ГЛАВА 5

КОЛЛЕКТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДЕННЫХ ВОЛН

В предыдущей главе описано стационарное состояние системы параметрически возбужденных волн. Малые колебания относительно этого состояния будут изучены в этой главе.

§ 23. Спектр пространственно-однородных коллективных колебаний – элементарная теория

23.1. Спектр коллективных колебаний в бездиссипативном пределе $\gamma = 0$. Если затухание СВ γ равно нулю, то гамильтониан системы $\mathcal{H}$ является интегралом движения. Пусть значение $\mathcal{H}$ в возмущенном состоянии не совпадает с его значением $\mathcal{H}_0$ в основном состоянии. Это означает, что система никогда не сможет прийти в основное состояние и, поскольку других устойчивых стационарных состояний у нее нет, ее поведение будет существенно нестационарным. Для того чтобы выяснить характер этой нестационарности, найдем частоты (спектр) коллективных колебаний (КК) системы ПСВ.

Имея в виду сравнение теории с экспериментом, рассмотрим для определенности кубический ФМ при надкритичности ниже второго порога, когда в основном состоянии ПСВ возбуждены в плоскости экватора. Обозначая через α_k отклонения комплексных амплитуд b_k от основного состояния, выделим в гамильтониане S-теории (18.1) часть $\mathcal{H}_0$, соответствующую основному состоянию, и части $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, содержащие линейные и квадратичные по α_k члены. Учитывая уравнения движения, убеждаемся в экстремальности энергии основного состояния: $\mathcal{H}_1 = 0$. Квадратичная по малым возмущениям часть гамильтониана после перехода от суммирования к интегрированию принимает вид

$$(2\pi)^2\mathcal{H}_2 = N_1\{2\int[S_{\varphi\varphi'}\exp[-i(\varphi-\varphi')] + T_{\varphi\varphi'}\exp i(\varphi-\varphi')]\,\alpha_\varphi\alpha^*_{\varphi'}\,d\varphi d\varphi' +$$

$$+\ [\exp(i\psi_1)\int(T_{\varphi\varphi'}\exp[-i(\varphi+\varphi')\alpha_\varphi\alpha_{\varphi'}] + \text{к.с.})\,d\varphi d\varphi']\}, \tag{23.1}$$

где $T_{\varphi\varphi'} = T_{kk'}$, при $\theta = \theta' = \pi/2$, $|k| = |k'| = |k_0|$. Переходя к фурье-компонентам и используя аксиальную симметрию, получим

$$\mathcal{H}_2 = N_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} [2(T_m + S_m)\alpha_m\alpha^*_m + (T_m\alpha_m\alpha_{-m} + \text{к.с.})], \tag{23.2}$$

$$2\pi T_m = \int_0^{2\pi} T(\varphi-\varphi')\exp[-im(\varphi-\varphi')]\,d(\varphi-\varphi'),$$

$$2\pi S_m = \int_0^{2\pi} S(\varphi-\varphi')\exp[-i(m-2)(\varphi-\varphi')]\,d(\varphi-\varphi'). \tag{23.3}$$

Гамильтониан (23.1) может быть диагонализован линейным каноническим преобразованием к виду

$$\mathcal{H}_2 = \sum_m \Omega_m \beta_m^* \beta_m . \tag{23.4}$$

Это преобразование возможно, если частота КК Ω_m в системе ПСВ вещественна. При $S_m(2T_m + S_m) < 0$ эта частота оказывается мнимой, что указывает на неустойчивость основного состояния относительно возбуждения экспоненциально нарастающих колебаний (внутренняя неустойчивость, упомянутая ранее).

Каноническое преобразование однозначно определяет знак частоты КК в (23.4). Впрочем, этот знак можно найти из простых соображений. Именно при $|T_m| \ll |T_m + S_m|$ знак Ω_m, очевидно, совпадает со знаком $(S_m + T_m)$. При непрерывном увеличении T_m знак Ω_m в силу непрерывности канонического преобразования сохраняется и может измениться лишь после обращения Ω_m в нуль. Отрицательность Ω_m означает, что в результате возбуждения КК энергия системы ПСВ уменьшается. При этом в процессе их релаксации энергия системы возрастает. Это не противоречит закону сохранения энергии, так как система ПСВ получает энергию от накачки.

В кубическом ФМ в симметричных направлениях [111] и [100] величины S_m и T_m отличны от нуля только при $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Выражения для коэффициентов S_m, T_m, соответствующих этим модам, можно получить из (6.26), (6.27) и (23.2):

$$S_0 = 2\pi g^2 (\omega_m/\omega_p)^2 \{[1+(\omega_p/\omega_m)^2]^{1/2} + \widetilde{N}_{z0} - 1\},$$

$$T_0 = S_0 + 2\pi g^2 (\widetilde{N}_{z0} - 1),$$

$$\widetilde{N}_{z0} = N_z + \beta\omega_p/\omega_m, \qquad \beta = \begin{cases} -8, & \boldsymbol{M} \parallel [111], \\ 9, & \boldsymbol{M} \parallel [100], \end{cases}$$

$$S_1 = S_{-1} = 0, \tag{23.5}$$

$$T_1 = T_{-1} = \tfrac{1}{2}(T_2 + T_{\bar{2}} + T_0 - S_0 - S_2 - S_{\bar{2}}),$$

$$T_{\pm 2} = \tfrac{1}{2}\pi g^2 (\omega_m/\omega_p)^2 [(\widetilde{N}_{zz} - 1)u_\pm^2 + (1+(\omega_p/\omega_m)^2)^{1/2}],$$

$$S_{\pm 2} = 2\pi g^2 [(N_{zz} - 1)u_\pm^2 + u_\pm \omega_m/2\omega_p],$$

$$u_\pm = \tfrac{1}{2}[(1 + (\omega_m/\omega_p)^2]^{1/2} \mp 1), \quad \widetilde{N}_{zz} = \omega_{\text{ex}}(ka)^2 + \beta\omega_a/\omega_p.$$

Формулы (23.5) показывают зависимость частот КК от условий эксперимента: надкритичности, частоты накачки, намагниченности, внешнего магнитного поля, формы образца и кристаллографической анизотропии. Для АФМ ЛП из формул (7.13) видно, что $S_0 = T_0$, а остальные S_m и T_m равны нулю. Отсюда, в частности, следует устойчивость основного состояния, наблюдающаяся в экспериментах Б.Я.Котюжанского и Л.А.Прозоровой [125], Л.А.Прозоровой и А.И.Смирнова [200] вплоть до очень большой надкритичности.

23.2. Как влияет затухание спиновых волн на спектр КК? Этот вопрос очень важен особенно потому, что величина затухания СВ γ_k может быть одного порядка с частотой Ω_m. Линеаризуя уравнения (18.11) относительно возмущения на фоне основного состояния (19.6) и, полагая α, $\alpha^* \sim \exp(-i\Omega t)$, получим систему однородных по α, α^* алгебраических уравнений. Условие их разрешимости определяет частоту и затухание КК:

$$\Omega_m = -i\gamma \pm [4S_m(2T_m + S_m)N_1^2 - \gamma^2]^{1/2}. \tag{23.6}$$

Отсюда следует важный вывод о том, что критерий возникновения внутренней неустойчивости на m-й коллективной моде не зависит от величины затухания и определяется, как и в консервативном случае, неравенством

$$S_m(2T_m + S_m) < 0. \tag{23.7}$$

В рамках изложенной выше элементарной теории КК системы ПСВ являются пространственно-однородными. При учете пространственной дисперсии каждой нормальной моде соответствует целая ветвь $\Omega_m(\vec{\kappa})$, причем формулой (23.6) определяется ее щель. Зависимость $\Omega_m(\vec{\kappa})$ мы вычислим в следующем параграфе.

§ 24. Пространственно-неоднородная S-теория

До сих пор при описании нелинейного поведения ПСВ мы предполагали, что статистические свойства волнового поля являются пространственно-однородными. На языке корреляционных функций это означает, что $\langle a_{\boldsymbol{k}}^*, a_{\boldsymbol{k}} \rangle \sim \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$ и $\langle a_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}'} \rangle \sim \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$. Если же отказаться от этого предположения и допустить, что в сравнении с длиной волны пространственная неоднородность плавная, то величины

$$n_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \equiv \langle a_{\boldsymbol{k}}^*, a_{\boldsymbol{k}} \rangle, \qquad \sigma_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} = \langle a_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}'} \rangle \tag{24.1}$$

уже не будут пропорциональны $\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$: по $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$ они будут сосредоточены в узком слое шириной $1/L$, где L – характерный пространственный размер неоднородности. В этом параграфе мы получим и проанализируем уравнения S-теории для $n_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$ и $\sigma_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$ в случае плавной неоднородности.

24.1. Основные уравнения. Для того чтобы получить уравнения S-теории для корреляторов (24.1), вычислим производные

$$\frac{\partial n_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}}{\partial t} = \left\langle a_{\boldsymbol{k}} \frac{\partial a_{\boldsymbol{k}'}^*}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} a_{\boldsymbol{k}'}^* \right\rangle. \tag{24.2}$$

Так же, как и при выводе основных уравнений пространственно-однородной S-теории (18.6), мы используем динамические уравнения движения (16.2) и "расщепим" четверные корреляторы через парные по правилу, обобщающему (18.7):

$$\begin{aligned}
&\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle = n_{31} n_{42} + n_{41} n_{32} + \sigma_{1\bar{2}}^* \sigma_{3\bar{4}}, \\
&\langle a_1^* a_2 a_3 a_4 \rangle = n_{21} \sigma_{3\bar{4}} + n_{31} \sigma_{2\bar{4}} + n_{41} \sigma_{2\bar{3}}, \\
&\langle a_1^* a_2^* a_3^* a_4 \rangle = n_{41} \sigma_{2\bar{3}}^* + n_{42} \sigma_{1\bar{3}}^* + n_{43} \sigma_{1\bar{2}}^*, \\
&n_{13} \equiv n(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_3), \quad \sigma_{1\bar{2}} \equiv \sigma(\boldsymbol{k}_1, -\boldsymbol{k}_2).
\end{aligned} \tag{24.3}$$

В результате из (24.2) следует

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + \gamma_{k'} + i(\omega_k - \omega_{k'})\right] n_{kk'} =$$

$$= -i \sum_{1,2,3} \{ T_{k1,23}(n_{2k'} n_{31} + n_{3k'} n_{21} + \sigma^*_{1\bar{k}'} \sigma_{2\bar{3}}) \Delta(k+1-2-3) -$$

$$- T_{23,k'1}(n_{k2} n_{13} + n_{k3} n_{12} + \sigma_{k\bar{1}} \sigma^*_{2\bar{3}}) \Delta(k'+1-2-3)\},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + \gamma_{k'} + i(\omega_k + \omega_{k'} - \omega_p)\right] \sigma_{kk'} = \tag{24.4}$$

$$= -i \sum_{1,2,3} \{ T_{k1,23}(n_{k'1} \sigma_{2\bar{3}} + n_{21} \sigma_{3k'} + n_{31} \sigma_{2k'}) \Delta(k+1-2-3) +$$

$$+ T_{\bar{k}'1,23}(n_{k1} \sigma_{2\bar{3}} + n_{21} \sigma_{k\bar{3}} + n_{31} \sigma_{k\bar{2}}) \Delta(-k'+1-2-3)\}.$$

Далее, для простоты мы предположим, что пространственная однородность одномерна (вдоль оси z). Тогда

$$n_{kk'} = n(k_\perp, k_z, k'_z)\, \delta(k_\perp - k'_1),$$

$$\sigma_{kk'} = \sigma(k_\perp, k_z, k'_z)\, \delta(k_1 - k'_\perp). \tag{24.5}$$

Учитывая, что при фиксированном $k_\perp$ пакеты $n_{k_\perp}(k_z, k'_z)$ и $\sigma_{k_\perp}(k_z, k'_z)$ сосредоточены в узком слое: $\Delta k_z \ll k$, можно в (24.4) разложить $\omega(k_\perp, k_z)$ в ряд по $k_z - k_z^0$ (k_z^0 – центр пакета: $k_z^0 = f(k_\perp)$) и пренебречь зависимостью $T_{12,34}(k_z - k_z^0)$. Полученные уравнения упрощаются после перехода в r-представление по координате z:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_k + v_k \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\right) + i\tilde{\omega}_k(z) - i\tilde{\omega}_k(z')\right] n_k(z, z') +$$

$$+ i\,[\sigma^*_{-k}(z, z') P_k(z', z') - P^*_k(z, z)\, \sigma_k(z', z)] = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_k + v_k \left(\frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial z}\right) + i\tilde{\omega}_k(z) + i\tilde{\omega}_k(z') - i\omega_p\right] \sigma_k(z', z) + \tag{24.6}$$

$$+ i\,[P_k(z', z')\, n_{-k}(z', z) + P_{-k}(z, z)\, n(z, z')] = 0.$$

Здесь

$$(2\pi)^3 n_k(z, z') = \int n_{k_\perp}(k_z, k'_z) \exp i\,[k_z z - k'_z z' - k_z^0 (z - z')]\, dk_z dk'_z,$$

$$\tilde{\omega}_k(z) = \omega_k + 2 \int T_{kk'} n_{k'}(z, z)\, dk'_\perp,$$

$$P_k(z, z') = h V_k + \int S_{kk'} \sigma_{k'}(z', z)\, dk', \tag{24.7}$$

$$(2\pi)^3 \sigma_k(z', z) = (2\pi)^3 \sigma_{-k}(z, z') =$$

$$= \int \sigma_{k_\perp}(k_z, k'_z) \exp i\,(k_z z - k'_z z' - k_z^0 (z - z'))\, dk_z dk'_z,$$

$$v_k = \partial\omega_k / \partial k_z, \quad \omega'' = \partial^2 \omega_k / \partial k_z^2,$$

$$T_{kk'kk'} \equiv T_{kk'},$$

$$T_{k\bar{k}, k'\bar{k}'} = S_{kk'}.$$

Для простоты мы отбросили несущественные, как правило, члены с антиэрмитовыми частями S и T, а также дифракционные члены, пропорциональные ω''.

В пространственно-однородном случае уравнения (24.7) переходят в основные уравнения S-теории. Если амплитуда накачки h медленно (по сравнению с длиной волны k^{-1}) изменяется в пространстве, то в (24.6) h зависит от z. Существенно, что приведенные здесь уравнения допускают факторизованное решение вида

$$n_k(z, z') = A_k^*(z) A_k(z'), \quad \sigma_k(z, z') = A_k(z') A_{-k}(z), \tag{24.8}$$

где $A_k(z)$ удовлетворяет уравнению, обобщающему (18.11):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + v_k \frac{\partial}{\partial z} + i(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)\right] A_k + iP_k A_{-k}^* = 0,$$

$$P_k = hV_k + \int S_{kk'} A_{k'} A_{-k'} dk', \quad \tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\int T_{kk'} |A_{k'}|^2 dk'. \tag{24.9}$$

Подчеркнем, что уравнения (24.6), полученные в приближении самосогласованного поля, не содержат стохастизирующих факторов и именно поэтому допускают динамическое решение (24.9). Если же есть внешние причины для стохастизации, например, за счет начальных или граничных условий, то поведение волн будет описываться решениями уравнений (24.6) более общего вида.

24.2. Спектр коллективных колебаний $\Omega(\vec{\kappa})$. Для того чтобы найти $\Omega(\vec{\kappa})$, необходимо линеаризовать уравнения (24.9) на однородном фоне: $A_k(z) = A_k^0 + b_k(z)$ и отыскивать их решение в виде $b_k(z)$, $b_k^*(z) \sim \exp(i\kappa r - i\Omega t)$. Приведем результаты в двух простых, но важных случаях.

Изотропная модель: $S_{kk'} = S$, $T_{kk'} = T$, $V_k = V$. Этот случай характерен для АФМ ЛП. Зависимость частоты КК от их волнового вектора определяется дисперсионным уравнением

$$\Delta^2 (\Omega + 2i\gamma)\Omega \int_0^{2\pi} [(\kappa v)^2 \cos^2\varphi + \Omega(\Omega + 2i\gamma)]^{-1} d\varphi = 4\pi^2, \tag{24.10}$$

в котором Δ задается формулой (23.6) при $\gamma = 0$. Для $(\kappa v) \ll \Delta$ решение (24.10) имеет вид

$$\Omega(\kappa) = -i\gamma \pm [\Delta^2 + (\kappa v)^2 - \gamma^2]^{1/2}. \tag{24.11}$$

При $\kappa = 0$ (24.11) переходит в выражение для частоты пространственно-однородных КК, изученных нами в предыдущем параграфе. При отрицательных Δ^2 развивается неустойчивость. Наиболее неустойчивы колебания $\kappa = 0$, область неустойчивости простирается до $\kappa v = \Delta/2$, при $\Delta^2 > 0$ стационарное решение устойчиво при всех κ. *Аксиально-симметричная* модель. Изучим спектр КК $\Omega(\kappa)$ в важном для экспериментов в ФМ случае, когда амплитуда волн отлична от нуля на широтах $\theta = \theta_0$ и $\theta = \pi/2 - \theta_0$. В кубических ФМ при параллельной накачке при надкритичности до 6÷8 дБ $\theta = \pi/2$ (экватор), при поперечной накачке часто реализуется случай $\theta = \pi/4$. Наиболее просто выглядит зависимость $\Omega(\vec{\kappa})$ в случае, когда $\vec{\kappa}$ параллельно оси

симметрии. Для каждой гармоники с номером m можно получить

$$\Omega_{m1\pm}(\kappa) = -i\gamma \pm [\delta_{m1}^2 - \gamma^2]^{1/2}, \; \Omega_{m2\pm}(\kappa) = -i\gamma \pm [\delta_{m2}^2 - \gamma^2]^{1/2},$$

$$\delta_{m1,2}^2 = (\kappa v)^2 + \tfrac{1}{2}[\Delta_{m1}^2 + \Delta_{m2}^2] \pm$$

$$\pm [\tfrac{1}{4}(\Delta_{m1}^2 - \Delta_{m2}^2)^2 + (\kappa v)^2 (\Delta_{m1}^2 + \Delta_{m2}^2 + \Delta_m^2)]^{1/2}, \tag{24.12}$$

$$\Delta_m^2 = 4(T_m^+ - T_m^-)(T_m^+ + T_m^- + S_m) N^2,$$

$$\Delta_{m1}^2 = [\tfrac{1}{2}\omega''\kappa^2 + (2S_m + T_m^+ + T_m^-) N]^2 - (T_m^+ + T_m^-)^2 N^2,$$

$$\Delta_{m2}^2 = [\tfrac{1}{2}\omega''\kappa^2 + (T_m^+ - T_m^-) N]^2 - (T_m^+ - T_m^-)^2 N^2.$$

Здесь $T_m^{\pm}$, S_m – фурье-гармоники коэффициентов $T(k_z, k_z, (\varphi - \varphi'))$, $S[k_z', k_z(\varphi - \varphi')]$ уравнения (24.9). При $\delta_{m1,2}^2(\kappa) > 0$ выражения (24.12) соответствуют КК с частотой $\pm\delta_{m1,2}$ и декрементом затухания γ, равным декременту затухания СВ при $\delta_{m1,2}^2(\kappa) < 0$: $\operatorname{Im}\Omega > 0$. Это соответствует экспоненциальному росту КК – неустойчивости пространственно-однородного распределения ПСВ.

Проанализируем полученные выражения (24.12) для частот КК. При $\kappa = 0$

$$\delta_{m1}^2(0) = \Delta_{m1}^2(0) = 4S_p(T_p^+ + T_p^- + S_p) N^2. \tag{24.13}$$

Это выражение для частоты пространственно-однородных колебаний получено в предыдущем параграфе. Колебание $\Omega_m(0)$ устойчиво, если $S(T_m^+ + T_m^- + S_m) > 0$. Колебание Ω_{m2} безразлично устойчиво. При малых κv имеем

$$\delta_{m1}^2(\kappa) = \delta_{m1}^2(0) + (\kappa v)^2 (2S_m + T_m^+ - T_m^-)/S_m,$$

$$\delta_{m2}^2(\kappa) = (\kappa v)^2 (T_m^- - T_m^+)/S_m. \tag{24.14}$$

Таким образом, если $S_m(T_m^+ - T_m^-) < 0$, становится неустойчивой ветвь КК $\delta_{m2}(\kappa)$ при $\kappa \neq 0$. При этом с ростом κ увеличивается запас устойчивости и ветви δ_{m1}. Полагая $\Delta_{m1}^2 > 0$, $\Delta_m^2 > 0$, находим, что ветвь δ_{m1} устойчива при любых κv, а область неустойчивости δ_{m2} заключена между $\kappa = 0$ и $\kappa = \kappa_0$, где $(\kappa_0 v) = \Delta_m^2$. В кубических ФМ может оказаться, что $\kappa v = 0$. Это происходит, если волны возбуждены на экваторе, а возмущение перпендикулярно его плоскости, или когда из-за анизотропного закона дисперсии групповая скорость для возбужденных волн $v(\theta)$ обращается в нуль для $\theta = \theta_0$. В этом случае (24.12) упрощается и принимает вид

$$\Omega_{m\pm}(\kappa) = -i\gamma \pm \{[2(T_m + S_m)N + \tfrac{1}{2}\omega''\kappa^2]^2 - 4T_m^2 N^2 - \gamma^2\}^{1/2}. \tag{24.15}$$

Для простоты мы положили $T^+ = T^- = T$. Это соотношение всегда выполняется, например, для волн, возбужденных на экваторе. При этом вторая ветвь колебаний δ_{m2} всегда устойчива. Из выражения (24.15) видно, что, даже если $\delta_{m1}^2(0) > 0$, возможно возникновение неустойчивости в области $\omega''\kappa^2 \approx 4(T_m + S_m)N$, если $\omega''(T_m + S_m) > 0$. Как будет показано ниже, развитие неустойчивости с $\kappa = 0$ приводит к возникновению автоко-

лебаний интегральной амплитуды волн. При параметрическом возбуждении СВ в ФМ экспериментально они проявляются как автоколебания намагниченности. В кубических ФМ знак ω'' зависит от напряженности внешнего поля, и легко создать ситуацию, когда пространственно-однородные колебания устойчивы, а неустойчивость локализована в области $\omega''\kappa^2 \backsim SN$. В результате развития этой неустойчивости может возникнуть стационарная, пространственно-однородная картина $A_k(z)$ с масштабом $(SN/\omega'')^{1/2}$, глубиной модуляции порядка единицы и средним уровнем порядка N. Возникает интересная и до сих пор не решенная задача нахождения таких стационарных состояний и исследования их устойчивости в рамках уравнений (24.9). Интересно попытаться также обнаружить это явление экспериментально.

24.3. Замечание к S-теории в ограниченном образце. Очевидно, что в глубине достаточно большого образца реализуется решение S-теории, а на границе амплитуда отлична от него. Поэтому большой интерес представляет вопрос о характере приближения решения $A(z)$ к однородному распределению S-теории. Очевидно, что получающиеся уравнения идентичны уравнениям (24.9), изученным в задаче о КК, если положить там $\partial/\partial t = 0$. Поэтому дисперсионное уравнение для κ получаем непосредственно из (24.12), полагая $\Omega(\kappa) = 0$:

$$\delta^2_{m1,2}(\kappa) = 0, \ \delta A(z) \backsim \exp i\kappa z. \tag{24.16}$$

Поскольку $\delta^2_{m1,2}$ как функции κ являются полиномами, выход на асимптотику S-теории носит экспоненциальный характер. Определим характерные масштабы выхода на однородное решение.

За исключением случая, когда волны распространяются параллельно границам образца, можно пренебречь в (24.16) членами с $\omega''\kappa^2$. Тогда (24.16) упрощается до вида

$$(\kappa v)^2 = \Delta^2_m = 4(T^+_m - T^-_m)(T^+_m + T^-_m + S_m)N^2. \tag{24.17}$$

Выход на однородное решение происходит лишь при $\Delta^2_m < 0$, т.е. когда оказывается устойчивой мода δ_{m2}. Если же волны распространяются параллельно границе ($\kappa v = 0$ и $T^+ = T^-$), то дисперсионное уравнение для κ получается, если положить равными нулю $\Omega(\kappa)$ в формуле (24.15):

$$[2(T+S)N + \tfrac{1}{2}\omega''\kappa^2]^2 = 4T^2N^2. \tag{24.18}$$

Отрицательные κ^2 являются решением этого уравнения только в том случае, если $S(2T+S) > 0$, $\omega''(T+S) > 0$. Мы видим, что эти требования совпадают с условиями устойчивости основного состояния. Таким образом, экспоненциальная асимптотика выхода на однородное решение S-теории тесно связана с устойчивостью основного состояния относительно коллективных возбуждений. Именно в устойчивом случае существуют только комплексные решения уравнения $\Omega_p(\kappa)$. Если же основное состояние неустойчиво относительно пространственно-неоднородных возмущений, то, как уже отмечалось выше, кроме однородного существуют квазипериодические распределения колебаний со средним уровнем SN. В этом случае действительные κ, полученные из (24.17), (24.18), означают, что мы нашли простейшие решения такого типа.

§ 25. Резонансное возбуждение коллективных колебаний малой амплитуды – теория и эксперимент

Рассмотренные выше КК системы ПСВ можно возбуждать (так же, как и колебания любой другой природы) различными способами – с помощью резонансного внешнего воздействия, параметрически или ударным образом. И все эти способы возбуждения были реализованы в экспериментах на ФМ и АФМ ЛП. Проще всего построить теорию и интерпретировать экспериментальные данные для резонансного способа возбуждения КК. Именно таким образом в 1972 г. и были обнаружены и исследованы КК В.В. Зауткиным, В.С. Львовым и С.С. Старобинцем [85]. В этой работе на образец ЖИГ, помимо параллельной накачки, подавался другой СВЧ сигнал с той же поляризацией $\boldsymbol{h}_z \parallel \boldsymbol{h} \parallel \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{h}_z(t)\exp(-i\omega t)$, частота которого ω отличалась от частоты накачки ω_p на частоту КК Ω. При этом роль резонансной внешней силы играли биения между двумя СВЧ сигналами на резонансной частоте. Впоследствии в 1975 г. Б.И. Орлом и С.С. Старобинцем [194] был реализован прямой резонансный метод возбуждения с помощью переменного магнитного поля на частоте КК, которая лежит в радиочастотном диапазоне (порядка 1 МГц). В принципе КК можно возбуждать и звуком, частота и волновой вектор которого совпадают с частотой и волновым вектором КК. Все эти методы возбуждения КК и будут рассмотрены в настоящем параграфе.

25.1. Исходные уравнения и их решение в линейном приближении. Интересуясь поведением только пространственно-однородных КК нулевой моды ($\kappa = 0$, $m = 0$), мы усредним уравнения движения S-теории (18.11) по всем направлениям $\boldsymbol{k}$ в пакете ПСВ:

$$[\partial/\partial t + \gamma + i(\omega_k - \omega_p/2 + 2T_0 c^* c)]\, c + i(hV_0 + S_0 c^2)\, c^* = -if(t), \quad (25.1)$$

$$f(t) = f_\Omega \exp(-i\Omega t) + f_{\overline{\Omega}} \exp i\Omega t. \quad (25.2)$$

Здесь $|c^2| = N$ – интегральное число ПСВ в пакете, V_0, T_0 и S_0 – усредненные по пакету коэффициенты гамильтониана задачи. Для кубических ФМ они задаются формулами (23.5), для АФМ ЛП – формулами (7.13). В первую часть (25.1) добавлена периодическая сила $f(t)$, природу которой мы сейчас конкретизируем.

а) В случае, когда на систему ПСВ действует дополнительный слабый сигнал на частоте ω (см. задачу 5.3),

$$f_\Omega = h_z V_0 c_0^*, \quad f_{\overline{\Omega}} = 0, \quad \Omega = \omega - \omega_p. \quad (25.3)$$

б) Если частота слабого сигнала Ω лежит в радиочастотном диапазоне, то (см. задачу 5.3)

$$f_\Omega = f_{-\Omega} = U_0 c_0 h_z, \quad U_0 = g(1 + \omega_M^2/\omega_p^2). \quad (25.4)$$

Выражение для U_0 соответствует кубическому ФМ, когда ПСВ сосредоточены на экваторе.

в) Если КК в АФМ ЛП возбуждаются звуком, то (см. задачу 5.4)

$$\begin{aligned} f_{\Omega\vec{\kappa}} &= V_{sm}(\vec{\kappa}, \boldsymbol{k})\, c_0 [\beta_{\vec{\kappa},\Omega} + \beta^*_{-\vec{\kappa},-\Omega}], \\ f_{-\Omega\vec{\kappa}} &= V_{sm}(-\vec{\kappa}, \boldsymbol{k})\, c_0 [\beta_{-\vec{\kappa},\Omega} + \beta_{\vec{\kappa},-\Omega}]. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Здесь $\beta_{\vec{\kappa}}(t)$ – каноническая амплитуда звука, а V_{sm} – матричные элементы

взаимодействия звука со СВ, вычисленные В.С. Лутовиновым [144]:

$$\mathcal{H}_{sm} = \sum_{\vec{\kappa}, \boldsymbol{k}} [V_{sm}(\vec{\kappa}, \boldsymbol{k}) \beta_{\vec{\kappa}}(t) c_{\boldsymbol{k}} c^*_{\boldsymbol{k}+\vec{\kappa}} + \text{к.с.}],$$
$$V_{sm} \sim \{\Omega(\vec{\kappa})/[\omega(\boldsymbol{k})\,\omega(\boldsymbol{k}+\vec{\kappa})]\}^{1/2}. \tag{25.6}$$

Выражения (25.2) подсказывают форму, в которой следует искать решение уравнений (25.1) в линейном по f приближении:

$$C(t) = C_0 + C(\Omega)\exp(-i\Omega t) + C(-\Omega)\exp i\Omega t,$$
$$C(\Omega) + \epsilon_+(\Omega) f(\Omega) + \epsilon_-(\Omega) f^*(-\Omega). \tag{25.7}$$

Простые вычисления здесь дают

$$\epsilon_+(\Omega) = -[\Omega + i\gamma + 2(T_0 + S_0)N]\,\Delta^{-1}(\Omega),$$
$$C_0\epsilon_+ = C_0^*\epsilon_-,$$
$$\Delta(\Omega) = \Delta_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega,\ \ \Delta_0^2 = 4S_0(2T_0 + S_0)N, \tag{25.8}$$
$$N = |C_0|^2.$$

Как и следовало ожидать, восприимчивости ϵ максимальны, когда частота внешней силы Ω близка к собственной частоте коллективного резонанса Δ_0.

25.2. Возбуждение КК СВЧ магнитным полем. Эффективность возбуждения КК магнитным полем h_z можно характеризовать восприимчивостью $\chi(\omega_p + \Omega)$:

$$m_z(\omega_p + \Omega) = \chi(\omega_p + \Omega)\, h_z(\omega_p + \Omega). \tag{25.9}$$

Здесь $m_z(\omega_p + \Omega)$ – амплитуда колебаний на частоте $\omega_p + \Omega$ продольной компоненты намагниченности $m_z(t)$, которая зависит от числа СВ и, следовательно, изменяется при возбуждении КК. В нашем приближении и в обозначениях, принятых в этом параграфе, нетрудно получить $m_z(\omega_p + \Omega) = V_0 C_0 C_\Omega$. Используя выражения (25.7), (25.8) для C_Ω, C_0 и f_Ω и определение (25.9), получим выражение для мнимой части восприимчивости к слабому СВЧ сигналу, характеризующей поглощение его энергии системой ПСВ:

$$\chi''(\omega_p + \Omega) = \chi''\left(\frac{h}{h_{\text{th}}}\right)^2 \frac{2\gamma^2[\Omega_0^2 + \Omega^2 + 4\Omega(T_0 + S_0)N]}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}. \tag{25.10}$$

Здесь χ'' – мнимая часть восприимчивости к полю накачки h, задаваемая формулой (21.4). При большой надкритичности, когда $\Delta_0^2 \gg \gamma^2$, форма линии (25.10) близка к лоренцевой с шириной, равной затуханию СВ γ. В точках резонанса восприимчивость равна

$$\chi''(\omega_p \pm \Omega_0) = \chi''(h/h_1)^2[(1 + T_0^2/(S_0(2T_0 + S_0))^{1/2}]. \tag{25.11}$$

Имеет принципиальное значение то, что восприимчивость может стать отрицательной: это соответствует не поглощению, а усилению слабого сигнала. Из формул (25.11) следует, что поглощение происходит на частоте $\omega_p + \Omega$, а усиление – на зеркальной частоте $\omega_p - \Omega$. Возникновение усиления можно трактовать как следствие распадной неустойчивости основного состояния (с "медленной" частотой, равной нулю) на электромагнитное излучение (с медленной частотой Ω) и КК с собственной частотой Δ_0. Закон сох-

ранения энергии в этом процессе $\Delta_0 + \Omega = 0$. Таким образом, усиление происходит на частоте $\Omega = -\Delta_0$, что соответствует формуле (25.11). Поглощение на этом языке есть следствие процесса распада слабого сигнала на основное состояние и КК с законом сохранения $\Omega = \Omega_0$.

Экспериментально коллективный резонанс наблюдался В.В. Зауткиным, В.С. Львовым, С.С. Старобинцем [85] на монокристаллах ЖИГ. Отмечено хорошее количественное согласие с представленной здесь теорией. В частности, экспериментальные зависимости восприимчивости к слабому сигналу и частоты КК от мощности накачки хорошо согласуются с зависимостями, определяемыми формулами (25.11) и (25.8) вплоть до второго порога $h/h_{\text{th}} = 8$ дБ. Отметим также, что коллективный резонанс можно использовать как удобный и наглядный метод измерений времени релаксации СВ. Измерения показывают, что в соответствии с теорией ширина линии резонансного поглощения практически не зависит от мощности накачки и хорошо согласуется со значением γ, полученным по значению порога параллельной накачки.

25.3. Радиочастотная магнитная восприимчивость и коллективный резонанс ПСВ в ФМ и АФМ. Рассмотренный в предыдущем пункте способ раскачки КК на частоте Ω с помощью продольного СВЧ поля h_z на частоте $\omega_p + \Omega$ выглядит несколько искусственно. Казалось бы, более естественно для этого использовать РЧ магнитное поле на частоте Ω. Однако первые попытки зарегистрировать этот эффект не увенчались успехом из-за малой восприимчивости в РЧ диапазоне, и только в 1975 г. Б.И. Орлу и С.С. Старобинцу [194] удалось обнаружить обсуждаемый эффект с помощью примененной ими высокочувствительной методики.

Для вычисления восприимчивости $\chi(\Omega)$ к продольному полю $h_z(\Omega)$ отметим, что в обозначениях этого параграфа выражение для переменной части m_z на частоте Ω имеет вид

$$m_z(\Omega) = U_0 (C_0^* C_\Omega + C_0 C_{-\Omega}^*) = \chi(\Omega) h_z(\Omega). \tag{25.12}$$

Используя формулы (25.4), (25.7) и (25.8), легко получить

$$\begin{aligned} &\chi = 2U_0^2 S_0 N^2/\Delta^*(\Omega), \\ &\Delta(\Omega) = \Delta_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega. \end{aligned} \tag{25.13}$$

Максимальному значению χ''_Ω соответствует резонансная частота $\Omega_{\text{рез}}$, которая, вообще говоря, не совпадает с Δ_0 и при $\Delta_0 \gtrsim 2\gamma$ с хорошей точностью равна

$$\Omega_{\text{рез}}^2 \approx \Omega_0^2 - \gamma^2. \tag{25.14}$$

В этом приближении полуширина кривой коллективного резонанса, измеренная на уровне 1/2, равна релаксации СВ γ. Приведем значение восприимчивости в резонансе:

$$\chi''_{\text{рез}} \approx \frac{g^2 (\Omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} S_0 N_0^2}{\gamma (\Omega_0^2 - \frac{3}{4}\gamma^2)}. \tag{25.15}$$

При большой надкритичности $\Delta_0^2 \gg \gamma^2$ и формула (25.15) упрощается. Раскрывая зависимость Ω_0 и N_0 от $p = (h/h_{\text{th}})^2$, получим

$$\chi''_{\text{рез}} = \frac{S_0}{|S_0|} \frac{g^2 (p-1)^{1/2}}{2S_0 (T_0 + S_0)^{1/2}}. \tag{25.16}$$

Рис. 25.1. Зависимость частоты коллективных колебания от мощности накачки в сфере ЖИГ

Рис. 25.2. Зависимость частоты КК от мощности накачки в антиферромагнитном $MnCO_3$

Из этой формулы следует важный вывод: при $S_0 > 0$, как это обычно бывает в ФМ, $\chi'' > 0$ и радиочастотное излучение поглощается в образце. Если же $S_0 < 0$ (случай АФМ ЛП), то $\chi'' < 0$, чему соответствует не поглощение, а усиление радиочастотного сигнала. Если это усиление превысит затухание в колебательном контуре, то должна возникнуть неустойчивость относительно возбуждения колебаний на частоте Ω – своеобразный лазерный эффект.

Изложенная в этом пункте теория хорошо подтверждается экспериментом Б.И. Орла и С.С. Старобинца [194]. В частности, их экспериментальные данные по зависимости χ'' от надкритичности в резонансе полностью описываются формулой (25.16). Наблюдаемая частота КК также количественно совпадает с вычисленной по формуле (25.16) (рис. 25.1). Таким образом, S-теория дает согласующееся с экспериментом описание СВЧ и РЧ резонанса КК без каких-либо подгоночных параметров. Это свидетельствует о том, что физические представления о природе КК, описанные в этом параграфе, являются правильными.

К резонансным методам возбуждения КК примыкает изящный метод ударного возбуждения КК с помощью резкого изменения фазы накачки, который предложен Л.А. Прозоровой и А.И. Смирновым в 1974 г. [200]. Их данные по собственной частоте ПСВ в антиферромагнитном $MnCO_3$ (рис. 25.2) также хорошо согласуются с теоретической зависимостью (23.4). Это еще раз свидетельствует о том, что S-теория верно описывает параметрическое возбуждение СВ не только в ФМ, но и в АФМ.

25.4. Взаимодействие КК со звуком и его неустойчивость (В.Б. Черепанов [288]). С теоретической точки зрения этот вопрос не отличается от вопроса о взаимодействии КК с РЧ полем, необходимо только заменить выражение для силы f_Ω (25.4) на (25.5). Однако поставить эксперимент по измерению восприимчивости КК к звуку довольно сложно. Поэтому при изу-

чении взаимодействия КК со звуком больше внимания заслуживает другая постановка задачи, в которой изучаются совместные движения КК и звука. Вычислим частоты этих движений. Из выражения для гамильтониана магнитоупругого взаимодействия $\mathcal{H}_{sm}$ (25.6) следуют уравнения движения для комплексной амплитуды звука $\beta_{\Omega\vec{\kappa}}$:

$$[\Omega - \Omega_S(\vec{\kappa}) + i\Gamma_S(\vec{\kappa})]\beta_{\vec{\kappa}\Omega} = V^*(\boldsymbol{k}, \vec{\kappa})[C_0^* C_\Omega + C_0 C_{\bar{\Omega}}^*],$$
$$[\Omega + \Omega_S(\vec{\kappa}) + i\Gamma_S(\vec{\kappa})]\beta_{\vec{\kappa}\bar{\Omega}} = V^*(\boldsymbol{k}, \vec{\kappa})[C_0^* C_\Omega + C_0 C_{\bar{\Omega}}^*]. \tag{25.17}$$

Здесь $\Omega_S(\vec{\kappa})$ и $\Gamma_S(\vec{\kappa})$ – частота и затухание звука с волновым вектором $\vec{\kappa}$ в отсутствие ПСВ. Рассматривая эти уравнения совместно с (25.7), (25.8) и (25.5), получим из условия равенства нулю детерминанта полной системы уравнений для $\beta_{\vec{\kappa},\Omega}, \beta_{\vec{\kappa},\Omega}, c_\Omega$ и $c_{-\Omega}$:

$$\{[\Omega + i\Gamma_S(\vec{\kappa})]^2 - \Omega_S^2(\vec{\kappa})\}\,[\Omega(\Omega + i\gamma) - \Delta_0^2] =$$
$$= 8\Omega_S(\vec{\kappa})\,SN^2\,|\chi(\vec{\kappa}, \boldsymbol{k})|^2. \tag{25.18}$$

Наиболее прост для исследования случай, когда можно пренебречь затуханием СВ и звука. Тогда

$$\Omega_\pm^2(\vec{\kappa}) = ½\,\{\Omega_S^2(\vec{\kappa}) + \Omega_0^0 \pm [(\Omega_S^2 - \Omega_0^2)^2 + 32SN\Omega_S(\vec{\kappa})\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2 N]^{1/2}\}, \tag{25.19}$$

матричный элемент S отрицателен (см. (7.13)), поэтому вблизи резонанса связанные колебания ПСВ и упругой подсистемы неустойчивы. Учет затухания СВ и звука приводит к тому, что неустойчивость связанных колебаний (25.18) развивается, если число ПСВ N больше порогового $N_{\text{cr}}(\vec{\kappa})$. Минимальное значение N_{cr} достигается в резонансе при $\Omega_0 = \Omega_S(\vec{\kappa})$:

$$2\,|SN_{\text{cr}}|^2 = -\gamma\Gamma\Omega_0^2\,|S|/(\Omega_{\vec{\kappa}}\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2). \tag{25.20}$$

Взаимодействие КК со звуком существенно и вдали от резонанса. В этом случае из (25.18) следует

$$\Omega_1(\vec{\kappa}) = \Omega(\vec{\kappa}) + 4SN^2\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2/(\Omega_{\vec{\kappa}}^2 - \Omega_0^2) -$$
$$- i\,[\Gamma_{\vec{\kappa}} + 8\gamma_{\boldsymbol{k}}\Omega_{\vec{\kappa}}SN^2\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2/(\Omega_{\vec{\kappa}}^2 - \Omega_0^2)^2], \tag{25.21}$$
$$\Omega_2(\vec{\kappa}) = \Omega_0 + 4SN^2\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2\,\Omega_{\vec{\kappa}}/(\Omega_0(\Omega_0^2 - \Omega_{\vec{\kappa}}^2)) -$$
$$- i\,[\gamma_{\boldsymbol{k}} + 8\Gamma_{\vec{\kappa}}\Omega_{\vec{\kappa}}SN^2\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2/(\Omega_0 - \Omega_{\vec{\kappa}}^2)^2].$$

В отсутствие магнитоупругого взаимодействия колебания с частотой Ω_1 являются чисто акустическими, а с частотой Ω_2 – коллективными колебаниями ПСВ. Затухание длинноволнового звука $\Gamma_{\vec{\kappa}}$, как правило, мало́ по сравнению с затуханием ПСВ $\gamma_{\boldsymbol{k}}$, поэтому при отрицательном S затухание колебаний звукового типа $\Omega_1(\vec{\kappa})$ может стать отрицательным, что означает неустойчивость. Порог этой неустойчивости достигается при некотором числе ПСВ $N_{\text{cr}}(\vec{\kappa})$, когда

$$8S^2N_{\text{cr}}^2 = \gamma_{\boldsymbol{k}}\Gamma_{\vec{\kappa}}\frac{|S|\,(\Omega_{\vec{\kappa}}^2 - \Omega_0^2)^2}{|V|^2\Omega_{\vec{\kappa}}\gamma_{\boldsymbol{k}}^2}.$$

А.И. Смирновым в 1983 г. [208] было обнаружено возбуждение акустической моды образца при достижении некоторой мощности накачки. Ввиду конечности образца частота акустических колебаний $\Omega_S(\vec{\kappa})$ была сущест-

венно больше частоты КК Ω_0. В этом случае порог возбуждения звуковых колебаний равен N_{cr}. Оценка по S-теории соответствующей величины $p = (h_{\text{cr}}/h_{\text{th}})^2$ для эксперимента А.И. Смирнова дает $p = 25$. Экспериментально полученное значение этой величины составляет $50 \div 100$. Учитывая то, что значения $|V_{kk\vec{\kappa}}|$, $|S|$ и затухание γ_k известны недостаточно точно, такое соответствие теории и эксперимента следует считать удовлетворительным.

§ 26. Порог параметрического возбуждения в условиях периодической модуляции магнитного поля: теория и эксперимент

Наша задача заключается теперь в изучении КК большой амплитуды. Одним из методов их возбуждения является сильная периодическая модуляция магнитного поля на частоте, близкой к собственной частоте КК. Разумеется, прежде чем исследовать запороговое состояние СВ в присутствии сильного РЧ поля, необходимо изучить влияние этого поля на порог параметрического возбуждения. Впервые этот вопрос рассматривался Х. Сулом [213], показавшим, что при периодической модуляции подмагничивающего поля (или частоты накачки) порог параметрической неустойчивости растет вследствие нарушения в среднем условия параметрического резонанса. Согласно Х. Сулу при соответствующем выборе частоты и амплитуды модуляции неустойчивость пропадает – ее порог становится бесконечно большим. Идея Х. Сула экспериментально проверялась Т.С. Хартвиком, Е.Р. Перессини и М.Т. Вейссом [221]. Они, однако, не получили полного соответствия с выводами теории, в частности, им не удалось увеличить порог больше чем на 10 дБ. Это несоответствие объясним в развитой ниже теории. Приведем также подробные экспериментальные результаты, которые подтверждают нашу теорию.

Рассмотрим параметрическое возбуждение СВ в магнитном поле

$$H = H_m(t) + H_0 + h\cos\omega_p t. \tag{26.1}$$

Здесь H_0 – постоянное магнитное поле, $H_m(t)$ – модулирующее поле, $h\cos\omega_p t$ – СВЧ накачка на частоте ω_p. Вычисление порога параллельной накачки в поле (26.1) с произвольным законом модуляции $H_m(t)$ представляет собой довольно трудную задачу. Поэтому рассмотрим вначале простейший вариант модуляции – с помощью прямоугольных периодических импульсов (режим типа "меандр" с периодом 2τ). Уравнения движения для нормальных амплитуд СВ в линейном приближении имеют вид

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\Delta_k + 2\upsilon_k H_m)\right] c_k + ihV_k c^*_{-k} = 0,\\
&0 < t < \tau,\\
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\Delta_k - 2\upsilon_k H_m)\right] c_k + ihV_k c^*_{-k} = 0,\\
&\tau < t < 2\tau.
\end{aligned} \tag{26.2}$$

Полагая c_k, $c^*_{-k} \sim \exp\nu t$, находим, что инкремент ν в разные временные

интервалы равен

$$\nu_1 = \nu(0-\tau) = -\gamma \pm [\,|hV_k|^2 - (\Delta_k + 2\upsilon_k H_m)^2]^{1/2},$$
$$\nu_2 = \nu(\tau - 2\tau) = -\gamma \pm [\,|hV_k|^2 - (\Delta_k - 2\upsilon_k H_m)^2]^{1/2}. \tag{26.3}$$

Рассмотрим случай $\gamma\tau \gg 1$, когда можно пренебречь затухающими решениями, соответствующими отрицательному знаку перед квадратным корнем в (26.3). Тогда суммарный инкремент нарастания за период следования импульсов равен $\nu_1 + \nu_2$.

Из условия $\mathrm{Re}\,\nu = 0$ получим порог неустойчивости:

$$|h_{\mathrm{th}1} V|^2 = \gamma_k^2 + (2\upsilon_k H_m)^2 + \Delta_k^2\,[1 + 4\upsilon_k^2 H_m^2/\gamma^2], \tag{26.4}$$

$$|h_{\mathrm{th}2} V|^2 = 4\gamma_k^2 + (\Delta_k \mp 2\upsilon_k H_m)^2. \tag{26.5}$$

Выражение (26.4) соответствует малым амплитудам модуляции, когда $|hV_k| > |2\upsilon_k H_m \pm \Delta_k|$, при этом минимальный порог неустойчивости достигается при $\Delta_k = 0$, т.е. для СВ на резонансной поверхности $\omega_k = \omega_p/2$. Соответствующий им порог равен

$$|h_{\mathrm{th}1} V|^2 = \gamma_k^2 + 4\upsilon_m^2 H_m^2, \quad \Delta_k = 0. \tag{26.6}$$

При больших амплитудах модуляции, соответствующих (26.5), возникают дополнительные локальные минимумы порога при $\Delta_k = \pm 2\upsilon_k H$. Величина порога $|h_{\mathrm{th}2} V|$ на этих поверхностях постоянна и равна $2\gamma_k$. Таким образом, критическая амплитуда модуляции $H_{m,\mathrm{cr}} = \sqrt{3}\gamma/2\upsilon_k$ разделяет два режима параллельной накачки: режим слабой модуляции, когда минимальный порог задается уравнением (26.6), и режим сильной модуляции, когда он перестает расти и равен 2γ. При этом возникает расстройка, величина которой растет пропорционально амплитуде модулирующего поля. Этот характерный эффект сильной модуляции – замораживание порога при $H_m > H_{m,\mathrm{cr}}$, вообще говоря, присущ только модуляции прямоугольного типа. Так, нетрудно показать (В.В. Зауткин и др. [88]), что для синусоидальной и пилообразной модуляции величина h_{th} хотя и медленно, но неограниченно растет с увеличением H_m. При $H > H_{m,\mathrm{cr}}$ для синусоидальной и пилообразной модуляции соответственно

$$2|h_{\mathrm{th}} V| = \pi\gamma^{2/3}(\upsilon_k H_m)^{1/3}, \quad |h_{\mathrm{th}} V| = (\gamma\upsilon_k H_m)^{1/2}. \tag{26.7}$$

До сих пор мы рассматривали низкочастотную модуляцию с периодом, меньшим времени релаксации СВ. Отбросим теперь это ограничение и рассмотрим параллельную накачку СВ в магнитном поле, модулированном по синусоидальному закону с произвольной частотой Ω: $H_m(t) = H_m \cos\Omega t$. Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i\Delta_k + i\upsilon_k H_m \cos\Omega t\right) c_k + ihV_k c^*_{-k} = 0. \tag{26.8}$$

Ограничиваясь малыми амплитудами H_m, запишем

$$c_k = c_k^0 + \alpha(\Omega, k)\exp(i\Omega t) + \alpha(-\Omega, k)\exp(-i\Omega t). \tag{26.9}$$

Стационарное решение уравнений (26.8) соответствует порогу неустойчивости. Подстановка (26.9) в (26.8) дает систему уравнений для c_k^0, $\alpha(\pm\Omega, k)$, из которой в квадратичном по α приближении находим соотношение, опре-

деляющее порог:

$$|h_{\text{th}} V_k|^2 = (\gamma_k^2 + \Delta_k^2)\,[1 + 4v_k^2 H_m^2/(\Omega^2 + 4\gamma^2)]^2 . \tag{26.10}$$

Минимальный порог, как и следовало ожидать, для режима слабой модуляции достигается при $\Delta_k = 0$. На низких частотах формула (26.10) при $\Delta_k = 0$ эквивалентна точной формуле (26.6), полученной выше для модуляции прямоугольного типа. Это, по-видимому, означает, что формула (26.10), выведенная в рамках теории возмущений, применима с хорошей точностью вплоть до значений $H_m = H_{m,\text{cr}}$. Причина этого заключается в том, что на высоких частотах модуляции малым параметром теории является $2v_k H_m/\Omega$, а на низких частотах – Ω/γ_k.

В общем случае модуляции с произвольной частотой и произвольной амплитудой сравнительно простое выражение для порога неустойчивости получается лишь для прямоугольной модуляции. Приведем без вывода уравнение, определяющее h_{th}:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch}(2\gamma_k \tau) = \operatorname{ch}(\mu_+ \tau)\operatorname{ch}(\mu_- \tau) + \\ &+ \operatorname{sh}(\mu_+ \tau)\operatorname{sh}(\mu_- \tau)\,(\,|h_{\text{th}} V_k|^2 - \Delta_+\Delta_-)/(\mu_+\mu_-), \\ &\Delta_\pm = \Delta_k \pm 2v_k H_m, \quad \mu_\pm = |h_{\text{th}} V_k|^2 - \Delta_\pm^2 . \end{aligned} \tag{26.11}$$

В случае низких частот (больших τ) отсюда несложно получить формулу (26.2). На высоких частотах ($\tau \to 0$) имеем

$$|h_{\text{th}} V_k| = \gamma_k (1 + 4v_k^2 H_m^2 \tau^2/3)^{1/2} . \tag{26.12}$$

На рис. 26.1 приведены экспериментальные зависимости порога параллельной накачки в ЖИГ, полученные В.В. Зауткиным и др. [88]. Эти зависимости приведены в "спрямляющих" координатах, в которых по формуле (26.10) при $\Delta_k = 0$ они должны быть прямыми линиями. Видно, что экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую. Наклоны этих прямых и участки, отсекаемые ими на осях координат, в пределах экспериментальных ошибок (10%) совпадают с теорией. Расхождение начинается в области, лежащей ниже некоторой частоты Ω^*, для которой развитая выше теория неприменима. Действительно, мы полагали, что РЧ поле модулирует собственную частоту СВ ω_k, не сдвигая, однако, с места пакета ПСВ в k-пространстве. Очевидно, что на достаточно низких частотах это условие не соблюдается и пакет ПСВ будет следовать за изменением ω_k. При этом условие параметрического резонанса $2\omega_k = \omega_p$ автоматически выполняется в каждый момент времени и влияние модуляции магнитного поля на порог отсутствует.

Оценим характерную частоту, при которой центр тяжести пакета начинает следить за изменением поля. Характерное время нарастания СВ от тепловои амплитуды τ_1 до амплитуды N определяется из условия $\tau_1 (hV - \gamma) \approx \approx \ln (N/N_T)$. Время τ_2, за которое собственная частота СВ изменяется на величину 2γ – ширину пакета ПСВ – очевидно, равно $\tau_2 = \gamma\pi/\Omega v_k H_m$. При $\tau_2 \gtrsim \tau_1$ перемещение пакета будет успевать за изменением магнитного поля. Из условия $\tau_1 = \tau_2$ найдем граничную частоту

$$2\Omega^* \approx \pi v_k H_m/\ln(N/N_T). \tag{26.13}$$

Входящая в эту формулу величина N есть некоторое минимальное число СВ, которое еще регистрируется экспериментальной установкой (обычно

Р и с. 26.1. Зависимость порога параметрического возбуждения от частоты РЧ поля ($H = H_c - 100$ Э). H_m, Э: *1* – 0,14; *2* – 0,21; *3* – 0,28

Р и с. 26.2. Зависимость порогового поля h_{th} от H_m^2: *1* – для прямоугольной модуляции; *2* – для синусоидальной модуляции. (*1*), (*2*) соответствуют начальным участкам кривых с увеличенным в 10 раз масштабом по H_m. $H = H_c = 100$ Э

$N \approx 10^{16} \div 10^{17}$ см$^{-3}$). При комнатной температуре число тепловых СВ в полосе частот $\Delta\omega_k \approx \gamma_k \approx 10^6$ с около $\omega_k = \omega_p/2$ равно $N_T \approx 10^9$ см$^{-3}$, т.е. $\ln(N/N_T) \approx 10$. Взяв $H_m \approx 0{,}1$ Э, находим из (26.13) $\Omega^* = 0{,}02$ МГц, что, учитывая оценочный характер формулы, неплохо согласуется с экспериментом (см. рис. 26.1, на котором Ω^* отмечена стрелкой). Эксперимент также свидетельствует о том, что Ω^* пропорциональна H_m, как и следует из (26.13).

На рис. 26.2 приведены зависимости порогового поля от амплитуды модуляции H_m для сигнала прямоугольной (меандр) и синусоидальной формы. Для $H_m \leqslant 0{,}3$ Э зависимость h_{th} от H_m^2 линейна в соответствии с формулами (26.6) и (26.10). При $H_m > 0{,}3$ Э происходит переход в режим сильной модуляции. Теория в этом случае предсказывает возбуждение двух пакетов СВ. Вследствие зависимости $\gamma(k)$ пороги возбуждения этих пакетов должны несколько отличаться друг от друга. Действительно, при $H_m > 0{,}3$ Э можно наблюдать в некоторой области частот два следующих друг за другом порога, причем больший из них проявляется значительно резче: соответствующее ему время нарастания неустойчивости много меньше.

В режиме сильной модуляции зависимость $h_{\text{th}}(H_m)$ для меандра (кривая *1* на рис. 26.2) выходит на плато в соответствии с теорией. Предельное значение h_{th} зависит от Ω и с уменьшением Ω стремится к значению $2h_{\text{th},0}$. При синусоидальном сигнале порог монотонно растет в соответствии с формулой (26.7). В наших экспериментах увеличение значения порога дости-

гало 3,8 раза при $H_m = 5$ Э. При существенно больших H_m увеличение порога должно прекратиться из-за смещения пакета при модуляции поля.

В заключение этого параграфа надо сказать, что вывод о монотонном возрастании порога по формуле (26.7) для периодической модуляции относится к возбуждению СВ с предельной расстройкой $\Delta_k = \pm 2 v_k H_m$. В интересной работе А.М. Фришмана [220] показано, что при больших H_m возбуждаются СВ с расстройкой $\Delta_k(n) = n\Omega/2$ (Ω – частота РЧ поля), если поле накачки превышает величину $h_{\text{th}}/|J_n(z)|$. Здесь $J_n(z)$ – функция Бесселя от аргумента $z = -v_k H_m/\Omega$. Отсюда следует, что порог параметрической неустойчивости

$$h_{\text{th}}(H_m, \Omega) = h_{\text{th}}(0)\,[\max_n |J_n(z)|]^{-1}$$

является сложной немонотонной функцией от H_m и Ω. Этот нетривиальный вывод теории находится в хорошем количественном соответствии с экспериментом В.И. Ожогина и др. [193] по параметрическому возбуждению СВ в АФМ ЛП.

§ 27. Коллективные колебания большой амплитуды и двойной параметрический резонанс

27.1. Стационарное состояние за порогом в условиях периодической модуляции. Естественно полагать, что периодическая модуляция магнитного поля не изменяет качественный характер процессов, приводящих к ограничению параметрической неустойчивости. При этом, однако, возникает ряд дополнительных эффектов, которые могут заметно изменить стационарные значения амплитуды N и фазы ψ пар ПСВ. Под действием модулирующего РЧ поля возбуждаются КК СВ, которые нелинейным образом взаимодействуют с исходными ПСВ и РЧ полем, в результате чего увеличивается затухание СВ и изменяется их взаимодействие друг с другом. За дополнительное затухание ответственны процессы взаимодействия типа $H_m c\alpha^*$, представляющие собой слияние СВ с РЧ фотоном и при возбуждении коллективной моды α. Очевидно, что эти процессы приводят к добавке к γ, пропорциональной квадрату амплитуды модулирующего поля. Другие процессы взаимодействия типа $c^* c^* \alpha\alpha$ обеспечивают дополнительный канал связи между СВ через коллективные колебания. Эти процессы можно трактовать как перенормировку коэффициента четырехмагнонного взаимодействия $S_{kk'}$. Для того чтобы учесть все эти эффекты, напишем уравнение движения СВ с учетом их взаимодействия друг с другом и с РЧ полем:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\Delta_k + 2T|c|^2) + 2iv H_m(t)\right] c + i(hV + Sc^2)c^* = 0. \qquad (27.1)$$

Оно получается в результате усреднения уравнений движения для амплитуд c_k и c^*_{-k} по всем направлениям волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Мы можем это сделать без потери общности, поскольку нас интересует реакция СВ на однородное РЧ поле, и мы не рассматриваем здесь неоднородные моды коллективных колебаний. Полагая $H_m(t) = H_m \cos\Omega t$, находим из формул (25.4), (25.7) и (25.8) линейную реакцию КК $c(\pm\Omega)$ на поле H_m; под-

ставляя выражение для нее в (27.1), получаем уравнение для стационарной амплитуды c_0:

$$\gamma[1+4H_m^2\, v^2\Omega^2\,|\,\Delta(\Omega)\,|^{-2}]+i\{\Delta_k+[2T+S+$$
$$+2v_k^2\,H_m^2(S\Delta_0^2+2T\Omega^2+3S\Omega^2)\,|\,\Delta(\Omega)\,|^{-2}]N+hV\exp(i\psi)\}=0. \quad (27.2)$$

Здесь $\Delta(\Omega)$ и Δ_0 задаются уравнениями (25.8), Δ_k – расстройка. Положение поверхности в k-пространстве, на которой возбуждены СВ в стационарном состоянии, т.е. величина Δ_k должна находиться из условия устойчивости решения (27.3) относительно малых возмущений δ_c, лежащих вне стационарной поверхности: из условия *внешней устойчивости*. Предоставляем читателю получить его самостоятельно, решив задачу 5.5.. Подставляя ее ответ (27.11) в уравнение (27.2), предствим последнее в виде

$$hV\exp(i\psi)+\tilde{S}N=i\Gamma, \quad (27.3)$$

$$\Gamma=\gamma[1+(2\Omega vH_m)^2\,|\,\Delta(\Omega)\,|^{-2}],$$
$$\tilde{S}=S\left[1+2\,\frac{(vH_m)^2(3\Omega^2+4\gamma^2)(\Omega^2-4S^2N^2)}{(\Omega^2+4\gamma^2)\,|\,\Delta(\Omega)\,|^2}\right]. \quad (27.4)$$

Уравнение (27.3) по форме совпадает с уравнением для стационарного состояния в S-теории (19.4), если в последнем заменить $\gamma\to\Gamma$, $S\to\tilde{S}$ в соответствии с (27.4). Поэтому в присутствии РЧ поля вместо (19.6) следует писать

$$|\tilde{S}\,|N=(\,|hV\,|^2-\Gamma^2)^{1/2}, \qquad hV\sin\psi=\Gamma, \qquad hV\cos\psi+\tilde{S}N=0. \quad (27.5)$$

Эти выражения позволяют вычислить зависимости нелинейных восприимчивостей χ' и χ''от надкритичности h и величины РЧ поля H_m, эти зависимости, как показано В.В. Зауткиным и др. [88], качественно согласуются с экспериментами на образцах ЖИГ.

В интересной работе В.И. Ожогина и др. [193] теоретически и экспериментально изучалось параметрическое возбуждение ядерных спиновых волн (ЯСВ) в АФМ $CsMnF_3$ в условиях модуляции магнитного поля. Продемонстрировано хорошее соответствие между основными выводами линейной по H_m теории с экспериментом до надкритичности ~ 7 дБ и $H_m\approx$ $\approx 0{,}25$ Э. В частности, параметр релаксации ПСВ γ_k, определенный по порогу параметрического возбуждения из формулы $h_{\rm th}V=\gamma$, с точностью до погрешностей измерений совпал с величиной γ, определенной из частотной зависимости по формуле (26.3). Существенно, что последний метод определения γ_k дает более высокую абсолютную точность измерений.

27.2. Параметрическое возбуждение коллективных колебаний. Кроме рассмотренного выше линейного взаимодействия коллективных колебаний СВ с РЧ полем, приводящего к резонансу на частоте $\Omega=\Omega_0$, существует нелинейное взаимодействие типа $H_m\beta^*\beta^*$, которое приводит к параметрическому резонансу коллективных мод в РЧ поле с частотой $\Omega=2\Omega_0$. К этому же эффекту, как не трудно понять, относится и неустойчивость исходной моды α с частотой Ω, возбуждаемой РЧ полем, от отношению к распаду на две моды β с частотой $\Omega/2$. В результате действия обоих механизмов при превышении некоторой критической амплитуды РЧ поля возникает явление двойного параметрического резонанса СВ – одновременное возбуждение колебаний на СВЧ – с частотой $\omega_p/2$ и РЧ – с частотой $\Omega/2$.

Для нахождения порога неустойчивости относительно параметрического возбуждения КК ищем решение уравнения движения (27.1) в виде

$$c = c_0 + \alpha_+ \exp(i\Omega t) + \alpha_- \exp(-i\Omega t) + \beta_+ \exp(i\Omega t/2) + \beta_- \exp(-i\Omega t/2). \tag{27.6}$$

Используя соотношение (27.5) для основного состояния и линеаризуя (27.1) по малым амплитудам α и β, получим

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma + 2i(T+S)N\right]\beta_+ + (-\gamma + 2iTN)\exp(-i\psi)\beta_-^* + \\
&+ i\omega_+\beta_- + iP_+ \exp(-i\psi)\beta_+^* = 0, \\
&\omega_+ = (H_m v_k)^* + 2(2T+S)(c_0^*\alpha + c_0\alpha_-^*), \qquad \omega_- = \omega_+^*, \\
&P_\pm = 2(2T+S)c_0\alpha_\pm \exp(i\psi).
\end{aligned} \tag{27.7}$$

Напомним, что амплитуды колебаний $\alpha_\pm$ задаются формулами (25.7) и (25.8). Уравнение (27.7) можно записать в более симметричном виде, если от переменных $\beta_\pm$ перейти к нормальным переменным $\rho_\pm$ с помощью следующего $u - v$ -преобразования:

$$\begin{aligned}
&\rho_+ = u\beta_+ \exp(i\psi/2) - v\beta_-^* \exp(-i\psi/2), \\
&\rho_-^* = -v\beta_+ \exp(i\psi/2) + u^*\beta_- \exp(-i\psi/2), \\
&u = \left[\frac{2(T+S)N + \Omega_0}{2\Omega_0}\right]^{1/2}, \qquad v = -\left[\frac{2(T+S)N - \Omega_0}{2\Omega_0}\right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{27.8}$$

Тогда для перенормированных $\rho_\pm$ получим уравнение

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma + i\Omega_0\right)\rho_+ + iA_+\rho_+^* + iB_+\rho_- - \gamma\rho_-^* = 0, \\
&A_+ = 2uv\omega_+ + u^2P_+ + v^2P_-^*, \\
&B_+ = v^2\omega_+ + uv(P_+ + P_-^*).
\end{aligned} \tag{27.9}$$

Полагая $\beta_\pm(t) = \rho_\pm \exp(\pm i\Omega t/2 + \nu t)$ и записывая систему четырех уравнений для амплитуд $\rho_+, \rho_+^*, \rho_-, \rho_-^*$, находим инкремент неустойчивости ν из условия равенства нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix}
\nu + \gamma + i(\Omega_0 + \Omega/2) & iA_+ & iB_+ & -\gamma \\
-iA_+^* & \nu + \gamma - i(\Omega_0 + \Omega/2) & -\gamma & -iB_+^* \\
iB_+ & -\gamma & \nu + \gamma + i(\Omega_0 - \Omega/2) & iA_- \\
-\gamma & -iB_+ & -iA_-^* & \nu + \gamma - i(\Omega_0 - \Omega/2)
\end{vmatrix}. \tag{27.10}$$

Порог неустойчивости ($\nu = 0$) для заданных значений Ω и Ω^0 вычислялся из (27.10) с помощью ЭВМ (рис. 27.1). Оказывается, что минимальный порог достигается при резонансе $\Omega = \Omega_0$ и он слабо зависит от Ω_0:

$$\min\{H_m\}_{\text{cr}} \approx 0{,}4\gamma/v \approx \gamma/g.$$

Второй минимум порога на частоте $2\Omega_0$ проявляется лишь при достаточно большой добротности КК, когда $\gamma \ll \Omega_0$.

Параметрическое возбуждение КК в системе параметрически возбужденных СВ – *двойной параметрический резонанс* был обнаружен и эксперимен-

тально исследован В.В. Зауткиным и др. в 1977 г. [88]. В этой работе к сферическому образцу ЖИГ прикладывались три параллельных друг другу магнитных поля: H – постоянное подмагничивающее поле, $h \exp(i\omega_p t)$ – СВЧ накачка, $H_m \exp(-i\Omega t)$ – РЧ накачка, РЧ поле создавалось миниатюрной катушкой, расположенной в центре СВЧ резонанса. Измерения проводились в диапазоне радиочастот от 0,1 до 10 МГц. Параметрические колебания на частоте $\Omega/2$ возникли при некотором критическом значении РЧ поля. Сигнал на частоте $\Omega/2$, наведенный в катушке, усиливался селективным приемником и регистрировался на осциллографе. Возникновение этого

Рис. 27.1. Теоретические зависимости порога неустойчивости КК H_{mcr} от частоты Ω РЧ поля. Цифры у кривых соответствуют значениям собственной частоты КК ($\Omega_0/2\gamma$). Область применимости теории ограничена сверху штриховой линией

Рис. 27.2. Зависимости порога коллективных колебаний H_{mcr} от частоты РЧ поля: *1* – экспериментальная $H = H_c - 100$ Э, $p = 2{,}5$ (4 дБ); *2* – теоретическая $\Omega_0 = 3{,}4\gamma$ ($\gamma = 0{,}37$ Мгц)

сигнала носило пороговый характер. С ростом H_m сигнал пороговым образом почти пропадал – его амплитуда ослаблялась более чем в десять раз.

На рис. 27.2 приведена одна из экспериментальных зависимостей $H_{m,\mathrm{cr}}(\Omega)$ (при $H = H_c - 100$ Э, надкритичность 4 дБ) и соответствующая теоретическая кривая, полученная из условия равенства нулю детерминанта (27.10). Ход обеих кривых хорошо согласуется между собой, за исключением, возможно, области низких частот, где сигнал очень слаб, и не удается провести надежные измерения порога. Отметим, что теория, построенная в квадратичном по H_m приближении, предсказывает существование только одного порога $H_{m,\mathrm{cr}}$ при фиксированной частоте Ω и надкритичности h/h_{th}. Между тем в эксперименте наблюдается и второй порог – порог исчезновения интенсивных КК с ростом H_m. Физически этот порог связан с зависимостью собственной частоты КК от H_m^2, приводящей к нарушению условия параметрического резонанса. Однако фактическое его вычисление весьма затруднительно, так как требует учета старших членов по H_m^2, и может быть вообще невозможно в рамках теории возмущений по $\upsilon H_m/\gamma$.

В заключение отметим, что мы рассмотрели пространственно-однородные КК с волновыми вектором $\kappa = 0$. Наряду с ними в системе ПСВ существует широкий спектр КК (см. п. 23.4). Отдельные участки этого спектра в принципе можно возбудить параметрическим образом с помощью однородного РЧ поля на частоте, удовлетворяющей условию $\Omega = \Omega_\kappa + \Omega_{-\kappa}$. Эти колебания с $\kappa \neq 0$ плохо связаны с резонатором, и поэтому излучение

на половинной частоте будет сильно ослаблено. В.В. Зауткину и Б.И. Орлу [88] удалось не только с достоверностью зарегистрировать факт существования неоднородных КК при двойном параметрическом резонансе, но и исследовать их спектр. Они сделали это по целому ряду косвенных данных, анализируя экспериментально определенные зависимости частоты и амплитуды КК от H, H_m и h.

Задачи

Задача 5.1. Учесть влияние взаимодействия резонатора с СВЧ-магнитным полем накачки на частоту КК ПСВ, возбужденных методом параллельной накачки. Исследовать область неустойчивости связанных колебаний.

Задача 5.2. Получить выражения для частот, совместных коллективных колебаний ПСВ и ОП при параметрическом возбуждении СВ методом поперечной накачки: во-первых, для процессов первого порядка вдали от резонанса ОП, во-вторых, для процессов второго порядка при резонансе ОП.

Задача 5.3. Используя гамильтониан взаимодействия СВ с магнитным полем (14.18) и (14.19), получить выражения (25.4) для "внешней силы", действующей на систему ПСВ (25.1) в присутствии радиочастотного и СВЧ-магнитного полей.

Задача 5.4. Получить выражение гамильтониана взаимодействия звука со СВ в АФМ ЛП (В.С. Лутовинов [144]).

Указание. Использовать выражение для магнитоупругой энергии и канонические переменные для звука и СВ в АФМ ЛП.

Ответ. – См. формулу (25.6).

Задача 5.5. Получить условие внешней устойчивости стационарного состояния ПСВ (27.2) в условиях радиочастотной модуляции $H_m(t) = H_m \cos \Omega t$:

$$\Delta_k = \tilde{\omega}_k - \tfrac{1}{2}\omega_p = 4H_m^2 v_k^2 \{T(\Omega^2 + 4S^2N^2) + $$
$$+ 4S[\Omega^2(\gamma^2 + 2S^2N^2) + (2\gamma SN)^2](\Omega^2 + 4\gamma^2)^{-2}\} |\Delta(\Omega)|^{-2}. \qquad (27.11)$$

Задача 5.6. Получить выражение для частот пространственно-неоднородных коллективных колебаний $\Omega_p(\kappa)$ (κ – волновой вектор КК) при параметрическом возбуждении волн в сферически-симметричном случае: $V_k = V$, $S_{kk'} = S$, $T_{kk'} = T$. Этот случай реализуется в АФМ ЛП, например, в $CsMnF_3$, $MnCO_3$ и т.д.

Указание. Использовать для анализа уравнение (24.10).

Ответ:

$$\Omega(\kappa) = -i\gamma \pm [(v\kappa)^2 \operatorname{cth}^2(v\kappa/\Delta) - \gamma^2]^{1/2},$$
$$\Delta^2 = 2S(2T + S)N^2, \qquad v = \partial\omega_k/\partial k. \qquad (27.12)$$

Задача 5.7. Найти инкремент неустойчивости (частоты $\Omega_{\pm 1}(\kappa)$) пространственно-неоднородной моды КК с аксиальным номером $m = \pm 1$ при параметрическом возбуждении СВ методом параллельной накачки в кубических ФМ, когда ПСВ возбуждены только на экваторе резонансной поверхности, и проанализировать (аналитически и с помощью ЭВМ) нелинейную стадию развития этой неустойчивости в некоторых предельных случаях. Возникнет ли в результате стационарное, но пространственно-однородное распределение ПСВ? Если нет, то какой характер будут иметь автоколебания в системе?

Замечание. Ответы на эти вопросы сейчас неизвестны, но представляют большой интерес для интерпретации экспериментов на ФМ в ЖИГ, при которых, вероятно, может реализоваться неустойчивость одной из мод $m = 1$ или $m = -1$. Было бы хорошо, чтобы кто-нибудь нашел в себе достаточно сил и энергии для анализа этой непростой задачи и опубликовал свои результаты.

Задача 5.8. Показать, что уравнения пространственно-неоднородной S-теории (24.9) в стационарном случае имеют следующий "интеграл движения" F, не зависящий от z:

$$F(A_k(z)) = S\,|A_k(z)A_{-k}(z)| + hV\cos(\varphi_k(z) + \varphi_{-k}(z)) = \text{const}. \qquad (27.13)$$

Как совместить это с обсужденным в п. 24.4 утверждением о выводе при $z \to \infty$ решения $A_k(z)$ на стационарное состояние S-теории A_k^0, если граничные условия при $z = 0$ таковы, что $F(A_k(0)) \neq F(A_k^0)$?