

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СПИНОВЫХ ВОЛН

В. Е. Захаров, В. С. Львов и С. С. Старобинец

Исследуется неустойчивость монохроматических спиновых волн в изотропном ферромагнетике по отношению к четырехволновому процессу распада с законом сохранения $2\omega_{k_0} = \omega_{k_0+x} + \omega_{k_0-x}$. Показано, что короткие спиновые волны, для которых преобладает обменное взаимодействие, неустойчивы по отношению к такому процессу D с малыми x . Для более длинных волн становится существенным диполь-дипольное взаимодействие, и характер неустойчивости зависит от направления распространения волны. Неустойчивость волн, распространяющихся вдоль намагниченности, так же как и «обменных» волн, имеет модуляционный характер; показано, что ее можно подавить внешним магнитным полем, большим чем $4\pi M \times (N_s + 1)$. Спиновая волна с $k_0 \perp M$ неустойчива по отношению к процессу (1) с любыми x . Интересно, что когда магнитное поле внутри образца мало, так что ферромагнетик близок к разбиению на домены, порог этой неустойчивости резко уменьшается для длинных спиновых волн.

В последнее время интенсивно исследуется проблема устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией: плазме, диэлектриках и др. Проблема устойчивости спиновых колебаний была поставлена Сулом в работе [1]; им было открыто явление неустойчивости однородной прецессии намагниченности по отношению к распаду на спиновые волны. Эти волны в свою очередь могут распадаться на другие спиновые волны. В этой работе мы рассмотрим задачу такого типа: в ферромагнетике распространяется плоская монохроматическая спиновая волна ω_{k_0} конечной амплитуды; исследуется ее устойчивость по отношению к четырехволновому процессу распада с законом сохранения

$$2\omega_{k_0} = \omega_{k_0+x} + \omega_{k_0-x}. \quad (1)$$

Мы считаем, что более сильные трехволновые процессы типа $\omega_{k_0} = \omega_{\frac{k_0}{2}+x} + \omega_{\frac{k_0}{2}-x}$ запрещены по закону сохранения. Для этого необходимо, чтобы частота ω_{k_0} была меньше, чем удвоенная щель в спектре. Изучаемая нами неустойчивость (1), как показано в разделе 3, возможна при любой частоте ω_{k_0} .

Характер неустойчивости (1) существенно зависит от величины волнового вектора возмущения x . При $x \sim k_0$ эта неустойчивость является аналогом трехволновых процессов. При $x \ll k_0$ процесс (1) можно интерпретировать как неустойчивость монохроматической волны ω_{k_0} по отношению к появлению модуляции ее амплитуды.

В 1 разделе уравнение движения намагниченности приведено к каноническому виду, благодаря чему нелинейные процессы в ферромагнетике описываются в рамках классического гамильтонова формализма. Это позволяет нам в этой работе использовать методы, развитые при рассмотрении неустойчивости в других нелинейных средах [2, 3].

В разделе 2 рассмотрены дисперсные соотношения для волнового вектора возмущения x и исследуются условия неустойчивости бегущей монохроматической волны в диссипативной нелинейной среде.

В разделе 3 полученные формулы применяются для анализа неустойчивости спиновых волн в изотропном ферромагнетике.

1. Уравнения движения в каноническом виде

Будем исходить из феноменологических уравнений движения вектора намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ в сплошной среде^[4]

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = g \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}, t), \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)} \right], \quad (2)$$

где g — гиромагнитное отношение, $\frac{\delta}{\delta \mathbf{M}}$ — функциональная производная от полной энергии ферромагнетика W .

В круговых переменных $M_{\pm} = M_x \pm iM_y$ уравнение (2) принимает более простой вид

$$\frac{\partial M_{\pm}}{\partial t} = \mp 2igM_z \frac{\delta W}{\delta M_{\mp}}; \quad M_z^2 = M^2 - M_+M_- \quad (3)$$

Непосредственной подстановкой можно показать^[5], что в переменных $a(r)$, $a^*(r)$, определяемых соотношениями

$$M_+ = \sqrt{2gM} a \sqrt{1 - \frac{ga a^*}{2M}}; \quad M_z = M - ga a^*, \quad (4)$$

уравнения движения (3) примут канонический вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -i \frac{\delta W}{\delta a^*}; \quad \frac{\partial a^*}{\partial t} = i \frac{\delta W}{\delta a}. \quad (5)$$

Переменные a и a^* являются канонически сопряженными переменными, а энергия W в этих переменных становится функцией Гамильтона.¹

Уравнения движения (5) не имеют вида, специфического для ферромагнетиков, поэтому дальнейшее рассмотрение относится к ним в той же мере, как и к другим нелинейным средам, уравнение движения которых может быть приведено к каноническому виду.

Гамильтониан W удобно записать в новых канонических переменных $b_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}^*$ — комплексных амплитудах бегущих волн, выбранных так, чтобы квадратичная часть гамильтониана была диагональной (см. Приложение 2). С точностью до членов четвертого порядка

$$\begin{aligned} W = & \int \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* d\mathbf{k} + \int [V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} + V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^* b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}_1}^* b_{\mathbf{k}_2}^*] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \\ & + \frac{1}{3} \int [U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} + U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^* b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}_1}^* b_{\mathbf{k}_2}^*] \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \\ & + \frac{1}{2} \int W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Из членов четвертого порядка оставлены только те, которые описывают интересующие нас процессы распада двух волн на две волны с законом сохранения

$$\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} = \omega_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} + \omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}. \quad (7)$$

Будем считать, что для тройных процессов не выполняются законы сохранения энергии-импульса. Однако следует учесть вклад тройных членов в четырехволновые процессы во втором порядке теории возмущения. Для этого произведем нелинейное преобразование к новым переменным $c_{\mathbf{k}}$ (см. Приложение 1), в которых гамильтониан (6) примет вид

$$W = \int \omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^* d\mathbf{k} + \frac{1}{2} \int T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} c_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2} c_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \quad (8)$$

¹ Отметим, что преобразования (4) являются классическим аналогом преобразований Холстейна—Примакова^[6]. Впервые для анализа нелинейных эффектов в ферромагнетике они использовались Шлеманном^[7].

Уравнения движения получаются варьированием гамильтониана (8) по правилу (4)

$$\dot{c}_k + i\omega_k c_k = -i \int T_{kk_1k_2k_3} c_{k_1}^* c_{k_2} c_{k_3} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (9)$$

Переменные c_k мы разобьем на две группы — волны большой амплитуды, поведение которых мы будем описывать динамически, и тепловые волны со случайными фазами. Взаимодействие этих групп в рамках уравнения движения (9) приводит к линейному затуханию. Кроме того, к затуханию будет приводить взаимодействие с волнами другой природы, примесями, дефектами и т. д. Все эти диссипативные процессы мы учтем феноменологически, добавляя к частоте ω_k малую мнимую добавку $-i\gamma_k$, а к функции T — малую антиэрмитову добавку $-i\eta$.

В результате получим динамическое уравнение движения для волн в нелинейной среде

$$\begin{aligned} \dot{c}_k + (\gamma_k + i\omega_k) c_k = -i \int (T_{kk_1k_2k_3} - i\eta_{kk_1k_2k_3}) c_{k_1}^* c_{k_2} c_{k_3} \delta \times \\ \times (k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Функцию $\eta_{kk_1k_2k_3}$ следует считать действительной и положительно определенной, в таком виде она описывает нелинейное затухание, пропорциональное квадрату амплитуды волны c_k . В некоторых случаях нелинейное затухание зависит от более высоких степеней амплитуды, однако это не приводит к существенным изменениям результатов.

2. Дисперсионные соотношения

Рассмотрим устойчивость плоской монохроматической волны

$$c_k^0 = c_0 \exp[-i\omega_0 t] \delta(k - k_0). \quad (11)$$

Будем считать, что эта волна возбуждается некоторой вынуждающей силой $f_k = f_0 \delta(k - k_0) \exp(-i\omega_0 t)$, природа которой для нас несущественна. Добавляя эту силу в правую часть уравнения (10), получим

$$f_0 = c_0 (\gamma + \eta_0 |c_0|^2); \quad \omega_0 = \omega_{k_0} + T_0 |c_0|^2,$$

где

$$T_0 = T_{k_0 k_0 k_0 k_0}; \quad \eta_0 = \eta_{k_0 k_0 k_0 k_0}.$$

Исследуем устойчивость волны (11) по отношению к малым возмущениям вида

$$\begin{aligned} c_k = c_k^0 + [\alpha \delta(k - k_0 - z) \exp(-i\omega_0 t) + \alpha^* \delta(k - k_0 + z) \times \\ \times \exp(i\omega_0 t)] \exp(-i\Omega t). \end{aligned} \quad (12)$$

Выбор возмущения в другом виде не приводит к новым результатам, так как произвольное возмущение можно представить как суперпозицию возмущений (12).

Подставляя (12) в уравнение движения (10), получим дисперсионное соотношение $\Omega(z)$

$$\begin{aligned} \Omega(z) = -i\gamma + \frac{1}{2} (\omega_{k_0+z} - \omega_{k_0-z}) + [G(z) - G(-z)] |c_0|^2 \pm \\ \pm \frac{1}{2} [(\omega_{k_0+z} - 2\omega_{k_0} + \omega_{k_0-z} + 2|c_0|^2 T(z))^2 - 4|F(z)|^2 |c_0|^4]^{1/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= G^*(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{k}_0+\mathbf{x}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0+\mathbf{x}, \mathbf{k}_0;} \\ F(\mathbf{x}) &= T_{\mathbf{k}_0+\mathbf{x}, \mathbf{k}_0-\mathbf{x}; \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0;} \\ T(\mathbf{x}) &= G(\mathbf{x}) + G(-\mathbf{x}) - T_0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если $\mathbf{x}$ не мало по сравнению с k_0 и выполняется (1), то первое слагаемое под радикалом в формуле (13) можно обратить в нуль небольшим изменением $\mathbf{x}$. При этом частота $\Omega(\mathbf{x})$ приобретает мнимую добавку $\text{Im } \Omega(\mathbf{x}) = -\gamma + |F| |c_0|^2$. Если

$$|c_0|^2 \geq \frac{\gamma}{|F|}, \quad (15)$$

то $\text{Im } \Omega > 0$. Это означает, что исходная волна $c_0 k$ становится неустойчивой по отношению к четырехволновому процессу распада с законами сохранения (1).

Случай малых $\mathbf{x}$ требует особого рассмотрения. Тогда функции $G(\mathbf{x})$, $T(\mathbf{x})$, $F(\mathbf{x})$ могут зависеть только от $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \xi$ и дисперсионное соотношение (13) приобретает вид

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{x}) &= -i\gamma + (\mathbf{x}\mathbf{v}) + |c_0|^2 (G(\xi) - G(-\xi)) \pm \\ &\pm \left[\left(\frac{x^2}{k_0^2} L(\xi) + |c_0|^2 T(\xi) \right)^2 - |c_0|^4 |F(\xi)|^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathbf{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}$ — групповая скорость,

$$L(\xi) = \frac{1}{2} \xi_\alpha \xi_\beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}. \quad (17)$$

Как и следовало ожидать, при $\mathbf{x} = 0$ волна оказывается устойчивой: $\Omega(0) = -i\gamma$. Для неустойчивости необходимо (но не достаточно), чтобы подкоренное выражение в (16) было отрицательным. Это будет, если большее из чисел

$$-\frac{T(\xi) \pm |F(\xi)|}{L(\xi)} > 0. \quad (18)$$

Дисперсионные соотношения (13), (16) описывают неустойчивость бегущих волн в произвольной среде с гамильтонианом (6). Дальнейший анализ этих выражений проводится для изотропного ферромагнетика.

3. Изотропный ферромагнетик

Энергия ферромагнетика W состоит из обменной энергии, энергии «кристаллографической анизотропии» W_a , энергии диполь-дипольного взаимодействия W_d и W_H — энергия ферромагнетика во внешнем поле H . Наиболее простая теория получается для коротких спиновых волн, когда обменное взаимодействие преобладает. Тогда энергия имеет простой вид

$$W_{\text{ex}} = \frac{\omega_{\text{ex}}}{2gM_0} \int \mathbf{M}(\mathbf{k}) \mathbf{M}^*(\mathbf{k}) (lk)^2 d\mathbf{k}, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \quad (20)$$

g — гиромагнитное отношение, $\frac{\omega_{\text{ex}}}{g}$ — обменное поле, l — постоянная решетки.

Однако до сих пор умеют возбуждать лишь сравнительно длинные спиновые волны с $k \ll 10^5 \text{ см}^{-1}$, для которых существенны магнитные взаимодействия, поэтому приходится рассматривать более сложную модель ферромагнетика с диполь-дипольным взаимодействием. Для образца в форме эллипсоида вращения

$$W_d = \frac{\omega_M}{2gM} \left[\int \frac{|\mathbf{kM}(\mathbf{k})| |\mathbf{kM}^*(\mathbf{k})|}{k^2} \left(1 - \frac{\delta(\mathbf{k})}{\delta(0)} \right) d\mathbf{k} - \frac{N_z}{V} \left[\int M_z(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right]^2 \right], \quad (21)$$

где $\omega_M = 4\pi gM$, N_z — размагничивающий фактор вдоль оси вращения z ($N_z \leq 1$); $\delta(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Здесь интегрирование производится по объему образца V , так что $\delta(0) = (2\pi)^{-3} V$.

Наряду с диполь-дипольной энергией следует учитывать сравнимую с ней по величине энергию ферромагнетика во внешнем поле

$$W_H = -(2\pi)^{3/2} H \int M_z(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (22)$$

Для простоты мы пренебрегаем энергией кристаллографической анизотропии. Один из случаев, когда эта энергия является существенной (одноосный ферромагнетик типа легкая плоскость), рассмотрен в [5].

С помощью выражений для энергии (19)–(22) в Приложении 2 вычислены функции $T(\xi)$ и $F(\xi)$, входящие в формулу (16) для инкремента неустойчивости.

4. Условия неустойчивости бегущих спиновых волн

1. Рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда обменное взаимодействие является преобладающим, $\omega_{\text{ex}}(lk)^2 \gg \omega_M$. Тогда спектр спиновых волн (П2, 3) изотропен: $\omega = gH + \omega_{\text{ex}}(lk)^2$ и легко убедиться в том, что закон сохранения энергии-импульса (1) выполняется только для $\kappa = 0$. Это означает, что «обменная» спиновая волна устойчива по отношению к возмущению (12) с большим κ . Однако возмущения с $\kappa \ll k_0$ могут тем не менее стать неустойчивыми. Чтобы показать это, обратимся к дисперсионному соотношению (16). Для «обменных» волн функции $T(\xi)$, $F(\xi)$ и $L(\xi)$ имеют вид (см. (П2, 7), (П2, 3))

$$\left. \begin{aligned} T(\xi) = F(\xi) &= (2\pi)^{-3} g M_0^{-1} \omega_{\text{ex}}(lk_0)^2; \\ L(\xi) &= \omega_{\text{ex}}(lk_0)^2. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Подставляя (23) в (16) получим, что инкремент неустойчивости $\text{Im } \Omega(\kappa)$ максимален при

$$\left(\frac{\kappa}{k_0} \right)^2 = -|c_0|^2 \frac{T}{L} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|c_0|^2 g}{M} = \frac{\Delta M_z}{M}, \quad (24)$$

где ΔM_z — изменение статической намагниченности M_z , вызванное исходной волной c_k^0 . Пороговая амплитуда волны $|c_0|_{\text{пор}}^2 = \gamma |F|^{-1}$ и

$$\left(\frac{\Delta M_z}{M} \right)_{\text{пор}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g}{M} \frac{\gamma}{|F|} = \frac{\gamma}{\omega_{\text{ex}}(lk_0)^2}. \quad (25)$$

Таким образом, «обменная» волна достаточно большой амплитуды всегда оказывается неустойчивой по отношению к процессу (1) с малыми $\left(\frac{\kappa}{k_0} \right)^2$, лежащими вблизи $\gamma [\omega_{\text{ex}}(lk_0)^2]^{-1}$. Эта неустойчивость приводит к появлению длиннопериодных продольных ($\kappa \parallel \mathbf{k}_0$) и поперечных ($\kappa \perp \mathbf{k}_0$) модуляций амплитуды бегущей спиновой волны.

2. Для длинных спиновых волн, когда нужно учитывать диполь-дипольные взаимодействия, характер неустойчивости будет зависеть от направления распространения волны. В случае «продольной» волны ($\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{M}$) неустойчивость с большими χ по-прежнему невозможна в силу условия (1). Для случая малых χ с учетом диполь-дипольного взаимодействия получим из (П2, 7) и (П2, 3)

$$\left. \begin{aligned} F(\xi) &= T(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g}{M} [-\omega_{\text{ex}}(lk_0)^2 + \omega_M \cos^2 \vartheta \varphi(\xi)]; \\ \varphi(\xi) &= \frac{\Omega - \omega_M \sin^2 \vartheta}{\Omega + \omega_M \sin^2 \vartheta}; \quad \Omega = gH - \omega_M N_z; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$L(\xi) = \omega_{\text{ex}}(lk_0)^2 + \frac{\omega_M}{2} \sin^2 \vartheta; \quad \cos \vartheta \equiv \xi_s. \quad (27)$$

При $F = T$ необходимым условием неустойчивости, как следует из (18), является $TL^{-1} < 0$. Заметим, что $L(\xi)$ всегда положительно, а $T(\xi) > 0$ лишь, если $\omega_{\text{ex}}(lk_0)^2 < \omega_M$ и $\varphi(\xi) > 0$, поэтому внешнее магнитное поле, большее чем $4\pi M(N_z + 1)$, стабилизирует модуляционную неустойчивость бегущей волны с $\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{M}$.

Если же $H < 4\pi M(N_z + 1)$, то $\varphi(\xi)$ будет отрицательной для некоторых направлений и возникает неустойчивость с малыми χ , в первую очередь с такими, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\chi}{k_0} = \frac{\gamma}{L(\xi)}. \quad (28)$$

Порог этой неустойчивости определяется выражением (25), в котором F определяется формулой (26).

3. Случай поперечного распространения волны ($\mathbf{k}_0 \perp \mathbf{M}$) отличается от продольного ($\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{M}$) тем, что может возникнуть неустойчивость с большими χ . Это происходит потому, что при распаде волны с $\mathbf{k}_0 \perp \mathbf{M}$ ее диполь-дипольная энергия уменьшается и может компенсировать увеличение обменной энергии при некоторых χ . Порог неустойчивости с большими χ , однако, совпадает по порядку величины с порогом для $\chi \ll k_0$, и для простоты мы ограничимся этим последним случаем.

Анализ условий неустойчивости при произвольных ω_M , Ω и $\omega_{\text{ex}}(lk_0)^2$ занял бы слишком много места; мы рассмотрим только один интересный случай $\omega_M \gg \Omega$, $\omega_{\text{ex}}(lk_0)^2$. Другие частные случаи рассмотрены нами в [5].

В нашем случае из (П2, 7) и (П2, 3) получаем

$$\left. \begin{aligned} T(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g}{M} \frac{\omega_M}{\Omega + \omega_{\text{ex}}(lk_0)^2} [-2N_z + \cos^2 \vartheta] \frac{\omega_M}{8}; \\ F(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g}{M} \frac{\omega_M}{\Omega + \omega_{\text{ex}}(lk_0)^2} [N_z - \cos^2 \vartheta] \frac{\omega_M}{8}; \\ L(\xi) &= \frac{\omega_{k_0}}{k_0^2} \frac{\Omega}{\Omega + \omega_{\text{ex}}(lk_0)^2} \left[\frac{\omega_{\text{ex}}}{\Omega + \omega_{\text{ex}}(lk_0)^2} \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Так как $L(\xi)$ может изменять знак, то спиновые волны неустойчивы при любых знаках F и T . Пороговая амплитуда равна

$$\left(\frac{\Delta M_z}{M} \right)_{\text{пор.}} = \frac{8\gamma}{\omega_M} \frac{\Omega + \omega_{\text{ex}}(lk_0)^2}{\omega_M} |N_z - \cos^2 \vartheta|^{-1}. \quad (30)$$

Отсюда видно, что для длинных спиновых волн ($\omega_{\text{ex}}(lk_0)^2 \ll \omega_M$), распространяющихся в образце, в котором внутреннее поле мало ($\Omega \ll \omega_M$), порог неустойчивости существенно уменьшается.

4. Оценим интенсивность спиновой волны, при которой возникает неустойчивость. Из (25) и (26), (29) следует, что $\left(\frac{\Delta M_z}{M}\right)_{\text{пор.}} \sim \gamma \omega^{-1}$. Соответствующее значение потока энергии в спиновой волне

$$P_{\text{пор.}} = \omega c_{\text{пор.}}^2 \frac{\partial \omega}{\partial k} \simeq \frac{\gamma M}{g} \omega_{\text{ex}} l^2 k,$$

Для монокристалла иттриевого граната $\gamma \sim 10^6 \text{ сек.}^{-1}$, $M \simeq 10^2 \text{ гс}$, $\omega_{\text{ex}} l^2 \sim 0.1 \text{ см}^2 \cdot \text{сек.}^{-1}$. Выбирая $k \leq 10^4 \text{ см}^{-1}$, получим $P_{\text{пор.}} \sim 10^{-3} \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$.

Следует отметить, что выражение (31) ограничивает сверху поток энергии, который может переноситься в кристалле спиновой волной. Этот поток обычно значительно меньше, чем максимальный поток энергии ($\sim 0.1 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$) для упругой волны в ферромагнетике [8], поэтому критические значения потока (31) могут достигаться в процессе преобразования упругих волн в спиновые в неоднородном магнитном поле [9].

Приложение 1

Гамильтониан (6) приводится к виду (8) следующим преобразованием [5]

$$\begin{aligned} b_k = c_k - & \int \frac{V_{kk_1k_2} c_{k_1} c_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} + \\ & + 2 \int \frac{V_{k_2kk_1}^* c_{k_1} c_{k_2}^* \delta(k_2 - k - k_1) dk_1 dk_2}{\omega_{k_2} - \omega_k - \omega_{k_1}} - \\ & - \int \frac{U_{kk_1k_2} c_{k_1}^* c_{k_2}^* \delta(k + k_1 + k_2) dk_1 dk_2}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}. \end{aligned} \quad (\text{П1, 1})$$

Преобразование (П1, 1), во-первых, с точностью до членов третьего порядка является каноническим и не меняет поэтому гамильтониановой формы уравнений движения; во-вторых, оно выбрано так, чтобы результирующий гамильтониан не содержал тройных членов, т. е. имел вид (8), где

$$\begin{aligned} T_{kk_1k_2k_3} = & W_{kk_1k_2k_3} - \frac{U_{-(k_2+k_3)k_2k_3} U_{-(k+k_1)kk_1}^*}{\omega_{k_2+k_3} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}} - \\ & - \frac{U_{-(k+k_1)kk_1}^* U_{-(k_2+k_3)k_2k_3}}{\omega_{k+k_1} + \omega_k + \omega_{k_1}} - \frac{V_{k_2+k_3, k_2k_3}^* V_{k+k_1, kk_1}}{\omega_{k_2+k_3} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}} - \frac{V_{k+k_1, kk_1}^* V_{k_2+k_3, k_2k_3}}{\omega_{k+k_1} - \omega_k - \omega_{k_1}} - \\ & - 2 \frac{V_{kk_2, k-k_2} V_{k_3k_1, k_3-k_1}^*}{\omega_{k_3-k_1} + \omega_{k_1} - \omega_{k_3}} - 2 \frac{V_{k_1k_3, k_1-k_3} V_{k_2k, k_2-k}^*}{\omega_{k_2-k} + \omega_k - \omega_{k_2}} - \\ & - 2 \frac{V_{k_1k_2, k_1-k_2} V_{k_3k_2, k_3-k}^*}{\omega_{k_3-k} + \omega_k - \omega_{k_3}} - 2 \frac{V_{kk_3, k-k_3} V_{k_2k_1, k_2-k_1}^*}{\omega_{k_2-k_1} + \omega_{k_1} - \omega_{k_2}}. \end{aligned} \quad (\text{П1, 2})$$

Функции T_{kk_1, k_2k_3} удовлетворяют очевидным условиям симметрии:

$$T_{kk_1, k_2k_3} = T_{k_1k, k_2k_3} = T_{kk_1, k_3k_2} = T_{k_2k_3, kk_1}^*. \quad (\text{П1, 3})$$

Кроме того, в (8) появляются не интересующие нас члены типа $c_k^* c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3}$, $c_k c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3}$ и т. п.

Приложение 2

Перейдем в выражениях для энергии (19), (21), (22) к каноническим переменным, используя преобразования (4), записанные в k -представлении. В результате получим функцию Гамильтона W

$$\begin{aligned}
 W &= W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)}; \\
 W^{(2)} &= \int A_k a_k^* a_k dk + \frac{1}{2} \int (B_k a_k a_{-k} + B_k^* a_k^* a_{-k}^*) dk; \\
 W^{(3)} &= -\frac{\omega_M}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{g}{2M}} \int \frac{k_{1z}}{k_1^2} \left(1 - \frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right) [k_{1+} a_{-k_1}^* + k_{1+} a_{k_1}] \times \\
 &\quad \times a_{k_2} a_{k_3}^* \delta(k_1 + k_2 + k_3) dk_1 dk_2 dk_3; \\
 W^{(4)} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g}{M} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}^* a_{k_4}^* \delta(k_1 + k_2 - \\
 &\quad - k_3 - k_4) \frac{1}{4} [C_{k_1-k_3} + C_{k_1-k_4} + C_{k_2-k_3} + C_{k_2-k_4} - D_{k_1} - D_{k_2} - \\
 &\quad - D_{k_3} - D_{k_4}] - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g}{M} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 - k_4) \times \\
 &\quad \times \left\{ a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a_{k_4}^* \frac{1}{6} (B_{k_1} + B_{k_3} + B_{k_2}) + \kappa. c. \right\}.
 \end{aligned} \tag{П2, 1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A_k &= \Omega + \omega_{ex}(lk)^2 + \omega_M \frac{|k_+|^2}{2k^2} \left(1 - \frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right); \\
 B_k &= \omega_M \frac{k_+^2}{2k^2} \left(1 - \frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right); \\
 C_k &= \omega_{ex}(lk)^2 + \omega_M N_z \frac{\delta(k)}{\delta(0)} + \omega_M \frac{k_z^2}{k^2} \left(1 - \frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right); \\
 D_k &= \omega_{ex}(lk)^2 + \omega_M \frac{|k_+|^2}{2k^2} \left(1 - \frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right); \\
 \Omega &= gH - \omega_M N_z; \quad k_+ = k_x + ik_y.
 \end{aligned} \tag{П2, 2}$$

Совершим второе каноническое преобразование [1], приводящее $W^{(2)}$ к диагональному виду

$$W^{(2)} = \int \omega_k b_k b_k^* dk; \quad \omega_k^2 = A_k - |B_k|^2. \tag{П2, 3}$$

Тогда гамильтониан (П2, 1) приводится к виду (6). Общие выражения для коэффициентов $V_{kk_1k_2}$, $U_{kk_2k_3}$ и $W_{kk_1k_2k_3}$ приведены нами в [5]. В случае, когда все k_i близки к k_0 ,

$$\begin{aligned}
 W_{k_1k_2k_3k_4} &= \rho \left\{ \frac{A^2}{2} [C_{k_1-k_3} + C_{k_1-k_4} + C_{k_2-k_3} + C_{k_2-k_4}] + \right. \\
 &\quad \left. + B^2 [C_{k_1-k_2} + C_{k_3-k_4}] + (2A^2 + B^2) \omega_{ex}(lk_0)^2 - (A - B)(2A - B)B \right\}.
 \end{aligned} \tag{П2, 4}$$

Здесь

$$\rho^{-1} = 2(2\pi)^3 \omega_{k_0}^2 g^{-1} M_0; \quad A = A_{k_0}; \quad B = B_{k_0}. \tag{П2, 5}$$

Вычисление вклада в $T_{k_1k_2k_3k_4}$ процессов третьего порядка по формуле (П1, 2) значительно упрощается в случае $k_0 \parallel M$ или $k_0 \perp M$. Тогда $U_{\pm 2k_0, k_0, 0} = V_{\pm 2k_0, k_0, 0} = V_{k_0, k_0, 0} = 0$ и существенный матричный элемент

$$\frac{|V_{k_0, k_0, \pm z}|^2}{\omega(z)} = \rho \frac{\omega_M^2 A^2}{4} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\Omega + \omega_M \sin^2 \theta}; \quad \cos \theta = \frac{z_z}{|z|}. \tag{П2, 6}$$

Используя (П1, 2) и (П2, 3)—(П2, 6), получим в случае $k_0 \parallel M$ или $k_0 \perp M$

$$\begin{aligned}
 F &= F_0 + \rho \omega_M [B^2 N_z + \cos^2 \theta (B^2 + 2A^2 \varphi(\xi))]; \\
 T &= F_0 + 2\rho \omega_M [-B^2 N_z + \cos^2 \theta (2B^2 + A^2 \varphi(\xi))],
 \end{aligned} \tag{П2, 7}$$

где

$$F_0 \equiv -\rho [B(A-B)(2A-B) + (2A^2 + B^2)\omega_{\text{ex}}(lk_0)^2],$$

а $\varphi(\xi)$, Ω определяется из (26).

Если $k_0 \parallel M$, то $A = \omega_{k_0}$, $B = 0$ и выражения (П2, 7) упрощаются. В этом случае из (П2, 7) и (17) получим формулы (26), (27). Если же $k_0 \perp M$ и $\omega_M \gg \omega_{\text{ex}}(lk)^2$, $\omega_M \gg \Omega$, то из (П2, 7) и (17) получим формулы (29).

Л и т е р а т у р а

- [1] H. Suhl. Phys. Chem. Sol., 1, 209, 1957.
- [2] В. Е. Захаров. ЖЭТФ, 51, 1107, 1966.
- [3] В. Е. Захаров. ЖЭТФ, 53, 1733, 1967.
- [4] А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. Спин-
новые волны. Изд. «Наука», М., 1967.
- [5] В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец. Препринт
ИЯФ СО АН СССР, № 227, 1968.
- [6] H. Holstein, T. Primakoff. Phys. Rev., 58, 1098, 1940.
- [7] E. Schlömann. Phys. Rev., 35, 2382, 1964.
- [8] А. Г. Гуревич. ФТТ, 6, 2376, 1964.
- [9] E. Schlömann, R. I. Joseph. J. Appl. Phys., 116, 826, 1959.

Институт полупроводников
АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
9 декабря 1968 г.
В окончательной редакции
19 июня 1969 г.