

## ГЛАВА 7

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СПИНОВЫХ ВОЛН§ 33. Необходимость диаграммного подхода  
для описания кинетики волн

В предыдущих гл. 4–6 была разработана относительно простая  $S$ -теория, основанная на диагонализации гамильтониана взаимодействия волн. Эта теория, как уже отмечалось, находится в хорошем качественном и количественном соответствии с целым рядом экспериментов по параметрическому возбуждению СВ в ФМ и АФМ, волн на поверхности жидкости. Вместе с тем существует целый ряд экспериментальных результатов, и возможна постановка новых экспериментов, интерпретация которых требует выхода за ее рамки. Дело в том, что  $S$ -теория правильно описывает лишь интегральные характеристики ПСВ и принципиально не учитывает, например, конечную ширину их распределения в  $k$ -пространстве. В  $S$ -теории

$$n(k, \omega), \sigma(k, \omega) \sim \delta(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2) \delta(\omega - \omega_p/2), \quad (33.1)$$

где

$$n(k, \omega) \delta(k - k') \delta(\omega - \omega') = \langle b_{k', \omega}^* b_{k, \omega} \rangle, \quad (33.2)$$

$$\sigma(k, \omega) \delta(k + k') \delta(\omega + \omega' - \omega_p) = \langle b_{k', \omega}^* b_{k, \omega} \rangle.$$

Между тем априори можно представить себе совершенно различные варианты поведения ПСВ, приводящие к различному уширению распределения (33.1) при сохранении интегральной по  $|k|$  и  $\omega$  величины  $n(k, \omega)$  с точностью до малых параметров.

Как неоднократно отмечалось,  $S$ -теория по существу является теорией самосогласованного поля, учитывающей  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  в первом порядке теории возмущений. Предпринимались попытки улучшить это приближение, учитывая члены второго порядка по  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  так, как это делается при выводе кинетического уравнения для волн. Однако этот подход неверен, потому что кинетическое уравнение применимо, если пакет волн имеет большую ширину по частотам, гарантирующую стохастизацию фаз, в то время как распределение (33.1) в  $S$ -теории является одночастотным. При попытках

выйти за рамки второго порядка возмущений, как правило, необходимо применять диаграммную технику.

Существует несколько вариантов диаграммной техники, пригодной для описания неравновесных систем (см., например, Х.В. Уайльд [218], Л.В. Келдыш [118]). Для классических задач наиболее естественно применять технику Уайльда, построенную в 1961 г. на примере уравнения гидродинамического типа и послужившую основой для многих работ по турбулентности несжимаемой жидкости (см., например, В.И. Белиничер, В.С. Львов, [167]). В настоящей главе в § 34 мы, следуя работе В.Е. Захарова, В.С. Львова [107], опишем диаграммную технику Уайльда на языке канонических уравнений для классических волновых полей.

С помощью диаграммной техники легко вывести известные кинетические уравнения для волн и регулярным образом получать к ним поправки. В частности, это позволило в § 35 обосновать пределы применимости кинетического уравнения (т.е. приближение слабой турбулентности): затухание волн  $\gamma_k$ , характеризующее уровень нелинейной системы, должно быть меньше, чем  $\Delta k \partial \omega / \partial k$ , и меньше, чем  $(\Delta k)^2 \partial^2 \omega_k / \partial k^2$ , где  $\Delta k$  — характерная ширина пакета волн. Далее, в § 36, мы обобщим диаграммную технику так, чтобы кроме нормального коррелятора  $n(k, \omega)$  можно было учитывать и аномальный коррелятор  $\sigma(k, \omega)$ , определенный в (33.2) и существенный в задаче о параметрическом возбуждении волн.

## § 34. Диаграммная техника

**34.1. Конструирование диаграммных рядов и суммирование Дайсона — Уайльда.** Рассмотрим волновое поле, в линейном приближении обладающее законом дисперсии  $\omega_k$ , описываемое комплексной амплитудой  $b_k$  и имеющее гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int \omega_k b_k^* b_k dk + \mathcal{H}_{\text{int}}. \quad (34.1)$$

В качестве  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  в задаче о параметрическом возбуждении волн в среде с нераспадным законом дисперсии следует взять четырехволновой гамильтониан (5.30). Уравнения волнового поля имеют вид

$$i \frac{\partial b_k}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_k^*} - i \delta_k b_k + f_k(t). \quad (34.2)$$

В них мы включили дополнительные члены, описывающие взаимодействие выделенной нами системы волн с "окружающим миром" — термостатом. Слагаемое  $\delta_k b_k$  описывает "трение волн о термостат", т.е. уход энергии в термостат. Ланжевеновская случайная сила  $f_k(t)$  имитирует беспорядочные толчки со стороны термостата, приводящие в среднем к увеличению энергии волн  $b_k$ . Мы будем считать, что статистические свойства случайной силы являются гауссовыми с коррелятором

$$F_{k\omega} = \delta_k n_k^0 / \pi, \quad n_k^0 = T / \omega_k. \quad (34.3)$$

Здесь  $n_k^0$  — термодинамически равновесное значение  $n_k$ . Мы предположили, что термостат находится в состоянии термодинамического равновесия с температурой  $T$  (измеряемой в энергетических единицах). Это разумно, если взаимодействие волн  $b_k$  с термостатом можно считать малым:  $\delta_k \rightarrow 0$ .

Полагая

$$b_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(k, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (34.4)$$

$$b_k^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} b^*(k, \omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

и вводя четырехмерное обозначение  $q = (k, \omega)$ , получим из (34.1), (5.30) и (41.2)

$$b_q = G_q^0 \left[ \int T_{k1,23} b^*(q_1) b(q_2) b(q_3) \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) dq_1 dq_2 dq_3 + f_q \right], \quad (34.5)$$

$$G_q^0 = (\omega - \omega_k + i\delta_k)^{-1}.$$

Здесь  $G_q^0$  — затравочная функция Грина. Рассмотрим формальное решение уравнения (34.5) в виде ряда по степеням  $f_q$ :

$$a_q^{(0)} = G_q^0 f_q,$$

$$a_q^{(1)} = G_q^0 \int T_{k1,23} G_1^{0*} G_2^0 G_3^0 \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) \times \\ \times f_1 f_2 f_3 dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$a_q^{(2)} = G_q^0 \int T_{k1,23} [a_1^{(1)*} a_2^{(0)} a_3^{(0)} + 2a_1^{(0)*} a_2^{(1)} a_3^{(0)}] \times \\ \times \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$G_1^0 \equiv G^0(q_1), \quad a_1^{(0)} \equiv a^{(0)}(q_1), \dots$$

Каждому члену этого ряда можно сопоставить диаграмму с помощью графических обозначений:

$$G_q^0 = \longrightarrow, \quad G_q^{0*} = \longleftarrow, \quad (34.6)$$

$$f_q = \dashrightarrow, \quad f_q^* = \dashleftarrow, \quad T_{12,34} = \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array}$$

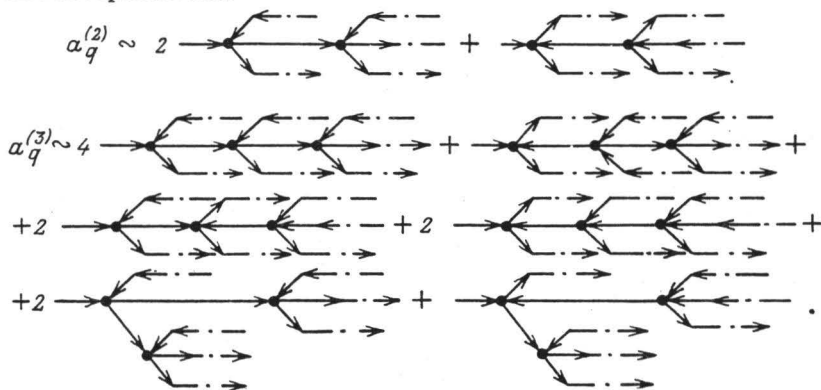
Каждая диаграмма ряда для  $b_q$  представляет собой "дерево", ветвящееся в вершинах  $T$ , крона которого заканчивается пунктирами случайной силы. Вершинам  $T_{12,34}$  следует сопоставить  $\delta(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)$  и проинтегрировать по всем  $q$  внутренним линиям. В диаграммах для  $a_q^{(n)}$  есть все топологически различные деревья с вершинами  $T$ , числовой коэффициент перед каждым таким деревом 1. Диаграммы, соответствующие выражениям для  $a_q^{(0)}$ ,  $a_q^{(1)}$  и  $a_q^{(2)}$ , выглядят следующим образом:

$$a_q^{(0)} \sim \longrightarrow \dashrightarrow, \quad a_q^{(1)} \sim \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \bullet \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array},$$

$$a_q^{(2)} \sim \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \bullet \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array} + \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \bullet \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array} + \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \bullet \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array}.$$

Нетрудно заметить, что аналитические выражения, соответствующие деревьям, переходящим друг в друга при повороте части дерева вокруг некоторой вершины, совпадают. Первый пример такого рода — это два дерева

для  $a_q^{(2)}$ . Впредь мы будем считать такие деревья топологически эквивалентными. При этом необходимо приписать множитель 2 несимметричным вершинам, т.е. таким, из которых растет несимметричное относительно поворота дерево. В результате вся диаграмма порядка  $n$  приобретает множитель  $2^n/p$ , где  $p$  — число элементов ее группы симметрии, включая тождественный. Для деревьев второго и третьего порядков это обстоятельство можно изобразить так:



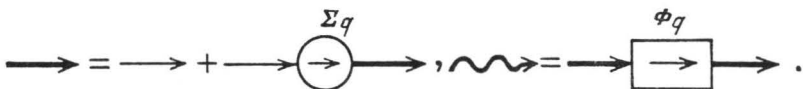
Указанная возможность уменьшения числа топологически различных диаграмм принципиально связана с тем, что волновое поле — классическое, и поэтому величины  $b_q$  коммутативны. Заметим далее, что один из концов дерева (корень) является выделенным: из четырех линий, сходящихся в каждой вершине, только одна соединяет ее с корнем. Как видно из выражения (34.6), в случае, когда эта линия ориентирована "от корня", точке  $\dagger$  соответствует  $T_{12,34}$ . Если же эта линия ориентирована "к корню", точке  $\dagger$  соответствует  $T^*$ . В дальнейшем, кроме обычных "левых" графиков, у которых корень находится слева, нам понадобятся "правые" графики — с корнем, расположенным справа. Условимся, что правому и левому графикам соответствует одно и то же аналитическое выражение, если они переходят друг в друга при зеркальном отражении от вертикальной черты.

Вычислим теперь следующие парные средние: спектральную плотность  $n_q$ , определенную формулой (33.2), и функцию Грина  $G_q$  — линейный отклик системы на внешнюю силу:

$$G_q \delta(q - q') = \langle a_q f_q^* \rangle / (f^2)_q = \langle \delta a_q / \delta f_q \rangle. \quad (34.7)$$

При вычислении средних мы воспользуемся тем, что внешняя сила  $f_q$  гауссова, т.е. будем считать, что корреляторы от произведения нечетного числа  $f_q$  отсутствуют, а корреляторы от четных произведений разбиваются на суммы произведений парных корреляторов. Графически это разбиение изображается попарным "склеиванием" внешних ветвей деревьев. При вычислении среднего происходит склеивание двух деревьев, изображенных на левом и правом графиках. При вычислении среднего для  $G_q$  происходят склеивания внутри одного дерева при фиксации последовательно каждой из его внешних ветвей. Производное суммирование приводимых графиков, приходим к системе уравнений Дайсона — Уайльда для  $n_q$  и  $G_q$ :

$$G_q = G_q^0 (1 + \Sigma_q G_q), \quad n_q = |G_q|^2 [\Phi_q + (f^2)_q]. \quad (34.8)$$



На графике жирная волнистая линия обозначает  $n_q$ , жирная прямая —  $G_q$ ;  $\Sigma_q$  и  $\Phi_q$  обозначают бесконечные ряды графиков определенной топологической структуры (все линии в них жирные):

$$\begin{aligned}
 \Sigma_q = & 2 \text{ (circle with arrow)} + 4 \text{ (loop)} + 2 \text{ (loop)} + 8 \left( \text{loop} + \right. \\
 & + \text{loop} + \text{loop} + \text{loop} \left. \right) + \\
 & + 8 \left( \text{loop} + \text{loop} + \text{loop} + \text{loop} \right) + \\
 & + 4 \left( \text{loop} + \text{loop} \right) + \dots \\
 \Phi_q = & 2 \text{ (loop)} + 4 \left( \text{loop} + \text{loop} \right) + \\
 & + 8 \left( \text{loop} + \text{loop} + \text{loop} + \text{loop} \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{34.9}$$

Графики (34.9) являются компактными, т.е. не содержат слабо связанных частей, которые можно отделить друг от друга, разрывая одну линию. В этих рядах явно указаны все графики первого, второго и третьего порядков по вершинам  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ . Графики для  $\Phi_q$  имеют два эквивалентных конца ("корни" склеенных деревьев), графики для  $\Sigma_q$  имеют отличающиеся концы — вход и выход, соответствующие "корню" дерева и фиксированной ветви.

### 34.1. Топологические свойства графиков для $\Sigma_q$ и $\Phi_q$ .

1. В диаграммах для  $\Phi_q$  (для  $\Sigma_q$ ) от каждой вершины можно пройти только по линиям  $G_q$  к входу или (и) выходу единственным образом. Таким образом, нет вершин с четырьмя линиями  $n(q')$ , нет замкнутых петель по линиям  $G(q')$ .

2. В каждом графике для  $\Sigma_q$  существует единственный путь, соединяющих вход и выход по линиям,  $G(q')$  — "позвоночник" графика. Остальные линии графиков можно назвать ребрами.

3. Графики  $\Phi_q$  содержат "основное сечение", по которому они единственным образом могут быть рассечены только по линиям  $n(q')$  на две части. Эти линии  $n(q')$  назовем *основными*.

4. Очевидно, что, заменяя в графиках для  $\Phi_q$  последовательно основные линии  $n(q')$  на  $G(q')$ , мы перечислим все топологические структуры графиков для  $\Sigma_q$ .

Укажем теперь правила вычисления коэффициентов графиков для  $\Sigma_q$  и  $\Phi_q$  данной топологической структуры.

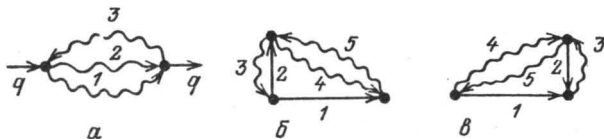


Рис. 34.1. График *a* симметричен по перестановке линий 1 и 2. Графики *b* и *v* зеркально-симметричны. Примеры графиков для массовых операторов  $\Phi_q$  (*a*) и  $\Sigma_q$  (*b* и *v*)

5. Числовой коэффициент при графике порядка  $n$  (по вершинам) для  $\Sigma_q$  и  $\Phi_q$  равен  $2^n/p$ , где  $p$  — число элементов группы симметрии графика, включая тождественный. Так, например, график на рис. 34.1, *a* не изменится, если поменять местами линии  $n(q_1)$  и  $n(q_2)$ ; для него  $p = 2$ , и числовой коэффициент равен  $2^2/2 = 2$ .

Определим теперь процедуру размножения графиков. В графиках для  $\Phi_q$  произведем последовательное выделение каждой из основных линий  $n_q$  (например, отмечая выделенную линию крестиком), а в графиках для  $\Sigma_q$  произведем последовательное выделение (также при помощи крестика) каждой из линий позвоночника. Из вышеперечисленных свойств графиков 1–5 следует основное структурное свойство графиков.

6. Между "размноженными" графиками для  $\Phi_q$  и  $\Sigma_q$  имеется взаимно однозначное соответствие (включая числовые коэффициенты). Это соответствие осуществляется заменой волнистых отмеченных линий на прямые и наоборот.

7. В каждую вершину  $T$  входят две стрелки и две выходят. Дельта-функции в них устроены так, что сумма входящих в вершину четырех импульсов равна сумме выходящих. В любом сечении графиков  $\Sigma_q$  и  $\Phi_q$ , отделяющем вход от выхода, алгебраическая сумма всех импульсов линий равна  $q$ .

8. При записи аналитических выражений для  $\Sigma_q$  следует в произведении всех вершин и функций  $G(q')$  в ребрах оставлять только действительную часть. Например, график на рис. 34.1, *v* содержит произведение  $\text{Re}[G_2 n_3 n_4 n_5]$ . Доказательство этого свойства диаграмм предлагается провести в задаче 7.1.

9. От любого графика для  $\Sigma_q$  в окончательное аналитическое выражение входит только действительная часть (см. задачу 7.2).

**34.3. Замечания к методу Уайльда разложения по случайной силе.** Прежде всего отметим, что если выполняется соотношение (34.4), обозначающее, что "внешний мир" (термостат), взаимодействующий с волновой системой, находится в термодинамическом равновесии при температуре  $T$ , то уравнения Дайсона — Уайльда (34.9) имеют решение

$$n_q = T \text{Im } G_q / \pi \omega. \quad (34.10)$$

Это утверждение, доказанное В.Е. Захаровым, В.С. Львовым [170] (см. также задачу 7.3), совпадает с "флуктуационно-диссипационной теоремой", связывающей в термодинамическом равновесии спектральную плотность флуктуаций с мнимой частью функции Грина, и позволяет в термодинамически равновесной ситуации перейти от двух уравнений для  $n_q$  и  $G_q$  к одному уравнению для  $G_q$ . Необходимо заметить, что между термодинамически

равновесным и общим случаями есть принципиальная разница. В термодинамически равновесной ситуации усреднение проводится по гиббсовскому ансамблю и диаграммная техника является лишь вспомогательным инструментом, облегчающим вычисление средних. В неравновесной же ситуации диаграммная техника является способом получения уравнения для средних  $n_q$  и  $G_q$ . Существенно, что в этих уравнениях (34.9) коррелятор внешней силы  $(f^2)_q$  входит в виде свободного члена и может быть положен равным нулю. Переход к пределу  $\delta_k \rightarrow 0$  обоснован, если взаимодействие волн с термостатом мало по отношению к их взаимодействию между собой. Естественно предположить при этом, что решение диаграммных уравнений (34.9) для  $n_q, G_q$  непрерывно зависит от  $\delta_k$  и остается конечным при  $\delta_k \rightarrow 0$ . Физический смысл этого в том, что корреляторы  $n_q$  и  $G_q$  не чувствительны к воздействию на волновое поле малой случайной гауссовой силы. Это свойство корреляторов соответствует представлению о турбулентности как о результате развития всех мыслимых неустойчивостей и о максимально стохастичном состоянии волнового поля.

Тем не менее может показаться, что введение случайной силы в исходные уравнения движения является принципиальным для вывода уравнений (34.9). В действительности "погружение системы волн в термостат" сделано только из соображений удобства. Внешние условия можно было считать не изотермическими, а адиабатическими, т.е. систему волн изолированной от окружения. В таком случае следовало бы учесть, что в начальный момент времени (например, в момент включения накачки) система волн находится в термодинамическом равновесии со случайными амплитудами  $b_k(0)$ , отличными от нуля:

$$\langle b_k^*(0) b_k(0) \rangle = n_k^0 \delta(k - k').$$

Совершая в исходных уравнениях движения преобразование Лапласа, можно получить

$$(\omega - \omega_k) b_{k\omega} = -i b_k(0) + \int_0^\infty \frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta b_k^*(t)} \exp(i\omega t) dt \quad (34.11)$$

и далее итерационной процедурой представить  $b_q$  в виде ряда по степеням начальных амплитуд  $b_k(0)$ . Можно сказать, что при таком подходе развитие неустойчивости волн происходит из-за ненулевых начальных условий, в то время как в подходе Уайльда неустойчивости волн развиваются при нулевых начальных условиях под действием толчков  $f_k(t)$  со стороны термостата.

Несмотря на формальную однозначность процедуры получения уравнения для  $n_q$  и  $G_q$ , эти уравнения в действительности не являются однозначно определенными, поскольку ряды для  $n_q$  и  $G_q$  не являются абсолютно сходящимися. Это следует хотя бы из того, что число топологически различных деревьев факториальным образом растет с ростом числа вершин. Эти ряды станут однозначными лишь после определения правила их суммирования, что пока является нерешенной задачей. Можно, однако, предположить, что при любом правиле суммирования первые члены рядов останутся на своих местах и в этом смысле ограничение первыми членами рядов для  $n_q$  и  $G_q$  даже в случае сильной нелинейности имеет определенный

смысл. В случае малого уровня нелинейности ряды для  $n_q$  и  $G_q$  должны быть асимптотическими независимо от правил суммирования.

В заключение этого параграфа я обращаю внимание на задачу 7.4, в которой предлагается доказать, что диаграммная техника Уайльда в канонических переменных является классическим пределом техники для неравновесных процессов (Л.В. Келдыш, 1964 г. [118]) в бозе-поле.

### § 35. Кинетические уравнения для волн

В предположении о малом уровне нелинейности можно пренебречь перенормировкой вершин и ограничиться в выражении для  $\Phi_q$  и  $\Sigma_q$  первыми диаграммами. Запишем уравнение Дайсона – Уайльда (34.9) для  $n_q$  в виде

$$n_{k\omega} = \Phi_{k\omega} [(\omega - \tilde{\omega}_{k\omega})^2 + \gamma_{k\omega}^2]^{-1}. \quad (35.1)$$

Если ширина пакета по частотам  $\Delta\omega_k$  существенно больше, чем  $\gamma_{k\omega} = -\text{Im} \Sigma_{k\omega}$ , то в этом выражении можно пренебречь зависимостью  $\Phi_q$  и  $\gamma_q$  от  $\omega$ , полагая в них  $\omega = \tilde{\omega}_k = \omega_k + \text{Re} \Sigma(k, \omega_k)$ . Тогда после интегрирования по  $\omega$  в (35.1) получим

$$\gamma_k n_k = \pi \Phi_k, \quad n_k \equiv \int n(k, \omega) d\omega. \quad (35.2)$$

Продолжая последовательно считать, что  $\Delta\omega_k \gg \gamma_k$ , можно в выражениях для  $\Phi_k \equiv \Phi(k, \tilde{\omega}_k)$  и  $\gamma_k = \gamma(k, \tilde{\omega}_k)$  проинтегрировать по частотам, полагая  $n(k, \omega) \propto n_k \delta(\omega - \tilde{\omega}_k)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_k &= 2\pi \int |T_{k1,23}|^2 \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega_k + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times \\ &\times \{n(k_1)[n(k_2) + n(k_3)] - n(k_2)n(k_3)\} dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned} \quad (35.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k &= 2 \int |T_{k1,23}|^2 n(k_1)n(k_2)n(k_3) \delta(k_1 + k - k_2 - k_3) \times \\ &\times \delta(\omega_k + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned}$$

Подставляя (35.3) в (35.2), получаем четырехволновое кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} &\int |T_{k1,23}|^2 [n_k n_1 (n_2 + n_3) - n_2 n_3 (n_k + n_1)] \times \\ &\times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega_k + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) dk_1 dk_2 dk_3 = 0. \end{aligned} \quad (35.4)$$

Грубая оценка по формуле (35.3) дает  $\gamma_k \approx (TN)^2 / \Delta\omega_k$ , где  $N = \int n_k dk$  – общее число волн. Учитывая, что наш вывод справедлив, если  $\Delta\omega_k \gg \gamma_k$ , получаем один из критериев применимости кинетического уравнения (35.4):

$$\Delta\omega_k \gg TN, \quad (35.5)$$

т.е. разброс частот в пакете должен быть больше, чем характерная частота взаимодействия  $TN$ . При выполнении этого условия уравнение для  $n(k, \omega)$  может быть редуцировано до уравнения для интегральной величины  $n_k$ .

Вычисляя первые поправки к вершине (диаграммы типа "рыба"), а также первые поправки к вещественной части функции Грина – частоте, можно убедиться (задача 7.5), что выражения для них отличаются от выражений для соответствующих затравочных величин одним из следующих



множитель:

$$TN/\omega_k''(\Delta k)^2, \quad (TN/\omega_k''(\Delta k)^2) \ln(\omega_k''(\Delta k)^2/TN). \quad (35.6)$$

Малость этих параметров в сравнении с единицей гарантирует применимость приближения кинетического уравнения. Логарифмический фактор возникает после интегрирования в  $k$ -пространстве расходящихся знаменателей типа  $[\omega(k) - \omega(k') - \omega(k - k')]^{-1}$ , которое обрезается затуханием волн. Необходимо иметь в виду, что оценки (35.5), (35.6) являются лишь ориентировочными, ибо при их получении мы не конкретизировали задачу: не указали вид зависимости  $n_k$  от  $k$ , конкретный вид матричных элементов и т.д. В такой общей постановке задачи параметры (35.6), (35.5) являются примерно одинаковыми. Выделенным является случай звуковой турбулентности: как видно из (35.6), при линейном законе дисперсии кинетическое уравнение неприменимо ни при каких уровнях нелинейности. Подтверждение этому легко получить, например, из непосредственного анализа диаграмм, перенормирующих вершины. Вследствие совпадения особенностей они не имеют параметра малости по отношению к затравочной вершине. Тем не менее при малом уровне нелинейности параметр (35.5) мал, и это означает, что можно исследовать задачу о звуковой турбулентности в терминах  $n_k$ . Обратная ситуация складывается в задаче о параметрическом возбуждении волн в нераспадной среде. В гл. 10 мы покажем, что в широком диапазоне надкритичностей можно не учитывать диаграммы, перенормирующие взаимодействие, однако уравнения для  $n(k, \omega)$  нельзя редуцировать до уравнений для  $n_k$ .

В заключение этого параграфа приведем кинетическое уравнение в случае трехволнового гамильтониана взаимодействия:

$$\begin{aligned} & \int |V_{1k2}|^2 [n_k(n_2 - n_1) - n_1 n_2] \delta(\omega_k - \omega_1 + \omega_2) \delta(k - k_1 + k_2) dk_1 dk_2 + \\ & + \frac{1}{2} \int |V_{k12}|^2 [n_k(n_1 + n_2) - n_1 n_2] \delta(\omega_k - \omega_1 - \omega_2) \times \\ & \times \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (35.7)$$

Это уравнение справедливо, если выполняются следующие неравенства (см. задачи 7.6, 7.7):

$$\begin{aligned} VN^{1/2} & \ll \Delta k \partial \omega_k / \partial k, \\ VN^{1/2} & \ll \omega_k''(\Delta k)^2 \ln [VN^{1/2} / \omega_k''(\Delta k)^2]. \end{aligned} \quad (35.8)$$

### § 36. Диаграммные уравнения с аномальными корреляторами

Получим усредненные уравнения, описывающие параметрическую турбулентность волн с помощью диаграммной техники (см. § 35). Для этого в гамильтониан задачи добавим гамильтониан взаимодействия с накачкой (16.1). В результате в уравнениях движения (34.5) возникает дополнительное слагаемое  $G_q^0 h V_k a_q^+$ . Здесь и в дальнейшем операция  $+$  будет означать комплексное сопряжение и замену  $q \rightarrow \bar{q} \equiv (-k, \omega_p - \omega)$ ,  $a_q^+ \equiv a^*(-k, \omega_p - \omega)$ . Это слагаемое приводит к дополнительной вершине  $hV_k$  в графиках. В результате, кроме нормальной функции Грина (34.8), возник-

кает аномальная функция Грина  $L_q$ :

$$L_q \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega' - \omega_p) = \langle a_q f_{q'} \rangle / (f^2)_q = \langle \delta a_q / \delta f_{q'} \rangle \quad (36.1)$$

и, кроме нормального коррелятора  $n_q$ , аномальный коррелятор  $\sigma_q$ , определенный формулой (33.2). Аномальные величины описывают явление спаривания — фазовую корреляцию волн в парах, возникающую под действием накачки.

Производя, как обычно, суммирование приводимых графиков, приходим к системе уравнений Дайсона — Уайльда, обобщающих уравнения (34.9):

$$G_q[\omega - \omega_k - \Sigma_q + i\delta_k] - L_q^+ \Pi_q = 1, \quad (36.2)$$

$$-G_q \Pi_q^+ + L_q^+[\omega_p - \omega - \omega_k - \Sigma_q^+ - i\delta_k] = 0.$$

$$\longrightarrow = \longrightarrow \left[ 1 + \textcircled{\longrightarrow} + \textcircled{\longleftrightarrow} \right],$$

$$\longleftarrow = \longleftarrow \left[ \textcircled{\longleftarrow} + \textcircled{\longleftrightarrow} \right],$$

$$\textcircled{\longrightarrow} = L_q, \quad \textcircled{\longleftrightarrow} = L_q^*, \quad \textcircled{\longleftrightarrow} = \Pi_q, \quad \textcircled{\longleftrightarrow} = \Pi_q^*.$$

$$n_q = G_q[(f_q^2 + \Phi_q)G_q^* + \Psi_q L_q^+] + L_q[\Psi_q^+ G_q^* + (f_q^2 + \Phi_q^+)L_q^+], \quad (36.3)$$

$$\sigma_q^+ = L_q^+[(f_q^2 + \Phi_q)G_q^* + \Psi_q L_q^+] + G_q^+[\Psi_q^+ G_q^* + (f_q^2 + \Phi_q^+)L_q^+].$$

$$\rightsquigarrow = \longrightarrow \left[ \boxed{\longrightarrow} + \boxed{\longleftrightarrow} \right] + \textcircled{\longleftrightarrow} \left[ \boxed{\longleftarrow} + \boxed{\longleftrightarrow} \right],$$

$$\rightsquigarrow = \longleftarrow \left[ \boxed{\longrightarrow} + \boxed{\longleftrightarrow} \right] + \textcircled{\longleftrightarrow} \left[ \boxed{\longleftarrow} + \boxed{\longleftrightarrow} \right],$$

$$\rightsquigarrow = \sigma_q, \quad \rightsquigarrow = \sigma_q^*, \quad \boxed{\longleftrightarrow} = \Psi_q, \quad \boxed{\longleftrightarrow} = \Psi_q^*.$$

В этих формулах  $\Pi_q$  и  $\Psi_q$  означают суммы аномальных, т.е. не сохраняющих направления стрелок неприводимых графиков, графики для  $\Phi_q$ ,  $\Psi_q$ , в отличие от графиков для  $\Sigma_q$  и  $\Pi_q$ , могут быть рассечены на две части только по линиям  $n_q$  и  $\sigma_q$ . Уравнения (36.2) можно разрешить относительно функций Грина

$$G_q = (\omega_p - \omega - \tilde{\omega}_q - i\gamma_q) \Delta_q^{-1},$$

$$L_q = \Pi_q \Delta_q^{-1},$$

$$\Delta_q = (\omega - \omega_q + i\gamma_q)(\omega_p - \omega - \tilde{\omega}_q - i\gamma_q) - |\Pi_q|^2, \quad (36.4)$$

$$\gamma_q = \delta_k - \text{Im } \Sigma_q,$$

$$\tilde{\omega}_q = \omega_k + \text{Re } \Sigma_k.$$

Неприводимые графики для массовых операторов расположим в ряд по степеням матричного элемента  $T_{12,34}$  гамильтониана взаимодействия:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_q &= 2 \text{ (circle) } + 2 \text{ (loop) } + 4 \text{ (loop) } + 4 \text{ (loop) } + \\
 &+ 4 \text{ (loop) } + 4 \text{ (loop) } + \text{ (triangle) } + \dots, \\
 \Pi_q &= \overset{\uparrow}{N} + \text{ (circle) } + 4 \text{ (loop) } + 4 \text{ (loop) } + 4 \text{ (loop) } + \\
 &+ 4 \text{ (loop) } + 2 \text{ (loop) } + \text{ (triangle) } + \dots, \quad \overset{\uparrow}{N} = hV_k, \\
 \Phi_q &= 2 \text{ (loop) } + 4 \text{ (loop) } + \text{ (triangle) } + \dots, \\
 \Psi_q &= 4 \text{ (loop) } + 2 \text{ (loop) } + \text{ (triangle) } + \dots
 \end{aligned} \tag{36.5}$$

Впоследствии мы покажем, что при не слишком большой надкритичности диаграммы, содержащие три и более вершин  $T$ , можно не учитывать. Это означает, что мы получим замкнутые нелинейные интегральные уравнения для величин  $G_q$ ,  $L_q$  и  $n_q$ ,  $\sigma_q$ . Запишем аналитически соотношения (36.5) в этом приближении:

$$\begin{aligned}
 \Sigma(q) &= \Sigma_S(q) + \Sigma_{\text{int}}(q), \quad \Pi(q) = \Pi_S(q) + \Pi_{\text{int}}(q), \\
 \Sigma_S(q) &= 2 \int T(k, k') n(q') dq', \\
 \Pi_S(q) &= P_k = hV_k + \int S_{kk'} \sigma(q') dq', \\
 \Sigma_{\text{int}}(q) &= 2 \int T_{k1,23} \{ T_{k1,23}^* [G_1 n_2 n_3 + n_1 (G_2 n_3 + n_2 G_3)] + \\
 &+ 2 T_{k\bar{2},\bar{1}3} [\sigma_1^* (\sigma_2 G_3 + L_2 n_3) + L_1^* \sigma_2 n_3] \} \times \\
 &\times \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3, \\
 \Pi_{\text{int}}(q) &= 2 \int T_{k1,23} \{ T_{k1,23} [\sigma_1^* (\sigma_2 L_3 + \sigma_3 L_2) + \\
 &+ L_1^* \sigma_2 \sigma_3] + 2 T_{k\bar{2},\bar{1}3} [n_1 (G_2 \sigma_3 + n_2 L_3) + \\
 &+ G_1^* n_2 \sigma_3] \} \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) dq_1 dq_2 dq_3, \\
 \Phi(q) &= \Phi_{\text{int}}(q) = 2 \int [|T_{k1,23}|^2 n_1 n_2 n_3 + \\
 &+ T_{k1,23} T_{k\bar{2},\bar{1}3}^* \sigma_1^* (n_2 \sigma_3 + \sigma_2 n_3)] \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) dq_1 dq_2 dq_3, \\
 \Psi(q) &= 2 \int [T_{k1,23}^2 \sigma_1^* \sigma_2 \sigma_3 + T_{k1,23} T_{k\bar{2},\bar{1}3} n_1 (\sigma_2 n_3 + n_2 \sigma_3)] \times \\
 &\times \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) dq_1 dq_2 dq_3.
 \end{aligned} \tag{36.6}$$

В следующих главах мы займемся подробным анализом решений этих уравнений, полученные теоретические результаты будут сравниваться с экспериментом.

### § 37. Уравнения для одночастотной параметрической турбулентности волн

В приближении  $S$ -теории функции распределения параметрически возбужденных пар волн в  $(\mathbf{k} - \omega)$ -пространстве были сингулярными (см. (33.1)). Здесь мы покажем, что диаграммные уравнения (36.6) имеют частное решение вида

$$n_p(\mathbf{k}, \omega) = n_p(\mathbf{k})\delta(\omega - \omega_p/2), \quad \sigma_p(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_p(\mathbf{k})\delta(\omega - \omega_p/2), \quad (37.1)$$

слегка размытое в  $\mathbf{k}$ -пространстве. Действительно, в силу (36.3) распределения  $n_p(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\sigma_p(\mathbf{k}, \omega)$  по  $\omega$  с точностью до несингулярных по  $\omega$  множителей — функций Грина — повторяют распределение по  $\omega$  величин  $\Phi(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\Psi(\mathbf{k}, \omega)$ . Подставляя же (37.1) в (36.6), получим

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = \Phi_{\mathbf{k}}\delta(\omega - \omega_p/2), \quad \Psi(\mathbf{k}, \omega) = \Psi_{\mathbf{k}}\delta(\omega - \omega_p/2). \quad (37.2)$$

На одночастотном решении (37.1) исходные уравнения (36.6) упрощаются до вида

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{k}} &= (|G_{\mathbf{k}}|^2 + |L_{\mathbf{k}}|^2)\Phi_{\mathbf{k}} + 2 \operatorname{Re}(G_{\mathbf{k}}\Psi_{\mathbf{k}}L_{\mathbf{k}}^*), \\ \sigma_{\mathbf{k}} &= 2L_{\mathbf{k}}\Phi_{\mathbf{k}}G_{\mathbf{k}} + L_{\mathbf{k}}^2\Psi_{\mathbf{k}}^* + G_{\mathbf{k}}^2\Psi_{\mathbf{k}}, \\ G_{\mathbf{k}} &= G(\mathbf{k}, \omega_p/2) = (\omega_p/2 - \tilde{\omega}_{\mathbf{k}} - i\Gamma_{\mathbf{k}})\Delta_{\mathbf{k}}^{-1}, \\ L_{\mathbf{k}} &= L(\mathbf{k}, \omega_p/2) = \Pi_{\mathbf{k}}\Delta_{\mathbf{k}}^{-1}, \quad \Delta_{\mathbf{k}} = \\ &= (\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} - \omega_p/2)^2 + \nu_{\mathbf{k}}^2, \quad \nu_{\mathbf{k}}^2 = \Gamma_{\mathbf{k}}^2 - |\Pi_{\mathbf{k}}|^2. \end{aligned} \quad (37.3)$$

Из этих уравнений следует, что функции распределения  $n_{\mathbf{k}}$  и  $\sigma_{\mathbf{k}}$  есть квадрат функции Лоренца с шириной  $\Delta_{\mathbf{k}} = \nu_{\mathbf{k}}/\nu_{\mathbf{k}}$  ( $\nu_{\mathbf{k}}$  — групповая скорость) и максимумом на резонансной поверхности. Так же, как и в  $S$ -теории, узость функции распределения вблизи нее делает удобным использование в  $\mathbf{k}$ -пространстве следующих координат: угловых  $\Omega = (\theta, \varphi)$  и координаты  $\kappa$  — расстояния от резонансной поверхности по радиусу. Пренебрегая зависимостью матричных элементов  $V_{\mathbf{k}}$  и  $T$  от  $\kappa$ , можно проинтегрировать (37.3) по  $\kappa$  и получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} N_{\Omega} &= \pi k_{\Omega}^2 \Gamma_{\Omega} [\Gamma_{\Omega} \Phi_{\Omega} + \operatorname{Im}(\Pi_{\Omega}^* \Phi_{\Omega})] / \nu_{\Omega} \nu_{\Omega}^3, \\ \Gamma_{\Omega} \Sigma_{\Omega} + i \Pi_{\Omega} N_{\Omega} &= 0, \quad \nu_{\Omega}^2 = \Gamma_{\Omega}^2 - |\Pi_{\Omega}|^2 \end{aligned} \quad (37.4)$$

для интегральных величин

$$N_{\Omega} = k_{\Omega}^2 \int n_p(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad \Sigma_{\Omega} = k_{\Omega}^2 \int \sigma_p(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (37.5)$$

где  $k_{\Omega}$  — радиус резонансной поверхности в точке с угловыми координатами  $\Omega$ . С помощью обозначений

$$\tilde{N}_{\Omega} = \pi k_{\Omega}^2 \Phi_{\Omega} / \nu_{\Omega} \nu_{\Omega}, \quad \tilde{\Sigma}_{\Omega} = \pi k_{\Omega}^2 \Psi_{\Omega} / \nu_{\Omega} \nu_{\Omega} \quad (37.6)$$

уравнения (37.4) можно тождественно преобразовать к виду

$$\Gamma_{\Omega}(N_{\Omega} - \tilde{N}_{\Omega}) + \text{Im} [\Pi_{\Omega}^*(\Sigma_{\Omega} - \tilde{\Sigma}_{\Omega})] = 0, \quad (37.7)$$

$$\Gamma_{\Omega} \Sigma_{\Omega} + i \Pi_{\Omega} N_{\Omega} = 0.$$

Для сравнения здесь полезно привести в обозначениях (37.5) уравнения  $S$ -теории, описывающие основное состояние ПСВ:

$$\gamma_{\Omega} N_{\Omega} + \text{Im} (P_{\Omega}^* \Sigma_{\Omega}) = 0, \quad (37.8)$$

$$\gamma_{\Omega} \Sigma_{\Omega} + i \Pi_{\Omega} N_{\Omega} = 0.$$

Принципиальное отличие полученных здесь уравнений (37.7) от уравнений  $S$ -теории (37.8) заключается в наличии дополнительных "шумовых" слагаемых  $\tilde{N}_{\Omega}$  и  $\tilde{\Sigma}_{\Omega}$ . Кроме того, в (37.7) перенормированы затухания ПСВ  $\Gamma_{\Omega} = \gamma_{\Omega} + \dots$  и накачка  $\Pi_{\Omega} = P_{\Omega} + \dots$ . Детальный анализ уравнений одночастотной турбулентности ПСВ будет приведен в гл. 10.

### § 38. Диаграммные уравнения для коллективных колебаний

Рассматривая последовательность графиков для перенормировки вершины  $T_{12,34}$ , можно убедиться, что при передаче малого импульса, т.е. при  $k_1 \approx k_4$ ,  $k_2 \approx k_3$ ,  $k_1 + k_2 \approx 0$ ,  $k_3 + k_4 \approx 0$ , эта перенормировка не является малой, и соответствующий ряд необходимо суммировать. При подстановке перенормированной вершины в уравнение Дайсона функции Грина приобретают дополнительный полюс, описывающий спектр коллективных колебаний. Другой путь, позволяющий ограничиться уравнениями Дайсона с перенормированными вершинами, заключается в том, чтобы с самого начала учесть пространственно-неоднородные и нестационарные состояния. Для этого мы откажемся от предположения, что коррелятор случайной силы  $\langle f_q f_{q'}^* \rangle$  пропорционален  $\delta(q - q')$ , и введем функции Грина  $G(q, q')$ ,  $L(q, q')$  и парные средние  $n(q, q')$ ,  $\sigma(q, q')$  с помощью следующих соотношений, обобщающих формулы (33.1), (34.8) и (36.1):

$$\begin{aligned} G(q, q') &= \langle \delta a(q) / \delta f(q') \rangle, \\ L(q, q') &= \langle \delta a(q) / \delta f^*(q') \rangle, \\ n(q, q') &= \langle a^*(q') a(q) \rangle = n^*(q', q), \\ \sigma(q, q') &= \langle a(q) a(q') \rangle = \sigma(q', q). \end{aligned} \quad (38.1)$$

Графические изображения рядов для функций Грина и парных корреляторов имеют такой же вид, как и в пространственно-однородном и стационарном случаях. Поэтому можно обычным образом суммировать приводимые графики и получить систему уравнений Дайсона – Уайльда для величин (38.1):

$$\begin{aligned} G(q, q') &= G_q^0 [\delta(q - q') + (\Sigma G + \Pi L^*)_{q, q'}], \\ L^*(q, q') &= G_q^{0*} (\Pi^* G + \Sigma^* L^*)_{q, q'}, \\ n(q, q') &= (G \Phi G^* + L \Psi^* G^* + L \Phi^* L + G \Psi L^*)_{q, q'}, \\ \sigma(q, q') &= (G \Phi L + L \Psi^* L + L \Phi^* G + G \Psi G)_{q, q'}. \end{aligned} \quad (38.2)$$

Здесь, как обычно,  $\Sigma$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  означают суммы неприводимых диаграмм:  $\Sigma$  и  $\Phi$  — нормальные, т.е. сохраняющие направление стрелок, диаграммы  $\Pi$  и  $\Psi$  — аномальные неприводимые диаграммы. Диаграммы  $\Phi$  и  $\Psi$ , в отличие от диаграмм для  $\Sigma$  и  $\Pi$ , могут быть рассечены на две части только по волнистым линиям. По внутренним индексам в (38.2) необходимо интегрировать. Например,

$$(\Sigma G)_{q,q'} = \int \Sigma(q, q_1) G(q_1, q') dq_1,$$

$$(G\Phi L)_{q,q'} = \int G(q, q_1) \Phi(q_1, q_2) L(q_2, q') dq_1 dq_2.$$

Как будет показано в гл. 10, при не слишком большой надкритичности, а именно при  $(h/h_{th})^2 < kv/\gamma$ , в диаграммах для  $\Sigma$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$  и  $\Psi$  можно не учитывать перенормировку вершин, т.е. ограничиться приведенными в (36.5) графиками с одной и двумя вершинами  $T$ . Полученные выражения представляют собой замкнутую систему интегральных уравнений для величин  $G$ ,  $L$  и  $n$ ,  $\sigma$ . Она имеет частное решение вида

$$\begin{aligned} G(q, q') &= \bar{G}(q, q') = G_q \delta(q - q'), \quad L(q, q') = \bar{L}(q, q') = \\ &= L_q \delta(q - q'), \quad \bar{n}(q, q') = n_q \delta(q - q'), \\ \bar{\sigma}(q, q') &= \sigma_q \delta(q - q'), \quad \bar{\Sigma}(q, q') = \Sigma_q \delta(q - q'), \\ \bar{\Pi}(q, q') &= \Pi_q \delta(q - q'), \quad \bar{\Phi}(q, q') = \Phi_q \delta(q - q'), \\ \bar{\Psi}(q, q') &= \Psi_q \delta(q - q'), \end{aligned} \quad (38.3)$$

соответствующее стационарному пространственно-однородному состоянию ПСВ, которое мы назвали в гл. 4 основным состоянием. Линеаризуя систему уравнений (38.2), приходим к следующей системе линейных интегральных уравнений относительно величин  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{n}$  и  $\tilde{\sigma}$ , представляющих отклонения  $G$ ,  $L$ ,  $n$  и  $\sigma$  относительно их значений (38.3) в основном состоянии:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(q, q') &= A(q, q') G(q') + B(q, q') L^*(q'), \\ \tilde{L}(q, q') &= A(q, q') L(q') + B(q, q') G^*(q'), \\ \tilde{n}(q, q') &= (A(q, q') n(q') + B(q, q') \sigma^*(q')) + \\ &+ (A^*(q', q) n(q) + B^*(q', q) \sigma(q)) + \\ &+ C(q, q') G^*(q') + D(q, q') L^*(q'), \\ \tilde{\sigma}(q, q') &= (A(q, q') \sigma(q') + B(q, q') n(q')) + \\ &+ (A(q', q) \sigma(q) + B(q', q) n(q)) + \\ &+ C(q, q') L(q') + D(q, q') G(q'), \\ A(q, q') &= G(q) \tilde{\Sigma}(q, q') + L(q) \tilde{\Pi}^*(q, q'), \\ B(q, q') &= G(q) \tilde{\Pi}(q, q') + L(q) \tilde{\Sigma}^*(q, q'), \\ C(q, q') &= G(q) \tilde{\Phi}(q, q') + L(q) \tilde{\Psi}^*(q, q'), \\ D(q, q') &= G(q) \tilde{\Psi}(q, q') + L(q) \tilde{\Phi}^*(q, q'). \end{aligned} \quad (38.4)$$

Величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  выражаются через  $\tilde{\Sigma}$ ,  $\tilde{\Pi}$ ,  $\tilde{\Phi}$  и  $\tilde{\Psi}$  — отклонения мас-

совых операторов  $\Sigma$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$  и  $\Psi$  от их значений в основном состоянии (38.3). Выражения для них получаются линеаризацией соответствующих общих выражений.

Полагая в линеаризованных величинах  $(\tilde{G}, \tilde{n}) \omega' - \omega = \Omega, k' - k = \vec{k}$ , а в  $(\tilde{L}, \tilde{\sigma}) \omega + \omega' - \omega_p = \Omega, k + k' = \vec{k}$ , можно в качестве условия разрешимости линейной системы уравнений (38.4) получить зависимость  $\Omega$  от  $\vec{k}$ , т.е. спектр коллективных колебаний системы ПСВ относительно основного состояния. Для устойчивости основного состояния необходимо, чтобы  $\text{Im } \Omega(k) < 0$  для всех  $\vec{k}$ . В следующих главах мы подробно исследуем полученную в этом параграфе систему уравнений для наиболее интересных предельных случаев.

### Задачи

**Задача 7.1.** Доказать свойство 8 графиков для  $\Sigma_q$  (см. § 34) о том, что при записи аналитических выражений для них в произведении всех вершин и функций  $n_q$  и  $G_q$  в ребрах следует оставлять только действительную часть.

*Указание.* Рассмотреть сумму зеркально-симметричных пар графиков, таких как графики на рис. 34.1, б, в.

**Задача 7.2.** Рассматривая зеркально-симметричные графики для  $\Phi_q$ , доказать, что аналитические выражения для  $\Phi_q$  являются действительными (свойство 9, § 34).

**Задача 7.3.** Доказать, что диаграммные ряды для  $n_q$  и  $G_q$  в технике Уайльда имеют частное решение (34.10), отвечающее термодинамическому равновесию (Захаров, Львов, [107]).

*Указание.* Необходимо убедиться, что при условии (34.10) в каждом порядке по вершинам выполняется соотношение  $\pi\omega\Phi_q = T \text{Im } \Sigma_q$  внутри каждой группы из  $(m+1)$  графиков, включающей один график для  $\Phi_q$  с  $m$  линиями  $n_q$ , пересекающими основное сечение и  $m$  графиков для  $\Sigma_q$ , которые "порождаются" единственным графиком для  $\Phi_q$  в соответствии с топологическим свойством 4 графиков, указанным в § 34.

**Задача 7.4.** Доказать, что диаграммная техника для неравновесных процессов для взаимодействующего бозе-поля (техника Келдыша, [118]) переходит в технику Уайльда для канонических переменных в классическом пределе больших чисел заполнения. Насколько мне известно, опубликованное доказательство этого факта отсутствует, хотя сомнений в его справедливости ни у кого нет.

*Указание.* Соответствие должно наблюдаться между классическими величинами  $n(q)$ ,  $G(q)$ ,  $\Phi(q)$  и  $\Sigma(q)$  техники Уайльда и следующими величинами квантовой техники:

$$\begin{aligned} n_q &\approx \hbar G_d(q), \quad G(q) \approx G_R(q), \\ \Phi_q &\approx \hbar \Sigma_d(q), \quad \Sigma(q) \approx \Sigma_R(q), \\ G_R(q) &= G^{11}(q) - G^{21}(q), \quad G_d(q) = G^{11}(q) + G^{22}(q). \end{aligned} \quad (38.5)$$

Здесь индекс  $d$  характеризует дистрибутивные величины, индекс  $R$  — причинные, индексы 1 и 2 суть индексы Келдыша, относящиеся к нижнему и верхнему берегу временного контура.

**Задача 7.5.** Уточнить критерии применимости (35.5) и (35.6) четырехволнового кинетического уравнения (35.4) в случае обменного гамильтониана взаимодействия для следующих случаев: 1. Шаровой слой толщиной  $k$  и радиусом  $k_0 \gg k$ . 2. Тор с малым радиусом  $k$  и большим  $k_0 \gg k$ . 3. Сферу радиусом  $k$  и центром в точке  $k_0$ . Эти три области имеют объем порядка  $k_0 k_0^2$ ,  $k^2 k_0$  и  $k^3$  соответственно. Принципиальный вопрос заключается в том, какой из существенно различных размеров  $k$  или  $k_0$ , характеризующих пакет СВ, будет входить в эти оценки?

**Задача 7.6.** Пользуясь диаграммной техникой Уайльда, получить кинетическое уравнение (35.7) и его критерии применимости (35.8) для системы волн с трехволновым взаимодействием  $\mathcal{H}_3$ .

**Задача 7.7.** Уточнить критерии применимости (35.8) кинетического уравнения (35.7) с трехмагنونным диполь-дипольным взаимодействием для трех типов пакетов СВ, описанных в задаче 7.5.

**Задача 7.8.** Рассмотреть последовательность диаграмм для перенормировки вершин с малой передачей импульса  $(\kappa, \Omega)$  вблизи  $T(k, k')$  и  $S(k, k')$  в лестничном приближении и показать, что они содержат те же полюсы коллективных колебаний системы ПСВ, что и уравнения (38.4), если в диаграммах для массовых операторов не учитывать перенормировку вершин.

**Задача 7.9.** Сформулировать ДТ Уайльда для рассмотренной в § 30 задачи о поведении ПСВ, находящихся под действием шумовой накачки. Переформулировать стандартный вариант ДТ так, чтобы получить диаграммные ряды, содержащие только нормальные ФГ  $G_q$  и корреляторы амплитуд волн  $n_q$  и перенормированной накачки  $P_{k\omega}^2, P^3$  и т.д.

**Задача 7.10.** Показать, что мнимая часть массового оператора  $\Sigma_q$  для ФГ, полученных в предыдущей задаче, порядка затухания свободных СВ  $\gamma_k$ , если спектральная ширина шумовой накачки  $\Delta\omega \gg \gamma_k$ . Убедиться, что члены высших порядков в корреляторе накачки  $\propto P^5, P^6, \dots$  в диаграммах для  $\Sigma_q$  не малы и, следовательно, стандартное суммирование рядов по Дайсону в задаче о шумовой накачке неэффективно. В пределе  $\Delta\omega \gg \gamma_k$  доказать соотношение

$$P_k^2 = \pi \gamma \Delta \omega, \tag{38.6}$$

где  $\Delta\omega$  – спектральная ширина накачки,  $\langle P_k(t') P_k^*(t'') \rangle = P_k^2(t' - t'')$ . Соотношение (38.6) было использовано в § 30 при выводе исходных уравнений для системы волн, возбуждаемых шумовой накачкой.

**Указание.** При выводе (38.6) удобно перейти в  $\omega$ -представление.