



ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ЭЛЕКТРОМЕТРИИ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

В.С. Львов

К ТЕОРИИ РАЗВИТОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Препринт № 53

НОВОСИБИРСК
1977

Рукопись
поступила в редакцию
3 марта 1977 г.

Виктор Сергеевич Львов

К ТЕОРИИ РАЗВИТОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Редактор Л.С. Калинина

Подписано в печать 24 октября 1977 г. МН 07591
Формат бумаги 60 x 90 1/16. Объем 1,8 печ.л., 1,7 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Заказ № 468.

Отпечатано на ротапринтере Института автоматки и электрометрии
СО АН СССР. Новосибирск, 90.

В работе изучается изотропная гидродинамическая турбулентность с помощью диаграммной техники Уайльда в канонических переменных Клебша. Отсуммирована наиболее расходящаяся (в области малых \bar{k}) последовательность диаграмм для функции Грина

$G_{k\omega}$, описывающая перенос как целого малых вихрей размером $1/k$ со случайной скоростью $V(t)$ крупных вихрей. Описывается метод разделения кинематического эффекта переноса и динамического взаимодействия вихрей, без использования разделительного масштаба. $G_{k\omega}$ ищется в виде

$$G_{k\omega} = \left\langle \left[\omega - \bar{k}\bar{V} - \sum_{k,\omega} \bar{k}\bar{V} \right]^{-1} \bar{V}(t) \right\rangle,$$

при этом диаграммные ряды для $\sum_{k,\omega}$ в отличие от исходных рядов для $\sum_{k\omega}$ содержат вычитания, существенно улучшающие сходимость диаграмм. В предположении, что более слабые расходимости диаграмм, оставшиеся после вычитания переноса, сокращаются, показано, что диаграммное уравнение для парного коррелятора имеет изотропное решение, приводящее к колмогоровской

спектральной функции $J_k^0 \sim k^{-11/3}$ в инерционном интервале и искаженное следующим образом вблизи вязкой границы:

$$J_k = J_k^0 [1 - c(k\lambda)^{2/3}].$$

Здесь c - положительный коэффициент порядка 1, λ - вязкий масштаб и предполагается, что $(k\lambda) < 1$.

© Институт автоматизации и электрометрии
СО АН СССР. Новосибирск, 1977 г.

Центральной проблемой теории однородной турбулентности несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса является вычисление второго момента поля скорости, характеризующего распределение энергии по масштабам, - спектр турбулентности. Современные представления о спектре изотропной турбулентности в значительной мере возникли из идей А.Н. Колмогорова [1], предположившего, во-первых, что распределение вероятностей поля скоростей в инерционном интервале^{*} является масштабно-инвариантным и, во-вторых, что процесс передачи энергии по спектру локализован и потому вид спектра определяется лишь одним размерным параметром $\bar{\varepsilon}$, характеризующим поток энергии по масштабам, который, в силу локальности, не зависит от масштаба. В рамках этих гипотез с помощью соображений размерности можно определить вид спектральной функции $J_{\bar{k}}$ с точностью до безразмерной константы c :

$$J_{\bar{k}} = c \bar{\varepsilon}^{2/3} \bar{k}^{-11/3}. \quad (1)$$

Здесь

$$\langle V_{\bar{k}}^\alpha V_{\bar{k}'}^\beta \rangle = J_{\bar{k}}^{\alpha\beta} \delta(\bar{k} + \bar{k}'), \quad (2)$$

$$J_{\bar{k}}^{\alpha\beta} = \Delta_{\bar{k}}^{\alpha\beta} J_{\bar{k}}$$

* т.е. для масштабов r , меньших, чем характерный размер обтекаемого тела L , и больших, чем размер λ , начиная с которого существенно вязкость жидкости.

Зависимость от векторных индексов α, β определяется из условий изотропности и несжимаемости:

$$\Delta_K^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \kappa_\alpha \kappa_\beta \kappa^{-2}.$$

Для плотности энергии в масштабе κ

$$E_\kappa = 4\pi\kappa^2 J_\kappa. \quad (3)$$

Из (I) следует "закон пяти третей" Колмогорова - Обухова

$$E_\kappa \propto \bar{\varepsilon}^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (4)$$

с хорошей точностью подтвержденный наблюдениями над атмосферной турбулентностью, в которой инерционный интервал простирается на пять порядков. *)

Гипотезы А.Н. Колмогорова позволяют определить также характерную частоту движения ω_κ вихрей масштаба κ :

$$\omega_\kappa \approx \varepsilon^{1/2} \kappa^{2/3}. \quad (5)$$

Позднее Л.Д. Ландау [3] обратил внимание на то, что поток энергии ε в действительности является флуктуирующей величиной, так что $\bar{\varepsilon}$ не есть единственная размерная константа, от которой может зависеть вид спектра. В соответствии с этим А.Н. Колмогоров и А.М. Обухов внесли в теорию некоторые изменения феноменологического характера, сводящиеся, по существу, к отказу от идеи полной локальности спектра и к признанию того обстоятельства, что в выражениях для J_κ может входить новый безразмерный параметр (κL) в неизвестных, правда, не очень больших степенях [2]. Таким образом, феноменологический подход к описанию гидродинамической турбулентности не позволял определить вид спектра, и поэтому были предприняты многочисленные попытки определить спектр и построить теорию микроскопически, исходя непосредственно из уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0, \quad \text{div } \vec{v} = 0.$$

*) Подробный обзор экспериментальных результатов и теоретических представлений о гидродинамической турбулентности можно найти в монографии А.С. Момина и А.М. Яглома [2].

В $(\vec{r}-\omega)$ представлении они имеют вид

$$V_{\kappa\omega}^\alpha = \frac{1}{2\omega} \int \Gamma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}^{\alpha\beta\gamma} V_{\kappa_1\omega_1}^* V_{\kappa_2\omega_2}^* \delta(\kappa+\kappa_1+\kappa_2) \delta(\omega+\omega_1+\omega_2) \times \\ \times d\omega_1 d\omega_2 d\kappa_1 d\kappa_2, \quad \Gamma_{\kappa\kappa_1\kappa_2}^{\alpha\beta\gamma} = (\kappa_\gamma \Delta_K^{\alpha\beta+\kappa_\beta} \Delta_K^{\alpha\gamma}). \quad (6)$$

В ряде работ это уравнение исследовалось с помощью различных гипотез относительно старших моментов поля скоростей: гипотезы Миллионщикова о расщеплении четвертых моментов через парные и т.п. [2]. В действительности нелинейность в уравнениях (6) является предельно сильной и никаких строгих оснований для обрывания цепочки уравнений для моментов, по-видимому, не существует. Во всяком случае, как отметил Крейчнан [4], необходимо проследить, чтобы в рамках этих гипотез сохранялся целый ряд свойств точных уравнений гидромеханики (закон сохранения энергии-импульса, галилеева инвариантность и т.п.), только тогда можно надеяться на получение качественно верных результатов. Степень точности таких приближений совершенно неясна, аргументами может служить только апелляция к эксперименту; совершенно очевидно, что соответствие с каким-нибудь одним экспериментом может быть случайным и уточнение приближения, при котором расщепляются более высокие моменты, может только ухудшить ситуацию [4,5].

Регулярной процедурой исследования уравнений Эйлера стала диаграммная техника, предложенная Уайльдом [6]: в правую часть уравнений (6) вводится случайная гауссова сила $f_{\kappa\omega}$ и решение для $V_{\kappa\omega}$ представляется в виде ряда по степеням f . Ряды для $J_{\kappa\omega}$ можно представить так, что отличный от нуля результат получается и в пределе $f_{\kappa\omega}^2 \rightarrow 0$. Принципиальная особенность техники Уайльда (так же, как и любой техники для сильно неравновесных систем [7]) - это возникновение двух диаграммных рядов: для функции Грина $G_{\kappa\omega}$ и парного коррелятора $J_{\kappa\omega}$, которые, вообще говоря, не связаны, как в термодинамическом равновесии, универсальным соотношением. Уайльд, в частности, показал, что "приближение прямых взаимодействия", сформулированное Крейчнаном [8], соответствует приближению, в котором не

перенормируются вершины. А. Шутько [5] учел первую диаграмму из бесконечного ряда диаграмм одного порядка величины, перенормирующую величину, это делает полученные уравнения в некоторых отношениях даже менее удовлетворительными [4]. Поэтому в теории сильной гидродинамической турбулентности так же, как и в теории фазовых переходов, совершенно необходимо учитывать весь диаграммный ряд, перенормирующий взаимодействие. В работе Г.А. Кузьмина и А.З. Паташинского [9] с учетом этого обстоятельства изучены способы согласования различных вариантов гипотез подобия с диаграммными рядами техники Уайльда.

Надо сказать, что диаграммная техника Уайльда в ее первоначальном варианте неудобна для исследования гидродинамической турбулентности. Это связано с тем, что уравнения Эйлера (6) не имеют гамильтоновского вида и поэтому "затраповчатая вершина" в технике Уайльда $\Gamma_{\kappa}^{\alpha} / \kappa_1 \kappa_2$ не обладает симметрией относительно

перестановки внешнего вектора κ с κ_1 и κ_2 . Это обстоятельство сильно затрудняет эффективный анализ диаграмм высокого порядка по вершинам. В частности, насколько нам известно, до сих пор не опубликовано доказательство того, что система диаграммных рядов для $J_{\kappa\omega}$ и $G_{\kappa\omega}$ допускает частное решение в виде термодинамического равновесия.

В работе В.Е. Захарова и автора [10] сформулирована диаграммная техника для гамильтоновских уравнений движения, использующая идею итерации по случайной силе f Уайльда. Вершины в канонических уравнениях движения обладают симметрией, следующей из эрмитовости гамильтониана. Это позволило доказать совместимость диаграммных рядов с термодинамической связью между $Jm G_{\kappa\omega}$ и $n_{\kappa\omega}$ - парным коррелятором канонических переменных

$$n_{\kappa\omega} = \frac{T}{\pi\omega} Jm G_{\kappa\omega}, \quad (7)$$

что убеждает нас в непротиворечивости канонической диаграммной техники.

В работе [10] предлагалось исследовать гидродинамическую турбулентность, представив уравнения Эйлера в каноническом виде [II]:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \mu}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \lambda} \quad (8)$$

Здесь

$$H = \frac{1}{2} \int V^2(\vec{r}) d\vec{r} - \quad (9)$$

гамильтониан, который следует выразить через канонические переменные Клебша $\lambda(\vec{r}, t), \mu(\vec{r}, t)$ с помощью соотношения [II]

$$\vec{V} = \lambda \vec{V}_{\mu} + \vec{V}_{\phi}. \quad (10)$$

Переменные Клебша описывают частный, но физически важный класс течений, при котором вихревые линии представляют собой линии пересечения двух семейств поверхностей $\lambda(r, t), \mu(r, t)$, расслаивающих пространство и переносимых вместе с жидкостью. Эти переменные можно ввести, если, например, турбулентность развивается в результате неустойчивости плоскопараллельного или аксиально-симметричного ламинарного течения. В общем случае переменные λ, μ можно ввести локально в окрестности любой точки.

В работе [10] показано, что в простейшем случае, когда в диаграммах отсутствуют расходимости, дополнительный (по сравнению с теорией фазовых переходов) индекс скейлинга $\beta(n_{\kappa} \sim \kappa^{-\beta})$, возникающий из-за отсутствия термодинамического равновесия, может быть найден с помощью конформного преобразования по частотам, аналогичного преобразованию кинетического уравнения для волн, предложенного В.Е. Захаровым для нахождения степенных спектров слабой турбулентности [12].

В настоящей работе продолжено изучение гидродинамической турбулентности с помощью диаграммной техники в канонических переменных. В § I проанализированы расходимости диаграмм для массового оператора $\sum_{\kappa\omega}$ в области малых импульсов. Расходимость в диаграммах для $\sum_{\kappa\omega}$ означает, что основной вклад в функцию Грина $G_{\kappa\omega}$ вносит взаимодействие вихрей масштаба κ^{-1} с наиболее крупными вихрями масштаба L . Как известно, это взаимодействие сводится к переносу как целого малых вихрей со случайной скоростью $\vec{V}(t)$ крупного вихря. В полном соответствии с этими представлениями главную последова-

тельность диаграмм можно отсуммировать. В результате

$$G_{k\omega} = \langle [\omega + i\delta - \bar{k}\bar{V}]^{-1} \rangle_{\bar{V}}, \quad (II)$$

где $\langle \rangle_{\bar{V}}$ означают усреднение по случайной скорости вихрей со всеми масштабами. Таким образом, вид $G_{k\omega}$ в инерционном интервале не является универсальным, ибо в основном определяется свойствами движения в энергосодержащем интервале, которые, вообще говоря, зависят от способа возбуждения турбулентности.

Колмогоровская частота $\omega_k \approx \frac{1}{2} k^{1/2} V_0^{2/3}$, характеризующая темп обмена энергией между вихрями близких масштабов, в $(kL)^{-1/3}$ меньше, чем характерная частота функции Грина (II) $G_{k\omega}^{-1} \approx \kappa V_0$, описывающая перенос (V_0 - среднеквадратичная скорость пульсаций). Для исключения кинематического эффекта переноса, затрудняющего описание относительно более слабой динамики взаимодействия вихрей одного масштаба, предпринимались попытки описания мелкомасштабных вихрей в системе отсчета, движущейся в каждой точке со всеми крупномасштабными вихрями [I, I3, I4]. Для этого в уравнение для вихрей масштаба K_0 вводился разделительный масштаб $L^{-1} < k' < K_0$ и движение с $k < k'$ исключалось с помощью перехода в движущуюся систему отсчета. В работе [I5] предложено "представление взаимодействия", также позволяющее исключить движение с масштабом, меньшим, чем разделительный масштаб $k' = \kappa/\lambda$ ($\lambda \gg 1$), и по параметру λ^{-1} последовательно учесть влияние градиента крупномасштабной скорости. К сожалению, при этом сохраняется перенос вихрей ($1/\kappa$) гораздо более крупными вихрями размером $1/\kappa^{-1} = \lambda/\kappa$.

В § 2 настоящей работы описывается метод разделения кинематического эффекта переноса и динамического взаимодействия, не использующий разделительный масштаб. С учетом представления (II) для $G_{k\omega}$, описывающего только перенос, функцию Грина предлагается искать в виде

$$G_{k\omega} = \langle [\omega - \bar{k}\bar{V} - \tilde{\Sigma}_{k,\omega-\bar{k}\bar{V}}]^{-1} \rangle_{\bar{V}}. \quad (I2)$$

Диаграммные ряды для $\tilde{\Sigma}$, в отличие от рядов для Σ , содержат вычитания, исключающие перенос. В результате сходимость существенно улучшается и целый ряд относительно просто устро-

енных диаграмм сходится. К сожалению, в некоторых диаграммах для $\tilde{\Sigma}$ с перекрывающимися расходимостями и после вычитаний остается расходимость (на степень $\kappa^{-4/3}$ более слабая). Можно надеяться, что расходящийся вклад от разных диаграмм должен сократиться в соответствии со второй гипотезой Колмогорова о локальности взаимодействия.

В последнем, третьем параграфе, предполагая, что расходимости, оставшиеся после вычитаний, сокращаются, мы показали, что диаграммное уравнение (3.5) для парного коррелятора имеет изотропное решение, приводящее к колмогоровской спектральной функции $J_k^0 \approx \kappa^{-11/3}$ в инерционном интервале, искаженное определенным образом вблизи вязкой границы:

$$J_k = J_k^0 (1 - c(\kappa\lambda)^{2/3}). \quad (I3)$$

Здесь c - положительный коэффициент порядка I, λ - внутренний (вязкий) масштаб и предполагается, что $(\kappa\lambda) < 1$.

§ I. Приближение переноса

I.I. Диаграммная техника Уайльда для гамильтоновских уравнений движения

От переменных Клебша $\lambda(\vec{r}, t)$ и $\mu(\vec{r}, t)$ удобно перейти к комплексным переменным $a_k(t)$, $a_k^*(t)$:

$$a_k(t) = \frac{\lambda_k(t) + i\mu_k(t)}{\sqrt{2}},$$

канонические уравнения движения (8) и гамильтониан (I0) для которых приобретает вид

$$i \frac{\partial a_k}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a_k^*}, \quad (I.I)$$

$$H = \frac{1}{4} \int T_{12,34} a_1^* a_2^* a_3 a_4 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4,$$

$$\text{где } T_{12,34} = (\bar{\varphi}_{13} \bar{\varphi}_{24} + \bar{\varphi}_{14} \bar{\varphi}_{23}), \quad (I.2)$$

$$\bar{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \left[\bar{k}_\alpha + \bar{k}_\beta - (\bar{k}_\alpha - \bar{k}_\beta) \frac{\kappa_\alpha^2 - \kappa_\beta^2}{|\kappa_\alpha - \kappa_\beta|^2} \right], \quad (I.3)$$

причем

$$\bar{V}_{\bar{k}} = \frac{1}{i} \int \bar{\varphi}_{\bar{k}'\bar{k}''} a_{\bar{k}'} a_{\bar{k}''}^* \delta(\bar{k} + \bar{k}' - \bar{k}'') d\bar{k}' d\bar{k}'' \quad (I.4)$$

Из (I.3) видно, что $\bar{\varphi}_{kk}$ не определено. В "лабораторной" системе отсчета, движущейся со средней скоростью, $\langle V \rangle = V_0 = 0$, поэтому будем впредь считать $\bar{\varphi}_{kk} = 0$.

Приведем выражения для асимптотики вершины T :

$$T_{\bar{x}\bar{x}'\backslash\bar{k}\bar{k}'} \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\bar{x}\bar{x}' - \frac{(\bar{x}\bar{k})(\bar{x}'\bar{k}')}{k^2} \right] \propto \bar{x}\bar{x}'$$

$$T_{\bar{x}\bar{k}\backslash\bar{x}\bar{k}'} \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\bar{k}\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}'} + \bar{\varphi}_{\bar{k}\bar{k}'} \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}'} \right] \propto \text{ctn}(\bar{x}, \bar{x}')$$

Для исследования усредненных решений уравнений (I.I) с помощью диаграммной техники необходимо в правую часть (I.I) добавить случайную гауссову силу $f_{\bar{k}}(t)$ и, итерируя эти уравнения, представить $a_{\bar{k}\omega}$ в виде ряда по степеням f . Определим функцию Грина G_q :

$$\delta(q - q') G_q = \left\langle \frac{\delta a_q}{\delta f_{q'}} \right\rangle = \left\langle \frac{a_q f_{q'}^*}{f_q^2} \right\rangle, \quad G = \dots$$

$$\langle f_q f_{q'}^* \rangle = f_q^2 \delta(q - q') (q = \bar{k}, \omega)$$

и парный коррелятор n_q :

$$\langle a_q a_{q'}^* \rangle = n_q \delta(q - q'), \quad n = \dots$$

Для них можно, суммируя слабо связанные диаграммы, обычным образом [10] прийти к системе уравнений Дайсона:

$$G_q = \frac{1}{\omega - \Sigma_q}, \quad \text{Im} G_q = |G_q|^2 \text{Im} \Sigma_q, \quad (I.5)$$

$$n_q = |G_q|^2 \Phi_q$$

Здесь Σ и Φ_q - суммы компактных диаграмм, в Σ_q можно пройти от входа к выходу по линиям G_q , Φ_q можно единственным образом расщепить на две части по линиям n_q (см. 10). Приведем первые диаграммы (без перенормировки вершин):

$$\Sigma_q = \frac{1}{q^2} \textcircled{1} + \frac{1}{2} \textcircled{2} + \frac{1}{3} \textcircled{3} + \dots \Phi_q = \frac{1}{2} \textcircled{4} + \dots \quad (I.6)$$

I.2. Функция Грина в приближении переноса

В работе [10] показано, что в случае, когда все интегралы в Σ_q и Φ_q сходятся, диаграммные уравнения имеют решение вида

$$G_q = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{1/3} k^{2/3}} g\left(\frac{\omega}{\bar{\varepsilon}^{1/3} k^{2/3}}\right), \quad n_q = \frac{\bar{\varepsilon}^{2/3}}{k^5} f\left(\frac{\omega}{\bar{\varepsilon}^{1/3} k^{2/3}}\right) \quad (I.7)$$

Колмогоровские значения индексов следуют из соображений размерности в предположении, что все взаимодействия носят локальный характер, т.е. эффективно взаимодействуют лишь вихри одного масштаба. В действительности, как известно, интегралы в диаграммах расходятся на малых импульсах, т.е. в энергосодержащей области, где вид спектра не универсален и определяется характером обтекания препятствия, имеющего характерный размер L . Это означает, что в задачу входит еще один размерный параметр L и в функции G_q и n_q , вообще говоря, могут входить степени безразмерного параметра κL :

$$G_q = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{1/3} k^{2/3} (\kappa L)^{\alpha+\beta}} g\left(\frac{\omega}{\bar{\varepsilon}^{1/3} k^{2/3} (\kappa L)^\beta}\right), \quad (I.8)$$

$$n_q = \frac{\bar{\varepsilon}^{2/3}}{k^5 (\kappa L)^{\alpha+\beta}} f\left(\frac{\omega}{\bar{\varepsilon}^{1/3} k^{2/3} (\kappa L)^\beta}\right)$$

В дальнейшем мы покажем, что $\beta = 1/3$, $\alpha = 0$. Экспериментальное значение индекса γ , учитывающего отличие спектра парного коррелятора скорости $J_{\bar{k}}$ от колмогоровского, близко к нулю. Для этих значений индексов диаграммы 1,2 в (I.6) сходятся, а диаграммы 3 и 4 расходятся в области малых импульсов. Так, в диаграмме 3 при $q_1, q_2 \ll q_3 \approx q$ имеем

$$\Sigma_q(q) \approx G_q \int T_{k_1, 23}^2 n_1 n_2 dk_1 dk_2 = G_q I^2,$$

$$I^2 = \int_{1/L}^{\infty} (\bar{k} \bar{\varphi} \alpha \alpha')^2 n_x n_{x'} d\alpha d\alpha' = [f k^{2/3} (\kappa L)^{1/3}]^2, \quad (I.9)$$

$$f \equiv \int f(x) dx.$$

Это выражение вносит основной вклад в Σ_q во втором порядке по вершинам. Учитывая уравнение Дайсона (I.5), имеем

$$G_q = [\omega - G_q \kappa^{4/3} \rho^2 (\kappa L)^{2/3}]^{-1},$$

откуда

$$G_q = \frac{x}{\omega} g(x), \quad x = \frac{f}{f L^{1/3} \kappa},$$

$$g(x) = \frac{1}{2} [x \pm \sqrt{x^2 - 4}]. \quad (I.10)$$

По порядку величины $f L^{1/3}$ совпадает с пульсационной скоростью u_0 вихрей энергосодержащего масштаба L .

Такой вид функции Грина был получен Крейчваном [8] из анализа расходимости первой диаграммы для Σ_q в диаграммной технике, сформулированной Уайльдом для скоростей жидкости \bar{V}_q . Сравнивая (I.8) с (I.10), можно увидеть, что $\alpha = 0, \beta = 1/3$, т.е.

$$G_q \approx \frac{1}{\kappa u_0} g\left(\frac{\omega}{\kappa u_0}\right). \quad (I.11)$$

При этом

$$n_q \approx \frac{1}{\kappa^{13/3} \rho^2 (\kappa u_0)} f\left(\frac{\omega}{\kappa u_0}\right). \quad (I.12)$$

Подставляя эти выражения в старшие диаграммы для Σ_q , легко убедиться, что многие из них также расходятся. Наибольший вклад в Σ_q вносят диаграммы, у которых внешний импульс проносится через "позвончик" по функциям Грина, ориентированным слева направо; по всем линиям n_q проводится интегрирование по области $k' \ll \kappa$. Простым подсчетом степеней можно убедиться, что все такие диаграммы имеют порядок величины G_q^{-1} , умноженной на некоторую степень $g\left(\frac{\omega}{\kappa u_0}\right)$, т.е. при $\omega \approx \kappa u_0$ все они порядка первой расходящейся диаграммы (I.9) в Σ_q .

Можно предположить, что "сумма" ряда для Σ_q имеет порядок величины первой диаграммы, при этом функция Грина сохраняет структуру (I.11). Эта гипотеза соответствует простой физической картине взаимодействия больших и малых масштабов: из уравнений Эйлера следует, что это взаимодействие в основном сводится к простому переносу как целого мелкомасштабных вихрей с некоторой (случайной) скоростью движения жидкости в крупных вихрях. Если усреднение по времени проводить в два этапа (вначале по мелкомасштабным движениям, а затем по всем остальным), то после первого этапа движение в крупных масштабах можно воспринимать как динамическое и перейти в движущуюся систему отсчета, в которой переносное взаимодействие с энергосодержащим интервалом отсутствует.

В этой системе отсчета

$$\tilde{G}_q = \frac{1}{\omega - \tilde{\Sigma}_q + i\epsilon},$$

причем $\tilde{\Sigma}_q \ll \kappa u_0$ при $\kappa L \gg 1$. Возвращаясь в лабораторную систему отсчета, заменим ω на $[\omega - \bar{\kappa} \bar{V}(t)]$, где $\bar{V}(t)$ - скорость вихрей больших масштабов, по которым нужно произвести доусреднение. Таким образом, функцию Грина G_q разумно искать в виде

$$G_q = \langle [\omega - \bar{\kappa} \bar{V} - \tilde{\Sigma}_{\kappa, \omega - \bar{\kappa} \bar{V}} + i\delta]^{-1} \rangle_{\bar{V}}. \quad (I.13)$$

Здесь $\langle \rangle_{\bar{V}}$ означает усреднение по ансамблю скорости $V(r, t)$ в произвольной точке r, t . Например, для гауссового поля скорости

$$\langle f(V) \rangle_V = (\pi V_0)^{-3/2} \int f(\bar{V}) e^{-\frac{V^2}{2V_0^2}} d\bar{V}. \quad (I.14)$$

На первом этапе можно в (I.13) пренебречь $\tilde{\Sigma}$ в сравнении с κV_0 , т.е. представить G_q в виде

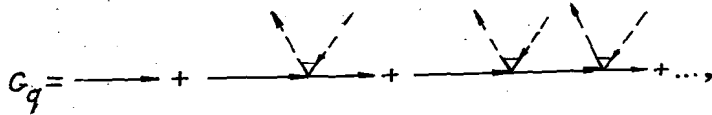
$$G_q = \langle [\omega - \bar{\kappa} \bar{V} + i\delta]^{-1} \rangle. \quad (I.15)$$

Покажем, что это приближение для G_q ("приближение переноса") в точности соответствует суммированию старшей последовательности диаграмм, описанной в середине данного параграфа. Для этого разложим (I.15) в ряд по $\kappa \omega^{-1}$, выразим $V(r, t)$ при

$\tau=0$ через переменные Клебна по формуле (I.0):

$$V(t) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi_{\alpha\alpha\alpha'} a_{\alpha}^* a_{\alpha'} d\alpha d\alpha'. \quad (I.16)$$

До усреднения имеем:



где

$$\begin{aligned} \text{---} &= [\omega + i\delta]^{-1}, & \text{---} \nabla \text{---} &= \frac{\tilde{\kappa} \varphi_{\alpha\alpha\alpha'}}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\kappa - \kappa'), \\ \uparrow &= a_{\alpha}, & \downarrow &= a_{\alpha}^*. \end{aligned}$$

Представляя далее a_q с помощью ряда по случайной силе f обычным для канонической техники [I.0] способом и усредняя по гауссову ансамблю случайных сил, получаем, как нетрудно убедиться, все отобранные нами ранее диаграммы для G_q . В частности, вершины ∇ на "позвоночнике" совпадают с асимптотической вершиной $T_{\alpha\kappa|\alpha'\kappa}$. Таким образом, в приближении замороженной турбулентности мы отсуммировали все существенные диаграммы для Σ_q и получили для G_q выражение (I.5). В теории турбулентности для инерционного интервала его следует понимать как окончательное, ибо оно определяется только свойствами турбулентности в энергосодержащем интервале.

В заключение этого параграфа получим замкнутое модельное выражение для G_q , пренебрегая взаимодействием вихрей масштаба L между собой. Этому приближению соответствуют диаграммы, содержащие только "парные петли":



Представим этот ряд в виде

$$\Sigma_q = \text{---} \text{---} \text{---} = G_q I_{\kappa}^2 A_q. \quad (I.17)$$

Для перенормированной вершины A_q можно доказать тождество Юрда в виде

$$A_q = \frac{\partial}{\partial \omega} G_q^{-1}$$

Вместе с уравнением Дайсона это дает дифференциальное уравнение для G_q :

$$I_{\kappa}^2 \frac{\partial G_q}{\partial \omega} + \omega G_q = 1.$$

Решение этого уравнения содержит произвольную комплексную константу, которую следует выбрать из условий

$$\text{Re } G_{\kappa 0} = 0, \quad \int \text{Im } G_{\kappa \omega} d\omega = \pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_q &= \frac{1}{I_{\kappa}} g\left(\frac{\omega}{I_{\kappa}}\right), & I_{\kappa} &= \kappa V_0, \\ g(x) &= \frac{i\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned} \quad (I.18)$$

Нетрудно видеть, что это выражение можно получить, усреднив (I.15) по гауссову ансамблю (I.14).

I.3. Парный коррелятор $n_{\kappa\omega}$ в приближении переноса

Рассмотрим уравнение (I.5) для n_q и выпишем первые диаграммы для Φ_q :



Нетрудно понять, что старшая последовательность диаграмм (по параметру $(\kappa L)^{2/3} \gg 1$) устроена следующим образом: большой внеш-

ний импульс пронесется через функции Грина G_q и только через одну линию n_q (в основном сечении), по всем остальным линиям проводится интегрирование по области $k' \ll k$, $\omega' \ll \omega$. Тогда $\Phi_q = n_q F(G_q)$ и уравнение для n_q имеет вид

$$n_q = n_q |G_q|^2 F(G_q). \quad (I.19)$$

Можно доказать, что (I.19) удовлетворяется тождественно при любом n_q . Для этого необходимо рассмотреть уравнение Дайсона в виде

$$\text{Im } G_q = |G_q|^2 \text{Im } G_q, \quad (I.20)$$

использовать доказанное в работе [10] взаимнооднозначное соответствие между "размноженными" диаграммами для $\text{Im } G_q$ и Φ_q и убедиться в том, что в старшем по параметру $(\kappa L)^{2/3}$ приближении имеется равенство

$$F(G_q) \text{Im } G_q = \text{Im } \Sigma_q$$

с той же функцией F , что и в соотношении (I.19). Поэтому если G_q удовлетворяет уравнению Дайсона в приближении переноса и Φ_q вычислено в этом же приближении, то уравнение (I.19) для n_q становится тождеством, т.е. удовлетворяется любой функцией n_q . Тем не менее в приближении переноса можно определить вид структурной функции F :

$$n_{k\omega} = \frac{n_k}{\pi} \text{Im } G_{k\omega}. \quad (I.1)$$

Это соотношение будет доказано в следующем параграфе.

§ 2. Процедура вычитания переноса

Для того чтобы выйти за рамки приближения переноса, представим $G_{k\omega}$ и $n_{k\omega}$ в виде:

$$G_{k\omega} = \langle \tilde{G}_{k, \omega - \kappa \tilde{V}} \rangle, \quad (2.1)$$

$$n_{k\omega} = \langle \tilde{n}_{k, \omega - \kappa \tilde{V}} \rangle$$

и потребуем, чтобы функции \tilde{G} и \tilde{n} удовлетворяли уравнениям Дайсона:

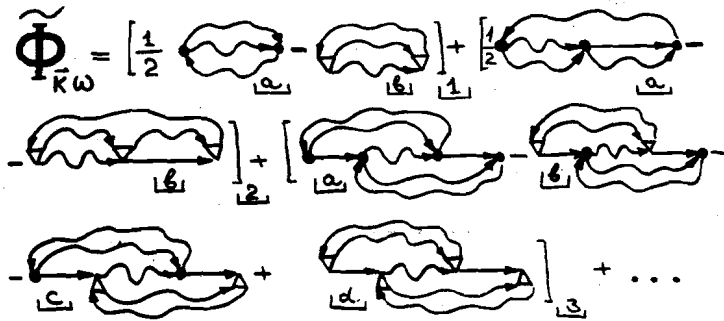
$$\tilde{G}_{k\omega} = \frac{1}{\omega - \tilde{\Sigma}_{k\omega}}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{n}_{k\omega} = |G_{k\omega}|^2 \tilde{\Phi}_{k\omega}.$$

Здесь мы покажем, что для $\tilde{\Sigma}$ и $\tilde{\Phi}$ можно подобрать такие диаграммные ряды, что после подстановки их в уравнения (2.2) и усреднения (2.1) для функций G_q и n_q получатся исходные диаграммные ряды техники Уайльда. Исходные ряды для $\tilde{\Sigma}_q$ и $\tilde{\Phi}_q$ содержат диаграммы исходных рядов для Σ_q и Φ_q , из которых сделаны определенные вычитания:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{k\omega} = & \text{diag}_{1a} + \left[\text{diag}_{2a} - \text{diag}_{2b} \right]_{2c} \\ & + \frac{1}{2} \text{diag}_{3a} + \left[\text{diag}_{3b} - \text{diag}_{3c} \right]_{3d} \\ & + \text{diag}_{4a} + \left[\text{diag}_{4b} - \text{diag}_{4c} \right]_{4d} \\ & - \left[\text{diag}_{5a} - \text{diag}_{5b} + \text{diag}_{5c} \right]_{5d} \\ & + \left[\text{diag}_{6a} - \text{diag}_{6b} - \text{diag}_{6c} \right]_{6d} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & + \left[\text{diag}_{7a} - \text{diag}_{7b} - \text{diag}_{7c} \right]_{7d} \\ & + \left[\text{diag}_{8a} - \text{diag}_{8b} - \text{diag}_{8c} \right]_{8d} + \dots \end{aligned}$$



Здесь, в отличие от диаграмм (I.6), \longrightarrow есть \tilde{G}_q , \longleftarrow — \tilde{H}_q . Диаграммы 1а, 2а, 3а после усреднения, сводящегося к замене $\tilde{G} \rightarrow G$, $\tilde{H} \rightarrow H$, дают исходные диаграммы для $\tilde{\Sigma}_q$ и $\tilde{\Phi}_q$. Остальные диаграммы после усреднения сокращаются. Так, диаграммы (2в), (4в) и (6с), диаграммы (4д) и (8д), взятые со знаком минус, сокращаются с соответствующими диаграммами для $\tilde{\Sigma}_q$ в приближении переноса (т.е. при $\tilde{\Sigma}_q = 0$), диаграммы (7б), (7с), (8в) и (8с) — с соответствующими диаграммами, возникающими при усреднении (2а) и так далее. Таким образом, в рядах (2.3) из каждой диаграммы без вершин Δ (типа "а") следует вычесть диаграммы такой же топологической структуры с заменой части вершин \dagger на ∇ ; вычитаемые диаграммы представляют результат усреднения диаграмм предыдущих порядков по вершинам X и Y .

После вычитаний сходимост диаграммы в области малых импульсов существенно улучшается: так, диаграмма (2а) расходится при $q_1 \approx q_2 \ll q$ как $k_1^{-2/3}$; разность диаграмм (2а) и (2б) сходится как $k_1^{2/3}$; в диаграмме (7а) интегралы по $q_1 \approx q_2$ и по $q_3 \approx q_4$ расходятся и (7а) пропорциональна $(k_1 k_3)^{-2/3}$; вся сумма (7) сходится как $(k_1 k_3)^{2/3}$. Аналогичным образом после вычитания переноса сходятся диаграммы с любым числом "парных петель", например



Сходятся также диаграммы, отличающиеся от описанных такой перенормировкой вершин, при которой не увеличивается число вершин в позвоночнике. Простейший пример: диаграмма (6а) в сравнении с (2а).

Однако полной сходимости в области малых импульсов описанная процедура не дает. Так, диаграмма (4а) с "тройной петлей" расходится при интегрировании по модулям k_1, k_2, k_3 при $k_1 \approx k_2 \approx k_3 \ll k$ как k_1^{-1} : после вычитания остается логарифмическая расходимость. Эту расходимость (так же, как и расходимость в некоторых других диаграммах) можно устранить, обобщив представление (2.1) следующим образом:

$$G_q = \langle \tilde{G}_k, \omega - \Omega_k \rangle, \quad H_q = \langle \tilde{H}_k, \omega - \Omega_k \rangle, \quad (2.4)$$

$$\Omega_k = \int [(2\pi)^{-3/2} \tilde{k} \tilde{\varphi}_{\alpha\alpha'} + \tilde{\varphi}_{k\alpha} \tilde{\varphi}_{k\alpha'}] a_\alpha a_{\alpha'}^* d\alpha d\alpha' = \tilde{k} \tilde{V} + \int \tilde{\varphi}_{k\alpha} \tilde{\varphi}_{k\alpha'} a_\alpha a_{\alpha'}^* d\alpha d\alpha'$$

При $\alpha \ll k$ второе слагаемое в выражении для Ω_k имеет малость (α/k) . Диаграммные ряды для $\tilde{\Sigma}$ и $\tilde{\Phi}$ по-прежнему имеют вид (2.3), только $\nabla = \tilde{k} \tilde{\varphi}_{\alpha\alpha}$ заменяется на

$$\alpha \nabla_k \alpha' = T_k(\alpha\alpha') = (2\pi)^{-3/2} \tilde{k} \tilde{\varphi}_{\alpha\alpha'} + \tilde{\varphi}_{k\alpha} \tilde{\varphi}_{k\alpha'}$$

Это выражение для $T_k(\alpha\alpha')$ представляет собой первые два члена разложения вершин $T_k \alpha/k' \alpha'$ при $\alpha, \alpha' \ll k$.

Теперь сумма диаграмм (4) сходится в области малых k_1, k_2, k_3 как $k_1^{2/3}$. Кроме того, оказываются сходящимися после вычитаний диаграммы, состоящие из нескольких тройных петель, например



а также диаграммы, отличающиеся от этой перенормировкой вершин,

не увеличивавших их числа в позвоночнике, например



К сожалению, расходимости в области малых k_i все же остаются в диаграммах с петлями, содержащими четыре и более вершин на позвоночнике. Так, в диаграмме (9) с "петлей четвертого порядка", расходящейся до вычитания при $k_1 \approx k_2 \approx k_3 \approx k_4 \ll k$ как $k_1^{-4/3}$, остается логарифмическая расходимость. В диаграммах с "петлями порядка n " остается расходимость $(k_1)^{\frac{4-n}{3}}$.

В такой ситуации нам остается только высказать гипотезу о том, что должна существовать процедура суммирования, приводящая к сокращению расходящихся частей диаграмм. Эта гипотеза, по-видимому, эквивалентна гипотезе Колмогорова о локальности процесса передачи энергии по масштабам. Отметим, что для исходных диаграммных рядов гипотеза о сокращении расходимостей неверна, ибо наиболее расходящиеся части диаграмм описывают реально существующее явление - перенос маленьких вихрей большими.

В заключение этого параграфа мы представим диаграммы для $\tilde{\Sigma}_q$ и $\tilde{\Phi}_q$ более компактным образом - с помощью перенормированных вершин A, B, C, D и A', B', C' и D'.

$$\tilde{\Sigma}_{\bar{k}\omega} = \left[\text{Diagram 1} - \text{Diagram 1}' \right] + \frac{1}{2} \text{Diagram 2} + \left[\frac{1}{2} \text{Diagram 3} - \text{Diagram 3}' \right] + \left[\text{Diagram 4} - \text{Diagram 4}' \right] + \left[\frac{1}{2} \text{Diagram 5} - \text{Diagram 5}' \right] \quad (2.5)$$

$$\tilde{\Phi}_{\bar{k}\omega} = \left[\frac{1}{2} \text{Diagram 6} - \text{Diagram 6}' \right] + \left[\text{Diagram 7} - \text{Diagram 7}' - \text{Diagram 7}'' \right] + \left[\frac{1}{2} \text{Diagram 8} - \text{Diagram 8}' \right] + \left[\frac{1}{2} \text{Diagram 9} - \text{Diagram 9}' \right] + \left[\text{Diagram 10} - \text{Diagram 10}' \right] + \left[\text{Diagram 10}'' - \text{Diagram 10}''' \right] + \left[\frac{1}{2} \text{Diagram 11} - \text{Diagram 11}' \right] \quad (2.6)$$

Здесь черным закрашены "корни деревьев", начиная от которых следует читать диаграммы:

$$A \square = \square + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15} + \dots + A \nabla = \nabla + \text{Diagram 16} + \text{Diagram 17} + \dots \quad (2.7)$$

$$+ [\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2}] + [\text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}] + \dots$$

$$B \blacksquare = [\text{Diagram 5} - \text{Diagram 6}] + [\text{Diagram 7} - \text{Diagram 8}] + \dots$$

$$B' \blacktriangledown = [\text{Diagram 9} - \text{Diagram 10}] + [\text{Diagram 11} - \text{Diagram 12}] + \dots$$

$$B' \blacktriangledown = \text{Diagram 13} + [\text{Diagram 14} - \text{Diagram 15}] + \dots$$

$$C \blacksquare = [\text{Diagram 16} - \text{Diagram 17} - \text{Diagram 18}] + \dots$$

$$C' \blacktriangledown = [\text{Diagram 19} - \text{Diagram 20} - \text{Diagram 21}] + \dots$$

$$C' \blacktriangledown = [\text{Diagram 22} - \text{Diagram 23}] + \dots$$

$$D \blacksquare = \text{Diagram 24} - \text{Diagram 25} - \text{Diagram 26} + \text{Diagram 27} + \dots$$

$$D' \blacktriangledown = \text{Diagram 28} - \text{Diagram 29} - \text{Diagram 30} + \text{Diagram 31} + \dots$$

Приведенное здесь представление для $\tilde{\Sigma}$ и $\tilde{\Phi}$ будет использовано в следующем параграфе для анализа спектров турбулентности. Кроме того, это представление позволяет понять метод вычитания из диаграмм с четырьмя и более внешними концами.

§ 3. Об изотропном спектре турбулентности

В этом параграфе, оставаясь в рамках колмогоровской гипотезы о локальности взаимодействия, мы будем предполагать, что в диаграммных рядах (2.5 - 2.6) после вычитания переноса взаимодействия $T_{12,34}$ перенормируется таким образом, что все интегралы сходятся. При этом индекс однородности t_A перенормированной вершины A , вообще говоря, не обязан совпадать с индексом однородности затравочной вершины $t = 2$.

3.1. Колмогоровский спектр изотропной турбулентности. Предположим, что $t_A = t = 2$, и рассмотрим диаграммные уравнения для \tilde{G}_q и \tilde{n}_q на масштабно-инвариантном спектре:

$$G_q = \frac{1}{\kappa^\alpha} g\left(\frac{\omega}{\kappa^\alpha}\right), \quad n_q = \frac{1}{\kappa^{\alpha+\beta}} f\left(\frac{\omega}{\kappa^\alpha}\right). \quad (3.1)$$

В предположении сходимости диаграмм индексы α и β удовлетворяют соотношениям скейлинга:

$$\alpha + \beta = t + 3. \quad (3.2)$$

Индексы однородности t_B , t_C и t_D вершин B , C и D при этом согласованы следующим образом [10]:

$$t_B = t - \beta, \quad t_D = t - 2\beta. \quad (3.3)$$

В дальнейшем вместо (2.2) для \tilde{h}_q мы будем рассматривать эквивалентное ему уравнение, использованное впервые в работе [10]:

$$\tilde{L}_q = \text{Im} \left[\tilde{\Phi}_q \tilde{G}_q^* + \tilde{h}_q \cdot \tilde{\Sigma}_q \right]. \quad (3.4)$$

Эта комбинация выделена хотя бы потому, что в пределе слабого взаимодействия условие $\tilde{L}_k \equiv \int L_{kw} dw$ переходит в кинетическое уравнение для волн. Можно сказать поэтому, что уравнение (3.4) описывает процесс передачи энергии по масштабам.

При анализе уравнений (3.4) мы будем использовать метод, предложенный в работе [10]. Компактные диаграммы для $\tilde{\Sigma}_q$ и $\tilde{\Phi}_q$, представленные в виде (2.7), подставим в (3.4). При этом диаграммы I' , $3'$, $4'$, $5'$ и $9'$ сокращаются с диаграммами $6'$, $8'$, $7'$, $10'$ и $10'$: вклады от диаграмм $7'$ и $11'$ в выражение для $\tilde{\Phi}_q \text{Im} \tilde{G}_q$ по отдельности равны нулю. Таким образом, все диаграммы со штрихованными вершинами A' , B' , C' и D' не входят в выражение для \tilde{L}_q . Причина этого в том, что они описывают перенос одних масштабов другими и приводят поэтому к обмену энергией.

Оставшиеся диаграммы с вершинами A , B , C и D , которые, если считать G_q заданной, представляют уравнение, определяющее n_q , т.е. индекс β и вид структурной функции $F(x)$ в (3.1). Проинтегрировав его по \vec{k} , мы получаем "укороченное уравнение", из которого можно надеяться получить часть информации о n_q . А именно, мы определим индекс β , точно решив уравнение (3.4) с помощью конформного преобразования, предложенного В. Захаровым для анализа слаботурбулентных спектров [12] и обобщенного на случай сильной турбулентности (при условии сходимости всех диаграмм) в работе [10].

Напишем для этого аналитически уравнения (3.4):

$$L_\omega = \frac{\text{Im}}{2} \int d\vec{k} dq_1 dq_2 dq_3 \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) \times \quad (3.5)$$

$$\times \left\{ F_{k1,23} n_q n_1 n_2 G_3 + F_{1k,23} n_1 n_q n_2 G_3 - \right.$$

$$\left. -F_{21,k3} n_2 n_1 n_q G_3 - F_{31,2k} n_3 n_1 n_2 G_q \right\} + \dots = 0,$$

$$F_{q1,23} \equiv T_{k1,23} A_{312,1k}.$$

Для краткости мы не выписали члены с вершинами B , C и D . Во втором слагаемом сделаем конформное преобразование Захарова ($\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$):

$$\omega = \lambda \omega_1, \quad \omega_1' = \lambda \omega, \quad \omega_2' = \lambda \omega_2, \quad \omega_3' = \lambda \omega_3;$$

$$\vec{k}' = \lambda^{1/\alpha} \vec{k}_1, \quad \vec{k}_1' = \lambda^{1/\alpha} \vec{k}, \quad \vec{k}_2' = \lambda^{1/\alpha} \vec{k}_2, \quad \vec{k}_3' = \lambda^{1/\alpha} \vec{k}_3.$$

Пользуясь однородностью затравочной и перенормировочной вершин, тем, что вершины на изотропном спектре зависят только от углов между волновыми векторами, и учитывая очевидное свойство симметрии затравочной вершины T , легко убедиться, что второе слагаемое переходит в первое на масштабно-инвариантном спектре (3.1) с множителем $\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$, $\alpha = 2t - 3\beta - \alpha + 9$. Принципиально важна при этом сходимость интегралов в (3.5), необходимая для совпадения пределов интегрирования. Аналогично можно третье слагаемое преобразовать к первому со множителем (ω/ω_2) и четвертое к первому - со множителем (ω/ω_3) . Очевидно, что интеграл от этих четырех слагаемых равен нулю, если $\alpha = -1$. Это дает

$$\beta = \frac{2t}{3} + 3 = 13/3. \quad (3.6)$$

Можно показать, что вклад от диаграмм с вершинами B , C и D в уравнение $\tilde{L}_\omega = 0$ также обращается в ноль при выполнении условий (3.6) и (3.3). Подставляя $\beta = 13/3$ в условие скейлинга (3.2), получим $\alpha = 2/3$.

Таким образом, мы показали, что в предположении, что индекс однородности вершины A не перенормируется ($t_A = t = 2$), диаграммные уравнения (3.5) имеют масштабно-инвариантное решение (3.1) с колмогоровскими значениями индексов:

$$\beta = 13/3, \quad \alpha = 2/3.$$

Для корреляционной функции скорости J_k они соответству-

ит $J_K \propto \kappa^{-11/3}$ [10], в сферической нормировке $E_K = 4\pi\kappa^2 J_K \propto \kappa^{-5/3}$. "Закон пяти третей" $E_K \propto \kappa^{-5/3}$ с хорошей точностью выполняется в эксперименте, поэтому далее, при исследовании искажения спектра, мы будем считать $t_A = t = 2$.

3.2. Искажение колмогоровского спектра вблизи вязкой границы. При приближении волнового вектора \vec{k} к вязкой границе инерционного интервала $\lambda^{-1} (\lambda \approx L Re^{-3/4})$ колмогоровский спектр искажается. Для изучения этого эффекта представим изотропную добавку к $\tilde{h}_{k\omega}$ и $\tilde{G}_{k\omega}$ в виде:

$$\delta \tilde{h}_{k\omega} = \kappa^{-(\alpha+\beta+\delta)} f_2(\omega / \kappa^\alpha), \quad (3.7)$$

$$\delta \tilde{G}_{k\omega} = \kappa^{-(\alpha+\delta)} g_2(\omega / \kappa^\alpha).$$

Искомый индекс δ характеризует отклонение этого спектра от колмогоровского. Для того чтобы определить его, линеаризуем уравнение $\tilde{L}_q = 0$ на фоне колмогоровского спектра (3.1) и получим уравнение $\delta \tilde{L}_q = 0$ для добавок (3.7). После интегрирования по ω :

$$\int \delta \tilde{L}_{k\omega} d\omega = \delta \tilde{L}_K = \frac{J_m}{2} \int d\omega dq_1 dq_2 dq_3 \delta(q + q_1 + q_2 - q_3) \times$$

$$\times \left\{ \left[\delta \tilde{h}_q \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{G}_3 (F_{q_1, 23} + F_{1q, 23} - F_{21, q_3}) - \right. \right. \quad (3.8)$$

$$\left. \left. + \delta \tilde{G}_q \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 F_{32, 1q} \right] + \left[\delta \tilde{h}_1 \tilde{h}_q \tilde{h}_2 \tilde{G}_3 \times \right.$$

$$\left. \times (F_{1q, 23} + F_{q_1, 23} - F_{2q, 13}) - \delta \tilde{G}_1 \tilde{h}_q \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 F_{32, 1q} \right] -$$

$$- \left[\delta \tilde{h}_2 \tilde{h}_1 \tilde{h}_q \tilde{G}_3 (F_{21, q_3} + F_{12, q_3} - F_{q_1, 23}) - \right.$$

$$- \delta \tilde{G}_2 F_{3q, 12} n_q n_1 n_3 \left. \right] - \left[\delta \tilde{h}_3 \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{G}_q (F_{31, 2q} + \right.$$

$$\left. + F_{13, 2q} - F_{21, 3q}) - \delta \tilde{G}_3 n_q n_1 n_2 F_{q_2, 13} \right] \left. \right\} + \dots = 0.$$

Здесь не выписаны как слагаемые возникающие при линеаризации вершины A, так и слагаемые с вершинами B, C и D. Во втором слагаемом (3.8) сделаем конформное преобразование ($\kappa \rightarrow 1$):

$$\kappa = \kappa_1 \lambda_1, \quad \kappa'_1 = \lambda_1 \kappa, \quad \kappa'_2 = \lambda_1 \kappa_2, \quad \kappa'_3 = \lambda_1 \kappa_3,$$

$$\omega' = \lambda_1^\alpha \omega_1, \quad \omega'_1 = \lambda_1^\alpha \omega, \quad \omega'_2 = \lambda_1^\alpha \omega_2, \quad \omega'_3 = \lambda_1 \omega_3,$$

$$\lambda_i \equiv (\kappa / \kappa_i) \quad (3.9)$$

и преобразование поворота [16].

Аналогичным образом можно убедиться, что второе слагаемое переходит в первое с множителем λ_1^y , $y = 2t - 3\beta - \delta - \alpha + g - (\alpha + \delta\nu)$. Точно так же третье слагаемое преобразуется к первому с множителем λ_2^y и четвертое к первому - с множителем λ_3^y . Таким образом, подынтегральное выражение в (3.8) оказывается пропорциональным сумме $\left[1 + \left(\frac{\kappa}{\kappa_1}\right)^y - \left(\frac{\kappa}{\kappa_2}\right)^y - \left(\frac{\kappa}{\kappa_3}\right)^y \right]$, где

$y = 2t - 3\beta + g - \alpha - \delta = -(\alpha + \delta)$. При $y = 0$ уравнение (3.8) очевидно удовлетворяется, поэтому $\delta = -\alpha = -2/3$. Поправки к спектру (3.7) вызывают соответствующую поправку к парному коррелятору

$$\delta J_K \propto J_K^0 \kappa^{2/3}. \quad \text{На вязкой границе } \delta J_K \propto J_K^0 \text{ и степенной спектр } J_K \text{ должен обрываться. Поэтому при } \kappa\lambda < 1$$

$$J_K \approx J_K^0 (1 - c(\kappa\lambda)^{2/3}), \quad (3.10)$$

где положительный безразмерный коэффициент $c \approx 1$. Отметим, что вязкая поправка к частоте $\nu \kappa^2$ в $(\kappa\lambda)^{2/3}$ меньше, чем колмогоровская частота $\omega_K \propto \kappa^{2/3}$, поэтому непосредственный учет вязкости в уравнениях гидродинамики приводит к поправке к J_K следующего порядка малости:

$$\frac{\delta J_K}{J_K^0} \propto c_3 (\kappa\lambda)^{4/3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ЭЛЕКТРОМЕТРИИ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

1. А.Н. Колмогоров. - "ДАН СССР", 1941, т. 30, с. 299.
2. А.С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика, ч. П. М., "Наука", 1967.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика сплошных сред, § 33. М., ГИТТЛ, 1954.
4. R.N. Kraichnan. - "Proc. Symp. Dynamics of Fluids and Plasmas", N.Y., Acad. Press., 1967.
5. А.В. Шутько. - "ДАН СССР", 1964, т. 158, с. 1058.
6. H.W. Wuld. - "Ann. Phys.", 1961, v. 14, p. 143.
7. Л. Келдыш. - "ЖЭТФ", 1964, т. 47, с. 1513.
8. R.N. Kraichnan. - "J. Fluid. Mech.", 1959, v. 5, p. 497.
9. Г.А. Кузьмин, А.З. Паташинский. - "ЖЭТФ", 1972, т. 62, с. 1175.
10. В.Е. Захаров, В.С. Львов. О статистическом описании нелинейных волновых полей. Препринт ИТФ им. Л.Д.Ландау. Черногловка, 1975; см. также "ИВУЗ. Радиофизика", 1975, т. ХУШ, с. 1470.
11. Г. Ламб. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947; Б.И. Давыдов. - "ДАН СССР", 1949, т. 89, с. 165.
12. В.Е. Захаров. - "ПМТФ", 1968, вып. 2.
13. Б.Б. Кадомцев. Вопросы физики плазмы, вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
14. R.N. Kraichnan. - "Physics Fluids", 1964, v. 7, p. 1723.
15. Г.А. Кузьмин, А.З. Паташинский. Представление взаимодействия в теории турбулентности. Препринт ИЯФ СО АН СССР 76-20. Новосибирск, 1976.
16. А. Кац, В. Канторович. - "ЖЭТФ", 1973, т. 64, с. 153.

В.С. Львов

К ТЕОРИИ РАЗВИТОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Препринт № 53

Новосибирск
1977