

ГЛАВА 3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН

В этой главе дано краткое описание процессов взаимодействия СВ между собой и с другими колебаниями и волнами в магнетиках: однородной прецессией намагниченности, внешним переменным магнитным полем, звуком и т.д. Эти процессы описываются динамическими уравнениями движения для комплексных амплитуд волн, в которых существенны фазовые соотношения. Их поэтому естественно назвать *динамическими* процессами, в отличие от процессов взаимодействия широких в k -пространстве пакетов волн, которые описываются кинетическими уравнениями для чисел заполнения и которые можно назвать *кинетическими* процессами. Их мы будем изучать ниже, начиная с гл. 7.

Последовательно пользуясь гамильтоновым методом описания нелинейных волн, изложенным в предыдущей главе, мы будем на первом этапе описывать динамические процессы (процесс слияния двух волн в одну, гене-

рацию второй гармоники, распад одной волны на две, различные типы четырехволновых процессов, включая самофокусировку и коллапс) безотносительно к типу волн и характеру среды, в которой они распространяются. И только потом, используя явный вид закона дисперсии СВ и коэффициентов гамильтониана взаимодействия, мы изучим конкретные особенности этих нелинейных волновых процессов в ферро- и антиферромагнетиках. Разумеется, в ограниченном объеме невозможно сделать это сколько-нибудь подробно для всех известных процессов. При отборе материала я руководствовался несколькими соображениями: во-первых, возможностью простой и общей идеализированной формулировки задачи, ее важностью для понимания более сложных и реальных ситуаций. Во-вторых, возможностью наблюдения и степенью экспериментальной изученности соответствующих нелинейных эффектов в магнетиках. В-третьих, степенью влияния этих эффектов на нелинейное запороговое поведение параметрически возбужденных СВ.

Результат этого отбора достаточно подробно отражен в оглавлении. Насколько он соответствует перечисленным критериям, пусть судит читатель.

§ 10. Уравнения движения в слабо неконсервативной среде

10.1. Гамильтоновы канонические уравнения для волн. В наиболее простом случае — когда 1) среду, в которой распространяются волны, можно считать неограниченной и пространственно-однородной, 2) консервативной, т.е. затуханием волн можно пренебречь, 3) достаточно рассматривать волны одного типа, а взаимодействием с другими волнами можно пренебречь, — уравнения движения имеют хорошо известный вид (1.6). Их можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + i\omega(k) b_k = -i \frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta b_k^*} . \quad (10.1)$$

В пренебрежении взаимодействием волн ($\mathcal{H}_{\text{int}} = 0$) это уравнение описывает вращение фазы волны с частотой ω_k . Гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}}$ состоит из слагаемых третьего $\mathcal{H}_3$ и четвертого $\mathcal{H}_4$ порядков по степеням амплитуд b_k, b_k^* (см. формулы (5.23), (5.24)). Как мы увидим ниже, они описывают элементарные процессы с участием трех или четырех волн соответственно.

10.2. Учет линейного затухания волн. В реальной среде всегда существуют процессы, приводящие к затуханию. Для длинных СВ в ФМ это прежде всего их взаимодействие с "термостатом магнонов" — термически возбужденным резервуаром остальных СВ. Важную роль, особенно в АФМ, может играть взаимодействие СВ с фононами (звуком). К затуханию СВ приводит также их взаимодействие с примесями различной природы, кристаллическими дефектами, порами и другими нарушениями пространственной однородности.

Как известно, в подавляющем большинстве случаев затухание волн малой амплитуды происходит по экспоненциальному закону

$$|b_k(t)| = |b_k(0)| \exp(-\gamma_k t) . \quad (10.2)$$

Декремент γ_k зависит от волнового вектора волны k , температуры среды T , магнитного поля H и других условий эксперимента. В хороших образцах магнетодиэлектриков (ЖИГ, MnCO_3 , CsMnF_3 и т.д.) затухание СВ является малым в сравнении с их частотой: отношение $\gamma_k/\omega_k \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$. Это оправдывает использование в нулевом приближении гамильтоновых уравнений (10.1), не учитывающих затухание. В первом приближении малое затухание можно учесть, добавляя к каждому из них слагаемое $\gamma_k b_k$, приводящее к экспоненциальному закону убывания амплитуды (10.2):

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + i\omega_k b_k + \gamma_k b_k = -\frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta b_k^*}. \quad (10.3)$$

Эта феноменологическая процедура учета малого затухания волн как мнимой добавки к их частоте часто используется в теоретической физике и считается почти очевидной. Помимо малостей затухания и взаимодействия, (эти условия приближенно можно записать так: $\gamma_k \ll \omega_k$, $\mathcal{H}_{\text{int}} \ll \mathcal{H}_2$) для справедливости уравнения (10.3) амплитуды волн должны быть ограничены сверху и снизу. Действительно, мы считаем, что весь мир разделен на две части: на систему волн с амплитудами $b_k(t)$, гамильтонианом $\mathcal{H}$, которую мы собираемся описывать детально, динамически с помощью уравнения (10.3), и на ее окружение, термостат, который мы будем считать находящимся в термодинамическом равновесии с температурой T . Слагаемое $\gamma_k b_k$ описывает "трение волн о термостат", т.е. уход энергии в термостат, и приводит к уменьшению амплитуд волн b_k до нуля. Однако эти амплитуды должны релаксировать не к нулю, а к термодинамически равновесному значению, которое задается распределением Рэлея—Джинса

$$|b_0(k)|^2 = n_0(k) = T/\omega_k, \quad (10.4)$$

справедливым в классическом пределе $T \gg \hbar \omega_k$. Поэтому (10.3) справедливо при $|b_k| \gg |b_0(k)| = (T/\omega_k)^{1/2}$.

10.3. Учет теплового шума. Если неравенство $|b| \gg |b_0|$ не выполняется, к уравнению (10.3) необходимо добавить ланжевеновскую случайную силу $f_k(t)$:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + (i\omega_k + \gamma_k) b_k = -i \frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta b_k^*} + f_k(t), \quad (10.5)$$

имитирующую тепловой шум — беспорядочные толчки со стороны термостата, приводящие в среднем к увеличению энергии волн $b_k(t)$. Как известно из статистической физики, случайная сила $f_k(t)$ является гауссовой с коррелятором:

$$\langle f_k(t) f_{k'}(t') \rangle = 2\delta(k - k') \delta(t - t') \gamma_k n_0(k). \quad (10.6)$$

Свойства теплового шума (10.6) довольно очевидны: он не скоррелирован в различные моменты времени и для волн с разными k . Что касается множителя $2\gamma_k n_0$, то он выбран так, чтобы числа волн n_k релаксировали к равновесному значению $n_0(k)$. Действительно, из (10.5) и (10.6) при $\mathcal{H}_{\text{int}} = 0$ довольно просто получить уравнение

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = -\gamma_k (n_k - n_0(k)), \quad (10.7)$$

$$\langle b_k b_{k'}^* \rangle = n_k \delta(k - k'), \quad (10.8)$$

описывающее это явление. Термин "число волн" употребляется нами по аналогии с квантовой механикой. Необходимо, однако, помнить, что в нашем, классическом подходе величина n_k имеет размерность действия (эрг · с), а квантовомеханические числа заполнения $n_{кв}(k)$ являются безразмерными. При $n_{кв}(k) \gg 1$ между ними имеется соответствие:

$$n_k = \hbar n_{кв}(k). \quad (10.9)$$

10.4. Нелинейность затухания волн. Другое ограничение области справедливости уравнений (10.3) проистекает из предположения о том, что γ_k вообще не зависит от всех остальных чисел волн $n(k')$. Вообще говоря, это не так. Однако при малых $n(k')$ можно разложить γ_k в ряд по $n(k')$ и ограничиться первыми членами:

$$\gamma_k(n(k')) = \gamma_k^0 + \sum_{k'} \eta(kk') n(k'). \quad (10.10)$$

Если $\eta(kk') > 0$, то говорят о положительном нелинейном затухании, при $\eta(kk') < 0$ — об отрицательном. Природу нелинейности затухания мы обсудим позже. Здесь отметим только, что коэффициенты $\eta(kk')$ могут иметь любой знак и быть как симметричными относительно перестановки $k \leftrightarrow k'$, так и антисимметричными. Они могут также не обладать этой симметрией вовсе. На первом этапе (в том числе и всюду в этой главе) мы будем считать, что числа $n(k')$ достаточно малы для того, чтобы можно было пренебрегать нелинейностью затухания волн.

В заключение этого параграфа отметим, что уравнения (10.3) и (10.5) можно с успехом использовать для описания широкого круга нелинейных волновых явлений. Необходимо только сформулировать исходные уравнения среды в гамильтоновом виде. К сожалению, достаточно эффективный и общий метод поиска канонических переменных неизвестен. Однако в целом ряде общих случаев канонические переменные уже найдены. Так, например, в монографии [45] приведены давно известные канонические переменные Клебша, описывающие вихревые и потенциальные баротропные течения идеальной жидкости. В работе В.Е. Захарова и Н.Н. Филоненко [91] найдены канонические переменные для волн на поверхности жидкости, В.П. Покровским и И.М. Халатниковым введены четыре пары канонических переменных, описывающих течение нормальной и сверхтекучей компонент жидкого гелия в рамках двухжидкостной гидродинамики. В обзоре В.Е. Захарова [106] приведены канонические переменные для релятивистской гидродинамики, для гидродинамики заряженной жидкости (плазмы), взаимодействующей с электромагнитным полем, для магнитной гидродинамики. Этот список можно продолжить.

Еще одно замечание. Уравнения (10.3), (10.5) являются приближенными и в некоторых специфических случаях могут оказаться несправедливыми даже при выполнении обсужденных выше условий. Это относится, например, к задаче о параметрическом возбуждении волн при их рассеянии на статических дефектах. В таких случаях при изучении тонких нелинейных эффектов необходимо пользоваться более последовательным подходом. В нем все взаимодействия, в том числе и приводящие к затуханию нелинейных волн, рассматриваются детально, микроскопически, что позволяет от-

казаться от несколько условного разделения системы на нелинейные волны и термостат. Этот микроскопический подход, основанный на диаграммной технике Уайльда, понадобится нам лишь на следующем этапе изучения нелинейных СВ (начиная с гл. 7) и будет описан позднее. Здесь же для изучения нелинейных явлений первого круга вполне можно ограничиться простыми феноменологическими уравнениями (10.3), (10.5).

§ 11. Трехволновые процессы

Подставляя в уравнение (10.3) гамильтониан $\mathcal{H}_3$, определенный формулой (5.23), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_k}{\partial t} + (\gamma_k + i\omega_k) b_k = & -\frac{1}{2} i \sum_{1+2=k} V_{k,12}^* b_1 b_2 - \\ & - i \sum_{k+2=1} V_{1,k2} b_1 b_2^* - i \sum_{1+2+k=0} U_{k12} b_1^* b_2^*. \end{aligned} \quad (11.1)$$

11.1. Слияние двух волн в одну. Генерация второй гармоники и другие вынужденные процессы. Пусть в среде (например, в ферромагнетике) распространяются две монохроматические волны (например, спиновые):

$$b_k(t) = b_1 \delta(k - k_1) \exp[-i\omega(k_1)t] + b_2 \delta(k - k_2) \exp[-i\omega(k_2)t]. \quad (11.2)$$

В силу (11.1) они приведут к образованию дополнительных трех волн:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k(t) = & b_3 \delta(k - k_1 - k_2) \exp[-i\omega(k_1)t - i\omega(k_2)t] + \\ & + b_4 \delta(k + k_2 - k_1) \exp[-i\omega(k_1)t + i\omega(k_2)t] + \\ & + b_5 \delta(k + k_2 + k_1) \exp[i\omega(k_1)t + i\omega(k_2)t] \end{aligned} \quad (11.3)$$

с амплитудами

$$\begin{aligned} b_3 = & \frac{1}{2} V_{1+2,12}^* b_1 b_2 [\omega(k_1) + \omega(k_2) - \omega(k_1 + k_2) - i\gamma(k_1 + k_2)]^{-1}, \\ b_4 = & -V_{1,(1-2)2} b_1 b_2^* [\omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_1 - k_2) - i\gamma(k_1 - k_2)]^{-1}, \\ b_5 = & U_{-(1+2),12} b_1^* b_2^* [\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_1 + k_2) + i\gamma(k_1 + k_2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Если частоты $\omega(k_1)$, $\omega(k_2)$ удовлетворяют условию

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) = \omega(k_1 + k_2), \quad (11.5)$$

то амплитуда b_3 велика в сравнении с b_4 и b_5 . В этом случае говорят о резонансном процессе слияния двух волн в одну. Если же вместо (11.5) выполняется другое условие:

$$\omega(k_1) - \omega(k_2) = \omega(k_1 - k_2), \quad (11.6)$$

то, наоборот, $|b_4| \gg |b_{3,5}|$. На квантовомеханическом языке квазичастиц несколько затруднительно сказать, что бы это значило, однако на классическом языке, в терминах амплитуд волн, понятно, что речь идет о резонансном возбуждении волны с волновым вектором $k_4 = k_1 - k_2$ на одной из комбинационных частот $\omega_4 = \omega(k_1) - \omega(k_2)$.

Если среда, в которой распространяются волны, находится в состоянии термодинамического равновесия, то эти волны имеют положительные час-

тоты. Поэтому условие

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(-k_1 - k_2) = 0, \quad (11.7)$$

необходимое для того, чтобы амплитуда b_5 в (11.4) была велика, в равновесии не выполняется. Этими процессами можно пренебречь по параметру обратной добротности волн

$$1/Q_k = \gamma_k / \omega_k \ll 1. \quad (11.8)$$

Разобранные примеры приводят нас к чрезвычайно важному утверждению о том, что по параметру (11.8), как правило, можно не учитывать нерезонансные процессы, выбрасывая соответствующие члены на самом первом этапе решения задачи — при формулировке гамильтониана взаимодействия. И только при изучении относительно слабых четырехволновых процессов (см. § 12) необходимо учитывать вклад нерезонансных трехволновых процессов во втором порядке теории возмущений.

Рассмотрим несколько более подробно процесс (11.5) слияния двух волн в одну. Из первого выражения в (11.4) видно, что резонансная кривая имеет лоренцеву форму. Если функция $V_{3,12}$ вещественна, то в резонансе сдвиг фазы $\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \pi/2$. Вдали от резонанса $\Delta\varphi = 0$. Для того чтобы оценить эффективность процесса преобразования двух волн в одну, необходимо знать величину матричного элемента $V_{3,12}$, закон дисперсии волн ω_k и их декремент γ_k . В качестве примера рассмотрим слияние двух СВ в одну в изотропном ФМ для случая, когда условие трехмагнотного резонанса (11.5) выполнено. Пусть в ФМ возбуждены две СВ k_1 и k_2 . Они вызывают прецессию магнитного момента

$$m_+(r, t) = 2m_1 \cos(\omega_1 t - k_1 r) + 2m_2 \cos(\omega_2 t - k_2 r).$$

Считая поляризацию СВ круговой (для этого, например, необходимо, чтобы $\omega_M \ll \omega_{ex}(ka)^2$) и используя, во-первых, связь (8.8) между "натуральными" $m_{1,2}$ и каноническими $b_{1,2}$ амплитудами волн и, во-вторых, выражения (6.22), (6.23) для $V_{1,23}$ (полагая в нем $u = 1, v = 0$), получим в резонансе:

$$\frac{m_3}{M} = -i \frac{\omega_M m_1 m_2}{4\gamma_3 M^2} \left[\frac{k_{1z} k_{1+}}{k_1^2} + \frac{k_{2z} k_{2+}}{k_2^2} \right]. \quad (11.9)$$

Отношение (m_k/M) является углом прецессии и характеризует уровень нелинейности СВ. Отношение $(\omega_M/\gamma) \approx 10^3 \div 10^4$ (для ЖИГ при комнатной температуре) описывает резонансное усиление процесса преобразования. Нужно сказать, что экспериментальное наблюдение в магнетиках описанного здесь нелинейного процесса довольно затруднительно в связи с трудностями создания и регистрации монохроматических СВ и с тем, что даже при низких температурах они имеют небольшую длину пробега порядка нескольких миллиметров. Гораздо проще наблюдать процесс слияния двух уокеровских типов в третий. С точностью до числового коэффициента порядка единицы их амплитуды в резонансе будут связаны соотношением типа (11.9).

11.2. Распадная неустойчивость. Здесь мы рассмотрим неустойчивость плоской монохроматической волны b_k относительно распада на две другие волны. Примерами такого процесса могут служить распад однородной

прецессии намагниченности (или электромагнитного СВЧ излучения) на две СВ, распад фонона на две СВ и т.д. В этот список входит также вынужденное рассеяние света: распад фотона на фотон и фонон, на фотон и СВ и целый ряд других процессов. Итак, пусть в среде распространяется монохроматическая волна с частотой $\omega_0 = \omega(k)$ и амплитудой b :

$$b_k(t) = b\delta(k - k_0) \exp(-i\omega_0 t). \quad (11.10)$$

Тогда (11.1) для волн малой амплитуды имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 + [\gamma_1 + i\omega(k_1)] b_1 + iVb b_2^* \exp(-i\omega_0 t) &= 0, \\ \dot{b}_2^* + [\gamma_2 - i\omega(k_2)] b_2^* - iV^* b^* b_1 \exp(i\omega_0 t) &= 0. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Здесь оставлено второе из нелинейных слагаемых в уравнении (11.1). Первое и третье слагаемые для интересующего нас процесса распада являются нерезонансными, и по параметру добротности волн (11.8) их можно не учитывать. Ищем решение этих уравнений в виде

$$b_1(t) = b_1 \exp(\nu - i\omega_1) t, \quad b_2^*(t) = b_2^* \exp(\nu + i\omega_2) t, \quad (11.12)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_0. \quad (11.13)$$

Подчеркнем, что инкремент неустойчивости ν во втором из выражений (11.12) не сопрягается, даже если он окажется комплексной величиной. Только в таком случае и при выполнении условия (11.13) подстановка (11.12) приводит дифференциальное уравнение (11.11) к алгебраическому с постоянными коэффициентами. Оно имеет ненулевые решения, если

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 + \nu + i[\omega(k_1) - \omega_1] & iVb \\ -iVb^* & \gamma_2 + \nu - i[\omega(k_2) - \omega_2] \end{vmatrix} = 0. \quad (11.14)$$

Здесь полезно заметить, что условие (11.13) фиксирует только сумму $\omega_1 + \omega_2$, оставляя их разность произвольной. Смысл этого произвола простой: если к ω_1 добавить, а от ω_2 отнять некоторую частоту δ , то это в соответствии с (11.12) приведет к замене $\nu \rightarrow \nu - i\delta$. Мы можем воспользоваться отмеченным произволом для того, чтобы упростить анализ уравнения (11.14). Именно, выберем ω_1 и ω_2 так, чтобы

$$(\gamma_1 + \nu)[\omega(k_2) - \omega_2] = (\gamma_2 + \nu)[\omega(k_1) - \omega_1]. \quad (11.15)$$

Тогда коэффициент при мнимой единице в (11.14) обращается в нуль, и для ν из (11.14) и (11.15) получим

$$\begin{aligned} 2\nu &= -\gamma_1 - \gamma_2 + [B + (B^2 + 2(\Delta\gamma\Delta\omega)^2)^{1/2}]^{1/2}, \\ 2B &= 4|Vb|^2 + (\Delta\gamma)^2 - 4(\Delta\omega)^2, \\ \Delta\gamma &= \gamma_1 - \gamma_2, \quad 2\Delta\omega = \omega(k_1) + \omega(k_2) - \omega_0. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Далее, подставив ν из (11.16) в (11.15), можно найти ω_1 и ω_2 из совместного решения уравнений (11.15) и (11.13). Понятно, что при этом ω_1 будет близко к $\omega(k_1)$, а ω_2 — к $\omega(k_2)$. В простом случае, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega(k_1) - \frac{1}{2}\Delta\omega, \quad \omega_2 = \omega(k_2) + \frac{1}{2}\Delta\omega, \\ \nu &= -\gamma + (|Vb|^2 - (\Delta\omega)^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

При $\text{Re } \nu > 0$ амплитуды волн b_1, b_2 растут во времени по экспоненциаль-

ному закону (11.12), в этом случае говорят, что исходная волна b неустойчива по отношению к распаду на две волны b_1 и b_2 , ν называют инкрементом распадной неустойчивости. Часто (особенно, если $k_0 = 0$) эту неустойчивость называют также параметрической. Инкремент неустойчивости максимален в резонансе $\Delta\omega = 0$:

$$2\nu_{\max} = -(\gamma_1 + \gamma_2) + (4|Vb|^2 + (\Delta\gamma)^2)^{1/2}. \quad (11.18)$$

Распадная неустойчивость имеет порог, связанный с затуханием волн:

$$|Vb_{\text{cr}}|^2 = \gamma_1\gamma_2. \quad (11.19)$$

Зная матричный элемент V и измеряя b_{cr} , можно определить затухание волн. Это основной способ определения затухания СВ в ФМ. Граница области неустойчивости определяется из (11.16) при $\nu = 0$. Если $\gamma_1 = \gamma_2$, то область неустойчивости

$$(\Delta\omega)^2 < 4|Vb|^2 - \gamma^2. \quad (11.20)$$

Надо сказать, что условия резонанса в процессе распада

$$\omega_k = \omega(k_1) + \omega(k_1 - k_2) \quad (11.21)$$

не всегда выполняются и в соответствии с этим законы дисперсии ω_k делятся на распадные и нераспадные. Так, степенные спектры $\omega_k \sim k^\alpha$ являются распадными, если $\alpha \geq 1$, звуковой спектр $\omega_k = kc_s$ является граничным и условия (11.21) выполняются только на линии $k_1 \parallel k$; для спектра $\omega_k = \omega_0 + \beta k^2$ распадные условия (11.20) выполняются, если $\omega_k > 3\omega_0$.

В качестве важного примера мы вычислим границу распада для спектра СВ (6.5) в кубическом ФМ, ограничившись ориентацией $M \parallel [100]$ или $M \parallel [110]$, когда $\beta = 0$. Рассмотрим вначале симметричный случай, когда $k_1 = k_2$ и соответственно $k_0 = 2k_1$. Тогда из резонансного условия $\omega(k_0) = 2\omega(k_0/2)$ имеем выражение для волнового вектора k_S :

$$\omega_{\text{ex}}(ak_S)^2 = 2(A^2 - B^2)^{1/2}, \quad (11.22)$$

$$B = \frac{1}{2}\omega_M \sin^2\theta, \quad A = \omega_H - \omega_M N_z - \alpha\omega_a + B.$$

Более детальный анализ закона дисперсии (6.5) показывает, что значение (11.22) волнового вектора k_S является граничным в том смысле, что при $k < k_S$ процессы распада для СВ с $\omega(k_S)$ запрещены, а при $k > k_S$ разрешены.

В § 14, посвященном методам параметрического возбуждения СВ в магнетиках, будет подробно описана распадная неустойчивость СВ с $k = 0$, т.е. однородной прецессии намагниченности на две СВ, на так называемые ядерные СВ в АФМ и т.д. Здесь же в качестве примера мы кратко рассмотрим неустойчивость монохроматической СВ относительно распада на две другие СВ. Подставляя матричный элемент $V_{1,23}$ (6.22), (6.23) в формулу (11.19) и считая для простоты, что k_1 — волновой вектор исходной волны конечной амплитуды b_1 перпендикулярен M ($\sin\theta = 1$), получаем критическое значение b_1 :

$$|b_{1\text{cr}}| = (2\gamma/\omega_M)(2M/g)^{1/2}, \quad \gamma = (\gamma_2\gamma_3)^{1/2}, \quad (11.23)$$

соответствующее порогу распада на две СВ, распространяющиеся под

оптимальными углами $\theta_2 = \pi - \theta_3 = \pi/4$, $\varphi_2 = \varphi_3$. Амплитуде (11.23) соответствует критическое значение угла прецессии

$$\psi_{1\text{cr}} = m_{1\text{cr}}/M = b_{1\text{cr}}(2g/M)^{1/2} = 4\gamma/\omega_M. \quad (11.24)$$

Таким образом, СВ с амплитудой b и углом прецессии ψ , превышающими критические значения (11.23) и (11.24), неустойчива относительно распада на две другие.

11.3. Взаимодействие трех волн конечной амплитуды (задача Бломбергена) [44]. Рассмотрим взаимодействие трех спектрально-узких пакетов волн, характерные волновые векторы k_1, k_2, k_3 которых удовлетворяют условию резонанса $k_1 = k_2 + k_3$, $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. Положим

$$b_k = \sum_{j=1}^3 b_j(k) \quad (11.25)$$

и будем считать, что b_j отлично от нуля, если $\vec{k} = k - k_j$ мал. Внутри каждого пакета исключим быструю зависимость от r, t заменой

$$a_j(\vec{k}) = b_j(k_j + \vec{k}) \exp[i(\omega(k_j) t - k_j r)] \quad (11.26)$$

и упростим уравнения, считая

$$\omega(k_j + \vec{k}) = \omega(k_j) + (\vec{k} \nabla_j). \quad (11.27)$$

Далее перейдем в r -представление по формулам

$$a_j(r) = (2\pi)^{-3/2} \int a_j(\vec{k}) \exp[i\vec{k}r] d\vec{k}. \quad (11.28)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 + v_1 \nabla \right) a_1(r, t) &= -iV a_2(r, t) a_3(r, t), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2 + v_2 \nabla \right) a_2(r, t) &= iV a_1(r, t) a_3^*(r, t), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3 + v_3 \nabla \right) a_3(r, t) &= iV a_2^*(r, t) a_1(r, t). \end{aligned} \quad (11.29)$$

Здесь $V = (2\pi)^{3/2} V_{1,2,3}$, переменные $a_j(r, t)$ имеют смысл комплексных огибающих для волн $\exp[i(k_j r - \omega_j t)]$. Уравнение (11.29) при $\gamma_j = 0$ является гамильтоновым с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} i v_j \int [a_j^* \nabla a_j - a_j \nabla a_j^*] dr + V \int [a_1^* a_2 a_3 + \text{к.с.}] dr. \quad (11.30)$$

Кроме $\mathcal{H}$, уравнение (11.29) при $\gamma_j = 0$ имеет еще два независимых интеграла движения (интегралы Мэнли-Роу):

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= \text{const}, \quad N_1 + N_3 = \text{const}, \\ N_j &= \int a_j^*(r) a_j(r) dr. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Величины N_j имеют смысл полного числа частиц сорта j . Наличие трех интегралов движения позволяет эффективно исследовать эти уравнения (см., например, [44]). Более того, с помощью метода обратной задачи

рассеяния (см., например, обзор В.Е. Захарова, [111]) В.Е. Захаровым и С.В. Манаковым [104, 109] была построена теория резонансного взаимодействия волновых пакетов, позволяющая проследить их эволюцию в рамках уравнений (11.29) для произвольных локализованных начальных условий. Здесь же мы рассмотрим простой, но интересный пример — генерацию второй гармоники ($a_2 = a_3$) в стационарном случае. Пусть для простоты $\gamma_j = 0$, $v_j = v$ и при $z = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = A_2^0$ и вещественно. Подставляя в (11.29) $a_1 = iA_1$, $a_2 = a_3 = A_2$, имеем

$$v \frac{\partial}{\partial z} A_1 = VA_2^2, \quad v \frac{\partial}{\partial z} A_2 = -VA_1 A_2. \quad (11.32)$$

Решение этих уравнений с нулевым условием для A_1 на границе имеет вид

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_2^0 \operatorname{th}(VA_2^0 z/v), \\ A_2(z) &= A_2^0 \operatorname{ch}^{-1}(VA_2^0 z/v). \end{aligned} \quad (11.33)$$

Характерная длина $L = v/(VA_2^0)$ называется длиной взаимодействия, при $z \gg L$ вся энергия исходной волны A_2 переходит во вторую гармонику A_1 . Эксперимент по генерации второй гармоники является одним из наиболее зрелищных в нелинейной оптике — в кристалл входит красный луч, а выходит зеленый. Добиться полного преобразования не удастся из-за неточного выполнения условий резонанса и т.п. В лучших экспериментах $k_{\text{преоб}} \approx 90\%$.

11.4. Взрывная неустойчивость трех волн. Если в среде могут существовать волны с отрицательной энергией (активная среда), то могут выполняться резонансные условия для процесса "рождения трех волн из вакуума":

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3) = 0, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0. \quad (11.34)$$

Этот процесс описывается последним слагаемым в уравнении (11.1). Удерживая вблизи резонанса (11.34) только это слагаемое, ищем решение в виде трех волн:

$$b_k(t) = \sum_{j=1}^3 a_j(t) \delta(k - k_j) \exp[-i\omega(k_j)t].$$

С наибольшей скоростью амплитуды волн будут расти, если $\omega(k_j)$ и k_j точно удовлетворяют условию (11.34). В этом случае из (11.1) получается

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + \gamma_1 a_1 &= -2iUa_2^* a_3^*, \\ \dot{a}_2 + \gamma_2 a_2 &= -2iUa_1^* a_3^*, \\ \dot{a}_3 + \gamma_3 a_3 &= -2iUa_1^* a_2^*. \end{aligned} \quad (11.35)$$

При $\gamma_j = \gamma$ эти уравнения имеют решение $|a_j| = a$, где

$$a(t) = a_0 \gamma \exp(-\gamma t) [\gamma + 2Ua_0 (\exp(-\gamma t) - 1)]^{-1}. \quad (11.36)$$

Если начальная амплитуда a_0 достаточно велика: $2Ua_0 > \gamma$, амплитуда $a(t)$ обращается в бесконечность за конечное время t_0 , при малых γ $t_0 = 1/(2Ua_0)$. Такая неустойчивость называется взрывной. В этом простейшем решении "взрыв" происходит одновременно во всем пространстве.

В действительности любая неоднородность начальных условий приведет к тому, что "взрывы" будут происходить в изолированных точках. Последовательная теория этого явления построена В.Е. Захаровым и С.В. Манакным [109] в рамках уравнений в частных производных, аналогичных уравнениям (11.9), а также интегрируемым методом обратной задачи рассеяния.

Отметим, что в магнетодиэлектриках нельзя в чистом виде реализовать условия возникновения взрывной неустойчивости (11.34). Однако в ФМ в области малых магнитных полей можно выполнить условия распада ОП на три СВ:

$$\omega_0 = \omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3), \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0. \quad (11.37)$$

Этот процесс описывается четырехмагнотонным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_4 = \frac{1}{3} \sum_{1+2+3=0} (T_{0123} b_0 b_1^* b_2^* b_3^* + \text{к.с.}). \quad (11.38)$$

Ясно, что амплитуды СВ b_1, b_2, b_3 при большом b_0 будут эволюционировать по закону (11.36) (с заменой $U \rightarrow T b_0$) до тех пор, пока можно пренебречь обратным влиянием СВ на ОП. Любознательный читатель может в порядке упражнения дописать к трем уравнениям (11.40) четвертое — для амплитуды ОП, находящейся во внешнем поле h , — и учесть это обратное влияние.

§ 12. Четырехволновые процессы

В случае, когда трехволновые процессы запрещены законами сохранения, в уравнении движения (10.1) необходимо учитывать дополнительные слагаемые, возникающие из четырехволнового гамильтониана взаимодействия (5.24). Трехволновые слагаемые полностью не учитывать нельзя, ибо в соответствии с (5.30) во втором порядке теории возмущений они приводят к разрешенным четырехволновым процессам.

Интересно выяснить, какой вклад в четырехволновые матричные элементы больше — исходный W или возникающий при итерации трехволновых процессов $\tilde{T} \sim V^2/\Delta\omega$. Если разложение исходного гамильтониана происходит по одному малому параметру, то $\omega_k W \sim V^2$. В таком случае рассматриваемые вклады одного порядка величины. Так обстоит дело, например, с диполь-дипольным вкладом в $\mathcal{H}_{\text{int}}$ для СВ в ФМ. В более сложных ситуациях преобладающим по специальным причинам может быть любой из этих вкладов.

Напомним один из результатов п. 5.4: с помощью соответствующего нелинейного канонического преобразования (типа (5.29)) можно исключить все слагаемые в гамильтониане взаимодействия, отвечающие процессам, которые запрещены законами сохранения. Поэтому особенный интерес представляет четырехволновой процесс (5.30) рассеяния волн типа $2 \rightarrow 2$:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \quad k_1 + k_2 = k_3 + k_4, \quad (12.1)$$

ибо он разрешен при любом законе дисперсии, если все k близки друг к другу. Учитывая это, в дальнейшем мы будем рассматривать только

такие процессы. Уравнения движения (10.1) в этом случае:

$$b_k + i\omega_k b_k + i \sum_{123} T_{k1,23} b_1^* b_2 b_3 \delta(k+1-2-3) = 0, \quad (12.2)$$

где $T = W + \tilde{T}$ — полная амплитуда процессов (5.30). Их изучение начнем с простейшей задачи.

12.1. Модуляционная неустойчивость плоской волны (В.Е. Захаров, [92]). Пусть $b_k = b\delta(k - k_0)$ — волна конечной амплитуды, распространяющаяся в среде. Уравнения движения (12.2) для b имеют вид

$$\dot{b} + i\tilde{\omega}(k_0) b = 0, \quad (12.3)$$

$$\tilde{\omega}(k_0) = \omega(k_0) + T_{00}|b|^2, \quad T_{00} = T(k_0, k_0; k_0, k_0). \quad (12.4)$$

Здесь $\tilde{\omega}(k_0)$ — частота волны b , зависящая от ее амплитуды. В присутствии волны b запишем уравнения движения (12.2) для волн малой амплитуды, волновые векторы и частоты которых удовлетворяют резонансным условиям

$$2\omega(k_0) = \omega(k_1) + \omega(k_2), \quad 2k_0 = k_1 + k_2, \quad (12.5)$$

$$\dot{b}_1 + i\tilde{\omega}(k_1) b_1 + iT_{12} b^2 b_2^* = 0, \quad (12.6)$$

$$\dot{b}_2 - i\tilde{\omega}(k_2) b_2^* - iT_{12} b^{*2} b_1 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(k_1) &= \omega(k_1) + 2T_{10}|b|^2, \\ \tilde{\omega}(k_2) &= \omega(k_2) + 2T_{20}|b|^2, \end{aligned} \quad (12.7)$$

$$T_{10} = T_{10,10}, \quad T_{12} = T_{00,12}, \quad T_{20} = T_{20,20}$$

— зависимость частоты волн b_1, b_2 от амплитуды другой волны b . Обращаем внимание на коэффициент два, отличающий (12.7) от (12.4). Вычисление инкремента неустойчивости производится аналогично случаю трехволновых процессов. Сравнивая (12.6) с (11.11), можно по аналогии с (11.17) сразу написать ответ:

$$\nu^2 = |T_{12} b^2|^2 - \frac{1}{4} [\tilde{\omega}(k_1) + \tilde{\omega}(k_2) - 2\tilde{\omega}(k_0)]^2. \quad (12.8)$$

Если k_1 и k_2 сильно отличаются от k_0 и при этом $\Delta\omega = 0$, инкремент неустойчивости $\nu = T_{12}|b|^2$ и по порядку величины совпадает с нелинейной добавкой к частоте волн. В диссипативной среде, когда волны $k_{1,2}$ затухают с декрементом $\gamma_{1,2}$, возникает порог неустойчивости. Пороговая амплитуда (по аналогии с (11.19))

$$|T_{12} b_{cr}^2| = (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2}. \quad (12.9)$$

В случае, когда k_1 и k_2 близки к k_0 , в законе сохранения (12.5) следует учитывать нелинейные добавки к частоте

$$\tilde{\omega}(k_{1,2}) = \omega(k_0) \pm \mathbf{v} \vec{k} + \frac{\partial^2 \omega}{2\partial k_\alpha \partial k_\beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta + 2T_{00}|b|^2, \quad (12.10)$$

$$k_{1,2} = k_0 \pm \vec{k}, \quad \mathbf{v} = (\partial \omega / \partial \mathbf{k})_{\mathbf{k} = \mathbf{k}_0}.$$

Здесь мы разложили $\tilde{\omega}_{1,2}$ в ряд по $\vec{k}$ и пренебрегли зависимостью от $\vec{k}$

в матричных элементах T . Теперь

$$\nu^2(k) = -\hat{L}k^2(\hat{L}k^2 + 2T_{00}|b|^2), \quad (12.11)$$

$$\hat{L}k^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} k_\alpha k_\beta. \quad (12.12)$$

Если $T_{00}\hat{L}k^2 > 0$, то $\nu^2 < 0$ и неустойчивости нет. Этим рассматриваемая ситуация отличается от трехволнового случая, когда для возникновения неустойчивости достаточно было выполнения законов сохранения, а знак матричного элемента не играл роли. В случае, когда квадратичная форма (12.11) не является знакоопределенной, критерий неустойчивости

$$T_{00}\hat{L}k^2 < 0 \quad (12.13)$$

можно выполнить при любом знаке T_{00} , изменяя направление $\vec{k}$. Если форма $\hat{L}k^2$ знакоопределена, то область неустойчивости ограничена по k^2 от 0 до $\hat{L}k^2 = -4T_{00}|b|^2$. Инкремент неустойчивости максимален для $\hat{L}k^2 = -2T_{00}|b|^2$. В результате развития неустойчивости (12.11) волны k_0 возникают новые волны с k , близкими к k_0 , это можно интерпретировать как возникновение модуляции амплитуды и фазы исходной волны. Поэтому такую неустойчивость называют *модуляционной* [92].

Эта неустойчивость встречается очень часто. Так, например, для ленгмюровских волн в плазме $Lk^2 > 0$, $T_{00} < 0$, и возникает модуляционная неустойчивость, приводящая к ленгмюровскому коллапсу. Неустойчивы волны на воде, развитие этой неустойчивости приводит к явлению "девятого вала". В нелинейных диэлектриках, у которых $\partial n / \partial |E|^2$ (коэффициент преломления растет с напряженностью поля E), $T_{00} < 0$, ибо $\omega_k = kcn^{-1/2}$ и $\partial \omega / \partial |E|^2 \propto -\partial n / \partial |E|^2$. Так как для линейного закона дисперсии $\omega'' > 0$, то $T_{00}\omega'' < 0$ и возникает модуляционная неустойчивость, развитие которой приводит к самофокусировке света.

12.2. Модуляционная неустойчивость спиновых волн [93, 95].

12.2.1. Наиболее просто она исследуется в АФМ ЛП, для которых закон дисперсии СВ близок к изотропному (и соответственно $Lk^2 > 0$), а четырехмагنونный матричный элемент T_p отрицателен (см. (7.13)) и является непрерывной функцией. Это означает, что развитая выше теория непосредственно применима к СВ в АФМ ЛП и в соответствии с критерием (12.13) СВ конечной амплитуды в АФМ ЛП неустойчивы.

12.2.2. Неустойчивы также и СВ в ФМ, гамильтониан которого включает только обменное взаимодействие. Действительно, из (5.25), (6.25) видно, что в этом случае

$$\hat{L}k^2 = \omega_{ex}(\kappa a)^2, \quad T_{00} = -(g/M)\omega_{ex}(ak_0)^2 \quad (12.14)$$

и критерий неустойчивости (12.13) выполнен. Из (12.11) и (12.14) следует, что инкремент неустойчивости максимален при

$$k/k_0 = -2|b|^2 T_{00}/L = 2g|b|^2/M = 2\Delta M_z/M, \quad (12.15)$$

где ΔM_z — изменение статической намагниченности, вызванное существованием исходной волны b_k . Пороговая амплитуда СВ задается формулой

(12.9), и, следовательно,

$$(\Delta M_z/M)_{cr} = \gamma g / (2\sqrt{2} M T_{00}) = \gamma / (2\sqrt{2} \omega_{ex} (ak_0)^2). \quad (12.16)$$

Таким образом, "обменная" СВ в ФМ достаточно большой амплитуды всегда оказывается неустойчивой по отношению к процессу (12.5) с малыми $(\kappa/k_0)^2$, лежащими вблизи $\gamma/\omega_{ex} (k_0 a)^2$. Эта неустойчивость приводит к появлению длиннопериодных продольных $\vec{\kappa} \parallel k$ и поперечных $\vec{\kappa} \perp k$ модуляций амплитуды бегущей СВ. Для длинных СВ в ФМ ситуация является более сложной из-за дальнедействующего магнитного дипольного взаимодействия, которое приводит к неаналитической зависимости $T_{12,34}$ от своих аргументов. В этом случае формула (12.11) оказывается неприменимой к СВ в ФМ и вместо нее из (12.7), (12.8) следует

$$\nu = -\gamma \pm [(\hat{L}^2 + 2T(\kappa) |b|^2)^2 - 4|F(\kappa) b^2|^2]^{1/2}. \quad (12.17)$$

Здесь предположено, что $\kappa \ll k$, и введены обозначения $T(\vec{\kappa})$ и $F(\vec{\kappa})$ для следующих функций, зависящих только от направления $\vec{\kappa}$:

$$\begin{aligned} T(\vec{\kappa}) &= T(k_0 + \vec{\kappa}, k_0) + T(k_0 - \vec{\kappa}, k_0) - T(k_0, k_0), \\ F(\vec{\kappa}) &= T(k_0, k_0, k_0 + \vec{\kappa}, k_0 - \vec{\kappa}). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Отметим, что при аналитической зависимости $T_{12,34}$ от волновых векторов $T(\vec{\kappa}) = F(\vec{\kappa}) = T_{00}$ при $\kappa \rightarrow 0$ и выражение (12.17) благополучно переходит в (12.11). Используя (6.5) и (6.25), можно получить

$$\begin{aligned} F(\vec{\kappa}) &= T(\vec{\kappa}) = [g/(2\pi)^3 M] [\omega_M \cos^2 \theta \varphi(\vec{\kappa}) - \omega_{ex} (ak_0)^2], \\ \varphi(\vec{\kappa}) &= (\Omega - \omega_M \sin^2 \theta) / (\Omega + \omega_M \sin^2 \theta), \quad \Omega = gH - \omega_M N_z, \\ L(\vec{\kappa}) &= \omega_{ex} (ak_0)^2 + \frac{1}{2} \omega_M \sin^2 \theta, \quad \cos \theta \equiv \kappa_z / |\kappa|. \end{aligned} \quad (12.19)$$

При $F = T$ необходимым условием неустойчивости, как следует из (12.19), (12.17), является $TL^{-1} < 0$. Заметим, что $L(\vec{\kappa})$ всегда положительно, а $T(\vec{\kappa}) > 0$, лишь если $\omega_{ex} (ak_0)^2 < \omega_M$, поэтому внешнее магнитное поле, большее, чем $4\pi M(N_z + 1)$, стабилизирует модуляционную неустойчивость бегущей волны с $k \parallel M$. Если же $H < 4\pi M(N_z + 1)$, то $\varphi(\vec{\kappa})$ будет отрицательной для некоторых направлений и возникает неустойчивость с малыми κ , в первую очередь с такими, которые удовлетворяют уравнению

$$\kappa/k_0 = \gamma/L(\vec{\kappa}). \quad (12.20)$$

Порог этой неустойчивости задается выражением (12.16), в котором T определяется формулой (12.19).

12.2.3. Случай поперечного распространения волны $k_0 \perp M$ отличается от продольного $k_0 \parallel M$ тем, что может возникать неустойчивость с большими κ . Это происходит потому, что при распаде волны с $k \perp M$ ее диполь-дипольная энергия уменьшается и может скомпенсировать увеличение обменной энергии при некоторых κ . Порог неустойчивости с большими κ , однако, совпадает по порядку величины с порогом для $\kappa \ll k_0$, и для простоты мы ограничимся этим последним случаем. Анализ неустойчивости при произвольных ω_M , Ω и k_0 занял бы слишком много места, мы рассмотрим только один интересный случай $\omega_M \gg \Omega$, $\omega_{ex} (ak_0)^2$. Другие частные случаи рассмотрены В.Е. Захаровым, В.С. Львовым, С.С. Старо-

бинцем (1969 г) [95]. В нашем случае из (6.5) и (6.25) получаем

$$T(\vec{k}) = \frac{g\omega_M}{(2\pi)^3 M (\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2)} (\cos^2\theta - 2N_z) \frac{\omega_M}{8},$$

$$F(\vec{k}) = \frac{g\omega_M}{(2\pi)^3 M (\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2)} (N_z - \cos^2\theta) \frac{\omega_M}{8},$$

$$L(\vec{k}) = \frac{\omega(k_0)}{k_0^2} \frac{\Omega}{\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2} \left[\frac{\omega_{ex} \sin^2\theta}{\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2} + \cos^2\theta \right].$$

Так как $L(\vec{k})$ может изменять знак, то СВ неустойчивы при любых знаках F и T . Пороговая амплитуда равна

$$(\Delta M_z/M)_{cr} = 8\gamma[\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2]/(\omega_M^2 |N_z - \cos^2\theta|).$$

Отсюда видно, что для длинных СВ ($\omega_{ex}(ak_0)^2 \ll \omega_M$), распространяющихся в образце, в котором внутреннее поле мало ($\Omega \ll \omega_M$), порог неустойчивости существенно уменьшается.

12.2.4. Опеним интенсивность СВ, при которой возникает модуляционная неустойчивость. Из (12.16) следует оценка для потока энергии в СВ:

$$P_{cr} = \omega b_{cr} \partial\omega/\partial k \approx \gamma\omega_{ex} a^2 k M/g. \quad (12.21)$$

Для монокристалла ЖИГ $\gamma \sim 10^6 \text{ с}^{-1}$, $M \approx 10^2 \text{ Гс}$, $\omega_{ex} a^2 \approx 0,1 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Выбирая $k = 10^4 \text{ см}^{-1}$, получим $P_{cr} \approx 10^{-3} \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$. Следует отметить, что выражение (12.21) ограничивает сверху поток энергии, который может переноситься в кристалле спиновой волной. Этот поток обычно значительно меньше, чем максимальный поток энергии ($0,1 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$) для звуковой волны в ФМ (А.Г. Гуревич, [74]), поэтому критические значения потока (12.21) могут достигаться в процессе преобразования звука в СВ в неоднородном магнитном поле (Е. Шлеманн и др., [232]).

При изучении нелинейной стадии развития модуляционной неустойчивости следует воспользоваться тем обстоятельством, что все вторичные волны сосредоточены в узкой области вблизи k_0 , т.е. следует изучать распространение узкого пакета волн или, что то же самое, необходимо следить за медленными изменениями комплексной амплитуды (*огигающей*) монохроматической волны. Получим уравнение для огигающих.

12.3. Уравнение для огигающих. В уравнении (12.12) разложим ω_k в ряд по $\vec{k}$ до членов $\sim k^2$ и будем считать

$$T_{12,34} = T(k_0, k_0; k_0, k_0) = T/(2\pi)^3. \quad (12.22)$$

Этот переход справедлив, если в среде отсутствуют дальнедействующие силы и $T_{12,34}$ является непрерывной функцией своих аргументов. Далее, так же как и в п. 11.3, перейдем к медленным переменным

$$a(\vec{k}) = b(k + \vec{k}) \exp[i(kr - \omega_0 t)] \quad (12.23)$$

и затем в r -представление по формулам (11.28). Для $a(r)$ в результате получится

$$\left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \nabla \right) + \hat{L} - T|a|^2 \right] a = 0, \quad \hat{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (12.24)$$

В изотропной среде $\omega(k) = \omega(k)$ и

$$L = \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{v}{2k} \Delta_{\perp}, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (12.25)$$

$$v = \partial \omega / \partial k, \quad \omega'' = \partial^2 \omega / \partial k^2.$$

Уравнение (12.24) описывает эволюцию узкого пакета волн: член $v \nabla$ — его движение как целого с групповой скоростью, члены $\partial^2 / \partial z^2$ и $\Delta_{\perp}$ — дисперсию и дифракцию, последнее слагаемое — нелинейное самодействие волн в пакете. На оптическом языке это слагаемое описывает зависимость коэффициента преломления среды от квадрата амплитуды электрического поля. Рассматривая (12.24) как уравнение Шредингера, нелинейный член можно трактовать как самосогласованный потенциал притяжения (при $T < 0$) или отталкивания (при $T > 0$), пропорциональный плотности частиц. Уравнения (12.24), (12.25) являются гамильтоновыми с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int dr [iv(a^* \nabla a - a \nabla a^*) + \omega'' (\partial a / \partial z)^2 + (v/k) |\nabla_{\perp} a|^2 + 2T |a|^4]. \quad (12.26)$$

Кроме того, это уравнение имеет еще один интеграл движения

$$N = \int |a|^2 dr, \quad (12.27)$$

имеющий смысл "полного числа частиц".

Существуют две постановки задачи для уравнения (12.24): амплитуда волн задана на границе среды — например, свет падает на нелинейный диэлектрик. В этом случае членом $\sim \omega''$ можно пренебречь по сравнению с $v \partial a / \partial z$ (z — направление v); если задача стационарна, то $\dot{a} = 0$. Тогда

$$\left[iv \frac{\partial}{\partial z} + \frac{v}{2k} \Delta_{\perp} - T |a|^2 \right] a = 0. \quad (12.28)$$

Рассматривая $\tau = z/v$ как новое время, можно трактовать (12.28) как двумерное ($r = x, y$) уравнение Шредингера.

12.4. Эволюция пакета в безграничной среде. При этом можно перейти в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, и член $v \nabla$ исчезнет. Дисперсионный член $\sim \omega''$ необходимо сохранить:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{v}{2k_0} \Delta_{\perp} - T |a|^2 \right] a = 0. \quad (12.29)$$

Рассмотрим качественно решение этой задачи в трехмерном ($d = 3$), двумерном ($d = 2$) и одномерном случаях. Случай $d = 3$ в рамках (12.29) соответствует эволюции трехмерного сгустка, движущегося с групповой скоростью, случай $d = 2$ — это задача об эволюции плоского пакета $a(x, y, t)$, движущегося с групповой скоростью, или задача о стационарной самофокусировке пакета $a(x, y, t)$ в рамках уравнения (12.28) после замены $z/v \rightarrow t$. Случай $d = 1$ соответствует, например, стационарной плоской самофокусировке $a(x, z)$. Далее, для определенности всюду мы будем считать $\omega'' > 0$ и рассмотрим случай "притяжения частиц" $T < 0$. Пусть в некоторый момент времени пакет имеет характерный размер l и амплитуду в центре a . Число частиц в нем $N = \int |a|^2 dr \approx |a|^2 l^d$, где d — размерность пакета.

Так как N — интеграл движения, то

$$a(t) = N^{1/2} l^{-d/2}(t). \quad (12.30)$$

Оценим с помощью (12.26), (12.30) энергию пакета

$$\mathcal{H} \approx \omega'' N l^{-2} - |T| N^2 l^{-d}. \quad (12.31)$$

Видно, что при $d = 1$ существует стационарное решение с

$$l = l_0 \approx \omega'' / (|T| N) \approx \omega'' / (|T a^2| l_0), \quad (12.32)$$

минимизирующее энергию (12.31). В этом случае давление частиц, возникающее из-за их движения в потенциальной яме, уравнивает силу притяжения. В трехмерном случае давление при $l \rightarrow 0$ растет медленнее, чем сила притяжения, и происходит коллапс — падение частиц на центр за конечное время. При этом амплитуда в центре $a(t)$ и размер $l(t)$ связаны соотношением (12.30), где N — число частиц, захваченных в коллапсе, энергия (12.31) коллапсирующих частиц убывает. Полная энергия, включающая кинетическую энергию не захваченных в коллапс, разлетающихся частиц, разумеется, сохраняется. В двумерном случае судьба пакета частиц зависит от начальных условий: при $\omega'' > TN \approx T |a|^2 / l^2$ минимум (12.31) достигается при $l \rightarrow \infty$, т.е. частицы разлетаются; при $\omega'' < TN$, так же как и в трехмерном случае, часть пакета захватывается в процесс коллапса.

Изучим подробнее стационарные решения (12.29) в одномерном случае. Подставляя $a(z, t)$ в виде

$$a(z, t) = \varphi(z) \exp(i\lambda^2 t), \quad (12.33)$$

получим

$$\begin{aligned} \omega'' \varphi_{zz} &= 2(\lambda^2 \varphi - |T| \varphi^3) = -\partial U / \partial \varphi, \\ U &= \frac{1}{2} |T| \varphi^4 - \lambda^2 \varphi^2. \end{aligned} \quad (12.34)$$

После преобразования $z \rightarrow t$ это уравнение можно рассматривать как уравнение Ньютона для частиц с массой ω'' , координатой φ , движущихся в поле $U(\varphi)$. Оно имеет интеграл движения, имеющий смысл "энергии":

$$E = \frac{1}{2} \omega'' \varphi_z^2 + \frac{1}{2} |T| \varphi^4 - \lambda^2 \varphi^2. \quad (12.35)$$

Простейшее решение — покоящаяся частица на дне ямы, $\varphi = \text{const}$, $\lambda^2 = |T| \varphi^2$ — соответствует в исходном уравнении (12.29) плоской волне с нелинейным сдвигом частоты — $|T| \varphi^2$. При $E > E_{\min}$ возникают периодические колебания частицы в яме, т.е. периодическая модуляция волны $a(z)$. Большой интерес представляет решение с $E = 0$. Из (12.35) при $E = 0$ можно получить

$$\varphi(z, t) = \left(\frac{2}{|T|} \right)^{1/2} \frac{\lambda \exp(i\lambda^2 t)}{\text{ch}(\sqrt{2} \lambda z / \sqrt{\omega''})}. \quad (12.36)$$

Характерный размер l_0 этого локализованного решения — *солитона* — задается, как нетрудно убедиться, выражением (12.32). Кроме покоящегося (в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью) солитона (12.36) существуют также решения с двумя, тремя и т.д. солитонами. N -солитонные решения имеют большое значение. Методом *обратной задачи рассеяния* В.Е. Захаров и А.Б. Шабат [100] проинтегрировали не-

линейное уравнение Шредингера (12.28), (12.29) и, в частности, показали, что произвольное (достаточно гладкое) начальное распределение $a(z, 0)$ при $t \rightarrow \infty$ распадается в основном на N солитонов, число, амплитуды и скорости которых можно определить по $a(z, 0)$. Солитоны часто являются устойчивыми образованиями: при столкновении двух солитонов сохраняются их скорости и амплитуды.

В заключение этого параграфа подтвердим прямым вычислением полученный ранее качественный вывод о том, что в двумерном и трехмерном случаях за конечное время происходит разрушение начального пакета. Для упрощения расчетов запишем (12.29) в безразмерном виде. При $\omega'' = 0$, $T < 0$

$$i\dot{\psi} + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0, \quad i\dot{\mathcal{H}} = \delta\mathcal{H}/\delta\psi^*, \quad (12.37)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4) d\mathbf{r}.$$

Вслед за В.И. Власовым, В.И. Талановыми и В.А. Петрищевым [64] вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle r^2 \rangle &\equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = \\ &= i \frac{\partial}{\partial t} \int \sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 \nabla(\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*) d\mathbf{r} = \\ &= -2i \frac{\partial}{\partial t} \int x_{\alpha} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\alpha}} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_{\alpha}} \right) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись еще раз уравнением движения и интегрируя по частям так, чтобы не оставалось слагаемых, пропорциональных x_{α} , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle r^2 \rangle &= 4 \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r} - 2d \int |\psi|^4 d\mathbf{r} = \\ &= 8\mathcal{H} + 2(2-d) \int |\psi|^4 d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (12.38)$$

где d — размерность пространства, $\mathcal{H}$ — гамильтониан (12.37). Таким образом, при $d \geq 2$

$$8\mathcal{H} \geq \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle r^2 \rangle, \quad (12.39)$$

поэтому

$$\langle r^2 \rangle \leq 4\mathcal{H}t^2 + C_1t + C_2. \quad (12.40)$$

Если в начальный момент времени $\mathcal{H} < 0$, т.е. $2 \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r} < \int |\psi|^4 d\mathbf{r}$, то за конечное время решение становится сингулярным, происходит коллапс, ибо $\langle r^2 \rangle$ обращается в нуль. Для практики большой интерес представляло бы стационарное двумерное решение уравнений (12.29) (круглый волновод), позволяющее передавать энергию лазерного излучения на большие расстояния без потерь из-за дифракционной расходимости. Такое решение, как видно из (12.31), соответствует $\mathcal{H} = 0$. К сожалению, это решение неустойчиво. Если в начальный момент $\mathcal{H}$ из-за флуктуаций окажется положительным, то в силу (12.40) (напомним, что при

$d = 2$ в (12.40) стоит знак равенства) $\langle r^2 \rangle$ будет расти и волновод "расплывается". В обратном случае $\mathcal{H} < 0$, напряженность поля в центре станет очень большой. Как правило, в этом случае происходит необратимое разрушение нелинейного диэлектрика, сопровождающееся потерями энергии излучения. Подробнее об этом см. в обзоре С.А. Ахманова, А.П. Сухокурова, Р.В. Хохлова [52], в работе В.Е. Захарова, В.С. Сынаха [108].

§ 13. Самофокусировка магнитоупругих волн в антиферромагнетиках

13.1. Структура исходных уравнений. Значительная нелинейность магнитной подсистемы кристалла приводит к тому, что система других квазичастиц, взаимодействующих с СВ, также становится нелинейной. Например, в большинстве твердых тел при практически достижимых деформациях нелинейные акустические эффекты малы. Это связано с наличием в кристалле дефектов, вследствие чего образец обычно разрушается при относительно больших деформациях u , много меньших единицы ($u \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$). В АФМ из-за обменного усиления магнитострикции (см. § 7) нелинейность и дисперсия магнитоупругих волн могут оказаться значительными. При этом звуковой закон дисперсии приобретет следующий вид:

$$\omega^2 = (V_S + Q_1 u + Q_2 u^2)^2 k_x^2 + 2 V_S D k_x^4 + 2 V_S a k_{\perp}^2. \quad (13.1)$$

Здесь учтена нелинейность (которую можно свести к перенормировке скорости звука), дисперсия скорости волн, а также дифракция (мы полагаем упругую волну слабо неоднородной: $k^2 = k_x^2 + k_{\perp}^2$, $k_{\perp} \ll k_x$). В изотропной среде $a = V_S/2$, в кристаллах из-за анизотропии упругих свойств и магнитострикции значение a может быть как положительно, так и отрицательно (С.К. Турицын, Г.Е. Фалькович, [216]). При не слишком высоких уровнях возбуждения эволюция магнитоупругих волн может быть разделена на быструю и медленную. Быстрая представляет собой перенос исходного возмущения со скоростью звука, а медленная эволюция обусловлена малыми эффектами нелинейности, дисперсии и дифракции. Для изучения этих эффектов удобно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью звука, заменив в (13.1) $\omega = \Omega - V_S k_x$, $\Omega \ll V_S k_x$, и совершив обратное фурье-преобразование $u(r, t) = \int u(k, \Omega) \exp(ikr - i\Omega t) dk d\Omega$. В результате получится следующее уравнение:

$$u_t + Q_1 u u_x + Q_2 u^2 u_x + D u_{xxx} + a \int_{-\infty}^x \Delta_{\perp} u dx' = 0,$$

$$u_t = \partial u / \partial t, \quad u_x = \partial u / \partial x, \quad u_{xxx} = \partial^3 u / \partial x^3. \quad (13.2)$$

Разумеется, проделанные для вывода этого уравнения манипуляции носят лишь иллюстративный характер. Строгий вывод (13.2) из уравнений Ландау – Лифшица и теории упругости содержится в работе С.К. Турицына и Г.Е. Фальковича [216], по результатам которой написан этот параграф, и где приведены выражения для констант Q , D , a в АФ ромбоздрической структуры. Здесь же отметим, что в ряде случаев

$Q_1 = 0$, т.е. первой не исчезающей нелинейностью является кубическая. Коэффициент дисперсии $D \propto (V_S^2 - V_m^2)$ пропорционален разности скорости звука и предельной скорости магнонов. Стало быть, в АФ, у которых $V_S > V_m$ (или, иными словами, температура Дебая выше температуры Нееля), $D > 0$, т.е. дисперсия отрицательна — скорость магнитоупругих волн падает с ростом волнового вектора (В.И. Ожогин и др. [191]).

В одномерном случае (когда исходное возмущение однородно в плоскости, перпендикулярной к линии распространения) (13.2) сводится в зависимости от типа нелинейности либо к уравнению Кортевега — де Вриза — КдВ

$$u_t + Quu_x + Du_{xxx} = 0, \quad (13.3)$$

либо к модифицированному уравнению КдВ — МКдВ

$$u_t + Qu^2u_x + Du_{xxx} = 0. \quad (13.4)$$

13.2. Свойства одномерных уравнений. Одномерные уравнения (13.3), (13.4) обладают следующим замечательным свойством: если рассматривать какое-либо решение этого уравнения $u(x, t)$ в качестве потенциала линейного уравнения Шредингера

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + u(x, t) \right] \Psi(x, t) = E \Psi(x, t), \quad (13.5)$$

то спектр энергий $\{E\}$ не зависит от времени. Иными словами, эволюция $u(x, t)$ в силу уравнений КдВ (13.3) или МКдВ (13.4) осуществляет изоспектральное преобразование потенциала уравнения Шредингера. Этот факт, обнаруженный С. Гарднером и др. [66], лежит в основе метода обратной задачи рассеяния и его дальнейших обобщений [42, 111]. Связь с уравнением (13.5) позволяет для уравнений (13.3), (13.4) описать эволюцию произвольного локализованного начального возмущения $u(x, 0)$. Для этого следует найти спектр (13.5) с потенциалом $u(x, 0)$. Количество дискретных уровней в спектре равно количеству солитонов, на которые в асимптотике $t \rightarrow \infty$ распадается исходное возмущение. Солитоны, как и в одномерном уравнении (12.32), являются асимптотическими состояниями. Именно изучение уравнений (12.32) и (13.3) привело к осознанию фундаментальной роли солитонов в нелинейной волновой динамике (см. [42]). Формирование таких локализованных стационарных импульсов возможно, начиная с амплитуд, при которых сравниваются эффекты нелинейности uu_x и дисперсии u_{xxx} . При таких амплитудах плоские волны уже не являются хорошо определенными объектами, так как время их взаимодействия становится порядка времени разбегания волновых пакетов из-за дисперсии групповых скоростей. К сожалению, надежды на использование солитона в роли фундаментального объекта описания вместо плоской волны не вполне оправдались, так как солитоны зачастую оказываются неустойчивыми. В результате развития неустойчивости в ряде случаев развивается коллапс (на другом языке — самофокусировка), который, таким образом, играет в нелинейной динамике волн не менее фундаментальную роль, чем солитоны.

13.3. Устойчивость неодномерных солитонов и теорема о самофокусировке. Рассмотрим слабо неодномерное обобщение уравнения модифи-

цированного уравнения КдВ (13.4):

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_t + Du_{xxx} + Qu^2 u_x) = au_{yy} + cu_{zz},$$

$$u_{yy} = \partial^2 u / \partial y^2, \quad u_{zz} = \partial^2 u / \partial z^2. \quad (13.6)$$

В АФЛП, как правило, реализуется случай $Q > 0$ (см. [191]), обсуждением которого мы и ограничимся. Плоские солитоны

$$u_0(x - Vt) = \frac{(2V/Q)^{1/2}}{\text{ch}[(x - Vt)(V/D)^{1/2}]}$$

бегут со сверхзвуковой скоростью ($V > 0$; напомним, что (13.4), (13.6) записаны в системе отсчета, движущейся со скоростью звука). Как видно из выражения для u_0 , солитоны существуют лишь при $D > 0$, т.е. для АФМ, у которых $V_S > V_m$ (в случае $D < 0$), стационарным является решение в виде бегущей "доменной стенки":

$$u_1 = \frac{(2V/Q)^{1/2}}{\text{cth}[(x - Vt)(V/D)^{1/2}]}.$$

Устойчивость одномерных солитонов относительно поперечных возмущений была впервые изучена Б.Б. Кадомцевым и В.И. Петвиашвили [114]. Они показали, что солитоны устойчивы лишь при $a < 0$, $c < 0$; если же знак хотя бы одной (или обеих) из величин a , c положителен, плоские солитоны неустойчивы относительно гофрировки. Качественная причина этой неустойчивости заключается в том, что локальное возрастание амплитуды солитона приводит к уменьшению его скорости в этом месте, этот участок начинает отставать, фронт искривляется, что в свою очередь приводит к концентрации энергии и дальнейшему нарастанию амплитуды в месте первоначальной флуктуации и т.д. При $a > 0$, $c > 0$ возможна самофокусировка упругой волны. Для того чтобы показать это, представим уравнение (13.6) в виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u},$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (Du_x^2 + aw_y^2 + cw_z^2 - 2u^4) dr, \quad (13.7)$$

где $w_x = u$. Так же, как и (12.37), (11.29), уравнения (13.7) являются гамильтоновыми и сохраняют гамильтониан $\mathcal{H}$.

Поступая аналогично § 12, вычислим вторую производную по времени от положительной величины, пропорциональной квадрату характерного поперечного размера пучка:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r_{\perp}^2 u^2 dr = 16a\mathcal{H} - 8Da \int u_x^2 dr. \quad (13.8)$$

Видно, что при $D > 0$, $a = c > 0$ любое распределение с отрицательным гамильтонианом $\mathcal{H}$ испытывает самофокусировку.

В случаях, когда знак хотя бы одной из величин D , a отрицателен, (13.8) позволяет установить факт дефокусировки пучка. Действительно, если $D > 0$, $a > 0$, достаточное условие распыливания поперечных неоднород-

ностей $\mathcal{H} < 0$. При $a < 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r_1^2 u^2 dr = 16a \left[\frac{1}{2} \int a(\nabla_{\perp} w)^2 dr - \int u^4 dr \right] > 0 \quad (13.9)$$

и, следовательно, любое начальное распределение расплывается.

13.4. Эволюция магнитоупругих волн в отсутствие линейной связи между магнонами и фононами. Система уравнений, описывающих совместную эволюцию тензора деформации u и угла поворота вектора антиферромагнетизма φ , в безразмерных переменных имеет вид ($\alpha = V_m/V_S$)

$$u_{tt} - u_{xx} = (\varphi^2)_{xx}, \quad \varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{xx} + \varphi = 2u\varphi. \quad (13.10)$$

Дальнейшие редукции (13.10) зависят от способа возбуждения магнитной или упругой подсистемы кристалла. При параметрической генерации СВ высокочастотным электромагнитным полем можно перейти от $\varphi(x, t)$ к медленной огибающей $\psi(x, t)$:

$$\varphi = \psi \exp [ikx - i(1 + \alpha^2 k^2)^{1/2} t] + \text{к.с.},$$

после чего приходим к системе, впервые полученной В.Е. Захаровым [101] для взаимодействия ленгмюровских и ионнозвуковых волн в плазме:

$$u_{tt} - u_{xx} = |\psi|_{xx}^2, \\ i(\psi_t + \alpha^2 ik \psi_x) + \frac{1}{2} \alpha^2 \psi_{xx} = u\psi. \quad (13.11)$$

В рамках этой системы существуют устойчивые одномерные солитоны, а неодномерные обобщения (13.11) описывают неустойчивость солитонов относительно поперечной гофрировки и (в трехмерном случае) коллапс волн. Возможна и другая постановка эксперимента, при которой возбуждаются (например, пьезопреобразователем) медленные звуковые движения u . Система (13.10) имеет солитонные решения. В исходных переменных

$$u_0 = -2 \operatorname{ch}^{-2} \left[\frac{x - Vt}{(\alpha^2 - V^2)^{1/2}} \right], \\ \varphi_0 = [(2(1 - V^2))^{1/2} \operatorname{ch}^{-1} \left[\frac{x - Vt}{(\alpha^2 - V^2)^{1/2}} \right]] \quad (13.12)$$

(в отличие от солитонов огибающих в (13.11)). Эти солитоны, однако, неустойчивы уже в одномерной геометрии. В этом случае также можно доказать возможность коллапса, который в силу одномерности имеет смысл не самофокусировки, а опрокидывания волны за конечное время.

Разумеется, неограниченное возрастание амплитуды (или ее производных) не может иметь физического смысла, так как при этом мы выйдем за рамки применимости используемых уравнений (12.29), (13.6) или (13.10). Существенной здесь является сама возможность нарастания амплитуд волн до такой степени, когда нелинейность перестает быть малой.

§ 14. Методы параметрического возбуждения спиновых волн в магнетиках

14.1. Поперечная накачка СВ в ферромагнетиках — сулловская неустойчивость первого порядка. Так принято называть распад однородной прецессии намагниченности (ОП) с частотой ω_0 на пару СВ с волновыми векторами k и $-k$ и частотами $\omega(k) = \omega(-k) = \omega_p/2$. Этот процесс описывается следующими слагаемыми гамильтониана $\mathcal{H}_3$:

$$\Delta \mathcal{H}_3 = \frac{1}{2} \sum_k [V_{0,k,-k} b_0^* b_k b_{-k} + \text{к.с.}] \quad (14.1)$$

с матричным элементом (6.22):

$$\begin{aligned} V_{0,k,-k} &= 2V_k u_k^2 + 2u_k v_k V_k^* = \\ &= \frac{1}{2} \omega_M (g/2M)^{1/2} \sin 2\theta_k \exp [(2i\varphi_k)(A_k + \omega_k - iB_k)/\omega_k]. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Здесь мы предположили, что намагниченность M направлена по оси вращения эллипсоидального образца так, что поляризация ОП является круговой и соответственно $v_0 = 0$. В соответствии с (11.18) пороговая амплитуда ОП b_{th} относительно ее распада на пару СВ $\pm k$ определяется формулой

$$|V_{0,k,-k}| b_{th}(k) = \gamma_k. \quad (14.3)$$

Поэтому первыми (по мере увеличения b_0) возбуждаются те пары СВ, для которых отношение $\gamma_k/V_{0,k,-k}$ минимально. Если γ_k не зависит от углов θ_k и φ_k на резонансной поверхности $\omega_k = \omega_p/2$ (а входить в детали этой зависимости сейчас преждевременно), то вначале возбуждаются пары, для которых $|V_{0,k,-k}|$ максимально. Их волновые векторы лежат на двух окружностях (меридианах) поверхности $2\omega_k = \omega_p$ и имеют $0 \leq \varphi_k \leq 2\pi$ и $\theta_k = \theta_m, \pi - \theta_m$, где θ_m несколько менее $\pi/4$. Это видно, если тождественно переписать $|V_{0,k,-k}|$ из (14.2) в виде

$$\begin{aligned} |V(0,k,-k)| &\equiv V_1(\theta) = \\ &= \omega_M \left(\frac{g}{2M} \right)^{1/2} \frac{\omega_p + \omega_M \sin^2 \theta + (\omega_p^2 + \omega_M^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{2\omega_p} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Таким образом (при $\omega_p > \omega_M$),

$$b_{th} = \min_{\theta_k} b_{th}(k) \approx (\gamma/\omega_M)(2M/g)^{1/2}. \quad (14.5)$$

Канонической амплитуде ОП b_{th} соответствует критический угол прецессии ψ_{th} :

$$\psi_{th} = m_{th,\perp}/M = (2g/M)^{1/2} b_{th} \approx 2\gamma/\omega_M. \quad (14.6)$$

Для ЖИГ (при $\omega_M = 1700$ Гс, $\gamma \approx 0,5$ Гс) $\psi_{th} \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$.

Осталось пояснить, почему такой метод параметрического возбуждения СВ в ФМ называется поперечной накачкой. Дело в том, что обычно ОП возбуждают СВЧ магнитным полем с поляризацией $h_\perp$, ориентированной поперек постоянного магнитного поля H (и соответственно стационарной намагниченности M). Гамильтониан этого взаимодействия обязан части

зеemannовской энергии $-\mathbf{hM}(r, t) = -\mathbf{h}_\perp \mathbf{m}_\perp$ и имеет вид

$$\mathcal{H}_p^{(1)} = U[h_+(t)b_0^* + \text{к.с.}],$$

$$U = -(gM_0/2)^{1/2}, \quad h_+ = h_x + ih_y. \quad (14.7)$$

Этот гамильтониан описывает хорошо известное явление ферромагнитного резонанса (ФМР)

$$\frac{\partial b_0}{\partial t} + i\omega_0 b_0 + \gamma_0 b_0 = -i \frac{\delta \mathcal{H}_p^{(1)}}{\delta b_0^*} = -i h_+(t). \quad (14.8)$$

Если СВЧ поле имеет правую круговую поляризацию, то

$$h_+(t) = h_+ \exp(-i\omega t),$$

$$b_0(t) = \frac{(gM_0/2)^{1/2} h_+ \exp(-i\omega t)}{\omega_0 - \omega - i\gamma_0}. \quad (14.9)$$

При линейной поляризации

$$h_y = 0, \quad h_+ = h_x = 2h \cos \omega t,$$

$$b_0(t) = b_0(\omega) \exp(-i\omega t) + b_0(-\omega) \exp(i\omega t), \quad (14.10)$$

$$b_0(\omega) = h(gM_0/2)^{1/2} (\omega - \omega_0 + i\gamma_0)^{-1}.$$

Вблизи от ФМР, когда $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, слагаемое $\sim b_0(\omega)$ описывающее правополяризованную часть b_0 , является главным, и выражение для критической амплитуды h_{th} , соответствующее порогу неустойчивости ОП (14.3), является одинаковым для правой круговой и линейной поляризаций h :

$$h_{th} = [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2]^{1/2} b_{th}/U \approx [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2]^{1/2} \gamma_k / g\omega_M. \quad (14.11)$$

В точном резонансе ($\omega = \omega_0$) h_{th} очень мало. Взяв для оценки $\gamma_0/g \approx 1$ Гс, имеем $h_{th} \approx 0,002$ Гс. В экспериментах на частоте 10^{10} с⁻¹ амплитуда СВЧ поля h достигала значений до 10 Гс. Поэтому амплитуда ОП b_{th} достигает критических значений не только в условиях ФМР, но и вдали от него. В этом случае естественно рассматривать эту неустойчивость как параметрическую нестабильность внешнего поля по отношению к распаду на две СВ с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$. Соответственно уравнения (11.11) удобно переписать в виде, в котором амплитуда b_0 выражена через амплитуду поля накачки h :

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + \gamma_k b_k + i\omega_k b_k + ih \exp(i\omega_p t) \tilde{V}_k b_{-k}^* = 0,$$

$$\frac{\partial b_{-k}^*}{\partial t} + \gamma_k b_{-k}^* - i\omega_k b_{-k}^* - ih \exp(-i\omega_p t) \tilde{V}_k^* b_k = 0. \quad (14.12)$$

Здесь мы ввели величину $\tilde{V}_k$ — эффективный коэффициент связи СВ с накачкой, через который просто выражается пороговая амплитуда h_{th} :

$$h_{th} |\tilde{V}_k| = \gamma_k. \quad (14.13)$$

Для рассмотренного выше случая круговой поляризации

$$\tilde{V}_k = \left(\frac{gM}{2} \right)^{1/2} \frac{V_k}{\omega_p - \omega_0} \left(1 + \frac{A_k - |B_k|}{\omega_k} \right). \quad (14.14)$$

Из (14.13), (14.14) можно получить выражение (14.11) для h_{th} . В случае линейной поляризации вдали от ФМР необходимо в исходных уравнениях (11.11), помимо слагаемого $V(0, \mathbf{k}, -\mathbf{k})b_0$ (которое теперь стало нерезонансным), учесть другое нерезонансное слагаемое $U(0, \mathbf{k}, -\mathbf{k})b_0^*(-\omega)$. В результате уравнение (14.12) остается справедливым, но выражение для $\tilde{V}_k$ изменится:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_k &= \left(\frac{gM_0}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{V(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, 0)}{\omega_p - \omega_0} - \frac{U(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, 0)}{\omega_p + \omega_0} \right) = \\ &= \left(\frac{gM_0}{2} \right)^{1/2} V_k \left[\left(\frac{1}{\omega_p - \omega_0} + \frac{\exp(2i\varphi_k)}{\omega_p + \omega_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_k - |B_k|}{\omega_p} \left(\frac{1}{\omega_p - \omega_0} + \frac{\exp(2i\varphi_k)}{\omega_p + \omega_0} \right) \right].\end{aligned}\quad (14.15)$$

Существенно, что первое и второе слагаемые в этом выражении, описывающие соответственно вклады правой и левой поляризаций в линейной накачке, имеют разные зависимости от азимутального угла СВ φ_k . Поэтому максимум модуля всего выражения достигается не на всем меридиане с фиксированным θ_k и любым φ_k , как в случае круговой поляризации, а в двух точках $\varphi_k = 0, \pi$, соответствующих возбуждению двух пар СВ, с $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$, лежащих в плоскости накачки h и M_0 . Именно это обстоятельство — максимальная связь с накачкой не целой группы пар с различными φ_k , а только их конечного числа (в данном случае двух) — делает поперечную накачку очень интересной для будущих экспериментальных исследований запорогового поведения СВ.

В заключение этого пункта приведем выражения для минимального порога возбуждения СВ поперечной накачкой с $\theta_k = \pi/4$, $\varphi_k = 0, \pi$ в случае $\gamma_k = \gamma_k$ и $\omega_M \ll \omega_p$:

$$h_{th} = 2\gamma_k(\omega_p - \omega_0)/(g\omega_M). \quad (14.16)$$

Для монокристаллов ЖИГ с $\gamma_k = g \cdot 0,1$ Э на частоте $\omega_p = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ получаем $h_{th} \approx 0,3$ Гс. Эта величина легко достигается в эксперименте.

14.2. Параллельная накачка СВ в ферромагнетиках. Продольная часть зеемановской энергии $-h_z m_z$ приводит к гамильтониану

$$\mathcal{H}_{p2} = \mathcal{H}_{p1} + \mathcal{H}_p, \quad (14.17)$$

$$\mathcal{H}_p = \frac{1}{2} \sum_k [h(t) V_k b_{-\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^* + \text{к.с.}], \quad h(t) = h \exp(-i\omega_p t), \quad (14.18)$$

$$\mathcal{H}_{p1} = \sum_k u_k b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} [h^*(t) + h(t)], \quad h_z = h(t) + h^*(t) = h e^{-i\omega t} + h^* e^{i\omega t} = 2 \operatorname{Re}(h e^{-i\omega t}) = 2 h \cos \omega t \quad (14.19)$$

Первое слагаемое в $\mathcal{H}_{p2}$ описывает процессы, не изменяющие общее число магнонов. Из-за условия временного синхронизма это слагаемое может оказаться существенным лишь при низких частотах $h(t)$ порядка частот релаксации СВ γ_k , с точностью до которых определена частота колебаний намагниченности в СВ. Происхождение гамильтониана $\mathcal{H}_p$, описывающего параметрическое возбуждение пары СВ продольным полем, можно понять

из простых геометрических соображений. Из-за магнитного дипольного взаимодействия и кристаллографической анизотропии намагниченность в каждой точке прецессирует по эллиптическому конусу (формально это проявляется в том, что круговые переменные $a_k \sim m_x + im_y$ не являются нормальными, и для диагонализации квадратичной части гамильтониана необходимо делать $u-v$ -преобразование. Поскольку длина вектора M остается постоянной, основание конуса не является плоским и возникает переменная продольная составляющая (z -компонента) вектора M , изменяющаяся с удвоенной частотой прецессии $2\omega_k$. Ясно, что эти волны можно возбудить с помощью магнитного поля частоты $2\omega_k$ и поляризованного вдоль z .

Из выражений (14.12) и (14.18) легко найти порог параметрической накачки СВ:

$$h_{th} |V_k| = \gamma_k. \quad (14.20)$$

Здесь V_k — коэффициент связи пары $\pm k$ с накачкой:

$$V_k = 2gu_k v_k = gB_k/\omega_k = V \sin^2 \theta \exp(2i\varphi_k), \quad (14.21)$$

$$V = g\omega_M/2\omega_k.$$

Видно, что $|V_k|$ максимально для пар СВ с волновыми векторами на экваторе резонансной поверхности: $0 \leq \varphi_k \leq 2\pi$, $\theta_k = \pi/2$. Если γ_k медленно зависит от θ_k , именно эти пары СВ имеют минимальный порог возбуждения:

$$gh_{th} = \gamma\omega_p/\omega_M = \frac{g\Delta H_k}{2} \frac{\omega_p}{\omega_M} \quad h_{th} = \frac{1}{2} \frac{\omega_p}{\omega_M} \Delta H_k = \frac{h_2 t_h}{2} \quad (14.22)$$

$h_2 t_h = \frac{\omega_p}{\omega_M} \Delta H_k$

По порядку величины пороговое поле параллельной накачки (14.22) совпадает с пороговым полем поперечной накачки (14.13)–(14.15) вдали от ФМР.

14.3. "Косая" накачка СВ в ферромагнетиках. Так называется метод параметрического возбуждения СВ в ФМ, промежуточный между поперечной и параллельной накачкой, когда направление линейно поляризованного СВЧ поля $h(t)$ составляет некоторый угол θ_0 с намагниченностью, и необходимо одновременно учитывать как продольную, так и поперечную части накачки. В результате эффективный коэффициент связи с косой накачкой $V'_k(\theta_0)$ примет вид

$$V'_k(\theta_0) = \tilde{V}_k(\theta, \varphi) \sin \theta_0 + V_k \cos \theta_0, \quad (14.23)$$

где $\tilde{V}_k$ и V_k задаются формулам (14.15) и (14.21) соответственно. Как видно из этих выражений, порог параметрического возбуждения СВ минимален для единственной пары СВ с $\varphi_k = 0$ и некоторым θ_k , зависящим от θ_0 .

14.4. Поперечная накачка СВ в ферромагнетиках — сулловская неустойчивость второго порядка. Если уменьшать частоту накачки ω_p или увеличивать постоянное магнитное поле H_0 и соответственно щель в спектре СВ, то легко добиться того, чтобы частота накачки стала меньше, чем удвоенная минимальная (по φ_k и θ_k) щель в спектре СВ. При этом условие параметрического резонанса

$$\omega_p = \omega_k + \omega_{-k} \quad (14.24)$$

не будет выполняться ни для каких k , и, следовательно, трехволновые процессы распада (14.24) внешнего поля на две СВ будут запрещены. В этом случае легко создать условия наблюдения другого параметрического процесса — так называемой *сулловской неустойчивости ОП второго порядка*, условие параметрического резонанса для которой имеет вид

$$2\omega_p = \omega(k) + \omega(-k). \quad (14.25)$$

Поскольку гамильтониан взаимодействия СВ с внешним полем (14.18) пропорционален первой степени h , прямой процесс (14.25) распада двух квантов накачки на две СВ в ФМ не идет. Возможен, однако, косвенный процесс с участием однородной прецессии (ОП): внешнее поле h раскручивает в резонансе ОП $\omega_p \approx \omega_0$ и затем происходит четырехмагنونный параметрический процесс:

$$2\omega_0 = \omega(k) + \omega(-k). \quad (14.26)$$

Легко понять, что пороговая амплитуда ОП $(b_0)_{th}$ определяется условием

$$|S_{0k}(b_0)_{th}^2| = \gamma_k, \quad (14.27)$$

в котором b_0 связана с h уравнением (14.9) или (14.10). Подставляя в (14.27) S_{0k} из (6.26), имеем для кубических ФМ:

$$(gh_{th}/\omega_m)^2 = \gamma_k/\omega_k. \quad (14.28)$$

Если для параметрических процессов первого порядка $gh_{th}/\omega_m \approx \gamma_k/\omega_m$, то для процессов второго порядка $gh_{th}/\omega_m \approx (\gamma_k/\omega_m)^{1/2}$ и пороговая амплитуда h_{th} вдали от резонанса ОП оказывается существенно больше. Однако при выполнении резонансного условия для ОП: $\omega_p = \omega_0$ из (14.28) следует, что $gh_{th} \approx (\gamma_0\gamma_k)^{1/2}$, т.е. амплитуда h_{th} обсуждаемого процесса (14.26) оказывается одного порядка с таковой для параллельной накачки. Существенным моментом для параметрического процесса (14.26) является то, что порог неустойчивости (14.28) минимален для СВ на полюсах резонансной поверхности ($\theta_k = 0, \pi$), т.е. в единственной паре точек.

14.5. Параметрическое возбуждение СВ в АФМ ЛП — антиферромагнетиках с анизотропией типа "легкая плоскость". Как уже отмечалось во второй главе, именно АФМ ЛП представляют наибольший интерес при изучении нелинейных свойств СВ с АФМ, ибо они имеют низколежащие ветви СВ, попадающие в удобный диапазон ниже 50 ГГц. Механизм параметрического возбуждения СВ методом параллельной накачки здесь похож на механизм поперечной накачки линейно поляризованным полем или косой накачки СВ в ФМ: необходимо учитывать как непосредственное возбуждение полем h СВ в нижней ветви: $h \rightarrow a_k + a_{-k}$, так и косвенное возбуждение: распад СВ с $k=0$ (однородная прецессия (ОП)) в верхней ветви $b_0 \rightarrow a_k + a_{-k}$, причем ОП b_0 линейно возбуждается нерезонансным полем: $h^* \rightarrow b_0$, $h \rightarrow b_0^*$. В соответствии с этим полный гамильтониан системы, включающий взаимодействия с накачкой, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_k (\omega_k a_k^* a_k + \Omega_k b_k^* b_k) + 2hU(b_0 + b_0^*) \cos \omega_p t + \\ & + \frac{1}{2} h \sum_k [V_k a_k^* a_{-k}^* \exp(-i\omega_p t) + \text{к.с.}] + \mathcal{H}_3, \end{aligned} \quad (14.29)$$

$$\mathcal{H}_3 = \sum_{2+3=1} [V_{1,23}^{(1)} b_1^* a_2^* a_3^* + V_{1,23}^{(2)} a_1 b_2^* a_3^* + \text{к.с.}] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{1+2+3=0} [U_{1,23} b_1^* a_2^* a_3^* + \text{к.с.}].$$

Здесь ω_k и Ω_k — частоты квазиферромагнитной и квазиантиферромагнитной ветвей спектра (см. формулу (7.5)), коэффициенты U и V_k задают линейную и параметрическую связь поля h с антиферро- и ферромагнонами и, наконец, коэффициенты $V_{1,23}^{(1)}$, $V_{1,23}^{(2)}$ и $U_{1,23}$ описывают интересные нас трехмагнонные процессы (см. для них формулы (7.10)). Вычисляя b_0 из уравнений движения (14.8), получаем выражение для эффективного коэффициента связи СВ нижней ветви с накачкой:

$$\tilde{V}_k = V_k - \frac{UV_{0,k,k^-}^{(1)}}{\Omega_0 - \omega_p} - \frac{UU_{0,k,k^-}}{\Omega_0 + \omega_p} = \frac{g^2}{2\omega_k} \left(H_D + \frac{2H\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \omega_p^2} \right), \quad (14.30)$$

где H — внешнее постоянное поле, H_D — поле Дзялошинского. Результат (14.30) впервые был получен В.И. Ожогиним [189]. Существенным его отличием от случая ФМ является сферическая симметрия: $\tilde{V}_k$ не зависит от направления k , и поэтому при сферической симметрии затухания СВ в запороговом состоянии должны возбуждаться пары со всеми направлениями k , т.е. "возбуждается вся резонансная поверхность" $2\omega_k = \omega_p$. Учитывая, что в АМФ ЛП $\omega_0^2 = g^2 H(H + H_D)$ (см. (7.3)) и обычно H одного порядка с H_D , легко убедиться, что $\tilde{V}_k \approx g$, т.е. имеет тот же порядок величины, что и V_k в методе параллельной накачки в ФМ (14.21). Затухание СВ в хороших образцах АФМ ЛП MnCO_3 при гелиевых температурах порядка 10^6 с^{-1} , так что пороговое поле h_{th} оказывается порядка 0,1 Гс. Это значение легко получить экспериментально.

14.6. Ядерные спиновые волны (ЯСВ) и их параметрическое возбуждение в АФМ ЛП. Концепция ЯСВ была впервые предложена в работе П.Ж. Де Женна и др. [77]. ЯСВ — это коллективные колебания спинов ядер, например ядер Mn в АФМ MnCO_3 . Разумеется, прямое обменное взаимодействие ядерных спинов отсутствует, а их магнитное дипольное взаимодействие пренебрежимо мало из-за малости магнитного момента ядер. К коллективизации движения ядерных спинов приводит их косвенное обменное взаимодействие Сула — Накамуры. Оно возникает во втором порядке теории возмущений по сверхтонкому взаимодействию (СТВ) ядерных спинов с электронными. Отклонение спина i -го ядра отклоняет под действием СТВ электронный спин i -го атома, это возмущение распространяется в системе электронных спинов и в свою очередь действует через СТВ на другие ядерные спины. Полученная корреляция в движении спинов и есть ЯСВ. Подробное описание теоретических представлений и экспериментальных данных по ЯСВ можно найти в обзоре В.А. Тулина [215]. В двухподрешоточных АФМ ЛП есть две ветви электронных СВ $\omega_e(k)$ и $\Omega_e(k)$ и соответственно две ветви ЯСВ $\omega_n(k)$ и $\Omega_n(k)$:

$$\omega_n^2(k) = \omega^2(0) [1 - \Delta^2 / \omega_e^2(k)], \quad (14.31)$$

$$\Omega_n^2(k) = \Omega^2(0) [1 - \Delta^2 / \Omega_e^2(k)]. \quad (14.32)$$

Здесь $\Omega_n(0)$ — частота ядерного магнитного резонанса в сверхтонком

поле электрона ($\Omega_n(0)/2\pi$ для АФМ CsMnF_3 , MnCO_3 и RbMnF_3 равняется соответственно 666 МГц, 640 МГц и 686 МГц, $\Delta^2 = 2\omega_{\text{ex}}\omega_n$, где ω_{ex} — частота междоузельного обмена, а ω_n — частота прецессии магнитного момента электрона в эффективном магнитном поле, вызванном СТВ и упорядочением ядерных спинов:

$$\omega_n = gH_n = A \langle I_z \rangle / \hbar \sim AH/T.$$

Величина Δ есть "обменно-усиленная" ядерная щель в спектре электронных СВ (см. (7.6) и табл. 7.1).

В работе В.И. Ожогина и А.Ю. Якубовского [191] вычислены пороги параметрического возбуждения двух ЯСВ $h_{\text{th}}^{(nn)}$ и одной электронной, одной ядерной СВ $h_{\text{th}}^{(en)}$, т.е. пороги двух процессов:

$$\omega_p = \omega_n(k) + \omega_n(-k), \quad (14.33)$$

$$\omega_p = \omega_n(k) + \omega_p(-k). \quad (14.34)$$

В наших обозначениях

$$h_{\text{th}}^{(nn)} = \gamma_n(k) / |\tilde{V}_k^{(nn)}|, \quad h_{\text{th}}^{(en)} = [\gamma_e(k) \gamma_n(k)]^{1/2} / |V_k^{(en)}|. \quad (14.35)$$

Здесь $\gamma_n(k)$ и $\gamma_e(k)$ — декременты затухания электронной и ядерной СВ соответственно, $V_k^{(nn)}$ и $V_k^{(en)}$ — эффективные матричные элементы связи с накачкой в процессах (14.33) и (14.34) соответственно. При $\omega_p \ll \Omega_e(0)$

$$V_k^{(nn)} = \frac{g^2(2H + H_D)[\omega_n^2(0) - \omega_n^2(k)]}{2\omega_e^2(k)\omega_n(k)}, \quad (14.36)$$

$$V_k^{(en)} = \frac{g^2(2H + H_D)[\omega_n^2(0) - \omega_n^2(k)]^{1/2}}{2\omega_e(k)[\omega_e(k)\omega_n(k)]^{1/2}}.$$

В обозначениях этого параграфа эффективный матричный элемент связи внешнего поля с двумя электронными СВ (14.31) при $\omega_p \ll \Omega_e(k)$ имеет вид

$$\tilde{V}_k = \tilde{V}_k^{(ee)} = g^2(2H + H_D)/[2\omega_e(k)]. \quad (14.37)$$

Видно, что выполняется соотношение

$$\tilde{V}_k^{(ee)} \tilde{V}_k^{(nn)} = [\tilde{V}_k^{(en)}]^2. \quad (14.38)$$

Прямым следствием этого является соотношение для критических полей:

$$h_{\text{th}}^{(ee)} h_{\text{th}}^{(nn)} = [h_{\text{th}}^{(en)}]^2, \quad (14.39)$$

соответствующих возбуждению ядерных и электронных СВ с одним и тем же значением волнового вектора. Видимо, соотношение (14.39) не имеет глубокого физического смысла, однако оно полезно для численных оценок.

В заключение этого параграфа отметим, что все перечисленные процессы наблюдались и подробно исследовались в эксперименте. Так, в MnCO_3 при $T \approx 2k$ на частоте $\omega_k \approx 0,9$ ГГц $h_{\text{th}}^{(nn)} \approx (0,08 \div 0,15)$ Э и $h_{\text{th}}^{(en)} \approx (0,4 \div 1,0)$ Э в зависимости от величины внешнего поля H .