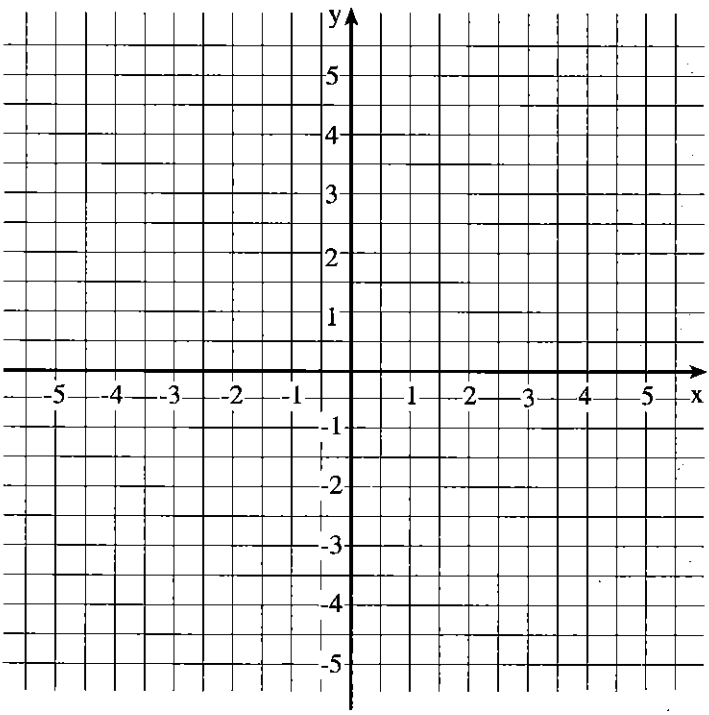
א)	$y = x^2 - e^x$	ו)	$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{x}$
ב)	$y = 2e^x + x - 1$	ז)	$y = 3e^x + \frac{2}{x}$
ג)	$y = e^x + 2\sqrt{x}$	ח)	$y = \frac{4}{x} - e^x + x$
ד)	$y = 3(e^x + x^2)$	ט)	$y = 2(e^x - 3\sqrt{x})$
ה)	$y = e^x + 3$	י)	$y = e^x + x(x-2)$

13. חקור את הפונקציה $f(x) = e \cdot x - e^x$ היעזר בשלבים הבאים:

א) מצא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y. סמן אותה במערכת הצירים.

ב) גזור את הפונקציה, מצא נקודה חשודה וסמן אותה במערכת הצירים.

ג) חשב שיעורי נקודות נוספות, כך שתוכל לאפיין את הנקודה החשודה. סמן במערכת הצירים.



ד) השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

ה) - הצב וחשב: $f(-1) =$

בדוק אם הנקודה שמצאת נמצאת, בערך, על גרף הפונקציה.

ו) רשום תחומי עליה וירידה של הפונקציה.

14. נתונה הפונקציה $y = e^x + x$.

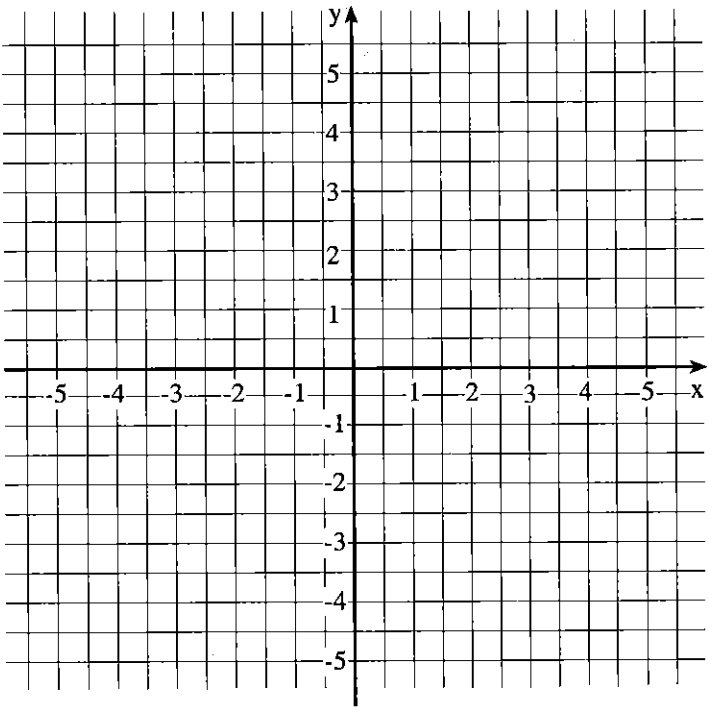
א) מצא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y, וסמן אותה במערכת הצירים.

ב) מצא את נגזרת הפונקציה והסבר מדוע אין לפונקציה נקודות קיצון.

ו) רשום שיעורי נקודות וסמן במערכת הצירים:

(1,) (2,) (–1,) (–2,)

ד) השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

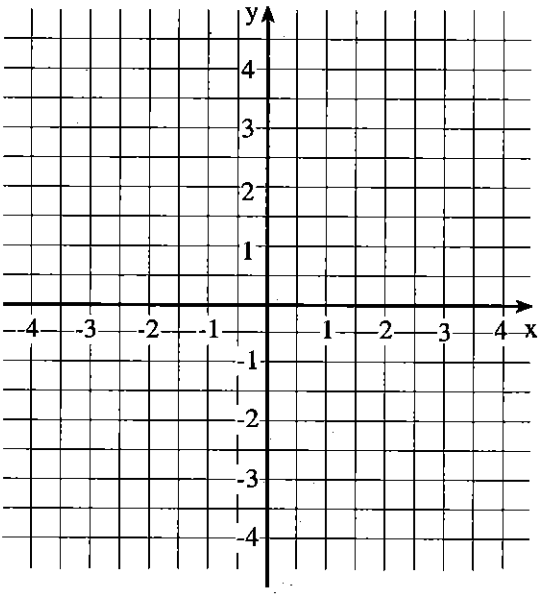


ה) רשום בערך, את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.

ו) רשום תחומי עליה וירידה של הפונקציה.

15. נתונה הפונקציה $y = 2e^x - x$.

א) מצא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y, וסמן אותה במערכת הצירים.



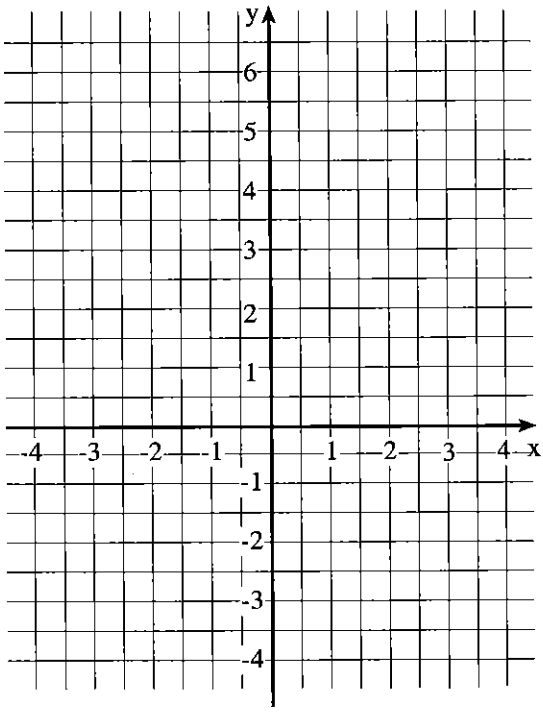
ב) נקודת הקיצון היחידה היא (____ ,–0.69) . השלם את שיעור y, וסמן במערכת הצירים.

ג) חשב נקודות נוספות על מנת לאפיין את נקודת הקיצון וסמן אותן במערכת הצירים.

ד) השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

16. חקור את הפונקציה $y = e^x - 2x$. היעזר בשלבים הבאים.

א) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y וסמן אותה במערכת הצירים.



ב) רשום את הנגזרת של הפונקציה.

ג) מצא, בערך, שיעורים של נקודה חשודה וסמן במערכת הצירים.

ד) חשב, השלם את שיעורי הנקודות וסמן אותן במערכת הצירים.

(–1,) (–0.5,) (0.5,) (1,) (2,)

מאיזה סוג הנקודה החשודה?

ה) השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

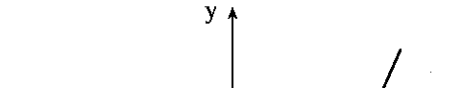
האם לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר x?

ו) האם לפונקציה $y = e^x - 2x - 1$ יש נקודת חיתוך עם ציר x? נמק.

ז) מהם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $y = -e^x + 2x$ ומאיזה סוג היא?

עוד על חקירת פונקציה מעריכית ועל המשיק

1. לפניך גרף הפונקציה $y = (x-1)e^x$.



א) רשום את שיעורי הנקודות A ו B .

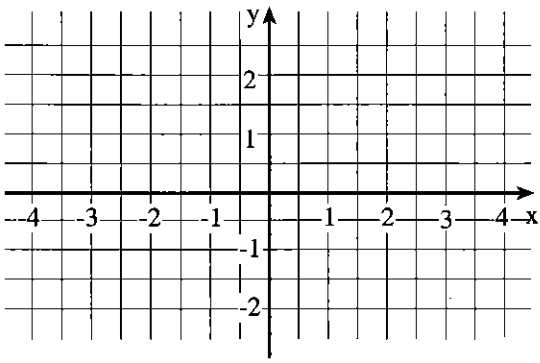
ה)רשום תחומי עליה וירידה של הפונקציה.

ג) עבור אלו ערכי x הפונקציה חיובית?
עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?

ד) האם יש אסימפטוטה לגרף הפונקציה? נמק.

ע"ע 2. חקור את הפונקציה $y = x \cdot e^x$ על פי השלבים הבאים:

א) השלם את שיעורי הנקודות כך שימצאו על גרף הפונקציה וסמן אותן במערכת הצירים. (1,) , (0.5,) , (–2,) .



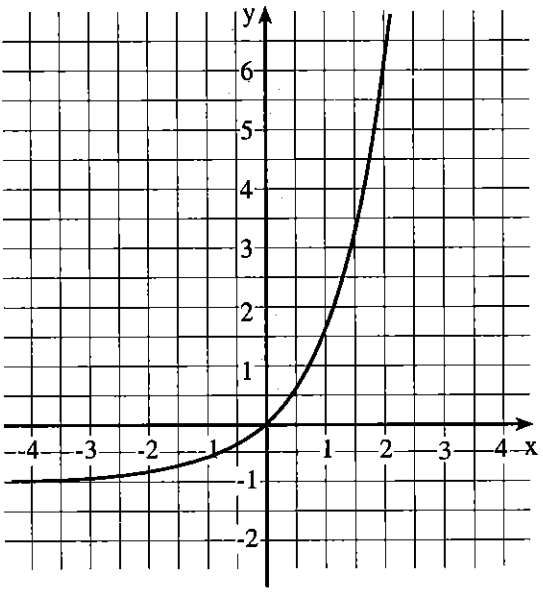
ב) מצא וסמן את נקודת החיתוך עם ציר y .

ג) נגזרת הפונקציה היא $y' = e^x \cdot (1+x)$.
מצא נקודה חשודה וסמן אותה במערכת הצירים.

ד) השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

ה) שרטט באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $y = -x \cdot e^x$.

3. בשרטוט מתוארת סקיצה של גרף הפונקציה $y = e^x - 1$.

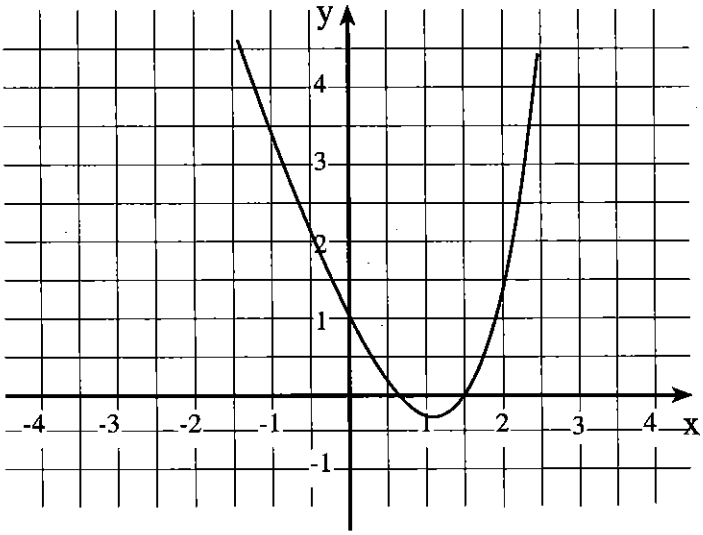


א) סמן על גרף הפונקציה נקודה ששיעור x שלה 1 .

ב) שרטט משיק לגרף הפונקציה בנקודה שסימנת, וקרא בערך את משוואתו.

ג) גזור ומצא את שיפוע המשיק בנקודה הנ"ל.
השווה עם ערך השיפוע שרשמת במשוואה בסעיף ב'.

ע"ע 4. בשרטוט מתוארת סקיצה של גרף הפונקציה $y = e^x - 3x$.



א) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y .

ב) שרטט משיק לגרף הפונקציה בנקודה הנ"ל.

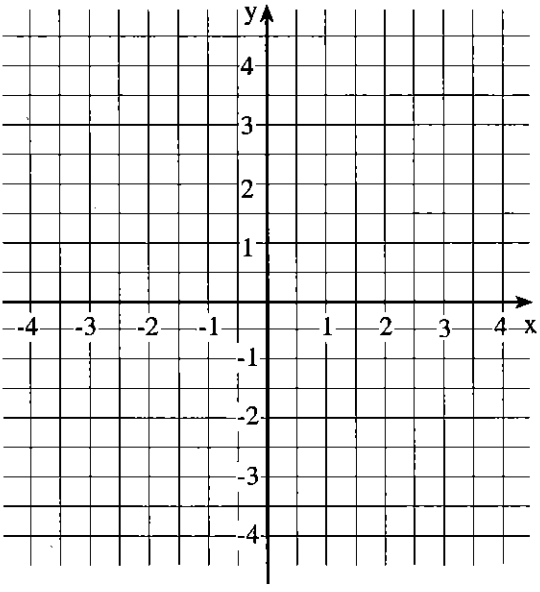
ג) מהי משוואת המשיק?

ד) גזור ומצא את שיפוע המשיק, והשווה עם שיפוע המשיק ששרטטת בסעיף ב'.

תרגילים

5. נתונה הפונקציה $y = (2-x)\cdot e^x$.

א) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y.
סמן אותה במערכת הצירים.



ב) מצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר x, וסמן אותה במערכת.

ג) נגזרת הפונקציה היא: $y' = e^x(1-x)$. מצא נקודה חשודה וסמן אותה במערכת הצירים.

ד) השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

ה) האם הגרף יחתוך את ציר x בכיוון השלילי שלו? נמק.

ו) השלם שיעורי נקודות על גרף הפונקציה:

(−8,) , (−4,) , (−2,)

בדוק תשובתך לסעיף ה'.

ז) האם יש אסימפטוטה לגרף הפונקציה? נמק.

6. חקור את הפונקציה $y = x^2 \cdot e^x$ על פי השלבים הבאים:

א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x. כמה נקודות כאלה יש?

ב) נגזרת הפונקציה היא $y' = e^x \cdot (x^2 + 2x)$.
מצא נקודות "חשודות" וסמן אותן במערכת הצירים.

ג) כדי לאפיין את הנקודות החשודות, מצא שיעורי נקודות נוספות וסמן אותן במערכת הצירים.

ד) רשום תחומי עליה וירידה.

ה) האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה? נמק.

ו) שרטט באותה מערכת צירים גרף של $y = -x^2 \cdot e^x$.

7. נתונה הפונקציה $y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

א) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר y, וסמן אותה במערכת צירים.

ב) האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר x? נמק.

ג) נגזרת הפונקציה היא $y' = \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

- מצא נקודה חשודה וסמן אותה במערכת צירים.
- אפיין את הנקודה החשודה. לשם כך בחר נקודות נוספות לפי הצורך.

ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה) האם יש לפונקציה אסימפטוטה? נמק.

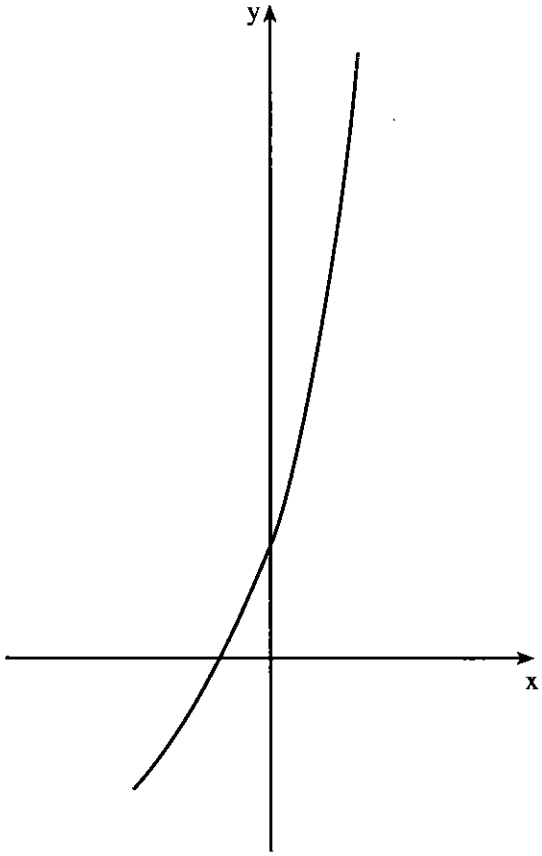
ו) רשום תחומי עליה וירידה.

8. בשרטוט מתוארת סקיצה של גרף הפונקציה $y = 2e^x + x$.

א) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y.

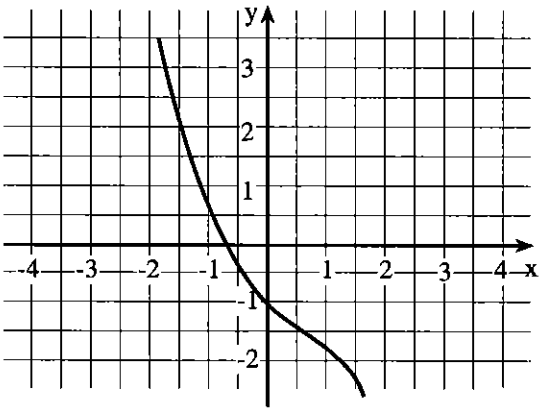
ב) שרטט משיק לגרף הפונקציה בנקודה הנ"ל.

ג) גזור ומצא את שיפוע המשיק ששרטטת.
מהי משוואת המשיק?



9. הגרף מתאר את הפונקציה $y = x^2 - e^x$.

א) חשב את שיעור y של הנקודה $A(-1, \quad)$ הנמצאת על גרף הפונקציה, וסמן אותה במערכת הצירים.

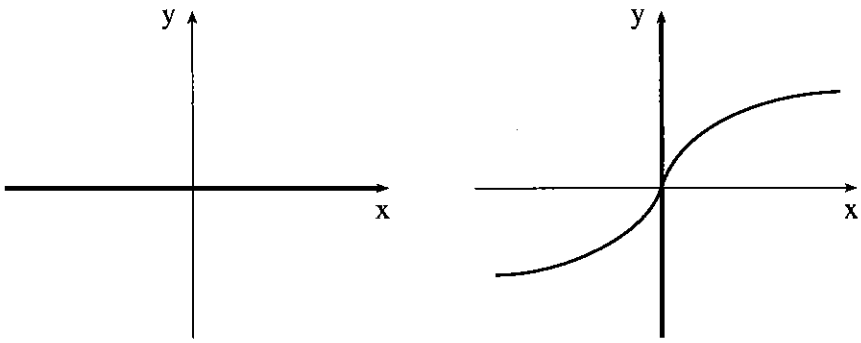


ב) שרטט משיק לגרף הפונקציה, בנקודה שסימנת, וקרא בערך את משוואתו.

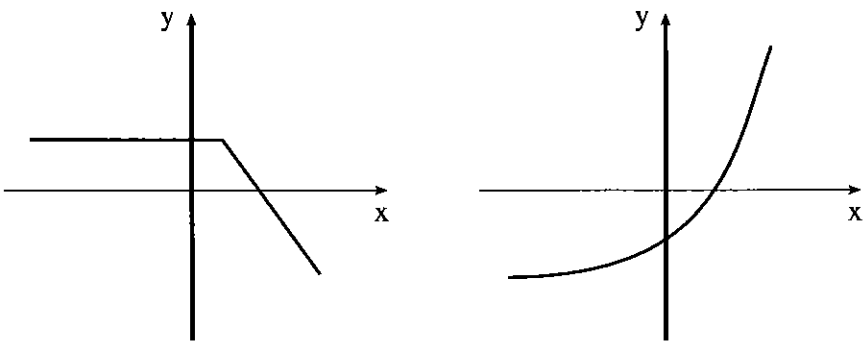
ג) גזור ומצא את שיפוע המשיק בנקודה A .
השווה עם ערך השיפוע שרשמת במשוואה בסעיף ב'.

שתי פונקציות הפוכות

1. הנח במערכת הצירים, את הגרף השקוף הזהה (גרף שקוף 4) כך שתתקבל התאמה הפוכה להתאמה המשורטטת כאן. (הנח כך שהציר המודגש יהיה ציר x וכיווני הצירים ישמרו.) הזז את הגרף שהתקבל למערכת הצירים הסמוכה.



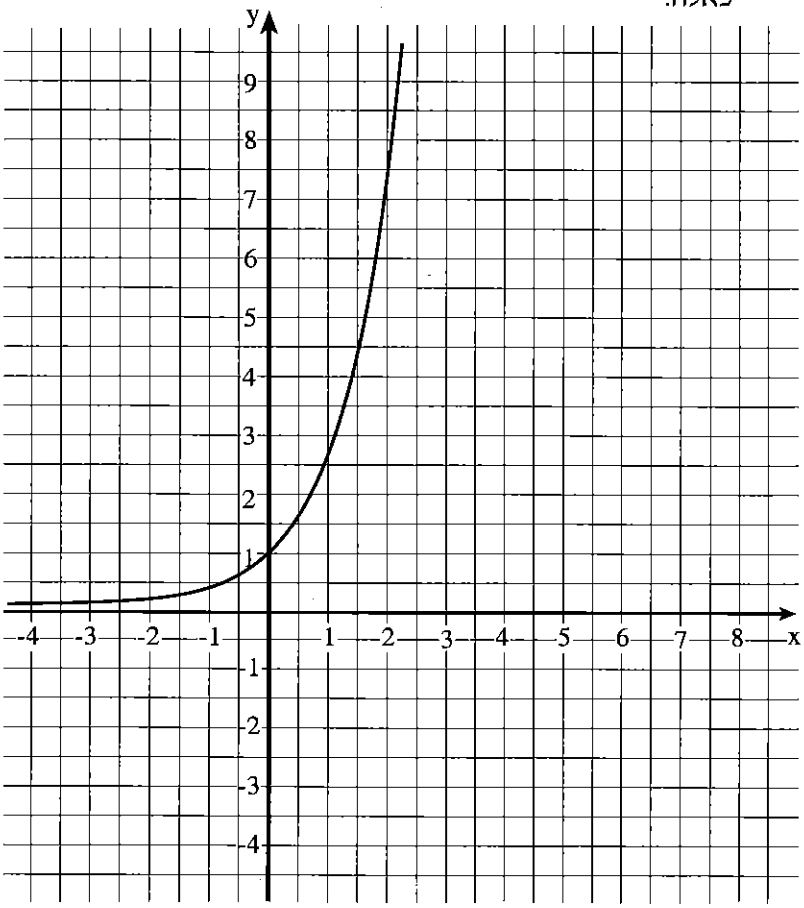
2. i) שרטט לכל גרף, את גרף ההתאמה ההפוכה.
(תוכל להיעזר בשרטוט הגרף על הדף השקוף הריק, שבסוף החוברת).



ii) שרטט בכל סעיף את קו הסימטריה של התאמה וההתאמה ההפוכה לה. מה משוואתו?

3. א) הנח את גרף שקוף 5, כך שיתקבל גרף הפונקציה ההפוכה ל $y = e^x$.

ב) רשום נקודות חיתוך של גרף הפונקציה ההפוכה עם הצירים, אם ישנן כאלה.



ג) האם יש אסימפטוטה לפונקציה ההפוכה? אם כן, מהי?

ד) עבור אלו ערכים של x הפונקציה ההפוכה מוגדרת?

ה) האם הפונקציה ההפוכה עולה או יורדת, בתחום שמצאת בסעיף ד'?

ו) באיזה תחום הפונקציה ההפוכה שלילית ובאיזה תחום היא חיובית?

ז) באילו **רביעים** עובר הגרף של e^x ובאלו רביעים הגרף של הפונקציה ההפוכהלו?

הפונקציה ההפוכה ל e^x מסומנת על ידי $\ln(x)$. (לַן של x או לַן x.)

ע"ע 4. א) לפניך גרף הפונקציה $y = \ln(x)$ אם אפשר, קרא בערך מתוך הגרף.

$\ln(0.5) =$

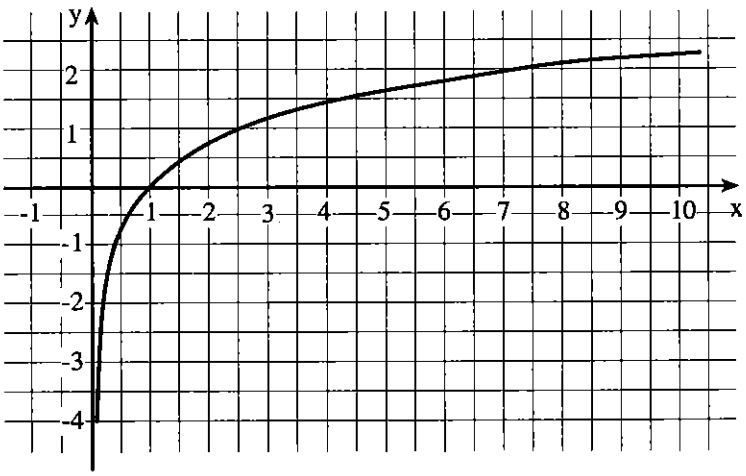
$\ln(1) =$

$\ln(e) =$

$\ln(5) =$

$\ln(7) =$

$\ln(-1) =$

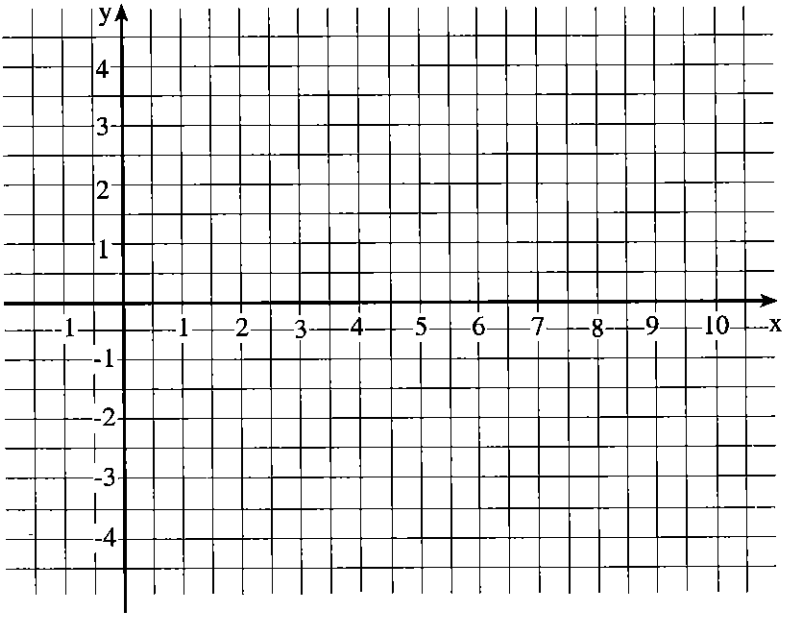


ב) בדוק את תשובותיך בעזרת המחשבון

	ln

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x-2)$.

א) חשב $f(2.1)$, $f(2.5)$, $f(3)$, $f(5)$
וסמן את הנקודות במערכת הצירים.



ב) עבור אלו מהערכים הבאים לא תוכל לחשב את ערך הפונקציה?
$x = 1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 3.5$, $x = 4.5$

ג) עבור אלו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

ד) איזו הזזה יש לבצע על גרף הפונקציה $y = \ln(x)$ כדי לקבל את גרף הפונקציה $y = \ln(x-2)$?

6. הפונקציות $y = e^x$ ו $y = \ln(x)$ הן שתי פונקציות הפוכות זו לזו כלומר "התפקידים" של x ו y, בשתי הפונקציות "מוחלפים".

$$x = \ln(y)$$

הפונקציה ההפוכה לה $y = e^x$

i) השלם: אם $\ln(7.389) = \square$

אז $7.389 = e^{\square}$

7.389	ln

ii) רשום בצורה $\ln(\_\_) = \_\_$ ובדוק בעזרת המחשבון.

א) $e^3 = 20.09$

$\ln(\_\_\_) = \_\_$

ב) $e^{0.5} = 1.649$

$\ln(\_\_\_) = \_\_$

ג) $e^{10} = 22026$

_____

ד) $e^{-1} = 0.3679$

_____

7. רשום בצורה $e^{\square}$ ובדוק במחשבון.

א) $\ln(8) = 2.079$

$e^{2.079} = \_\_\_$ בדוק:

2.079	e^x

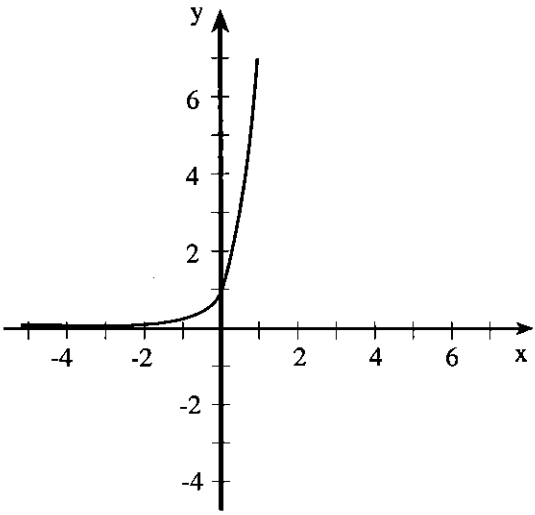
ב) $\ln(10) = 2.3026$

ג) $\ln(1) = 0$

ד) $\ln 0.1 = -2.3026$

ה) $\ln(e) = 1$

8. הנח את גרף שקוף 6 כך שיתקבל גרף הפונקציה ההפוכה ל $y = 10^x$.



א) מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה ההפוכה עם הצירים?

ב) האם יש אסימפטוטה לפונקציה ההפוכה? אם כן מהי?

ג) עבור אלו ערכים של x הפונקציה ההפוכה שלילית ועבור אלו ערכים של x היא חיובית?

ד) עבור אלו ערכי x הפונקציה ההפוכה אינה מוגדרת?

הפונקציה ההפוכה של 10^x מסומנת $\log(x)$ (לוג של x או לוג x)

למעשה לכל פונקציה מעריכית יש פונקציה הפוכה (שנקראת פונקציה לוגריתמית).

שתי הפונקציות החשובות ממשפחה זו הן שתי הפונקציה שהכרת $y = \ln(x)$ ו $y = \log(x)$ המופיעות גם במחשבון.

9. הפונקציות $y = 10^x$ ו $y = \log(x)$ הפוכות זו לזו. כלומר, "התפקידים" של x ו y בשתי הפונקציות מוחלפים.

$$x = \log(y)$$

$$y = 10^x$$

השלם: $\square = \log(100{,}000)$

$$100{,}000 = 10^{\square}$$

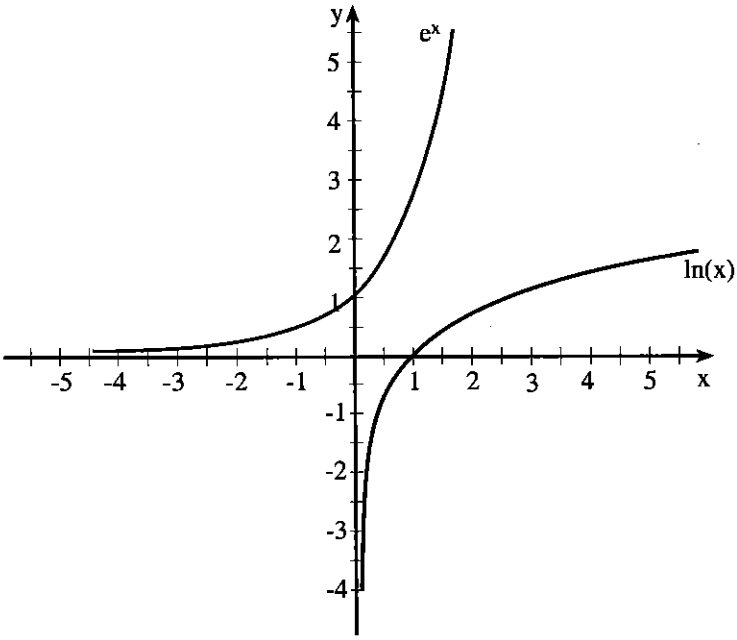
חשב ללא מחשבון.

א)	$\log(100) =$	ד)	$\log(10^5) =$
ב)	$\log(10) =$	ה)	$\log(0.1) =$
ג)	$\log(1) =$	ו)	$\log(0.01) =$

בדוק את תשובותיך בעזרת המחשבון.

תרגילים

10. היעזר בגרפים ובדוק אלו מהטענות הבאות נכונות.
אם הטענה אינה נכונה "תקן" אותה כך שתתקבל טענה נכונה.



א) לשתי הפונקציות יש נקודת חיתוך אחת עם ציר x .

ב) שתי הפונקציות עולות לכל x.

ג) הפונקציה $y = \ln(x)$ חיובית לכל x.

ד) הפונקציה $y = e^x$ חיובית לכל x.

ה) הפונקציה $y = \ln(x)$ מוגדרת רק עבור $x > 0$.

ו) לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה.

ז) לשתי הפונקציות יש נקודת חיתוך עם ציר y.

11. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x+2)$

א) חשב אם אפשר.

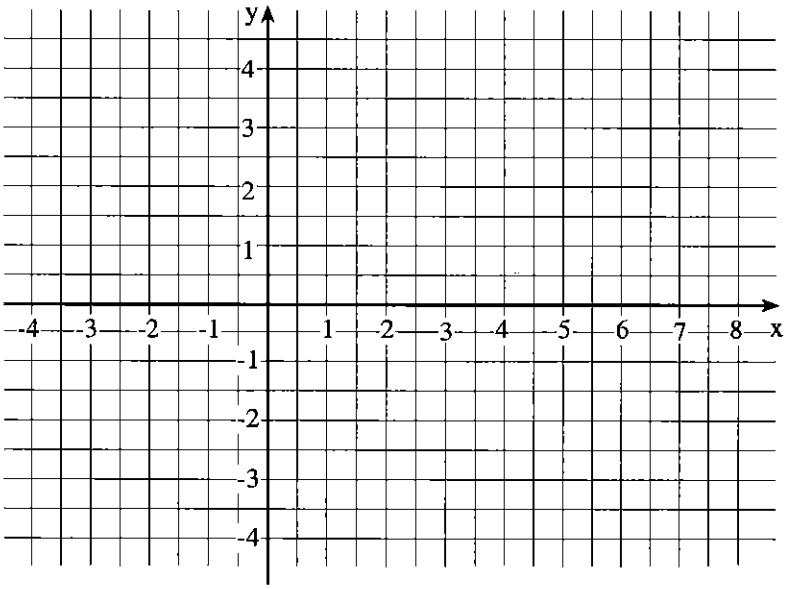
$f(0) =$ $f(1) =$ $f(4) =$ $f(5) =$

$f(-1.5) =$ $f(-1) =$ $f(-0.5) =$

$f(-3) =$ $f(-1.9) =$ $f(-2) =$

ב) עבור אלו ערכים של x הפונקציה מוגדרת? נמק.

ג) שרטט את גרף הפונקציה.



ד) איזו הזזה יש לבצע על גרף הפונקציה $y = \ln(x)$ כדי לקבל את גרף הפונקציה $y = \ln(x+2)$?

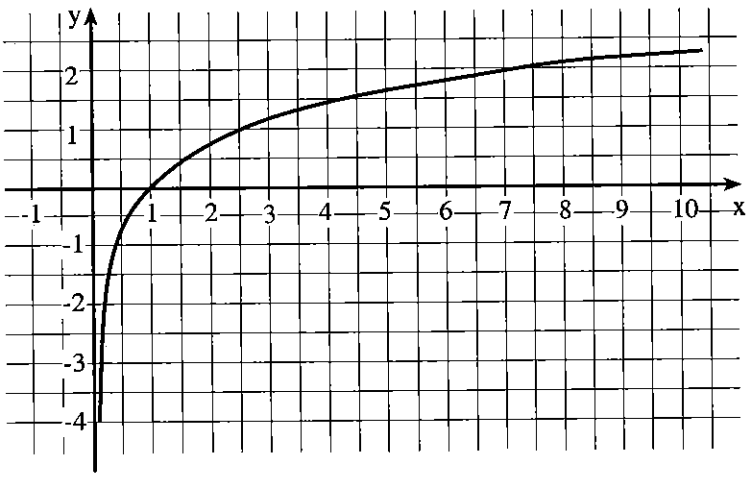
12. במערכת הצירים משורטט הגרף של $y = \ln(x)$. שרטט באותה מערכת את הגרפים של הפונקציות:

א) $y = 1 + \ln(x)$

ב) $y = \ln(x - 1)$

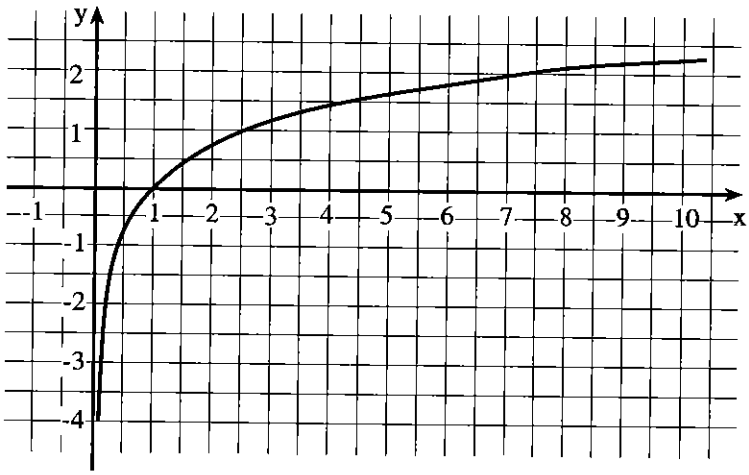
ג) $y = \ln(x - 1)$

ד) $y = \ln(-x)$



נגזרת של הפונקציה $y = \ln(x)$

1. לפניך גרף הפונקציה $y = \ln(x)$.



א) עבור אלו ערכים של x הפונקציה $y = \ln(x)$ מוגדרת?

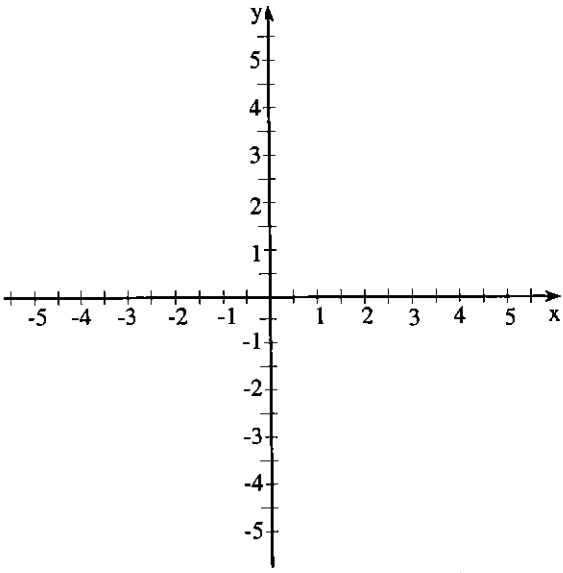
ב) מה תוכל לומר על **הסימן של שיפוע** גרף הפונקציה בנקודות שונות?

ג) מה תוכל לומר על הפונקציה הנגזרת? האם היא עולה או יורדת?
מה תוכל לומר על **השיפוע** של גרף הפונקציה כאשר ערך x גדֵל?

המשך ←

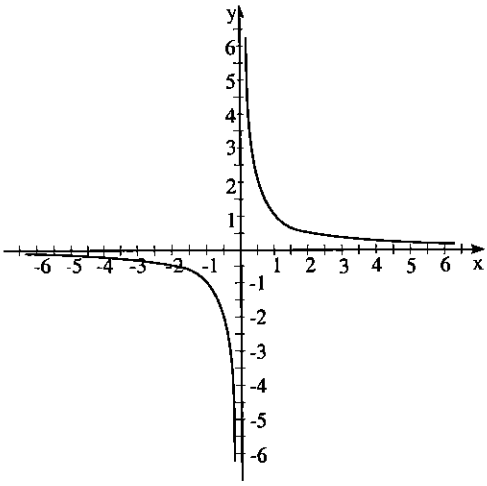
ד) שרטט גרף של פונקציה המקיימת את התנאים הבאים:

i) מוגדרת עבור $x > 0$. ii) חיובית. iii) יורדת.



האם הגרף ששרטטת מתאים לתכונות הנגזרת שרשמת בסעיפים א'-ג'?

בפרק קודם הכרת את הפונקציה $y = \frac{1}{x}$.



הענף הימני של הפונקציה מקיים את כל התכונות שרשמת בסעיפים א'-ד' והוא וודאי דומה לגרף ששרטטת בסעיף ה'.

נגזרת של הפונקציה $y = \ln(x)$ $(x > 0)$ היא $y' = \frac{1}{x}$.

2. גזור.

א) $y = \ln(x) + 5$

ב) $y = 3\ln(\ln(x) + 8$

ג) $y = 4x + 2\ln(x)$

ד) $y = \ln(x) + 8$

ה) $y = x^2 + e^x + 3\ln(x)$

ו) $y = 2e^x - 5\ln(x)$

ז) $y = x + 2\ln(x) + e \cdot x$

ח) $y = \ln(x) + x(x^2 - 1)$

3. נתונה הפונקציה $y = \ln(x) - x$.

א) עבור אלו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

ב) גזור ומצא נקודה חשודה, וסמן אותה במערכת הצירים.

ג) חשב וסמן נקודות נוספות על מנת לאפיין את הנקודה החשודה. (שים לב לתחום ההגדרה שרשמת בסעיף א'.)
מאיזה סוג הנקודה החשודה?

ד) השלם סקיצה של הגרף וענה על פיו.
- עבור אלו ערכים של x הפונקציה עולה/יורדת?
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים? אם כן, רשום בערך את שיעוריהן.
- עבור אלו ערכים של x הפונקציה חיובית ועבור אלו ערכים היא שלילית?

4. פתור.

א) $x^2 = 4$

ב) $x^2 = \frac{1}{4}$

ג) $x^3 = 1$

ד) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$

ה) $x - \frac{1}{x} = 0$

ו) $4x - \frac{1}{x} = 0$

5. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - \ln(x)$.

א) עבור אלו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

ב) השלם, אם אפשר, את שיעור y, וסמן במערכת הצירים.

(2,) (0,)

(1,) $(\frac{1}{4},)$

(–1,)

ג) מצא נקודה חשודה, וסמן אותה במערכת הצירים.

ד) מאיזה סוג הנקודה החשודה?
השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

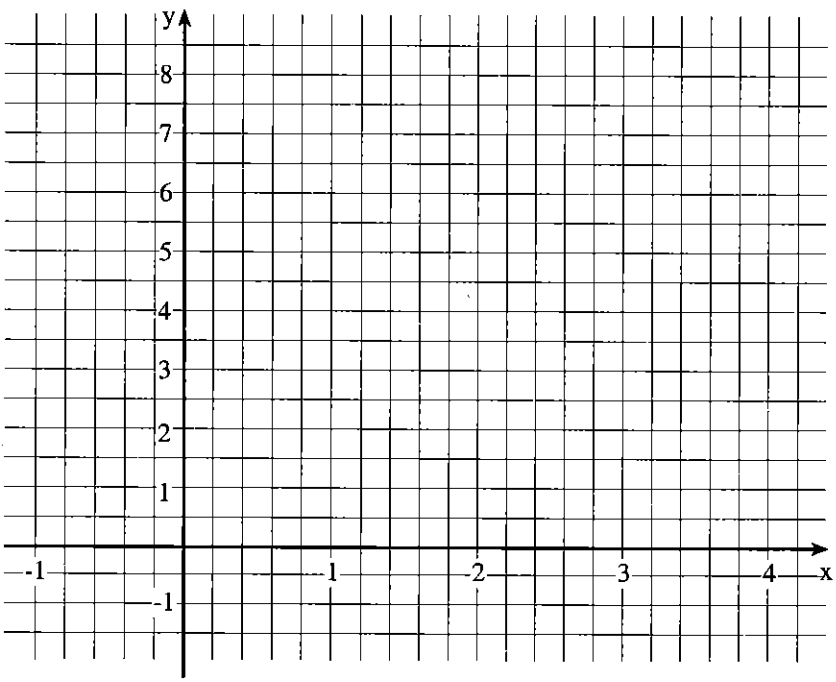
ה) עבור אלו ערכים הפונקציה: עולה/יורדת?
חיובית/שלילית?

6. נתונה הפונקציה $y = \frac{\ln(x)}{x}$

א) עבור אלו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

ב) הנקודה (2.72,) היא נקודת קיצון יחידה של גרף הפונקציה.
השלם שיעור y של הנקודה, וסמן אותה במערכת הצירים.

ג) חשב נקודות נוספות וקבע מאיזה סוג נקודת הקיצון.



ד) השלם סקיצה של גרף הפונקציה ורשום תחומי עליה וירידה.

ה) עבור אלו ערכים של x הפונקציה חיובית? שלילית?

תרגילים

7. נתונה הפונקציה $y = x + \ln(x)$.

א) עבור אלו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

ב) גזור **ונמק** מדוע לפונקציה אין נקודות קיצון.

ג) היעזר בחישוב שיעורי הנקודות הבאות, ושרטט במחברתך סקיצה של גרף הפונקציה.

$(\frac{1}{4}, \quad)$ $(\frac{1}{2}, \quad)$

$(1, \quad)$ $(2, \quad)$

$(4, \quad)$

ד) האם הפונקציה עולה/יורדת לכל ערך של x?

8. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

גזור.

א) $y = \ln(x) + x^2 + \frac{1}{x}$

ב) $y = 2e^x + \sqrt{x} + \ln(x)$

ג) $y = 4\sqrt{x} + 5 + 4 \cdot \ln(x)$

ד) $y = \frac{2}{x} - e^x + 3\ln(x)$

ה) $y = 3x^3 + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{x}$

ו) $y = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x)$

9. פתור את המשוואות. (לחלק מהן אין פתרון, במקרה כזה, ציין זאת.)

א) $9x - \frac{1}{x} = 0$

ב) $x^2 - \frac{1}{x} = 0$

ג) $x^3 + \frac{1}{x} = 0$

ד) $x^2 - \frac{8}{x} = 0$

ה) $5x - \frac{1}{x} = 0$

ו) $x + \frac{1}{x} = 0$

ז) $2\sqrt{x} - 8 = 0$

ח) $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} = 0$

10. נתונה הפונקציה $y = x^3 - 3\ln(x)$.

א) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת?

ב) גזור ומצא נקודה חשודה וסמן אותה במערכת הצירים.

ג) חשב שיעורי נקודות נוספות וקבע מאיזה סוג הנקודה החשודה?

ד) השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

11. נתונה הפונקציה $y = 2\ln(x) - x$.

א) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת?

ב) גזור ומצא נקודה חשודה וסמן אותה במערכת הצירים.

ג) חשב שיעורי נקודות נוספות וקבע מאיזה סוג הנקודה החשודה?

ד) השלם סקיצה של גרף הפונקציה.

12. נתונה הפונקציה $y = 2\sqrt{x} - \ln(x)$

א) עבור אלו ערכי x הפונקציה מוגדרת?

ב) גזור ובדוק שהנקודה $(1, \quad)$ היא נקודה חשודה.
השלם שיעור y .

ג) ידוע ש $(1, \quad)$ זו נקודה חשודה יחידה. מאיזה סוג היא?

13. נתונה הפונקציה $y = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

א) עבור אילו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

ב) גזור ומצא נקודה חשודה וסמן אותה במערכת הצירים.

ג) מאיזה סוג הנקודה החשודה?

ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה) רשום תחומי עליה/ירידה.

פעילויות מחשב

הפעילויות 1-3 הן בעזרת **Excel**. התוכנה **Excel** היא כלי מצוין כדי להדגים את העקרון של כלל נסיגה, מכיוון שהגדרה של איבר ראשון וחוק מאפשרת לקבל איברים רבים של הסדרה על יד "משיכה" (פעילות 1). אפשר גם בעזרת תוכנה זו לשרטט גרפים של סדרות שבעזרתם ניתן להשוות בין תכונות של סדרות שונות (פעילות 2). כמו כן בעזרת **Excel** אפשר לעסוק בכלל לפי מקום, כאשר בטור הראשון מופיע מקום האיבר ובטור השני הסדרה המוגדרת על פי המקום (פעילות 3).

הפעילויות 4-6 הן בעזרת התוכנה **מתמטי**x. התוכנה מאפשרת לשרטט בקלות גרפים ולהלך עליהם, לתת שיעורי נקודות, לשרטט משיק בנקודה, לתת את שיפוע המשיק ולשרטט את הגרף הנגזרת גם בלי שיודעים מהו חוק הפונקציה הנגזרת. בפעילויות מנצלים זאת בהקשר עם הזזות, שיקופים ונגזרות של הפונקציות המעריכיות.

לפני כל פעילות יש המלצה היכן כדאי לשלב אותה במהלך.

בפעילויות יש הוראות מפורטות לשימוש ב-**Excel** וב**מתמטי**x (DOS).

הוראות הפעלה בגירסת חלונות של **מתמטי**x מופיעות בנספח עמוד 258.

פעילויות מחשב בעזרת Excel

פעילות מחשב 1: כלל נסיגה (בעזרת Excel)

אפשר לשלב פעילות זו החל מעמוד 36 בספר.

בפעילות המחשב נשתמש בהגדרת סדרה באמצעות כלל נסיגה בצורת הכתיבה $a_n =$ ולא בצורה $a_{n+1} =$ כפי שנהגנו בסעיפים קודמים בספר.

1. לפני העבודה במחשב:

נתון כלל נסיגה: $a_n = a_{n-1} + 4$.

דוגמה: בטא את a_2 בעזרת קודמו: $a_2 = a_1 + 4$.

- בטא את a_5 בעזרת קודמו.
- בטא את a_6 בעזרת קודמו.
- בטא את a_{10} בעזרת קודמו.
- נתון גם $a_1 = 5$, חשב את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

2. התוכנה Excel מאפשרת לחשב כל איבר בעזרת קודמו.

פתח את התוכנה Excel.

א) נרשום את a_2 בעזרת a_1:

- רשום $a_1 = 5$
- רשום $a_2 = a_1 + 4$

- הבא את הסמן לתא הראשון בטור A, הקש ורשום 5.
- רשום בתא השני בטור A $\boxed{= A1+4}$

ב) רשום את האיברים הבאים.

- הבא את הסמן לקודקוד המסומן של התא השני, יסומן +.
- לחץ וגרור למטה עד התא העשירי ושחרר.

המחשב ממשיך לרשום בטור A כל איבר בעזרת קודמו על פי הדוגמה שנתת. (יוסיף 4.)

- רשום את ערכם של $a_{10} =$ $a_9 =$

ג) - חזור לתא השלישי בטור A והקש.

בשורת הנוסחאות, ירשם $\boxed{= A2+4}$ כלומר, $a_3 = a_2 + 4$.

- עבור לתאים המתאימים ורשום מה רשום בשורת הנוסחאות:

$A_4 =$

$A_5 =$

$A_6 =$

ד) המשך ובדוק אם 270 איבר בסדרה ואם 173 איבר בסדרה. אם כן, ציין את מקומו הסידורי.

אם רשמת איבר ראשון וביטוי לאיבר השני בעזרת קודמו, המחשב רואה בביטוי זה כלל נסיגה וכשגוררים, המחשב ממשיך לרשום את איברי הסדרה על פי הכלל.
כשמקישים על תא מסוים, נרשם בשורת הנוסחאות הביטוי של האיבר בעזרת קודמו.

3. נתונה הסדרה: $\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_n = 3b_{n-1} + 1 \end{cases}$

א) רשום בטור B את הסדרה הנתונה עד b_{15}.

- הבא את הסמן לתא הראשון בטור B, הקש ורשום 4.
בתא השני רשום $\boxed{= 3 *B1 + 1}$.
- הבא את הסמן לקצה המסומן של התא השני יסומן +, לחץ וגרור למטה עד התא ה-15 ושחרר.

ב) מה ערכו של $?b_{10}$ $?b_{12}$ $?b_{15}$

ג) רשום את b_{15} בעזרת קודמו: _____ $= b_{15}$.

4. א) רשום בטור C את הסדרה:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_n = c_{n-2} + c_{n-1} \end{cases}$$

בתא הראשון בטור C רשום 1.

בתא השני בטור C רשום 2.

בתא השלישי בטור C רשום $\boxed{= C1 + C2}$.

והמשך את הסדרה עד c_{30}.

ב) מה ערכם של $?c_{20}$ $?c_{21}$ $?c_{22}$

ג) רשום את c_{30} כסכום איברים קודמים בסדרה _____ = c_{30}
(הקש בחלון המתאים ובדוק).

5. רשום בטורים הבאים את הסדרות והמשך את הסדרה עד האיבר ה-15.

א)
$$\begin{cases} d_1 = 8 \\ d_n = 2d_{n-1} \end{cases}$$

- מהו האיבר ה-15 בסדרה?

ב)
$$\begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 2 \\ e_n = e_{n-1} \cdot e_{n-2} \end{cases}$$

- הסבר מדוע החל באיבר העשירי, רשומים האיברים בצורה שונה.

ג)
$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 2 \\ f_n = f_{n-1} / f_{n-2} \end{cases}$$

- מה תוכל לומר על סדרה זו?

- החלף את האיבר הראשון בטור זה למשל: $f_1 = 4$

- הבא את הסמן לתא הראשון רשום 4 ואחר כך Enter.

- האם הסדרה נשארה מחזורית?
- החלף כרצונך את f_1 ו- f_2 בדוק.
- השלם: $f_{80} =$ $f_{2000} =$ (נסה ללא מחשב).

ד)
$$\begin{cases} g_1 = 3 \\ g_n = -g_{n-1} \end{cases}$$

- מהי המחזוריות של הסדרה?

6. א) - רשום כלל נסיגה כך שתקבל סדרה יורדת.
- רשום על המחשב ובדוק.

ב) - רשום כלל נסיגה כך שתקבל סדרה מחזורית שאורך המחזור שלה גדול מ-2.
- בדוק בעזרת המחשב.

פעילות מחשב 2: כלל נסיגה וגרף (בעזרת Excel)

אפשר לשלב פעילות זו החל מעמוד 43 בספר.

1. א) נתון כלל נסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

איזו סדרה זו?

פתח את התוכנה Excel.

- רשום $a_1 = 1$

- רשום $a_2 = a_1 + 1$

- הבא את הסמן לתא הראשון בטור A , הקש ורשום 1.

- רשום בתא השני בטור A $\boxed{=A1 + 1}$.

המחשב ימשיך לרשום כל איבר בעזרת קודמו על פי הדוגמה שנתת (יוסיף 1)

- רשום את איברי הסדרה עד a_{10}.

- הבא את הסמן לקצה המסומן של התא השני, יסומן +, לחץ וגרור למטה עד התא ה-10 ושחרר.

ב) - רשום בטור B את הסדרה:

$$\begin{cases} b_1 = -4 \\ b_n = b_{n-1} + 3 \end{cases}$$

- רשום עד b_{10}.

- הבא את הסמן לתא הראשון בטור B ורשום 4 –.
- רשום בתא השני $\boxed{= B1 + 3}$ גרור עד התא ה-10.

ג) - רשום בטור C את הסדרה:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = 2 \cdot c_{n-1} \end{cases}$$

- רשום עד c_{10}.

- הבא את הסמן לתא הראשון בטור C ורשום 1.
- רשום בתא השני $\boxed{= 2*C1}$ גרור עד התא ה-10.

ד) כעת תלמד לשרטט גרפים של סדרות.

נשרטט גרפים של הסדרות b_n ו- c_n .

על ציר x תופיע הסדרה a_n: מקום האיבר בסדרה.

- השחר את כל הטורים (A, B, C).
- הקש על בחר **סוגים רגילים**, **בסוג תרשים**, (פיזור) xy, בחר והקש סיום.

- קבע יחידות על ציר x.

- הקש הקשה כפולה על ציר x.
- הקש על **סרגל**.

- רשום ביחידה ראשית 1 ואישור.
- הגדל את הגרף על ידי משיכת המסגרת.

- השווה את קצב השינוי של הגרפים שהתקבלו.

2. מחק את הגרף.
מחק את הרשום בטורים B ו- C.

- הקש על הגרף והקש Delete.
- השחר את הטורים B ו-C והקש Delete.

נתונות הסדרות:

א) $\begin{cases} b_1 = 320 \\ b_n = b_{n-1} - 40 \end{cases}$ ב) $\begin{cases} c_1 = -5 \\ c_n = -2 \cdot c_{n-1} \end{cases}$

איך לדעתך, יראו הגרפים של שתי הסדרות האלה?

- רשום את שתי הסדרות בטורים B ו-C.

בתא הראשון בטור B רשום 320.
- רשום בתא השני $\boxed{= B1-40}$ והמשך עד b_8.
- רשום באופן דומה את איברי סדרה c_n והמשך עד c_8.

- שרטט גרפים של שתי הסדרות.
(ההוראות כבתרגיל הקודם.)

- הקש הקשה כפולה על הצירים כדי לקבוע יחידות: בציר x יחידה ראשית $\boxed{1}$, בציר y יחידה ראשית $\boxed{100}$ ואישור.

- מצא זוגות של איברים שווים בשתי הסדרות וקבע בכל מקרה את מקומם הסידורי.

3. מחק את הגרף ואת הרשום בטורים B ו- C.

א) - רשום בטור B את הסדרה: $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \\ b_n = b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases}$

- בתא השלישי רשום $\boxed{=B2-B1}$ גרור עד b_{20}.
- גרור גם את הסדרה הרשומה בטור A עד a_{20}.

- איזו סדרה קיבלת? האם זה מקרה?
כדי לבדוק, החלף את האיבר הראשון בטור B.

- הבא את הסמן לתא ורשום למשל, 1.

- האם הסדרה נשארת מחזורית?
- החלף כרצונך את b_2.
- חזור לערכים: $b_1 = 2$
$b_2 = 3$
- מה לדעתך יהיה המספר הרשום בתא 37? בדוק על ידי גרירה.
- מה לדעתך יהיה המספר הרשום בתא 159? בדוק על ידי גרירה.
$b_{76} = -2$. מתי לראשונה יופיע 2- פעם נוספת? בדוק.

ב) - איך יראה הגרף של הסדרה?
- שרטט ובדוק את השערתך. הפעם נשרטט גרף שנקודותיו מחוברות.

- הקש על
בחר והקש סיום.
- הקש הקשה כפולה על הצירים כדי לקבוע יחידות: בציר x יחידה ראשית 1 , בציר y יחידה ראשית 1.

ג) נגדיר כעת כלל נסיגה דומה: $c_n = c_{n-2} - c_{n-1}$.
- הסבר מה ההבדל בין הכלל הזה והקודם.
- בדוק אם גם סדרה זו מחזורית.

- בחר c_1 ו-c_2 כרצונך.
- רשום בתא השלישי =C1–C2

מחק את הגרף ואת הרשום בטורים B ו-C.

4. חשב מספר איברים ראשונים ונסה לקבוע אם הסדרות הבאות מחזוריות:

א) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$

ב) $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 4 \\ c_n = c_{n-1}/c_{n-2} \end{cases}$

ג) $\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = 3 \\ d_n = d_{n-1} * d_{n-2} \end{cases}$

ד) $\begin{cases} e_1 = 2 \\ e_2 = 4 \\ e_n = e_{n-2}/e_{n-1} \end{cases}$

- במה שונה הסדרה בסעיף ד' מזו הרשומה בסעיף ב'?

ה) $\begin{cases} f_1 = 4 \\ f_n = -f_{n-1} \end{cases}$

ו) רשום סדרה מחזורית נוספת שאורך המחזור שלה 2 ואינה סדרה של מספרים נגדיים.

בתרגיל הבא תסביר, תוך שימוש בפישוט ביטויים אלגבריים, מדוע הסדרות שנמצאו מחזוריות הן מחזוריות.

5. נסמן:

$$\begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases}$$

נבטא את האיברים בעזרת x ו-y:

$a_1 = x$

$a_2 = y$

$a_3 = a_2 - a_1 = y - x$

פשט: $a_4 = a_3 - a_2 = y - x - y =$

$a_5 = a_4 - a_3 =$

המשך לבטא איברים עד שתגיע למחזוריות.

6. בדוק אם הסדרות הבאות מחזוריות.

א) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_n = a_{n-1}/a_{n-2} \end{cases}$

ב) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_n = -a_{n-1} \end{cases}$

ג) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_n = 1/a_{n-1} \end{cases}$

7. בדוק מה קורה אם מבטאים איברים בסדרה בה כלל הנסיגה הוא:

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

פעילות מחשב 3: כלל לפי מקום (בעזרת Excel)

אפשר לשלב פעילות זו החל מעמוד 55.

1. הכלל לפי מקום של סדרה הוא: $b_n = 2n^2 - 1$

א) חשב את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

$b_1 =$ $b_2 =$ $b_3 =$ $b_4 =$

ב) בתרגיל זה תלמד לרשום ב-Excel איברים של סדרה המוגדרת לפי מקום.
בשרטוט גרף היה צורך בסדרת "מקומות" 1, 2, 3,... שתייצג מקומות של איברים, על ציר x.
גם בהגדרה של סדרה לפי מקום יש צורך בסדרת "מקומות" כזו.
"המקומות" יוצבו אחר כך בתבנית הנתונה במקום n.
פתח את התוכנה Excel.

נרשום בטור A את סדרת המקומות.	- רשום 1 בתא הראשון בטור A ואחר כך Enter. - רשום בתא השני =A1+1 . - הבא את הסמן לקודקוד המסומן של התא השני יסומן +, לחץ וגרור למטה עד התא ה-18 ושחרר.
נרשום את איברי הסדרה $b_n = 2n^2-1$ בטור B, בעזרת סדרת המקומות (n) הרשומה בטור A.	- רשום בתא הראשון בטור B =2*A1^2–1 . - גרור מתא מספר 1 עד תא מספר 18.

ג) בדוק אם חשבת נכון את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.
מצא את $b_{18} =$ $b_{17} =$ $b_{10} =$

כפי שראית בכלל לפי מקום, יש לרשום בטור A את המספרים הטבעיים, ולרשום את איברי הסדרה בעזרת איברי טור A.
רשמנו $b_1 = 2a_1^2 - 1$ והתקבלה הסדרה: $b_n = 2a_n^2 - 1$

2. הכלל לפי מקום של סדרה הוא: $c_n = n(n-1)$

א) חשב את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה.

$c_1 =$ $c_2 =$ $c_3 =$ $c_4 =$

ב) איך תרשום את c_1 בעזרת a_1?

- רשום בתא הראשון בטור c וגרור עד תא מספר 18.

ג) מצא את $c_{10} =$ $c_{12} =$ $c_{18} =$

מחק את הרשום בטורים B ו-C.

- השחר את הטורים והקש Delete

3. רשום את שלוש הסדרות הבאות בטורים B , C ו D.

$b_n = 2n$

$c_n = 3n$

$d_n = 4n$

- רשום בתא הראשון בטור B =2*A1 וגרור עד b_{20} .

- שרטט גרפים של הסדרות b_n, c_n ו- d_n, כאשר על ציר x תופיע הסדרה a_n: מקום האיבר בסדרה.

- השחר את כל הטורים (A,B,C).
- הקש על בחר **סוגים רגילים סוג תרשים**,
- (פיזור) xy,
- בחר והקש סיום.
- הקש הקשה כפולה על ציר x.
- הקש על **סרגל**.
- רשום ביחידה ראשית 1 ואישור.
- הקש הקשה כפולה על ציר y.
- רשום ביחידה ראשית 4 ואישור.
- הגדל את הגרף על ידי משיכת המסגרת.

- קבע יחידות על הצירים.

- השווה את קצב השינוי של הגרפים שהתקבלו.

- מחק את הגרף.
- מחק את הרשום בטורים B, C, D.

- הקש על הגרף והקש Delete.
- השחר את הטורים B ו-C והקש Delete.

4. - רשום את שלוש הסדרות הבאות בטורים B , C ו-D.

$$b_n = 3 + n$$
$$c_n = 5 + n$$
$$d_n = 9 + n$$

- רשום בתא הראשון בטור B, =A1+3 וגרור עד b_{20}.

- שרטט גרפים של הסדרות b_n, c_n ו d_n.
(על ציר x תופיע הסדרה a_n: מקום האיבר בסדרה).

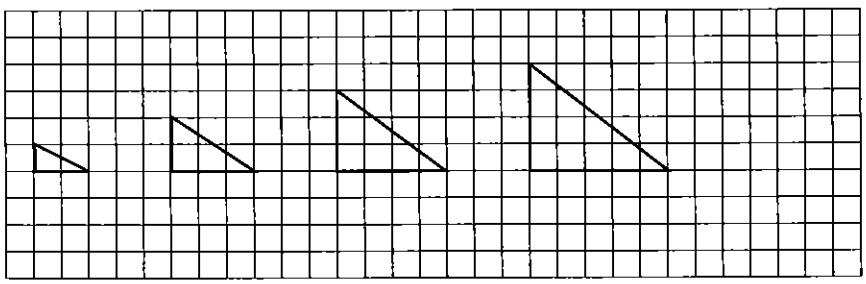
- הקש על הצירים כדי לקבוע יחידות:
בציר x יחידה ראשית 1,
בציר y יחידה ראשית 3.

- מה משותף לשלושת הגרפים ובמה הם נבדלים?

- מחק את הגרף.
- מחק את הרשום בטורים B, C, D.

- הקש על הגרף והקש Delete.
- השחר את הטורים B, C ו-D והקש Delete.

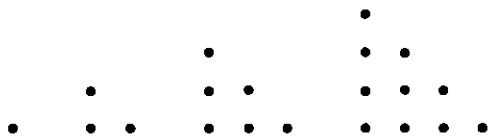
5. א) הוסף שרטוט ורשום מתחת לכל שרטוט את מספר המשבצות שבתוך הצורה.



- רשום הגדרה לפי מקום לסדרה הזו. b_n= _____
- רשום את הסדרה בטור B בעזרת A.

סדרה זו נקראת סדרת **המספרים המשולשים**.

ב) - הוסף שני איברים לסדרת השרטוטים:



- רשום מתחת לכל שרטוט את מספר הנקודות שבשרטוט והוסף עוד שני מספרים לסדרת המספרים שהתקבלה.
- רשום כלל נסיגה מתאים לסדרה שהתקבלה.

רמז: רשום תחילה כל איבר בעזרת קודמו

$c_2 = c_1 +$ _____

$c_3 =$ _____ + _____

$c_4 =$ _____ + _____

- רשום את הסדרה בטור C.

בתא הראשון רשום 1 ,
בתא השני רשום $\boxed{=C1+C2}$
גרור עד c_{20}.

קיבלת שוב את סדרת **המספרים המשולשים**.

6. נבדוק מה קורה לחוקיות של פיבונצ'י?

א) נתונות הסדרות

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 5 \\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$$

נבדוק סדרת סכומים של סדרות פיבונצ'י: $c_n = a_n + b_n$

- רשום בטור A את הסדרה a_n.	בתא הראשון ב- A רשום 2, בתא השני ב- A רשום 4, בתא השלישי ב- A רשום $\boxed{=A1+A2}$.
- רשום באופן דומה בטור B את הסדרה b_n.	
- רשום בטור C את איברי הסדרה $a_n + b_n$.	- רשום בתא C1: $\boxed{=A1+B1}$ וגרור.

נבדוק אם האיברים בטור C מקיימים את החוק של סדרת פיבונצ'י.

- לשם כך רשום בטור D:	$D_1 = 3$ $D_2 = 9$ ובתא השלישי $\boxed{=D1+D2}$ וגרור.

- השווה את הסדרות בטורים C ו-D.
- האם סדרת הסכומים מקיימת את החוק של סדרת פיבונצ'י?

ב) - האם לדעתך הסדרה המוגדרת $e_n = a_n - b_n$ גם מקיימת את החוק של סדרת פיבונצ'י? בדוק.

- רשום בטור E את הסדרה $a_n - b_n$.

- רשום בתא הראשון של E $\boxed{=A1-B1}$ וגרור.

ובטור F: $F_1 = 1$

$F_2 = -1$

ובתא השלישי $\boxed{= F1+F2}$

- השווה את הסדרות בטורים E ו-F.

- האם סדרת ההפרשים מקיימת את החוק של סדרת פיבונצ'י?

ג) בדוק בטורים G ו - H אם הסדרה $a_n \cdot b_n$ מקיימת את החוק של סדרת פיבונצ'י. נסה להסביר.

7. נסה לגלות מה מסתתר בטור B:

- הכנס לטור A את שורת המספרים:

10, 15, 10, 20, 30, 40, 50, 70, 100, 200, 1000, 2000, -535

- הכנס מספרים לטור B לפי ההוראות:

בתא הראשון רשום $\boxed{=A1}$

בתא השני רשום $\boxed{=B1+A2}$

גרור עד b_{10}.

- נסה למצוא מה מתארים המספרים הרשומים בטור B?

- נסה להסביר מדוע לסדרה שהתקבלה התכונה שמצאת.

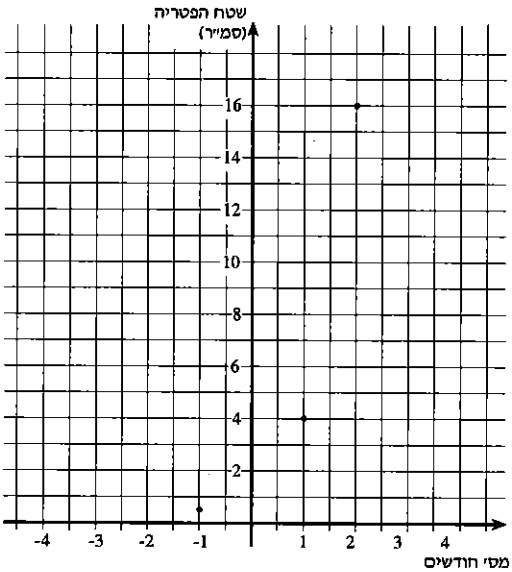
פעילויות מחשב בליווי הלומדה מתמטיx

פעילות מספר 4: הפונקציות המעריכיות (בעזרת מתמטיx*)

פעילות זו יכולה להתליף את המהלך בסעיף "מעריך חזקה לא שלם", תרגילים 1-6 בעמודים 159-164.

חלק א'

1. במערכת הצירים שלפניך מתואר תהליך גידול פטריות במעבדה. בכל חודש גדל שטח הפטריות פי 4 מהחודש הקודם.



א) רשום את חוק הגידול.

ב) רשום את שיעורי הנקודות המסומנות בשרטוט ורשום את המשמעות של כל אחת מבחינת הסיפור.

ג) מה לדעתך, בערך, גודל שטח הפטריה אחרי $1\frac{1}{2}$ חודשים?

ד) האם יש משמעות לחיבור הנקודות המסומנות?

ה) - חבר את הנקודות (ללא קפיצות).
- האם יש משמעות לכל הנקודות המתקבלות על הקו שהתקבל? אם כן, רשום מהי ואם לא נמק.
- מהו בערך גודל השטח אחרי שלושת רבעי חודש?
- מה גודל השטח לפני חצי חודש?

* הוראות ההפעלה בגרסת חלונות מופיעות בנספח בעמוד 258.

נחקור את תכונות הפונקציה ששרטטת בתרגיל 1

2. א) שרטט את גרף הפונקציה $y = 4^x$.

- רשום את המשוואה $y = 4^x$.
- הקש F2 לשרטוט.

ב) כדי לראות חלקים נוספים של גרף הפונקציה שנה סקלות.

- הקש ס ALT (ביחד) לאחר כל שינוי הקש ENTER.

$(-4) \le x \le 4$

$0 \le y \le 70$

- הקש F10 לביצוע השינויים.

ג) - "הַלֵך" על גרף הפונקציה.
- השלם שיעורי נקודות.
- רשום משמעות כל נקודה מבחינת שטח הפטריה.

- הקש על F7 להילוך על הגרף. הזז את החיצים $\rightarrow$ $\leftarrow$ ימינה ושמאלה. (שיעורי הנקודות רשומות במסגרת מצד ימין).

$(2\ ,\quad)$ $\qquad$ $(\frac{1}{2}\ ,\quad)$

$(3\ ,\quad)$ $\qquad$ $(1\frac{1}{2}\ ,\quad)$

ד) רשום את תכונות הפונקציה:
- נקודת חיתוך עם ציר y.
- נקודות חיתוך עם ציר x.
- תחומי עליה/ירידה.
- תחומים בהם הפונקציה חיובית/שלילית.

ה) - השלם שיעור y של הנקודות הנמצאות על הגרף המשורטט:

$(-1\ ,\quad)$, $(-1.5\ ,\quad)$, $(-2\ ,\quad)$, $(-3.5\ ,\quad)$, $(-4\ ,\quad)$

- מה קורה לערכי ה-y כשערכי ה-x קטנים?
- האם לדעתך יש לפונקציה אסימפטוטה? אם כן, רשום את משוואתה והסבר מדוע.

חלק ב'

בחלק זה נבדוק את ההתנהגות של משפחת הפונקציות המעריכיות
2^x , 3^x , 4^x . . . כלומר $y = a^x$, $a > 1$

- צא מהילוך על גרף הפונקציה.	- הקש ESC.
- כדי לראות חלקים נוספים של גרף הפונקציה שנה סקלות.	הקש ס ALT (ביחד). לאחר כל שינוי הקש ENTER $(-4) \le x \le 4$ $0 \le y \le 8$ - הקש F10 לביצוע השינויים.

.3

א) שרטט את גרף הפונקציה $y = 3^x$ (באותה מערכת צירים שבה משורטטת $y = 4^x$).	- לחץ על ↓ ורשום $y = 3^x$. - הקש F2 לשרטוט.

ב) שרטט את גרף הפונקציה $y = 2^x$ (באותה מערכת צירים).

ג) - רשום לפחות 3 תכונות המשותפות לשלוש הפונקציות.

- רשום במה הן נבדלות.

ד) - קבע איזה מספר הוא הגדול מבין שלושת המספרים הבאים ואיזה הקטן ביותר.

(i) $2^{1.5}$ $3^{1.5}$ $4^{1.5}$

(ii) $2^{2.5}$ $3^{2.5}$ $4^{2.5}$

(iii) $2^{4.7}$ $3^{4.7}$ $4^{4.7}$

- כל הערכים הגבוהים מתקבלים על אותו גרף של פונקציה, מהי? (שים לב, ערכי x חיוביים).

ה) - קבע איזה מספר הוא הגדול מבין שלושת המספרים הבאים ואיזה הקטן ביותר.

(i) $2^{-0.5}$ $3^{-0.5}$ $4^{-0.5}$

(ii) $2^{-4.7}$ $3^{-4.7}$ $4^{-4.7}$

- כל הערכים הגבוהים התקבלו על אותו גרף של פונקציה, מהי? (שים לב, ערכי x שליליים).

חלק ג'

בחלק זה נבדוק מה קורה כש $0 < a < 1$ כלומר 0.5^x , 0.2^x . . .

.4

נקה את המסך. | ALT F3

א) שרטט את גרף הפונקציה $y = 0.5^x$

ב) רשום את תכונות הפונקציה:

- נקודת חיתוך עם ציר y.
- נקודות חיתוך עם ציר x.
- תחומי עליה וירידה.
- התחומים בהם הפונקציה חיובית, שלילית.

ג) שרטט באותה מערכת צירים את הפונקציות:

$$y = 0.25^x$$

$$y = 0.125^x$$

ד) - רשום לפחות 3 תכונות המשותפות לשלוש הפונקציות.
- רשום במה הן נבדלות.

ה) - רשום איזה מספר הוא הגדול ביותר מבין שלושת המספרים הבאים, ואיזה הקטן ביותר.

(i) 0.5^2 0.25^2 0.125^2

(ii) $0.5^{-1.5}$ $0.25^{-1.5}$ $0.125^{-1.5}$

(iii) $0.5^{-4.1}$ $0.25^{-4.1}$ $0.125^{-4.1}$

- איזו פונקציה מקבלת את הערך הגדול ביותר עבור x חיובי?
- איזו פונקציה מקבלת את הערך הגדול ביותר עבור x שלילי?

חלק ד'

בחלק זה נשווה בין שתי הקבוצות של הפונקציות מחלק א' ומחלק ב'.
ניתוח לדוגמה מכל קבוצה: $y = 2^x$ / $y = 0.5^x$.

.5

- נקה את המסך. ALT F3

א) שרטט את גרף הפונקציה $y = 2^x$
ואת גרף הפונקציה $y = 0.5^x$

ב) - מה המשותף לשתי הפונקציות? רשום לפחות שלוש תכונות.

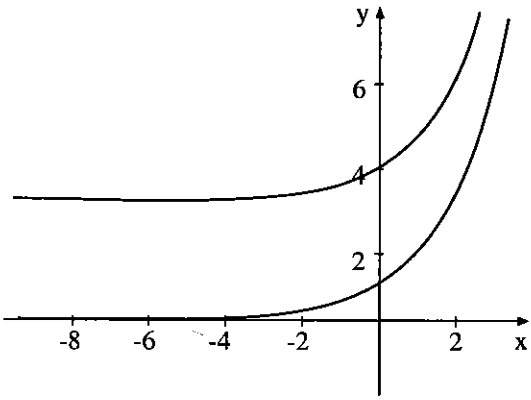
- מה השונה ביניהן?

חזור לעמודים 164 תרגילים 11-7.

פעילות מספר 5: על הזזות ושיקופים של הפונקציה המעריכית (בעזרת מתמטיא*)

אפשר לשלב פעילות זו החל מעמוד 185.

1. משורטטים הגרפים של הפונקציות: $y = 2^x$ ושל הזזה של $y = 2^x$ כלפי מעלה.



א) - השלם את רישום החוקים $y = 2^x$ $y =$	
- שרטט את הפונקציות.	ALT F2 לשרטוט.
ב) כדי לראות חלקים נוספים של הגרפים שנה סקלות.	- הקש ALT ס (ביחד). לאחר כל שינוי הקש ENTER $(-4) \le x \le 4$ $0 \le y \le 16$ - הקש F10 לביצוע השינויים.

ג) $(2.23\ ,\ 4.69)$ היא נקודה על גרף הפונקציה $y = 2^x$.

- השלם שיעור y של הנקודה על גרף הפונקציה המוזזת: (, 2.23).

$(3.005\ ,\ 8.028)$ היא נקודה על גרף הפונקציה $y = 2^x$.

- השלם שיעור y של הנקודה על גרף הפונקציה המוזזת: (, 3.005).

* הוראות ההפעלה בגרסת חלונות מופיעות בנספח בעמוד 258.

2. א) האם לדעתך שני הגרפים המשורטטים בשאלה 1 יחתכו בנקודה כלשהי?
הסבר! (תוכל לשנות סקלות ולחפש נקודה זאת.)

ב) האם יש פתרון למערכת המשוואות?

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^x + 3 \end{cases}$$

- הסבר!
- נסה לפתור אלגברית.

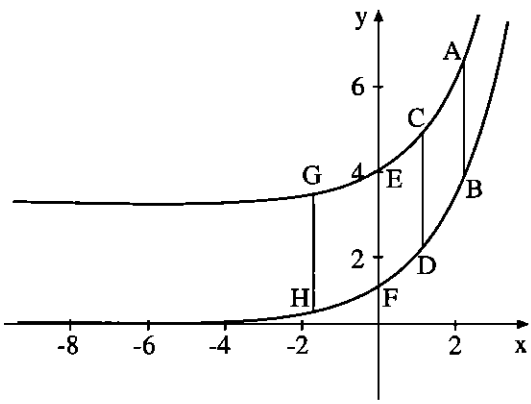
ג) בדוק באמצעות הגרף את מסקנתך מסעיפים א' ו-ב'.
לשם כך "הלך" על הגרפים.

- הקש F7. מופיע סמן על אחד הגרפים. במידה ויש צורך העזר בחיצים ↑↓ על מנת שהסמן ימצא על הגרף העליון.
- הלך ע"י החיצים ← →.

- מהו אורך הקטע AB המחבר את שתי הפונקציות ומקביל לציר y?

- הזז את הסמן כך שיעבור למשל דרך A(2 , 7).
- הזז את הסמן ובדוק את אורך הקטע בנקודות שונות, ראה שרטוט מדגים.

- מה תוכל לומר על אורכי הקטעים האלה?



3. צא מהלוך ונקה את המסך.

הקש ALT F3 , ESC.

א) שנה סקלות לצורך התרגיל הבא.

- הקש ס ALT (ביחד).

לאחר כל שינוי הקש ENTER.

$(-4) \le x \le 4$

$(-8) \le y \le 8$

הקש F10 לביצוע השינויים.

ב) משורטטים גרפים של פונקציות מעריכיות. רשום את החוקים של הפונקציות.

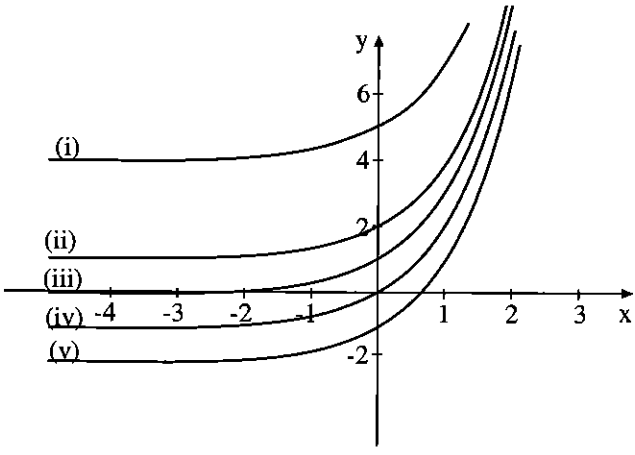
(i) $y =$

(ii) $y =$

(iii) $y = 2^x$

(iv) $y =$

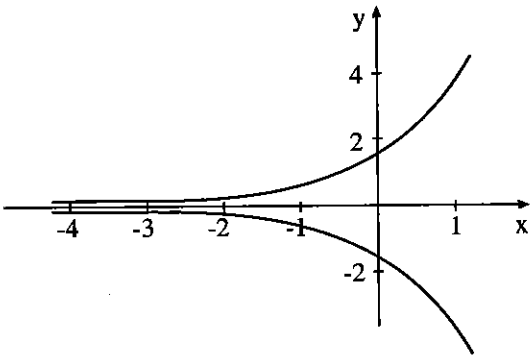
(v) $y =$



ג) שרטט את הפונקציות במחשב ובדוק שאכן קיבלת אותו שרטוט.

4. נקה את המסך.

משורטטים הגרפים של הפונקציה $y = 2^x$ ושל שיקופה בציר x.



א) רשום את החוקים ושרטט את הגרפים של שתי הפונקציות.	רשום את החוקים המתאימים והקש F2 לשרטוט.

ב) $(2.23\ ,\ 4.69)$ נקודה על גרף הפונקציה $y = 2^x$.

- השלם שיעור y של הנקודה על פונקצית השיקוף: (, 2.23)

$(0.015\ ,\ 1.010)$ נקודה על גרף הפונקציה $y = 2^x$.

- השלם שיעור y של הנקודה על פונקצית השיקוף: (, 0.015)

ג) רשום תכונות של פונקצית השיקוף:

- נקודת חיתוך עם ציר y.
- נקודת חיתוך עם ציר x.
- תחומי עליה/ירידה.
- התחומים בהם הפונקציה חיובית/שלילית.
- משוואת האסימפטוטה.

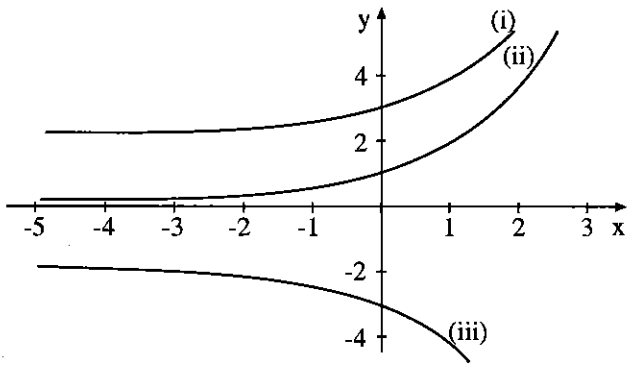
5. ללא מחשב.

משורטטים גרפים של פונקציות מעריכיות. רשום את החוקים של הפונקציות.

(i) $y =$

(ii) $y = 2^x$

(iii) $y =$



6. א) שרטט את הפונקציות הבאות:

$y = 5^x + 15$

$y = 5^x - 20$

$y = -5^x$

$y = -5^x + 20$

$y = -5^x - 10$

ALT F3

- הקש ALT ס

לאחר כל שינוי הקש ENTER.

___ ≤ x ≤ ___

___ ≤ y ≤ ___

- הקש F10 לביצוע שינויים.

לשם כך נקה את המסך ושנה סקלות.

ב) תאר במילים כיצד ניתן לקבל את הגרף של כל אחד מהחוקים הרשומים מהגרף $y = 5^x$ בעזרת הזזות ושיקופים.

7. א) שרטט את הפונקציות הבאות:

(i) $y = 2^x$

(ii) $y = 2^{-x}$

לשם כך נקה את המסך ושנה סקלות בהתאם לצורך.

ב) השלם את הערכים של כל פונקציה בנקודות הבאות:

(i) $(4, \_\_\_)$ $\quad (-\frac{1}{2}, \_\_\_)$

(ii) $(\frac{1}{2}, \_\_\_)$ $\quad (4, \_\_\_)$

בדוק את הערכים שרשמת.

הקש F7 להלוך.
העזר ב ↑↓ כדי לעבור להלוך מגרף אחד לשני.

ג) תאר במילים כיצד ניתן לקבל את הגרף של כל אחד מהחוקים הרשומים מהגרף של החוק השני.

ד) - הוסף את הגרף של (iii) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

- רשום מה הקשר של פונקציה (iii) עם הפונקציות (i), (ii)?

ה) - רשום בשני אופנים חוק של פונקציה שהיא שיקוף של הפונקציה $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ בציר y?

- בדוק באמצעות המחשב.

פעילות מספר 6: נגזרת של פונקציה מעריכית (בעזרת מתמטיx*)

פעילות זו מחליפה את המהלך בתרגילים 2, 1 בסעיף "אחת מהמשפחה" עמודים 189-190.

1. א) שרטט את גרף הפונקציה $y = 2^x$.	- רשום את החוק $y = 2^x$ והקש F2 לשרטוט.
ב) כדי לראות חלקים נוספים של גרף הפונקציה, שנה סקלות.	- הקש ALT ס (ביחד) לאחר כל שינוי הקש ENTER $(-4) \le x \le 4$ $0 \le y \le 16$ הקש F10 לביצוע השינויים.

- אנו מעוניינים לעסוק בשיפוע הפונקציה בנקודה (שיפוע המשיק), לשם כך נהלך על גרף הפונקציה בעזרת המשיק.

ג) - השלם שיעורי הנקודה (, 0)A .	- הקש F7 להלוך על הגרף. - הקש מ לקבלת משיק.
- רשום את שיפוע המשיק בנקודה A.	- על הגרף, משורטט משיק בנקודה. מצד ימין של המסך, מופיעים שיעורי הנקודה ומשוואת המשיק בנקודה.
"הלך" על הגרף וקרא שיעורי נקודות נוספות (ל-A) ושיפועי הפונקציה בנקודות אלו (שיפוע המשיק בנקודה). והשלם את הטבלה.	העזר בחיצים → ← .

* הוראות ההפעלה בגרסת חלונות מופיעות בנספח בעמוד 258.

x	0	1	2	2.5	3.2
y	1				
שיפוע המשיק בנקודה (y')					

- מה הסימן של שיפוע הפונקציה (שיפוע המשיק)?
- מה קורה לערכי השיפועים של הפונקציה כאשר הערך של x הולך וגדל?

- צא מהילוך על הגרף | - הקש ESC .
- נקה את המסך | - הקש F3.

2. הפונקציה הנגזרת מתארת את שיפועי הפונקציה המקורית בכל נקודה.
לפי מה שוודאי רשמת, בתרגיל הקודם, השיפועים חיוביים לכל ערך של x וגדלים כאשר x גדל, לכן הפונקציה הנגזרת, חיובית ועולה לכל ערך של x.

שרטט במחברתך גרף של פונקציה כזו, שהיא חיובית לכל x ועולה לכל x.

שרטטת ודאי פונקציה הדומה לפונקציה המתריכית עצמה, ואכן הפונקציה הנגזרת דומה לפונקציה עצמה.
*קיימת פונקציה מתריכית **השווה בדיוק** לנגזרת שלה.*
בתרגילים הבאים נמצא פונקציה מתריכית השווה לנגזרת שלה.

3. שרטט את גרף הפונקציה $y = 3^x$
"הלך" על הגרף והשלם את הטבלה

- הקש F2.
- הקש F7 ולאחר מכן מ.

x	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y							
שיפוע (y')המשיק בנקודה							

- מה תוכל לומר על ערכי השיפוע בהשוואה לערכי הפונקציה בכל נקודה, על פי הטבלה.
- חזור לטבלה וענה על אותה השאלה לגבי הפונקציה $y = 2^x$.

4. כפי שאמרנו אנו מחפשים פונקציה השווה בדיוק לפונקציה הנגזרת שלה. כפי שראית ערך a $(y = a^x)$ הוא בין 2 ל-3 . המשך לחפש פונקציה השווה לנגזרת שלה.

שלבי החיפוש:

א) בחר פונקציה $y = a^x$ (a בין 2 ל-3).
- הלך על הפונקציה בעזרת המשיק.
- השווה שיעור y לערך השיפוע המשיק בכל נקודה.

ב) נקה את המסך.
בחר פונקציה נוספת, עד שתגיע לפונקציה ששיעור y שלה בכל נקודה כמעט זהה לערך השיפוע בנקודה.
רשום אותה.

מצאת פונקציה מעריכית השווה בדיוק לנגזרת שלה. פונקציה כזו חשובה במתמטיקה ובפיזיקה. סימונה e^x כאשר e הוא בסיס הלוגריתם שמצאת.

5. ראינו כי עבור הערך שמצאת הנגזרת מתלכדת עם הפונקציה.

א) שער אם גרף הפונקציה "מעל או מתחת לגרף הנגזרת" כאשר

(i) $y = 2^x$

(ii) $y = 5^x$

(iii) $y = e^x$

ב) בדוק בעזרת המחשב:

- שרטט את $f(x) = 2^x$.
- שרטט את הגרף של $f'(x)$.
- מחק את הפונקציות שרשמת וחזור על פעולות השרטוט עבור הפונקציות (ii) ו-(iii).

- הקש $f(x) = 2^x$ הקש F2 לשרטוט.
- הקש $f'(x)$ ו F2 לשרטוט.

נספח: הוראות ההפעלה של הלומדה מתמטיא בגירסת חלונות

1. **רישום חוק של פונקציה**: מקליקים על תא רצוי בחלון "פונקציות" כדי להעבירו למצב עריכה (מסגרת עם רקע צהוב וסמן מהבהב בנקודת הכניסה) ומקלידים את הביטוי.
   לשרטוט: מקישים Enter.

2. **מחיקת גרפים**: לוחצים על לחצן מחק (ראה סרגל כלים ראשי), עומדים עם הסמן על גרף הפונקציה ומקישים Enter.

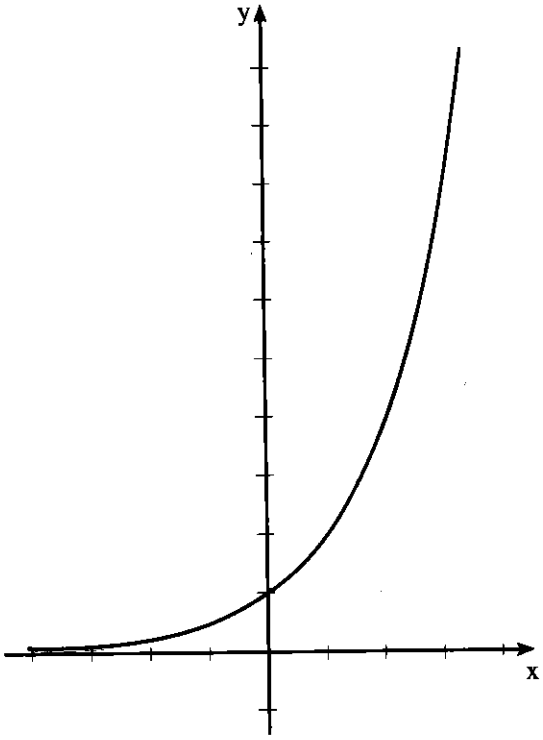
3. **שינוי סקלות**: באמצעות תיבת דו-שיח הנפתחת על ידי לחיצה על לחצן **תכונות הצירים** על סרגל כלים ראשי.

4. **הילוך על גרף**: נצמדים עם הסמן לגרף עד שיהפוך לצבע כחול. מקליקים קליק ארוך על הלחצן הימני של העכבר, יפתח חלון תפריט הקצור של האובייקט. בוחרים **נעילה על גרף** ומקישים Enter.

5. **הילוך עם משיק**: במצב **נעילה על הגרף** לוחצים על לחצן משיק וזזים על הגרף (על ידי העכבר או חיצים). בחלון **מידה** מופיעים: נקודת ההשקה, משוואת המשיק וגודל השיפוע.

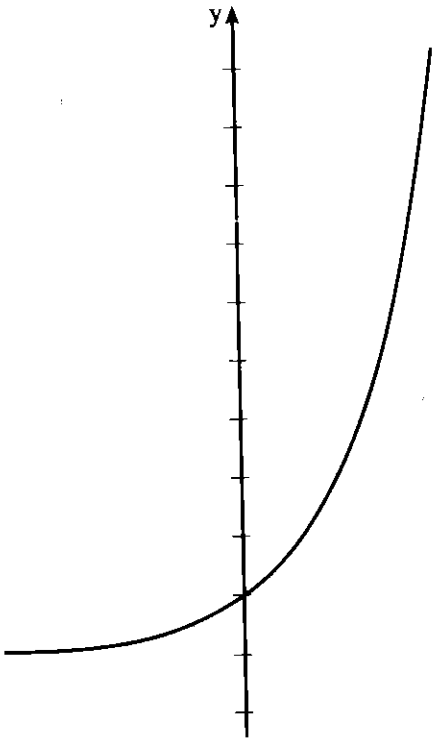
גרף שקוף 1 אי

מתאים לפונקציה $y = 2^x$

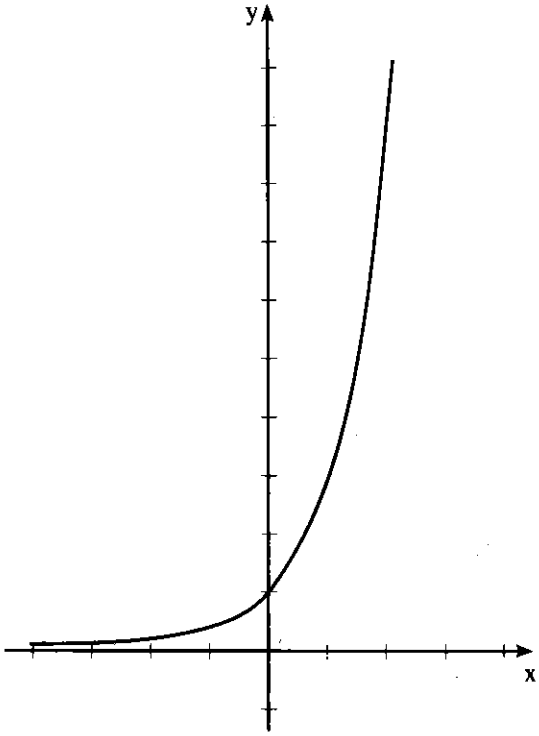


גרף שקוף 1 ב'

מתאים לפונקציה $y = 2^x$



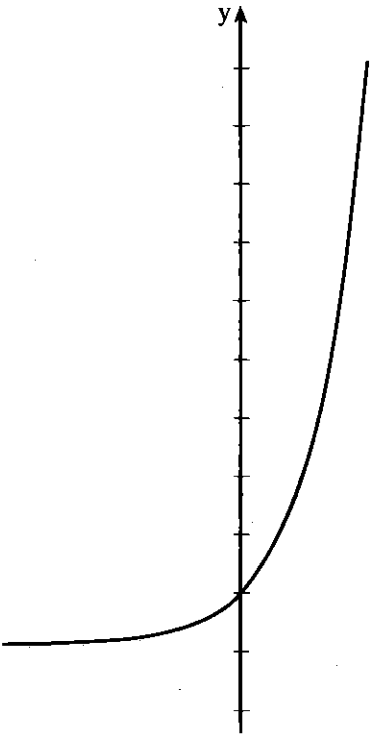
גרף שקוף 2 א'



מתאים לפונקציה $y = 3^x$

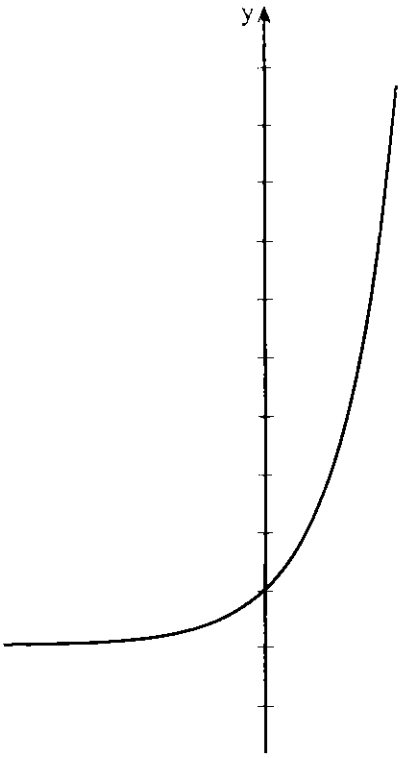
מתאים לפונקציה $y = 3^x$

גרף שקוף 2 ב'

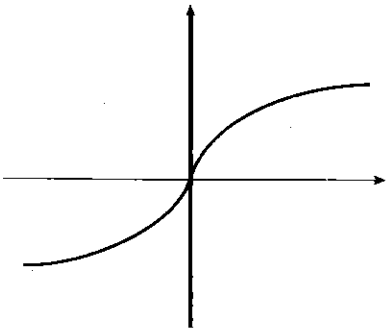


גרף שקוף 3

מתאים לפונקציה $y = e^x$

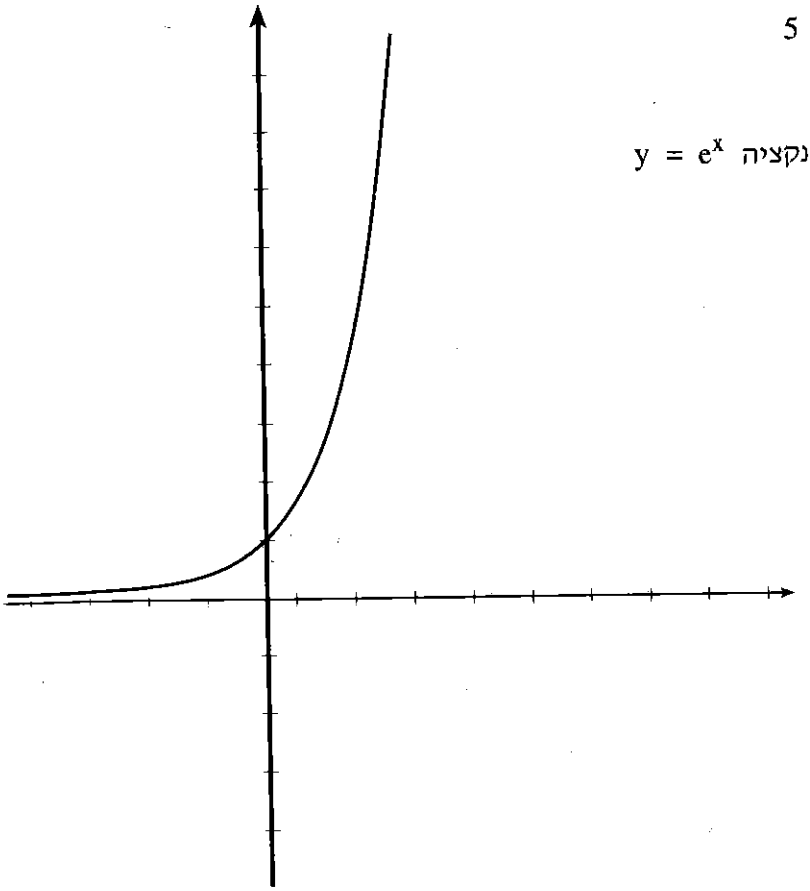


גרף שקוף 4



גרף שקוף 5

מתאים לפונקציה $y = e^x$



גרף שקוף 6