

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН  
В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ  
С МАГНИТНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

B. E. Захаров и B. C. Льевов

Построена последовательная нелинейная теория параметрического возбуждения волн в среде со случайными неоднородностями. Применяется диаграммная техника, являющаяся развитием техники Уайльда. Определен порог параметрического возбуждения волн для произвольной концентрации примесей, распределение волн в  $k$ -пространстве, корреляционные характеристики системы волн, вычислены измеряемые на опыте нелинейные характеристики системы — восприимчивости  $\chi'$  и  $\chi''$ .

К настоящему времени подробно развита нелинейная теория параметрического возбуждения спиновых волн в ферромагнетиках, основанная на упрощении гамильтониана взаимодействия до вида, диагонального по парам волн с равными и противоположными волновыми векторами [1-3]. В данной статье эта теория обобщается на случай ферромагнетиков со случайными магнитными неоднородностями, влиянием которых в большинстве экспериментов с реальными кристаллами нельзя пренебрегать.

Природа магнитных неоднородностей и их влияние на ширину линии ферромагнитного резонанса детально исследовались в ряде работ [4, 5]. Параметрическое возбуждение спиновых волн методом перпендикулярной накачки в неоднородных кристаллах изучалось в [6, 7], в них, однако, не учитывалось взаимодействие параметрически возбужденных волн, которое, как показано в [8], весьма существенно. В [9] изучается влияние неоднородностей на порог параллельной накачки, однако, это рассмотрение некорректно, потому что в нем не учитываются фазовые соотношения в системе волн.

В нашей работе строится последовательная теория параметрического возбуждения волн в среде со случайными неоднородностями, учитывающая как нелинейное взаимодействие волн, так и их рассеяние на неоднородностях. Для этого применяется диаграммная техника, являющаяся развитием техники Уайльда [10], разработанной им для исследования гидродинамической турбулентности. Мы определяем порог параметрического возбуждения спиновых волн в присутствии неоднородностей, изучаем их влияние на распределение спиновых волн в  $k$  пространстве и вычисляем измеряемые на эксперименте характеристики — нелинейные восприимчивости кристалла  $\chi'$  и  $\chi''$ .

### 1. И с х о д н ы е - у р а в н е н и я

Поведение параметрически возбуждаемых спиновых волн описывается в  $S$ -теории гамильтонианом

$$H_S = \int \left[ \omega_{\mathbf{k}} + \int T_{\mathbf{kk}' a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^*} d\mathbf{k}' \right] a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* d\mathbf{k} + \frac{1}{2} \int \left[ \left( hV_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_p t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \int S_{\mathbf{kk}' a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}} d\mathbf{k}' \right) a_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}}^* + \text{c. c.} \right] d\mathbf{k}, \quad (1)$$

где  $a_{\mathbf{k}}$  — амплитуды спиновых волн,  $\omega_{\mathbf{k}}$  — их закон дисперсии,  $V_{\mathbf{k}}$  — коэффициент взаимодействия пар волн  $a_{\pm \mathbf{k}}$  с высокочастотным однородным магнитным полем накачки  $h$ ,  $T_{\mathbf{kk}'}$  и  $S_{\mathbf{kk}'}$  — коэффициенты, описывающие нелинейные поправки к закону дисперсии и накачке [1-3].

Взаимодействие со случайными неоднородностями описывается гамильтонианом [5]

$$H_{\text{imp.}} = \int g_{\mathbf{kk}'} b_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^* \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{q} dk dk',$$

где  $g_{\mathbf{kk}'}$  — Фурье-компоненты потенциала взаимодействия спиновой волны с примесным центром,

$$b_{\mathbf{q}} = (2\pi)^{-3/2} \sum_n e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_n}$$

— Фурье-компоненты плотности распределения примесей. Очевидно

$$b_{\mathbf{q}} = b_{-\mathbf{q}}^*; \langle b_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}'} \rangle = c \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}'). \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по ансамблю примесей,  $c$  — концентрация примесей. В дальнейшем мы будем считать, что при рассеянии спиновых волн на примесях справедливо борновское приближение  $g_{\mathbf{kk}'} \langle k \partial \omega / \partial k \rangle$ . Тогда [11], при вычислении корреляторов от произведений  $b_{\mathbf{q}}$  можно ограничиться гауссовым приближением — считать, что все нечетные корреляторы равны нулю, а четные распадаются на произведения парных.

Канонические уравнения имеют вид

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \gamma_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = -i \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*} + f_{\mathbf{k}}(t). \quad (3)$$

В эти уравнения мы феноменологически ввели затухание волн  $\gamma_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$ , а также случайную внешнюю силу  $f_{\mathbf{k}}(t)$ , имеющую вспомогательный характер. Для нее положим

$$f_{\mathbf{k}}(t) = f_{\mathbf{k}} e^{-i \frac{\omega_p}{2} t}, \quad f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}^* = f_{\mathbf{k}}^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

горизонтальная черта сверху означает усреднение по ансамблю внешних сил. Силу  $f_{\mathbf{k}}$  будем считать гауссовой.

Ограничивааясь рассмотрением одночастотных решений, положим  $a_{\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_p/2t)$ . Имеем для  $a_{\mathbf{k}}$

$$\left( -\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} + \frac{\omega_p}{2} + i\gamma_{\mathbf{k}} \right) a_{\mathbf{k}} = P_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^* + \int g_{\mathbf{kk}'} b_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{k}') d\mathbf{q} dk'. \quad (4)$$

Здесь

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + 2 \int T_{\mathbf{kk}'} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^* dk';$$

$$P_{\mathbf{k}} = hV_{\mathbf{k}} + \int S_{\mathbf{kk}'} a_{\mathbf{k}'} a_{-\mathbf{k}} dk'$$

— перенормированные за счет взаимодействия закон дисперсии волн и накачка.

При наличии случайно распределенных примесей и случайной силы амплитуды волн  $a_{\mathbf{k}}$  являются случайными величинами. Введем для них средние

$$n_{\mathbf{k}} = \langle \overline{a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^*} \rangle, \quad \sigma_{\mathbf{k}} = \langle \overline{a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}} \rangle$$

и заменим величины  $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}$  и  $P_{\mathbf{k}}$  их средними значениями

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\mathbf{k}} &= \omega_{\mathbf{k}} + 2 \int T_{\mathbf{kk}'} n_{\mathbf{k}'} dk'; \\ P_{\mathbf{k}} &= hV_{\mathbf{k}} + \int S_{\mathbf{kk}'} \sigma_{\mathbf{k}'} dk'. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к решению и усреднению по ансамблю примесей и случайных сил линейных уравнений (4) и последующему самосогласованию по формулам (5). Мы ограничимся изучением распределений, для которых

$$n_{\mathbf{k}} = n_{-\mathbf{k}}.$$

## 2. Диаграммная техника

Перепишем уравнение (4) в виде

$$a_{\mathbf{k}} = G_0(\mathbf{k}) [P_{\mathbf{k}} a^*_{-\mathbf{k}} + \int g_{\mathbf{kk}'} b_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'\delta}(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{k}') + f_{\mathbf{k}}], \quad (6)$$

$$G_0(\mathbf{k}) = \longrightarrow, \quad G_0^*(\mathbf{k}) = \longleftarrow,$$

$$f_{\mathbf{k}} = \dashrightarrow, \quad f_{\mathbf{k}}^* = \dashleftarrow,$$

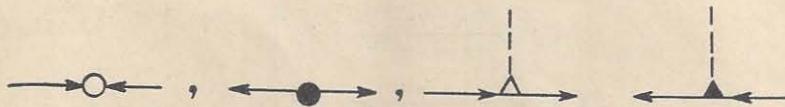


Рис. 1. Структурные элементы графиков.

вводя нулевую функцию Грина

$$G_0(\mathbf{k}) = \left[ -\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} + \frac{\omega_p}{2} + i\gamma_{\mathbf{k}} \right]^{-1} = G_0(-\mathbf{k}), \quad (7)$$

и представим его решение рядом последовательных приближений. Каждому члену ряда сопоставим график по следующим правилам: функции Грина  $G_0(\mathbf{k})$  и  $G_0^*(\mathbf{k})$  изобразим сплошными стрелками, амплитуду примеси изобразим штриховыми линиями, случайной силе  $f_{\mathbf{k}}$  и  $f_{\mathbf{k}}^*$  сопоставляются штриховые стрелки. Амплитуды взаимодействия с накачкой  $P_{\mathbf{k}}$  и  $P_{\mathbf{k}}^*$  обозначим кружками светлым и черным соответственно, примесные вершины  $g_{\mathbf{kk}'}$  и  $g_{\mathbf{kk}'}^*$  — светлым и черным треугольниками. Эти величины

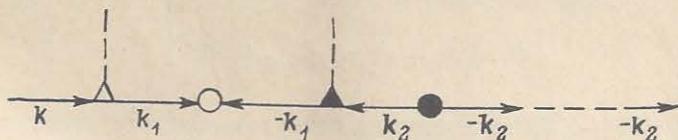


Рис. 2. График, соответствующий выражению (8).

в комбинации с функциями Грина составляют структурные элементы графиков (рис. 1). По волновым векторам всех примесных линий и функций Грина (кроме первой) производится интегрирование, при этом в «круглых» вершинах добавляется множитель  $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ , а в треугольных  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{q})$ . Все графики имеют вид прямой с отходящими от нее примесными линиями; график кончается линией случайной силы. Характерный член ряда графиков изображен на рис. 2. Ему соответствует выражение

$$G_0(\mathbf{k}) \int g_{\mathbf{kk}_1} g_{-\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^* P_{\mathbf{k}_1} P_{\mathbf{k}_2}^* |G_0(\mathbf{k}_1)|^2 |G_0(\mathbf{k}_2)|^2 b_{\mathbf{q}_1} b_{\mathbf{q}_2} f_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \times \\ \times (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_2) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (8)$$

Определим нормальную  $G(\mathbf{k})$  и аномальную  $L(\mathbf{k})$  функции Грина соотношениями

$$G_{\mathbf{k}} = \frac{\langle a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^* \rangle}{f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^*}, \quad L_{\mathbf{k}} = \frac{\langle a_{\mathbf{k}} f_{-\mathbf{k}} \rangle}{f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^*}. \quad (9)$$

Графики для  $G_k$  и  $L_k$  получаются из графиков для  $a_k$  попарным «склеиванием» по примесным линиям  $b_q$  и отбрасыванием случайной силы. В это склеивание (в борновском приближении!) вносят вклад только графики с четным числом треугольных вершин.

В функцию  $G$  вносят вклад графики с четным, а в  $L$  — с нечетным числом круглых вершин. В графиках для  $G$  и  $G^*$  число белых и черных круглых вершин совпадает, в графиках для  $L$  на одну белую вершину больше. Эти вершины чередуются, заключенные между ними треугольники имеют одинаковый цвет. Несколько первых членов рядов для  $G$  и  $L$  изображены на рис. 3.

Выделяя в рядах для  $G$  и  $L$  сильно связанные диаграммы (не рассекаемые одной линией) отсуммируем их и перейдем к уравнениям Дайсона

$$\left. \begin{aligned} G &= G_0[1 + \Sigma G + \Pi L^*]; \\ L &= G_0[\Sigma L + \Pi G^*]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь  $\Sigma_k$  и  $\Pi_k$  — нормальные и аномальные суммы сильно связанных диаграмм. В графическом виде уравнения Дайсона изображены на рис. 4.

Эти уравнения могут быть разрешены относительно  $G$  и  $L$

$$\left. \begin{aligned} G_k &= \frac{\Omega_k - \omega_p|2 + i\Gamma_k|}{(\Omega_k - \omega_p|2)^2 + \gamma_k^2}; \\ L_k &= \frac{\Pi_k}{(\Omega_k - \omega_p|2)^2 + \gamma_k^2}; \\ \gamma_k^2 &= \Gamma_k^2 - |\Pi_k|^2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь мы использовали явное выражение для  $G_0$  и ввели обозначения

$$\Gamma_k = \gamma_k - \text{Im } \Sigma_k, \quad \Omega_k = \omega_k + \text{Re } \Sigma_k. \quad (12)$$

Степень влияния примесей, характеризуемая параметром  $\gamma_{\text{imp.}} \sim ck^3 |g|^3/\omega$ , имеющим смысл декремента затухания волн на примесях в отсутствии накачки. Мы будем считать, что  $\gamma_{\text{imp.}} \ll kd\omega/dk$ . В этом приближении можно при вычислении  $\Sigma$  и  $\Pi$  ограничиться графиками, не содержащими пересечение примесных линий и положить

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_k &= c \int |g_{kk'}|^2 G_{k'} dk'; \\ \Pi_k &= P_k + c \int g_{kk'} g_{k,-k'} L_{k'} dk' \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(см. рис. 5).

Формулы (11)–(13) составляют замкнутую систему уравнений. Отметим, что в пределе  $\Pi \rightarrow 0$  из этих формул следует основной результат работы [6].

Ряды диаграмм для  $G$  и  $L$  обнаруживают формальное сходство с рядами, возникающими в теории сверхпроводимости с примесями [11]. Это сходство выходит за рамки чисто комбинаторных соотношений. Так, в обеих случаях основной вклад в диаграммы вносит интегрирование вблизи выделенной в  $k$ -пространстве поверхности. В теории сверхпроводимости это поверхность Ферми, в нашем случае — поверхность  $\omega_k = \omega_p/2$ . Как и в нашем случае, в сверхпроводимости основную роль играют графики без пересечения примесных линий.

В термодинамически равновесных системах знание функции Грина позволяет вычислить функцию распределения  $n_k$ . Система параметрически возбужденных волн весьма далека от термодинамического равновесия, в связи с чем знание функций Грина оказывается недостаточным для определения  $n_k$  и  $\delta_k$ . Уравнения для  $n_k$  и  $\sigma_k$  можно получить непосредственным усреднением произведения рядов для  $a_k$ .

При графическом изображении произведения рядов каждому слагаемому произведения соответствует совокупность двух графиков, выбранных

$$G = \rightarrow = \text{---} \xrightarrow{\Delta} + \text{---} \xrightarrow{\Delta} + \text{---} \xrightarrow{\Delta} +$$

$$+ \text{---} \xrightarrow{\Delta} + \text{---} \xrightarrow{\Delta} + \text{---} \xrightarrow{\Delta} + \dots$$

$$L = \leftarrow = \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \text{---} \xleftarrow{\Delta} +$$

$$+ \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \dots$$

Рис. 3. Первые графики рядов для функций Грина  $G, L$ .

$$\rightarrow = \text{---} + \text{---} \circlearrowright \rightarrow + \text{---} \circlearrowleft \rightarrow$$

$$\leftarrow = \text{---} \circlearrowright \rightarrow \leftarrow + \text{---} \circlearrowleft \leftarrow$$

$$\circlearrowright \equiv \Sigma, \quad \circlearrowleft \equiv \Sigma^*, \quad \circlearrowright \equiv \Pi, \quad \circlearrowleft \equiv \Pi^*$$

Рис. 4. Графическое изображение уравнений Дайсона для функций Грина.

$$\Sigma_K = \Delta \xrightarrow{\Delta}, \quad \Pi_K = 0 + \text{---} \xrightarrow{\Delta} \text{---}$$

Рис. 5. Графики для  $\Sigma$  и  $\pi$ .

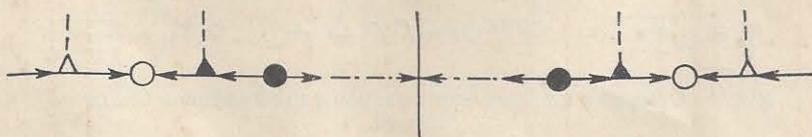


Рис. 6. График, изображающий квадрат выражения (8) (см. рис. 2).

$$\sim = \text{---} \xrightarrow{\Delta} \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \dots$$

$$+ \text{---} \xrightarrow{\Delta} \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \dots + \text{---} \xleftarrow{\Delta} \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \text{---} \xleftarrow{\Delta} + \dots$$

Рис. 7. Несколько характерных первых членов ряда для  $n_K$ .

ных из перемножаемых рядов. График из второго ряда удобно изображать зеркально отраженным от вертикальной линии. Например, квадрат выражения (8) изображен на рис. 6.

Произведем усреднение по случайной силе членов ряда для произведения, склеивая концы графиков, и затем усредним по ансамблю примесей, соединяя всевозможным образом концы  $b_q$ . Несколько первых членов ряда  $n_k$  изображены на рис. 7.

$$\begin{aligned}
 & \text{Wavy line} = \rightarrow \left\{ |f|^2 + \boxed{\rightarrow} \right\} \rightarrow + \leftarrow \left\{ |f|^2 + \boxed{\leftarrow} \right\} \leftarrow \\
 & + \leftarrow \boxed{\leftrightarrow} \rightarrow + \rightarrow \boxed{\leftrightarrow} \leftarrow \rightarrow \\
 & \text{Wavy line} = \rightarrow \boxed{\rightarrow} \leftarrow + \rightarrow \leftarrow \boxed{\rightarrow} \rightarrow \leftarrow + \\
 & + \rightarrow \leftarrow \left\{ f^2 + \boxed{\leftarrow} \right\} \leftarrow + \rightarrow \left\{ f^2 + \boxed{\rightarrow} \right\} \rightarrow \leftarrow
 \end{aligned}$$

Рис. 8. Уравнение Уайльда для  $n_k$  и  $\sigma_k$ .

Выделим в рядах для  $n_k$  и  $\sigma_k$  сильно связанные диаграммы и произведем суммирование этих рядов. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 n_k &= (|G_k|^2 + |L_k|^2)(|f_k^2| + \Phi_k) + 2 \operatorname{Re} G_k L_k^* \Psi_k; \\
 \sigma_k &= 2G_k L_k \Phi_k + G_k^2 \Psi_k + L_k^2 \Psi_k^*, \quad \boxed{\quad}
 \end{aligned} \tag{14}$$

графически изображенную на рис. 8. Эти уравнения мы назовем уравнениями Уайльда [10]. Здесь  $\Phi_k = \Phi_k^*$  и  $\Psi_k$  — нормальные и аномальные

$$\begin{aligned}
 \Phi_k &\equiv \boxed{\rightarrow} = \text{Diagram with wavy line and loop} + \dots = \Phi_k^* = \boxed{\leftarrow} \\
 \Psi_k &\equiv \boxed{\leftarrow} = \text{Diagram with wavy line and loop} + \dots; \Psi_k^* = \boxed{\leftrightarrow}
 \end{aligned}$$

Рис. 9. Суммы сильно связанных диаграмм для графиков без пересечений.

суммы сильно связанных диаграмм, содержащих усреднение по случайной силе. При их вычислении мы, как и раньше, ограничимся графиками без пересечений (рис. 9). Имеем

$$\Phi_k = c \int |g_{kk'}|^2 n_{k'} dk';$$

$$\Psi_k = c \int g_{kk'} g_{-k, +k'} \sigma_{k'} dk'.$$

Используя явный вид функций Грина (11), легко убедиться, что распределения  $n_k$  и  $\sigma_k$  по модулю  $k$  имеют вид квадрата функции Лоренца

с шириной  $v_k$  вокруг поверхности  $\Omega_k = \omega_p/2$ . Это позволяет проинтегрировать уравнение (14) по нормали к поверхности. Вводя

$$n_\Omega = k_\Omega^2 \int n(k, \Omega) dk, \quad \sigma_\Omega = k_\Omega^2 \int \sigma(k, \Omega) dk,$$

где  $\Omega$  — телесный угол, получим

$$\left. \begin{aligned} n_\Omega &= \frac{\pi k_\Omega^2}{v_\Omega v_\Omega^3} [\Gamma_\Omega (f_\Omega^2 + \Phi_\Omega) + \operatorname{Im} \Pi_\Omega^* \Psi_\Omega]; \\ \Gamma_\Omega \sigma_\Omega + i \Pi_\Omega n_\Omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Здесь  $k_\Omega$  — радиус поверхности,  $v_\Omega = \partial \omega / \partial k$  — групповая скорость в точке с угловой координатой  $\Omega$ . Величины  $\Gamma_\Omega$ ,  $\Phi_\Omega$ ,  $\Psi_\Omega$  взяты на поверхности  $\bar{\omega}_k = \omega_p/2$ . Очевидно

$$\Phi_\Omega = c \int |g_{\Omega\Omega'}|^2 n_{\Omega'} d\Omega', \quad \Psi_\Omega = c \int g_{\Omega\Omega'} g_{-\Omega, \Omega'} \sigma_{\Omega'} d\Omega'.$$

Аналогичное интегрирование по нормали можно произвести и в уравнениях (13). Получаем

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\Omega &= \gamma_\Omega + \frac{\pi c k_\Omega^2}{v_\Omega} \int |g_{\Omega\Omega'}|^2 \frac{\Gamma_{\Omega'}}{v_{\Omega'}} d\Omega'; \\ \Pi_\Omega &= P_\Omega + \frac{\pi c k_\Omega^2}{v_\Omega} \int g_{\Omega\Omega'} g_{-\Omega, \Omega'} \frac{\Pi_{\Omega'}}{v_{\Omega'}} d\Omega'. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Отметим, что уравнения (15), (16) можно переписать в виде, напоминающем стационарное уравнение  $S$ -теории в однородной среде

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_\Omega (n_\Omega - \tilde{n}_\Omega) + \operatorname{Im} \Pi_\Omega^* (\sigma_\Omega - \tilde{\sigma}_\Omega) &= 0; \\ \Gamma_\Omega \sigma_\Omega + i \Pi_\Omega n_\Omega &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\tilde{n}_\Omega = \frac{\pi k_\Omega^2}{v_\Omega v_\Omega} (|f_\Omega|^2 + \Phi_\Omega), \quad \tilde{\sigma}_\Omega = \frac{\pi k_\Omega^2}{v_\Omega v_\Omega} \Psi_\Omega.$$

Уравнения (17) отличаются от уравнений  $S$ -теории перенормировкой затухания  $\gamma_\Omega \rightarrow \Gamma_\Omega$  и накачки  $P_\Omega \rightarrow \Pi_\Omega$ . Кроме того, в них возникает перенормировка случайной силы и появляется дополнительный шумовой член  $\sigma_\Omega$ .

Уравнения (16), (17) описывают реакцию системы на случайную силу в присутствии примесей. Они, однако, имеют решение и при  $f^2 \rightarrow 0$ . Именно такие решения (их можно рассматривать как нулевой член разложения по степеням  $|f|^2$ ) мы и будем рассматривать в дальнейшем. Физический смысл этих решений состоит в том, что они обладают максимальной устойчивостью относительно включения малой случайной силы (которая реально всегда присутствует). Полагая  $|f|^2 = 0$ , получим окончательно

$$\tilde{n}_\Omega = \frac{\pi k_\Omega^2}{v_\Omega v_\Omega} \Phi_{k*}. \quad (18)$$

### 3. Порог параметрического возбуждения волн

В дальнейшем мы будем рассматривать случай аксиальной симметрии, реализующийся в экспериментах при параметрическом возбуждении спиновых волн в кубических ферромагнетиках, когда намагниченность  $M$  направлена вдоль осей симметрии [100] и [111]. При возбуждении параллельной накачкой

$$V_k = V_{||} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}. \quad (19)$$

Здесь  $\theta$  и  $\varphi$  — азимутальный и полярный углы вектора в сферической системе координат, ориентированной вдоль вектора  $M$ . При возбуждении перпендикулярной накачкой для процессов первого порядка

$$V_k = V_{\perp} \sin 2\theta e^{i\varphi}. \quad (20)$$

В аксиально симметричной  $S$ -теории без неоднородностей волны распределены на линии, соответствующей максимальной накачке. При параллельной накачке — это «экватор» поверхности  $\omega_k = \omega_p/2$ , при перпендикулярной накачке первого порядка — две «параллели»  $\theta = \pm \pi/4$ .

Для простоты положим амплитуду рассеяния на примесях константой  $g_{kk'} = g$ . Кроме того, мы будем полагать, что закон дисперсии волны и их затухание сферически симметричны  $\gamma_k = \text{const}$ ,  $v_0 = v = \text{const}$ . Используя зависимость накачки от азимутального угла (19), (20), проинтегрируем уравнения (17) по углу  $\varphi$ . При таком интегрировании величина  $\sigma$ , а также величина перенормировки накачки обращаются в нуль, так что  $\sigma = 0$  и  $P_\Omega = P_\omega$ .

Вводя переменную  $x = \cos \theta$ , получим после интегрирования

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(n_x - \tilde{n}_x) + \text{Im } P_x^* \sigma_x &= 0; \\ \Gamma \sigma_x + i P_x n_x &= 0; \\ \tilde{n}_x &= \frac{\gamma_{\text{imp}}}{v_x} N, \quad N = 2\pi \int_{-1}^1 n_x dx; \\ \Gamma &= \gamma + \gamma_{\text{imp}} \int_{-1}^1 v_x^{-1} dx, \quad v_x^2 = \Gamma^2 - |P_x|^2. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В этих уравнениях  $\gamma_{\text{imp}} = (2\pi)^2 c k^2 |g|^2 v^{-1}$  — затухание спиновых волн на неоднородностях в отсутствие накачки,  $\sigma_x = 2\pi \sigma_0 \exp(-im\varphi)$ ,  $P_x = P_\Omega \exp(-im\varphi)$ ; для перпендикулярной накачки  $m = 1$ , для параллельной  $m = 2$ . Из уравнений (21) следует соотношение

$$v_x^3 n_x = \gamma_{\text{imp}} \Gamma^2 N, \quad (22)$$

интегрируя которое получим

$$\gamma_{\text{imp}} \Gamma^2 \int_{-1}^1 v_x^{-3} dx = 1. \quad (23)$$

Для определения порога параметрической неустойчивости заметим, что при пороговом значении внешнего поля перенормировка накачки (5) еще отсутствует. Подставляя  $P_x = h V_x$  в уравнения (21), (23), получим трансцендентное уравнение для порога неустойчивости  $h_c$ . В случае параллельной накачки

$$V_x = V_{\parallel} (1 - x^2), \quad v_x^2 = v_0^2 + 2(hV_{\parallel})^2 x^2 - (hV_{\parallel})^2 x^4, \quad (24)$$

и в (21), (23) возникают эллиптические интегралы. Их можно приближенно вычислить в двух предельных случаях  $\gamma_{\text{imp}} \ll \gamma$  и  $\gamma_{\text{imp}} \gg \gamma$ .

В случае малой концентрации примесей ( $\gamma_{\text{imp}} \ll \gamma$ ) функция распределения  $n_x$  имеет резкий максимум. Это позволяет вычислить интеграл (23) и определить  $v_0$ ,

$$v_0^2 \simeq 2\gamma \gamma_{\text{imp}}. \quad (25)$$

В сочетании с (22) и (24) эта формула определяет распределение  $n_x$  вблизи порога возбуждения. Полуширина этого распределения  $\Delta x \simeq \sqrt{\gamma_{\text{imp}}/\gamma} \ll 1$ .

Подставляя (25) в выражение для  $\Gamma$ , находим

$$\Gamma = \gamma + \frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma_{\text{imp}} \ln \frac{8\sqrt{2}\gamma}{\gamma_{\text{imp}}}.$$

С той же точностью, считая  $\ln(\gamma/\gamma_{\text{imp}}) \gg 1$ , получим

$$h_c = \frac{\Gamma}{V_{\parallel}} = h_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\gamma_{\text{imp}}}{V_{\parallel}} \ln \frac{8\sqrt{2}\gamma}{\gamma_{\text{imp}}} . \quad (26)$$

В обратном предельном случае сильно неоднородного ферромагнетика  $\gamma_{\text{imp}} \gg \gamma$  имеем  $\Gamma \gg P_x$ , и можно положить

$$\gamma_x = \Gamma - \frac{|P_x|^2}{2\Gamma} . \quad (27)$$

Подставляя (27) в интегралы (21), (23) и ограничиваясь первым членом разложения, найдем

$$\Gamma = \gamma_{\text{imp}} + \frac{3}{2} \gamma ; \quad (28)$$

$$\int_{-1}^1 |P_x|^2 dx = 2\gamma_{\text{imp}}\gamma . \quad (29)$$

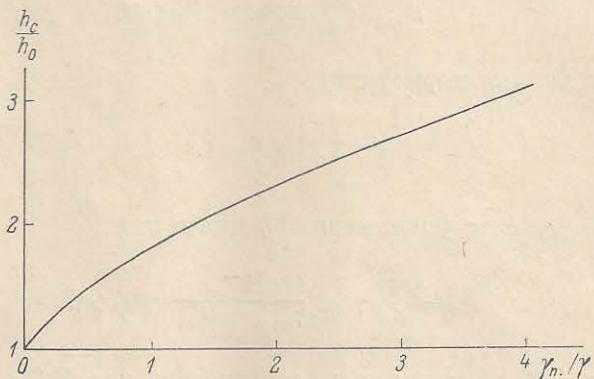


Рис. 10. Зависимость порога возбуждения  $L_c$  от величины примесного рассеяния  $\gamma_{\text{imp}}$ .

Уравнение (29), в котором  $P_x = hV_x$  определяет пороговую амплитуду  $h_c$ . Для параллельной и перпендикулярной накачки в сильно неоднородных кубических ферромагнетиках получим

$$(h_c V_{\parallel})^2 = (h_c V_{\perp})^2 = \frac{15}{8} \gamma \gamma_{\text{imp}} . \quad (30)$$

По порядку величины этот результат можно получить из условия баланса энергии  $LV|\sigma| \cong \gamma n$  если учесть, что случайные неоднородности уменьшают фазовую корреляцию в парах:  $|\sigma|/n \sim \gamma/\gamma_{\text{imp}}$ . (см. (21)). На рис. 10 приведена вычислённая с помощью ЭВМ по формулам (21), (24) зависимость порога параллельной накачки в кубическом ферромагнетике от  $\gamma_{\text{imp}}$ , характеризующего концентрацию неоднородностей. Зависимость порога перпендикулярной накачки от  $\gamma_{\text{imp}}$  обнаруживает сходное поведение.

#### 4. Поведение волн за порогом параметрического возбуждения

Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая большой концентрации примесей  $\gamma_{\text{imp}} \gg \gamma$ . В этом случае при любых превышениях над порогом распределение волн  $n_k$  по сфере  $\omega_k = \omega_p/2$  будет практически изотропным. Из формул (21) имеем

$$\sigma_x = -\frac{iP_x n_x}{\gamma_{\text{imp}}} , \quad \Gamma \simeq \gamma_{\text{imp}} . \quad (31)$$

Подставляя (31) в формулу (5), имеем с учетом  $n_x = \text{const}$

$$P_x = hV_x - \frac{iN}{\gamma_{\text{imp}}} \int_0^1 S_{xx'} P_{x'} dx'. \quad (32)$$

Уравнение (32) вместе с условием (29) достаточны для полного описания системы волн.

Для малых превышений над порогом достаточно ограничиться двумя итерациями. Тогда

$$N^2 = \left[ \frac{h^2}{h_c^2} - 1 \right] \gamma_{\text{imp}}^2 \frac{\int_0^1 v_x^2 dx}{\int_0^1 \left[ \int_0^1 S_{xx'} V_{x'} dx' \right]^2 dx}. \quad (33)$$

В сферически симметричной задаче ядро  $S_{xx'}$  разлагается по полиномам Лежандра

$$S_{xx'} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_{2n}(x) P_{2n}(x'),$$

для которых примем нормировку

$$\int_0^1 P_{2n}^2(x) dx = 1.$$

При этом решение уравнения (32) имеет вид

$$P_x = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{\text{imp}} \frac{hV_m}{\gamma_{\text{imp}} + iS_m N} P_{2m}(x).$$

Учитывая (29), получим отсюда уравнение для  $N(h)$

$$h^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|V_m|^2}{\gamma_{\text{imp}}^2 + S_m^2 N^2} = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{imp}}}. \quad (34)$$

Рассмотрим модельный пример, полагая, что  $V_m$  и  $S_m$  отличны от нуля только для одного значения  $m$ . Тогда

$$S^2 N^2 = \frac{\gamma_{\text{imp}}}{\gamma} V^2 (h^2 - h_c^2), \quad (35)$$

где  $S$  и  $V$  — отличные от нуля коэффициенты  $S_m$ ,  $V_m$ .

При малых превышениях над порогом (35) переходит в формулу (33). При больших превышениях над порогом получаем из (34) в общем случае

$$N^2 = h^2 \frac{\gamma_{\text{imp}}}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|V_m|^2}{S_m^2}. \quad (36)$$

Из сравнения формул (33), (35) и (36) с соответствующими результатами работ [2, 3] видно, что неоднородности приводят к увеличению стационарного уровня ограничения спиновых волн в параметр  $\sqrt{\gamma_{\text{imp}}/\gamma}$ . Этот эффект можно объяснить ослаблением корреляции фаз в паре за счет рассеяния на неоднородностях.

Приведем выражение для нелинейных восприимчивостей  $\chi'$ ,  $\chi''$  в неоднородном ферромагнетике. Эти восприимчивости определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \chi' + i\chi'', \\ \chi &= \frac{2}{h} \int V_{\mathbf{k}} \sigma_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Для  $\chi''$  имеем при любых превышениях над порогом

$$\chi'' = \frac{2\gamma N}{h^2}.$$

Для  $\chi'$  при малых превышениях над порогом имеем

$$\chi' = \frac{2N^2}{\gamma_{\text{imp}}^2} \int_0^1 \int_0^1 V_x S_{xx'} V_{x'} dx dx'.$$

Для модели с одним полиномом Лежандра имеем

$$\chi' = \frac{2N^2 S}{h^2}$$

Для больших превышений в общем случае

$$\chi' = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_m^2}{S_m}.$$

В заключение заметим, что мы рассматривали только случай аксиальной симметрии, когда волны в рамках  $S$ -теории распределены на линиях — «экваторе» и параллелях поверхности  $\omega_k = \omega_p/2$ . В равной мере возможны и другие случаи — случай сферической симметрии, когда волны равномерно распределены по поверхности (эта ситуация осуществляется в антиферромагнетиках) и несимметричный случай, когда волны распределены в виде одной или нескольких дискретных пар — такая картина типична для анизотропных ферромагнетиков. Эти случаи также могут быть изучены при помощи диаграммной техники, хотя в каждом из них есть характерные особенности.

В сферически симметричном случае в уравнениях Уайльда происходит сокращение графиков без пересечений, так что возникает необходимость учета графиков с одним пересечением. Это приводит к изменению порога неустойчивости, который, как можно оценить из соображений размерности, имеет теперь порядок  $LV \sim (\gamma^2 \gamma_{\text{imp}})^{1/3}$ .

В анизотропном случае влияние примесей можно корректно учесть, только если концентрация их не слишком мала, так как в противном случае распределение в  $k$ -пространстве оказываются настолько узкими, что приводит к необходимости рассматривать весь ряд теории возмущений.

В заключение авторы благодарят В. В. Соболева, проделавшего вычисления на ЭВМ.

#### Л и т е р а т у р а

- [1] В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец. ФТТ, 11, 2047, 1969.
- [2] В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец. ЖЭТФ, 59, 1290, 1970.
- [3] В. В. Зауткин, В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. Л. Мушер, С. С. Старобинец. ЖЭТФ, 62, 000, 1972.
- [4] M. Sparke. Ferromagnetic-relaxation theory, N.—Y., 1964.
- [5] E. Schliemann. Phys. Rev., 182, 632, 1969.
- [6] E. Schliemann. Phys. Rev., 176, 828, 1959.
- [7] H. Suhl. J. Appl. Phys., 30, 1961, 1959.
- [8] В. С. Львов, С. С. Старобинец. ФТТ, 13, 523, 1971.
- [9] J. Sage. J. Phys. Chem. Sol., 29, 2199, 1968.
- [10] H. W. Wyld. J. Ann. Phys., 14, 143, 1961.
- [11] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, М., 1962.