

phys. stat. sol. **12**, 891 (1965)*Halbleiterinstitut der Akademie der Wissenschaften der UdSSR,  
Theoretische Abteilung, Leningrad*

## Der Einfluß einer Deformation auf die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in Kristallen mit kubischer Symmetrie

Von

V. S. Lvov

Auf Grund von Symmetrieüberlegungen wird in der Näherung schwacher Magnetfelder  $H$  ( $\omega \tau \ll 1$ ,  $\omega$  Zyklotronenfrequenz,  $\tau$  Relaxationszeit) eine Beziehung zwischen dem elektrischen Feld und der Stromdichte  $\mathbf{I}$  (oder  $\nabla T$ ) in einem beliebig deformierten kubischen Kristall bei beliebigen Orientierungen von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{I}$  (bzw.  $\nabla T$ ) erhalten. Für einige Richtungen von  $\mathbf{I}$  (oder  $\nabla T$ ) werden die Winkelabhängigkeiten berechnet ( $\mathbf{H}$  liegt dabei in einer Ebene senkrecht zu  $\mathbf{I}$  (bzw.  $\nabla T$ ), und der Kristall wird einer einachsigen Deformation längs  $\mathbf{I}$  oder  $\nabla T$  unterworfen. Dadurch wird es möglich, die Vielfalt der in deformierten kubischen Kristallen ablaufenden galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte zu analysieren. Die in die phänomenologische Theorie der Tensoreffekte eingehenden Koeffizienten werden für n-leitendes Ge berechnet.

На основании соображений симметрии и в приближении слабого магнитного поля  $H$  ( $\omega \tau \ll 1$ ,  $\omega$  циклотронная частота,  $\tau$  время релаксации) получена зависимость между напряженностью электрического поля и плотностью тока  $\mathbf{I}$  (или  $\nabla T$ ) в произвольно деформированном кубическом кристалле при любых ориентациях  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{I}$  ( $\nabla T$ ). Для некоторых направлений  $\mathbf{I}$  (или  $\nabla T$ ) приведены угловые зависимости эффектов ( $\mathbf{H}$  лежит в плоскости, ортогональной  $\mathbf{I}$ , или  $\nabla T$ ; кристалл подвергается одноосной деформации вдоль  $\mathbf{I}$  или  $\nabla T$ ). Все это позволяет ориентироваться в многообразии гальваномангнитных и термомагнитных эффектов в деформированных кубических кристаллах. Коэффициенты, входящие в феноменологическую теорию тензоэффектов, рассчитаны для n-Ge.

Herring [1] hat als erster den Einfluß einer Deformation auf die Leitfähigkeit in Kristallen mit einer many-valley-Bandstruktur untersucht. Er zeigte, daß die Umverteilung der Stromträger zwischen den Extrema und die Änderung der Streuwahrscheinlichkeit zwischen den Tälern, als deren Folge eine Druckabhängigkeit der Beweglichkeit der Stromträger auftritt, zu großen Elasto-Effekten führen. Bei Temperaturen unterhalb Zimmertemperatur kann man die erwähnte zweite Abhängigkeit vernachlässigen [2].

Keyes [2] untersuchte den Einfluß der Deformation auf den Hall-Quereffekt.

Der Einfluß des Druckes auf die Thermo-EMK bei Fehlen eines Magnetfeldes wurde von Drabble [3] untersucht.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Theorie der elasto-galvanomagnetischen und elasto-thermomagnetischen Effekte in Kristallen mit kubischer Symmetrie entwickelt. Im ersten Abschnitt wird die phänomenologische Theorie dieser Effekte in der Näherung schwacher Magnetfelder unter Berücksichtigung von Gliedern bis einschließlich  $H^3$  behandelt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die

Ursache der Elasto-Effekte in der Störung der Symmetrie des Kristalls liegt. Wir beschränken uns auf eine Deformation in einer Achsenrichtung, wenn der Druck in Richtung des Stromes  $\mathbf{I}$  (oder  $\nabla T$ ) gerichtet und  $\mathbf{H} \perp \mathbf{I}$  (oder  $\nabla T$ ) ist. Für die Spezialfälle einer Bandstruktur vom Typ des n-leitenden Ge oder Si werden die Ergebnisse wesentlich einfacher.

Im zweiten Abschnitt werden die in der phänomenologischen Theorie erscheinenden Elasto-Koeffizienten für Kristalle mit der Bandstruktur des n-leitenden Ge berechnet, wobei eine nichtentartete Statistik vorausgesetzt wird. Dabei wird angenommen, daß die Konzentration der Stromträger von der Deformation unabhängig ist.

### 1. Phänomenologische Theorie der Tensoreffekte

Wir nehmen an, daß in einem deformierten kubischen Kristall die beiden Vektorgrößen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  bei vorhandenem Magnetfeld  $H$  durch die Beziehung

$$\mathbf{A}_\alpha = D_{\alpha\beta}(\mathbf{H}, \hat{\varepsilon}) B_\beta \quad (1)$$

zusammenhängen, in der wie üblich die Summierung über sich wiederholende Indizes erfolgt.  $\hat{\varepsilon}$  ist der Deformationstensor.

Den Tensor  $D$  kann man stets in Form einer aus dem Onsager-Teil  $D'$  und dem Anti-Onsager-Teil  $D''$  bestehenden Summe darstellen, wobei die beiden Teile durch die Formeln

$$D'_{\alpha\beta}(-\mathbf{H}) = D'_{\beta\alpha}(\mathbf{H}), \quad D''_{\alpha\beta}(-\mathbf{H}) = -D''_{\beta\alpha}(\mathbf{H}) \quad (2)$$

definiert sind.

Wenn wir  $D$  in eine Reihe nach dem Magnetfeld und der Deformation des Kristalls entwickeln und uns auf die kubischen  $H_p$ - und die linearen  $\varepsilon_{mn}$ -Glieder beschränken, so erhalten wir <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} = & d'_{\alpha\beta} + d''_{\alpha\beta} + (s'_{\alpha\beta mn} + s''_{\alpha\beta mn}) \varepsilon_{mn} + \\ & + [d'_{\alpha\beta p} + d''_{\alpha\beta p} + (s'_{\alpha\beta p mn} + s''_{\alpha\beta p mn}) \varepsilon_{mn}] H_p + \\ & + [d'_{\alpha\beta pq} + d''_{\alpha\beta pq} + (s'_{\alpha\beta pq mn} + s''_{\alpha\beta pq mn}) \varepsilon_{mn}] H_p H_q + \\ & + [d'_{\alpha\beta p q g} + d''_{\alpha\beta p q g}] H_p H_q H_g. \end{aligned} \quad (3)$$

Hier bedeutet ein Strich über einer Gruppe von Indizes Symmetrie, ein Strich unter der Gruppe Asymmetrie des Tensors in bezug auf die Indizes.

Es ist bekannt [4], daß die Anzahl der unabhängigen Komponenten eines beliebigen Tensors  $T$  bei vorgegebener Gittersymmetrie durch den Charakter der Darstellung gegeben ist, nach dem die Komponenten dieses Tensors umgeformt werden. Für den Fall kubischer Symmetrie erhält man

$$T_{\alpha\beta p q g} = 0, \quad T_{\alpha\beta} = T_0 \delta_{\alpha\beta}, \quad T_{\alpha\beta p} = T_1 \delta_{\alpha\beta p}.$$

Hier sind  $\delta_{\alpha\beta}$  der Einheitstensor und  $\delta_{\alpha\beta p}$  der völlig antisymmetrische Tensor ( $\delta_{123} = 1$ ). Es besitzen der Tensor  $T_{\alpha\beta p q g}$  zwei, die Tensoren  $T_{\alpha\beta p q}$ ,  $T_{\alpha\beta p m n}$ ,  $T_{\alpha\beta p mn}$ ,  $T_{\alpha\beta p q mn}$  je drei und der Tensor  $T_{\alpha\beta p q mn}$  12 unabhängige Komponenten.

Berücksichtigt man die Symmetrieeigenschaften der Tensoren  $d$  und  $s$ , die  $D_{\alpha\beta}$  laut Formel (3) bestimmen, so läßt sich die Beziehung (1) in folgender Form

<sup>1)</sup> Wir berücksichtigen nicht das zu  $H^3 \varepsilon$  proportionale Glied. Der Vektor  $\mathbf{B}$  ist so definiert, daß  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  ist, wenn  $\varepsilon = 0$  und  $\mathbf{H} = 0$  sind.

darstellen:

$$A_\alpha(\mathbf{H}) = \bar{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha ; \tag{4a}$$

$\bar{A}_\alpha$  ist gerade und  $\tilde{A}_\alpha$  ist ungerade in bezug auf das Magnetfeld.

Für den geraden Teil erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_\alpha = & B_\alpha + s_0^{(1)} (\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{B})_\alpha + s_0^{(2)} \varepsilon B_\alpha + s_0^{(3)} \hat{\varepsilon}_{\alpha\alpha} B_\alpha + \\ & + d_2^{(1)} H^2 B_\alpha + d_2^{(2)} (\mathbf{B}\mathbf{H}) H_\alpha + d_2^{(3)} H_\alpha^2 B_\alpha + \\ & + s_2^{(1)} H^2 (\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{B})_\alpha + s_2^{(2)} (\mathbf{H}\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{H}) B_\alpha + s_2^{(3)} (\mathbf{B}\mathbf{H}) (\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{H})_\alpha + \\ & + s_2^{(4)} (\mathbf{H}\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{B}) H_\alpha + s_2^{(5)} (\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{H})_\alpha H_\alpha B_\alpha + s_2^{(6)} (\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{B})_\alpha H_\alpha^2 + \\ & + s_2^{(7)} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} H_\beta^2 B_\beta + s_2^{(8)} \varepsilon H^2 B_\alpha + s_2^{(9)} \varepsilon (\mathbf{H}\mathbf{B}) H_\alpha + \\ & + s_2^{(10)} H_\beta^2 \hat{\varepsilon}_{\beta\beta} B_\alpha + s_2^{(11)} H^2 \hat{\varepsilon}_{\alpha\alpha} B_\alpha + s_2^{(12)} \varepsilon H_\alpha^2 B_\alpha + \\ & + s_2^{(13)} \hat{\varepsilon}_{\alpha\alpha} H_\alpha^2 B_\alpha + s_2^{(14)} (\mathbf{H}\mathbf{B}) \hat{\varepsilon}_{\alpha\alpha} H_\alpha + s_2^{(15)} H_\beta \hat{\varepsilon}_{\beta\beta} B_\beta H_\alpha . \end{aligned} \right\} \tag{4b}$$

Hier sind  $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} (1 - \delta_{\alpha\beta})$  in Richtung der Hauptachsen des Kristalls,  $\varepsilon = 1/3 \text{ spur } \hat{\underline{\mathbf{E}}}\cdot(\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{B})_\alpha$  der Vektor, dessen Komponenten gleich  $(\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{B})_\alpha = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} B_\beta$  sind, und  $(\mathbf{H}\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{B}) = H_\alpha \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} B_\beta$  ist das Skalarprodukt.

Der ungerade Teil von  $\tilde{A}$  läßt sich als Summe des Onsager-Anteils  $\tilde{A}'$  und des Anti-Onsager-Anteils  $\tilde{A}''$  darstellen:

$$\tilde{A} = \tilde{A}' + \tilde{A}'' , \tag{4c}$$

$$\tilde{A}' = [\mathbf{B}\mathbf{R}(\mathbf{H})] , \tag{4d}$$

worin

$$R_\alpha(\mathbf{H}) = (d_1 + d_3^{(1)} H^2) H_\alpha + d_3^{(2)} H_\alpha^3 + s_1^{(1)} (\hat{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{H})_\alpha + s_1^{(2)} \varepsilon H_\alpha + s_1^{(3)} \hat{\varepsilon}_{\alpha\alpha} H_\alpha ,$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}'' = & \delta_{\alpha\beta p} \{ s_1^{(4)} B_\beta (H_p \hat{\varepsilon}_{\beta p} - H_\alpha \hat{\varepsilon}_{\alpha p}) + \\ & + s_1^{(5)} B_\alpha H_\beta \hat{\varepsilon}_{\alpha p} + s_1^{(6)} B_\beta H_p (\hat{\varepsilon}_{\alpha\alpha} - \hat{\varepsilon}_{\beta\beta}) \} . \end{aligned} \tag{4e}$$

Wir beschränken uns auf die Untersuchung derjenigen Elasto-Effekte, deren Ursache in einer Störung der Kristallsymmetrie liegt. In dieser Näherung sind bei hydrostatischem Druck keine Elasto-Effekte vorhanden. Daher wollen wir annehmen, daß

$$\left. \begin{aligned} s_0^{(2)} + s_0^{(3)} = 0 , \quad s_1^{(2)} + s_1^{(3)} = 0 , \quad s_2^{(8)} + s_2^{(10)} + s_2^{(11)} = 0 , \\ s_2^{(9)} + s_2^{(14)} + s_2^{(15)} = 0 , \quad s_2^{(12)} + s_2^{(13)} = 0 . \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

### 1.1 Thermomagnetische Effekte

Wir bestimmen den thermomagnetischen Tensor  $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{H}, \hat{\underline{\mathbf{E}}})$  aus der Beziehung

$$\mathbf{E}_\alpha = Q_{\alpha\beta} \nabla_\beta T . \tag{6}$$

Hier ist  $\mathbf{E} = \nabla \left( \frac{\varepsilon_F}{e} - \varphi \right)$ ; darin sind  $\varepsilon_F$  das chemische Potential der Leitungselektronen und  $\varphi$  das elektrostatische Potential. In einem deformierten kubischen Kristall ist  $\mathbf{E} = Q_0 \nabla T$ , wenn  $\mathbf{H} = 0$  ist. Nehmen wir in den Ausdrücken (4)  $\tilde{A} = \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} = Q_0 \nabla T$  an und setzen wir für die Entwicklungskoeffizienten  $d$  und  $s$   $q$  bzw.  $r$ , so haben wir die Möglichkeit, das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  in einem be-

liebig deformierten Kristall kubischer Symmetrie bei beliebiger Orientierung von  $\nabla T$  und  $\mathbf{H}$  zu finden.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß  $\mathbf{H} \perp \nabla T$  ist und der Kristall in einer Achsenrichtung längs  $\nabla T$  deformiert wird. Dann sind

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{ik} &= 2 P C_{44} a_i a_k (1 - \delta_{ik}), \\ \varepsilon_{ii} &= P (C_{12} + (C_{11} - C_{12}) a_i^2). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Es sind  $P$  der Druck,  $C_{ik}$  elastische Konstanten und  $\mathbf{a}$  ein Einheitsvektor in Druckrichtung ( $\mathbf{a} \parallel \nabla T$ ).

Wir untersuchen nun drei Fälle:

1.  $\nabla T \parallel [110]$ ; den Winkel zwischen  $\mathbf{H}$  und  $[001]$  bezeichnen wir mit  $\Theta$  (Fig. 1).
2.  $\nabla T \parallel [1\bar{1}1]$ ; den Winkel zwischen  $\mathbf{H}$  und  $[110]$  nennen wir  $-\varphi$  (Fig. 2).
3.  $\nabla T \parallel [1\bar{1}\bar{2}]$ ; den Winkel zwischen  $\mathbf{H}$  und  $[110]$  nennen wir  $-\psi$  (Fig. 3).

Rechnen wir in allen drei Fällen (4b) unter Berücksichtigung der Formel (5) für die Projektion des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  (das in bezug auf  $\mathbf{H}$  gerade ist) auf die Richtung von  $\nabla T$ ,  $\mathbf{H}$  und  $[\mathbf{H} \nabla T]$  aus, so erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\nabla T} &= \nabla T Q_0 \left\{ 1 + \frac{P}{6} (6 r_0^{(1)} C_{44} - r_0^{(2)} C) + H^2 (q_2^{(1)} + q_2^{(3)} \sin^2 \Theta) + \right. \\ &\quad + \frac{H^2 P C_{44}}{2} [2 r_2^{(1)} - (2 r_2^{(2)} + r_2^{(5)} - r_2^{(6)} - r_2^{(7)}) \sin^2 \Theta] + \\ &\quad \left. + \frac{H^2 P C}{6} [-r_2^{(8)} + r_2^{(13)} - (3 r_2^{(10)} + r_2^{(13)}) \cos^2 \Theta] \right\}, \quad (8.1a) \end{aligned}$$

$$E_{\mathbf{H}} = 0, \quad (8.1b)$$

$$E_{[\mathbf{H} \nabla T]} = 0 \quad (8.1c)$$

mit  $\nabla T \parallel [110]$ .

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\nabla T} &= \nabla T Q_0 \left\{ 1 + \frac{4}{3} P C_{44} + H^2 \left( q_2^{(1)} + \frac{q_2^{(3)}}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{9} H P C_{44} (6 r_2^{(1)} - 3 r_2^{(2)} - r_2^{(5)} - 2 r_2^{(6)} + 2 r_2^{(7)}) \right\}, \quad (8.2a) \end{aligned}$$

$$\bar{E}_{\mathbf{H}} = \nabla T H^2 F \sin 3\varphi, \quad \bar{E}_{[\mathbf{H} \nabla T]} = \nabla T H^2 F \cos 3\varphi \quad (8.2b)$$

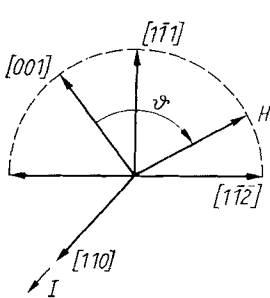


Fig. 1  
Fall 1

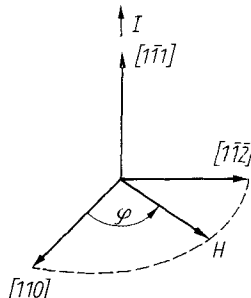


Fig. 2  
Fall 2

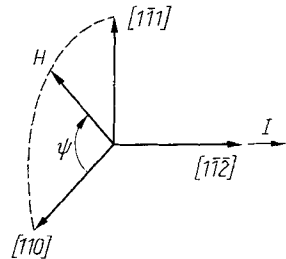


Fig. 3  
Fall 3

Orientierung der Vektoren der Stromdichte  $\mathbf{I}$  und des Magnetfeldes  $\mathbf{H}$  in bezug auf die kristallographischen Richtungen für die verschiedenen untersuchten Fälle

mit

$$F = \frac{Q_0}{9\sqrt{2}} \{ -3 q_2^{(3)} + 2 C_{44} P (r_2^{(5)} - 2 r_2^{(6)} + r_2^{(7)}) \}. \quad (8.2c)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\nabla T} = \nabla T Q_0 \left\{ 1 + P \left[ r_0^{(1)} C_{44} - r_0^{(2)} \frac{C}{3} \right] + \right. \\ + H^2 \left[ q_2^{(1)} + \frac{q_2^{(3)}}{6} (1 + \sin^2 \psi) \right] + \frac{H^2 P C_{44}}{18} \left[ 18 r_2^{(1)} - 6 r_2^{(2)} - r_2^{(5)} + \right. \\ + r_2^{(6)} + 5 r_2^{(7)} - \sin^2 \psi \left( 2 r_2^{(2)} + \frac{7}{3} r_2^{(5)} + 3 r_2^{(6)} - r_2^{(7)} \right) \left. \right] + \\ \left. + \frac{H^2 P C}{18} \left[ -3 r_2^{(8)} - 6 r_2^{(10)} - \frac{r_2^{(12)}}{2} + \sin^2 \psi \left( 3 r_2^{(10)} + \frac{3}{2} r_2^{(13)} \right) \right] \right\}, \quad (8.3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{H}} = \nabla T Q_0 \sin \psi \left\{ \frac{P}{3\sqrt{2}} (2 C_{44} r_0^{(1)} + C r_0^{(2)}) + \frac{H^2 q_2^{(3)} \cos^2 \psi}{\sqrt{2}} + \right. \\ + \frac{H^2 P C_{44}}{9\sqrt{2}} \left[ 6 r_2^{(1)} + 6 r_2^{(4)} + \frac{r_2^{(5)}}{3} + 2 r_2^{(6)} + 2 r_2^{(7)} + \right. \\ + \cos^2 \psi \left( -\frac{11}{3} r_2^{(5)} + 13 r_2^{(6)} - 5 r_2^{(7)} \right) \left. \right] + \\ \left. + \frac{H^2 P C}{18\sqrt{2}} \left[ 6 r_2^{(8)} + 6 r_2^{(10)} - 2 r_2^{(13)} - 6 r_2^{(15)} - 5 r_2^{(13)} \cos^2 \psi \right] \right\}, \quad (8.3b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{[\mathbf{H} \nabla T]} = \nabla T \cos \psi Q_0 \left\{ \frac{P}{3\sqrt{2}} (2 C_{44} r_0^{(1)} + C r_0^{(2)}) + \right. \\ + \frac{q_2^{(3)} H^2}{3\sqrt{2}} (1 - 3 \sin^2 \psi) + \frac{H^2 P C_{44}}{9\sqrt{2}} \left[ 6 r_2^{(1)} - \frac{8}{3} r_2^{(5)} - 8 r_2^{(6)} + 4 r_2^{(7)} + \right. \\ + \cos^2 \psi \left( \frac{11}{3} r_2^{(5)} + 13 r_2^{(6)} + 5 r_2^{(7)} \right) \left. \right] + \\ \left. + \frac{H^2 P C}{9\sqrt{2}} [3 r_2^{(8)} + 3 r_2^{(10)} - 3 r_2^{(13)} + 8 r_2^{(13)} \sin^2 \psi] \right\} \quad (8.3c) \end{aligned}$$

mit  $C = C_{11} - C_{12}$ .

Die Ausdrücke (8a) beschreiben die Abhängigkeit der Thermo-EMK von der Deformation im transversalen Magnetfeld. Wenn  $\mathbf{P} \parallel [111]$  ist, so ist die Thermo-EMK von der Richtung des Magnetfeldes ( $\mathbf{H} \perp \nabla T$ ) unabhängig. Wirken  $\mathbf{P}$  und  $\nabla T$  nicht in Richtung einer der Symmetrieachsen des Kristalls, so tritt die Thermo-EMK in einer zu  $\nabla T$  senkrechten Richtung auf, und zwar auch dann, wenn das Magnetfeld fehlt. Diesen Effekt kann man als transversale Elasto-Thermo-EMK bezeichnen. So erhalten wir z. B. für  $\mathbf{P}, \nabla T \parallel [1\bar{1}\bar{2}]$  aus (8.3b), wenn wir  $\mathbf{H} = 0$  annehmen,

$$E_{[1\bar{1}\bar{1}]} = \frac{\nabla T P_{[1\bar{1}\bar{2}]}}{3\sqrt{2}} Q_0 (2 C_{44} r_0^{(1)} + C r_0^{(2)}). \quad (9)$$

Die Ausdrücke (8b) beschreiben die „planare“ Thermo-EMK (d. h. die Thermo-EMK in der Ebene  $\mathbf{H}, \nabla T$ ) in einem deformierten Kristall.

Wir untersuchen nun die in bezug auf das Magnetfeld ungeraden Effekte. Der Ausdruck (4d), in dem man  $d$  durch  $q$  und ferner auch  $s$  durch  $r$  ersetzen muß, definiert den Nernst-Vektor  $\mathbf{R}(\mathbf{H})$ . Er ist am „transversalen“ elektrischen Feld  $E_{[\mathbf{H} \nabla T]}$  und am „longitudinalen“ Feld  $\tilde{E}_{\mathbf{H}}$  beteiligt. Wir wollen die Effekte entsprechend als transversalen und longitudinalen Nernst-Effekt bezeichnen.

Es ist bekannt [5], daß diese Felder durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

$$\tilde{E}'_{[\mathbf{H} \nabla T]} = R_{\mathbf{H}} \nabla T, \quad \tilde{E}'_{\mathbf{H}} = -R_{[\mathbf{H} \nabla T]} \nabla T, \quad (10)$$

worin  $R_{\mathbf{H}}$  und  $R_{[\mathbf{H} \nabla T]}$  die Projektionen des Nernst-Vektors auf die bezeichneten Richtungen bedeuten. Die Anti-Onsager-Glieder (4c) haben nicht nur einen Anteil an  $\tilde{E}_{\mathbf{H}}$  und  $\tilde{E}_{[\mathbf{H} \nabla T]}$ , sondern führen auch dazu, daß die Projektion  $E_{\nabla T}$  von Null verschieden ist.

Für die Anordnungen 1, 2 und 3 (Fig. 1, 2, 3) erhalten wir aus (4c), (4d), (4h) und (10)

$$\tilde{E}_{\nabla T} = 0 \quad (\nabla T \parallel [110]), \quad (11.1a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\mathbf{H}} = & \frac{1}{4} \nabla T H Q_0 \sin 2\Theta \{q_3^{(2)} H^2 (1 - 3 \cos^2 \Theta) + \\ & + 2 P C_{44} (-r_1^{(1)} + r_1^{(4)} - r_1^{(5)}) + P C r_1^{(3)}\}, \end{aligned} \quad (11.1b)$$

$$\begin{aligned} E_{[\mathbf{H} \nabla T]} = & \nabla T H Q_0 \left\{ q_1 + H^2 \left[ q_3^{(2)} \left( \cos^4 \Theta + \frac{\sin^4 \Theta}{2} \right) + q_3^{(1)} \right] + \right. \\ & + C_{44} P \left[ (-r_1^{(1)} + r_1^{(4)}) \sin^2 \Theta + r_1^{(5)} \cos^2 \Theta \right] + \\ & \left. + \frac{C P r_1^{(2)}}{6} (-1 + 3 \cos^2 \Theta) \right\}; \end{aligned} \quad (11.1c)$$

$$\tilde{E}_{\nabla T} = 0 \quad \left. \vphantom{\tilde{E}_{\nabla T}} \right\} (\nabla T \parallel [1\bar{1}1]), \quad (11.2a)$$

$$E_{\mathbf{H}} = 0 \quad (11.2b)$$

$$E_{[\mathbf{H} \nabla T]} = Q_0 H \nabla T \left\{ q_1 + \frac{H^2}{2} (2 q_3^{(1)} + q_3^{(2)}) + \frac{2 P C_{44}}{3} (-r_1^{(1)} + r_1^{(4)} + r_1^{(5)}) \right\}; \quad (11.2c)$$

$$\tilde{E}_{\nabla T} = \frac{H \nabla T P \cos \psi}{3 \sqrt{2}} Q_0 (2 C_{44} r_1^{(5)} - C r_1^{(6)}), \quad (11.3a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\mathbf{H}} = & \frac{1}{4} H \nabla T \sin 2\psi Q_0 \left\{ -q_3^{(2)} H^2 (1 + \cos^2 \psi) + \right. \\ & \left. + \frac{P}{3} \left[ 2 C_{44} \left( -\frac{r_1^{(1)}}{3} + r_1^{(4)} - r_1^{(5)} \right) + C r_1^{(3)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11.3b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{[\mathbf{H} \nabla T]} = & H \nabla T Q_0 \left\{ q_1 + H^2 \left[ q_3^{(1)} + q_3^{(2)} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\psi}{4} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{C_{44} P}{9} [-4 r_1^{(1)} + 6 r_1^{(4)} + 3 r_1^{(5)} + \cos^2 \psi (r_1^{(1)} - 3 r_1^{(4)} + 3 r_1^{(5)})] + \\ & \left. + \frac{C P}{6} [-r_1^{(3)} \cos^2 \psi + 2 r_1^{(6)}] \right\}. \end{aligned} \quad (11.3c)$$

Somit existiert in einem deformierten Kristall, wenn  $P$  und  $\nabla T$  ( $\mathbf{P} \parallel \nabla T$ ) nicht mit einer seiner Symmetrieachsen zusammenfallen, ein Beitrag zur Ther-

mo-EMK, der in bezug auf das Magnetfeld ungerade und der Größe der Deformation proportional ist. Dieser Beitrag rührt vom Phononen-Drage her, da die Anti-Onsager-Glieder in  $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{H}, \hat{\varepsilon})$  der Anisotropie der Peltier-Koeffizienten proportional sind (das wird weiter unten bei der Berechnung der kinetischen Koeffizienten ersichtlich). In einem nichtdeformierten kubischen Kristall tritt der Anti-Onsager-Anteil in  $Q_{\alpha\beta}$  nur in der vierten Ordnung in bezug auf das Magnetfeld in Erscheinung. ( $T_{\alpha\beta\overline{pqql}}$  besitzt eine  $T_{\alpha\beta\overline{pqikg}}$  drei.)

### 1.2 Galvanomagnetische Effekte

Die galvanomagnetischen Effekte werden durch den Tensor des Widerstandes beschrieben:

$$E_{\alpha} = \varrho_{\alpha\beta}(\mathbf{H}, \hat{\varepsilon}) I_{\beta}, \tag{12}$$

für den die Onsager-Beziehung

$$\varrho_{\alpha\beta}(-\mathbf{H}) = \varrho_{\beta\alpha}(\mathbf{H}) \tag{13}$$

gilt.

In einem nichtdeformierten kubischen Kristall gilt  $\mathbf{E} = \varrho_0 \mathbf{I}$ , wenn  $\mathbf{H} = 0$  ist. Daher untersuchen wir auf analoge Weise die elasto-galvanomagnetischen Effekte, wobei wir in den Formeln (4) voraussetzen, daß

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \varrho_0 \mathbf{I} \tag{14}$$

ist, und ferner  $d$  und  $s$  durch  $\varrho$  bzw.  $\pi$  ersetzen. Die Formeln für  $E_{\mathbf{I}}$ ,  $E_{\mathbf{H}}$  und  $E_{[\mathbf{H}\mathbf{I}]}$  werden aus den entsprechenden Formeln für die thermomagnetischen Effekte (8 bis 11) gewonnen, indem man  $Q_0 \nabla T$  durch  $\varrho_0 \mathbf{I}$ ,  $q$  durch  $\varrho$  und  $r$  durch  $\pi$  ersetzt. Dabei muß man die Folgerungen aus den Beziehungen (13) berücksichtigen:

$$\pi_1^{(4)} = \pi_1^{(5)} = \pi_1^{(6)} = 0, \quad \pi_2^{(3)} = \pi_2^{(4)}, \quad \pi_2^{(6)} = \pi_2^{(7)}, \quad \pi_2^{(4)} = \pi_2^{(15)}. \tag{15}$$

Nach der erwähnten Substitution beschreiben die Formeln (8a) den elasto-magnetischen Widerstand. Das planare Feld  $E_{\mathbf{H}}$  und das transversale Feld  $E_{[\mathbf{H}\mathbf{I}]}$  werden entsprechend durch die Ausdrücke (8b) und (8c) beschrieben. Wenn der Strom in Richtung einer zweizähligen Symmetrieachse fließt ( $\mathbf{I} \parallel [110]$ ), ist  $E_{\mathbf{H}} = E_{[\mathbf{H}\mathbf{I}]} = 0$ . Mehr noch, in Kristallen beliebiger Symmetrie ist  $E_{\mathbf{H}} = E_{[\mathbf{H}\mathbf{I}]} = 0$  für beliebige Magnetfelder ( $\mathbf{H} \perp \mathbf{I}$ ), wenn  $\mathbf{I}$  parallel zu einer Symmetrieachse geradzähliger Ordnung ist. Das folgt aus der Form des Tensors  $\varrho_{\alpha\beta}$  in diesem Fall (5):

$$\overline{\varrho_{\alpha\beta}} = \begin{bmatrix} \overline{\varrho_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\varrho_{22}} & \overline{\varrho_{23}} \\ 0 & \overline{\varrho_{32}} & \overline{\varrho_{33}} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Hier ist  $x_1 \parallel$  zur Symmetrieachse  $2n$ , und  $\mathbf{H} \perp x_1$ .

Wenn das Magnetfeld in Richtung der Symmetrieachse des Kristalls orientiert ist, dann hat  $\overline{\varrho_{\alpha\beta}}$  die Form (16) [5]. Hier ist bereits  $\mathbf{H} \parallel x_1$ . Wenn  $\mathbf{H} \perp \mathbf{I}$  ist, dann folgt aus (16), daß  $E_{\mathbf{H}} = 0$  bei beliebigen Magnetfeldern ist. In Übereinstimmung damit ist in einem deformierten Kristall unter der Voraussetzung, daß  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{P} \perp \mathbf{H}$  und  $\mathbf{H}$  längs einer Symmetrieachse ungeradzähliger Ordnung gerichtet sind,  $\overline{E}_{\mathbf{H}} \sim P$ .

Tatsächlich folgt bei  $\mathbf{I}, \mathbf{P} \parallel [\bar{1}\bar{1}\bar{2}]$  und  $\mathbf{H} \parallel [1\bar{1}\bar{1}]$  aus (8.3 b)

$$\begin{aligned} \bar{E}_{[1\bar{1}\bar{1}]} = \frac{\varrho_0 I P_{[1\bar{1}\bar{2}]}}{3 \sqrt{2}} \left\{ 2 C_{44} \pi_0^{(1)} + C \pi_0^{(2)} + \right. \\ \left. + H^2 \left[ 2 C_{44} \left( \pi_2^{(1)} + \pi_2^{(4)} + \frac{\pi_2^{(5)}}{9} + \frac{\pi_2^{(6)}}{3} + \frac{\pi_2^{(7)}}{3} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + C \left( \pi_2^{(8)} + \pi_2^{(10)} - \frac{\pi_2^{(13)}}{3} - \pi_2^{(15)} \right) \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Bei  $\mathbf{H} = 0$  beschreibt der Ausdruck (17) den transversalen Elasto-Widerstand.

Aus (11 b) sieht man, daß das longitudinale Hall-Feld  $E_{\mathbf{H}} = 0$  ist, wenn  $\mathbf{H}$  parallel zur Symmetrieachse des Kristalls orientiert ist. Es läßt sich nun zeigen [5], daß dieses für beliebig hohe Magnetfelder richtig ist. Bei einer Deformation wird die Symmetrie gestört, und wenn  $\mathbf{H}$  zu einer Symmetrieachse ungeradzahligter Ordnung parallel ist, dann ist  $\tilde{E}_{\mathbf{H}} \sim P$ . Tatsächlich ist bei  $\mathbf{H} \parallel [111]$  ( $\sin \Theta = 2/3$ )

$$\tilde{E}_{[1\bar{1}\bar{1}]} = - I_{[110]} P_{[110]} H_{[1\bar{1}\bar{1}]} \frac{\varrho_0}{\sqrt{\sigma}} (2 C_{44} \pi_1^{(1)} + C \pi_1^{(2)}). \quad (18)$$

Zum Unterschied von anderen Effekten (longitudinaler Elasto-Widerstand, magnetischer Elasto-Widerstand), bei denen durch die Deformation lediglich das zu messende Feld geändert wird, bestimmt sie in den behandelten Fällen (transversaler Elasto-Widerstand, longitudinaler Elasto-Halleffekt) einzig und allein den beobachteten Effekt.

Die oben mitgeteilten Ergebnisse sind für einen beliebigen Kristall kubischer Symmetrie gültig. In Übereinstimmung mit der Arbeit [1] führt nur eine Berücksichtigung der Umverteilung der Elektronen bei unveränderter Anzahl dazu, daß in den Ausdruck für die Elasto-Effekte für n-leitendes Ge nur der Koeffizient  $C_{44}$  und für n-leitendes Si nur  $C = C_{11} - C_{12}$  eingehen.

## 2. Berechnung der Koeffizienten $\pi$ und $r$ für n-leitendes Ge

Wir bestimmen die Tensoren  $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{H})$ ,  $\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{H})$ ,  $\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{H})$  aus den Gleichungen

$$\mathbf{I}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta, \quad \mathbf{F}_\alpha = \Pi_{\alpha\beta} I_\beta, \quad \nu_{\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\gamma} \sigma_{\gamma\beta}. \quad (19)$$

Darin sind  $\mathbf{I}$  die Stromdichte im isothermen Leitfähigkeitsprozeß,  $\mathbf{F}$  der Energiefluß der Stromträger vom Fermi-Niveau gerechnet, und

$$\sigma^{-1} = \varrho. \quad (20)$$

Infolge der Onsager-Beziehung

$$- Q_{\beta\alpha}(\mathbf{H}) = \Pi_{\alpha\beta}(-\mathbf{H})/T$$

haben wir

$$- Q_{\alpha\beta}(\mathbf{H}) = \frac{1}{T} \nu_{\beta\gamma}(-\mathbf{H}) \varrho_{\gamma\alpha}(-\mathbf{H}), \quad (21)$$

und die Aufgabe läßt sich auf die Bestimmung der Tensoren  $\sigma$  und  $\nu$  in einem deformierten Kristall zurückführen.



Nach dem Elektronenschalenmodell nach Herring [6] sind

$$\sigma(\mathbf{H}) = \sum_i \sigma^i(\mathbf{H}) = \sum_i \int d\sigma^i(\mathbf{H}, \varepsilon) \equiv e \sum_i n^i \langle \mu^i \rangle, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{H}) &= \Pi(\mathbf{H}) \sigma(\mathbf{H}) = \sum_i \Pi^i(\mathbf{H}) \sigma^i(\mathbf{H}) = \sum_i \int \Pi^i(\varepsilon) d\sigma^i(\mathbf{H}, \varepsilon) = \\ &= e \sum_i n^i \langle \Pi^i(\varepsilon) \mu^i(\mathbf{H}, \varepsilon) \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Hierin sind  $i$  der Summationsindex für die Energieellipsoide,  $\sigma^i$  und  $\Pi^i(\mathbf{H})$  der Leitfähigkeitstensor bzw. der Peltier-Tensor der Elektronen des  $i$ -ten Ellipsoids.  $d\sigma^i(\mathbf{H}, \hat{\varepsilon})$  ist der Anteil der Elektronen des  $i$ -ten Ellipsoids mit der Energie  $\varepsilon$  — gerechnet vom Bandrand (des Ellipsoids) — an der Leitfähigkeit;  $\Pi^i(\varepsilon)$  ist der Peltier-Tensor eines Elektrons mit der Energie  $\varepsilon$  im  $i$ -ten Band, der bereits nicht mehr vom Magnetfeld abhängt. Das Symbol  $\langle \rangle$  bedeutet die Maxwell'sche Mittelung über die Energien. So ist z. B.  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3 k T}{2} \cdot \Pi^i(\varepsilon) = \Pi_{\sigma}^i + \Pi_{\Phi}^i$  setzt sich aus einem Elektronen- und einem Phononenanteil zusammen:

$$\Pi_{\sigma \alpha \beta}^i = - \frac{\varepsilon - \varepsilon_F^i}{e} \delta_{\alpha \beta}. \quad (24)$$

Dabei sind  $\varepsilon_F^i$  die Energie des Fermi-Niveaus, gerechnet vom Rand des  $i$ -ten Bandes und  $(-e)$  die Ladung des Elektrons.  $\Pi_{\Phi}^i(\varepsilon)$  ist diagonal zu den Hauptachsen seines Ellipsoids orientiert.

Wir bestimmen nun die Tensoren  $M(\mathbf{H})$  und  $P(\mathbf{H})$  aus den Gleichungen

$$M_{\alpha \beta m n}(\mathbf{H}) = \left. \frac{\partial \sigma_{\alpha \beta}(\mathbf{H})}{\partial \varepsilon_{m n}} \right|_{\varepsilon_{m n}=0}, \quad P_{\alpha \beta m n}(\mathbf{H}) = \left. \frac{\partial \nu_{\alpha \beta}(\mathbf{H})}{\partial \varepsilon_{m n}} \right|_{\varepsilon_{m n}=0}. \quad (25)$$

Wir berücksichtigen nur den sich aus der Umverteilung der Elektronen (bei konstanter Anzahl) zwischen den Minima ergebenden Effekt. Dann ist [3]

$$\frac{\partial n^i}{\partial \varepsilon_j} = - \frac{n^i}{k T} \left( \delta_{ij} - \frac{1}{N_v} \right), \quad \frac{\partial \Pi_{\alpha \beta}^i}{\partial \varepsilon_j} = - \frac{1}{e} \left( \delta_{ij} - \frac{1}{N_v} \right) \delta_{\alpha \beta}. \quad (26)$$

Es bedeuten  $\varepsilon_j$  die Verschiebung des Randes des  $j$ -ten Bandes gegen das Fermi-Niveau,  $N_v$  die Anzahl der Ellipsoide. Jetzt ist

$$M_{\alpha \beta m n} = e \sum_{i,j} \frac{\partial n^i}{\partial \varepsilon_j} \langle \mu_{\alpha \beta}^i \rangle \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \varepsilon_{m n}} = - e n_0 \sum_{i,j} \frac{\langle \mu_{\alpha \beta}^i \rangle}{k T} \left( \delta_{ij} - \frac{1}{N_v} \right) \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \varepsilon_{m n}} \quad (27)$$

( $n_0$  bedeutet die Anzahl der Elektronen in einem beliebigen Minimum im nicht-deformierten Kristall),

$$\begin{aligned} P_{\alpha \beta m n} &= - \sum_{i,j} n_0 \left[ \frac{e}{k T} \langle \Pi_{\alpha \gamma}^i \mu_{\gamma \beta}^i \rangle + \langle \mu_{\alpha \beta}^i \rangle \right] \left( \delta_{ij} - \frac{1}{N_v} \right) \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \varepsilon_{m n}} \equiv \\ &\equiv P'_{\alpha \beta m n} + \frac{k T}{e} M_{\alpha \beta m n}. \end{aligned} \quad (28)$$

Wenn die Ellipsoide in den Ebenen [111] bei n-leitendem Ge oder [100] bei n-leitendem Si liegen, dann ist [7]

$$\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \varepsilon_{m n}} = \left( \Xi_d \delta_{m n} + \Xi_u \frac{K_m^j K_n^j}{|K^j|^2} \right). \quad (29)$$

Dabei sind:  $\Xi_d$  und  $\Xi_u$  die Deformationspotentialkonstanten,  $K_m^j$  die  $m$ -te Projektion des Ortsvektors des  $j$ -ten Energieminimums in den Impulsraum.

Für  $n$ -leitendes Si folgt aus (28) und (29)

$$P'_{\alpha\beta mn}(\mathbf{H}) = -\frac{\Xi_u}{3kT} \left\{ \nu_{\alpha\beta}^m - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \nu_{\alpha\beta}^i \right\} \delta_{mn} . \tag{30}$$

Für  $n$ -leitendes Ge gilt

$$P'_{\alpha\beta mn}(\mathbf{H}) = -\frac{\Xi_u}{3kT} \left\{ \sum_{i=1}^4 \nu_{\alpha\beta}^i (K_m^i K_n^i - \delta_{mn}) \right\} . \tag{31}$$

Hier ist

$$\nu_{\alpha\beta}^i \equiv e n_0 \langle \Pi_{\alpha\gamma}^i \mu_{\gamma\beta}^i \rangle .$$

Die Ausdrücke für  $M_{\alpha\beta mn}$  erhält man, wenn man in (30) und (31)  $\Pi_{\alpha\gamma}^i = \delta_{\alpha\gamma}$  setzt. Außerdem ist  $P_{\alpha\beta mn} = P'_{\alpha\beta mn} + \frac{kT}{e} M_{\alpha\beta mn}$ . Daher läßt sich die weitere Untersuchung nur für  $P'_{\alpha\beta mn}$  durchführen.

Da die Elasto-Koeffizienten bei  $n$ -leitendem Si für  $m = n$  und bei  $n$ -leitendem Ge für  $m \neq n$  (da ja  $|K_m^i|^2 = 1$ ) von Null verschieden sind, so geht in Übereinstimmung mit dem am Ende des ersten Abschnitts Gesagten in die Ausdrücke für die Elasto-Koeffizienten von  $n$ -leitendem Ge nur  $\hat{\varepsilon}_{mn} = \varepsilon_{mn} (1 - \delta_{mn})$  und von  $n$ -leitendem Si nur  $\varepsilon_{mm}$  ein.

Wir bestimmen nun die Tensoren in der Näherung schwacher Magnetfelder:

$$\left. \begin{aligned} p_{\alpha\beta mn} &= P_{\alpha\beta mn}(\mathbf{H})|_{\mathbf{H}=0} , & m_{\alpha\beta mn} &= M_{\alpha\beta mn}(\mathbf{H})|_{\mathbf{H}=0} , \\ p_{\alpha\beta pmn} &= \frac{\partial}{\partial H_p} P_{\alpha\beta mn}(\mathbf{H})|_{\mathbf{H}=0} , & m_{\alpha\beta pmn} &= \frac{\partial}{\partial H_p} M_{\alpha\beta mn}(\mathbf{H})|_{\mathbf{H}=0} , \\ p_{\alpha\beta pqmn} &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial H_p \partial H_q} P_{\alpha\beta mn}(\mathbf{H})|_{\mathbf{H}=0} , & m_{\alpha\beta pqmn} &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial H_p \partial H_q} M_{\alpha\beta mn}(\mathbf{H})|_{\mathbf{H}=0} . \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

Ferner beschränken wir uns auf eine Bandstruktur vom Typ des  $n$ -leitenden Ge; dann ergibt das System (32) unter Berücksichtigung von (31)

$$\left. \begin{aligned} p'_{\alpha\beta mn} &= -\frac{\Xi_u}{3kT} e n_0 \sum_i \langle \Pi_{\alpha\gamma}^i \mu_{\gamma\beta}^{0i} \rangle K_m^i K_n^i , \\ p'_{\alpha\beta pmn} &= -\frac{\Xi_u}{3kT} e n_0 \sum_i \langle \Pi_{\alpha\gamma}^i \mu_{\gamma\beta p}^{1i} \rangle K_m^i K_n^i , \\ p'_{\alpha\beta pqmn} &= \frac{\Xi_u}{3kT} e n_0 \sum_i \langle \Pi_{\alpha\gamma}^i \mu_{\gamma\beta pq}^{2i} \rangle K_m^i K_n^i . \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

Hier ist  $m \neq n$ . Für die Hauptachsen des  $i$ -ten Ellipsoids kann man die unter dem Mittelungszeichen stehenden Ausdrücke aus einer Boltzmannschen Gleichung [7] erhalten:

$$\langle \Pi_{\alpha\gamma}^i \mu_{\gamma\beta}^{0i} \rangle = \frac{c}{\langle \varepsilon \rangle} \langle \varepsilon \Pi_{\alpha} a_{\alpha} \rangle \delta_{\alpha\beta} , \tag{34a}$$

$$\langle \Pi_{\alpha\gamma}^i \mu_{\gamma\beta p}^{1i} \rangle = \frac{c}{\langle \varepsilon \rangle} \langle \varepsilon \Pi_{\alpha} a_{\alpha} a_{\beta} \rangle \delta_{\alpha\beta p} , \tag{34b}$$

$$\langle \Pi_{\alpha\gamma}^i \mu_{\gamma\beta pq}^{2i} \rangle = \frac{c}{2 \langle \varepsilon \rangle} \sum_{\lambda} \langle \varepsilon \Pi_{\alpha} a_{\alpha} a_{\beta} a_{\lambda} \rangle (\delta_{\lambda p \beta} \cdot \delta_{\lambda \alpha q} + \delta_{\lambda p \alpha} \delta_{\lambda \beta q}) . \tag{34c}$$

In diesen Ausdrücken sind  $a_\alpha = \frac{e}{c} \frac{\tau_\alpha}{m_\alpha} \tau_\alpha, \frac{1}{m_\alpha}$  die Eigenwerte der Relaxationszeittensoren und der reziproken effektiven Massen.

In der Näherung schwacher Felder lassen sich die Beziehungen  $I_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$  in die Form (4) bringen. Dazu muß man in (4)

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \sigma_0 \mathbf{E} \tag{35}$$

setzen,  $d$  und  $s$  durch  $\sigma$  und  $m$  ersetzen und ferner die Onsager-Beziehungen ebenso berücksichtigen, wie dies für den Tensor in der Formel (15) geschehen ist.

Analog muß für (19) verfahren werden:  $F_\alpha = \nu_{\alpha\beta} E_\beta$ ; in (4) muß man

$$\mathbf{A} = \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nu_0 \mathbf{E} \tag{36}$$

setzen, und  $d$  und  $s$  durch  $\nu$  und  $p$  ersetzen. Infolge von (20) und (21) hängen die Koeffizienten, die für  $Q_{\alpha\beta}, Q_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}, \nu_{\alpha\beta}$  in die Entwicklung vom Typ (4) eingehen, miteinander zusammen:

$$\left. \begin{aligned} & q_0 = 1/\sigma_0, \quad q_1 = -\sigma_1, \quad q_2^{(1)} = -(\sigma_2^{(1)} + \sigma_1^2), \\ & q_2^{(2)} = -\sigma_2^{(2)} + \sigma_1^2, \quad q_2^{(3)} = -\sigma_2^{(3)}; \\ & \pi_0^{(1)} = -m_0^{(1)}, \quad \pi_1^{(1)} = -(m_1^{(1)} + \sigma_1 m_0^{(1)}), \\ & \pi_2^{(1)} = -m_2^{(1)} + m_0^{(1)} (2\sigma_2^{(1)} + \sigma_1^2), \\ & \pi_2^{(2)} = -m_2^{(2)} - \sigma_1 (2m_1^{(1)} + \sigma_1 m_0^{(1)}), \\ & \pi_2^{(3)} = -m_2^{(3)} + \sigma_1 m_1^{(1)} + \sigma_2^{(2)} m_0^{(1)}, \\ & \pi_2^{(5)} = -m_2^{(5)}, \quad \pi_2^{(6)} = -m_2^{(6)} + m_0^{(1)} \sigma_2^{(3)}; \end{aligned} \right\} \tag{37}$$
  

$$\left. \begin{aligned} - Q_0 &= \nu_0/T \sigma_0; \\ q_1 &= \nu_1 - \sigma_1, \quad q_2^{(1)} = \nu_2^{(1)} - \sigma_2^{(1)} + \sigma_1 q_1, \\ q_2^{(2)} &= \nu_2^{(2)} - \sigma_2^{(2)} - \sigma_1 q_1, \quad q_2^{(3)} = \nu_2^{(3)} - \sigma_2^{(3)}; \\ r_0^{(1)} &= p_0^{(1)} - m_0^{(1)}; \\ r_1^{(1)} &= p_1^{(1)} - m_1^{(1)} + \frac{1}{2} (\sigma_1 r_0^{(1)} + q_1 p_0^{(1)}), \\ r_1^{(4)} &= -p_1^{(4)} + \frac{1}{2} (\sigma_1 p_0^{(1)} - \nu_1 m_0^{(1)}), \\ r_1^{(5)} &= -p_1^{(5)} + \sigma_1 p_0^{(1)} - \nu_1 m_0^{(1)}; \\ r_2^{(1)} &= p_2^{(1)} - m_2^{(1)} + \sigma_1 p_1^{(5)} + m_0 (\sigma_2^{(1)} - \nu_2^{(1)}) - r_0 (\sigma_1^2 + \sigma_2^{(1)}), \\ r_2^{(2)} &= p_2^{(2)} - m_2^{(2)} + \sigma_1 (p_1^{(1)} - m_1^{(1)} + p_1^{(4)}) + q_1 (m_1^{(1)} + m_0^{(1)} \sigma_1), \\ r_2^{(3)} &= p_2^{(3)} - m_2^{(3)} - \sigma_1 (p_1^{(1)} - m_1^{(1)} + p_1^{(4)}) + m_0 (\sigma_2^{(2)} - r_2^{(2)}), \\ r_2^{(4)} &= p_2^{(3)} - m_2^{(3)} + \sigma_1 (\sigma_1 p_0^{(1)} - \nu_1 m_0^{(1)} - p_1^{(5)}) - q_1 m_1^{(1)} - r_0^{(1)} \sigma_2^{(2)}, \\ r_2^{(5)} &= p_2^{(5)} - m_2^{(5)} - \sigma_1 p_1^{(4)}, \\ r_2^{(6)} &= p_2^{(7)} - m_2^{(6)} - \sigma_2^{(3)} r_0^{(1)}, \\ r_2^{(7)} &= p_2^{(6)} - m_2^{(6)} - q_2^{(3)} m_0 + 2 \sigma_1 p_1^{(4)}. \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

Die Koeffizienten  $p$ , die in (38) eingehen, werden durch die unabhängigen Komponenten der Tensoren  $p$  ausgedrückt, die durch die Formeln (32) gegeben sind:

$$\left. \begin{aligned} v_0 p_0^{(1)} &= 2 p_{\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}}, & v_0 p_1^{(1)} &= p_{311\bar{1}\bar{2}} - p_{131\bar{1}\bar{2}}, \\ v_0 p_1^{(4)} &= p_{311\bar{1}\bar{2}} + p_{131\bar{1}\bar{2}}, & v_0 p_1^{(5)} &= 2 p_{223\bar{1}\bar{2}}, \\ v_0 p_2^{(1)} &= 2 p_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{3}\bar{1}\bar{2}}, & v_0 p_2^{(2)} &= 2 p_{\bar{3}\bar{3}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}}, \\ v_0 p_2^{(3)} &= 2 p_{23\bar{3}\bar{1}\bar{1}\bar{2}}, & v_0 p_2^{(4)} &= 4 p_{32\bar{3}\bar{1}\bar{1}\bar{2}}, \\ v_0 p_2^{(5)} &= 2 p_{\bar{2}\bar{2}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}} - 2 p_{\bar{3}\bar{3}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}} - 2 p_{23\bar{3}\bar{1}\bar{1}\bar{2}} - 2 p_{32\bar{3}\bar{1}\bar{1}\bar{2}}, \\ v_0 p_2^{(6)} &= 2 p_{12\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}} - 2 p_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{3}\bar{1}\bar{2}} - 4 p_{32\bar{3}\bar{1}\bar{1}\bar{2}}, \\ v_0 p_2^{(7)} &= 2 p_{21\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}} - 2 p_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{3}\bar{1}\bar{2}} - 4 p_{23\bar{3}\bar{1}\bar{1}\bar{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Transformiert man die Tensoren (34) aus dem Hauptachsensystem des  $j$ -ten Ellipsoids in das Kristallachsensystem und summiert man über die Minima, wie in (33) gezeigt wurde, so findet man die unabhängigen Komponenten der Tensoren  $p'$ . Wir setzen sie in (39) ein und erhalten

$$\left. \begin{aligned} p_0^{(1)} &= \frac{2}{3} \frac{\Xi_u}{k T} \frac{\langle \varepsilon (II_{\perp} a_{\perp} - II_{\parallel} a_{\parallel}) \rangle}{\langle \varepsilon (2 II_{\perp} a_{\perp} + II_{\parallel} a_{\parallel}) \rangle}, \\ p_1^{(i)} &= \frac{\Xi_u}{3 k T} \frac{\langle \varepsilon (g_1^i II_{\perp} a_{\perp}^2 + g_2^i II_{\perp} a_{\perp} a_{\parallel} + g_3^i II_{\parallel} a_{\perp} a_{\parallel}) \rangle}{\langle \varepsilon (2 II_{\perp} a_{\perp} + II_{\parallel} a_{\parallel}) \rangle}, \\ p_2^{(i)} &= \frac{\Xi_u}{9 k T} \frac{\langle \varepsilon (l_1^i II_{\perp} a_{\perp}^3 + l_2^i II_{\perp} a_{\perp}^2 a_{\parallel} + l_3^i II_{\parallel} a_{\perp}^2 a_{\parallel} + l_4^i II_{\parallel} a_{\perp} a_{\parallel}^2) \rangle}{\langle \varepsilon (2 II_{\perp} a_{\perp} + II_{\parallel} a_{\parallel}) \rangle}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Die in (40) enthaltenen Koeffizienten  $g$  und  $l$  sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt.

Tabelle 1

$i$	1	4	5
$g_1^i$	-2	0	0
$g_2^i$	1	1	-1
$g_3^i$	1	-1	1

Tabelle 2

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$l_1^i$	-2	4	-4	-4	4	4	4
$l_2^i$	-4	-4	10	4	-4	-4	-4
$l_3^i$	2	2	-2	4	-4	-4	-4
$l_4^i$	4	-2	-4	-4	4	4	4

Die Koeffizienten  $m$  in den Ausdrücken (37) und (38) werden aus (40) bestimmt, wenn man  $II_{\perp} = II_{\parallel} = 1$  annimmt und statt  $p'$   $m$  setzt. Außerdem folgt aus (29)

$$p_j^{(i)} = p_j^{\prime(i)} + \frac{k T}{e} m_j^{(i)}. \quad (41)$$

Damit man mit den Ausdrücken (37) und (38) bequemer umgehen kann, führen wir auch die Werte für die Koeffizienten  $\nu$  an:

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 &= \frac{e c N}{3 \langle \varepsilon \rangle} \langle \varepsilon (2 II_{\perp} a_{\perp} + II_{\parallel} a_{\parallel}) \rangle, \\ \nu_1 &= \frac{\langle \varepsilon (II_{\perp} a_{\perp}^2 + II_{\perp} a_{\perp} a_{\parallel} + II_{\parallel} a_{\perp} a_{\parallel}) \rangle}{\langle \varepsilon (2 II_{\perp} a_{\perp} + II_{\parallel} a_{\parallel}) \rangle}, \\ \nu_3^{(i)} &= \frac{\langle \varepsilon (k_1^i II_{\perp} a_{\perp}^3 + k_2^i II_{\perp} a_{\perp}^2 a_{\parallel} + k_3^i II_{\parallel} a_{\perp}^2 a_{\parallel} + k_4^i II_{\parallel} a_{\perp} a_{\parallel}^2) \rangle}{3 \langle \varepsilon (2 II_{\perp} a_{\perp} + II_{\parallel} a_{\parallel}) \rangle}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Hier ist  $N$  die Konzentration der Leitungselektronen; die Werte für die Koeffizienten  $k$  sind in der Tabelle 3 angegeben. Die Koeffizienten, die in (37) und (38) eingehen, werden mit Hilfe von (42) bestimmt, wenn man  $\Pi_{\perp} = \Pi_{\parallel} = 1$  annimmt und  $\sigma$  statt  $\nu$  setzt.

Tabelle 3

$i$	1	2	3
$k_1^i$	-2	2	-2
$k_2^i$	-4	4	2
$k_3^i$	-1	1	2
$k_4^i$	-2	2	-2

Somit bestimmen die Formeln (40), (41) und (42) sämtliche Koeffizienten, die in die rechten Seiten der Formeln (37) und (38) für n-leitendes Ge eingehen. Damit ist die Aufgabe, die Koeffizienten zu finden, die in die phänomenologische Theorie des ersten Abschnitts eingehen, gelöst.

Ein Vergleich der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit mit den Versuchsergebnissen ermöglicht, neue Angaben über den Anteil der Phononen an den thermomagnetischen Effekten zu erhalten und die Größe der Anisotropie

$$K = \frac{\tau_{\perp} m_{\parallel}}{\tau_{\parallel} m_{\perp}}, \quad L = \frac{\Pi_{\phi\perp}}{\Pi_{\phi\parallel}}$$

für n-leitendes Ge zu präzisieren.

Zum Schluß danke ich Herrn G. E. Pikus für das vorgeschlagene Thema und die Leitung der Arbeit.

### Literatur

- [1] C. HERRING, Bell Syst. tech. J. **34**, 237 (1955).
- [2] R. W. KEYES, Phys. Rev. **103**, 1240 (1956).
- [3] J. R. DRABBLE, J. Electronics and Control **5**, 362 (1958).
- [4] G. E. PIKUS und G. L. BIR, Fiz. tverd. Tela **1**, 1827 (1959).
- [5] L. GREBNER, Phys. Rev. **117**, 689 (1960).
- [6] C. HERRING, T. H. GEBALLE und J. E. KUNZLER, Phys. Rev. **111**, 36 (1958).  
C. HERRING, Bell Syst. tech. J. **38**, 657 (1959).
- [7] C. HERRING und E. VOGT, Phys. Rev. **101**, 944 (1956).

(Received July 13, 1965)