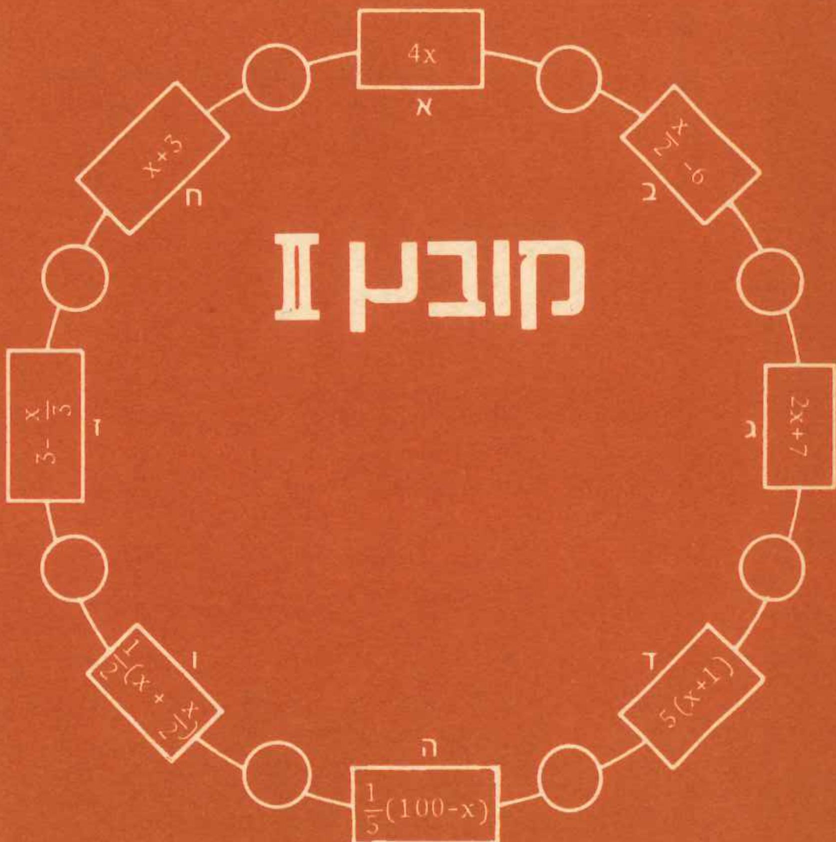
אוסף
עבודות סיכום

קובץ II



מדריך למורה

המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע -
רחובות

תוכן העניינים

גרפיקה: רחל בוקשפן שרטוט ועימוד: יהודה ברבוט

מורה יקר,

לפניך חוברת הדרכה ל"אוסף עבודות סיכום קובץ II" שיצא לתלמיד.

למי נועדו?
עבודות אלו נועדו מיסודן לתלמידי כיתה ט' רמה ב' בחטיבת הביניים הלומדים מתמטיקה לפי "תכנית רחובות".

בחוברת לתלמיד לא רשומה הסדרה "פרקים נבחרים במתמטיקה". נראה לנו שתלמידי רמה א' אשר אינם יכולים או אינם רוצים להתמודד עם השאלות המופיעות באוסף עבודות סיכום לרמה א' יפיקו תועלת מעבודות אלו. רצוי שהמורה יתאים את העבודות לכל תלמיד לפי כישוריו.

לשם מה?
במשך שנות לימודיו למד התלמיד מתמטיקה, כאשר החומר שעליו עבר היה מסודר בפרקים השונים לפי נושאים. הבעיות עליהן היה נדרש להשיב נגזרו בדרך כלל מנושא מוגדר היטב שאותו למד.
עבודות אלו כוללות בתוכן נושאים מתמטיים רבים. התלמיד צריך להחליט באילו מידיעותיו המתמטיות שרכש עד כה יוכל להשתמש. השאלות בנויות משלבים קטנים ויש בהן גילוי מודרך.

כיצד תבצע?
באוסף לתלמיד שבע עבודות. כל עבודה עוסקת בנושאים מתמטיים שונים. הכוונה היא שכל תלמיד יעסוק בחלק מן העבודות לפי יכולתו ואולי גם לפי בחירתו.

העבודה בעיקרה היא עבודה עצמית לתלמידים בבית ובכיתה. היחס בין הבית והכיתה תלוי בנסיבות. יש להסביר לתלמידים את מטרות העבודה, ודרכי ביצועה, הציון שינתן וכדומה. רצוי לעסוק, לפחות בעבודה אחת, במשך שעור או יותר בכיתה בהדרכת המורה כדי שהתלמידים יבינו מה נדרש מהם.

בעבודות המורכבות, חשוב לבקש מהתלמידים להגיש את עבודותיהם לביקורת אחרי שלב מסוים, כדי שניתן יהיה לברר את הטעון בירור עם המורה ולסייע לסיום מוצלח של העבודה. בסיום העבודה יגישה התלמיד למורה שיעריך אותה. רצוי שינתן ציון פורמלי.
בשלב מאוחר יותר, כדאי לדון בעבודות במסגרת הכיתה, להצביע על מגוון התשובות ולהציע דרכים נוספות.

פרטים על העבודות השונות:

העבודות אינן ברמת קושי אחת ורצוי לכוון תלמידים לעסוק בעבודות המתאימות להם. לגבי תלמידים חלשים רצוי שיתחילו מן הקל אל הכבד. יש שאלות הדומות לאלו שבאוסף הראשון (לרמה א') אלא שהן קלות יותר ומעובדות לרמה ב'.

העבודות לפי סדר קושי מן הקל אל הכבד הן: (הדירוג אינו מוחלט, יתכן שניתן לדרג אחרת).

עבודה מס' 2

עבודה מס' 5 (דומה מאד לעבודה מס' 7 של רמה א')

עבודה מס' 4 (דומה לעבודה מס' 5 של רמה א')

עבודה מס' 7

עבודה מס' 6

עבודה מס' 1

עבודה מס' 3

בחוברת זו תמצא תשובות והדרכה מקיפה ורחבה לכל העבודות. השתדלנו לתת בכל סעיף חלק מהאופנים השונים בהם אפשר ל"תקוף" אותו ולמצוא לו פתרון. התלמידים יציעו לך בודאי גם דרכים נוספות על אלו. אנא עודד אותם למצוא דרכים נוספות רבות ככל האפשר.

את אוסף העבודות לתלמיד וכן חוברת ההדרכה למורה, תוכל להזמין בכמויות הרצויות לך, במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן.

שים לב! את החוברת לתלמיד תוכל לפרק ולהפריד בין העבודות השונות, כך תוכל לחלק עבודות מאותה חוברת לתלמידים שונים.

ולסיום, אנו יודעים כי ביצוע נכון של עבודות אלו ידרוש מן המורה זמן ועבודה מרובה. אנו מקוים כי יהיו מורים אשר ימצאו כי ההשקעה כדאית, וכן ימצאו דרכים נוספות לשיפור עבודות אלו ואף רעיונות לעבודות נוספות.

נשמח לקבל הדים מכל סוג שהוא.

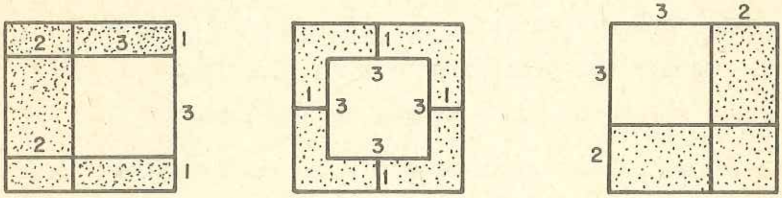
בברכה,

קבוצת המתמטיקה

פעילות אופיינית לעיסוק במתמטיקה היא מציאת השערות תוך כדי "משחק" במספרים ובדיקתן. אחרי שעוסקים במקרים פרטיים מנסים ליצור הכללה. פעילות כזו מוצעת לתלמיד בפרויקט הזה. בתחילה מקבלים תוצאות לגבי הגדלת צלע הריבוע ב 2 ס"מ וב 5 ס"מ ולבסוף חוקרים את המקרה הכללי עבור b המייצג מספר שלם כלשהו.

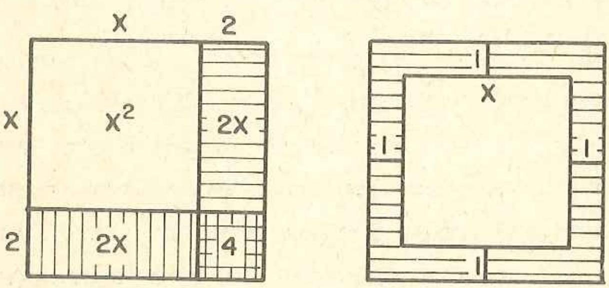
הנושאים שעליהם חוזרים תוך כדי פתרון השאלה הם: פישוט תבניות מספר, הצבה בתבניות מספר, בנית תבניות פסוק ומציאת קבוצת האמת שלהן ועוד.

I. א) סעיף זה הוא פשוט למדי ומובא כשלב המכין את סעיף ב' שהוא בעצם תחילת השאלה.
אפשר לשרטט באופנים שונים, למשל:



תוספת השטח 16 סמ"ר $5^2 - 3^2 = 16$

ב) שרטוטים מתאימים:
(יש אפשרויות אחרות)



ג) x מייצג את אורך צלעו של הריבוע הנתון, תבנית מספר לתוספת השטח:

$$(x + 2)^2 - x^2$$

על ידי פישוט נקבל תבנית מספר תואמת.

ניתן לפשט בדרכים שונות:

דרך אחת: $(x+2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4 = 4(x+1)$

השתמשנו ב: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

דרך שניה: $(x+2)^2 - x^2 = (x+2-x)(x+2+x) = 2(2x+2) = 4(x+1)$

השתמשנו ב: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

ד) סעיף זה הוא שלב מכין לסעיף הבא בו צריך להכליל.

לדוגמא: נציב $x = 12$ ונקבל שתוספת השטח היא 52 סמ"ר.

ה) נוח ביותר לבדוק את הטענות אם משתמשים בתבנית $4(x + 1)$

i) הטענה לא נכונה. במקרה זה מספיקה דוגמא נגדית אחת. ברור שהנימוק לנכונות ii או iii אף הוא מתאים כאן.

ii, iii) הטענות נכונות שהרי הצבת מספר שלם בתבנית $4(x + 1)$ נותנת כפולה של 4 שהיא כמובן גם זוגית.

iv) הטענה אינה נכונה. מספיקה דוגמא נגדית למשל זו שניתנה בד) לעיל. יהיו תלמידים שיחקרו את הטענה יותר ויגיעו למסקנה אשר בסעיף ו). האחרים יתבקשו לתת דעתם על כך בסעיף הבא.

ו) i) כאשר x מספר אי‏זוגי הפרש השטחים הוא תמיד כפולה של 2, 4, 8

נימוק: עבור x אי‏זוגי $x + 1$ זוגי ולכן $4(x + 1)$ הוא כפולה של 8. (ברור שהוא כפולה של 2 ושל 4).

ii) כאשר x מספר זוגי הפרש השטחים הוא תמיד כפולה של 2 ושל 4.

ז) אם נציב $x = 3$ הפרש השטחים הוא בדיוק 16 (תלמיד שלא יבין בדיוק מה עליו לעשות בסעיף זה, יזכר, אולי בסעיף א' לעיל).

המספרים הבאים הם 7, 11, 15 וכו'.

החוקיות היא שההפרש בין כל שני מספרים הוא 4 והמספר הראשון הוא 3.

למעשה קיבלנו פה סדרה חשבונית שאיברה הראשון 3 והפרשה 4. איברי הסדרה מתקבלים על ידי הצבה בתבנית המספר $3 + 4(k - 1)$

ח) תבנית פסוק מתאימה $4(x + 1) = 128$

$$x = 31$$

אורכה של צלע הריבוע הנתון הוא 31 ס"מ.

ט) ככל שצלע הריבוע הנתון גדולה יותר, תוספת השטח גדולה יותר.
אפשר להיעזר בחישובים שנעשו בסעיף ד) כדי לראות את הקשר. ניתן לנמק זאת ישירות מהשרטוט שבסעיף ב). רואים שתוספת השטח מורכבת מריבוע ששטחו 4 סמ"ר ומשני מלבנים שווים שאחת מצלעותיהם היא צלע הריבוע הנתון. לכן, ככל שאורך צלע הריבוע גדול יותר גם שטחי המלבנים גדולים יותר.
דרך אחרת לנמק היא בעזרת תבנית המספר שהתקבלה בסעיף ב). תוספת השטח מיוצגת על ידי תבנית המספר $4(x + 1)$ (או תבנית תואמת לה)
ככל שנציב מספר גדול יותר במקום x, תגדל תוצאת ההצבה, כלומר תוספת השטח גדולה יותר.
הערה: הפונקציה $f(x) = 4(x+1)$ היא פונקציה עולה.

י) הפרש השטחים הקטן ביותר הוא 8 סמ"ר.
ניתן להגיע לתוצאה זו מתוך השרטוט. המלבנים הקטנים ביותר האפשריים הם כאשר $x = 1$ ואז שטח שני המלבנים הוא 4 סמ"ר, שטח הריבוע המודגש 4 סמ"ר. מכאן הפרש השטחים הקטן ביותר הוא 8 סמ"ר.
שיקול אחר יכול להעשות בעזרת תבנית המספר: כאשר נציב $x = 1$ בתבנית המספר $4(x + 1)$ יתקבל המספר 8.

יא) תבנית פסוק מתאימה: $4x + 4 > 114$

$$4x > 110$$

$$x > 27.5$$

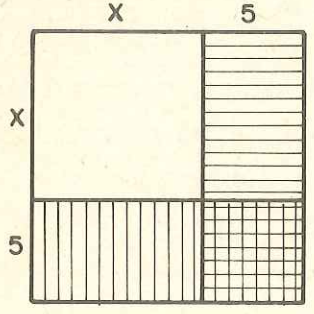
אורך צלעו של הריבוע הנתון עולה על 27.5 ס"מ, כלומר הוא לפחות 28 ס"מ.

יב) ככל שהצלע הנתונה גדולה יותר, תוספת השטח גדולה יותר. נציב 40 בתבנית המספר $4x + 4$ ונקבל 164, תוספת השטח הגדולה ביותר האפשרית היא 164 סמ"ר.

יג) יש אפשרויות רבות וכמובן שנעודד את התלמידים לענות על שאלות שהן בעלות ביצוע.
דוגמא: בכמה יגדל היקף הריבוע? (תשובה: 8 ס"מ).
דוגמא נוספת: אם ידוע שתוספת השטח היא בין 80 סמ"ר ל 160 סמ"ר מה תוכל לומר על אורך הצלע של הריבוע הנתון? תשובה: אורך הצלע הוא בין 19 מ' לבין 39 מ', $(19 \le x \le 39)$.

II. א) בחלק זה ניגשים לנושא מכיוון הפוך. אנחנו מצפים מהתלמיד לענות על שאלה זו על ידי ניחוש ובדיקה. יתכן שינחש מיד כי המספר הקבוע הוא 5 ויתכן שיהיו נסיונות אחדים.
ברור, (אך אין אנו מצפים מתלמיד ברמה ב', אולי מתלמיד ברמה א') שאפשר גם לגשת לבעיה בצורה כללית, לסמן את ההגדלה ב b ולמצוא תבנית להפרש השטחים $(x+b)^2 - x^2 = 2bx + b^2 = b(2x+b)$ ומכאן להסיק כי $b = 5$. את הפיתוח הזה יהיה על התלמיד לבצע בחלק III. תבנית המספר כתובה בתרגיל בצורה $5(2x + 5)$ ולא תבנית אחרת התואמת לה, כדי לרמוז לתלמיד להשתמש בצורה זו שתעזור לו בהסקת המסקנות בחלק III.

ב) שרטוט מתאים
(יש אפשרויות אחרות)



ג) ברור שכל המספרים מתחלקים ב 5.
קיימת אפשרות שתלמיד יבחר במקום x מספרים כאלו שתוספת השטח תהיה כפולה של 15 (למשל $x = 2, 5, 8$) ואז הוא יכול לקבל מסקנה לא נכונה. דוגמא זו מדגישה עד כמה חשוב שתלמיד יתרגל להוכיח טענות שהוא מקבל על ידי דוגמאות אחדות.

ד) לא. תוספת השטח היא בכל מקרה כפולה אי זוגית של 5, מאחר והתבנית $2x + 5$ מייצגת מספר אי זוגי.

ה) הכוונה שהתלמידים ינסחו בעצמם שאלות ויענו עליהן.
התלמיד צריך להסתמך על השאלות הנתונות בחלק I לגבי הגדלת הצלע ב 2 ס"מ ולשאול שאלות דומות לגבי הגדלת הצלע ב 5 ס"מ. יש לעודד תלמיד אשר ירצה לנסח את השאלות באופן שונה מזה המופיע ב I, או ירצה לשנות את המספרים, או ירצה להוסיף סעיפים נוספים.

(ח) אם משאירים את השאלה כמו שהיא. אזי תבנית הפסוק המתאימה היא:

$$5(2x+5) = 128$$
$$10x + 25 = 128$$
$$10x = 103$$
$$x = 10.3$$

מאחר ש x מייצג מספר שלם, אין מספר שלם שעבורו הפרש השטחים הוא 128 סמ"ר.

ניתן היה להגיע למסקנה זו על סמך הסעיפים הקודמים בהם רואים כי הפרש השטחים הוא כפולה של 5.

אפשר לשנות את המספר 128 ל-125 ואז $x = 10$. (קיימות אפשרויות נוספות).

(ט) השאלה והתשובה כמו בחלק I.

(י) השאלה כמו ב I.

תשובה: הפרש השטחים הקטן ביותר מתקבל עבור $x = 1$ והוא 35 סמ"ר.

(יא) השאלה כמו ב I.

תשובה: תבנית פסוק מתאימה $10x + 25 > 114$

$$10x > 89$$
$$x > 8.9$$

אורך צלעו של הריבוע הנתון הוא לפחות 9 ס"מ.

(יב) השאלה כמו ב I.

תשובה: נציב 40 בתבנית המספר $10x + 25$ ונקבל 425.

(יג) יש אפשרויות רבות.

III. בשלב זה מכלילים את השאלה לגבי b שהוא מספר שלם חיובי כלשהו.

הערה: בעבודת סיכום "ריבועים" לרמה א' מופיע טיפול לגבי b שהוא מספר ממשי כלשהו.

א) $(x+b)^2 - x^2 = x^2 + 2bx + b^2 - x^2 = 2bx + b^2 = b(2x+b)$

או בדרך שנייה: $(x+b)^2 - x^2 = (x+b-x)(x+b+x) = b(2x+b)$

התבנית $b(2x+b)$ מייצגת מספרים שהם כפולה שלמה של b (כאמור, x ו b מייצגים מספרים שלמים).

ב) לגבי b שהוא מספר אי זוגי התבנית $2x + b$ מייצגת מספר אי זוגי ולכן הפרש השטחים הוא כפולה אי זוגית של b. לגבי b שהוא מספר זוגי התבנית $2x + b$ מייצגת מספר זוגי ולכן הפרש השטחים הוא כפולה זוגית של b.

ג) תבנית הפסוק המתאימה $b(2x+b) = 175$
אם b מספר זוגי, אין פתרון שלם, כי 175 איננו כפולה של מספר זוגי.
נפרק את 175 לגורמים ראשוניים $175 = 5^2 \cdot 7$
b יכול להיות 1, 5, 7 או כפולות שלהם.
עבור $b = 1$ $2x + 1 = 175$ ולכן $x = 87$
עבור $b = 5$ $2x + 5 = 35$ ולכן $x = 15$
עבור $b = 7$ $2x + 7 = 25$ ולכן $x = 9$
אין טעם להמשיך מאחר וחייב להתקיים $2x + b > b$ (אחרת, מתקבל x שלילי).

ד) תבנית הפסוק המתאימה $b(2x+b) = 432$
נפרק את 432 לגורמים ראשוניים $432 = 2^4 \cdot 3^3$

אם b אי זוגי אזי $2x+b$ אי זוגי ומכפלתם אי זוגית ולא יכולה להיות 432. לכן b זוגי אבל אז גם $2x+b$ זוגי. ב 432 מופיע הגורם 2 ארבע פעמים ומאחר שב $2x+b$ מופיע הגורם 2 לפחות פעם אחת הוא יופיע ב b לכל היותר 3 פעמים.
b הוא, אם כך מספר זוגי שהוא כפולה של 2 ו 3 אבל מאחר ומתקיים $b < 2x+b$ הוא חסום על ידי 21 ($\sqrt{432} \cong 20.8$).

עבור $b = 2$	$2x + 2 = 216$	ולכן	$x = 107$
עבור $b = 4$	$2x + 4 = 108$	ולכן	$x = 52$
עבור $b = 8$	$2x + 8 = 54$	ולכן	$x = 23$
עבור $b = 6$	$2x + 6 = 72$	ולכן	$x = 33$
עבור $b = 12$	$2x + 12 = 36$	ולכן	$x = 12$
עבור $b = 18$	$2x + 18 = 24$	ולכן	$x = 3$

ה) x מסמן את הצלע של ריבוע שצלעותיו הוגדלו ב 8 ס"מ.

תוספת השטח $8(2x+8)$

y מסמן את הצלע של ריבוע שצלעותיו הוגדלו ב 2 ס"מ

תוספת השטח $2(2y+2)$

תבנית הפסוק המתאימה $2(2y+2) = 8(2x+8)$

נפשט ונקבל: $4y + 4 = 16x + 64$

$4y - 16x = 60$

$y - 4x = 15$ (כזכור, x ו y הם מספרים שלמים, חיוביים)

זוהי משוואה אחת בשני נעלמים ופתרונה איננו חד ערכי. בקבוצת האמת יש אינסוף זוגות סדורים. נרשום טבלה חלקית:

x	1	2	3	4	5	6	...
y	19	23	27	31	35	39	...
תוספת השטח	80	96	112	128	144	160	...

כדאי לשים לב לשלוש הסדרות החשבוניות שהתקבלו. מבחינה גרפית הזוגות (x, y) נמצאים על הישר $y = 4x + 15$. כל נקודה ששעוריה מספרים טבעיים מתאימה לזוג סדור בקבוצת האמת של התבנית.

בשאלה זו חוזרים על נושאים שנלמדו בכיתות ז', ח', ט'. פותחים בכתיב קבוצות ומסמנים נקודות במערכת צירים. הגדרת הקבוצות מאפשרת להגדיר פונקציות אשר התחום והטווח שלהן הוא קבוצת המספרים הממשיים. (עם הגבלה לגבי אפס בקבוצה C) הגרפים המתקבלים הם ישרים, היפרבולה ופרבולה. חיתוך הקבוצות הוא בעצם החיתוך של הגרפים והעיסוק בשני ה"מובנים" של חיתוך עשוי להגביר את הבנת המושג. את נקודות החיתוך אפשר למצוא על ידי פתרון אלגברי של מערכת משוואות, על ידי התבוננות בגרף וכן על ידי שיקולים הגיוניים הכוללים ניחוש ובדיקה.

א) יש אפשרויות רבות לבחירת הזוגות.

ג) נקודות הקבוצה A נמצאות על ישר שמשוואתו $y = x + 2$. נקודות הקבוצה B נמצאות על ישר שמשוואתו $y = 2x$.

ד) A: המספר השני בזוג גדול ב 2 מהמספר הראשון.

B: המספר השני בזוג גדול פי 2 מהמספר הראשון.

קבוצת החיתוך $A \cap B$ מכילה זוג אחד $(2, 4)$.

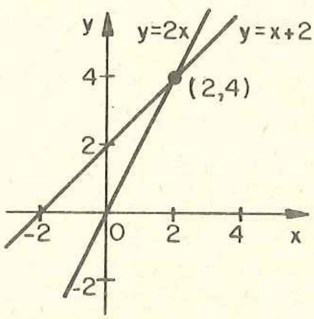
ניתן ל"גלות" זוג משותף זה על ידי ניחוש. אפשר להראות שאין זוגות נוספים משותפים ל A ו B גם בדרך אלגברית וגם על ידי שיקול גיאומטרי שהרי שני ישרים נחתכים רק בנקודה אחת.

בדרך אלגברית יש לפתור את "מערכת וגם" הבאה:

$$y = x + 2$$

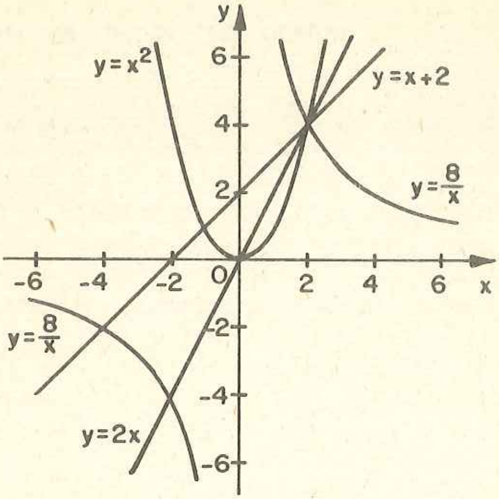
$$\underline{y = 2x}$$

בדרך גרפית משרטטים במערכת אחת את הישרים $y = x + 2$ $y = 2x$ ומוצאים את נקודת חיתוכם.



ה) גרף I מתאים לקבוצה C והוא נקרא היפרבולה.
גרף II מתאים לקבוצה D והוא נקרא פרבולה.
יש לשער שהתלמידים מכירים כבר את הפרבולה. כאשר ישוחח המורה עם התלמידים על עבודתם יאמר להם את שמות הגרפים, במידה ואינם יודעים.

ו)



ז) מתוך השרטוט אפשר למצוא את נקודות החיתוך של הגרפים השונים לפי המבוקש. יש להדגיש את החשיבות של הפתרון הגרפי. אפשר למצוא את שעורי נקודות החיתוך גם על ידי פתרון מערכות משוואות. מתקבלות מערכות לא ליניאריות ויתכן שיתעוררו קשיים בפתרונן. יש לעודד תלמיד המתקשה, לנסות ולנחש את הפתרון.

תשובות:

$$A \cap C = \{(-4, -2), (2, 4)\}$$

בדרך אלגברית יש לפתור את "מערכת וגם" הבאה:

$$y = x + 2$$
$$y = \frac{8}{x}$$

על ידי הצבה נקבל:

$$\frac{8}{x} = x + 2$$
$$8 = x^2 + 2x = x(x + 2)$$

אפשר לנחש את הפתרון ואפשר לפתור משוואה ריבועית

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2$$

נציב את ערכי x שמצאנו ונמצא את ערכי y

$$y_1 = -2 \qquad y_2 = 4$$

$$A \cap D = \{(-1, 1), (2, 4)\}$$

בדרך אלגברית יש לפתור את "מערכת וגם" הבאה:

$$y = x + 2$$

$$\underline{y = x^2}$$

גם כאן מתקבלת משוואה ריבועית

$$x^2 = x + 2$$

אפשר לפתור בעזרת הנוסחה או בעזרת פרוק לגורמים

$$x^2 - x = 2$$

$$x(x - 1) = 2$$

נפתור ונקבל: $x_2 = 2$ $\qquad x_1 = -1$

$$y_2 = 4 \qquad y_1 = 1$$

$$B \cap C = \{(-2, -4), (2, 4)\}$$

בדרך אלגברית יש לפתור את "מערכת וגם" הבאה:

$$y = 2x$$

$$\underline{y = \frac{8}{x}}$$

$$\frac{8}{x} = 2x$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$$

$$y_1 = -4 \qquad y_2 = 4$$

$$C \cap D = \{(2, 4)\}$$

יש לפתור את "מערכת וגם" הבאה:

$$y = \frac{8}{x}$$

$$y = x^2$$

כאן מתקבלת משוואה ממעלה שלישית קלה מאד לפתרון:

$$\frac{8}{x} = x^2$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

$$y = 4$$

גם מהשרטוט וגם מהפתרונות לעיל ברור כי הנקודה (2, 4) נמצאת על כל הגרפים ולכן $A \cap B \cap C \cap D = \{(2, 4)\}$

ח. הגרף של B הוא הגרף של הפונקציה:

g : {המספרים הממשיים} ← {המספרים הממשיים}

$$g : x \mapsto 2x$$

הגרף של C הוא הגרף של הפונקציה:

h : {המספרים הממשיים פרט ל 0} ← {המספרים הממשיים}

$$h : x \mapsto \frac{8}{x}$$

הגרף של D הוא הגרף של הפונקציה:

j : {המספרים הממשיים} ← {המספרים הממשיים}

$$j : x \mapsto x^2$$

מטרת סעיף זה היא לראות שהגדרת הקבוצות D, C, B, A בעצם מגדירה התאמה מהמספרים הממשיים אל המספרים הממשיים.

ט. פונקציה F עולה בתחום מסוים כאשר עבור x_1 ו x_2 בתחום זה מתקיים:

$$F(x_2) > F(x_1) \Leftarrow x_2 > x_1$$

פונקציה יורדת בתחום מסוים כאשר עבור x_1 ו x_2 בתחום זה מתקיים:

$$F(x_2) < F(x_1) \Leftarrow x_2 > x_1$$

הפונקציות f ו g עולות בכל תחומן שהוא - המספרים הממשיים.
הפונקציה h יורדת בתחום המספרים השליליים ויורדת בתחום המספרים החיוביים, אך אין היא פונקציה יורדת בכל תחום המספרים הממשיים בשל "חוסר הרציפות" בנקודה אפס. הסבר: אם ניקח שני ערכי x, אחד חיובי ואחד שלילי, למשל, $x_1 = -2$ $x_2 = 4$ $(x_2 > x_1)$ הרי שיתקיים $h(4) > h(-2)$ לכן אין לומר ש h יורדת בכל תחומה.

<u>הערה</u>: נהוג להגדיר במתמטיקה עליה וירידה של פונקציה בסביבת נקודה ולבדוק תחומי עליה וירידה. אין טעם להשוות ערכים משני צידי נקודות אי רציפות.

הפונקציה j יורדת בתחום המספרים השליליים ועולה בתחום המספרים החיוביים. בנקודה $x = 0$ יש לפונקציה מינימום.

י. יש אפשרויות שונות, רצוי לבקש שהגרפים יהיו מסוגים שונים.

עבודה זו משלבת הנדסה אנליטית והנדסה אוקלידית. התלמיד מגיע למסקנות מתוך התבוננות בשרטוט במערכת הצירים ומאמת אותן בדרך אנליטית. ההכללה נעשית בדרך של הנדסה אוקלידית.

מבנה העבודה: בחלק הראשון רוכש התלמיד שיטה למציאת שעורי אמצע קטע על מנת שלא יצטרך להסתמך רק על השרטוט בשלבים הבאים. בחלק השני מופיע מקרה פרטי של מרובע אשר מחיבור אמצעי צלעותיו מתקבלת מקבילית. בחלק השלישי מוכיחים בדרך אוקלידית משפט כללי האומר שאם מחברים לפי הסדר את אמצעי הצלעות במרובע מתקבלת מקבילית. מתלמיד חלש אפשר לבקש להגיע עד חלק זה בלבד. בחלק הרביעי מופיעים שלושה מרובעים שאלכסוניהם שווים והמרובעים הנוצרים מחיבור אמצעי הצלעות הם מעוינים. חלק זה נועד לכוון את החקירה בחלקים החמישי והששי שהם פחות מודרכים ועוסקים בחקירה לגבי מרובעים מיוחדים. תלמיד אשר ישלים את כל העבודה, גם אם ההוכחות שיתן לא תהיינה מלאות יקיף על ידי כך פרק רחב בהנדסה.

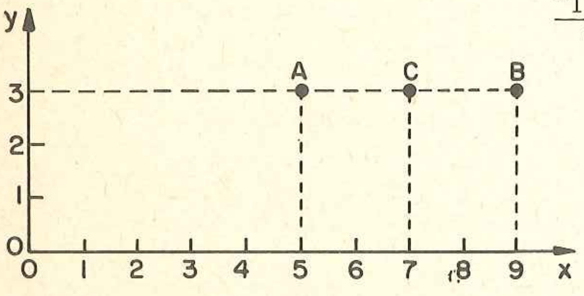
הנושאים לחזרה בהם עוסקים במהלך העבודה הם: מציאת מרחק בין שתי נקודות, מציאת משוואת ישר לפי שתי נקודות, תנאי ההקבלה של ישרים, מציאת נקודת חיתוך של ישרים, תכונות של מרובעים שונים, תנאים מספיקים והכרחיים לקבלת מרובעים מיוחדים והוכחות הנדסיות.

I. מטרת חלק זה היא לתת לתלמיד שיטה אלגברית למציאת שעורי אמצע קטע כאשר נתונים שעורי קצות הקטע. בחלקים הבאים של העבודה הוא יזדקק לכך. תלמיד המכיר את השיטה, ידלג על חלק זה ויתחיל מ II.

א) הממוצע של 9 ו 5 הוא 7 $\qquad \frac{9+5}{2} = 7$

הממוצע של 7- ו 2- הוא $-4\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{-7+(-2)}{2} = -4\frac{1}{2}$

הממוצע של x_1 ו x_2 הוא $\frac{x_1+x_2}{2}$



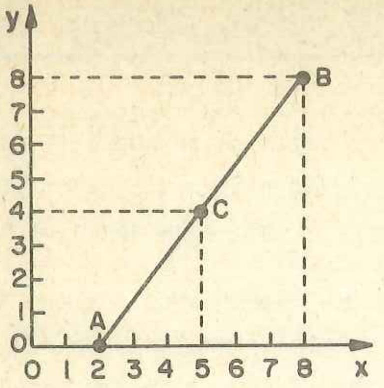
ב) $A(5,3)$ $\qquad B(9,3)$

$C(7,3)$

הנקודה C היא אמצע הקטע AB

זאת מאחר ו $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$

ג) $C(-3,6)$



ד) $A(2\ ,0)$ $B(8\ ,8)$

$C(5\ ,4)$

נחשב את המרחקים:

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(8-5)^2+(8-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

המרחקים שווים ולכן C היא אמצע הקטע AB.

ה) $C(1\ ,\ 0)$

ו) סעיף זה הוא קשה. יתכן שתלמיד ימצא תבנית מספר לשעורי הנקודה C אבל יתקשה בהוכחה לגבי שויון המרחקים או אפילו לא ירגיש שיש צורך בהוכחה.

$B(x_2\ ,y_2)$ $A(x_1\ ,y_1)$

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2} - y_1\right)^2}$$

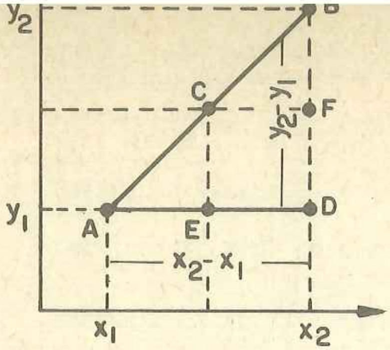
$$= \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2-2x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2-2y_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2}{4} + \frac{(y_2-y_1)^2}{4}}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2} - y_2\right)^2} = \sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2}{4} + \frac{(y_1-y_2)^2}{4}}$$

אבל $(x_2-x_1)^2 = (x_1-x_2)^2$ ו $(y_2-y_1)^2 = (y_1-y_2)^2$

ולכן $\overline{AC} = \overline{BC}$

ההוכחה שניתנה לעיל מסתמכת על מציאת מרחק בין שתי נקודות והיא קשה למדי. הוכחה פשוטה יותר מתקבלת בעזרת קטעים פרופורציונים במשולש.



בשרטוט שלפנינו

$A(x_1\ ,y_1)$

$B(x_2\ ,y_2)$

$D(x_2\ ,y_1)$

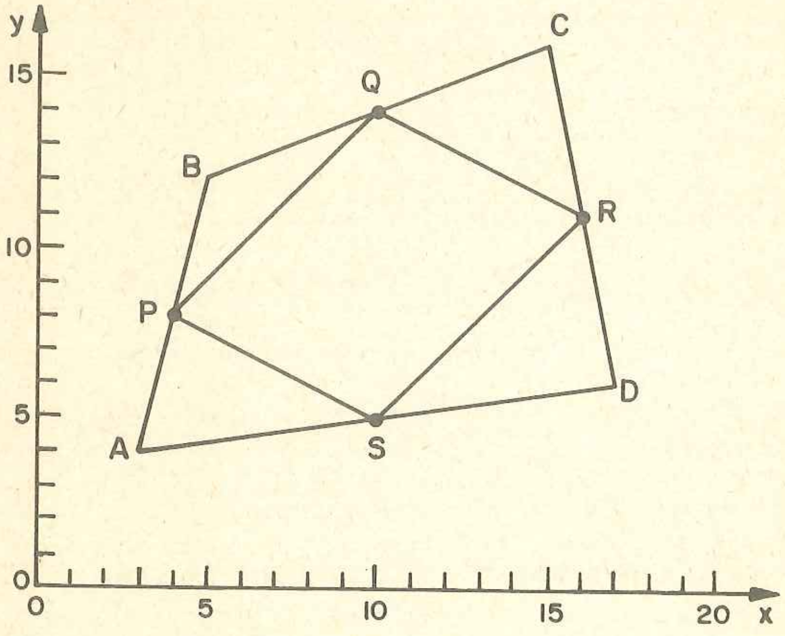
נמצא את שעור x של E שהוא אמצע AD: $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_2-x_1}{2} + x_1$; אם נעביר

דרך E מקביל ל BD הוא יחצה גם את AB ולכן שעור x של C הוא $\frac{x_1+x_2}{2}$

נמצא את שעור y של F שהוא אמצע BD: $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{y_2-y_1}{2} + y_1$; אם נעביר

דרך F מקביל ל AD הוא יחצה גם את AB ולכן שעור y של C הוא $\frac{y_1+y_2}{2}$

II. א)



ב) $P(4,8)$, $Q(10,14)$, $R(16,11)$, $S(10,5)$

ג) המרובע PQRS הוא מקבילית. הוכחה אנליטית לכך מתקבלת בסעיף ד).

ד) יש למצוא משוואות ישרים לפי שתי נקודות נתונות.

i) משוואת PQ: $y = x + 4$

משוואת SR: $y = x - 5$

לשני הישרים אותו השיפוע ולכן הם מקבילים.

ii) משוואת QR: $y = -\frac{x}{2} + 19$

משוואת PS: $y = -\frac{x}{2} + 10$

לשני הישרים אותו השיפוע ולכן הם מקבילים.

iii) במרובע PQRS יש שני זוגות צלעות מקבילות ולכן המרובע הוא מקבילית.

ה) משוואת AC: $y = x + 1$

משוואת BD: $y = -\frac{x}{2} + 14\frac{1}{2}$

הצלעות PQ ו SR מקבילות לאלכסון AC

" QR ו PS " " BD

ו) בעזרת התבנית למרחק בין שתי נקודות ששעוריהן נתונים נמצא את אורכי הקטעים

$$\overline{PQ} = \sqrt{(10-4)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

באותו אופן $\overline{SP} = 3\sqrt{5}$, $\overline{RS} = 6\sqrt{2}$, $\overline{QR} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

כלומר $\overline{PQ} = \overline{RS}$, $\overline{QR} = \overline{SP}$

ואמנם, הצלעות הנגדיות במקבילית שוות זו לזו.

ז) $\overline{AC} = \sqrt{12^2+12^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

$$\overline{BD} = \sqrt{12^2+(-6)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

אורכן של הצלעות PQ ו RS שווה למחצית אורך האלכסון AC

" " " QR ו SP " " " BD

<u>הערות</u>: i) ההשוואה בסעיפים ה), ז) נועדה להסב את תשומת הלב לקשר שבין האלכסונים וצלעות המרובע הנוצר מחיבור אמצעי הצלעות של המרובע המקורי.

ii) למרות שזה לא מופיע בשאלה, יתכן שתלמיד יראה גם את התכונה: האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.

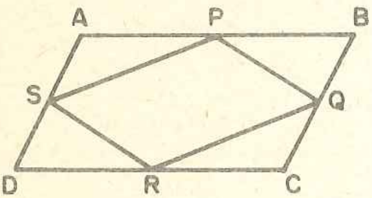
iii) המקבילית המתקבלת בחלק זה היא "רגילה" כלומר לא מעוין או מלבן שהן מקביליות מיוחדות. יפה יהיה, אם תלמיד יציין שזוהי "רק" מקבילית וינמק זאת בעזרת ארכי הצלעות והשיפועים.

III. א) בסעיף זה רואה התלמיד כי אין זה מקרה שהתקבלה מקבילית מחיבור נקודות האמצע של המרובע הנתון בחלק II. שם הוכיחו התלמידים בדרך אנליטית שאכן התקבלה מקבילית. אפשר לקבל בעזרת הנדסה אנליטית מסקנה כללית אם משתמשים בשעורים כלליים. לא נעשה זאת בשלב זה אלא נעזר בהנדסה אוקלידית כדי לקבל את המסקנה הכללית.

ב) המורה ישקול לגבי כל תלמיד אם הוא יכול להשלים את ההוכחה, גם תלמיד שידלג על ההוכחה האוקלידית יכול להמשיך לעסוק בחלקים הבאים, לפחות בחלק IV. אם המורה ימצא לנחוץ הוא יראה את ההוכחה בכיתה.

נשלים פה את ההוכחה:

<u>משפט</u>: אם מחברים לפי הסדר את אמצעי הצלעות של מרובע, המרובע המתקבל הוא מקבילית.



ציור 1

נתון: מרובע ABCD (ציור 1)

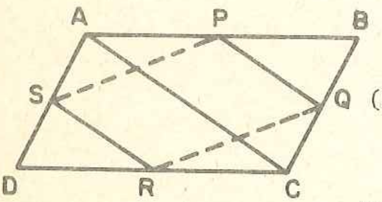
וכו' AP = PB

BQ = QC

CR = RD

DS = SA

צ"ל: המרובע PQRS הוא מקבילית.



ציור 2

הוכחה: נעביר את האלכסון AC (ציור 2)

במשולש ABC קיים $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$ (היחס שווה ל 1)

לפי המשפט ההפוך של משפט תלס

(פרקים נבחרים במתמטיקה, הנדסה II עמ' 17)

(פרקי מתמטיקה, הנדסה II עמ' 15)

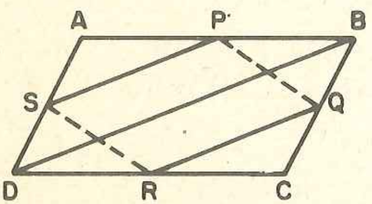
$PQ \parallel AC$

באותו אופן יתקיים במשולש ADC:

$SR \parallel AC$

משתי התכונות האחרונות נובע כי

$PQ \parallel SR$



ציור 3

נעביר את האלכסון BD (ציור 3)

ובאותו אופן נוכיח כי

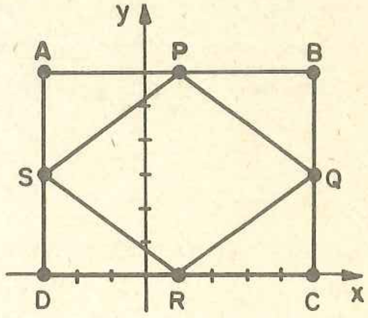
$SP \parallel QR$

אם כך במרובע PQRS שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות והמסקנה היא שהמרובע PQRS הוא מקבילית.

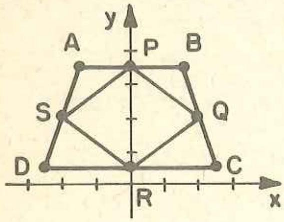
IV. שלושת המרובעים המתקבלים הם בעלי אלכסונים שווים והם נבחרו כדי לכוון בצורה ברורה את התלמיד לחשיבות שיש לאלכסונים בקביעת המרובע הנוצר מחיבור אמצעי הצלעות.

א) מרובע i הוא מלבן, מרובע ii הוא טרפז שווה שוקיים ומרובע iii הוא "סתם" מרובע בעל אלכסונים שווים.

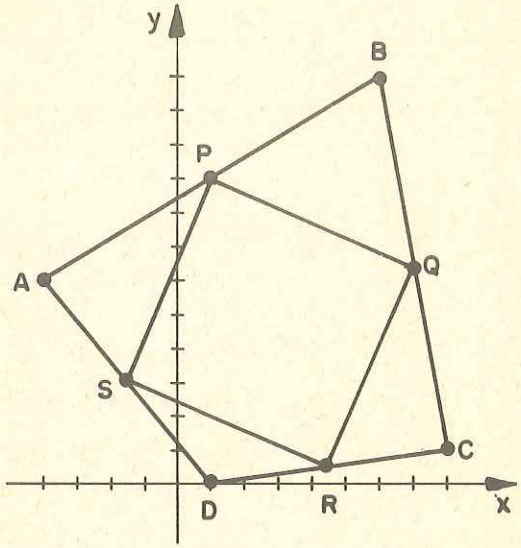
i



ii



iii



ב) בכל המקרים התקבלו מעוינים. תלמיד שיענה שהתקבלו בחלק (או בכל המקרים) מקביליות לא יטעה לגמרי שהרי מעוין הוא מקרה מיוחד של מקבילית וכבר ראינו בחלק הקודם שבכל מקרה מתקבלת מקבילית. מי שלא יבחין מתוך השרטוט שהמקביליות הן מיוחדות בודאי יראה זאת בעזרת סעיף ג'.

ג) (i $P(2,12)$ $Q(10,6)$ $R(2,10)$ $S(-6,6)$

$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = 10$

(ii $P(0,7)$ $Q(4,4)$ $R(0,1)$ $S(-4,4)$

$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = 5$

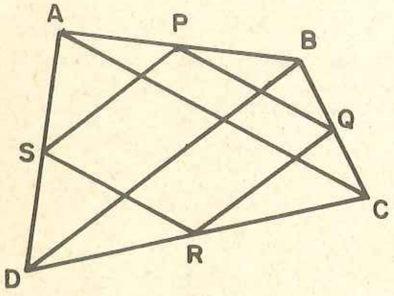
(iii $P(1,9)$ $Q(7,6\frac{1}{2})$ $R(4\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $S(-1\frac{1}{2},3)$

$PQ = QR = RS = SP = \sqrt{42.25}$

בכל המקרים כל הצלעות במקבילית הן שוות ולכן אלו מעוינים.

ד) כאמור, שלושת המרובעים PQRS הם מעוינים. המרובעים ABCD הם מסוגים שונים, אבל יש להם תכונה משותפת, אלכסוניהם שווים. (לגבי המלבן והטרפז שווה השוקיים קל לראות זאת, לגבי iii אפשר להווכח על ידי חישוב אורכי האלכסונים ו/או מדידה) יפה יהיה, אם תלמיד יגלה את הקשר בכוחות עצמו.
סעיף ז בחלק II נועד לעזור לו בכך, כי שם נתקל התלמיד (במקרה פרטי) בעובדה שצלעות המרובע הנוצר שוות למחצית אורך האלכסונים המתאימים של המרובע המקורי.

ה) <u>משפט</u>: אם מחברים לפי הסדר, את אמצעי הצלעות של מרובע שאלכסוניו שווים, המרובע המתקבל הוא מעוין.



נתון: מרובע ABCD
ובו $AC = BD$
P, Q, R, S אמצעי הצלעות
צ"ל: $PQRS$ מעוין.

הוכחה: בכל מרובע מתקבלת מקבילית מחיבור אמצעי הצלעות.
המשולשים ABC ו PBQ הם דומים ויחס הדמיון הוא 2.

לכן $\frac{1}{2}AC = PQ$

באופן דומה $\frac{1}{2}BD = QR$

היות והאלכסונים שווים $PQ = QR$

כלומר: הצלעות במקבילית $PQRS$ הן שוות ולכן זהו מעוין.

הערה: תלמיד שטרם למד דמיון משולשים, יתן אולי הוכחות פחות מדויקות.

V. בחלק זה של השאלה יעסוק כל תלמיד לפי יכולתו ומידת הענין שיגלה בנושא. בעזרת שרטוטים נאים יכולים לקבל את המסקנות המבוקשות. רצוי שהמורה יעודד כל אחד גם לנסות ולהוכיח את השערותיו.

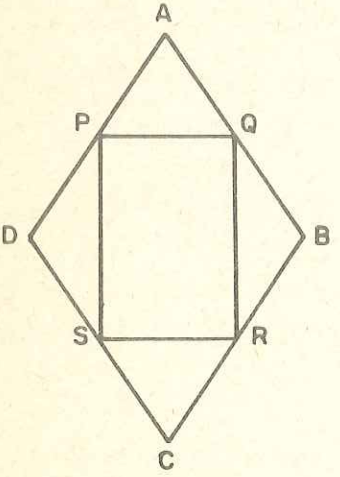
נפרט את התוצאות המתקבלות לגבי המרובעים השונים. בראש וראשונה זוכרים כי בכל מרובע מתקבלת מקבילית מחיבור אמצעי הצלעות.

i) אם נחבר לפי הסדר את אמצעי הצלעות במקבילית כלשהיא תתקבל מקבילית חדשה.
המקבילית הנתונה יכולה להיות כלשהיא, אפילו מקבילית מיוחדת אבל אנו יכולים להסתמך רק על היותה מקבילית. לפיכך, גם על המרובע הנוצר אנו יכולים להסיק רק את עובדת היותו מקבילית.

ii) אם נחבר לפי הסדר את אמצעי הצלעות בטרפז כלשהוא תתקבל מקבילית.

iii) אם נחבר לפי הסדר את אמצעי הצלעות בטרפז שווה שוקיים יתקבל מעוין.
זה מקרה מיוחד של המשפט שהוכח בסעיף ה' של החלק הקודם.

iv) אם נחבר לפי הסדר את אמצעי הצלעות במעוין כלשהוא יתקבל מלבן.
תוצאה זו היא חדשה ולא הופיעה קודם. נוכיח אותה.



נתון: מעוין ABCD
P, Q, R, S אמצעי הצלעות

צ"ל: PQRS מלבן
הוכחה: ברור ש PQRS מקבילית.
במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
AC BD
ראינו שמתקיימים $BD \parallel SR \parallel PQ$
$AC \parallel QR \parallel PS$
ולכן $PQ \perp RS$ (למשל)
המקבילית PQRS ישרת זווית, כלומר מלבן.

vi) אם נחבר לפי הסדר את אמצעי הצלעות בדלתון יתקבל מלבן.
האלכסונים בדלתון גם הם מאונכים זה לזה ובדומה למה שהוכחנו לגבי מעוין מוכיחים שהמרובע המתקבל הוא מלבן.

vii) אם נחבר לפי הסדר את אמצעי הצלעות בריבוע יתקבל ריבוע.

הוכחה: הריבוע הוא גם מלבן וגם מעוין. אם מחברים את אמצעי הצלעות במלבן מתקבל מעוין ואם מחברים את אמצעי הצלעות במעוין מתקבל מלבן ולכן אם מחברים את אמצעי הצלעות בריבוע מתקבל מרובע שהוא גם מלבן וגם מעוין, כלומר ריבוע.

VI. חלק זה בא לסכם את השאלה.

i) על מנת לקבל מקבילית מחיבור אמצעי הצלעות של מרובע אין לדרוש שיתקיימו בו תכונות מיוחדות.

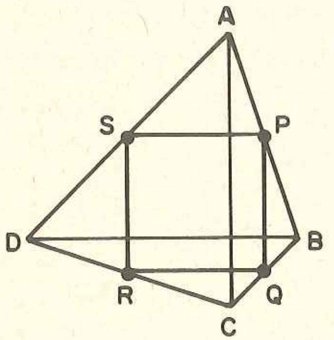
ii) טרפזים לעולם לא יוכלו להתקבל על ידי חיבור אמצעי צלעות של מרובע, כי הוכחנו שבכל מקרה מתקבלת מקבילית.

iii) מעוין יתקבל בכל מקרה שיוצאים ממרובע שאלכסוניו שווים זה לזה. בחלק IV היה התלמיד אמור להגיע למסקנה שאם במרובע המקורי האלכסונים שווים - המרובע הנוצר הוא מעוין.
צלעות המקבילית המתקבלת מחיבור אמצעי הצלעות במרובע נתון שוות באורכן לחצי האורך של האלכסונים המתאימים. במעוין כל הצלעות שוות ולכן גם האלכסונים צריכים להיות שווים.

iv) מלבן יתקבל בכל מקרה שיוצאים ממרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה. למסקנה זו צריך התלמיד להגיע בעצמו בעקבות תשובותיו בחלק v כאשר המרובעים הנתונים היו מעוינים ודלתונים. עליו להסיק שאם המרובע הנתון יהיה "סתם" מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה גם אז יהיה המרובע הנוצר מחיבור אמצעי הצלעות מלבן. הסיבה לכך היא שצלעות המקבילית המתקבלת מחיבור אמצעי הצלעות במרובע מקבילות לאלכסונים המתאימים במרובע הנתון.

v) דלתון לעולם לא יתקבל, כי הוא איננו מקבילית.

vi) ריבוע יתקבל בכל מקרה שיוצאים ממרובע שאלכסוניו שווים ומאונכים זה לזה (זה לא חייב להיות ריבוע, ראה ציור).



בשאלה זו עוסקים בקריאה מתוך גרף ובחישובי אחוזים. בחלקים השונים מופיעה תבנית האחוזים גם בצורת תבניות מספר וגם בצורת פונקציות. מאחר ונושא האחוזים נחשב ל"נושא קשה ומבהיל" הוא מופיע בשאלה מפורט לסעיפים קטנים ומדורג לפי קושי כדי שיקל על התלמיד להשתלט עליו.

I. א) פריט שנקנה ב 8 ל"י נמכר ב 10 ל"י.
פריט שנקנה ב 16 ל"י נמכר ב 20 ל"י.
פריט שנקנה ב 18 ל"י נמכר ב 22.5 ל"י.

ב) אחוז הרווח בכל מקרה הוא 25%.
חישוב לדוגמא לגבי פריט שנקנה ב 8 ל"י.

<u>דרך א'</u>: פריט שנקנה ב 8 ל"י נמכר ברווח של 2 ל"י.
2 מהווה 25% מ 8.

<u>דרך ב'</u>: בעזרת תבנית פסוק.
p מייצג את אחוז הרווח. תבנית פסוק מתאימה: $8 + \frac{8 \cdot p}{100} = 10$
מכאן, $p = 25$.

ג) שעורי הנקודה A: (12, 15)
12 הוא מחיר הקניה של פריט מסוים ו 15 הוא מחירו הרגיל של פריט זה.

ד) <u>הערה</u>: תלמיד אשר יוכל להגיע להכללה אחרי סעיף ג' לא חייב לבצע את ההוראה של סעיף ד' כלשונה.

ה) נקבל תשובות שונות:
שעור ה x של כל נקודה על הישר מתאר את מחיר הקניה של פריט מסוים ושעור ה y מתאר את מחירו של פריט זה ברווח של 25%.
לגבי כל נקודה שעור ה y גדול פי 1.25 משעור ה x.

ו) תבנית מספר למחירו של פריט זה כאשר הוא נמכר ברווח של 25% היא:

$$x + \frac{25x}{100} \quad \text{או} \quad 1.25x$$

ז) הפונקציה היא: $y = 1.25x$.
נבחר למשל בנקודות (12,15) ; (20,25)

מנת ההפרשים: $\frac{25 - 15}{20 - 12} = 1.25$

<u>הערה</u>: פונקציה ליניארית היא מהצורה $y = ax + b$. מאחר והישר עובר דרך הראשית אפשר להסיק מיד כי $b = 0$ ולמצוא רק את מנת ההפרשים שהיא 1.25.
תבנית המספר שמצאנו ב ו) נותנת את חוק ההתאמה של הפונקציה.

גם הסעיפים הבאים עוסקים בקריאה מגרף, חישובי אחוזים, תבניות מספר ותבניות פסוק בנושא האחוזים ופונקציות ליניאריות.

בחלק זה יש חזרה על שנעשה בחלק הקודם.

א) שעורי 'A: (12,9). 12 הוא מחיר הקניה של פריט מסוים ו 9 הוא מחירו במכירת החיסול. הפריט נמכר, אם כך, בהפסד.
חישוב אחוז ההפסד:
דרך א': ההפסד בל"י הוא 3. 3 מהווה 25% מ 12.
דרך ב': (בעזרת תבנית פסוק). p מייצג את אחוז ההפסד.
תבנית פסוק מתאימה: $9 = 12 - \frac{12 \cdot p}{100}$

$$p = 25$$

אחוז ההפסד: 25%

ב) אפשר להסתפק גם בפחות משלוש חזרות על סעיף א).

ג) שעור x של כל נקודה על הישר מתאר את מחיר הקניה של פריט מסוים ושעור y מתאר את מחירו של פריט זה בהפסד של 25%.

ד) תבנית מספר למחירו של פריט במכירת החיסול:

$$x - \frac{25x}{100} \quad \text{או} \quad 0.75x$$

ה) הפונקציה היא: $y = 0.75x$

תבנית המספר שמצאנו ב ד) נותנת את חוק ההתאמה של הפונקציה.

א) יתכן מאוד שתלמיד יתן בלי לחשב כתשובה לסעיף זה את הערך - 50%, שהוא <u>שגיאה</u> אופינית המתקבלת מחיבור 25% של הרווח ו 25% של ההפסד.
אז נבקש ממנו לבדוק זאת לגבי פריט שנקנה ב 20 ל"י.
פריט שנקנה ב 20 ל"י, מחירו הרגיל 25 ל"י ומחירו במכירת החיסול 15 ל"י. ניתנה הנחה של 10 ל"י שמהווה 40% מהמחיר הרגיל.
חישוב: p מייצג את אחוז ההנחה. תבנית פסוק מתאימה $10 = \frac{25 \cdot p}{100}$
אחוז ההנחה: $p = 40$

ב) המרחק בין A ו 'A הוא 6 יחידות. מרחק זה מתאר את ההנחה בל"י שניתנה במכירת החיסול.

ג) התשובה היא חיובית, כמובן.
יהיו תלמידים אשר ינמקו זאת על ידי חישוב דוגמאות נוספות של אחוז ההנחה ויקבלו בכל פעם 40%. תלמידים חזקים יותר ינמקו זאת אולי באופן הבא:
x מייצג את מחיר הקניה ששילם הסוחר עבור פריט כלשהו.
תבנית מספר למחירו הרגיל של פריט זה $1.25x$ (חלק I).
תבנית מספר למחירו של פריט זה במכירת החיסול $0.75x$ (חלק II).
ההנחה היא $1.25x - 0.75x = 0.50x$ ולפיכך אחוז ההנחה הוא:

$$\frac{0.50x}{1.25x} \cdot 100 = 40$$

ד) תבנית מספר למחירו של פריט זה במכירת החיסול היא:

$$0.60z \quad \text{או} \quad z - \frac{40z}{100}$$

נציב במקום z את התבנית $1.25x$ ונקבל $0.75x = 0.60 \cdot 1.25x$
וזוהי בדיוק התבנית שמצאנו בחלק II.

ה) אפשר לפתור על ידי קריאה בגרף וגם באופן אלגברי.
יש למצוא את המקור של 33 לפי הפונקציה $y = 0.75x$

$$33 = 0.75x$$

$$x = \frac{33}{0.75} = 44$$

מחיר הקניה 44 ל"י.
המחיר הרגיל הוא $(1.25 \cdot 44)$ 55 לירות ולכן ההנחה היא 22 ל"י
(ראה סעיף ז) להלן).

ו) גם כאן יתכן פתרון גרפי ואלגברי.
מצאנו ב ג) שההנחה היא $0.5x$
אם כן $0.5x = 7.5$

$$x = 15$$

המחיר המבוקש 15 לירות.

ז) גם מי שלא הגיע בדרך אלגברית (ראה סעיף ג') לעובדה שההנחה היא $0.5x$ יכול לשער כי בכל מקרה ההנחה היא מחצית מחיר הקניה.

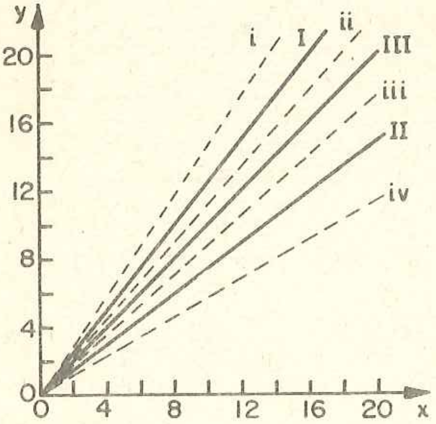
ח) דוגמא: על ישר I (18 ,22.5)
על ישר II (30 ,22.5)

(יש להעביר קו מקביל לציר x ולמצוא את נקודת החיתוך עם כל אחד מהגרפים).

ט) לא יתכן, כי אחוז ההנחה הוא 40%. כדי שהמחיר הרגיל יהיה כפול מהמחיר במכירת החיסול צריכה להיות הנחה בת 50%.

י) אם היחס בין מחירי הקניה של שני פריטים הוא 4 אזי גם היחס בין מחיריהם במכירה הרגילה וגם במכירת החיסול הוא 4. מאחר והישרים מתארים התאמה ביחס ישר, היחס בין מחירי הקניה של שני פריטים שווה ליחס בין מחירי המכירה של שני פריטים אלו.

א) משוואת הישר III הוא: $y = x$



ב) מתוך הגרף רואים כי הישר I המתאר מכירה ברווח נמצא מעל לישר $y = x$ והישר II המתאר מכירה בהפסד נמצא מתחת לישר $y = x$.

בשרטוט מופיעים ישרים נוספים כמבוקש.

i) ישר הנמצא מעל לישר I

ii) ישר הנמצא בין I ו III

iii) ישר הנמצא בין II ו III

iv) ישר הנמצא מתחת ל II

הפונקציות המתארות ישרים אלו הן מהצורה $y = ax$ $(a > 0)$

אם $0 < a < 1$ הפונקציה מתארת מכירה בהפסד.

אם $a > 1$ הפונקציה מתארת מכירה בהפסד.

קיים קשר בין השיפוע ואחוז הרווח או ההפסד המאפשר מציאת האחוז בעזרת השיפוע.

אם a מייצג את השיפוע, התבנית $100(a-1)$ מתארת את אחוז הרווח או ההפסד בהתאם לסימן.

לדוגמא: הישר המסומן בשרטוט ב iv) משוואתו $y = 0.5x$, $0 < 0.5 < 1$

ולכן הוא מתאר מכירה בהפסד. $0.5x = x - \frac{p \cdot x}{100}$

נצמצם ב x, נפתור ונקבל $p = 50$

אפשר להסיק זאת גם בלי חישוב, על סמך הנסיון בסעיפים הקודמים.

I. תוך כדי פתירת התרגיל מבססים את המושג קבוצת האמת של תבנית פסוק. יש לשים לב לכך שכאשר תבנית הפסוק היא במשתנה אחד מופיעים מספרים בקבוצת האמת, וכאשר תבנית הפסוק היא בשני משתנים מופיעים בקבוצת האמת זוגות סדורים של מספרים. נמצא תחילה את קבוצות האמת של תבניות הפסוק הנתונות:

א) $\lvert x\rvert \le 0$	קבוצת האמת:	$G = \{0\}$
ב) $x + 1 = 0$	קבוצת האמת:	$F = \{-1\}$
ג) $x^2 + x = 0$	קבוצת האמת:	$B = \{0, -1\}$
ד) $x + y = 0$ $x - y + 2 = 0$	קבוצת האמת:	$E = \{(-1, 1)\}$
ה) $x + y + 1 = 0$ $x - y - 1 = 0$	קבוצת האמת:	$H = \{(0, -1)\}$
ו) $x + y = 0$ $-x + y + 2 = 0$	קבוצת האמת:	$D = \{(1, -1)\}$
ז) $x + y + 1 = 0$ $2x + 2y + 1 = 0$	קבוצת האמת היא הקבוצה הריקה	$A = \{\ \}$
ח) $\lvert x\rvert = 1$	קבוצת האמת:	$C = \{-1, 1\}$

II. עתה חוזרים על מושגים ועל פעולות בקבוצות: הכלה, איחוד וחיתוך. תוך כדי מתן התשובות נזכרים כי הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה אחרת, איחוד של קבוצה כלשהי P עם הקבוצה הריקה היא הקבוצה P, חיתוך של קבוצה כלשהי עם הקבוצה הריקה היא קבוצה ריקה. כן מודגש גם ההבדל בין הקבוצה C, הכוללת שני מספרים, והקבוצה E הכוללת זוג סדור של מספרים וכו'.

א) $A \subset C$ אמת	ב) $A \subset E$ אמת	ג) $C = E$ שקר
ד) $E = D$ שקר	ה) $F \subset C$ אמת	ו) $G \subset H$ שקר

ז) $F \cap C = F$
אמת

ח) $C \cap H = F$
שקר

ט) $G \cap H = G$
שקר

י) $A \cap C = A$
אמת

יא) $C \cap D = A$
אמת

יב) $B \cap C = F$
אמת

יג) $D \cup E = C$
שקר

יד) $F \cup G = H$
שקר

טו) $A \cup H = H$
אמת

טז) $F \cup G = B$
אמת

יז) $G \cup B = B$
אמת

יח) $B \cup C = C \cup G$
אמת

II. א) $A \cap F = A$
אמת

ב) $D \cup F = F$ או $D \cap F = F$
שקר שקר

ג) $A \cup F = A$
שקר

ד) $C \cup F = C$
אמת

ה) $B \cup C = F$
שקר

ו) $A \cup F = B \cap C$
אמת

נושא עבודה זו הוא תכנון ליניארי. התלמיד צריך להרכיב מערכת תבניות פסוק ליניאריות בשני משתנים ולשרטט את גרף קבוצת האמת. מתוך זה עליו להסיק מסקנות. יש להכין נייר פוליו משובץ או נייר מילימטרי ולשרטט עליו את הנדרש.

שימוש בשקפים הוא מועיל מאד בנושא התכנון הליניארי. נוח לעבוד בשיטת הרובדים (בה מניחים בכל שלב שקף על השלב הקודם) ועל ידי כך מתקבלת קבוצת האמת. המורה יכול להכין שקף מתאים לכל אחד משלושת חלקי הפרויקט או להכין רק את הראשון ולבקש מתלמידיו להכין את האחרים.

לסיכום כל חלק אפשר לעסוק בשקף בשני הכיוונים, גם ליצור את קבוצת האמת וגם לפרק אותה לתבניות הפסוק היוצרות את המערכת. חשוב שהתלמיד יעסוק בשני הכיוונים.

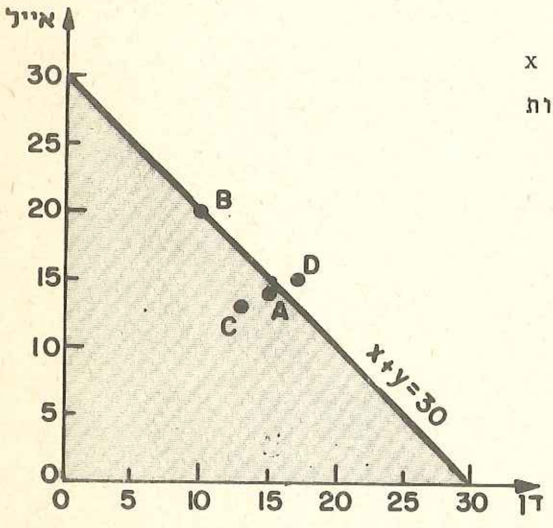
I. א) i) (7, 21) - דן ניצח; 2 נמנעים

ii) (12,18) - אייל ניצח; אין נמנעים

iii) (13,13) - תיקו; 4 נמנעים

iv) הזוג (13,23) אינו תוצאה אפשרית כי סכום הקולות אינו יכול לעלות על 30.

v),vi) יש אפשרויות רבות.



ב) i) תבנית הפסוק $x + y \leqslant 30$

x ו y אינם יכולים להיות שליליים, לכן מדובר רק ברביע הראשון. בדרך אלגברית יש לרשום:

$x \geqslant 0$ וגם $y \geqslant 0$

חשוב לציין ש x ו y מייצגים מספרים שלמים

ii) ראה שרטוט

iii) למשל, A(15,14)

iv) למשל, B(10,20)

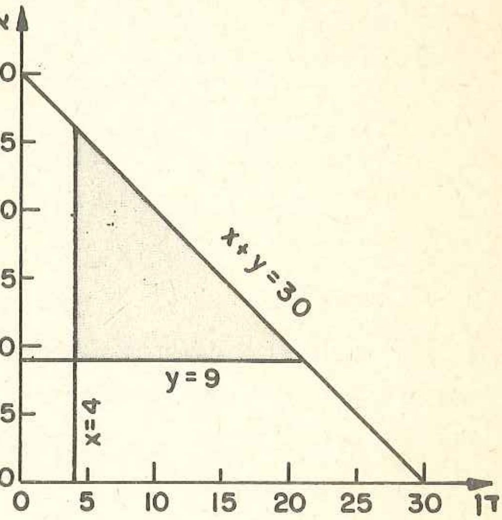
v) למשל, C(13,13)

vi) למשל, D(17,15)

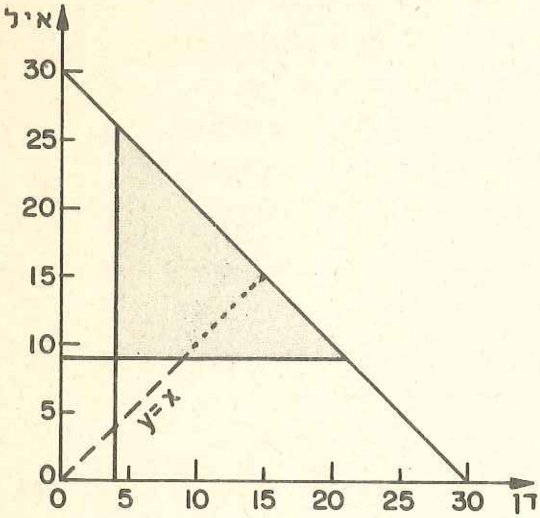
ג) תבניות הפסוק החדשות הן: $x \geqslant 4$ ו $y \geqslant 9$ והמערכת כולה היא:
$x + y \leqslant 30$ וגם $x \geqslant 4$ וגם $y \geqslant 9$ יהיו תלמידים שיכתבו:
$x + y \leqslant 30$ וגם $x \geqslant 4$ וגם $y \geqslant 9$ וגם $x \geqslant 0$ וגם $y \geqslant 0$
וגם זו תהיה תשובה נכונה. גרף קבוצת האמת של המערכת הוא המשולש המודגש, כולל צלעותיו. (ציור א).

i) דוגמאות לנצחונות של דן: (19,11) (15,11) (14,13)
דוגמאות לנצחונות של אייל: (8,22) (6,22) (12,13)

ii) הנקודות המתאימות לתוצאות תיקו אשר בחלק המודגש הן:
(9,9) (10,10) ...... (15,15) (ציור ב').
נקודות אלו נמצאות על הישר שמשוואתו $y = x$.



ציור א'

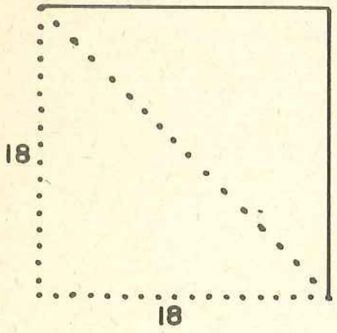


ציור ב'

iii) נקודות הנמצאות מעל לישר $y = x$ מתארות נצחונות של אייל כי עבורן קיים $y > x$. הנקודות שמתחת לקו $y = x$ מתארות נצחונות של דן. מהשרטוט רואים שיש לאייל יותר סיכויים להבחר. עובדה זו מוסברת על ידי כך שיש לאייל יותר קולות בטוחים מלדן.

iv) יש 171 תוצאות אפשריות של הבחירות.
אפשר להגיע לכך על ידי ספירה פשוטה של הנקודות בחלק המודגש ששעוריהן מספרים שלמים. (התלמיד עובד על נייר משובץ או מילימטרי). יהיו תלמידים שיחפשו דרכים מחוכמות יותר למציאת מספר הנקודות. המורה יכול לעזור ולהראות כיצד סופרים

נקודות שריג במשולש.
משלימים את הצורה לריבוע.
בכל שורה יש 18 נקודות ויש 18 שורות. (על האלכסון יש 18 נקודות שריג) מספר הנקודות הכללי הוא $18 \cdot 18$ מחצית מספר זה נותנת לנו רק את הנקודות שמתחת לאלכסון ומחצית הנקודות שעל האלכסון. לנו דרושות כל הנקודות של האלכסון, לכן המספר המבוקש הוא $\frac{18 \cdot 18}{2} + 9 = 171$



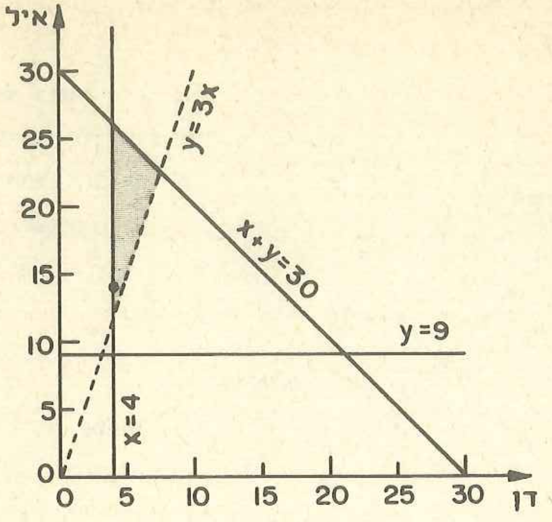
דרך אחרת היא למצוא את סכום המספרים הטבעיים מ 1 עד 18. זאת עושים על ידי יצירת 9 זוגות: המספר הראשון עם האחרון, השני עם זה שלפני האחרון וכו'. הסכום של כל זוג הוא 19. כופלים במספר הזוגות והתוצאה $19 \cdot 9 = 171$.

v) אייל מנצח ב 122 אפשרויות ודן מנצח ב 42 אפשרויות (יש 7 תוצאות שהן תיקו).

vi) סיכויי הבחירה באחוזים של אייל $\frac{122 \times 100}{171} \simeq 71.3\%$

סיכויי הבחירה באחוזים של דן $\frac{42 \times 100}{171} \simeq 24.5\%$

ד) המערכת המתאימה היא:
$x + y \leqslant 30$ וגם $x \geqslant 4$ וגם $y \geqslant 9$ וגם $y \geqslant 3x$
גרף קבוצת האמת הוא המשולש המודגש, רק שתיים מצלעותיו מודגשות. הצלע השלישית איננה בקבוצת האמת כי $y > 3x$.



i) למשל, (6,22), (6,24), (5,20)

ii) יש 32 אפשרויות לתוצאות של הבחירות.

iii) התוצאה שבה מספר המצביעים הוא קטן ביותר הוא (4,13). (הנקודה מסומנת בשרטוט).

II. א) הזוגות (12,28) ו (20,19) אינם מתאימים, כי סכום השעורים גדול מ 36. לגבי שאר הזוגות נחשב את אחוז ההצבעה:

(14,13) - 75% $(\frac{27}{36}\times 100)$	(9, 9) - 50%
(11, 7) - 50%	(25, 7) - 88% ∿
(5, 4) - 25%	(23,10) - 92% ∿
(20, 7) - 75%	(25,11) - 100%

פרט לזוג (5 ,4) יסומנו כולם בשרטוט.

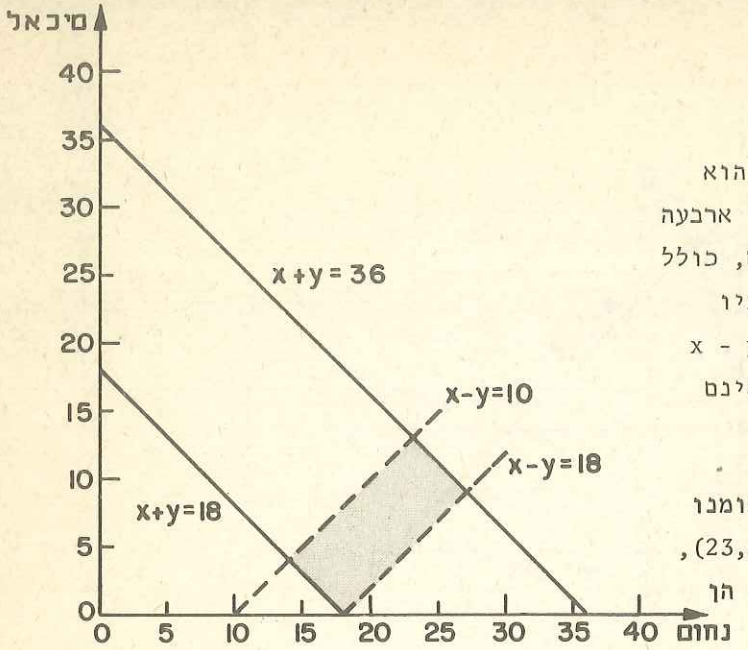
ב) המערכת היא:

$x + y \leqslant 36$ וגם $x \geqslant 0$ וגם $y \geqslant 0$ וגם $x + y \geqslant 18$

וגם $x - y > 10$ וגם $x - y < 18$.

התאור הגרפי:

התלמיד יכול לשרטט מערכת צירים חדשה ולשרטט בה את הגרף של תבנית הפסוק המורכבת, או להשתמש בשרטוט שהכין בחלק א' והנקודות המסומנות תעזורנה לו במקצת.



גרף קבוצת האמת הוא המלבן הנוצר בין ארבעה הישרים המתקבלים, כולל רק שתיים מצלעותיו (הישרים $x - y = 10$ ו $x - y = 18$ אינם בקבוצת האמת).

ג) מבין הנקודות שסומנו בחלק א' רק $(23,10)$, $(20,7)$, $(25,11)$ הן בקבוצת האמת.

ד) מובן שבבחירות ניצח נחום. אפשר לדעת זאת מה"סיפור" שבחלק ב' וכן אפשר לראות זאת מן הגרף כי קבוצת האמת היא מתחת לישר $y = x$, אשר אמנם לא מופיע בשרטוט זה אבל הופיע בחלק I וכדאי להזכר בו בסעיף זה.

III. חלק זה בשלמותו מתאים לתלמיד חזק, אולם כל אחד יכול לקבל חלק מהתבניות בעקבות מה שעשה בשלבים הקודמים. מי שמתקשה לענות על א', אפשר להציע לו לעסוק בחלק ב'. מסקנות פשוטות יכול כל אחד למצוא.

א) תבנית הפסוק:

$x + y < 35$ וגם $y > 15$ וגם $y > x + 10$ וגם $y < 5x$

יש לרשום מהו מספר התלמידים בכיתה, מי משתתף, מהו x ומהו y ולתרגם למילים את התבניות.

הערה: כדי להקל על מציאת משוואות הישרים סומנו בשרטוט שעורי נקודות על הישרים $y = x + 10$ ו $y = 5x$.

ב) נביא לדוגמא כמה מסקנות אפשריות.

i) אחוז המצביעים (שלא נמנעו) עולה על 50%.

ii) התלמיד שמספר הקולות שקיבל מסומן ב y ניצח בבחירות.

iii) הפרש הקולות הקטן ביותר הוא 11 והגדול ביותר 22.

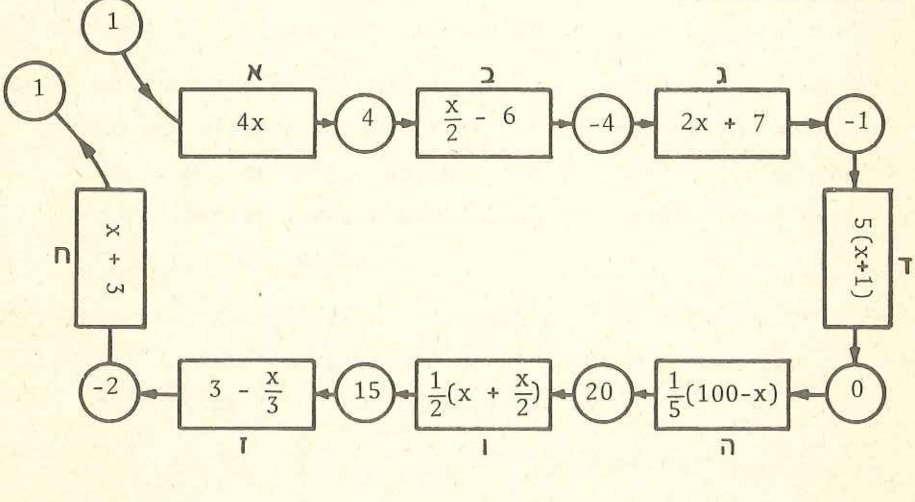
IV. יש אפשרויות רבות.

הרקע המתמטי של השאלה הוא הרכבת פונקציות. נושא זה איננו מופיע ברמה ב' אבל ניתן להפיק תועלת, ענין והנאה מהעבודה גם בלי להתעמק בנושא הרכבת הפונקציות. על כל פנים, כדי שהתלמיד לא יתיחס למעגל של התבניות כמעגל "קסם" מופיעה בחלק IV הדרכה מדורגת מאד להבנת המבנה של המעגל שמתבססת על הצבת תבניות מספר ליניאריות בתבניות מספר ליניאריות ובחלק V התלמיד מתבקש לבנות מעגלים כאלו בעצמו.
הנושאים לחזרה המופיעים בשאלה הם: תבניות מספר, הצבה בתבניות מספר, פונקציות ליניאריות וגרפים שלהן, פונקציה הפוכה.

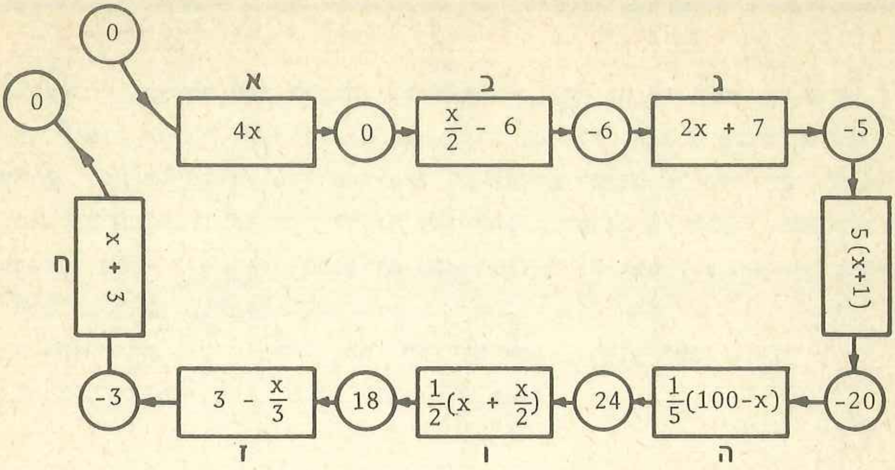
במעגל שהופיע בשאלה ניתן להסתובב רק בכיוון השעון. אפשר לבנות מעגל "קסמים" שבו מותר להסתובב בשני הכיוונים. מי שמתעניין יוכל למצוא טיפול בנושא ודוגמאות במאמר "תבניות מספר במעגל סגור" שמופיע בשבבים, תיק מס' 9.

I. התלמיד הכיר את תבנית המספר כמכשיר ליצירת מספרים, אם מכניסים לתבנית (א) מספר מסוים מתקבל מספר שהוא תוצאת ההצבה, מספר זה יכול להכנס למכשיר (ב) שאף הוא תבנית מספר ותוצאת הצבתו היא המתקבלת ביציאה.
במכונות מתמטיות האינפורמציה הנכנסת נקראת קלט והיוצאת נקראת פלט. במעגל שלפנינו יש שמונה "מכונות", מכניסים קלט לראשונה ואת הפלט שלה מכניסים לשניה וכך הלאה.
לצורך הגדלת הענין והאפשרויות בתרגיל נבחרה קבוצת תבניות מיוחדת כזו שהקלט של הראשונה הוא גם הפלט של השמינית. זה מצדיק את הסידור במעגל סגור. אם מציבים מספר כלשהו בתבנית (א) וממשיכים לפי ההוראות, מתקבל בסוף אותו המספר.

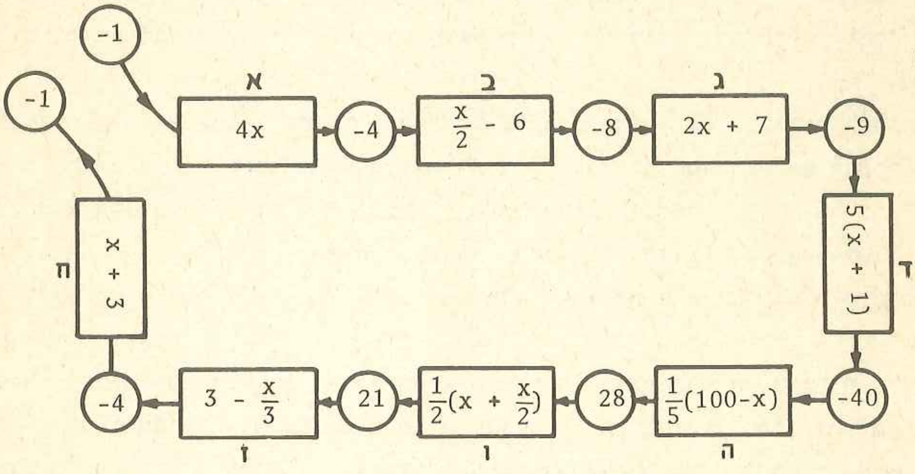
א)



ב)



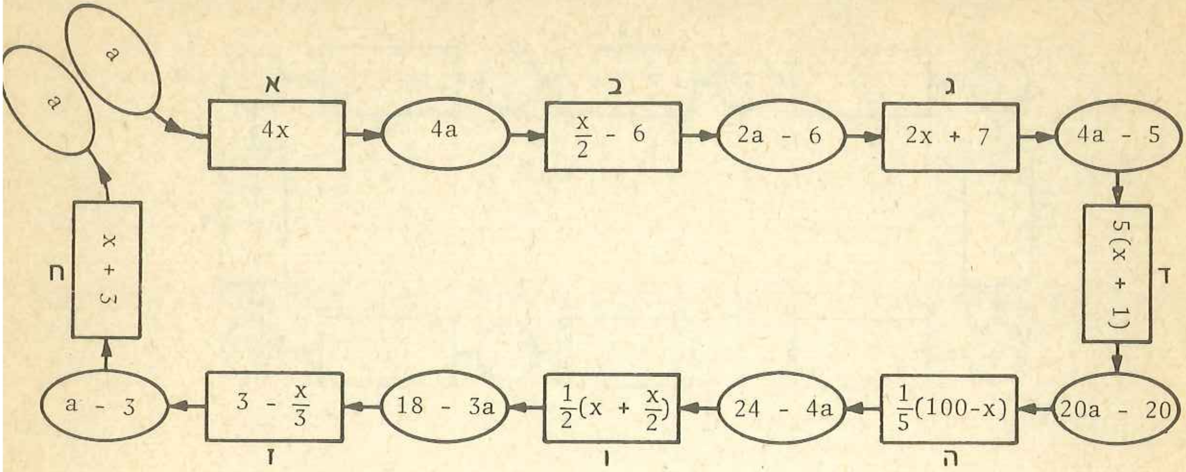
ג)



ה) בכל מקרה מתקבל בסוף המספר שנכנס בהתחלה.

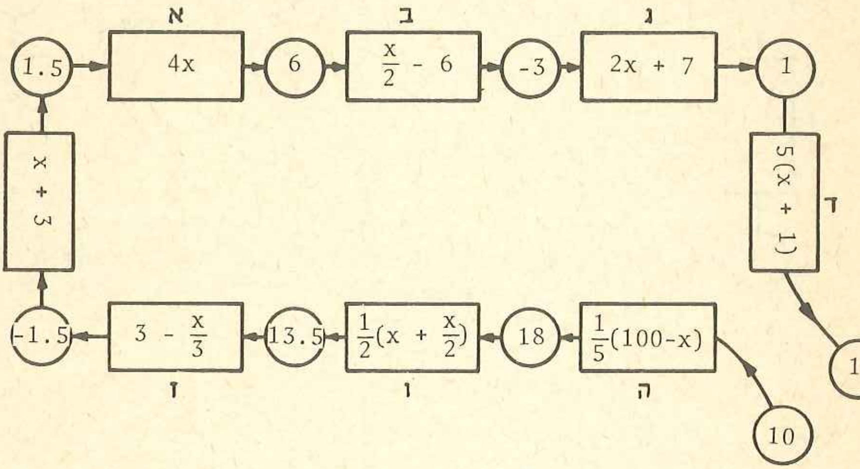
הסבר: למעשה מדובר כאן בהרכבה של פונקציות לינאריות. תוצאת ההרכבה גם היא פונקציה לינארית ולכן מספיקה הצבה של שני מספרים כדי לקבוע את הפונקציה. אם בשני המקרים המספר הנכנס הוא המספר היוצא פירושו שהפונקציה המורכבת היא $y = x$ ולכן כל מספר שיכנס יהיה גם המספר היוצא.

ו) סעיף זה נותן **הוכחה** למסקנה ב ה) ונדרשת בו הצבת תבניות מספר לינאריות בתוך תבניות מספר לינאריות ויתכן שתלמיד ברמה ב' יתקשה בו.
ביצוע מוצלח של סעיף זה יעזור לחלק IV של העבודה.

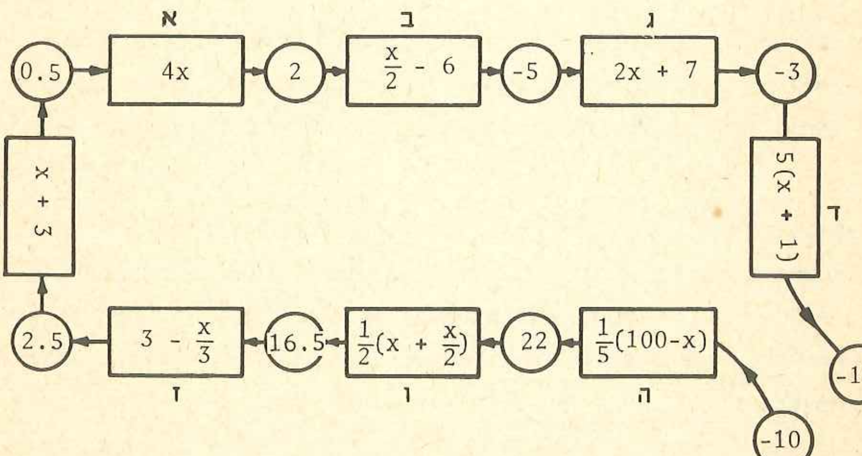


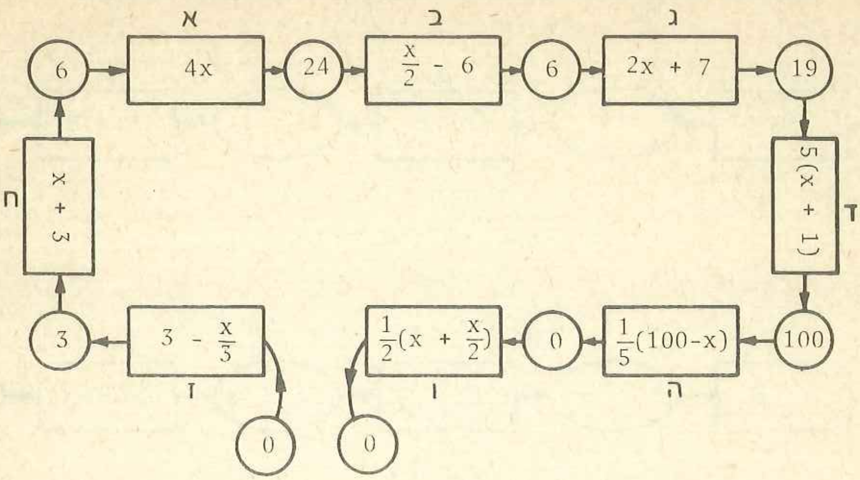
II. תוצאה מענינת מתקבלת בחלק זה. בכל מקום שבו ינתק המעגל ונתחיל להכניס מספר מסוים - מספר זה יהיה גם הפלט בתום סיבוב שלם(בכוון השעון).

א)

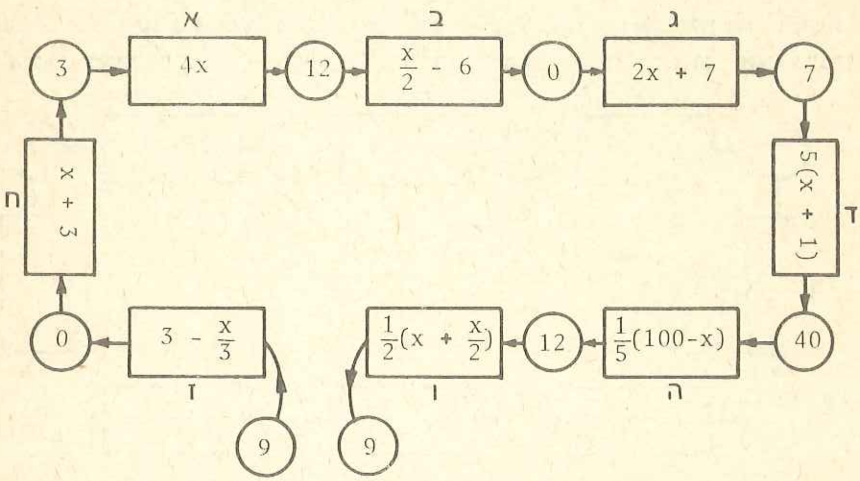


ב)





ד)



ו) המסקנה היא שניתן ל"שבור את החוליות" בכל מקום שנרצה והמעגל נשאר סגור.

התכונה שהתקבלה בחלק זה אינה נכונה לגבי כל רשימה של תבניות מספר (כדאי לבדוק זאת). במקרה כמו זה שבו שרשרת התבניות מתאימה לכל מספר את עצמו וכל תבנית מתארת התאמה חד חד ערכית אפשר להתחיל בכל מקום על המעגל.

נוכיח את תכונת "שבירת החוליות" במעגל הזה בעזרת הרכבת פונקציות. (תלמיד רמה א' שלמד הרכבת פונקציות יכול לנסות להוכיח זאת בעצמו). נסתכל על הפונקציות הלינאריות המתקבלות מהתבניות:
$f_1(x) = 4x$, $f_2(x) = \frac{x}{2} - 6$ ... ראינו כי תוצאת הרכבתן, זו אחרי זו, לפי הסדר היא פונקצית הזהות $f(x) = x$ אשר נהוג לסמן אותה באות I (Identity).

כלומר: $f_8\circ f_7\circ f_6\circ f_5\circ f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1 = I$

<u>הערה:</u> לא רשמנו סוגריים, מאחר וקיים חוק הקיבוץ לגבי הרכבת פונקציות. נוכיח שאם נפתח את המעגל בכל מקום, למשל, בין התבנית השישית והשביעית גם אז תתקבל פונקצית הזהות.

אם כך, צ"ל: $f_6\circ f_5\circ f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1\circ f_8\circ f_7 = I$

הוכחה: בשל קיומו של חוק הקיבוץ ניתן לרשום:

$$f_8\circ f_7\circ f_6\circ f_5\circ f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1 = (f_8\circ f_7)\circ(f_6\circ f_5\circ f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1)$$

נסמן את הפונקציות שבסוגריים F ו-G ואם כן, $F\circ G = I$

פונקציות לינאריות הן חד-חד ערכיות ועל כן הן בעלות פונקציה הפוכה.

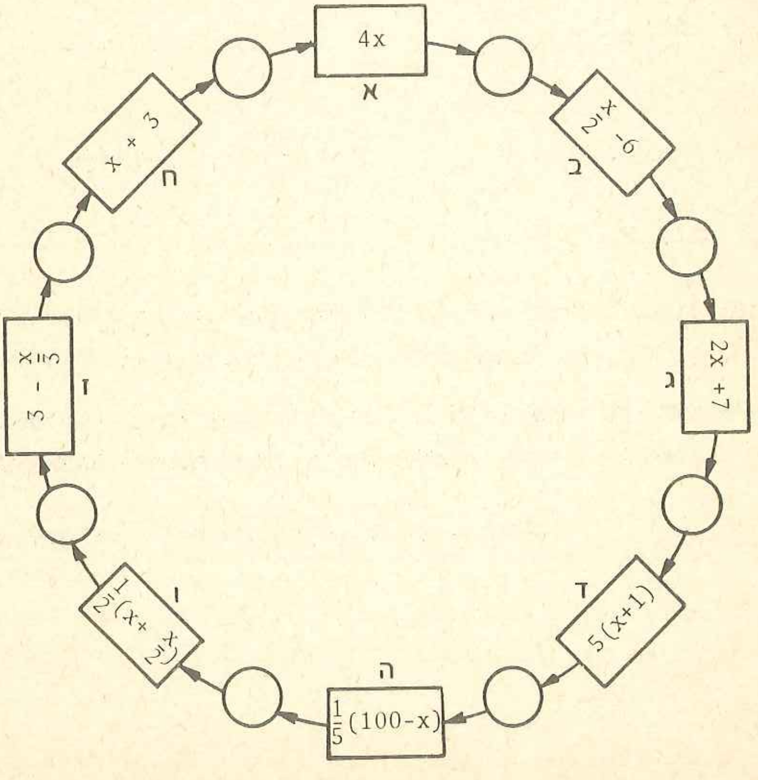
מזה נובע ש F ו G הפוכות זו לזו ולכן גם $G\circ F = I$

ואם כך: $(f_6\circ f_5\circ f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1)\circ(f_8\circ f_7) = I$

אפשר להשמיט את הסוגריים ומתקבל מה שרצינו להוכיח.

<u>הערה:</u> ברור שאפשר לשים את הסוגריים גם במקום אחר, כלומר, לשבור את החוליות, בתנאי שמקפידים לשמור על הסדר והכיוון במעגל.

III. בחלקים הקודמים עסק התלמיד בהצבות ואולי השתעשע בתכונות שנתקל בהן. בחלק זה הוא צריך לחוש יותר את המבנה של המעגל כדי להכין את הרקע לחלק הבא שבו יעסוק בפונקציות הלינאריות המתקבלות.



בשל תכונותיו של המעגל, על כל אחד מהסעיפים א, ב, ג ניתן לענות בשתי דרכים:

i) על ידי פתרון משוואות (חזרה אחורנית).

ii) על ידי הצבה בתבניות (הליכה קדימה).

אנו מצפים שהתלמיד יגיע לכך בעצמו, ויבצע שיקולי "כדאיות".

א) מאחר וקרובים להתחלה, כדאי לחזור אחורנית על ידי פתרון משוואות

תבנית (ב) $\frac{x}{2} - 6 = 4$

$x = 20$

תבנית (א) $4x = 20$

$x = 5$

ב) בסעיף זה אנו באמצע הדרך, נפתור בשתי דרכים:

i) תבנית (ד) $5(x+1) = -60$

$x = -13$

(ג) $2x + 7 = -13$

$x = -10$

תבנית (ב) $\frac{x}{2} - 6 = -10$

$x = -8$

תבנית (א) $4x = -8$

$x = -2$

ii) נציב 60- בתבנית (ה)

$\frac{1}{5}[100 - (-60)] = 32$

נציב 32 בתבנית (ו)

$\frac{1}{2}(32+\frac{32}{2}) = 24$

נציב 24 בתבנית (ז)

$3 - \frac{24}{3} = -5$

נציב 5- בתבנית (ח)

$-5 + 3 = -2$

כאן שקולי הכדאיות הם אישיים, יהיה מי שיעדיף לפתור משוואות ויהיה מי שיעדיף להציב. לנו נראה שהצבה קלה יותר.

ג) בסעיף זה בודאי שרצוי להציב. (בתנאי שהתלמיד ער לכך ש"סגירתו" של המעגל מאפשרת זאת). נציב 9 בתבנית (ח) $9 + 3 = 12$.

הערה: אין לצפות לתשובה אחידה בענין הכדאיות.

ד) אם מציבים 7 בתבנית (ד) יוצא 0 מתבנית (ז). יש להציב 0 בתבנית (ח) כדי שיתקבל 7 מתבנית (ג).

הערה: בסעיף זה יש רמז לפונקציות ההפוכות שיופיעו בחלק הבא.

ה) נראה לנו ש"כדאי" ללכת אחורנית ולפתור משוואה

תבנית (ו) $\frac{1}{2}(x+\frac{x}{2}) = 6$

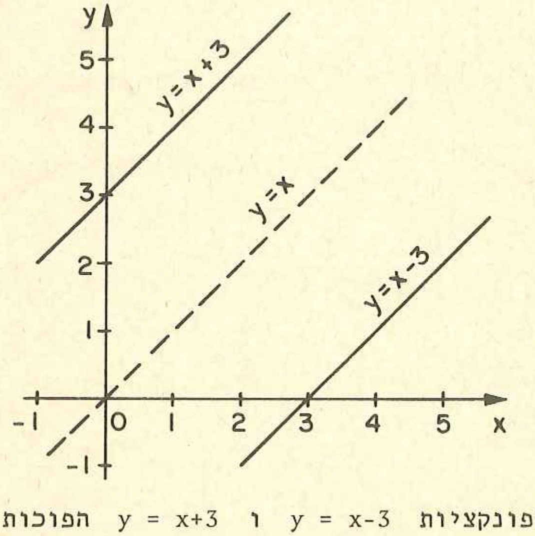
$x = 8$

IV. חלק זה יומלץ לתלמידים שהצליחו להשתלט על סעיף ו) בחלק I. ההדרכה בו מרובה, כדי שתלמיד רמה ב' יפיק ממנו תועלת.
בסעיפים (ג), (ד), (ה) מתקבלים זוגות של פונקציות שהן הפוכות זו לזו. גרפים של פונקציות הפוכות הם סימטריים ביחס לישר $y = x$. תלמיד שלא יבחין בכך בזוג הראשון - יבחין, אולי, בהמשך. המסקנה המתקבלת היא שהפונקציה המתקבלת מתבנית אחת (או יותר) במעגל היא הפוכה לפונקציה המתקבלת משאר התבניות. חשוב להקפיד על הסדר והכיוון.

א) הפונקציה המתקבלת מן התבניות (א), (ב), (ג) היא $y = 4x - 5$

ב) $y = x$ (ראה שרטוט)

ג) i) $y = x - 3$
ii) $y = x + 3$
(ראה שרטוט)

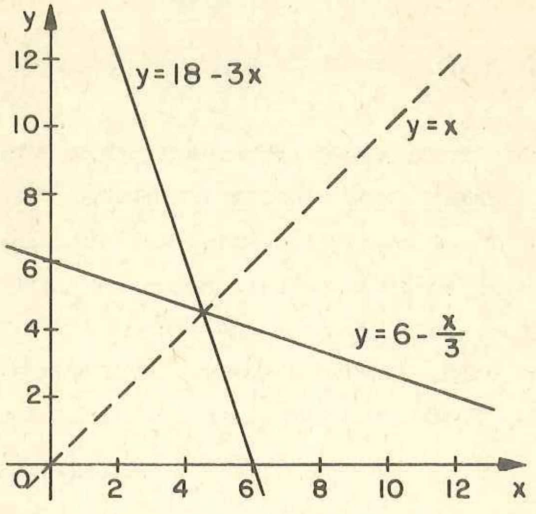


iii) הפונקציות $y = x-3$ ו $y = x+3$ הפוכות זו לזו.
הגרפים שלהן סימטריים ביחס ל $y = x$.
במקרה, לשלוש הפונקציות $y = x$, $y = x-3$ ו $y = x+3$ אותו השיפוע אבל זה לא יהיה כך במקרים הבאים.

ד) i) הפונקציה המתקבלת מ A: $y = 18 - 3x$

הפונקציה המתקבלת מ B: $y = -\frac{x}{3} + 6$

הסבר ל B: $a \rightarrow \boxed{3 - \frac{x}{3}} \rightarrow 3 - \frac{a}{3} \rightarrow \boxed{x + 3} \rightarrow 6 - \frac{a}{3}$



הפונקציות הפוכות והגרפים שלהן סימטריים ביחס לישר $y = x$.

ii) הפונקציה המתקבלת מ A: $y = 4x - 5$

" " מ B: $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

הפונקציות הפוכות והגרפים שלהן סימטריים ביחס לישר $y = x$

iii) הפונקציה המתקבלת מ A: $y = 2x + 7$

" " מ B: $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$

הפונקציות הפוכות והגרפים שלהן סימטריים ביחס לישר $y = x$

ה) כאן, אנו מצפים שהתלמיד יגיע למסקנה שהובאה לעיל (תחילת חלק IV) ויאמת אותה.

V. תלמיד שהתמודד בהצלחה עם חלק IV עשוי להצליח גם כאן. אבל גם מי שלא עסק בחלק הקודם יכול לנסות כוחו במעגלים הקלים. יש לשער שימצא את התבנית החסרה ב א): $\frac{1}{2}x$; את התבנית החסרה ב ב): $x - 7$; את התבנית החסרה ב ג) $\frac{x}{2} + 2$ ואולי גם ימצא זוג תבניות ל ד).

רצוי לעסוק רק בדוגמאות של פונקציות לינאריות שהן חד חד ערכיות ואז לא מתעוררות בעיות.

i) בעזרת-העקרון שכל אחת מהפונקציות, הפוכה לפונקציה המתקבלת מכל התבניות האחרות, ניתן לבנות מעגל סגור. נדגים זאת לגבי שלוש תבניות. שתי הראשונות יכולות להיות כלשהן. למשל, $2x + 3$; $7 - x$. נמצא את הפונקציה המתקבלת מהן:

$$a \longrightarrow \boxed{2x + 3} \longrightarrow 2a + 3 \longrightarrow \boxed{7 - x} \longrightarrow 4 - 2a$$

כלומר זוהי הפונקציה $y = -2x + 4$

הפונקציה ההפוכה לה היא $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ולכן התבנית השלישית היא $-\frac{1}{2}x + 2$

ii) נציע שיטה אחרת שאפשר להציע לתלמיד מתעניין (יתכן שתלמיד ברמה א' יגיע לכך בעצמו).

הסבר: כשם שקו ישר נקבע על ידי שתי נקודות פונקציה לינארית נקבעת על ידי שני זוגות סדורים. תוצאת ההרכבה של פונקציות לינאריות היא פונקציה לינארית ולכן על ידי הצבת שני מספרים ניתן למצוא את הפונקציה. נניח שרוצים לחבר מעגל סגור שבו עשר תבניות מספר רושמים תשע <u>כלשהן</u> ומעבירים דרכן שני מספרים (נוח ביותר את 0 ו 1) נסמן את התוצאה המתקבלת עבור 0 אחרי התבנית התשיעית ב p ואת התוצאה המתקבלת עבור 1 אחרי התבנית התשיעית ב q ומחפשים את התבנית המתאימה ל p את 0 ול q את 1, זו תהא התבנית העשירית.

נדגים זאת לגבי שלוש תבניות.

שתי הראשונות תהיינה, שוב $2x + 3$, $7 - x$

$$0 \longrightarrow \boxed{2x + 3} \longrightarrow 3 \longrightarrow \boxed{7 - x} \longrightarrow 4$$

$$1 \longrightarrow \boxed{2x + 3} \longrightarrow 5 \longrightarrow \boxed{7 - x} \longrightarrow 2$$

נחפש תבנית ליניארית $ax + b$ שאם נציב בה 4 נקבל 0 ואם נציב בה 2 נקבל 1

$$a \cdot 4 + b = 0$$

$$\underline{a \cdot 2 + b = 1}$$

נפתור ונקבל: $b = 2$ $\quad a = -\frac{1}{2}$

התבנית השלישית היא $-\frac{1}{2}x + 2$ והיא הסוגרת את המעגל.