

ПРИБЛИЖЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

ГЛАВА 4

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

ЗА ПОРОГОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ.

S-ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

§ 15. Введение

В результате развития параметрической неустойчивости в непрерывной среде (если размеры системы достаточно велики по сравнению с длиной возбуждающихся волн) возникает состояние, в котором одновременно возбуждены и интенсивно взаимодействуют между собой большое число волн. Характер этого состояния существенно зависит от конкретной ситуации — вида закона дисперсии волн, нелинейных и диссипативных свойств среды, которые в разных случаях совершенно различны.

В начале 70-х годов стало ясно, что существует один простой и одновременно чрезвычайно содержательный частный случай, когда построение общей нелинейной теории параметрического возбуждения волн оказалось возможным. Это случай, когда накачка осуществляется пространственно-однородным полем $k = 0$ или волной большой длины $k \ll k', k''$. Тогда характеристики запорогового состояния можно считать статистически однородными. Именно такая ситуация осуществляется в большинстве экспериментов по параметрическому возбуждению СВ в магнитоупорядоченных диэлектриках. Необходимо заметить, что эти эксперименты принадлежат к числу наиболее "чистых" экспериментов в физике нелинейных волн, что объясняется относительной простотой их проведения (по сравнению, например, с плазменным или нелинейно-оптическим экспериментом), а также высокими качествами магнетодиэлектриков. Особенно удобным объектом для экспериментов является кристалл ЖИГ — железо-иттриевый гранат, обладающий во многих отношениях уникальными свойствами. Большая часть экспериментальных данных, описанных в настоящей главе, относится к ЖИГ. Важные экспериментальные результаты были получены также на АФМ MnCO_3 , CsMnF_3 и FeVO_3 .

Экспериментальные данные о запороговом поведении СВ накапливаются с начала 60-х годов. К этому же времени относятся и первые ее модели, авторы которых ставили прежде всего цель — найти механизм, ограничивающий рост амплитуды неустойчивых СВ. Первым этапом на этом пути

была работа Х. Сула [211], который показал, что при накачке СВ однородной прецессией (ОП) намагниченности основным механизмом ограничения является их обратное влияние на накачку, приводящее к "замораживанию" ее амплитуды на пороговом уровне. Однако попытки объяснить эти явления при параллельной накачке встретили значительные трудности. Привлечение способов ограничения параметрической неустойчивости, традиционных для параметрического резонанса в системах с малым числом степеней свободы — нелинейного затухания и нелинейной расстройки частоты — оказалось недостаточным, в большинстве случаев нелинейное затухание оказывается слишком слабым и чувствительным к величине постоянного магнитного поля, чтобы объяснить наблюдаемый уровень СВ, нелинейная же расстройка частоты вообще не ограничивает параметрический резонанс в непрерывной среде, так как при любой амплитуде найдутся волны, перенормированные частоты которых в точности удовлетворяют условиям резонанса. Важный шаг в понимании запорогового поведения параметрически возбужденных СВ (ПСВ) был сделан Е. Шлеманном в 1962 г. [234], который обратил внимание на необходимость учета нелинейного взаимодействия ПСВ между собой и высказал мысль, что главный вклад в это взаимодействие вносят нелинейные процессы, удовлетворяющие условиям

$$\omega_k + \omega_{-k} = \omega_{k'} + \omega_{-k'} \quad (15.1)$$

и не выводящие волны из параметрического резонанса.

Новый период в изучении нелинейных явлений при параметрическом возбуждении волн начался в 69–70-х годах пионерскими работами В.Е. Захарова, С.С. Старобинца и автора 1969–1970 г.г. [93–96], которые показали, что процессы типа (15.1) сохраняют корреляцию фаз внутри каждой параметрически возбуждаемой пары волн с противоположными волновыми векторами и приводят к самосогласованному изменению суммарной фазы волн в каждой паре. Это приводит к ухудшению связи СВ с накачкой и, в конечном итоге, к ограничению их амплитуды. При этом возбужденными оказываются как раз те волны, перенормированные частоты которых в точности удовлетворяют условию параметрического резонанса. Такой *фазовый* механизм ограничения амплитуды волн, специфический для сплошной среды и в чистом виде осуществляющийся только в системе предельно больших (по сравнению с длиной волны) размеров, оказался главным механизмом ограничения амплитуды СВ при параллельной накачке в нераспадной части спектра. Процессы (15.1) с учетом необходимых фазовых соотношений удобно изучать, осуществив диагонализацию гамильтониана взаимодействия волн, аналогичную БКШ-приближению в теории сверхпроводимости. Теория, основанная на этом приближении (В.Е. Захаров, В.С. Львов, С.С. Старобинец, [96]), получила в дальнейшем название *S-теории*. В работах 70–74-х годов вышеупомянутых трех авторов и их коллег С.Л. Мушера, В.В. Зауткина, А.М. Рубенчика и некоторых других удалось в рамках *S-теории* и ее обобщений далеко продвинуться в изучении запорогового поведения СВ, объяснить качественно многие наблюдаемые в эксперименте эффекты и получить удовлетворительное количественное согласие с экспериментом [84–87, 98, 102, 103, 148–155].

В частности, в рамках *S-теории* были объяснены гигантские автоколебания намагниченности при параметрическом возбуждении СВ, обнаруженные

в 1961 г. Т.С. Хартвиком, Е.Р. Пересенни и М.Т. Вейсом [221] и впоследствии детально исследованные экспериментально. В 1974 г. В.Е. Захаров, В.С. Львов и С.С. Старобинец опубликовали обзор в УФН [105] (в основном по результатам, полученным с их участием), в котором была последовательно изложена S -теория и с ее точки зрения рассматривались и объяснялись результаты ряда экспериментов.

В последующие пять лет темп теоретических исследований нелинейных явлений при параметрическом возбуждении СВ снизился. В основном это было связано с тем, что к 1974 г. развитая теория, во-первых, существенно обогнала экспериментальные работы и, во-вторых, еще не стала достоянием основной части исследователей в этой области. В эти годы еще появлялись теоретические работы, опровергающие S -теорию (см., например, [225], [63]) или, напротив, переполучающие ее результаты другим методом (например, [185]). В некоторых теоретических работах промежуточного характера, основанных на S -теории, новые, но неверные результаты были связаны, например, с недопониманием границ ее применимости (см., например, [53], [179], [185]). В то же время в работах Г.А. Мелкова, Л.А. Прозоровой, В.И. Ожогина, В.В. Зауткина и их сотрудников [124–131], [133–136], [138–139], [172–177], [189–194], [197], [199–202], [204–208] были получены интересные и важные экспериментальные результаты по нелинейному поведению ПСВ, связанные с новым пониманием физики происходящих явлений за порогом параметрического возбуждения волн. Были подтверждены основные выводы S -теории, выяснены детали нелинейного поведения СВ и обнаружены количественно новые нелинейные эффекты, которые было трудно предсказать теоретически.

В этой главе изложены современные представления о той части S -теории и тех экспериментальных результатах, которые относятся к стационарному состоянию ПСВ. Разумеется, значение этих результатов выходит за рамки некоторой части физики магнетодиэлектриков. Они сыграли и, безусловно, будут продолжать играть важную роль в развитии физики нелинейных волн в других средах.

§ 16. Постановка задачи о нелинейном поведении параметрически возбужденных волн

При формулировке нелинейной теории параметрического возбуждения волн — S -теории — мы сделаем ряд упрощений, приближений, предположений разного характера.

1. Будем считать, что среда, в которой распространяются волны: СВ в магнетодиэлектриках, различные типы волн в плазме, волны на поверхности воды и т.д., является неограниченной и пространственно-однородной. Для этого необходимо, чтобы образцы магнетодиэлектриков, плазмы и т.д. были достаточно хорошего качества, а их линейные размеры L существенно превышали длину свободного пробега волн $l \approx \gamma^{-1} \partial \omega / \partial k$. Влияние статистически случайных неоднородностей на распространение волн и их нелинейное поведение будет рассмотрено в гл. 9.

2. Волны в среде будем описывать в рамках классического гамильтонова формализма, описанного в гл. 2, т.е. с помощью уравнений движения

(5.6) для комплексных амплитуд бегущих волн b_k , b_k^* , в которых квадратичный гамильтониан $\mathcal{H}$ является диагональным. Этот подход в большинстве случаев является бесспорным. Однако, как отмечалось в гл. 2, он неочевиден при описании СВ при температурах, не малых в сравнении с температурой Кюри. Строгий метод описания взаимодействующих СВ при конечных температурах должен опираться на спиновую диаграммную технику для неравновесных процессов (В.И. Белиничер, В.С. Львов, [56]). Однако в этой книге для простоты мы будем исходить из уравнений Блоха в канонических переменных, полагая, что в них заключена "значительная часть правды о спиновых волнах".

3. Так же, как и во второй главе, затухание волн на данном этапе исследования будем учитывать феноменологически с помощью диссипативного слагаемого $\gamma_k b_k$ в уравнении (10.3). Могут возникнуть сомнения в правомочности этой процедуры при описании когерентных волновых систем, в которых существенны фазовые соотношения. В дальнейшем, в гл. 10, эта процедура будет обоснована с помощью диаграммной техники (гл. 7) и будет показано, что декремент затухания волн γ_k в (10.3) можно вычислять с помощью обычного кинетического уравнения. Это не относится, однако, к рассмотренному в гл. 9 специальному случаю, в котором затухание волн обусловлено рассеянием на случайных неоднородностях.

4. Упрощения, изложенные в пп. 1–3, неспецифичны для проблемы нелинейного поведения ПСВ, и они используются в S -теории точно так же, как и во многих других задачах физики нелинейных волн. В этом пункте мы обсудим более узкий вопрос о выборе гамильтониана взаимодействия волн в S -теории. Все ПСВ имеют почти одинаковые частоты (в процессах первого порядка, равные половине частоты накачки), поэтому резонансными для них являются только четырехволновые процессы рассеяния типа $2 \rightarrow 2$, которые описываются гамильтонианом (5.30). Что касается остальной части $\mathcal{H}_{\text{int}}$, то она описывает взаимодействие ПСВ с резервуаром термически возбуждаемых волн и приводит к затуханию ПСВ, которое мы уже учли в (10.3) феноменологически. Забегая вперед, можно сказать, что эта процедура имеет широкую по надкритичности область применимости, если все трехволновые процессы запрещены законами сохранения, и наиболее узкую область применимости, если разрешены трехволновые процессы распада одной ПСВ на две тепловые. В гл. 8 детально рассмотрено влияние трехволновых процессов взаимодействия ПСВ с тепловыми СВ на нелинейное поведение ПСВ.

5. Внешнее воздействие на среду — параметрическую накачку будем считать монохроматической и пространственно-однородной (14.18). Эти предположения прекрасно выполняются для всех методов параметрического возбуждения СВ, рассмотренных в § 14. Действительно, характерные значения частот накачки СВ ω_p лежат в диапазоне $(10 \div 36)$ ГГц, что соответствует длинам волн электромагнитного излучения $(3,0 \div 0,8)$ см. Это существенно превышает характерные экспериментальные значения длин ПСВ $(10^{-1} \div 10^{-5})$ см. Что касается степени некогерентности накачки, то частотная ширина линии используемых в экспериментах источников СВЧ излучения — магнетронов и клистронов — по крайней мере на два порядка уже, чем рекордная ширина линии СВ $\gamma_k = 10^5$ Гц.

Для параметрических процессов первого порядка (распада одного "кванта" поля накачки на два магнона, гамильтониан взаимодействия с накачкой $\mathcal{H}_p$ имеет вид (14.18):

$$\mathcal{H}_p = \frac{1}{2} \sum_k [h V_k b_k^* b_{-k} \exp(i\omega_p t) + \text{к.с.}]. \quad (16.1)$$

Для процесса второго порядка (распада двух "квантов" ОП на две СВ) гамильтониан $\mathcal{H}_p$ получается из (16.1) после замены $h V_k \exp(i\omega_p t) \rightarrow T_{0k} b_0^2$. Поэтому будем считать, что $\mathcal{H}_p$ имеет вид (16.1), и только в окончательных формулах будем при необходимости проводить эту замену.

6. В этом последнем пункте мы запишем уравнения движения СВ, которые в дальнейшем будем использовать, для анализа их нелинейного поведения при параметрическом возбуждении. Подставляя в динамические уравнения движения (10.3) гамильтониан ПСВ $\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_p + \mathcal{H}_4$, в котором $\mathcal{H}_p$ и $\mathcal{H}_4$ определены формулами (16.1) и (5.30) соответственно, получим окончательно

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i\omega_k \right) b_k + i h V_k \exp(i\omega_p t) b_{-k}^* = -i \frac{\delta \mathcal{H}_4}{\delta b_k^*}, \quad (16.2)$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}_4}{\delta b_k^*} = \sum_{k+1=2+3} T_{k1,23} b_1^* b_2 b_3. \quad (16.3)$$

§ 17. Фазовые соотношения при параметрическом возбуждении волн и механизмы ограничения амплитуды

17.1. Анализ фазовых соотношений. Исходные уравнения движения (16.2) в линейном приближении (т.е. при $\mathcal{H}_4 = 0$) распадаются на независимые пары уравнений для СВ с равными и противоположно направленными волновыми векторами $\pm k$. После исключения быстрой зависимости от времени, т.е. в "медленных" переменных

$$a_k(t) = b_k(t) \exp(i\omega_p t/2), \quad (17.1)$$

они приобретают вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\omega_k - \omega_p/2) \right] a_k + i h V_k a_{-k}^* = 0, \quad (17.2)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k - i(\omega_k - \omega_p/2) \right] a_{-k}^* - i h V_k^* a_k = 0.$$

Полагая $a_k, a_k^* \sim e^{\nu_k t}$, имеем

$$\nu_k = -\gamma_k \pm [|h V_k|^2 - (\omega_k - \omega_p/2)^2]^{1/2}. \quad (17.3)$$

Разумеется, это выражение совпадает с формулой (11.17), полученной в гл. 3, в которой параметрическая неустойчивость рассматривалась как частный случай трехволновой распадной неустойчивости волны с $k_p = 0$. Минимальный порог, соответствующий параметрическому резонансу $2\omega_k = \omega_p$, определяется из условия $|h V_k| = \gamma_k$, имеющего простой смысл баланса энергии. Действительно, поток энергии W_+ , поступающий от накач-

ки в пару волн $\pm k$, равен

$$\begin{aligned} W_+ &= -\partial \mathcal{H}_p / \partial t = i\omega_p (hV_k a_k^* a_{-k}^* + \text{к.с.}) = \\ &= 2 |hV_k| \omega_p |a_k|^2 \sin(\tilde{\psi}_k - \psi_k). \end{aligned} \quad (17.4)$$

Здесь $a_k = |a_k| \exp(-i\varphi_k)$, $\psi_k = \varphi_k + \varphi_{-k}$ — фаза пары, $\tilde{\psi}_k = \arg(hV_k)$. С другой стороны, энергия W_- , диссипируемая парой в единицу времени, равна

$$W_- = 2\gamma_k [\omega_k |a_k|^2 + \omega_{-k} |a_{-k}|^2] = 2\omega_p \gamma_k |a_k|^2. \quad (17.5)$$

В точке порога $W_+ = W_-$. Наибольший поток энергии и наименьший порог неустойчивости осуществляются для пары с наиболее выгодным фазовым соотношением $\psi_k = \tilde{\psi}_k + \pi/2$. При этом для порога вновь справедливо соотношение $|hV_k| = \gamma_k$. Условие параметрического резонанса, очевидно, может одновременно выполняться для большого числа пар, волновые векторы которых лежат на резонансной поверхности. Минимальный порог возбуждения h_1 имеют пары, у которых отношение $\gamma_k/|V_k|$ минимально:

$$h_1 = \min(\gamma_k/|V_k|). \quad (17.6)$$

При $h > h_1$ начинается экспоненциальный рост амплитуд пар:

$$\begin{aligned} a_k(t) &= a_k \exp(v_k t - i\psi_k/2), \\ a_{-k}^*(t) &= a_{-k}^* \exp(v_k t + i\psi_k/2) \end{aligned}$$

с инкрементом (17.3), причем из (17.2) следует, что

$$\cos(\psi_k - \tilde{\psi}_k) = (\omega_k - \tilde{\omega}_{p/2})/hV_k. \quad (17.7)$$

Это означает, что на линейной стадии параметрической неустойчивости устанавливается определенное соотношение между фазами волн в паре. Фазовую корреляцию волн с равными и противоположно направленными волновыми векторами по аналогии со сверхпроводимостью можно назвать *спариванием*. В отличие от сверхпроводимости, физической причиной, приводящей к спариванию волн, служит накачка, выделяющая из первоначального фазового хаоса пары волн, для которых максимален инкремент неустойчивости. В дальнейшем будет показано, что на нелинейной стадии развития неустойчивости фазовая корреляция является полной. Это означает, что, хотя величина a_k случайна, величина $a_k a_{-k}$ будет динамической, при этом $\langle a_k a_{-k} \rangle = a_k a_{-k}$, $\langle \psi_k \rangle = \psi_k$.

17.2. Нелинейные механизмы ограничения параметрической неустойчивости. Простейшим механизмом такого рода может быть нелинейное затухание, т.е. зависимость γ_k от квадратов амплитуд параметрических волн $|a_k|^2$ (Е. Шлеманн [235], П. Готтлиб и Х. Сул, [69]). Стационарные амплитуды волны определяются известным условием баланса энергии: $|hV_k| = \gamma_k$. Для качественного анализа выберем простейшую зависимость $\gamma_k = \gamma_0 + \eta \sum_{k'} |a_{k'}|^2$. Тогда

$$\sum_{k'} |a_{k'}|^2 = (|hV| - \gamma_0)/\eta = V(h - h_1)/\eta. \quad (17.8)$$

При этом фазы φ_k определяются из условия параметрического резонанса и сдвинуты на $\pi/2$ относительно фазы накачки.

Еще один очевидный механизм ограничения параметрической неустойчивости связан с обратным влиянием ПСВ на накачку. Действительно, поток энергии в систему ПСВ, необходимый для того, чтобы поддерживать их количество на конечном уровне, отбирается от накачки и уменьшает ее амплитуду. В простейшем случае, когда другие механизмы ограничения отсутствуют, амплитуда накачки "замораживается" на пороговом уровне, а количество возбужденных ПВ определяется из условия баланса энергии в системе накачки. В ряде случаев, например, когда накачкой для СВ в ФМ служит ОП, возбуждаемая в резонансе внешним СВЧ полем, механизм "обратного влияния" действительно важен, и он будет рассмотрен подробно в § 22. В других случаях, например, при "параллельной накачке", когда СВ в маленьком образце магнетодиэлектрика возбуждаются СВЧ полем большого резонатора, обратное влияния ПСВ на поле h в резонаторе, как правило, можно не учитывать.

Третий "фазовый" механизм ограничения, предложенный В.Е. Захаровым, В.С. Львовым и С.С. Старобинцем [94], играет определяющую роль при параметрическом возбуждении волн. Его подробному рассмотрению и сопоставлению с экспериментом в ферро- и антиферромагнетиках посвящена в основном эта глава. Здесь мы только отметим, что фазовый механизм ограничения связан со спариванием и возникающим из-за него четырехволновым взаимодействием, которое приводит к фазовому рассогласованию ($\sin \psi < 1$) между парами и внешней накачкой, т.е. к уменьшению потока энергии в систему. Четвертый механизм ограничения, связанный с образованием и коллапсом солитонов, действует, когда коэффициент гамильтониана (16.1) V_k максимален в одной паре точек, так что за порогом возбуждается узкий пакет волн. Этот механизм ограничения будет описан нами в гл. 6.

§ 18. Диагональный гамильтониан, уравнения движения и основное состояние в S -теории

18.1. Приближение диагонального гамильтониана. Обсудим более подробно упрощение гамильтониана взаимодействия волн, намеченное в предыдущем параграфе в связи с рассмотрением фазового механизма ограничения. Оно состоит в замене гамильтониана четырехволнового взаимодействия (5.30) его диагональной по парам волн $\pm k$ частью. В "медленных" переменных диагональный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}_S = \sum_{k,k'} T_{k,k'} a_k^* a_k a_{k'}^* a_{k'} + \frac{1}{2} \sum_{k,k'} S_{kk'} a_k^* a_{-k}^* a_{k'} a_{-k'},$$

$$T_{kk'} \equiv T_{kk',kk'} = T_{k'k}^*, \quad S_{kk'} \equiv T_{k-k,k'-k'} = S_{k'k}^*. \quad (18.1)$$

В $\mathcal{H}_{\text{int}}$ оставлены только члены, либо не зависящие от фаз волн вообще (первая сумма в (18.1)), либо зависящие только от суммы фаз $\psi_k = \varphi_k + \varphi_{-k}$ в парах. Все остальные слагаемые, зависящие от индивидуальных фаз волн (точнее, от разностей $\varphi_k - \varphi_{k'}$), опущены. Физический смысл оставленных в (18.1) членов становится ясным из уравнения движения для амплитуд a_k .

Подставляя в уравнения (16.2) гамильтониан (18.1), получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2) \right] a_k + i P_k a_{-k}^* = 0. \quad (18.2)$$

Эти уравнения отличаются от линейных уравнений (17.2), описывающих параметрическую неустойчивость, только перенормировкой частоты $\omega_k \rightarrow \tilde{\omega}_k$ и накачки $h V_k \rightarrow P_k$, возникающей из-за первой и второй сумм в (18.1) соответственно:

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2 \sum_{k'} T_{kk'} |a_{k'}|^2, P_k = h V_k + \sum_{k'} S_{kk'} a_{k'} a_{-k'}^*. \quad (18.3)$$

Выбирая в уравнениях (18.2) $a_k = |a_k| \exp(-i\varphi_k)$ и вычисляя $\partial \varphi_k / \partial t$, найдем соотношение $\partial(\varphi_k - \varphi_{-k}) / \partial t = 0$, демонстрирующее безразличную устойчивость разности фаз в рамках теории с диагональным гамильтонианом (18.1). Этого и следовало ожидать, так как разность фаз бегущих навстречу волн определяет пространственное положение узлов образующейся стоячей волны, которая в однородном поле накачки ничем не фиксирована. Безразличное равновесие разностей фаз приводит к тому, что они могут быть хаотизированы любым малым взаимодействием, например малыми случайными неоднородностями или неточностями формы кристалла. Причиной стохастизации фаз является и "остаточное" взаимодействие, не учтенное в диагональном гамильтониане (18.1). Впрочем, это взаимодействие приводит к некоторой корреляции разностей фаз в различных парах, однако эта корреляция вместе с недиагональными членами гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{int}}$ остается малой. Более подробное и строгое обоснование приближения диагонального гамильтониана (18.1) будет дано в гл. 10. Здесь же мы только отметим, что это приближение пригодно вплоть до амплитуд поля накачки $h < h^*$, где

$$h^* \approx h_1 [(k \partial \omega / \partial k) / \gamma]^{1/2} \gg h_1. \quad (18.4)$$

Теорию, основанную на диагонализации гамильтониана взаимодействия до формы (18.1), мы будем называть S -теорией. В таком названии отражено определяющее влияние коэффициентов $S_{kk'}$ на нелинейное поведение системы ПСВ. В дальнейшем мы будем предполагать, что индивидуальные фазы волн являются случайными и по их ансамблю произведено усреднение. При этом система взаимодействующих СВ описывается на языке корреляционных функций:

$$\langle a_k a_{k'}^* \rangle = n_k \Delta(k - k'), \quad \langle a_k a_{k'} \rangle = \sigma_k \Delta(k + k'). \quad (18.5)$$

Величины n_k и σ_k имеют размерность действия (эрг с). Уравнения для этих величин легко могут быть получены непосредственно усреднением уравнения (18.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial n_k}{\partial t} &= -\gamma_k n_k - \text{Im}(P_k^* \sigma_k), \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} &= -\sigma_k [\gamma_k + i(\omega_k - \omega_p/2)] - \frac{1}{2} i(n_k + n_{-k}) P_k. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Приведем другой вывод основных уравнений S -теории. Для этого необходимо из динамических уравнений (16.2) с точным гамильтонианом задачи

(16.3) получить усредненные уравнения для корреляционных функций n_k, σ_k (18.5). В их правых частях возникают корреляционные функции четвертого порядка $\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle, \langle a_1^* a_2 a_3 a_4 \rangle$. Уравнения (18.6) получатся, если эти функции вычислить приближенно с помощью стандартного расщепления на парные корреляционные функции n_k, σ_k :

$$\begin{aligned} \langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle &= n_1 n_2 [\Delta(k_1 - k_3) \Delta(k_2 - k_4) + \Delta(k_1 - k_4) \times \\ &\times \Delta(k_2 - k_3)] + \sigma_1^* \sigma_3 \Delta(k_1 + k_2) \Delta(k_3 + k_4), \\ \langle a_1^* a_2 a_3 a_4 \rangle &= n_1 [\sigma_3 \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_3 + k_4) + \sigma_2 \Delta(k_1 - k_3) \times \\ &\times \Delta(k_2 + k_4) + \sigma_2 \Delta(k_1 - k_4) \Delta(k_2 - k_3)]. \end{aligned} \quad (18.7)$$

Разумеется, эта процедура не является более строгой, чем насильная редукция гамильтониана (16.3) до вида (18.1). Она, однако, более традиционна, и поэтому для многих такой вывод основных уравнений S -теории (18.6) выглядит более убедительным.

После этого вывода становится понятно, что приближение диагонального гамильтониана представляет по существу первый порядок теории возмущений по $\mathcal{H}_{\text{int}}$ — приближение, в котором не учитываются корреляции флуктуаций волнового поля, возникающие под действием $\mathcal{H}_{\text{int}}$. В теоретической физике такое приближение часто называют приближением самосогласованного поля. Его классическими примерами являются теория *молекулярного поля Кюри–Вейсса*, созданная в начале века и объяснившая магнитное упорядочение, а также БКШ — теория сверхпроводимости. Эти два в высшей степени содержательных примера относятся к физике фазовых переходов второго рода. В физике нелинейных волн, однако, приближение самосогласованного поля обычно несодержательно, ибо не улавливает нетривиальную динамику волн. Действительно, из уравнений (18.6) видно, что в отсутствие накачки и спаривания волн (т.е. при $\hbar V_k = 0, \sigma_k = 0$) кинетика числа волн тривиальна: $\dot{n}_k = -2\gamma_k n_k$. Кроме спаривания, к нетривиальной кинетике волн в приближении самосогласованного поля может приводить пространственная неоднородность или неэрмитовость матричного элемента взаимодействия волн $T_{12,34}$. Теория возникающих при этом явлений кратко изложена, например, в моих "Лекциях по физике нелинейных явлений" [159]. Она существенна для понимания ряда ситуаций в физике плазмы, нелинейной оптике и даже в экологии. Можно убедиться, что она имеет много общих черт с S -теорией.

18.2. Динамическая форма записи уравнений S -теории. Приступая к анализу основных уравнений S -теории (18.6), получим из них следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\gamma_k \right) (n_k n_{-k} - |\sigma_k|^2) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_k \right) (n_k - n_{-k}) &= 0. \end{aligned} \quad (18.8)$$

показывающие, что произвольные начальные условия за время порядка $1/\gamma_k$ релаксируют к состоянию (не обязательно стационарному), в котором $n_k = n_{-k}, |\sigma_k| = n_k$. Условие $|\sigma_k| = n_k$, означающее, что фазы пар волн полностью коррелированы, позволяет вместо переменных σ_k, σ_k^* и n_k

ввести только две вещественные переменные — n_k и ψ_k : $\sigma_k = n_k \exp(-i\psi_k)$. В этих переменных уравнения (18.6) и определения (18.3) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial n_k}{\partial t} &= n_k \{ -\gamma_k + \overline{\text{Im}}[P_k^* \exp(-i\psi_k)] \}, \\ P_k &= hV_k + \sum_{k'} S_{kk'} n_{k'} \exp(-i\psi_{k'}), \end{aligned} \quad (18.9)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \tilde{\omega}_k - \frac{\omega_p}{2} + \text{Re}[P_k^* \exp(-i\psi_k)], \quad \tilde{\omega}_k = \omega_k + 2 \sum_{k'} T_{kk'} n_{k'}.$$

Еще более компактную запись можно получить, если вместо двух вещественных переменных: числа волн n_k и фазы пары ψ_k использовать одну комплексную c_k :

$$n_k = n_{-k} = |c_k|^2, \quad \sigma_k = c_k^2 \exp(-i\psi_k), \quad c_k = (n_k)^{1/2} \exp(-i\psi_k/2). \quad (18.10)$$

В этих переменных вместо четырех уравнений (18.6) для n_k , n_{-k} , σ_k и σ_k^* или двух уравнений (18.9) для n_k и ψ_k имеем одно комплексное уравнение

$$\frac{\partial c_k}{\partial t} + [\gamma_k + i(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)] c_k + iP_k c_k^* = 0, \quad (18.11)$$

в котором

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2 \sum_{k'} T_{kk'} |c_{k'}|^2, \quad P_k = hV_k + \sum_{k'} c_{k'}^2. \quad (18.12)$$

Уравнения (18.11) буквально совпадают с (18.2), если положить $a_k = a_{-k} = c_k$. Это означает, что уравнения S -теории по существу являются динамическими, несмотря на то, что получены в результате статистического усреднения и расщепления корреляций по правилу (18.7). Более того, при $\gamma_k = 0$ уравнения S -теории являются гамильтоновыми. В переменных c_k , c_k^* этот факт является тривиальным, так как уравнения (18.11) совпадают с (18.2). Что касается уравнений (18.9), то нетрудно убедиться, что их можно получить варьированием гамильтониана

$$\mathcal{H}_S = \sum_k (\omega_k + \sum_{k'} T_{kk'} n_{k'}) n_k + \frac{1}{2} \sum_k (hV_k \cos \psi_k + \frac{1}{2} \sum_{k'} S_{kk'} n_{k'} \cos(\psi_k + \psi_{k'}))$$

по правилу

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \gamma_k n_k = - \frac{\delta \mathcal{H}_S}{\delta \psi_k}, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}_S}{\delta n_k}. \quad (18.14)$$

18.3. Основное состояние ПСВ в S -теории. Условие внешней устойчивости. Приступим к изучению стационарных состояний системы пар, в которых все амплитуды n_k и фазы ψ_k не зависят от времени. Полагая в (18.9) $\dot{n}_k = \dot{\psi}_k = 0$, немедленно получаем для тех точек k -пространства, где $n_k \neq 0$, условие

$$|P_k|^2 = \gamma_k^2 + (\omega_k - \omega_p/2)^2. \quad (18.15)$$

Прежде чем анализировать этот результат, сделаем два замечания общего характера. Во-первых, ясно, что амплитуды пар не равны нулю лишь в уз-

ком слое вблизи резонансной поверхности $2\omega_k = \omega_p$. Это делает удобным использование следующих координат в k -пространстве: $\vec{k}$ — отклонения от этой поверхности в нормальном направлении и Ω — координату на поверхности. Во-вторых, коэффициенты уравнения (18.9), имеющие размерность частоты: $\gamma_k, hV_k, \sum_{k'} T_{kk'} n_{k'}$, значительно меньше собственной частоты ω_k .

Поэтому в теории достаточно учесть зависимость от $\vec{k}$ только коэффициента $\omega_k - \omega_p/2$, а все остальные коэффициенты заменить их значениями на резонансной поверхности γ_Ω, hV_Ω и $T_{\Omega\Omega}$ соответственно. Используя указанные приближения, можно из уравнения (18.15) легко найти те $\vec{k}$, на которых $n(\vec{k}, \Omega)$ может быть не равно нулю:

$$\tilde{\omega}_{\vec{k}\Omega} = \frac{1}{2}\omega_p \pm (|P_\Omega|^2 - \gamma_\Omega^2)^{1/2}. \quad (18.16)$$

Таким образом, в стационарном состоянии распределение амплитуд пар сингулярно: $n(\vec{k}, \Omega)$ может отличаться от нуля только на двух поверхностях (18.16). Отметим, что имеется бесчисленное множество стационарных состояний, отличающихся как функцией $P(\Omega)$, задающей поверхности (18.16), так и распределением $n(\Omega)$ на них. В самом деле, можно произвольно задавать направления Ω , в которых n_Ω равно нулю. В действительности из всех стационарных состояний могут реализоваться только такие, которые устойчивы по отношению к малым возмущениям. Требование устойчивости сильно сужает класс возможных стационарных состояний. Можно показать, что исследование устойчивости стационарных состояний в рамках диагонального гамильтониана разбивается на две независимые задачи: исследование *внутренней устойчивости* — по отношению к возмущению амплитуд и фаз уже имеющихся пар и *внешней* — по отношению к рождению новых пар.

Проще всего исследовать внешнюю устойчивость. Запишем для этого с помощью (18.2) уравнение для пары волн возмущения:

$$b_q, b_q^* \propto \exp(\nu_q t),$$

аналогичное (17.2). Максимальный по q инкремент ν_Ω (при фиксированном Ω) соответствует $2\tilde{\omega}_q = \omega_p$, т.е. лежит посередине между поверхностями (18.16). Он равен

$$\nu(\Omega) = \gamma(\Omega) + |P(\Omega)|.$$

Условие внешней устойчивости, $\nu(\Omega) \leq 0$, таким образом, может быть записано в виде

$$|P(\Omega)| \leq \gamma(\Omega). \quad (18.17)$$

С другой стороны, из (18.16) следует, что $|P_\Omega| \geq \gamma_\Omega$ для тех направлений Ω , в которых $n_{k\Omega} \neq 0$. Следовательно, для этих направлений оба неравенства совместимы лишь в случаях $|P(\Omega)| = \gamma_\Omega$, когда две поверхности (18.16) сливаются в одну:

$$2\tilde{\omega}(k_0) = \omega_p. \quad (18.18)$$

Таким образом, условие внешней устойчивости при заданном угловом распределении ПСВ полностью устраняет произвол в выборе поверхности, на которой $n_k \neq 0$. Ее мы будем называть *резонансной поверхностью*, а

стационарное состояние, обладающее внешней устойчивостью, *основным состоянием*.

Полученный результат имеет простой физический смысл. Как видно из (17.2), в линейном режиме наиболее сильно связаны с накачкой волны, для которых расстройка частоты равна нулю. Величина $\tilde{\omega}_k - \omega_p/2$ представляет собой расстройку частоты с учетом нелинейных членов. Если две поверхности (18.1), на которых $n(k) \neq 0$, не сливаются в одну, то пары СВ, значения k которых попадают в шаровой слой между этими поверхностями, оказываются более сильно связанными с накачкой, чем уже возбужденные СВ. В результате СВ в этом шаровом слое будут нарастать.

Надо сказать, что описанная здесь неоднозначность решения стационарных уравнений и устранение этого произвола (полное или частичное) с помощью условия устойчивости не является специфическим для S -теории, а является общим свойством приближения самосогласованного поля в теории нелинейных волн. Другой способ устранения отмеченной неоднозначности — несколько более сложный технически, но для многих более естественный — заключается во введении в S -теорию теплового шума с помощью замены в уравнении (18.6) для n_k слагаемого $-\gamma_k n_k$ на $-\gamma_k (n_k - n_k^0)$. Эта замена в отсутствие накачки (при $h = 0$) обеспечивает релаксацию n_k не к нулю, а к термодинамически равновесному значению $n_k^0 = T/\omega_k$. С другой стороны, при $hV_k > \gamma_k$ слагаемое $\gamma_k n_k^0$ обеспечивает развитие всех неустойчивостей и, как следствие, единственность стационарных решений (18.6). Более подробно этот вопрос будет исследован в гл. 10.

Интересно также в деталях выяснить, каким образом из теплового шума n_k^0 в процессе развития параметрической неустойчивости возникает когерентное по $|k|$ состояние СВ $n_k \propto \delta(k - k_0)$. Этот вопрос мы рассмотрим в гл. 6. Аналитически и с помощью ЭВМ мы покажем, в частности, что через некоторое время после включения накачки распределение волн по $|k|$ имеет гауссов вид, причем ширина распределения асимптотически стремится к нулю как $t^{-1/2}$.

18.4. Распределение пар на резонансной поверхности. Введем функцию распределения n_Ω — "число" пар на единицу телесного угла, определив ее так:

$$N = \sum_k n_k = \int n_\Omega d\Omega. \quad (18.19)$$

Стационарное уравнение для n_Ω и ψ_Ω , следующее из (18.9) и (18.18), перепишем в виде

$$[P_\Omega \exp(i\psi_\Omega) - i\gamma_\Omega] n_\Omega = 0, \quad P_\Omega = hV_\Omega + \int S_{\Omega\Omega'} n_{\Omega'} \exp(-i\psi_{\Omega'}) d\Omega'. \quad (18.20)$$

Эти уравнения еще не определяют однозначно распределение n_Ω и ψ_Ω , ибо произвольным образом можно задавать области на поверхности, в которых $n_\Omega = 0$. Требование внешней устойчивости по отношению к рождению новых пар на резонансной поверхности, как будет показано в следующем параграфе, значительно сокращает класс возможных решений, а в ряде случаев остается только одно устойчивое распределение.

Условию внешней устойчивости полезно придать следующую геометрическую интерпретацию. Выражения $\gamma = \gamma_\Omega$ и $P = P_\Omega$ являются уравнениями для поверхностей в k -пространстве. Условие (18.17) означает, что поверхность P_Ω заключена целиком внутри поверхности γ_Ω и касается ее в тех точках Ω , где сосредоточено решение. В силу соотношений $V_k = V_{-k}$ и $S_{kk'} = S_{k-k'}$ обе эти поверхности имеют центр симметрии. Касание поверхностей γ_Ω и P_Ω может происходить либо по дискретному набору точек, либо по континууму — линии или даже части поверхности. В первом случае в основном состоянии возбуждено конечное число монохроматических пар СВ, во втором — непрерывное распределение n_Ω . Возможен и промежуточный режим, когда поверхности касаются в изолированной паре точек и, кроме того, по некоторой линии. В этом случае в системе одновременно присутствуют монохроматическая пара и непрерывный фон. Заметим, что применимость S -теории при наличии небольшого числа дискретных пар требует специального обоснования, включающего исследование их устойчивости в рамках точного гамильтониана.

§ 19. Простейшие решения основных уравнений S -теории

19.1. Состояние с одной группой пар. Самое простое основное состояние в S -теории относится к сферически-симметричному случаю, реализующемуся, например, в АФМ (в пренебрежении исключительно малым магнитным дипольным взаимодействием). При $V_\Omega = V$, $\gamma_\Omega = \gamma$ и $S_{\Omega\Omega'} = S$ уравнения (18.20) имеют изотропное решение $n_\Omega = N/4\pi$, при котором

$$N = [(hV)^2 - \gamma^2]^{1/2}/S, \quad hV \sin \Psi = \gamma. \quad (19.1)$$

Такое же решение имеют эти уравнения, если $S_{\Omega\Omega'}$ зависит только от угла между k и k' . Тогда в формуле (19.1)

$$4\pi S = \int S_{\Omega\Omega'} d\Omega'. \quad (19.2)$$

Большой интерес представляет также аксиально-симметричный случай, который реализуется в изотропном и кубическом ФМ, намагниченном вдоль оси [111] или [100]. При этом коэффициент связи с накачкой определяется формулой (14.21), а коэффициенты, описывающие взаимодействие, имеют вид

$$S_{\Omega\Omega'} = S(\theta, \theta', \varphi - \varphi'), \quad T_{\Omega\Omega'} = T(\theta, \theta', \varphi - \varphi'). \quad (19.3)$$

Из уравнений для n_k ясно, что величина $P_k^* \sigma_k$ также не зависит от φ . Учитывая выражения (14.21) для V_k , получим

$$\psi_\Omega = \psi_{\theta, \varphi} = \psi_\theta + 2\varphi.$$

Эти соотношения позволяют исключить зависимость от угла в уравнении (18.20) и записать его в виде

$$P_x \exp(i\psi_x - i\gamma_x) n_x = 0, \quad 2\pi n_x = n_\Omega, \quad x = \cos \theta,$$

$$P_x = P_\Omega \exp(-2i\varphi) = hV_x + \int S_{xx'} n_{x'} \exp(-i\psi_{x'}) dx',$$

$$2\pi S_{xx'} = \int_0^{2\pi} S(x, x', \varphi - \varphi') \exp[2i(\varphi - \varphi')] d(\varphi - \varphi').$$

Покажем, что это уравнение можно дополнительно упростить с помощью следующей подстановки, после которой коэффициент связи с накачкой не будет зависеть от $x = \cos \theta$:

$$\begin{aligned} N_x &= n_x |f_x|, & f_x &= V_x / |V_1|, & V_1 &= V(\pi/2), \\ \tilde{P}_x &= P_x / f_x, & \Gamma_x &= \gamma_x / |f_x|, \\ \tilde{S}_{x,x'} &= S_{x,x'} / f_x f_{x'}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

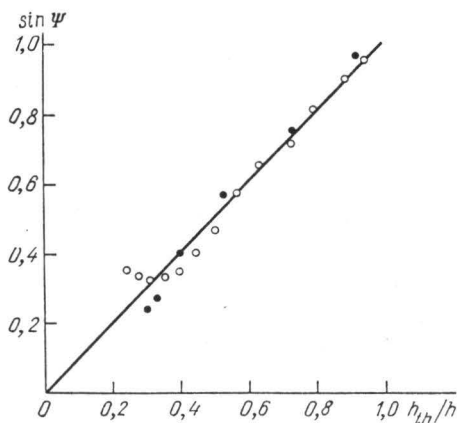
Для величин N_x , Ψ_x уравнения движения сохраняют вид (19.4) с заменой $\gamma \rightarrow \Gamma$, $P \rightarrow \tilde{P}$, причем в выражении для $\tilde{P}$ коэффициент связи с накачкой оказывается постоянным:

$$\begin{aligned} [\tilde{P}_x \exp(i\Psi_x) - i\Gamma_x] N_x &= 0, \\ \tilde{P}_x &= hV_1 + \int \tilde{S}_{xx'} N_{x'} \exp(-i\Psi_{x'}) dx'. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Для решения вопроса о распределении N_x при малом превышении над порогом параметрического возбуждения, т.е. при малой надкритичности, воспользуемся приведенным выше геометрическим толкованием условия внешней устойчивости (18.17). При весьма малой надкритичности, когда амплитуды малы, линия $|\tilde{P}_x|$ мало отличается от прямой $hV = \text{const}$. Мала также и кривизна линии $|\tilde{P}_x|$. Отсюда ясно, что линии $|\tilde{P}_x|$ и Γ_x соприкасаются друг с другом только в точке $x = 0$. Это означает, что при малой надкритичности распределение N_x отлично от нуля только при $x = 0$, причем для интегральной амплитуды N_1 и фазы Ψ_1 из (19.5) легко получить:

$$\begin{aligned} N_x &= N_1 \delta(x), & N_1 &= [(hV)^2 - \Gamma_1^2]^{1/2} / S_{11}, \\ \sin \Psi_1 &= \Gamma_1 / hV_1, \\ \Gamma_1 &= \gamma_1 = \gamma(x), \\ S_{11} &= \tilde{S}_{xx} = S_{xx} \quad \text{при} \quad x = x_1 = 0. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Важным свойством полученных решений является то, что значение фазы пар $\Psi = \varphi_k + \varphi_{-k} - \varphi_p$ (φ_p — фаза накачки, которая обычно выбирается равной нулю) отличается от значения $\Psi = \pi/2$, при котором поток энергии



Р и с. 19.1. Зависимость стационарной фазы Ψ от величины СВЧ поля h_{th}/h . Результаты эксперимента, проведенного Прозоровой и Смирновым (1974) на монокристаллах при гелиевых температурах — • и Мелковым и Круценко (1977) на ЖИГ при комнатной температуре — ○. Сплошная прямая — предсказание S-теории

от внешней накачки (17.5) максимален. Условие $hV \sin \Psi = \Gamma$ описывает баланс энергии, характерный для фазового механизма ограничения. Этот принципиально важный вывод S -теории был подтвержден в прямых экспериментах по измерению фазы пар Ψ при параметрическом возбуждении СВ в АФМ ЛП MnCO_3 и в ФМ в ЖИГе Л.А. Прозоровой и А.И. Смирновым ([200]) и затем Г.А. Мелковым и И.В. Круценко [177] в ФМ ЖИГ (рис. 19.1). Видно, что в пределах ошибки эксперимента точки ложатся на биссектрису координатного угла, как это следует из формул (19.1) для АФМ и (19.5) для ФМ. Это свидетельствует о том, что S -теория правильно описывает существенные черты запорогового поведения ПСВ. Отклонение данных для ЖИГа при надкритичности более 10 дБ ($h > 3h_{\text{th}}$) от простой формулы (19.6) связано с возбуждением второй группы пар с $\theta = \pi/2$. Это явление опишем в следующем пункте.

19.2. Порог рождения второй группы волн. Займемся исследованием распределения ПСВ n_Ω по резонансной поверхности при увеличении амплитуды внешнего поля h . Отметим вначале, что использованные в § 18.4 геометрические рассуждения легко обобщаются на случай произвольной зависимости $V(\Omega)$. Можно доказать [96] общую теорему о том, что при достаточно малой надкритичности n_Ω отлично от нуля только в тех точках резонансной поверхности, где $|V(\Omega)|$ максимально. Для сферической симметрии это точки всей поверхности, при аксиальной симметрии — точки одной ($\theta = \pi/2$) или двух линий. В случае более низкой симметрии это одна или несколько эквивалентных пар точек. Интересно, что интегральная амплитуда мало чувствительна к степени симметрии задачи. Она определяется формулой (19.6), в которой $V_1 = \max |V(\Omega)|$, а S_{11} есть среднее значение $S(\Omega, \Omega')$ на множестве точек, где $n_\Omega \neq 0$.

Возвращаясь к случаю аксиальной симметрии, покажем, что функция распределения пар (19.6), сосредоточенная на экваторе, сохраняет устойчивость по отношению к рождению пар на других широтах вплоть до достаточно большой надкритичности. Рассмотрим для этого функцию $|\tilde{P}_x|$. Из (19.4)–(19.6) получим

$$|P_x|^2 = N_1^2 (S_{11} - \tilde{S}_{x1})^2 + \Gamma_1^2. \quad (19.7)$$

Ясно, что состояние (19.6) будет устойчивым до тех пор, пока $|\tilde{P}_x| < \Gamma_x$ для всех x , кроме $x = x_1 = 0$. Второй порог $p_2 = h_2/h_{\text{th}}$ соответствует минимальному значению p , при котором происходит касание линий $|P_x|$ и Γ_x при некотором $x = x_2 \neq x_1$. Значение p_2 определяется из условия $p_2 = \min p(x)$, где

$$p(x) = 1 + S_{11}^2 [\Gamma_x^2 - \Gamma_1^2] / \Gamma_1^2 (\tilde{S}_{1x} - S_{11})^2. \quad (19.8)$$

При простейших предположениях $\gamma_x = \gamma$ и $S_{x1} = S_{11}$ получаем, что $p_2 = 2$ при $x_2 = 1$. В действительности же для кубических ФМ реальная функция S_{x1} сильно отличается от константы, что приводит как правило, к значительному увеличению второго порога.

Изучим вид функции $S_{xx'}$ в кубических ФМ. Из определения функции $S_{k,k'}$ (18.1) и формул (19.4) и (19.5) следует, что $S_{xx'}$ должна быть четной функцией каждого аргумента:

$$S_{xx'} \equiv S(x, x') = S(x, -x) = S(-x, x') = S(-x, -x'),$$

а ее реальная часть $\text{Re } S_{xx'}$ симметрична относительно перестановки x, x' . Конкретные вычисления показывают, что $\text{Im } S_{xx'} = 0$. Поэтому

$$\text{Re } S_{xx'} = S_{xx'} = S_{x'x}.$$

Из аксиальной симметрии задачи (вокруг направления намагниченности) следует, что $S(\theta, \theta', \varphi - \varphi')$ не зависит от $(\varphi - \varphi')$, если $\theta = 0$ или $\theta' = 0$. Поэтому интеграл в (19.4) должен обращаться в нуль, если $x \rightarrow 1$, либо $x' \rightarrow 1$ и соответственно $\tilde{S}_{xx'}$ остается конечной при $x, x' \rightarrow 1$, несмотря на сингулярный множитель $f(x) = 1 - x^2$ в (19.5). Итак $\tilde{S}_{1x} = \tilde{S}_{x1}$ — конечно.

При выяснении поведения $\tilde{S}_{xx'}$ при малых x, x' будем опираться на явный вид формул (6.26), (6.29) для $S_{k,k'}$. В этих формулах есть слагаемые, пропорциональные $\cos^2 \theta_{k+k'}$ и $\cos^2 \theta_{k-k'}$. После интегрирования по φ в соответствии с (19.4) каждое из них дает неаналитический вклад в $\tilde{S}_x$, пропорциональный степеням $|x \pm x'|$. С учетом этого обстоятельства и обсужденных выше свойств симметрии (19.9) разложение $\tilde{S}_{xx'}$ при малых x и x' с точностью до членов $\propto x^2$ примет вид

$$\tilde{S}_{xx'} = S[1 + \frac{1}{2}a(|x + x'| + |x - x'|) + b(x^2 + x'^2)]. \quad (19.9)$$

Вычисления по формулам (6.26), (6.29) с помощью ЭВМ для ЖИГ при комнатной температуре показывают, что в интервале магнитных полей $H_C - H$ от 100 Э до 500 Э коэффициент a изменяется в пределах от 2,6 до 2,1, а коэффициент b от $-1,8$ до $1,3$, обращаясь в нуль при $H_C = H + 180$ Э.

Возвращаясь к анализу выражения (19.8) для $p(x)$, отметим, что в предположении аналитичности функции $S_{xx'}$ (т.е., при $a = 0$ в (19.11)) и при $\gamma_x = \text{const}$ минимум $p(x)$ реализуется при $x = x_2$

$$x_2^2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \approx 0,38, \quad p_2 = 1 + 11b^{-2}.$$

Это значение p_2 существенно больше величины $p_2 = 2$, полученной в простейшем предположении $S_{xx'} = \text{const}$. Однако предположение аналитичности $S_{xx'}$, приводящее к $a = 0$ также далеко от действительности. При $a \neq 0$, $b \neq 0$ и учете зависимости $\gamma(x)$ анализ выражения (19.8) для второго порога существенно затрудняется. Поэтому здесь мы ограничимся случаем малых b , когда x_2 мало и можно разложить выражение (19.8) для $p(x)$ в ряд:

$$p(x) = p(0) + |x| p' + \frac{1}{2} x^2 p, \quad (19.10)$$

$$p(0) = 1 + \Gamma''/a^2 \Gamma, \quad p' = -b\Gamma''/a^3 \Gamma,$$

$$p'' = \frac{3\Gamma''^2 + \Gamma\Gamma^{(4)}}{6a^2\Gamma^2} - \frac{2\Gamma''b^2}{\Gamma a^4}. \quad (19.11)$$

Здесь Γ'' и $\Gamma^{(4)}$ — вторая и четвертая производные Γ_x при $x = x_1 = 0$. Видно, что неаналитичность $\tilde{S}_{xx'}$ ($a \neq 0$) приводит к тому, что $p(0)$ — конечно. Случай, когда при $x = 0$ реализуется минимум функции $p(x)$ мы рассмотрим в следующем разделе, а здесь будем считать, что $p' \leq 0$. Этот случай

реализуется в ЖИГе при $H > H_C + 180$ Э. Из (19.10) видно, что при малых b

$$|x_2| = -p'/p'', \quad p_2 = p(0) - 2p'^2/p''. \quad (19.12)$$

Конкретный численный анализ для ЖИГа при комнатной температуре дает значения x_2 и p_2 , приведенные в таблице

$(H_C - H), \text{ Э}$	200	300	400	500
x_2	0,05	0,1	0,25	0,5
p_2	4,6	5,0	5,3	5,6

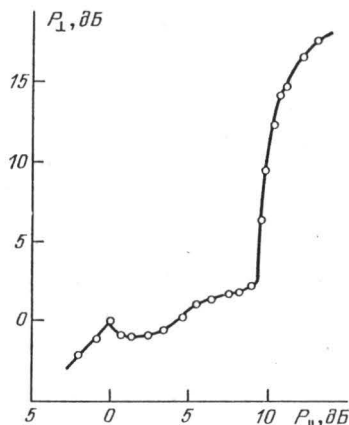
Необходимо отметить, что гораздо более важным, чем вычисление конкретных числовых значений p_2 и x_2 , является доказательство самого факта последовательного, поэтапного возбуждения сингулярных в k -пространстве пакетов волн. Этот качественный вывод S -теории был подтвержден в прямом эксперименте по наблюдению второго порога в ЖИГе (В.В. Зауткин и др., 1971 г. [84]). Он заключался в следующем. Образец ЖИГ помещался в резонатор с двумя вырожденными ортогональными модами, магнитное поле которых $\mathbf{h}$ и $\tilde{\mathbf{h}}$ было соответственно параллельно и перпендикулярно намагниченности $\mathbf{M}$. Параллельный канал использовался для параметрического возбуждения СВ, ортогональный ему канал — для регистрации излучения образца на частоте накачки. Наблюдалось (рис. 19.2) резкое увеличение мощности излучения в перпендикулярный канал при надкритичности 8–12 дБ в зависимости от величины постоянного магнитного поля, ориентации и формы образца. Мода резонатора с поляризацией $\tilde{\mathbf{h}} \perp \mathbf{M}$ возбуждается ОП намагниченности, которая в свою очередь "раскручивается" ПСВ. Этот процесс описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_k [U_k^* b_0^* b_k b_{-k} + \text{к.с.}], \quad (19.13)$$

в котором $U_k = U \sin 2\theta \exp i\varphi$. Отсюда для излучения в поперечный канал можно получить выражение

$$P_{\perp} \propto |\sum_k U_k b_k b_{-k}|^2, \quad (19.14)$$

которое обращается в нуль для $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Зависимость $P_{\perp}(h)$, приведенная на рис. 19.2, таким образом убедительно свидетельствует о том, что в интервале 0–9 дБ возбуждены только пары с $\theta = \pi/2$. Излучение $P_{\perp}$, возникающее при большой надкритичности, естественно связать с возбуждением второй группы пар с $\theta = \pi/2$. В более позднем эксперименте И.В. Круценко и Г.А. Мелкова [177] удалось не только зарегистрировать "второй порог" (в их условиях он оказался равным 14 дБ), но и определить угол рас-



Р и с. 19.2. Зависимость мощности излучения в перпендикулярный канал от мощности накачки для сферы ЖИГ: $H = 1600$ Э и направлено параллельно оси [100]

пространения второй группы пар $\theta_2 \approx 45^\circ$, значение которого хорошо совпадает с теоретическим предсказанием.

19.3. Промежуточный порог. В этом разделе [171] мы покажем, что при увеличении надкритичности вместо рождения второй группы пар может произойти совсем другая перестройка функции распределения ПСВ на резонансной поверхности. Именно, при некотором $p = p_c$ (эта величина надкритичности названа *промежуточным порогом*) возникает регулярная часть в N_x вблизи экватора: $N_x \neq 0$ в интервале $|x| \leq \delta$, причем ширина этого распределения δ равна нулю при $p = p_c$ и далее увеличивается с ростом надкритичности.

Для вычисления p_c рассмотрим зависимость (19.7) для самосогласованной накачки

$$|\tilde{P}(x)|^2 = \Gamma^2 \{1 + x^2 [a^2 + 2ab|x| + b^2 x^2] (p - 1)\} \quad (19.15)$$

и сравним ее с зависимостью $\Gamma^2(x)$:

$$\Gamma^2(x) = \Gamma^2 + \Gamma \Gamma'' x^2 + \frac{(3\Gamma''^2 + \Gamma \Gamma^{(4)}) x^4}{12}. \quad (19.16)$$

Видим, что при $p = p(0)$, определенном формулой (19.11), коэффициенты при x^2 у этих зависимостей сравниваются: в точке $x = 0$ происходит касание второго порядка линий $|\tilde{P}(x)|^2$ и $\Gamma^2(x)$ — совпадают значения этих функций, их первых и вторых производных. Если же $p > p(0)$, возникает область неустойчивости $|x| \leq \delta_1$, в которой

$$|\tilde{P}(x)| > \Gamma(x).$$

Граница области неустойчивости $\delta_1(p)$ определяется из сравнения (19.15) и (19.16)

$$p - p(0) = \frac{2b(p-1)|\delta_1|}{a\Gamma^2} + \left[\frac{b^2(p-1)}{a^2} - \frac{2\Gamma''^2 + \Gamma \Gamma^{(4)}}{12\Gamma^2} \right] \delta_1^2. \quad (19.17)$$

Поскольку δ_1 имеет малость $p - p(0)$, то в правой части (19.17) можно заменить p на $p(0)$. Тогда (19.17) можно представить в виде, похожем на (19.10):

$$p - p(0) = p' \delta_1 + \frac{1}{2} p'' \delta_1^2. \quad (19.18)$$

Отсюда видно, что при $p' > 0$ область неустойчивости δ_1 ограничена, причем

$$\delta_1 \propto [p - p(0)].$$

Если $p' = 0$, то для ограниченности δ_1 необходимо $p'' > 0$ и тогда

$$\delta_1 \propto [p - p(0)]^{1/2}.$$

В работе В.С. Львова, Е.В. Подивилова [171] показано, что развитие этой неустойчивости приводит к появлению регулярной части в функции распределения ПСВ с шириной по x , равной $\delta(p)$, причем при малой надкритичности над промежуточным порогом $p_c = p(0)$ зависимость $\delta(p)$ можно определить из уравнения, похожего на (19.5):

$$p - p(0) = 6[p'|\delta| + \frac{1}{2} p'' \delta^2]. \quad (19.19)$$

Можно также показать, что существенная перестройка функции распределения ПСВ выше промежуточного порога (то есть при $p > p(0)$) очень мало влияет на интегральные характеристики системы ПСВ, такие как χ' , χ'' , N и т.д.

19.4. Особенности поведения ПВ в случае комплексных коэффициентов S и V . Переходя к изучению этого случая, напомним, что без уменьшения общности можно считать, что $V(\Omega) = \text{const}$ и вещественно. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести замену типа (19.4). Мнимая часть $S(\Omega, \Omega')$ приводит к изменению выражения (19.7):

$$|\tilde{P}_x|^2 = N_1(S_{11} - \tilde{S}'_{1x})^2 + (\Gamma_1 - N_1\tilde{S}''_{1x})^2. \quad (19.20)$$

Местоположение первой пары определяется из условия

$$\frac{\partial}{\partial x} (|P_x| - \Gamma_x) = 0,$$

которое дает

$$\frac{N_1 \partial \tilde{S}''_{1x}}{\partial x} = \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x}, \quad (19.21)$$

так что в отличие от предыдущего $\partial \Gamma_x / \partial x = 0$ только в пороговой точке. В дальнейшем возникает "уход" пары Δx , пропорциональный N_1 ($\Delta x = x - x_1$ при $p = 0$). Этот уход из точки x_1 вызывает дополнительное ослабление взаимодействия СВ с накачкой и служит еще одной, кроме фазового рассогласования, причиной ограничения амплитуды пары. Решая совместно (18.20) с (19.21), получим при малых N_1 :

$$N_1^2 = [h^2 V_1^2 - \Gamma^2] \left[S_{11}^2 + \frac{(\partial \tilde{S}'' / \partial x)^2 h^2 V_1^2}{(\partial \Gamma_x / \partial x)^2} \right]^{-1}. \quad (19.22)$$

Сравнивая этот результат с (19.1), видим, что "уход" приводит к появлению дополнительного слагаемого в знаменателе, вообще говоря, того же порядка величины.

Нужно сказать, что при возбуждении СВ методом параллельной накачки первая группа пар возникает в симметричном месте резонансной поверхности — на ее экваторе. С ростом надкритичности пары не уходят с экватора, так как "не знают", куда им уходить: на север или на юг. Формально это проявляется в том, что в (19.21)

$$\frac{d}{d\theta} (\text{Im } S_{\theta, \pi/2}) = 0$$

при $\theta = \pi/2$. Иное дело при возбуждении СВ методом поперечной накачки, когда первая группа пар возбуждается при $\theta = \theta_1$ и $\pi - \theta_1$, $\theta_1 = \pi/4$ и их уход к экватору или полюсам вполне возможен. Применительно к конкретной ситуации никто не изучал зависимость местоположения пар от надкритичности — ни экспериментально, ни теоретически. В этом же пункте — в порядке развития общей теории — мы только отмечаем такую возможность.

§ 20. Основное состояние системы параметрических волн при большой надкритичности

Поведение системы ПВ с непрерывным распределением проще всего описать в предельном случае очень большой накачки ($hV \gg \gamma$). В нулевом приближении по параметру $\xi = \gamma/hV$ будет $P_\Omega = 0$, откуда согласно (18.20) при вещественном $S_{\Omega\Omega'}$ следует

$$hV_\Omega + \int S_{\Omega\Omega'} X_{\Omega'} d\Omega' = 0, \quad X = N_\Omega \cos \Psi_\Omega, \quad (20.1)$$

$$\int S_{\Omega\Omega'} Y_{\Omega'} d\Omega' = 0, \quad Y_\Omega = N_\Omega \sin \Psi_\Omega. \quad (20.2)$$

Задача, таким образом, сводится к решению линейных уравнений Фредгольма первого рода. Для простоты будем предполагать, что среда в отсутствие накачки является изотропной, т.е. V_Ω зависит от полярного угла θ , а $S_{\Omega\Omega'}$ зависит только от угла между направлениями Ω и Ω' . Тогда, разлагая все функции в (20.1), (20.2) по полиномам Лежандра и воспользовавшись теоремой сложения для $P_n(\cos \alpha)$, получим после элементарного интегрирования по θ' и φ' формальное решение

$$4\pi X_\theta = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) hV_n P_n(\cos \theta) / S_n, \quad (20.3)$$

$$S(\cos \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_n(\cos \alpha).$$

При общем исследовании решений уравнений (20.1), (20.2) возможны следующие три случая:

1. Уравнения (20.2) имеют нетривиальные решения, не ортогональные V_Ω . Тогда уравнение (20.1) не имеет решений, теория, исходящая из диагонального гамильтониана, не дает ограничения амплитуды. Этот случай мы будем называть *сингулярным*. Для изотропной модели сингулярный случай осуществляется, когда хотя бы при одном j будет $S_j = 0$, а $V_j \neq 0$. В § 19 было показано, что при $V \neq \text{const}$ и не слишком большой надкритичности решение в виде одной или нескольких пар существует и в сингулярном случае. Таким образом, имеется некоторая критическая амплитуда накачки h_c , при достижении которой происходит "срыв" стационарного состояния и выше нее ограничение происходит уже за счет более слабых нелинейных механизмов. Из формулы (20.3) следует, что в наиболее сингулярном случае, когда $S_0 = 0$, а $V = \text{const}$, ограничения амплитуды нет ни при каких превышениях над порогом, т.е. $h_c = h_1$. В менее сингулярных случаях $h_c > h_1$.

Рассмотрим подробнее случай, когда $S = \text{const}$, а V_θ изменяется монотонно от V_1 до V_2 . В этом случае поверхность P_θ имеет не более двух максимумов. Поэтому в стационарном состоянии может быть не более двух пар. Решая уравнение (19.20), получим следующее выражение для суммарной амплитуды:

$$N_1 + N_2 = \frac{\gamma}{S} \frac{h(V_1 + V_2)}{[4\gamma^2 - h^2(V_1 - V_2)^2]^{1/2}}.$$

Отсюда видно, что

$$h_c = 2\gamma/(V_1 - V_2) \quad \text{при} \quad S = \text{const}.$$

2. Уравнения (20.2) имеют нетривиальные решения, ортогональные V_Ω . Тогда для уравнения (20.1) имеют решения, определенные с точностью до решений уравнения (20.2), и теория, исходящая из диагонального гамильтониана, не определяет стационарное состояние однозначно. Этот случай мы будем называть *неопределенным*. Для изотропной модели неопределенный случай осуществляется, когда хотя бы при одном $n = j$ будет $S_j = 0$ и $V_j = 0$. Так же, как и в сингулярном случае, если $V \neq \text{const}$, при малых превышениях над порогом существует однозначное решение в виде одной пары. Следовательно, имеется некоторая критическая амплитуда накачки h_u , выше которой стационарное состояние теряет определенность. Решение обладает различной степенью произвола в зависимости от числа гармоник, для которых $S_j = V_j = 0$. В наиболее неопределенном случае $S = \text{const}$, $V = \text{const}$ величина $h_u = h_1$ и допустимы любые распределения, удовлетворяющие следующему условию, совпадающему с (19.1):

$$\int N_\Omega d\Omega = (h^2 V^2 - \gamma^2)^{1/2} / |S|. \quad (20.4)$$

3. Уравнение (20.2) не имеет нетривиальных решений. Этот случай мы будем называть *регулярным*. В регулярном случае все $S_n \neq 0$. Тогда уравнение (20.1) имеет единственное решение (20.3), которое, однако, имеет физический смысл лишь при некоторых ограничениях. Прежде всего необходима достаточно быстрая сходимость последовательности V_n/S_n к нулю при $n \rightarrow 0$. Это условие, однако, не является достаточным. В самом деле, учтем конечность затухания γ в уравнениях (20.1), (20.2). Для этого воспользуемся уравнениями (18.20):

$$-\gamma \sin \psi_\Omega = h V_\Omega + \int S_{\Omega\Omega'} N_{\Omega'} \cos \psi_{\Omega'} d\Omega',$$

$$-\gamma \cos \psi_\Omega = \int S_{\Omega\Omega'} N_{\Omega'} \sin \psi_{\Omega'} d\Omega'$$

для изотропной модели, линеаризуя которые на "фоне" решения (20.3), получим

$$-\gamma \delta \psi_\Omega = \int S(\cos \alpha) \delta N(\Omega') d\Omega', \quad (20.5)$$

$$-\gamma = \int S(\cos \alpha) N(\Omega') \delta \Psi_{\Omega'} d\Omega'.$$

Отсюда

$$\delta \psi_\Omega = -\frac{\gamma}{4\pi S_0 N_\Omega}, \quad \delta N_m = -\gamma \frac{2m+1}{4\pi S_m} \delta \psi_m.$$

Поэтому для существования области применимости решений (20.3) требуется, чтобы распределение N_Ω никогда не обращалось в нуль. Напомним, что при $V = \text{const}$ можно получить точное решение уравнений с затуханием при любом превышении над порогом. Это решение имеет вид (20.4). В регулярном случае, кроме того, $N = \text{const}$, т.е. $N_\Omega = N/4\pi$.

Качественный вывод из всего сказанного заключается в том, что распределение пар N_Ω при больших h чрезвычайно чувствительно к тонкой структуре функций V_Ω и $S_{\Omega\Omega'}$: в одних случаях устанавливается непрерывное распределение пар по резонансной поверхности, в других — срыв ограничения и возникновение существенно нестационарной картины.

§ 21. Нелинейные восприимчивости: методы измерения и сравнение теории с экспериментом

21.1. Определение восприимчивостей для ПСВ. Наиболее распространенный метод экспериментального изучения параметрического возбуждения СВ основывается на поглощении волнами энергии накачки. Определим высокочастотную нелинейную восприимчивость ферромагнетика обычным образом: $M_z(\omega_p) = \chi h$, $\chi = \chi' + i\chi''$. Мнимая часть восприимчивости определяет величину поглощенной мощности

$$W = \frac{1}{2} \omega_p \chi'' h^2.$$

Применяя формулу (17.4) для потока энергии, втекающей в образец из окружающего поля накачки, получим

$$\chi'' = (2/h) \sum_k |V_k b_k^2| \sin(\tilde{\psi}_k - \psi_k). \quad (21.1)$$

Аналогичное выражение получается для вещественной части.

$$\chi' = -(2/h) \sum_k |V_k b_k^2| \cos(\tilde{\psi}_k - \psi_k). \quad (21.2)$$

Поведение восприимчивостей χ' и χ'' за порогом существенно зависит от механизма ограничения амплитуды. Так, для механизма нелинейного затухания из (17.8) следует

$$\chi' = 0, \quad \chi'' = \frac{2V^2}{\eta} \frac{h - h_1}{h}, \quad (21.3)$$

а для фазового механизма ограничения из (21.1), (21.2) и (19.1)

$$\chi' = \frac{2V^2}{S} \frac{h^2 - h_1^2}{h^2}, \quad \chi'' = \frac{2V^2}{S} \frac{h_1(h^2 - h_1^2)^{1/2}}{h^2}. \quad (21.4)$$

На рис. 21.1 видно, что принципиальное различие диссипативного и фазового механизмов проявляется в поведении величины $\chi':\chi'' = 0$ для диссипативного и $\chi' \approx \chi''$ для фазового механизмов. Экспериментальные результаты, которые мы подробно обсудим в п. 21.3, показывают, что вещественная восприимчивость χ' отлична от нуля и может быть порядка или даже больше, чем χ'' . Эти факты также говорят в пользу фазового механизма ограничения.

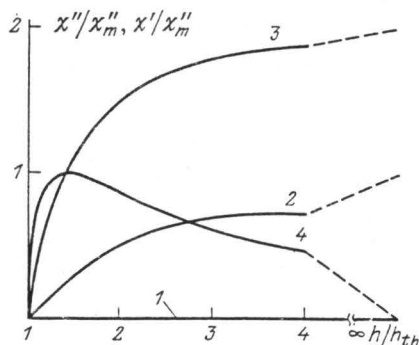


Рис. 21.1. Зависимости нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' от амплитуды накачки h : 1 и 2 — χ' и χ'' для механизма нелинейного затухания; 3 и 4 — χ'' и χ' для фазового механизма ограничения

21.2. Методика измерения магнитной восприимчивости. В СВЧ диапазоне обычно используют реакцию высокодобротного электромагнитного резонатора на изменение состояния находящегося в нем образца. Возникающее при этом изменение добротности резонатора определяет мнимую часть восприимчивости χ'' , а изменение собственной частоты — вещественную часть χ' . По сравнению со стандартной методикой, применяемой в опытах по магнитному резонансу, методика измерений нелинейных восприимчивостей при параллельной накачке имеет ряд специфических особенностей: импульсный режим СВЧ генератора, широкая область полей, в которых наблюдается поглощение энергии, зависимость χ' и χ'' от мощности накачки. Последнее приводит к тому, что мощность генератора не является хорошей мерой амплитуды поля накачки. Поле в резонаторе удобнее определять по мощности на выходе резонатора. Это позволяет автоматически учесть эффект обратного влияния СВ на накачку, который является существенным вблизи порога даже при малом коэффициенте заполнения резонатора.

Типичная схема экспериментальной установки, применяемой для изучения явления параллельной накачки, показана на рис. 21.2. Принцип действия заключается в следующем. Невозмущенный резонатор (до порога параметрического возбуждения) обычно согласовывается с волноводным трактом таким образом, чтобы коэффициент отражения от резонатора был близким к нулю. При возбуждении СВ ухудшается нагруженная добротность резонатора Q_H и изменяется его собственная частота ω_0 , что приводит к появлению отраженного сигнала, по которому можно судить о величине χ' и χ'' . Величина χ'' связана с коэффициентом отражения следующей формулой:

$$\chi'' = \frac{1}{AQ_H} \frac{|\Gamma|_{\omega = \omega_0}}{1 - |\Gamma|_{\omega = \omega_0}},$$

где $A = 2\pi \int_{\text{обр}} h^2 dr / \int_{\text{рез}} h^2 dr$ — коэффициент заполнения резонатора. Для настройки в резонанс ($\omega = \omega_0$) производится небольшое изменение частоты

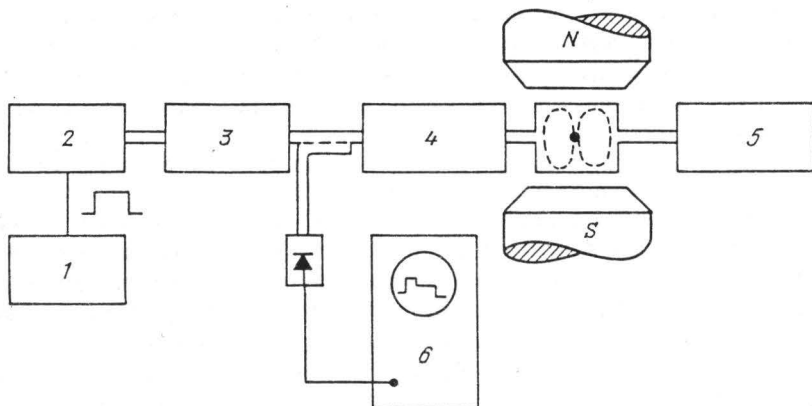


Рис. 21.2. Схема экспериментальной установки для параметрического возбуждения спиновых волн: 1 — модулятор; 2 — магнетрон; 3 — аттенюатор; 4 — согласователь; 5 — измеритель мощности; 6 — осциллограф

генератора (или собственной частоты резонатора) по минимуму коэффициента отражения, величина этого изменения $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ непосредственно определяет вещественную восприимчивость. По ряду причин, главной из которых является неточность в определении коэффициента A , погрешность измерений абсолютных величин χ' и χ'' обычно порядка 20–40 %.

Г.А. Мелковым и И.В. Круценко [177] была предложена более совершенная методика измерения восприимчивости, позволяющая уменьшить относительную погрешность измерения χ' и χ'' до нескольких процентов. Ее идея заключается в измерении реакции резонатора на возбуждение ПСВ не по изменению отражения от него СВЧ излучения, как в традиционной методике, а путем сравнения прошедшего через него излучения с опорным сигналом. При $h < h_{th}$ сигнал рассогласования полностью компенсируется с помощью фазовращателя и аттенюатора (поглотителя), включенных в канал опорного сигнала. После возбуждения ПСВ при $h > h_{th}$ компенсация производится вторично.

21.3. Сопоставление S -теории с экспериментом по нелинейным восприимчивостям. В интересующем нас случае аксиальной симметрии нелинейные восприимчивости, определенные формулами (21.1), (21.2), можно представить в виде

$$\begin{aligned}\chi' &= \frac{2}{h} \sum_{\theta} V_{\theta} N_{\theta} \cos \psi_{\theta} = \frac{2}{h^2} \sum_{\theta, \theta'} S_{\theta\theta'} N_{\theta'} N_{\theta} \cos(\psi_{\theta} - \psi_{\theta'}), \\ \chi'' &= \frac{2}{h} \sum_{\theta} V_{\theta} N_{\theta} \sin \psi_{\theta} = \frac{2}{h^2} \sum_{\theta} \gamma_{\theta} N_{\theta}.\end{aligned}\tag{21.5}$$

Видно, что мнимая часть восприимчивости χ'' характеризует только интегральную интенсивность пар, в то время как вещественная часть χ' существенно зависит от фазовых соотношений между парами. Поэтому величина χ' является более тонкой характеристикой системы, чувствительной к деталям распределения пар в пространстве, автоколебаниям, неоднородностям и т.п. С этим обстоятельством в значительной мере связан большой разброс экспериментальных значений χ' , имеющих у различных авторов. Так, например, в одной из ранних работ Т.С. Хартвика и др. [222] сообщалось, что в ЖИГ отношение $\chi'/\chi'' = 0,1$ и слабо зависит от магнитного поля. Малость этого отношения явилась причиной, на основании которой в качестве механизма ограничения предлагались различные варианты нелинейного затухания, приводящие к $\chi' = 0$ (Е. Шлеманн, [235], П. Готтлиб и Х. Сул, [69]). Картина поведения СВ за порогом параметрического возбуждения, описанная в монографии А.Я. Моносова [17], и в частности механизм "автоподавления" амплитуды, также существенным образом исходит из предположения, что $\chi' \ll \chi''$. Однако последующее тщательное изучение поведения χ' и χ'' в различных экспериментальных ситуациях показало, что в совершенных монокристаллах в отсутствие автоколебаний величина χ' не мала и может даже превосходить величину χ'' .

На рис. 21.3 показаны характерные зависимости $\chi'(h^2)$ и $\chi''(h^2)$ для сферы ЖИГ в трех основных кристаллографических направлениях: в направлении [100], когда отсутствуют автоколебания намагниченности, и в направлениях [111] и [110], когда наблюдаются интенсивные автоколебания. Видно, что автоколебания намагниченности, не влияя существенно

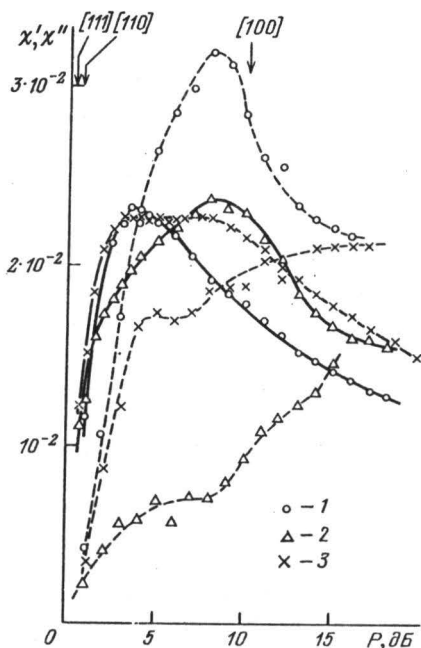


Рис. 21.3. Экспериментальные зависимости вещественной χ' (штриховая кривая) и мнимой χ'' (сплошная кривая) частей продольной восприимчивости от мощности накачки для сферы ЖИГ: 1 — ориентация [100]; 2 — ориентация [111]; 3 — ориентация [110]. Стрелками обозначены пороги возбуждения автоколебаний

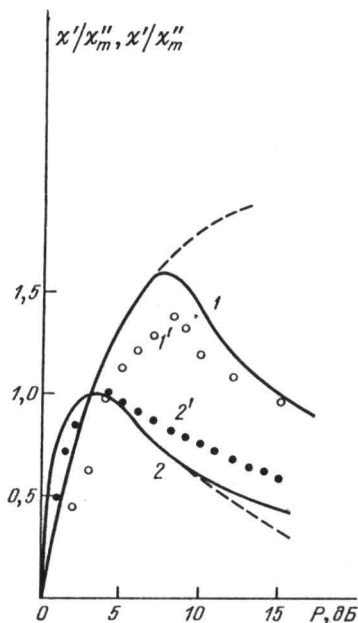


Рис. 21.4. Зависимость восприимчивости χ' и χ'' от мощности накачки. Сплошные линии — результат численного расчета, штриховая линия — восприимчивости в модели одной группы пар. Точки — результат эксперимента для сферы ЖИГ, $H = H_c - 100$ Э, $M \parallel [100]$: 1, 1' — χ' ; 2, 2' — χ''

на величину χ'' , могут уменьшить величину χ' в несколько раз. Это можно объяснить следующим образом: при больших превышениях над порогом неустойчивости

$$\sin \psi = h_1/h \ll 1,$$

$$|\cos \psi| \approx 1 - \frac{1}{2}(h_1/h)^2,$$

т.е. косинус фазового сдвига пар по отношению к накачке, определяющей величину χ' , близок к своему экстремальному значению. Развитие автомодуляций, приводящих к периодическому изменению угла ψ , не меняя среднего значения $\sin \psi$, уменьшает среднее значение $\cos \psi$ и вместе с ним восприимчивость χ' .

То, что $\chi' \approx \chi''$, однозначно свидетельствует о наличии существенного фазового рассогласования между накачкой и парами СВ, которое следует из S -теории. Сравнение ее выводов с экспериментальными зависимостями $\chi'(h)$ и $\chi''(h)$ существенно облегчается при малой надкритичности ($h \lesssim 2h_1$), когда возбуждены только пары на экваторе с $\theta = \pi/2$. В этом

случае из (21.5) и (19.6) следует

$$\chi'' = \frac{2V_1^2}{S_{11}} \frac{h_1(h^2 - h_1^2)^{1/2}}{h^2}, \quad \chi' = \frac{2V_1^2}{S_{11}} \frac{h^2 - h_1^2}{h^2}. \quad (21.6)$$

На рис. 21.4 видно качественное совпадение характера теоретических и экспериментальных кривых (см. рис. 21.3, $M \parallel (100)$). Например, в соответствии с теорией кривая $\chi'(h)$ пересекает кривую $\chi''(h)$ в максимуме. Расхождение теоретических и экспериментальных кривых $\chi'(h)$ при $h^2 > 8$ дБ естественным образом объясняется возбуждением второй группы пар, которые не учитывают формулы (21.6).

Для сравнения S -теории с экспериментом в области большой надкритичности В.В. Зауткиным и др. [86] проводились численные расчеты на ЭВМ. Для этого прежде всего вычислялись коэффициенты $S_{\theta\theta'}$ в конкретных экспериментальных ситуациях для ЖИГ. При этом использовались только известные значения основных параметров ЖИГ: намагниченности, поля кристаллографической анизотропии и обменного поля. Полученные таким образом значения подставлялись в нестационарные уравнения движения S -теории (18.11), которые решались на ЭВМ методом итерации по времени от уровня теплового шума. Вычисленные стационарные значения амплитуд и фаз при различной надкритичности позволили определить величины χ' и χ'' по формулам (21.5). Результаты этих вычислений приведены на рис. 21.4 вместе с результатами лабораторного эксперимента. Видно не только качественное, но и хорошее количественное совпадение теории с экспериментом.

В табл. 21.1 приведено сравнение теоретических и экспериментальных значений максимальной восприимчивости $\chi_m'' = \max \chi''(h)$ для различных кубических ФМ сферической формы. Для ЖИГ проводились абсолютные измерения восприимчивости по стандартной методике, описанной в п. 21.2. Значения χ_m'' для остальных кристаллов измерены на той же установке путем сравнения их с ЖИГ. Теоретические значения вычислялись по формуле (21.6):

$$\chi_m'' = V_1^2 / |S_{11}|, \quad (21.7)$$

которая для кубических ФМ в случае аксиальной симметрии ($M \parallel [111]$, $[100]$) после подстановки выражений для V_1 и S_1 приобретает вид (В.В. Зауткин и др., [86])

$$8\pi\chi_m'' = [N_z - 1 + \beta(\omega_a/\omega_M) + (1 + (\omega_p/\omega_M)^2)^{1/2}]^{-1}, \quad (21.8)$$

где

$$\beta = \begin{cases} -8 & \text{при } M \parallel [111], \\ 9 & \text{при } M \parallel [100]. \end{cases}$$

Из таблицы видно, что простая формула (21.8) хорошо описывает абсолютные значения запороговой восприимчивости для широкого класса кубических ФМ. Некоторое расхождение теории с экспериментом для NiFe_2O_4 (ориентация $[111]$), по-видимому, связано с тем, что в этом случае максимум восприимчивости лежит за порогом рождения второй группы пар, когда формула (21.8) неприменима.

Кристалл	$4\pi M = \omega_M/g$, Гс	$H_A = \frac{\omega_a}{g}$, Э	$2\Delta H_K = \gamma/g$, Э	$\chi'' \cdot 10^3$		Ориентация
				Эксперимент	Теория	
1. $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ (ЖИГ)	1750	84	0,12	24 + 5	21	[100]
2. $\text{Y}_3\text{Fe}_{4,3,5}\text{Se}_{0,6,5}\text{O}_{12}$	1500	8	0,36	23	22	[100]
3. $\text{Bi}_{0,2}\text{Ca}_{2,8}\text{Fe}_{3,6}\text{V}_{1,4}\text{O}_{12}$	650	58	0,45	5	7,5	[100]
4. $\text{Li}_{0,5}\text{Fe}_{2,5}\text{O}_4$	3700	580	0,80	80	70	[111]
5. NiFe_2O_4	3200	490	1,40	25	19	[100]
				55	84	[111]

В работе Дж.Дж. Грина и В.Дж. Хели [71] измерялась восприимчивость χ''_m для одноосного ФМ $\text{Ba}_2\text{Zn}_2\text{Fe}_{12}\text{O}_{14}$ с анизотропией типа "легкая плоскость" и было получено аномально большое значение $\chi''_m \approx 0,2$. Теоретическая оценка для χ''_m , которую можно сделать по формуле (21.7), вычисляя для этого случая коэффициенты V_1 и S_{11} без учета диполь-дипольного взаимодействия (при $\omega_M < \omega_a$, $\omega_p \lesssim \omega_a$), дает

$$2\pi\chi''_m = \omega_M \omega_a / \omega_p^2.$$

Взяв из [71] значения параметров для $\text{Ba}_2\text{Zn}_2\text{Fe}_{12}\text{O}_{14}$, $4\pi M = 2850$ Гс, $\omega_a/g = 9900$ Э и частоту накачки $\omega_{p/g} \approx 6300$ Э, получим $\chi''_m \approx 0,1$. Качественное соответствие между теоретическим и экспериментальным значениями χ''_m имеется также при параметрическом возбуждении СВ в АФМ (В.С. Львов, М.И. Широков, [155]; Л.А. Прозорова, А.И. Смирнов, [201]).

Большой интерес представляет также сравнение знаков вещественной восприимчивости χ' , которые получаются в теории и эксперименте. В соответствии с формулой (21.6) знак χ' совпадает со знаком S_{11} и для кубических ФМ определяется знаком знаменателя в формуле (21.8). В соответствии с экспериментом теория предсказывает для слабо анизотропных кристаллов, перечисленных в табл. 21.1, под номерами 1, 2, 3 $\chi' > 0$. Для кристаллов с большой анизотропией (номера 4, 5) $\chi' > 0$ для ориентации [100] и $\chi' < 0$ для ориентации [111].

§ 22. Нелинейная теория ферромагнитного резонанса

Существовавшая ранее нелинейная теория ферромагнитного резонанса Х. Сула [210] учитывала только взаимодействие СВ с ОП и пренебрегала взаимодействием ПСВ друг с другом (СВ–СВ-взаимодействие), хотя последнее при больших амплитудах волн велико, и пренебрегать им в большинстве случаев нельзя. По этому поводу интересно привести мнение Е. Шлеманна [231]: "Это приближение (исключение СВ–СВ-взаимодействия) сделано для упрощения математической стороны проблемы и, вообще говоря, не может быть оправдано. Принимая его, мы, вероятно, теряем большую часть физически существенной информации".

С теоретической точки зрения ясно, что по мере роста амплитуды СВ за порогом энергия СВ—СВ-взаимодействия вначале сравнивается, а потом и превосходит энергию СВ—ОП-взаимодействия. Мощности накачки, при которой СВ—СВ-взаимодействие становится существенным, зависит от свойств спиновой системы и типа нелинейных процессов и, как правило, превышает в эксперименте. Вместе с тем широко распространено мнение, что ограничение параметрического возбуждения происходит в основном за счет обратной реакции СВ на ОП (СВ—ОП-взаимодействие). Это мнение основывается на предсказываемом "СВ—ОП-теорией" явлении "замораживания" ОП за порогом, которое нашло применение в ферритовых ограничителях мощности.

Как показано Е. Шлеманном и др. [233] практически полное прекращение роста амплитуды ОП наблюдается при ФМР для процессов первого порядка. С другой стороны, имеется ряд фактов, которые нельзя объяснить "СВ—ОП-взаимодействием". В частности, поведение нелинейных восприимчивостей χ' , χ'' вдали от резонанса отличается от теоретического и предсказанного при больших превышениях мощности накачки над порогом (Р.В. Даймон [75]). Особое внимание следует обратить на тот факт, что вещественная часть восприимчивости χ' практически не меняется за порогом, в то время как по теории СВ—ОП-взаимодействия она должна убывать как h^{-2} (h — амплитуда переменного магнитного поля). Укажем также на опыты А.Г. Гуревича и С.С. Старобинца [73] по "насыщению ФМР" (в случае процессов второго порядка), свидетельствующие "о росте амплитуды ОП за порогом".

Эти и некоторые другие факты находят естественное объяснение в изложенной ниже теории, одновременно учитывающей СВ—ОП- и СВ—СВ-взаимодействия в приближении диагонального гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}$.

22.1. Основная модель. Гамильтониан задачи выбираем в виде

$$\mathcal{H} = \omega_0 a_0^* a_0 + \sum_k \omega_k a_k^* a_k + \mathcal{H}_{00} + \mathcal{H}_\perp + \sum_k \mathcal{H}_{0k} + \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}},$$

$$\mathcal{H}_{00} = T_{00} |a_0|^4, \quad \mathcal{H}_\perp = [h_\perp \exp(-i\omega_p t) U a_0^* + \text{к.с.}], \quad (22.1)$$

$$\mathcal{H}_{0k} = \frac{1}{2} (V_{0k}^* a_0^* a_k a_{-k} + \text{к.с.}) + (S_{0k} a_0^{*2} a_k a_{-k} + \text{к.с.}) + 2 T_{0k} |a_0|^2 |a_k|^2.$$

Здесь $\mathcal{H}_{00}$ описывает собственный нелинейный сдвиг частоты ОП, $\mathcal{H}_\perp$ — взаимодействие ОП с однородным магнитным СВЧ полем с частотой ω_p (для простоты мы считаем, что это поле поляризовано по кругу в плоскости, перпендикулярной M) и, наконец, $\mathcal{H}_{0k}$ описывает ОП—СВ-взаимодействие. Первые два члена определяют параметрическое взаимодействие первого и второго порядков соответственно, а последнее слагаемое — нелинейный сдвиг частоты. $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ — диагональный по парам гамильтониан СВ—СВ-взаимодействия (см. формулу (18.1)).

Уравнения движения с гамильтонианом (22.1):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_0 \right) a_0 = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_0^*}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k \right) a_k = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_k^*} \quad (22.2)$$

можно представить в стандартном для S -теории виде (18.2):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_0 + i(\tilde{\omega}_0 - \omega_p) \right] a_0 + i P_0 a_0^* = 0, \quad (22.3)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\tilde{\omega}_k - l\omega_p/2) \right] a_k + iP_k a_{-k}^* = 0, \quad (22.4)$$

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + 2T_{00}|a_0|^2 + 2\sum_{k>0} T_{0k}|a_k|^2, \quad (22.5)$$

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\sum_{k'} T_{kk'}|a_{k'}|^2 + 2T_{0k}|a_0|^2.$$

Здесь $\tilde{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}_k$ описывают нелинейную расстройку частоты ОП и СВ, $l = 1, 2$ соответственно для процессов первого и второго порядков. Выражения для величин P_0 , P_k , представляющих "комплексные потоки энергии" в ОП и k -пару, зависят от того, какой процесс рассматривается. Для процессов первого порядка

$$P_0 = \frac{1}{a_0^*} [hU + \frac{1}{2}\sum_k V_{0k} a_k^2],$$

$$P_k = V_{0k} a_0 + \sum_{k'} S_{kk'} a_{k'} a_{-k'}. \quad (22.6)$$

Порог неустойчивости второго порядка значительно выше первого. Однако, если частота $(\omega_p/2)$ лежит вне спектра СВ, процессы первого порядка запрещены, и можно наблюдать неустойчивость второго порядка с $\omega_k = \omega_p$. Для нее

$$a_0^* P_0 = hU + \sum_{k>0} S_{0k} a_k^2 a_0^*,$$

$$P_k = S_{0k} a_0^2 + \sum_{k'} S_{kk'} a_{k'} a_{-k'}. \quad (22.7)$$

Наша задача сводится к исследованию решений связанных уравнений (22.3)–(22.5) в зависимости от амплитуды накачки h . Нетрудно заметить, что уравнения (22.4) для ПСВ в предположении $a_0 = \text{const}$ полностью совпадают с уравнениями, описывающими параметрическую неустойчивость в заданном поле, которые подробно описаны выше. Подставив решение этих уравнений в (22.3), получим одно комплексное уравнение, определяющее зависимость $a_0(h)$. Буквальная реализация этой программы требует применения ЭВМ и целесообразна лишь для некоторых важных случаев (например, для монокристаллов ЖИГ). Однако она до сих пор не проведена. В этом же параграфе мы ограничимся качественным анализом поведения СВ и ОП за порогом неустойчивости ФМР. Учитывая, что интегральные характеристики системы ПВ мало чувствительны к конкретному виду коэффициентов V_{0k} , S_{0k} и $S_{kk'}$, будем считать, что V_{0k} , $S_{0k} = \text{const}$. Тогда для процессов первого порядка из (19.1) получим

$$N_1 = [V_{01}^2 n_0 - \gamma_1^2]^{1/2} / |S_{11}|, \quad (22.8)$$

$$\sin(\psi_1 - \psi_0/2) = \gamma(V_{01}^2 n_0)^{-1/2}.$$

Для процессов второго порядка аналогично:

$$N_1 = [S_{01}^2 n_0^2 - \gamma_1^2]^{1/2} / |S_{11}|, \quad \sin(\psi_1 - \psi_0) = \gamma_1 / (S_{01} n_0). \quad (22.9)$$

Здесь N_1 — интегральная амплитуда параметрических СВ, $V_{0k} \equiv V_0$, $S_{01} \equiv S_{0k}$, S_{11} — среднее значение $S_{kk'}$.

22.2. Прощессы первого порядка. Стационарное решение уравнений (22.2), (22.8) для ОП имеет вид

$$a_0(\tilde{\omega} - \omega_p + i\tilde{\gamma}) = hU, \quad (22.10)$$

в котором $\tilde{\omega}$ — "эффективная" частота, $\tilde{\gamma}$ — затухание ОП:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega_0 + 2T_{00}|a_0|^2 + 2T_{01}N_1 - S_{11}N_1^2/2|a_0|^2, \\ \tilde{\gamma} &= \gamma + \gamma_1 N_1/2n_0. \end{aligned} \quad (22.11)$$

Здесь T_{01} — среднее значение T_{0k} . Теперь мы имеем полную систему уравнений (22.8), (22.10), необходимую для вычисления стационарного режима. Для дальнейшего целесообразно эти уравнения сделать безразмерными, что позволит легче оценить относительную величину различных членов. Введя с этой целью следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} x_0 &= n_0/n_c, \quad x_1 = N_1/n_c, \quad n_c = \gamma_1/V_{01}^2, \quad \xi = h/h_1, \\ h_1 &= \gamma_0\gamma_1/UV_{01}, \quad \delta = (\omega_0 - \omega_p)/\gamma_0, \\ \epsilon &= 2\gamma_0 S_{11}/V_{01}^2, \quad a = (T_{00}/S_{11})(\gamma_1/\gamma_0)^2, \quad b = 2T_{01}\gamma_1/S_{11}\gamma_0, \end{aligned} \quad (22.12)$$

мы приводим исходные уравнения к виду

$$\begin{aligned} \gamma_1|\epsilon|x_1 &= 2\gamma_0(x_0 - 1)^{1/2}, \quad (\tilde{\omega}_0 + \tilde{\gamma}^2)x_0 = \xi^2\gamma_0^2, \\ \tilde{\gamma}^2 &= \gamma_0^2[1 + (x_0 - 1)^{1/2}/|\epsilon|x_0], \\ \tilde{\omega}/\gamma_0 &= \delta - (x_0 - 1)/\epsilon x_0 + b(x_0 - 1)^{1/2} + \epsilon a x_0. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Эти уравнения содержат малый параметр $|\epsilon| \approx \gamma/\omega_M \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$, который в теории, не учитывающей СВ — СВ-взаимодействия, полагался равным нулю.

Поведение однородной прецессии в резонансе. Как следует из (22.13), амплитуда x_0 максимальна при $\tilde{\omega} = 0$ и определяется уравнением

$$(x_0 - 1)^{1/2} + |\epsilon|x_0 = \epsilon\xi(x_0)^{1/2}. \quad (22.14)$$

Ввиду малости ϵ решение этого уравнения имеет две характерные области: "малых превышений" $|\epsilon|\xi \ll 1$, в которой

$$x_0 = (1 + \epsilon^2\xi^2)^{-1}, \quad x_1 = 2(\xi - 1)\gamma_0/\gamma_1, \quad (22.15)$$

и область "больших превышений" $|\epsilon|\xi \approx 1$, в которой

$$x_0 = (1 - \epsilon^2\xi^2)^{-1}, \quad x_1 = 2\gamma_0\gamma_1^{-1}(\xi - 1)[1 - \epsilon^2\xi^2]^{-1}. \quad (22.16)$$

Эти соотношения справедливы до тех пор, пока $x_0 < |\epsilon|^{-2/3}$. При остальных превышениях, как следует из (22.14), ОП должна расти по линейному закону $(x_0)^{1/2} = \xi$ (рис. 22.1), однако при этом мы вступаем в область $x_0 \sim |\epsilon|^{-1}$, в которой исходные уравнения (22.3) теряют силу.

Форма резонансной кривой. Когда точный резонанс отсутствует или невозможен, условие порога имеет вид

$$\xi = \xi_c \equiv (1 + \delta^2)^{1/2}.$$

При $\xi \rightarrow \xi_c \gg |\epsilon|$ получим из (22.13) соотношение

$$x_0 = 1 + \epsilon^2(\xi^2 - \delta^2)/(1 - \delta\epsilon)^2, \quad (22.17)$$

которое верно до тех пор, пока $x_0 < |\epsilon|^{-2/3}$. Соотношение (22.17) указы-

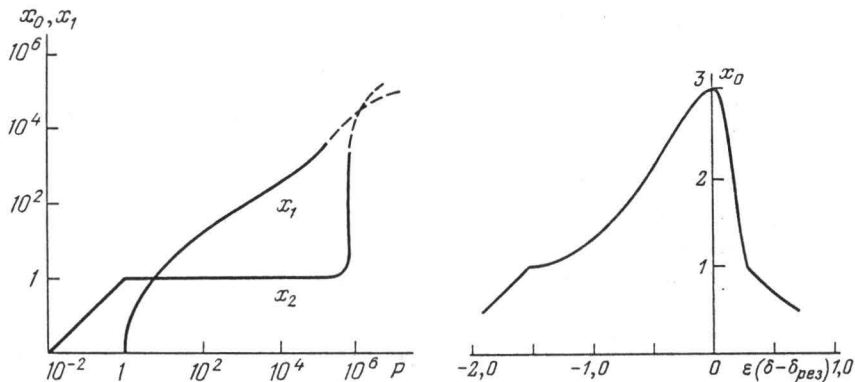


Рис. 22.1. Зависимость амплитуды однородной прецессии $x_0 = n_0/n_c$ и спиновых волн $x_1 = n_1/n_c$ от безразмерной мощности накачки $P = (h/h_{th})^2$ для процессов первого порядка. Штриховыми линиями обозначена область, в которой теория теряет силу

Рис. 22.2. Форма резонансной кривой при большом уровне мощности для процессов первого порядка $\epsilon^2 P = 2/3$

вает, что в пределе больших ξ амплитуда ОП растет по линейному закону

$$(x_0)^{1/2} = \frac{|\epsilon|(1 + \delta^2)^{1/2}}{|1 - \epsilon\delta|} \frac{\xi}{\xi_c},$$

причем вдали от резонанса, когда $(1 - \epsilon\delta) \sim 1$, коэффициент пропорциональности близок к единице, т.е. по порядку величины такой же, как и в линейном режиме. Форма резонансной кривой ФМР становится понятной после тождественного преобразования (22.17) к виду

$$x_0 = \left[1 - \epsilon^2 \left(\frac{\epsilon\xi^2 - \delta}{1 - \epsilon\delta} \right)^2 \right] [1 - (\epsilon\xi)^2]^{-1}. \quad (22.18)$$

Мы видим, что резонансное значение x_0 определяется формулой (22.16) и достигается при $\delta_{рез} = \epsilon\xi^2$, что соответствует условию ФМР за порогом. Резонансная кривая (22.16), изображенная на рис. 22.2, существенно отличается от нормальной кривой обычного ФМР. Полуширина кривой на половине высоты (справа и слева от резонанса) равна

$$\delta_{\pm} = \delta_{рез} \pm \delta_{1/2} = \pm [1 - (\epsilon\xi)^2] / (\epsilon(\sqrt{2} \mp 1)),$$

так что отношение $\delta_+/\delta_- = -6$.

Нелинейная восприимчивость. Из (22.6) и (22.10) можно получить

$$\chi = 2Ua_0/h = 2U^2/(\tilde{\omega} - i\tilde{\gamma}). \quad (22.19)$$

В безразмерном виде

$$\chi' = \chi_0 \frac{\tilde{\omega}}{\gamma} \frac{x_0}{\xi^2}, \quad \chi'' = \chi_0 \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma_0} \frac{x_0}{\xi^2}, \quad (22.20)$$

где $\chi_0 = 2U^2/\gamma_0$ — резонансная восприимчивость ОП к поперечному СВЧ полю в линейном режиме. Рассмотрим теперь поведение нелинейных восприимчивостей вдали от резонанса ($\delta \gg 1$), т.е. в области *дополнительного*

поглощения. Из (22.17) и (22.20)

$$\chi'' = \chi_0 (\xi^2 - \delta^2)^{1/2} / (\xi^2 |1 - \epsilon \delta|), \quad \xi - \xi_c \gg |\epsilon|. \quad (22.21)$$

Отсюда, в частности, следует, что за порогом χ'' растет по линейному закону и достигает максимума:

$$\chi''_{\max} = \chi_0 / (2\delta |1 - \epsilon \delta|) \quad (22.22)$$

при $\xi = \sqrt{2}\delta \approx \sqrt{2}\xi_c$. Спад χ'' при больших превышениях согласно (22.22) происходит по закону ξ^{-1} . Вещественная часть нелинейной восприимчивости изменяется в существенно менее широких пределах. Из (22.16) и (22.20) получим

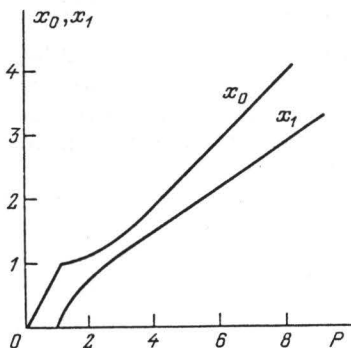
$$\chi' = (\chi_0/\delta) [1 + (1 - \delta^2/\xi^2)/(\epsilon\delta - 1)], \quad \xi - \xi_c \gg 1. \quad (22.23)$$

В теории, не учитывающей СВ — СВ-взаимодействия, $\epsilon = 0$ и χ' согласно (22.23) убывает до нуля как ξ^{-2} . Учет СВ — СВ-взаимодействия радикально изменяет этот результат: при больших превышениях $\chi' \rightarrow \chi_0 \epsilon / |1 - \epsilon \delta|$, т.е. восприимчивость по порядку величины такая же, как до порога. Этим объясняется то, что фазовые постоянные ферритовых СВЧ приборов практически не зависят от уровня мощности (А.Г. Гуревич [7]).

22.3. Процессы второго порядка. Поступая так же, как и в предыдущем разделе, из уравнений (22.3), (22.4) и (22.7) получим систему уравнений для определения стационарного режима процессов второго порядка:

$$\begin{aligned} x_0^2 &= 1 + c^2 \gamma_1^2 x_1^2 / \gamma_0^2 (\tilde{\omega}^2 + \tilde{\gamma}^2) x_0 = \gamma_0^2 \xi^2, \\ (\tilde{\gamma}/\gamma_0) &= 1 + (x_0^2 - 1)^{1/2} / (c x_0), \\ \tilde{\omega} &= \delta \gamma_0 + \gamma_1 [2x_0 (T_{00}/S_{01}) + 2(x_0^2 - 1)^{1/2} (T_{01}/S_{11}) - \\ &\quad - (x_0^2 - 1) S_{11} / (S_{01} x_0)]. \end{aligned} \quad (22.24)$$

Здесь x_0 и x_1 по-прежнему означают безразмерные амплитуды n_0/n_c и



Р и с. 22.3. Зависимость амплитуд однородной прецессии x_0 и спиновых волн x_1 от безразмерной мощности накачки $P = h^2/h_{th}^2$ для процессов второго порядка

N_1/n_c , только теперь пороговая амплитуда $n_c = \gamma_1/|S_{01}|$ и вместо малого параметра ϵ в уравнениях стоит коэффициент $c = \gamma_0 S_{11}/\gamma_1 S_{01} \approx 1$. Последнее обстоятельство определяет глубокое различие между процессами первого и второго порядков.

Зависимость резонансной амплитуды x_0 от ξ определяется уравнением

$$c x_0 + (x_0^2 - 1)^{1/2} = c (x_0)^{1/2} \xi. \quad (22.25)$$

Если не учитывать СВ – СВ-взаимодействие, то $c = 0$ и $x_0^2 = 1$. В действительности же "замораживания" ОП не происходит и уже при малых $\xi - 1$ амплитуда x_0 заметно отличается от единицы:

$$x_0^2 = 1 + \frac{1}{2} c^2 (\xi - 1) \text{ при } \xi - 1 \lesssim 1. \quad (22.26)$$

Отсюда видно, что не учитывать СВ – СВ-взаимодействие можно только вблизи самого порога, когда $(\xi - 1) \ll c^{-1} \approx 1$. Для процессов первого порядка соответствующее условие выполняется в значительно более широком интервале накачки: $(\xi - 1) \ll \epsilon^{-1} \approx 10^3 \div 10^4$. При больших превышениях ($\xi \gg 1$)

$$x_0 = [c\xi/(c+1)]^2 + (c+1)/(c^2 \xi^2). \quad (22.27)$$

Зависимости $x_0(\xi)$, $x_1(\xi)$ показаны на рис. 22.1. На рис. 22.3 приведены вычисленные с помощью ЭВМ по формулам (22.24) нелинейные резонансные кривые $x_0(\delta)$ при различных амплитудах ξ внешнего поля.

22.4. Сравнение с экспериментальными результатами. В эксперименте А.Г. Гуревича и С.С. Старобинца [73] при неустойчивости второго порядка наблюдается сильный рост амплитуды ОП за порогом, что можно рассматривать как качественное подтверждение механизма СВ – СВ-взаимодействия. Наблюдаемая при больших ξ форма резонансной кривой обычно имеет значительно более сложный вид, чем на рис. 22.4. На кривой имеются

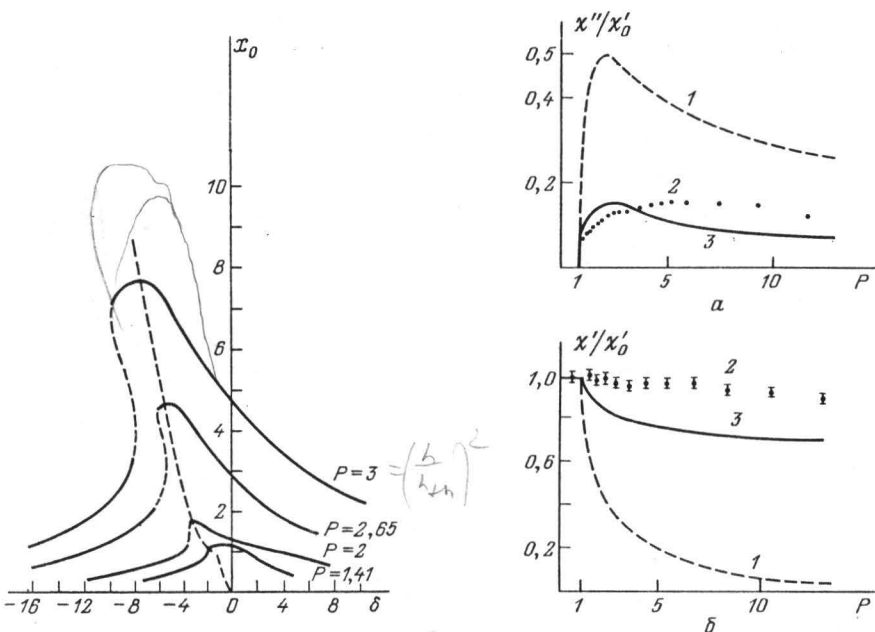


Рис. 22.4. Нелинейные резонансные кривые $x_0(\delta)$ при разных надкритичностях. Участки с отрицательным наклоном неустойчивы

Рис. 22.5. Сравнение теоретических и экспериментальных зависимостей нелинейных восприимчивостей $\chi''(a)$ и $\chi'(\delta)$ от мощности накачки $P = h^2/h_{th}^2$: 1 – теория Сула ($\epsilon = 0$); 2 – эксперимент; 3 – теория ($\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$)

провалы, при некоторых расстройках δ наблюдаются автоколебания. По нашему мнению, их происхождение связано с потерей устойчивости. Это подтверждено численным экспериментом с уравнениями S -теории В.И. Закайдаковым и С.Л. Мушером. Подробно вопрос об автоколебаниях будет изучен в гл. 5 для более простой ситуации — параллельной накачки СВ в кубических ФМ.

Сравним полученные результаты с измерениями А.Г. Гуревича и С.С. Старобинца [73] нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' в зависимости от амплитуды накачки ξ при неустойчивости первого порядка, когда ОП не находится в резонансе: $\delta \gg 1$ (рис. 22.5). На этом же рисунке приведены теоретические зависимости, вычисленные по формулам (22.21) и (22.23). Входящий в уравнения теории параметр ϵ был определен из условия равенства экспериментального и теоретического значений $\chi''_{\max}$. Оказалось, что $\epsilon \approx 3 \cdot 10^{-4}$, что по порядку величины хорошо совпадает с теоретической оценкой (см. формулу (22.22)). Несмотря на столь малое значение, его учет (т.е. учет СВ — СВ-взаимодействия) оказывает существенное влияние на характер зависимостей $\chi'(\xi)$, $\chi''(\xi)$. Для сравнения на рис. 22.5 приведены теоретические зависимости для случая $\epsilon = 0$, соответствующие теории, учитывающей только СВ — ОП-взаимодействие.

Задачи

Задача 4.1. Исследовать основное состояние системы ПСВ, в котором возбуждены две группы пар.

Указание. Для простоты предположить, что местоположение первой и второй групп пар не зависит от надкритичности. Тогда в выражения для $N_1(h)$, $N_2(h)$ будут входить только величины γ_1 , γ_2 , V_1 , V_2 , S_{11} , S_{22} и S_{21} . При анализе этих выражений полезно вычислить производные $\partial N_1 / \partial h$, $\partial N_2 / \partial h$ слева и справа от второго порога $h = h_2$. Особое внимание нужно уделить случаю $S_{11} \rightarrow 0$, при котором $h_2 \rightarrow h_{th}$.

Задача 4.2. Обобщить S -теорию на "несимметричный" случай, когда параметрически возбуждаются разные типы волн: $\omega_p = \omega_k + \Omega_{-k}$, например, звук и магноны, электронные и ядерные магноны и т.п.

Указание. Выписать диагональный по парам гамильтониан взаимодействия, получить уравнения для $N_k = \langle |b_k|^2 \rangle$, $n_k = \langle |a_k|^2 \rangle$ и $\sigma_k = \langle a_k b_{-k} \rangle$, сформулировать условие внешней устойчивости и получить простейшие решения этих уравнений. Результаты можно сравнить с работой В.С. Львова, А.М. Рубенчика [154], посвященной параметрическому возбуждению ленгмюровских волн и ионного звука в неизотермической плазме.

Ответ. Уравнения "несимметричной" S -теории:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{2dt} + \gamma_k \right) n_k + \text{Im } P_k^* \sigma_k &= 0, & \left(\frac{d}{2dt} + \Gamma_k \right) N_k + \text{Im } P_k^* \sigma_k &= 0, \\ \left[\left(\frac{d}{dt} + \gamma_k + \Gamma_k \right) + i(\tilde{\omega}_k + \Omega_k - \omega_p) \right] \sigma_k + i P_k [n_k + N_k] &= 0. \end{aligned} \quad (22.28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_k &= \omega_k + 2 \sum_{k'} (T_{kk'}^{aa} n_{k'} + T_{kk'}^{ab} N_{k'}), \\ \tilde{\Omega}_k &= \tilde{\Omega}_k + 2 \sum_{k'} (T_{kk'}^{ba} n_{k'} + T_{kk'}^{bb} N_{k'}), & P_k &= h V_k + \sum_{k'} S_{kk'} \sigma_{k'}. \end{aligned} \quad (22.29)$$

Соотношения, обобщающие формулы (18.18):

$$\frac{d}{2dt} (n_k - N_k) + (\gamma_k n_k - \Gamma_k N_k) = 0, \quad (22.30)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma_k + \Gamma_k \right) (n_k N_k - |\sigma_k|^2) = 0.$$

Условие внешней устойчивости:

$$\tilde{\omega}_k + \tilde{\Omega}_k = \omega_p. \quad (22.31)$$

Задача 4.3. Обобщить S -теорию на случай, когда накачкой служит плоская волна:

$$\omega_p(k) = \omega(k/2 + k') + \omega(k/2 - k').$$

Указание. Действовать по схеме, предложенной в задаче 4.2. Убедиться, что ответ совпадает с формулами (22.28) – (22.31), если положить

$$\begin{aligned} n_k &\equiv \langle a_{k_p/2+k} a_{k_p/2+k}^* \rangle, \\ N_k &\equiv \langle a_{k_p/2-k} a_{k_p/2-k}^* \rangle, \\ \sigma_k &\equiv \langle a_{k_p/2+k} a_{k_p/2-k} \rangle \end{aligned} \quad (22.32)$$

и сделать соответствующую замену в матричных элементах гамильтониана взаимодействия.

Задача 4.4. В приближении S -теории попытаться исследовать случай, когда матричные элементы гамильтониана взаимодействия $T_{k1,23}$ не являются непрерывными функциями своих аргументов, например,

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} T_{k, k' + \kappa, k + \kappa, k'} \neq T_{kk', kk'}.$$

Это может быть вызвано существованием дальнедействующих взаимодействий в системе, например магнитного дипольного взаимодействия в ФМ.

Пожелание. Хорошо бы понять, является ли в этом случае стационарное распределение СВ сингулярным по $|k|$? Если да, то как выглядит условие внешней устойчивости; если нет, то что его заменяет? После ответа на эти вопросы можно найти стационарные решения полученных уравнений и опубликовать результаты.

Задача 4.5. Используя уравнение Фоккера – Планка, получить выражение для стационарной функции распределения ПВ в приближении S -теории.

Ответ (А.С. Михайлов [178]):

$$\Phi_k = z_k^{-1} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_k}{\alpha_k} \left[(a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}) + 2 \operatorname{Im} \left(\frac{P_k^*}{-i\tilde{\omega}_k + \gamma_k} a_k a_{-k} \right) \right] \right\}, \quad (22.33)$$

$$\alpha_k = \frac{2T\gamma_k}{\hbar \omega_k}.$$

Задача 4.6. Используя функцию распределения пар (22.33) вычислить среднее значение $A_k^* A_k, A_k A_{-k}$ и дисперсию этих величин. Убедиться, что этот же ответ получится, если обычным образом распределить четверные средние через всевозможные произведения парных.