

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН

Нестационарные процессы при параметрическом возбуждении волн могут носить самый разный характер. Их условно можно разбить на три группы: к первой относятся *переходные процессы* установления стационарного состояния, возникающие при включении накачки или при других скачкообразных изменениях условий эксперимента: переключении фазы, частоты, амплитуды накачки, внешнего магнитного поля и т.д. Часть из них описана в § 28. Вторая группа — это *вынужденные нестационарные процессы* отслеживания непрерывных изменений условий эксперимента: периодических, монотонных или шумовых. Они описаны в §§ 25–27 предыдущей главы и §§ 29, 30. Третью группу составляют *спонтанные нестационарные процессы*, возникающие из-за неустойчивости основного состояния ПСВ и приводящие к автоколебаниям намагниченности. Эти процессы существенно различаются для ситуации, когда возбужден широкий пакет ПСВ (§ 31) и когда порог параметрического возбуждения минимален для одной или нескольких пар волн, так что при не малых надкритичностях возбужден узкий пакет ПСВ (§ 32).

§ 28. Переходные процессы в системе параметрических волн при включении накачки

Этот вопрос рассмотрен В.Е. Захаровым, автором и С.М. Мушером в 1972 г. и далее автор следует этой работе [102].

28.1. Область малых надкритичностей. В этом пункте изучен процесс установления стационарного состояния S -теории (19.1) от уровня теплового шума $n_k = n_0$ при малых превышениях $hV - \gamma \ll \gamma$. Очевидно, что до тех пор, пока $N = \sum_k n_k \ll N_0$, амплитуды пар будут расти так, как предсказывает линейная теория, т.е. с инкрементом $hV - \gamma$. При этом в k -пространстве возникает узкий пакет СВ шириной $\Delta\omega \approx (hV - \gamma)$. Дальнейшее его поведение описывается уравнениями (18.9). Из них видно, что время релаксации амплитуд и фаз порядка $(hV - \gamma)^{-1}$ и γ^{-1} соответственно, поэтому можно считать, что фазы Ψ_k адиабатически следят за амплитудами, т.е. в (18.9) можно пренебречь $\partial \Psi_k / \partial t$. То, что пакет узкий: $\Delta\omega \ll \gamma$, позволяет разложить в уравнениях (18.9) тригонометрические функции в ряд и представить эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} &= x^2 + x(2\alpha - 1)(\int f dx' - 1) + \alpha \int f dx' - \alpha + \\ &+ [\int f dx' - 1]^2 \alpha^2 + \int x' f dx', \\ f &= n_k(\tau)/N_0, \quad x = (\omega_k - \omega_{k_0})/(2SN_0), \\ \tau &= \gamma t(2SN_0/\gamma)^2, \quad \alpha = (2T + S)/S. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Отметим, что в этом уравнении зависимости от надкритичности $p = (h/h_{th})^2$ исчезла, а параметры системы ПСВ входят в него лишь через α . Уравнение

(28.1) имеет автомодельное решение

$$f(x, \tau) = A(\tau) (\tau/\pi)^{1/2} \exp \{ -[(x - x_0(\tau))/d(\tau)]^2 \}, \quad (28.2)$$

где $A(\tau) = \int f(x, \tau) d\tau$ — суммарная интенсивность пакета ПСВ, $x_0(\tau) = A^{-1} \int f x dx$ — положение его центра тяжести, $d(\tau)$ — ширина пакета. Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{d\tau} + \frac{1}{2\tau} - \frac{d(\tau x_0^2)}{d\tau} = -A x_0^2 - \alpha A(A-1) [\alpha(A-1) + 1], \quad (28.3)$$

$$\frac{d(\tau x_0)}{d\tau} = -(A-1) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right), \quad d(\tau) = t^{-1/2}.$$

Эти уравнения имеют следующую асимптотику при $\tau \rightarrow \infty$:

$$x_0 = -1/2\tau, \quad A-1 = -[2(4\alpha-1)\tau^2]^{-1}, \quad d(\tau) = \tau^{-1/2}. \quad (28.4)$$

Таким образом, при небольших превышениях над порогом произвольная функция распределения пар n_k релаксирует к имеющему вид δ -функции стационарному состоянию (18.9) по степенному закону (28.4):

$$N_0 - N \sim N_0 (hV - \gamma)^{-2} t^{-2},$$

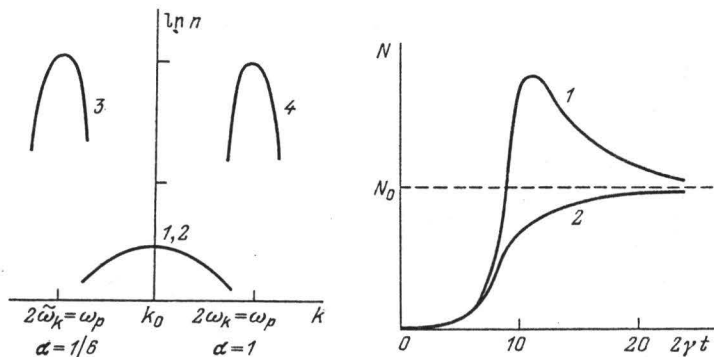
$$\omega_k - \omega_{k_0} \sim \gamma^{1/2} (hV - \gamma)^{-1/2} t^{-1}. \quad (28.5)$$

$$\omega_k^2 - (\bar{\omega}_k)^2 \sim \gamma [(hV - \gamma)/t]^{1/2}.$$

Для детального изучения нестационарного поведения системы при произвольных hV, S, T уравнения (18.9) решались численно. На рис. 28.1 изображена функция распределения $n_k(t)$ для двух последовательных моментов времени и значений параметра $\alpha = 1/6$ и $\alpha = 1$. Начальное распределение выбрано однородным, $hV = 1,4\gamma$. Вначале волны растут экспоненциально, максимум $n_k(t)$ находится на поверхности $\omega_k = \omega_p/2$, как это следует из линейной теории. Естественно, что вид функции n_k при этом не зависит от параметра α . В дальнейшем, когда $\sum_k n_k$ не мала по сравнению

с N_0 , поведение $n_k(t)$ существенно зависит от отношения коэффициентов S и T , описывающих взаимодействие волн, а именно, при $T = 0$ пакет n_k продолжает расти и сужаться, оставаясь на поверхности $\omega_k = \omega_p/2$. При $T \neq 0$ пакет растет и передвигается как целое, несколько деформируясь, к поверхности $\omega_k + 2T_0 N_0 = \omega_p/2$ (т.е. в сторону больших или меньших k в зависимости от знака T). Когда максимум пакета $n_k(t)$ близок к этой поверхности, начинается асимптотическое сужение пакета. Отметим, что вид кривой $\ln n_k(t)$ (см. рис. 28.1) при больших t близок к параболе, что подтверждает выход на автомодельное решение (28.2) — гауссов пакет.

Из рис. 28.2 видно, что процесс установления стационарного состояния от теплового уровня при включении параметрической накачки происходит в три стадии: в первой — линейной — стадии происходит экспоненциальный рост амплитуды, а зависимость от нелинейных характеристик T , системы волн отсутствует. Естественно поэтому, что две кривые $N(t)$ (для $\alpha = 1/6; 1$) на этой стадии совпадают. На второй — нелинейной — стадии становятся существенными взаимный нелинейный сдвиг частоты и параметрическое



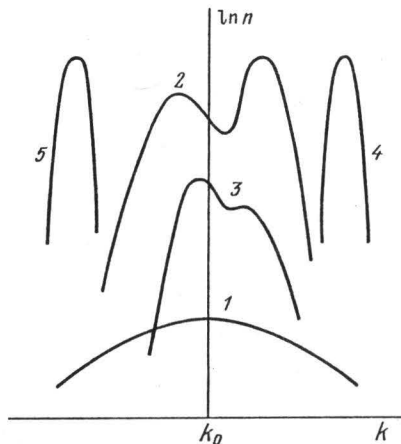
Р и с. 28.1. Функция распределения ПСВ $n(k)$ при $p = 2$. Линейная стадия: 1 — $\alpha = 1/6$; 2 — $\alpha = 1$; асимптотическая стадия: 3 — $\alpha = 1/6$; 4 — $\alpha = 1$.

Р и с. 28.2. Зависимость суммарной амплитуды пар $N(t)$ от времени для $p = 2$: 1 — $\alpha = 1/6$; 2 — $\alpha = 1$.

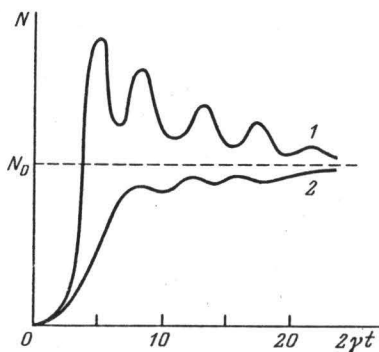
взаимодействие пар волн. При этом еще отсутствует характерная для стационарного состояния в S -теории компенсация затухания волн γ_k полной накачкой P_k . Поведение системы на этой стадии наиболее сложно и доступно лишь численному моделированию. Оказывается, что при $T < 0$ интегральная амплитуда проходит через максимум, а при $T > 0$ растет монотонно. На третьей — асимптотической — стадии $|P_k| - \gamma_k \ll \gamma_k$ и происходит медленное приближение к стационарному состоянию (19.1), описываемому S -теорией. Отметим, что знак разности $N - N_0$ в численном эксперименте (см. рис. 28.2) совпадает с тем, который следует из аналитической асимптотики (28.4).

28.2. Большие превышения над порогом неустойчивости. Численный эксперимент выявил существенные качественные отличия в нестационарном поведении системы ПСВ при малых $hV - \gamma \ll \gamma$ и больших $hV - \gamma \gg \gamma$ превышениях над порогом (рис. 28.3 и 28.4 для $hV = 4\gamma$) на второй — нелинейной — стадии переходного процесса. Пакет $n_k(t)$ не ведет себя как целое, когда амплитуда $N(t)$ уже не мала по сравнению с N_0 , "прорастает" второй максимум функции $n_k(t)$ в том месте, где $\tilde{\omega}_k = 0$ в данный момент времени. Затем амплитуда второго максимума растет, а первого уменьшается. На рис. 28.3 при $\gamma t = 6$ второй максимум уже больше первого. Кроме того, как видно из рис. 28.4, суммарная амплитуда осциллирует, приближаясь к N_0 . В предельном случае недиссипативной среды, когда $(\gamma/Lv) \rightarrow 0$, система ПСВ вообще не выходит на стационар, осциллируя бесконечно долго. Это связано с тем, что при $\gamma = 0$ существует интеграл движения $\mathcal{H}_s$ (18.13). В начальный момент времени $\mathcal{H}_s = 0$ и не совпадает со значением $\mathcal{H}_s = - (2T + S) N_0^2$ в основном состоянии S -теории, которое поэтому при $\gamma = 0$ недостижимо.

На последней — асимптотической — стадии, как видно из рис. 28.3, пакет n_k гауссов. Этого и следовало ожидать, так как эта стадия описывается уравнениями (28.1), имеющими автомодельное решение (28.2) — гауссов пакет. Действительно, критерий справедливости уравнений (28.1) есть малость отношения $S(N - N_0)/\gamma \ll 1$. В соответствии с асимптотикой (28.4) $N(t)$ при-



Р и с. 28.3. Функция распределения $n(k)$ при $p = 16$; 1 – линейная стадия ($\alpha = 1/6$; 1); 2, 3 – нелинейная стадия ($\alpha = 1/6$; 1 соответственно); 4, 5 – асимптотическая стадия ($\alpha = 1/6$; 1 соответственно)



Р и с. 28.4. Зависимость суммарной амплитуды ПСВ $N(t)$ от времени для $p = 16$: 1 – $\alpha = 1/6$; 2 – $\alpha = 1$

ближается к N_0 сверху или снизу, как это видно из рис. 28.4, в зависимости от величины T/S . Причина осцилляций $N(t)$ в переходном режиме очевидна и заключается в ударном возбуждении коллективных колебаний. Их декремент затухания равен γ , а частота $\Omega_0 = [2S(2T + S)]^{1/2} \sim hV$ при $hV \gg \gamma$. Поэтому число колебаний порядка $hV/\gamma = p^{1/2}$.

§ 29. Параметрическое возбуждение волн в условиях дрейфа частоты

Анализ экспериментальных данных В.С. Житнюка и Г.А. Мелкова [80] показывает, что при параметрическом возбуждении СВ в ЖИГ в определенной области значений постоянного поля H возникает дрейф собственной частоты СВ ω_k в k -пространстве, т.е. появляется монотонная временная зависимость $\omega_k(t)$. Причиной такого дрейфа является накопление неравновесных СВ/(НСВ), возникающих в результате диссипации ПСВ. Накопление большого числа НСВ в области малых k наблюдалось давно Х. Ле-Галлом и др. [143], В.Н. Веницким и др. [62]. Естественно думать, что в течении некоторого времени число НСВ линейно нарастает со временем, а затем выходит на стационарный режим. В работе Е.В. Подвилова и В.Б. Черепанова [198], по результатам которой написан этот параграф, показано, что в течении времени порядка $10^2 \gamma_k^{-1}$ может происходить накопление НСВ с постоянной скоростью, приводящее к постоянному дрейфу частоты ω_k с безразмерной скоростью

$$\eta_k \equiv \frac{1}{2\gamma_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \approx \frac{2|\tilde{T}|}{S} (p-1)^{1/2}. \quad (29.1)$$

Здесь $\tilde{T}$ – характерное значение величины $T_{kk'}$, описывающей нелинейный

сдвиг частоты ПСВ под действием НСВ. Отметим, что, поскольку величины T и S , вообще говоря, одного порядка, оценка (29.1) демонстрирует возможность возникновения значительного дрейфа частоты, при котором ω_k изменяется на величину γ_k за время $1/\gamma_k$. Разумеется, учет такого дрейфа должен приводить к существенному изменению результатов S -теории, в частности к возникновению конечной ширины пакета ПСВ. Модификации S -теории с учетом дрейфа и посвящен настоящий параграф.

29.1. Качественный анализ формы пакета ПСВ и его амплитуды при линейном дрейфе частоты. Уравнения S -теории представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + 2\gamma_k n_k + 2\text{Im}P_k^* \sigma_k &= 2\gamma_k n_k^0, \\ \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} + [i(2\tilde{\omega}_k - \omega_p) + 2\gamma_k] \sigma_k + 2iP_k n_k &= 0. \end{aligned} \quad (29.2)$$

Они отличаются от (18.6) дополнительным слагаемым $2\gamma_k n_k^0$, описывающим тепловой шум. Строгое обоснование уравнений (29.2) будет дано в гл. 10. Здесь мы только отметим, что в отсутствие накачки они описывают релаксацию n_k к термодинамически равновесному значению n_k^0 . Так же, как и в § 28, перейдем к новым переменным $\epsilon_k = \tilde{\omega}_k^0 - \omega_p/2$ — расстройка частоты и $\Omega = (\theta, \varphi)$ — полярный и азимутальный углы волнового вектора k . В этих переменных уравнения (29.2) переходят в

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\epsilon\Omega}}{\partial t} + 2\gamma_\Omega n_{\epsilon\Omega} + 2\text{Im}P_\Omega^* \sigma_{\epsilon\Omega} &= 2\gamma_\Omega n^0, \\ \frac{\partial \sigma_{\epsilon\Omega}}{\partial t} + 2[ig(t) + i\epsilon + \gamma_\Omega] \sigma_{\epsilon\Omega} + 2iP_\Omega n_{\epsilon\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (29.3)$$

$$g(t) = \omega_k - \omega_k^0 = \alpha t + c. \quad (29.4)$$

Здесь $g(t)$ — стационарный дрейф собственной частоты. В отсутствие дрейфа (при $\alpha = 0$) уравнения (29.3) имеют единственное решение

$$n_{\epsilon\Omega} - n^0 = \frac{|P_\Omega|^2 n^0}{\tilde{\epsilon}^2 + \gamma_\Omega^2 - |P_\Omega|^2}, \quad \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon} + c. \quad (29.5)$$

В пределе $n^0 \rightarrow 0$ это решение переходит в то из решений S -теории, которое удовлетворяет условию внешней устойчивости (18.18). Действительно, $n_{\epsilon\Omega}$ максимально на резонансной поверхности $\epsilon = 0$ и в пределе малых n^0 может отличаться от нуля только в тех ее точках, где $|P_\Omega| = \gamma_\Omega$. В остальной части поверхности обязано выполняться условие $|P_\Omega| < \gamma$, иначе возможно противоречие: $n_\Omega < 0$. При $|P_\Omega| > \gamma$ решение системы (29.3) нарастает экспоненциально с инкрементом

$$\nu_\Omega = -\gamma_\Omega + (|P_\Omega|^2 - \tilde{\epsilon}^2)^{1/2}. \quad (29.6)$$

Область неустойчивости по частотам ω_k определяется неравенством $\nu_\Omega > 0$. Это дает

$$|\tilde{\epsilon}| < (|P_\Omega|^2 - \gamma_\Omega^2)^{1/2}. \quad (29.7)$$

При линейном дрейфе частоты возможно существование таких пакетов ПСВ, которые с постоянной скоростью по частоте движутся в k -простран-

стве без изменения формы, другими словами, уравнения (29.3), (29.4) должны иметь стационарные решения вида

$$n(\Omega, \epsilon, t) = n_{\Omega}(\epsilon + \alpha t + c). \quad (29.8)$$

Приведем качественный анализ этих решений. При дрейфе в каждый момент времени одни волны попадают в область неустойчивости у резонансной поверхности, а другие из нее выходят. Приходящие волны нарастают экспоненциально с инкрементом $\nu_{\Omega}(t)$ (29.6), начиная с уровня тепловых флуктуаций. Они проходят область неустойчивости (29.7) за время

$$\tau_0 = 2(|P_{\Omega}|^2 - \gamma_{\Omega}^2)^{1/2}/|\alpha| \approx 2(2\gamma(|P| - \gamma))^{1/2}/|\alpha|, \quad (29.9)$$

а их уровень нарастает при этом до

$$\begin{aligned} n_{\max} &= n_{\Omega}(\tau_0) = n^0 \exp \left[2 \int_0^{\tau_0} \nu_0(t) dt \right] \approx \\ &\approx n^0 \exp [4(2\gamma)^{1/2} (|P| - \gamma)^{3/2}/|\alpha|]. \end{aligned} \quad (29.10)$$

Далее, эти волны выходят из области неустойчивости и затухают за время τ_1 со средним декрементом $\nu(\tau_1) \approx (\alpha\tau_1)^2/2\gamma$. Отсюда и из (29.10) следует оценка для τ_1 :

$$\tau_1 = (\gamma/|\alpha| (|P|^2 - \gamma^2)^{1/2})^{1/2}. \quad (29.11)$$

Вдали от области неустойчивости дрейфом можно пренебречь, и в соответствии с (29.5) $(n_{\Omega} - n^0) \sim \epsilon^{-2}$. Максимальная интенсивность в пакете определяется выражением (29.10) и лежит на задней границе области неустойчивости (29.7):

$$\Delta\omega_k \approx (|P|^2 - \gamma^2)^{1/2} \alpha/|\alpha|. \quad (29.12)$$

Ширина пакета δ определяется временем, за которое СВ убывают в e раз, пройдя границу области неустойчивости:

$$\delta^2 \approx |\eta| \gamma^3 / (|P|^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad \eta = \alpha/2\gamma^2. \quad (29.13)$$

При выполнении условия адиабатической медленности дрейфа:

$$\eta < (|P|^2 - \gamma^2)^{3/2}/\gamma^3, \quad (29.14)$$

при котором справедливы описанные выше соображения, ширина пакета δ (29.13) много меньше, чем его сдвиг $\Delta\omega_k$ (29.12). Интегральная интенсивность N_{Ω} оценивается легко:

$$N_{\Omega} \approx n_{\max} \delta \propto n^0 \exp \left[\frac{4}{3} (|P|^2 - \gamma^2)^{3/2}/|\alpha| \gamma \right]. \quad (29.15)$$

Предэкспоненциальный множитель в (29.15) на нашем уровне строгости не определяется, для нас существенно только, что в отсутствие шума $n^0 = 0$ амплитуда ПСВ $N_{\Omega} = 0$. Отметим также, что (29.15) не является решением

задачи, так как для определения числа ПСВ необходимо самосогласованным образом найти перенормированную накачку P_Ω .

Для качественного анализа амплитуды и фазы ПСВ за порогом удобно воспользоваться условием равенства вкачиваемого и диссипируемого потоков энергии:

$$hV \sin \Psi = \gamma, \quad (29.16)$$

где Ψ — разность фаз аномального коррелятора ПСВ и накачки. Таким образом, на векторной диаграмме (рис. 29.1) вектор $S\sigma$ наклонен под углом $\Psi = \arcsin(\gamma/hV)$ к накачке P (мы считаем для определенности, что $S > 0$). Сумма $hV + S\sigma$ есть перенормированная накачка. Оценим теперь угол между P и $S\sigma$. Из уравнений (29.3) следует, что в стационарном случае

$$\sigma_k = - \frac{iP_k n_k}{\gamma_k + i(\omega_k - \omega_p/2)},$$

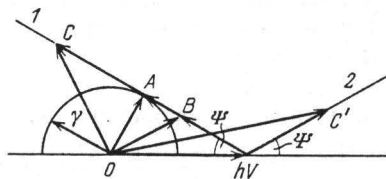
$$\operatorname{Re} P_k^* \sigma_k = - \frac{|P_k|^2 (\tilde{\omega}_k - \omega_p/2) n_k}{\gamma_k^2 + (\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)^2}. \quad (29.17)$$

При не слишком быстром дрейфе частоты пакет является узким по частотам, поэтому в центре пакета $|P_k|^2 = \gamma_k^2 + \Delta\omega$, и

$$\operatorname{Re} P_k^* \sigma_k = -\Delta\omega n_k. \quad (29.18)$$

Поскольку при положительном дрейфе $\Delta\omega > 0$, угол между $S\sigma$ и P тупой.

Рис. 29.1. Комплексная плоскость векторов накачки. hV — внешняя накачка, Ψ — фаза пар, γ — затухание, $S\sigma = \sum_k S_{kk'} \sigma$ — поле реакции системы ПСВ; OA — самосогласованная накачка без дрейфа, OB — с положительным дрейфом, OC, OC' — с отрицательным дрейфом. Линия 1 соответствует непрерывной модификации решения S -теории; линия 2 — дополнительное решение при сильном отрицательном дрейфе



Поэтому величина $|S\sigma|$ меньше, чем ее значения в отсутствие дрейфа, т.е. $|S\sigma| < (|hV|^2 - \gamma^2)^{1/2}$. В случае отрицательного дрейфа $\Delta\omega < 0$, угол между P и $S\sigma$ острый и, следовательно, $S\sigma > (|hV|^2 - \gamma^2)^{1/2}$ при любой скорости дрейфа. Строго говоря, при отрицательном дрейфе условию (29.16) можно удовлетворить и в том случае, когда вектор $S\sigma$ наклонен к hV под углом $(\pi - \arctg \gamma/hV)$ (прямая 2). Для того чтобы такое решение существовало, необходимо, чтобы дрейф был достаточно велик. Однако это дополнительное решение, как показано ниже, неустойчиво.

29.2. Основные уравнения S -теории с дрейфом. Для исследования пакетов СВ, возникающих при дрейфе с постоянной скоростью, удобно перейти от переменной ϵ к переменной ω — текущему значению расстройки частоты $\omega = \epsilon + \alpha t$. Это аналогично переходу в движущуюся со скоростью α

систему отсчета при преобразовании Галилея. При этом уравнения (29.3) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} + \gamma_{\Omega} \right) n(\omega, \Omega) + \operatorname{Im} P_{\Omega}^* \sigma(\omega, \Omega) &= \gamma_{\Omega} n^0, \\ \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} + i\omega + \gamma_{\Omega} \right) \sigma(\omega, \Omega) + iP_{\Omega} n(\omega, \Omega) &= 0, \\ \left(\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} - i\omega + \gamma_{\Omega} \right) \sigma^*(\omega, \Omega) - iP_{\Omega}^* n(\omega, \Omega) &= 0. \end{aligned} \quad (29.19)$$

Стационарный дрейф пакета описывается решениями (29.19), не зависящими явно от времени. Они должны, очевидно, удовлетворять граничным условиям

$$[n(\omega, \Omega) - n^0], \sigma(\omega, \Omega), \sigma^*(\omega, \Omega) \rightarrow 0 \quad \text{при } \omega \rightarrow \pm\infty. \quad (29.20)$$

Стационарные решения однородной системы (29.19) при $n^0 = 0$, $|\omega| \rightarrow \infty$ имеют следующие асимптотики:

$$\operatorname{Im} P_{\Omega}^* \sigma_{\omega \Omega} \propto \exp[(\gamma\omega \pm i\omega^2)/\alpha] \omega^{-3} \exp(-2\gamma\omega/\alpha). \quad (29.21)$$

Ни одно из этих решений не стремится к нулю при $\omega/\alpha \rightarrow -\infty$, поэтому никакая линейная комбинация решений однородной системы не удовлетворяет граничным условиям (29.20). Физический смысл этого в том, что в отсутствие теплового шума параметрическое возбуждение волн при дрейфе невозможно. Поэтому для определения формы пакета ПСВ при дрейфе нам необходимо найти регулярное стационарное решение неоднородной системы (29.19), удовлетворяющее граничным условиям (29.20). Требование регулярности решения эквивалентно условию внешней устойчивости без дрейфа.

Уравнения (29.19), в стационарном дрейфе, можно привести к безразмерному виду, вводя новые переменные:

$$\begin{aligned} x_{\Omega} &= \omega/\gamma_{\Omega}, \quad \eta_{\Omega} = \alpha/2\gamma_{\Omega}^2, \quad \Pi_{\Omega} = P_{\Omega}/\gamma_{\Omega}, \\ u(x) &= \operatorname{Re} \Pi^* \sigma(x), \quad V(x) = -\operatorname{Im} \Pi^* \sigma(x), \\ m(x) &= n(x) - n^0. \end{aligned} \quad (29.22)$$

Заметим, что угол Ω в уравнениях (29.19) является параметром, поэтому при исследовании формы пакета по собственным частотам при фиксированном Ω можно опускать зависимость от этого угла. Удобно также произвести преобразование Фурье, позволяющее понизить порядок дифференциального оператора, и сделать еще одну замену переменной:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f_k \exp(ikx) dk, \\ z &= (1 + i\eta k^2)/i\eta. \end{aligned} \quad (29.23)$$

В результате из (29.19) в стационарном случае получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - (1/4 - i|\Pi|^2/4\eta z) V = i|\Pi|^2 n^0 \delta(z + i/2)/2\eta z. \quad (29.24)$$

Решения этого уравнения выражаются через функции Уиттекера с индексом

$m = 1/2$ [43]: $W_{\kappa, 1/2}(z)$ и $W_{-\kappa, 1/2}(z)$:

$$W_{\kappa, 1/2}(z) = \frac{e^{-z/2}}{\Gamma(1-\kappa)} \int_0^\infty \left(1 + \frac{z}{t}\right)^\kappa e^{-t} dt,$$

$$\kappa = -i |\Pi|^2 / 4\eta. \quad (29.25)$$

Это решение уравнения (29.24) было получено Е.В. Подивиловым и В.Б. Черепановым [198].

29.3. Решения уравнений S -теории с дрейфом. Отметим, что до порога параметрической неустойчивости и при малой скорости дрейфа имеет место обычный допороговый подогрев системы волн. В случае адиабатического дрейфа, когда выполняется условие (29.14),

$$n_\Omega = [\pi |\Pi_\Omega|^2 n^0 / (1 - |\Pi_\Omega|^2)^{1/2} \exp[2(|\Pi_\Omega|^2 - 1)^{3/2} / 3\eta]]. \quad (29.26)$$

Именно этот случай мы качественно обсудили в п. 29.1, и приведенный здесь ответ (29.26) качественно совпадает с полученной ранее оценкой (29.15). При неадиабатическом дрейфе, когда $|\eta\Pi| > (|\Pi|^2 - 1)^{3/2}$, число ПСВ ограничивается на уровне, близком к тепловому:

$$n_\Omega \approx \pi |\Pi_\Omega|^2 n_0 (1 + |\eta|^{-1/3}). \quad (29.27)$$

При этом с ростом скорости дрейфа интегральная величина $\text{Re } \Pi^* \sigma$ падает: $\sim |\eta|^{-1}$. Имеется еще один важный случай, когда при быстром дрейфе ($\eta \gg 1$, $|\Pi|$) число ПСВ велико. Это случай большой надкритичности $|\Pi|^2 \gg \eta > 1$, $|\Pi|$. При этом

$$n_\Omega = 4k_\Omega^2 \gamma_\Omega (|\eta|^{1/2} / v_\Omega |\Pi_\Omega|^2) \exp(\pi |\Pi_\Omega|^2 / 2\eta),$$

$$\mu_\Omega = 2(|\Pi_\Omega|^2 / \eta) \ln(|\eta / \Pi|). \quad (29.28)$$

Перейдем теперь к вопросу о форме пакета ПСВ. В п. 29.1 на качественном уровне мы показали, что при выполнении условия адиабатичности дрейфа (29.14) ширина пакета ПСВ (29.13) много меньше, чем его сдвиг от резонанса $\Delta\omega_k$ (29.12). Точные выражения для δ и $\Delta\omega_k$ совпадают с этими оценками с точностью до постоянной. В случае большой скорости дрейфа и большой надкритичности можно получить

$$\Delta\omega_k = -(|P|^2 / 2\alpha) \ln[(\alpha/\gamma)^2 (|P|^2 + 2\alpha\gamma e^{-C})^{-1}],$$

$$\delta^2 = |P|^2 \{1 + 1/4 \ln[(\alpha/\gamma)^2 (|P|^2 + 2\alpha\gamma e^{-C})^{-1}]\}. \quad (29.29)$$

Здесь $C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера. Видно, что так же, как и при адиабатическом дрейфе, выполняется условие $|\Delta\omega_k| \gg \gamma_k$. Собственно говоря, на этом заканчивается специфическая часть S -теории, связанная с дрейфом. Далее следует обычная процедура самосогласования числа ПСВ с амплитудой перенормированной накачки P .

29.4. Определение зависимости числа ПСВ от амплитуды накачки — процедура самосогласования. Проще всего это сделать в сферически-симметричном случае (например, для АФМ ЛП), когда для вычисления полного числа ПСВ N достаточно умножить (29.26) и (29.28) на 4π . В ак-

сильно-симметричном случае, характерном для кубического ФМ ЖИГ, на котором был проделан эксперимент с дрейфом, также достаточно просто выполняется интегрирование (29.26) и (29.28) по углам. В результате при $|\eta_0| \ll (|\Pi_0|^2 - 1)^{3/2}$ получим выражение

$$N = N_T (\pi \eta_0 / \beta)^{1/2} [|\Pi_0|^2 / (|\Pi_0|^2 - 1)^{3/4} \exp [3(|\Pi_0|^2 - 1)^{3/2} / |\eta_0|]],$$

$$\mu = (|\Pi_0|^2 - 1)^{1/2} \operatorname{sign} \eta, \quad (29.30)$$

$$N_T = 4\pi^2 k^2 n_k^0 \gamma / v_k, \quad v_k = \partial \omega_k / \partial k.$$

Здесь N_T — число тепловых СВ в слое шириной $\Delta \omega_k = \pi \gamma_k$ вблизи резонансной поверхности. Если $|\Pi_0|^2 \gg |\eta_0| \gg 1$, $|\Pi_0|$, то

$$N = 2 N_T |\eta_0| |\Pi_0| (\pi \beta)^{-1/2} \exp(\pi |\Pi_0|^2 / 2 |\eta_0|),$$

$$\mu = (2 |\Pi_0| / \eta_0) \ln (|\eta_0| / |\Pi_0|). \quad (29.31)$$

В этих выражениях Π_0 и η_0 — значения Π_Ω и η_Ω на резонансной поверхности, а коэффициент $\beta \approx 2$ характеризует угловую зависимость Π_Ω :

$$|\Pi_\Omega|^2 = |\Pi_0|^2 - \beta \cos^2 \theta. \quad (29.32)$$

Видно, что в случаях различной симметрии — сферической и аксиальной — соответствующие формулы отличаются друг от друга только предэкспоненциальным фактором. При дальнейшем преобразовании это приведет только к незначительному отличию логарифмических множителей. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем аксиальной симметрии, для которого В.В. Зауткиным и др. [90] поставлен эксперимент.

Следующим этапом самосогласования является использование связи между P и hV . Из формулы (18.3) можно получить

$$|hV|^2 = |P|^2 + 2\mu \gamma |S|N + (SN)^2 \gamma^2 (1 + \mu^2) / |P|^2,$$

$$\mu = \operatorname{Re} P^* \Sigma / \gamma N. \quad (29.33)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$SN_{\pm} = \frac{|P|^2}{1 + \mu^2} \left[-\mu \pm \left(\mu^2 + \frac{1 + \mu^2}{|P|^2} (h^2 V^2 - |P|^2) \right)^{1/2} \right]. \quad (29.34)$$

Если выполняется условие адиабатичности дрейфа (29.14), то число ПСВ N велико по сравнению с тепловым шумом, а $\mu = \alpha (|P|^2 - \gamma^2)^{1/2} / |\alpha| \gamma$. Тогда из (29.34) следует

$$|S|N_{\pm} = -\frac{\alpha}{|\alpha|} (|P|^2 - \gamma^2)^{1/2} \pm \gamma (p - 1)^{1/2}, \quad p = (h/h_{\text{th}})^2. \quad (29.35)$$

Наиболее прост для анализа случай $S\alpha > 0$. При этом в (29.35) имеет смысл лишь решение N_+ . При малом уровне теплового шума

$$\epsilon = |S|N_T / \gamma \ll 1. \quad (29.36)$$

Рис. 29.2. Зависимость числа ПСВ N от амплитуды накачки при различных скоростях собственного дрейфа: 1 — $|\eta| = 0$; 2 — $|\eta| = 10^{-2}$; 3 — $|\eta| = 3 \cdot 10^{-2}$; 4 — 0,1. $S\partial\omega_k/\partial t > 0$ (а); $S\partial\omega_k/\partial t < 0$ (б)

Из (29.35) и (29.30) следует, что

$$|S|N_+ = \gamma(p-1)^{1/2} - (\alpha/4\gamma^2)\{\ln[(p-1)/p]\}^{1/3}. \quad (29.37)$$

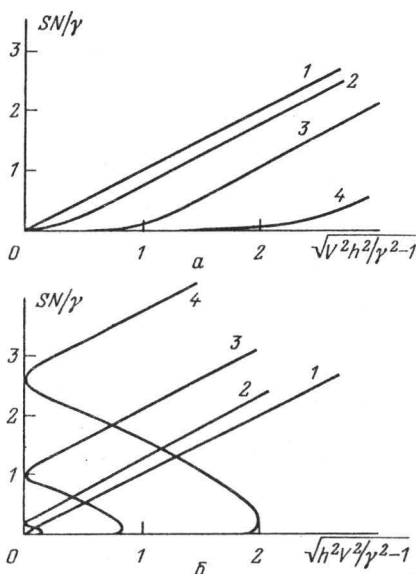
Здесь первое слагаемое соответствует известному результату S -теории. С ростом скорости дрейфа число ПВ падает. При очень малой надкритичности, когда $p-1 < \eta^2$, формула (29.37) неприменима, так как нарушается условие (29.14). В этом случае число параметрических волн невелико по сравнению с числом тепловых. При большой надкритичности применимость условия (29.14) также нарушается, и необходимо использовать формулы (29.31). При этом качественное поведение зависимости N от скорости дрейфа η сохраняется (рис. 29.2).

При отрицательной скорости дрейфа ситуация существенно сложнее, поскольку могут иметь смысл оба решения (29.35). При не слишком малых уровнях шума и не слишком больших скоростях дрейфа существует единственное решение, соответствующее корню N_+ в (29.35) и описываемое формулой (29.37). При $S\alpha \rightarrow 0$ это выражение, естественно, совпадает с результатом S -теории. Если уровень шума мал, а скорость дрейфа достаточно велика, то имеются три решения для числа волн N и перенормированной накачки $|P|$. Наименьшее из них соответствует ситуации, когда уровень шума настолько мал, а скорость дрейфа велика, что амплитуда ПСВ за время прохождения области неустойчивости не успевает вырасти до значительной величины. Другие два решения соответствуют большим N , промежуточное значение неустойчиво. На рис. 29.2, б приведен набор зависимостей числа волн N от мощности накачки p , вычисленных для различных значений скорости дрейфа α и амплитуды теплового шума $\epsilon = 10^{-3}$. Видно, что имеется гистерезис зависимости числа ПСВ от мощности накачки при фиксированной скорости дрейфа. При мощности накачки, меньшей некоторой, критический уровень ПСВ близок к тепловому. При $p > p_1$, где

$$p_1 \approx 1 + [3/4(|\alpha|/\gamma^2) \ln(|\alpha|/4\gamma^2\epsilon)]^{2/3}, \quad (29.38)$$

могут существовать два устойчивых состояния ПСВ. С ростом мощности накачки при $p > p_2$, где

$$p_2 = 1 + [3/4(|\alpha|/\gamma^2) |\ln \epsilon|]^{2/3}, \quad (29.39)$$



остается единственное состояние, которое при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в стандартное решение S -теории. Амплитуда этого решения близка к известному выражению

$$|S|N = \gamma(p-1)^{1/2}. \quad (29.40)$$

Следует подчеркнуть, что число ПВ на решении (29.37), соответствующем S -теории в отсутствие дрейфа, при увеличении скорости дрейфа и при фиксированной мощности накачки неограниченно растет.

В заключение этого параграфа приведем выражения для частоты однородных коллективных колебаний в случае адиабатического дрейфа:

$$\Omega_{\pm} = -i\gamma \pm [4(SN + \Delta\omega_k)(2T + S)N - \gamma^2]^{1/2}. \quad (29.41)$$

Здесь $\Delta\omega_k$ — сдвиг пакета ПСВ, задаваемый (29.12). Нужно сказать, что выражения (29.41) получены Е.В.Подивиловым, В.Б.Черепановым [198] в результате громоздкого аккуратного расчета, при этом они совпадают с выражениями, которые можно получить из простых уравнений S -теории без дрейфа для узкого пакета ПСВ, локализованного на поверхности $\tilde{\omega}_k = \Delta\omega_k + \omega_p/2$. Кстати, то же самое можно сказать относительно выражений для общего числа ПСВ N и Σ . Таким образом, в тех случаях, когда число ПСВ велико в сравнении с тепловым шумом, роль дрейфа в значительной мере сводится к модификации условия внешней устойчивости: вместо $2\tilde{\omega}_k = \omega_p$ получается $2\tilde{\omega}_k = 2\Delta\omega_k + \omega_p$, где положение центра пакета $\Delta\omega_k$ задается выражениями (29.12) или (29.29).

§ 30. Параметрическое возбуждение спиновых волн некогерентной накачкой при шумовой модуляции их частот

Хорошо известно, что к параметрической неустойчивости волн приводит не только монохроматическая, но и шумовая накачка. Порог этой неустойчивости зависит от ν — частотной ширины накачки. По порядку величины

$$\langle h_{th}^2 V^2 \rangle \approx \gamma(\gamma + 2\nu). \quad (30.1)$$

Существует ошибочное мнение, что при некогерентной накачке фазовый механизм ограничения амплитуды ПСВ не работает. Однако легко увидеть, что амплитуда ПСВ и фазовые соотношения, вычисленные по S -теории, не зависят от ширины спектра накачки ν при $\nu \ll \gamma$. Поэтому следует ожидать, что при $\nu \sim \gamma$ эти величины качественно не изменятся, т.е. аномальные корреляторы σ_k в парах ПВ не малы по сравнению с нормальными n_k . Значит, и при $\nu > \gamma$ аномальные корреляторы ведут себя как некоторая функция от ν/γ , которая стремится к постоянной, когда $\nu/\gamma \rightarrow 0$, и если эта функция убывает достаточно медленно с ростом ν/γ , то существует такая область $\nu > \gamma$, в которой самосогласованное взаимодействие является главным.

Особенности нелинейного поведения СВ при шумовой накачке изучались теоретически В.Б.Черепановым [227] и экспериментально В.В.Зауткиным и др. [90]. По их результатам и написан этот параграф.

30.1. Уравнения S -теории при шумовой накачке. Будем считать, что накачка $\tilde{h}(t)$ есть $\tilde{h}(t) = h(t)\exp(-i\omega_p t)$, где $h(t)$ — случайная функция

с шириной спектра ν такой, что $\omega_p \gg \nu \gg \gamma$. Уравнения S -теории для медленных амплитуд ПСВ в этом случае легко получить из (18.11), (18.12) заменой $h \rightarrow h(t)$. Из этих уравнений, в частности, следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_k \right) |a_k|^2 + 2 \operatorname{Im} [P_k^*(t) a_k(t) a_{-k}(t)] = 0, \quad (30.2)$$

$$\begin{aligned} |a_k(t)|^2 &= \\ &= -2 \operatorname{Im} \int_0^\infty \exp(-2\gamma_k \tau) P_k^*(t-\tau) a_k(t-\tau) a_{-k}(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (30.3)$$

Поскольку частота флуктуаций подынтегрального выражения велика по сравнению с γ_k , то при интегрировании по τ за время $(2\gamma_k)^{-1}$ происходит усреднение. Именно:

$$\gamma_k |a_k(t)|^2 = -\operatorname{Im} \langle P_k^* a_k a_{-k} \rangle. \quad (30.4)$$

Таким образом, число волн $n_k = |\bar{a}_k|^2$ (черта означает усреднение по случайным фазам пар ПСВ), а вместе с ним и перенормированная частота $\tilde{\omega}_k$ не флуктуируют при шумовой накачке. Для величины $\sigma_k = \overline{a_k a_k}$ аналогично можно получить

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2(\gamma_k + i\tilde{\omega}_k) \right] \sigma_k + 2iP_k(t)n_k = 0, \quad (30.5)$$

$$\sigma_k(t) = -2in_k \int_0^\infty P_k(t-\tau) \exp[-2(\gamma_k + i\tilde{\omega}_k)\tau] d\tau, \quad (30.6)$$

$$\operatorname{Im} \langle P_k^* \sigma_k \rangle = -2\pi n_k P^2(k, 2\tilde{\omega}_k), \quad (30.7)$$

$$P_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(k, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

$$\langle P(k, \omega), P^*(k, \omega') \rangle = P^2(k, \omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (30.8)$$

Подставляя (30.6) в (30.4), получим $\gamma_k n_k = 2\pi n_k P^2(k, 2\tilde{\omega}_k)$. Стационарное решение $n_k \neq 0$ существует при

$$2\pi P^2(k, 2\tilde{\omega}_k) = \gamma_k. \quad (30.9)$$

Если для какого-либо k выполняется неравенство

$$2\pi P^2(k, 2\tilde{\omega}_k) > \gamma_k,$$

то для этого k происходит нарастание амплитуды ПВ, что противоречит предположению о существовании стационарного состояния. Таким образом, для всех k должно быть выполнено условие внешней устойчивости:

$$2\pi P^2(k, 2\tilde{\omega}_k) \leq \gamma_k, \quad (30.10)$$

причем n_k отлично от нуля только в случае знака равенства в (3.2). Это условие аналогично условию внешней устойчивости, возникающему при монохроматической накачке $|P_k| \leq \gamma_k$. Из обычного выражения для перенормировки накачки (например, (18.3)) и уравнения (30.5) получим

$$\begin{aligned} h_{2\omega}^2 V_k V_{k'}^* = & P^2(k, k', \omega) - 2 \int dk_1 \left[\frac{S(k, k_1) P(k, k', \omega) n(k_1)}{\omega - 2\tilde{\omega}(k_1) + 2i\gamma(k_1)} + \right. \\ & \left. + \frac{S(k', k_1) P(k, k_1, \omega) n(k_1)}{\omega - 2\tilde{\omega}(k_1) - 2i\gamma(k_1)} \right] + \\ & + \int dk_1 dk_2 n(k_1) n(k_2) \frac{S(k, k_1) S^*(k', k_1) P^2(k_1, k_2, \omega)}{(\omega - 2\tilde{\omega}(k_1) + 2i\gamma(k_1))(\omega - 2\tilde{\omega}(k_1) - 2i\gamma(k_2))}. \end{aligned} \quad (30.11)$$

Решая это уравнение совместно с условием внешней устойчивости (30.10), можно получить распределение ПВ n_k .

Как известно, при параметрическом возбуждении волн когерентной накачкой n_k отлично от нуля в малой области k -пространства. В дальнейшем мы увидим, что при $v \ll kv$ (v — групповая скорость ПВ) область, занятая ПВ, тоже мала. Это позволяет нам считать все коэффициенты в (30.11) не зависящими от k . В ряде важных случаев, например при сферической и аксиальной симметрии распределения ПВ, можно избавиться в уравнении от угловой зависимости матричных элементов. Это позволяет упростить уравнение (30.11), переходя от переменной k к переменной $\tilde{\omega}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{2\omega}^2 V^2 = & P_{2\omega}^2 \left\{ 1 - S \int \frac{n(\tilde{\omega}_k) d\omega_k}{\tilde{\omega}_k - \omega} + \right. \\ & \left. + S^2 \left(\int \frac{n(\tilde{\omega}_k) d\tilde{\omega}_k}{\tilde{\omega}_k - \omega} \right)^2 + \pi^2 S^2 n_{\Omega}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (30.12)$$

$$n(\tilde{\omega}_k) = \int (n_k k^2 / v_{\Omega}) d\Omega.$$

30.2. Распределение ПСВ за порогом при шумовой накачке. В.Б. Черепанов проанализировал [227] полученные им уравнения (30.12) для специального вида спектральной плотности шумовой накачки

$$2\pi h_{2\omega}^2 V^2 = \gamma p (1 - \omega^2 / v^2), \quad v \gg \gamma. \quad (30.13)$$

В области малых надкритичностей ($p - 1 < 1$) он получил

$$\begin{aligned} 3\pi S n_{\omega} = & (p - 1)(\sqrt{3}\omega + \mu)^{3/2} (3\mu - \sqrt{3}\omega)^{1/2} / v^2, \\ \mu = & (p - 1)^{1/2} v \operatorname{sign} S. \end{aligned} \quad (30.14)$$

Следует отметить, что это решение отлично от нуля в несимметричном интервале $(-\mu/\sqrt{3}, \sqrt{3}\mu)$ и не является симметричным, несмотря на симметричный профиль накачки (30.13). В предельном случае больших

надкритичностей из (30.12) и (30.10) следует

$$3 \pi S n_{\omega} = (p - 1)^{1/2} (3 - 4 \omega^2 / \nu^2)^{3/2}. \quad (30.15)$$

Это решение отлично от нуля в симметричной области $|\omega| < \omega_1 = \sqrt{3} \nu / 2$, более узкой, чем область неустойчивости $|\omega| < \nu$, в которой $h_{2\omega}^2 > 0$. Такое сужение характерно для S -теории. Благодаря этому поведение $h_{2\omega}^2$ при $|\omega| > \omega_1$ несущественно для нашей задачи и решение (30.12) качественно справедливо при любом виде спектральной плотности накачки.

Интегрируя (30.14) и (30.15) по ω , легко получить зависимость полного числа ПСВ от надкритичности:

$$N = 4 \nu (p - 1)^{3/2} / 9 \pi \sqrt{3} |S|, \quad p - 1 < 1, \quad (30.16)$$

$$N = \sqrt{3} \nu (p - 1)^{1/2} / 2 \pi |S|, \quad p \gg 1. \quad (30.17)$$

При $\nu \sim \gamma$ выражение (30.17) согласуется с формулой (19.1) для случая когерентной накачки. Что касается соответствия формул (30.15) и (19.1) для малых надкритичностей, то при $\nu \sim \gamma$ справедлива первая из них, так как в этом случае нельзя говорить о жесткой корреляции фаз волн в парах. При дальнейшем уменьшении ν член $\text{Re} \langle P_k^* \sigma_k \rangle$ в (30.11) будет мал по параметру $(\nu/\gamma)^2$, и при малых ν следует учитывать квадратичный по σ член.

Определим теперь предел применимости приближения самосогласованного поля при параметрическом возбуждении волн шумовой накачкой. Для этого сравним член $\text{Im} \langle P_k^* \sigma_k \rangle$ в уравнении для n_k (30.2) с опущенными в нем членами кинетического уравнения, имеющими порядок величины $(SN)^2 n_k / (k\nu)$. В результате получим, что наш подход справедлив при

$$\nu^2 (p - 1) < \gamma k \nu. \quad (30.18)$$

В твердых телах $k\nu/\gamma \approx 10^4 \div 10^6$, что обеспечивает достаточно широкие рамки применимости для приближения S -теории. Отметим также, что противоположный предельный случай, когда рассеяние ПВ превосходит их самосогласованное взаимодействие, изучался И.Б. Левинсоном [141].

Приведем теперь оценку для углового размера возбуждаемых пакетов. Как и в случае монохроматической накачки в приближении S -теории, при шумовой накачке угловые размеры пакетов ПВ равны нулю. Это легко установить на примере простейшей модели

$$V_k = V f(\theta), \quad S(k, k') = S f(\theta) f^*(\theta'), \quad \gamma_k = \gamma,$$

качественно справедливой в ФМ. При этом $P^2(k, k', \omega) = P_{\omega}^2 f(\theta) f^*(\theta')$, и в (30.11) удастся исключить зависимость от углов, ПВ сосредоточены в угле θ_0 , где $|f(\theta_0)|$ максимально. Можно показать, что слабое рассеяние ПВ приводит к уширению пакета на угол $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta \approx (SN/k\nu) \approx \nu(p - 1)^{1/2} / k\nu. \quad (30.19)$$

В заключение этого параграфа отметим, что развитая в нем теория находится в хорошем соответствии со специально поставленным экспериментом В.В. Зауткина, Б.И. Орла и В.Б. Черепанова [90]. Это позволяет считать, что амплитуда ПСВ в условиях шумового возбуждения ограничивается, как и при когерентном возбуждении, фазовым механизмом S -теории.

Хорошо известно, что при параметрической генерации СВ стационарный режим часто не устанавливается и намагниченность совершает сложные автоколебания — АК — вокруг некоторого среднего значения. Основные экспериментальные факты, относящиеся к АК и полученные для высококачественных кристаллов ЖИГ при параллельной накачке, заключаются в следующем [17]:

1. Частоты АК намагниченности лежат в интервале от 10^4 до $\sim 10^6$ Гц (в зависимости от мощности накачки и величины постоянного магнитного поля). При небольшом превышении порога спектр АК состоит из одной линии, с ростом уровня мощности происходит увеличение числа линий и смещение их в сторону более высоких частот. При больших превышениях над порогом спектр имеет шумовой характер.

2. Порог АК обычно превышает порог параметрического возбуждения СВ: $0,1 \div 1$ дБ, за исключением области малых волновых векторов $k \approx \approx 10^3 \div 10^4$ см $^{-1}$, где порог АК увеличивается. Порог также возрастает при введении в кристалл неоднородностей.

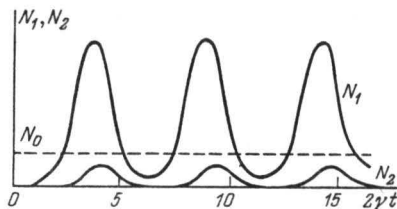
3. Наблюдается гигантская кристаллографическая анизотропия свойств АК, значительно превышающая анизотропию спектра СВ. Так, интенсивность АК в ЖИГ при ориентации намагниченности вдоль оси [111] превышает интенсивность этих колебаний вдоль оси [100] приблизительно в 100 раз.

Вопрос о физической природе АК был одной из основных проблем в задаче о параметрическом возбуждении СВ. Для объяснения природы АК привлекались различные гипотезы [17]. Сейчас, однако, все они представляют только исторический интерес. В рамках S -теории АК находят естественное объяснение как результат развития описанной в гл. 5 неустойчивости стационарного состояния относительно возбуждения КК. Если хотя бы для одной моды (с номером m) выполнены условия неустойчивости $S_m(2T_m + S_m) < 0$, то в рамках S -теории система ПСВ не имеет устойчивых стационарных состояний. При этом можно представить две возможности — "выброс" системы за пределы применимости S -теории (при этом должна сильно возрасти амплитуда возбужденных волн) или установление колебаний вокруг стационарного состояния. Эти колебания, если они развиваются, и наблюдаются на опыте как автоколебания намагниченности. Из общих соображений следует ожидать, что АК могут носить как регулярный, как и хаотический характер, в последнем случае их можно трактовать как "вторичную" турбулентность с временным масштабом, много большим масштаба "основной" турбулентности — периода СВ.

Как видно из формулы (23.6), неустойчивость стационарного состояния является чисто апериодической ($\text{Re } \Omega_m = 0$), поэтому вторичная турбулентность является сильной. Это делает крайне затруднительным аналитическое решение вопроса о нелинейной стадии развития КК и о характере вторичной турбулентности, если таковая возникает. Поэтому представляется целесообразным численное моделирование вторичной турбулентности на ЭВМ. При этом расчет реальной ситуации, например для ЖИГ, потребовал бы огромных затрат машинного времени и вряд ли целесообразен. Это заставляет

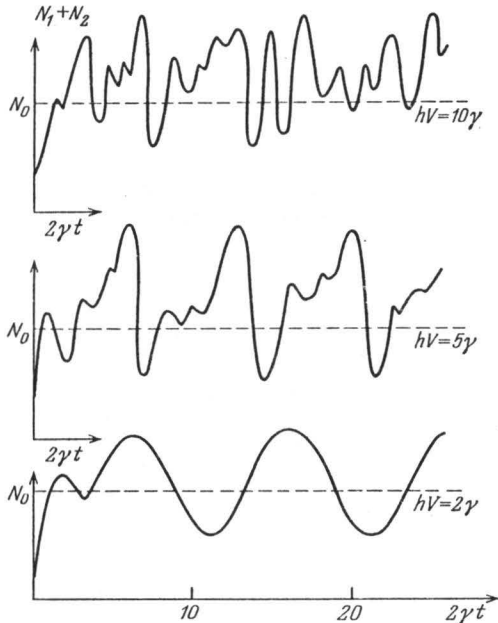
обращаться к численному эксперименту на упрощенных моделях основного состояния. В работах В.С. Львова, С.Л. Мушера, С.С. Старобинца [152], В.Л. Гранкина и др. [70] описан численный эксперимент по возбуждению АК на модели "двух лучей", в которой считалось, что СВ сосредоточены при двух фиксированных углах $\theta_1 = \pi/2$ $\theta_2 = \pi/4$. Значения коэффициентов S_0 и T_0 выбирались близкими к вычисленным для ЖИГ при ориентации магнитного поля относительно оси [111] (см. ниже), так что выполнялись условия неустойчивости нулевой моды. Численный эксперимент показал, что в такой модели устанавливаются АК амплитуд и фаз волн на лучах

Рис. 31.1. Зависимость амплитуды пар на лучах от времени при неустойчивости нулевой моды (N_1 и N_2 отвечают лучам с $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi/4$)



(рис. 31.1). Зависимость частоты этих АК от уровня накачки качественно согласуется с аналогичной зависимостью, обычно наблюдающейся в лабораторном эксперименте. На модели двух лучей был, кроме того, проделан эксперимент, моделировавший развитие коллективной неустойчивости при $m \neq 0$. При этом изучался вопрос о поведении суммарной амплитуды волн на нелинейной стадии развития этой неустойчивости, интересный потому, что на линейной стадии изменения суммарной амплитуды не происходит. Были выбраны лучи с $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$. Численный эксперимент показал (рис. 31.2), что устанавливается режим, в котором испытывают колебания как разность, так и сумма амплитуд волн на лучах. Колебания суммы амплитуд возникают из-за взаимодействия коллективных мод с различными m .

Существенным результатом этих численных экспериментов было доказательство того, что при $p < p_c \approx (1,0 \div 1,5)$ дБ система ПСВ выходит на устойчивый предельный цикл, областью притяжения которого является все фазовое пространство. При $p > p_c$ траектории вблизи этого цикла становятся экспоненциально неустойчивыми, причем средний по циклу инкремент расходимости растет пропорционально $(p - p_c)$. При малых $(p - p_c)$ вблизи предельного цикла образуется узкий слой, заполненный экспоненциально неустойчивыми траекториями. Расходимость траекторий исследовалась и в лабораторном эксперименте В.Л. Гранкина и др. [70]. Для этого на один и тот же экран записывались зависимости $\chi''(t)$ для разных импульсов накачки одной серии с фиксированной надкритичностью и другими условиями эксперимента. При этом для разных импульсов из-за флуктуаций система волн каждый раз стартует (при $t = 0$) с различными начальными условиями. При надкритичностях $p = 2,5$ дБ последовательные кривые $\chi''(t)$ совпадают друг с другом. При превышении $p > 2,5$ дБ, когда появляется резкое уширение фурье-спектра АК, кривые $\chi''(t)$ для разных импульсов начинают расходиться. Вначале расходимость близких траекторий сказывается лишь при больших временах.



Р и с. 31.2. Зависимость суммарной амплитуды пар на лучах от времени при неустойчивости моды $m = 2$

Затем по мере увеличения надкритичности "время разбегания" становится сравнимым с периодом АК $\tau \approx (3 \div 5) \Delta_0$ и последовательные кривые $\chi''(t)$ образуют широкую полосу.

Резюмируя, можно сказать, что численный эксперимент на моделях показывает, что в рамках уравнений S -теории развитие внутренней неустойчивости основного состояния приводит к автоколебаниям. Свойства этих АК — зависимость частоты и спектрального состава от мощности накачки — сопоставимы со свойствами реальных АК, наблюдаемых в лабораторном эксперименте. В частности, при малых надкритичностях в лабораторном и численном экспериментах АК являются периодическими. Образцом такого движения в фазовом пространстве является устойчивый предельный цикл. В обоих типах экспериментов переход к стохастическим АК с ростом надкритичности происходит не с помощью добавления новых типов движения на несоизмеримых частотах, а сопровождается уширением уже существующих спектральных линий с кратными частотами и связан с потерей устойчивости фазовых траекторий, приводящей к их разбеганию. Далее, как в численном, так и в лабораторном экспериментах развитие АК не влияет существенно на средний уровень ПСВ. Численный эксперимент показывает, кроме того, что при развитии неустойчивости на нулевой моде происходят глубокие, а при развитии неустойчивости на высших модах — мелкие колебания суммарной амплитуды волн и вместе с ней и наблюдаемой величины χ'' . Любопытно, что возникновение АК в численном эксперименте, как правило, сопровождалось уменьшением среднего значения χ' . Эта закономерность наблюдается и в лабораторном эксперименте.

Полученные выше результаты позволяют сделать предсказание относительно того, в каких случаях АК должны наблюдаться в реальных экспериментах. Приведем значения коэффициентов S_m и T_m для ЖИГ, вычисленные С.Л. Мушером, С.С. Старобинцем и В.С. Львовым [152] для типичной экспериментальной ситуации: $N_z = 1/3$ (сфера), $\omega_p = 9,4$ ГГц, $k = 0$ ($H = H_c$), $\omega_M = 49$ ГГц, $\omega_a = 0,23$ ГГц (комнатная температура), табл. 31.1.

Видно, что не только значения, но и знаки коэффициентов зависят от ориентации намагниченности. Подставляя табличные данные в критерий неустойчивости, можно убедиться, что в "легком" направлении [111] имеется неустойчивость относительно нулевой моды, в то время как в "трудном" направлении [100] все моды в рассмотренной ситуации устойчивы. На опыте при $H = H_c$ в "трудном" направлении АК действительно отсутствуют вплоть до превышений $p_2 \approx 6 \div 7$ дБ, соответствующих второму порогу, в "легком" же направлении наблюдаются интенсивные АК практически сразу за порогом p_1 [17].

Условия возникновения автоколебаний в различных экспериментальных ситуациях подробно проанализированы В.В. Зауткиным и С.С. Старобинцем [87]. Варьируя в широких пределах коэффициенты гамильтониана S_m, T_m (изменяя намагниченность с помощью температуры и концентрации примесей, изменяя форму образца — сфера, цилиндр, диск — и направление намагниченности), они, в частности, показали, что интенсивные АК возникают только при неустойчивости нулевой моды по критерию (23.7), в то время как неустойчивость мод с $m \neq 0$ всегда сопровождается возникновением АК малой амплитуды. Другие наблюдаемые особенности АК также находят естественное объяснение в рамках S -теории.

В последнее время в связи с успехами теории динамических систем в изучении перехода к турбулентности в рамках представлений о стохастическом (или странном) аттракторе возобновился интерес к изучению свойств АК в системе ПСВ. В частности, в работе Г. Гибсона и Ч. Джафриса [68] детально изучен переход от периодических АК к хаосу в ЖИГ (с примесью галлия) при параметрическом возбуждении СВ методом поперечной накачки на частоте $\omega_p/2\pi = 1,3$ ГГц. Исследованы фазовый портрет АК и функция последования Пуанкаре в зависимости от надкритичности. Обнаружены бифуркации удвоения периода АК. Показано, что в фазовом пространстве этой системы есть несколько сложных аттракторов, переход между которыми сопровождается гистерезисом. Бифуркации удвоения цикла АК были обнаружены также Ямазаки (1984 г., а) при параллельной накачке СВ в АФМ $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ на частоте $\omega_p/2\pi = 8,9$ ГГц при температуре 1,4 К и надкритичности $p > 10^2$. Впоследствии аналогичные результаты

Таблица 31.1

Коэффициенты S_m, T_m в единицах $2\pi g^2$ для ЖИГ

Ориентация	T_0	S_0	$T_2 = T_{-2}$	S_2	S_{-2}
[100]	0,28	0,52	0,11	0,01	-0,36
[111]	-0,75	0,30	0,05	0,01	-1,27

были получены Х. Ямазаки и др. [239, 240] и при параметрическом возбуждении СВ методом параллельной накачки в квазидвумерном ФМ $(\text{CH}_3\text{NH}_3)_2\text{CuCl}_4$. Очень интересные результаты по исследованию перехода к хаосу АК в АФМ ЛП получены А.И. Смирновым [208]. К сожалению, сейчас еще рано говорить о том, каков "сухой остаток" от этих работ; в-первых, для понимания проблемы стохастизации в рамках общей теории динамических систем (кроме очевидного утверждения, что нелинейные спиновые волны — одна из систем, к которой она применима) и, во-вторых, для физики нелинейных спиновых волн собственно. Поэтому в этой книге мы не будем обсуждать интересную проблему перехода к хаосу при АК спиновых волн с точки зрения общей теории динамических систем. Отметим только, что численное моделирование перехода к хаосу в АК на моделях с небольшим числом уравнений проводилось Е.В. Асташкиной, А.С. Михайловым [51]. Однако вопрос о соответствии этих моделей эксперименту, в котором возбуждаются СВ в широкой области k -пространства, остается открытым.

В заключение надо сказать, что описанная здесь простая теория АК предсказывает, что порог их возникновения h_a совпадает с порогом параметрического возбуждения h_{th} , а частота автоколебаний при $h = h_a$ равна нулю. В экспериментах же наблюдается $h_a > h_{th}$ и ненулевая начальная частота.

В монокристаллах ЖИГ порог АК h_a обычно выше, чем h_{th} на $0,1 \div 1$ дБ, а начальная частота не коррелирует с величиной порога и в зависимости от постоянного магнитного поля изменяется в пределах $10^4 \div 10^5$ Гц [17]. Эти факты можно объяснять влиянием слабого нелинейного затухания, не изменяющего существенно величины χ' и χ'' , присутствием в кристаллах случайных неоднородностей, отсутствием точной аксиальной симметрии, обратным влиянием образца на резонатор и т.п. Для выяснения относительного вклада этих механизмов необходимо дальнейшее теоретическое и экспериментальное изучение АК.

§ 32. Автоколебания и коллапс при параметрическом возбуждении узкого пакета волн

Ранее мы считали, что порог параметрической неустойчивости минимален для пар волн с векторами $\pm k$, заполняющих линию или поверхность в k -пространстве. При этом сумма фаз в паре является динамической переменной, а индивидуальные фазы волн хаотизированы. Здесь мы опишем ситуацию, когда порог возбуждения минимален для единственной пары $\pm k_0$, например, при параллельной накачке в одноосных ФМ с анизотропией типа "легкая плоскость". Принципиальной особенностью задачи является узость возбуждаемых в k -пространстве пакетов волн. Это не позволяет пользоваться статистическим описанием, как в S -теории, однако делает возможным упростить точный гамильтониан взаимодействия по другому параметру — узости пакета. Для этого задачу необходимо сформулировать на языке волн огибающих.

32.1. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд и "универсальная" неустойчивость одной пары.

Используя канонические уравнения движения с точным гамильтонианом и предполагая, что в k -пространстве возбуждены

узкие пакеты волн

$$a_k = A(k - k_0) + B(k - k_0),$$

получим также, как и в гл. 3, уравнения для огибающих $A(r)$, $B(r)$ — фурье-компонент $A(\vec{k})$ и $B(\vec{k})$:

$$\begin{aligned} \left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) + \frac{1}{2} \hat{L} \right] A &= -i\gamma A + hVB^* + \\ &+ (\omega_{k_0} - \frac{1}{2} \omega_p + T|A|^2 + 2S|B|^2)A, \\ \left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v} \nabla \right) + \frac{1}{2} \hat{L} \right] B &= -i\gamma B + hVA^* + \\ &+ (\omega_{k_0} - \frac{1}{2} \omega_p + T|B|^2 + 2S|A|^2)B, \end{aligned} \quad (32.1)$$

$$S \equiv T(k_0, \bar{k}_0, k_0, \bar{k}_0), \quad T \equiv T(k_0, k_0, k_0, k_0),$$

$$\mathbf{v} = \partial \omega_k / \partial \mathbf{k}, \quad \hat{L} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

Уравнения (32.1) имеют тривиальное решение $|A(r)| = |B(r)| = A^0$, где

$$A(r) = A_0 \exp(-i\Psi_1), \quad B(r) = A_0 \exp(-i\Psi_2),$$

$$2|A_0|^2 = N, \quad SN = ((hV)^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad \sin(\Psi_1 + \Psi_2) = \gamma/hV, \quad (32.2)$$

соответствующее возбуждению стоящей волны $\pm k_0$. Покажем, что решение (32.2) практически всегда неустойчиво относительно нарастания модулей амплитуд и фаз волн огибающих:

$$\delta A(r, t), \delta B(r, t) \propto \exp[i\vec{k}\vec{r} + \nu(\vec{k})t].$$

На языке исходного гамильтониана это означает неустойчивость по отношению к четырехволновым процессам

$$2\omega(\pm k_0) = \omega(\pm k_0 + \vec{k}) + \omega(\pm k_0 - \vec{k}), \quad (32.3)$$

$$\omega(k_0) + \omega(-k_0) = \omega(k_0 + \vec{k}) + \omega(-k_0 - \vec{k}). \quad (32.4)$$

При больших k величины $k_0 + \vec{k}$ и $k_0 - \vec{k}$, как правило, не могут одновременно попасть в область k -пространства, где затухание скомпенсировано накачкой и порог модуляционной неустойчивости (32.3) оказывается высоким. В этом случае существенны только процессы (32.4), в которых волны взаимодействуют парами $\pm k$, что соответствует приближению S -теории. Анализ выражения для инкремента (32.9) показывает, что вклад процессов (32.3) во взаимодействие волн мал, если

$$\vec{k}/k_0 \gtrsim [(hV - \gamma)/\omega]^{1/3}. \quad (32.5)$$

Это неравенство оценивает минимальное расстояние между парами в динамическом режиме, при котором их еще можно описывать в рамках S -теории. При k , меньших, чем (32.5), существенны оба процесса (32.3) и (32.4), и следует рассматривать пары $\pm k_0$ по отношению к рождению четырех связанных СВ $\pm(k_0 + \vec{k})$ и $\pm(k_0 - \vec{k})$; соответствующее дисперсионное

соотношение имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\gamma + \nu)^2 - \gamma^2 = & -(\kappa \nu)^2 - \gamma^2 W_{\kappa^2} - \frac{1}{4} (L \kappa^2)^2 - \\
 & - \frac{1}{2} L \kappa^2 (2S + T) N - N^2 S (2S + T) \pm \{ (\vec{\kappa} \nu)^2 [(L \kappa^2)^2 + \\
 & + 2L \kappa^2 (2S + T) N + 4N^2 S (S + T)] + \\
 & + N^2 [SL \kappa^2 + NS(2S + T)]^2 \}^{1/2}.
 \end{aligned} \quad (32.6)$$

Здесь мы учли зависимость V_{κ} от κ :

$$V(\mathbf{k}_0 + \vec{\kappa}) = V(1 + \frac{1}{2} W_{\kappa^2}),$$

$$W_{\kappa^2} \equiv \frac{1}{V} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 V_{\kappa}}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} \Big|_{\kappa = \kappa_0} \kappa_{\alpha} \kappa_{\beta}.$$

Следует ожидать, что неустойчивость будет развиваться в основном для волновых векторов $\vec{\kappa}$ вблизи поверхности:

$$\pm \vec{\kappa} \nu + \frac{1}{2} L \kappa^2 = 0. \quad (32.7)$$

Это означает, что $\vec{\kappa}$ почти перпендикулярен ν и наиболее чувствительной по отношению к изменению направления $\vec{\kappa}$ величиной в (32.6) будет скалярное произведение $\vec{\kappa} \nu$. Поэтому будем искать максимальный инкремент, варьируя (32.6) только по $\vec{\kappa} \nu$. Получим в результате, что максимальный инкремент ν_m достигается на поверхности

$$\begin{aligned}
 (2\vec{\kappa} \nu)^2 = & [L \kappa^2 + (2S + T) N]^2 - T^2 N^2 - \\
 & - \frac{4N^2 [SL \kappa^2 + S(2S + T) N]^2}{[L \kappa^2 + (2S + T) N]^2 - T^2 N^2},
 \end{aligned} \quad (32.8)$$

которая при больших $L \kappa^2$ мало отличается от (32.7), и равен

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -\gamma^2 W_{\kappa^2} + \frac{T^2 S^2 N^4}{[L \kappa^2 + (2S + T) N]^2 - T^2 N^2}. \quad (32.9)$$

Второе слагаемое (32.9) в S -теории отсутствует. Сравнивая его при больших значениях κ с первым слагаемым, получаем оценку (32.5) применимости S -теории. Поведение инкремента при $L \kappa^2 \sim \gamma$ зависит от соотношения знаков S , T и $(2S + T)$.

Рассмотрим вначале случай $T > 0, S > 0$. Для него выражение (32.9) справедливо при $\kappa > \kappa_0, \kappa_0/k_0 \approx SN/\omega$. При $\kappa \approx \kappa_0$

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = T^2 N^2 S / (T + S). \quad (32.10)$$

При $\kappa < \kappa_0$ инкремент начинает резко уменьшаться, при $\kappa \ll \kappa_0$

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = (\kappa \nu)^2 T S N^2$$

при $\vec{\kappa} \parallel \nu$ (рис. 32.1). Если эти условия не выполняются, то выражения (32.8), (32.9) справедливы только при $\kappa > \kappa_1$, где

$$L \kappa_1^2 = [(T^2 + S^2)^{1/2} + |S| - (2S + T)] N.$$

При меньших κ инкремент максимален на плоскости $\vec{\kappa} \perp \nu$ и равен

$$\begin{aligned}
 (\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = & -\frac{1}{4} [L \kappa^2 + (2S + T) N]^2 + \\
 & + (\frac{1}{4} T^2 - S^2) N^2 + |SN [L \kappa^2 + (2S + T) N]| - \gamma^2 W_{\kappa^2}.
 \end{aligned} \quad (32.11)$$

При $\kappa = 0$ отсюда следует

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -2S(2S + T)N^2, \quad \nu_m = 0. \quad (32.12)$$

Первая ветвь соответствует "собственной" неустойчивости в S -теории, вторая — состоянию безразличного равновесия по отношению к изменению разности фаз $\varphi_0 - \varphi_{\bar{0}}$ пары. Происхождение второй моды связано с динамическим характером стационара — отсутствует хаотизация разностей фаз, безразличное равновесие возникает из-за пространственной однородности,

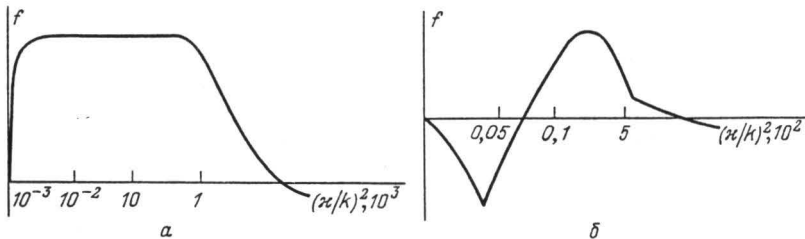


Рис. 32.1. Зависимость инкремента неустойчивости $\nu_{\max}$, $f = \nu_{\max}^2 + 2\gamma\nu_{\max}$ от κ . $S < 0$, $2S + T > 0$ (а); $S < 0$, $T > 0$, $2S + T > 0$ (б)

так как разность $\varphi_0 - \varphi_{\bar{0}}$ определяет положение в пространстве узлов стоячей волны. При малых κ эта мода останется устойчивой, если

$$T > 0, \quad (2S + T) > 0. \quad (32.13)$$

Интересно, что $T > 0$ — условие отсутствия самофокусировки монохроматической волны в консервативной среде. Условия (32.13) достаточно и для "собственной" устойчивости. При малых κ поведение (32.11) зависит от знака $S(2S + T)$. При $S(2S + T) > 0$

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -\frac{1}{4}(L\kappa^2)^2 - \frac{1}{2}L\kappa^2 TN. \quad (32.14)$$

Если $S(2S + T) < 0$, то

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -\frac{1}{4}(L\kappa^2)^2 - \frac{1}{2}L\kappa^2(4S + T)N - 2S(2S + T)N^2. \quad (32.15)$$

Подробнее рассмотрим случай "собственной" устойчивости пары $S(2S + T) > 0$. Тогда для устойчивости при малых κ необходимо, чтобы $T > 0$, как это видно из (32.14). Отсюда с необходимостью следует $S < 0$ (иначе реализуется неустойчивый случай $T > 0$, $S > 0$), поэтому $2S + T > 0$. При этом инкремент описывается формулой (32.14) при $\kappa_2 > \kappa > 0$, $L\kappa_2^2 = |2S + T|N$. Если $\kappa_1 > \kappa > \kappa_2$, то инкремент при $T > 0$, $S < 0$, $(2S + T) < 0$ описывается формулой (32.15). Из нее следует, что при $|SN| \sim \gamma$ инкремент становится положительным уже при $L\kappa^2 = 2L\kappa_2^2$ (рис.32.2). Он достигает максимального значения

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -\gamma^2 W \kappa_1^2 + \frac{1}{2}|S|((T^2 + S^2)^{1/2} - |S|)N^2 \quad (32.16)$$

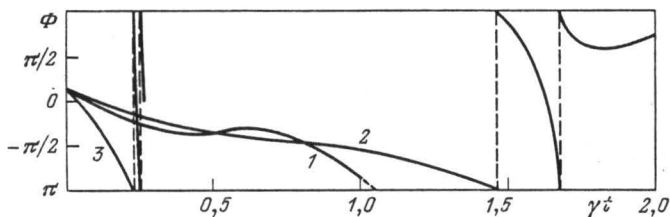
при $p = \kappa_1^2$. Считая $W \sim k_0^{-2}$, $L \sim \omega k_0^{-2}$, получаем оценку для порога неустойчивости:

$$(h_c V - \gamma)/\gamma \lesssim (\gamma/\omega)^2 (S/T)^4. \quad (32.17)$$

Оценивая $(\gamma/\omega) \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$, получим для порога неустойчивости пары

значения $(h_{th}V - \gamma)/\gamma \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$. Для того чтобы пара осталась устойчивой при превышениях в несколько децибелл $(hV - \gamma \approx \gamma)$, необходимо, чтобы $|T| \sim (0,1 \div 0,01)S$. Таким образом, монохроматическая стоячая СВ при параллельной накачке практически всегда неустойчива.

Характер развития неустойчивости существенно зависит от параметров гамильтониана T и S . За исключением случая $T > 0, S > 0$, который мы в дальнейшем обсуждать не будем, инкремент неустойчивости, как уже отмечалось, максимален на поверхности $\vec{k}_0 \perp \vec{k}_0$, а при удалении от поверхности быстро убывает. Это приводит к тому, что основные свойства



Р и с. 32.2. Зависимость фазы $\Phi(0, t)$ в центре пакета для $p = 4, T = -S$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $k = 2; 3; 3,5$

нелинейной стадии развития неустойчивости можно проследить, пользуясь двумерными уравнениями, в которых A и B зависят только от координат x и y , ортогональных V . Выражения (32.14) и (32.15) для инкремента соответствуют возмущениям вида $\delta A(r, t) \pm \delta B(r, t)$. В случае $T > 0, S < 0$ видно, что возмущение $\delta A = -\delta B$ имеет запас устойчивости и, как показано В.С. Львовым, А.М. Рубенчиком [151], при этом $A(r, t) = B(r, t)$ и на нелинейной стадии движения. Ограничиваясь для простоты случаем $\omega'' > 0$, можно, изменяя масштаб, преобразовать уравнение (32.1) к виду

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) A - hVA^* + \frac{1}{2} \Delta A = [(2S + T)|A|^2 - TA_0^2]A. \quad (32.18)$$

Здесь мы определили значение ω_{k_0} из условия внешней устойчивости (2.12). Этим выбирается наиболее устойчивая стоячая волна, для которой, как можно показать, область положительного инкремента в k -пространстве органичена, $k \ll k_0$. Изучение нелинейной стадии развития неустойчивости плоской стоячей волны в дальнейшем будет проводиться в рамках выведенных здесь уравнений (32.18).

Проведенный В.С. Львовым, А.М. Рубенчиком [151] анализ дает основания считать, что все стационарные солитоны в уравнениях (32.18) неустойчивы. Там же рассмотрена также начальная нелинейная стадия этой неустойчивости, причем особое внимание уделяется случаю, когда инкремент аномально мал. Он интересен тем, что нелинейное взаимодействие начинает играть существенную роль при весьма малых амплитудах. Оказалось, что тем не менее оно не ограничивает роста начального возмущения, а лишь сильно замедляет его. Амплитуда его при этом растет как $t^{1/2}$. В результате образуется узкий в k -пространстве пакет волн с $k \sim k_0 \ll k_0$,

$\Delta k \sim \kappa_0$. Такое состояние является сильно турбулентным, к его изучению мы приступим в следующем пункте.

32.3. Средние характеристики автоколебаний пары. Вначале оценим ширину возбужденной в k -пространстве области при произвольной надкритичности. Из S -теории следует, что в обсуждаемом нами случае, когда V_k максимальна в точке k_0 , пакет параметрически возбужденных волн релаксирует к стоячей монохроматической волне с $k = k_0$, если индивидуальные фазы волн можно считать случайными. Для случайности фаз достаточно, чтобы фазы двух волн в пакете расходились на величину порядка единицы за время, меньшее характерного времени нелинейного взаимодействия. Это происходит в пакете с $(\Delta k)^2 \gg \kappa_0^2 = SA_0^2/\omega''$. Поэтому пакет с $\Delta k \gg \kappa_0$ сужается до размеров $k \sim \kappa_0$, а его средняя амплитуда релаксирует к величине A_0 . Если же $\Delta k \ll \kappa_0$, то такой пакет неустойчив с инкрементом (32.14) относительно возмущений с $k \sim \kappa_0$ и, следовательно, будет расширяться до $\Delta k \sim \kappa_0 \sim (SA_0^2/\omega'')^{1/2}$. Подчеркнем, что во всей области турбулентного движения инкремент неустойчивости (32.14) положителен в узком слое $\vec{k}_{\parallel} < SA_0^2/V$ вблизи плоскости $\vec{k} \perp \mathbf{v}$, т.е. рассматриваемая нами турбулентность является почти двумерной:

$$(\kappa_{\parallel}/\kappa_{\perp})^2 \approx SA_0^2/\omega_k \ll 1. \quad (32.19)$$

Средний уровень турбулентности A^2 не может сильно отличаться от величины A_0^2 , определяемой формулой (32.2). Действительно, как отмечалось выше, монохроматическая плоская волна устойчива относительно коротковолновых возмущений с $k \approx k_0$, только если ее амплитуда равна A_0 . Очевидно, что такая неустойчивость сохраняется и для пары, промодулированной с $k \ll k_0$, поэтому, если A^2 заметно отличается от A_0^2 , то возбуждены коротковолновые модуляции, что противоречит полученному выше утверждению об узости пакета. Таким образом, развитие неустойчивости плоской волны приводит к сильной квазидвумерной турбулентности волн модуляции $A(r, t)$ со средним уровнем

$$\overline{A^2} \approx A_0^2 = h^2 V^2 - \gamma^2 / 2S, \quad (32.20)$$

глубиной модуляции порядка единицы, характерной частотой движения $hV - \gamma$ и характерным масштабом в координатном пространстве $r_{\perp} \approx \kappa_0^{-1} \approx k_0^{-1} (\omega/SA_0^2)^{1/2}$. Можно сказать, что возникает динамическая солитонная структура с длиной когерентности порядка размеров солитонов, т.е. $A_0^{-1} (\omega''/S)^{1/2}$, которая существенно меняется в пространстве за время $(hV - \gamma)^{-1}$.

32.4. Разрушение солитонов и механизм ограничения амплитуды коллапсом. В тех областях, где амплитуда солитонов в процессе турбулентного движения оказалась аномально большой, $A \gg A_0$, в уравнениях движения можно пренебречь затуханием и накачкой, так как за характерное время задачи $(SA^2)^{-1}$ система ПВ не успеет существенно обмениваться энергией с термостатом и накачкой. В этом приближении уравнения (32.1) описывают нестационарное поведение пары волн в консервативной среде. Прежде всего покажем, что явление коллапса характерно не только для огибающей монохроматической волны, но и для пары волн. Для этого отметим, что непосредственным вычислением можно убедиться в том, что уравнения

(32.1) (при $\gamma = h = 0$) имеют следующий интеграл движения:

$$I = \frac{1}{2} \omega'' \int (|\nabla A|^2 + |\nabla B|^2) dr + \frac{1}{2} T \int (|A|^4 + |B|^4) dr + 2S \int |A|^2 |B|^2 dr. \quad (32.21)$$

Далее мы покажем, что его знак во многом определяет эволюцию системы. Рассмотрим для этого вторую производную от существенно положительной величины

$$R = \frac{1}{2} \omega'' \int r_{\perp}^2 (|A|^2 + |B|^2) dr. \quad (32.22)$$

Непосредственным вычислением с помощью (32.1), в котором по параметру $(SA_0^2/\omega) \ll 1$ можно пренебречь вторыми производными по z , так же, как в п. 12.4 гл. 3, можно показать, что $\partial^2 R / \partial t^2 = 2I$, откуда следует

$$R(t) = It^2 + 2\alpha t + \beta, \quad (32.23)$$

где α и β — постоянные интегрирования. Видно, что при $I < 0$ за конечное время $R(t)$ становится отрицательным, что противоречит (32.22). Это означает, что решение уравнений (32.1) "разрушается" за конечное время, т.е. появляется особенность при $r = 0$.

Рассмотрим явления, происходящие при коллапсе солитонов. Очевидно, что при изучении эволюции коллапсирующего солитона можно не учитывать влияние накачки и затухания. Уравнение (32.4) переходит при этом в нелинейное параболическое уравнение, свойства решений которого подробно изучались в связи с задачей о самофокусировке света. Как показано В.Е. Захаровым и В.С. Сынахом [108], амплитуда в центре солитона быстро растет со временем: $A(0, t) \sim (t - t_0)^{-2/3}$. При этом радиус солитона уменьшается так, что в процесс схлопывания захватывается строго определенное количество энергии

$$I_c = \omega \int |A|^2 dr = 1,86 \omega'' \omega / |2S + T|. \quad (32.24)$$

При увеличении амплитуды волн в коллапсирующем солитоне становится существенным нелинейное затухание, которое приводит к быстрому выгоранию энергии солитона. Оценим эффективное нелинейное затухание

$$\gamma_{nl} \approx I_c \kappa_0^2 / \tau \omega A_0^2 \approx 1/\tau, \quad (32.25)$$

где τ — время между двумя последовательными коллапсами в области с размером κ_0^{-2} . Из соображений размерности можно получить, что $\tau \approx (hV)^{-1}$ при $h > h_c$.

Учет этого механизма диссипации энергии приводит к тому, что средняя амплитуда турбулентных пульсаций становится меньше A_0 , а восприимчивость χ'' с ростом амплитуды h не убывает, а выходит на плато, совпадающее по порядку величины с χ'' в максимуме.

Перспективным методом экспериментального изучения сильной солитонной турбулентности параметрически возбужденных СВ является измерение спектральной плотности электромагнитного излучения ФМ на частотах, близких к частоте накачки ω_p .

При $h < h_c$, когда коллапсы редки, спектральная плотность шума близка к гауссовой с шириной $|\omega - \omega_p| \sim \gamma(p-1)^{1/2}$. При $h > h_c$ заметный вклад в излучение вносят коллапсирующие солитоны, у которых фаза пары $\Psi(r, t)$ "отрывается" от фазы накачки и начинает быстро вращаться, при

этом: $\Psi \sim (t - t_0)^{-1/3}$. Быстрое вращение фазы приводит к уширению спектра излучения $(h^2)_\omega$, по которому можно регистрировать коллапсы. Можно показать, что $(h^2)_\omega \sim |\omega - \omega_p|^{-7/4}$.

Нелинейное затухание, ограничивающее амплитуду в коллапсе $A < A_{\max}$, должно обрезать шумовое излучение на частоте

$$SA_{\max} \approx |\omega_{\max} - \omega_p|.$$

Задачи

Задача 6.1. Вычислить зависимость от времени поглощенной мощности на линейной стадии развития параметрической неустойчивости при мгновенном включении накачки.

Указание. Использовать уравнения (29.2) в линейном приближении.

Ответ:

$$W_+(\tau) = \frac{\pi\omega_p}{2} \int \frac{\gamma_\Omega h V_\Omega k_\Omega^2 n_\Omega^0}{v_\Omega} F_\Omega(\tau_\Omega) d\Omega,$$

$$F_\Omega(\tau) = \int_0^\tau I_1(\tau') \exp(-\rho_\Omega \tau') d\tau',$$

где $I_1(\tau)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента $\rho_\Omega = \gamma_\Omega/hV_\Omega$, $\tau_\Omega = 2hV_\Omega t$.