ГЛАВА 9

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН В МАГНЕТОДИЭЛЕКТРИКАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ. Sg^2-ТЕОРИЯ

§ 43. Качественные особенности задачи

За редкими исключениями реальные магнетодиэлектрики имеют различного рода неоднородности, нарушающие их идеальную трансляционную симметрию. Природа неоднородностей в ферромагнитных кристаллах и их влияние на ферромагнитный резонанс и СВ исследовались в большом числе работ: см., например, монографию М. Спаркса [22], работу Е. Шлеманна [236]. Более подробную библиографию можно найти в книге А.Г. Гуревича [7]. Принято считать, что наибольшую роль в ферродиэлектриках играют следующие неоднородности: нарушение порядка в расположении магнитных ионов в узлах решетки, неоднородности химического состава образцов, нарушения постоянства направления осей кристалла, поликристалличность или блочность, неоднородные упругие напряжения, в частности, вызванные дислокациями, "геометрические" неоднородности: поры, трещины и, наконец, шероховатости поверхности образца.

В неоднородной среде, как хорошо известно, плоская волна не является нормальной колебательной модой, диагонализующей квадратичную часть гамильтониана, и, следовательно, неоднородности приводят к появлению дополнительного слагаемого в $\mathcal{H}_2$, недиагонального по $\boldsymbol{k}$:

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega_{\boldsymbol{k}} b^*_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} \, d\boldsymbol{k} + \mathcal{H}_{\mathrm{el}}, \quad \mathcal{H}_{\mathrm{el}} = \int \Psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \, b^*_{\boldsymbol{k}'} b_{\boldsymbol{k}} \, d\boldsymbol{k} \, d\boldsymbol{k}'. \tag{43.1}$$

В принципе можно было бы перейти к новым каноническим переменным, отличным от плоских волн, так, чтобы квадратичная часть гамильтониана (43.1) стала диагональной. Однако, несмотря на принципиальную простоту, этот путь исследования обычно неконструктивен, а в случае хаотического распределения мелкомасштабных неоднородностей и вовсе невозможен. Поэтому обычно строят теорию возмущений по гамильтониану $\mathcal{H}_{\mathrm{el}}$. Первый порядок теории возмущений приводит к перенормировке средних характеристик среды, например к изменению намагниченности в ФМ и т.п. Второй порядок описывает процесс рассеяния волн на неоднородностях с сохранением частоты: $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k}'$, $\omega(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}')$. В магнетодиэлектриках этот процесс называется *двухмагнонным рассеянием.* Влияние двухмагнонного рассеяния на параметрическое возбуждение СВ впервые рассматривалось Х. Сулом [212] и Е. Шлеманном [231] в случае нестабильности однородной прецессии (ОП) второго порядка. В этом случае частота ОП ω_0 совпадает с частотой параметрически возбужденных ею СВ:

$$2\omega_0 = \omega(\boldsymbol{k}) + \omega(-\boldsymbol{k}). \tag{43.2}$$

Поэтому СВ, возникающие в результате двухмагнонной релаксации ОП, вовлекаются также и в параметрический процесс (43.2). В результате ПСВ достигают значительного уровня возбуждения и оказывают эффективное обратное влияние на ОП еще до порога нестабильности. Это явление приводит к размытию порога даже малым количеством неоднородностей.

В случае нестабильности ОП первого порядка и для параллельной накачки ПСВ имеют частоту, равную половине частоты накачки, и размытия порога не происходит. Это не означает, однако, что неоднородности в этой ситуации вообще не оказывают влияния на порог и поведение спиновых волн за порогом.

Вопросу о влиянии неоднородностей на параллельную накачку посвящено много экспериментальных работ (см. М. Спаркс [22]; Е. Шлеманн [231, 236]; Х. Сул [212]). Эксперименты проводились в основном на поликристаллах, они показали, в частности, значительное увеличение порога при уменьшении размера зерна до значения порядка длины ПСВ. Для трактовки полученных результатов использовались простые представления: порог параллельной накачки определялся по формуле

$$h_1 |V_{\boldsymbol{k}}| = \gamma_{\boldsymbol{k}} + \gamma_{\mathrm{el}}(\boldsymbol{k}), \tag{43.3}$$

где γ_{el} – декремент затухания СВ, обусловленный их рассеянием на границах зерен, $\gamma_{\boldsymbol{k}}$ – затухание, обусловленное собственными процессами релаксации. В монографии М. Спаркса [22] содержится критика этой точки зрения, заключающейся в следующем: двухмагнонные процессы не выводят энергию из системы ПСВ, и поэтому условие баланса энергии для них даже в присутствии неоднородностей имеет прежний вид $hV = \gamma$, в котором учитывается только собственное затухание γ_k. Влияние же неоднородностей заключается в том, что нормальными модами теперь являются не плоские волны, а некоторые их линейные комбинации, которые и возбуждаются под действием накачки. Для вычисления порога, очевидно, нужно усреднить условие баланса энергии $hV = \gamma$ по волнам, входящим в состав нормальной моды, имеющей минимальный порог. В наших обозначениях формула М. Спаркса для порога имеет вид

$$h_{\text{th}} \int |V_\theta| N(\theta) \sin\theta d\theta = \int \gamma(\theta) N(\theta) \sin\theta d\theta. \tag{43.4}$$

Она предсказывает слабую зависимость h_1 от концентрации неоднородностей. Действительно, в предельном случае сильно неоднородной среды ПСВ равномерно заполняют всю резонансную поверхность $2\omega_k = \omega_p$, и из (43.4) следует

$$h_{\text{th}} \int |V_\theta| \sin\theta d\theta = \int \gamma(\theta) \sin\theta d\theta. \tag{43.5}$$

Подставляя для оценки $\gamma(\theta) = \text{const}$ и V_θ из формулы (14.21) для изотропных МФ, получим увеличение порога по отношению к однородному случаю всего в 1,5 раза.

В действительности и эта позиция (повторенная по существу и в более поздней монографии А.Г. Гуревича [7]) соответствует истине лишь частично. В рассуждениях необходимо было учесть, что новые нормальные моды, отличающиеся от плоских волн, не связаны попарно с пространственно-однородной накачкой, как это следовало из закона сохранения импульса $\boldsymbol{k} + (-\boldsymbol{k}) = 0$ для плоских волн. Поэтому условие баланса $hV = \gamma$, следующее из системы двух уравнений для $a(\boldsymbol{k})$ и $a(-\boldsymbol{k})$, вообще несправедливо в неоднородной среде. Качественные рассуждения удобнее производить в терминах теории возмущений по $\mathcal{H}_{\text{el}}$, стартующей от плоских волн в однородной среде. Тогда, кроме параметрического процесса

$$\omega_p = \omega(\boldsymbol{k}) + \omega(-\boldsymbol{k}), \tag{43.6}$$

приводящего к возбуждению волн на той части резонансной поверхности, где $h|V_k| \geqslant \gamma_k$, необходимо учитывать также двухмагнонное рассеяние $\omega_k = \omega_{k'}$, приводящее к возбуждению волн на остальной части поверхности (43.6). До сих пор это рассуждение эквивалентно позиции М. Спаркса. Однако далее необходимо учесть, что рассеяние на хаотических неоднородностях приводит к случайному сбою фазы волн, и поэтому пара волн $\pm\boldsymbol{k}'$, возникающая при двухмагнонном рассеянии исходной пары, уже не будет находиться в идеальном фазовом соотношении с накачкой. Поэтому при многократном двухмагнонном рассеянии будет разрушаться спаривание волн и в результате окажется, что $|\sigma_k| < n_k$. Естественно думать, что при сильном двухмагнонном рассеянии (когда $\gamma_{\text{el}} > \gamma$) коэффициент фазовой корреляции волн в паре $|\sigma_k|/n_k$ окажется порядка отношения коррелирующего фактора hV_k к хаотизирующему фактору $\gamma_{\text{el}}(\boldsymbol{k})$:

$$|\sigma_k|/n_k \approx h|V_k|/\gamma_{\text{el}}(\boldsymbol{k}). \tag{43.7}$$

Учитывая это, перепишем условие баланса энергии для одной пары:

$$\gamma_k n_k = hV_k |\sigma_k|$$

в следующем виде:

$$|h_{\text{th}} V_k|^2 \approx \gamma_k \, \gamma_{\text{el}}(k). \tag{43.8}$$

Сильное двухмагнонное рассеяние приводит к эффективному обмену энергией между парами волн на резонансной поверхности, поэтому условие (43.8) имеет место не для каждой пары в отдельности, а только для всего ансамбля ПСВ:

$$h_{\text{th}}^2 \int V_\theta^2 \, [\sin\theta / \gamma_{\text{el}}(\theta)] \, d\theta = \int \gamma_\theta \, \sin\theta d\theta. \tag{43.9}$$

Эта формула и определяет при $\gamma_{\text{el}} > \gamma$ порог параметрического возбуждения волн h_{th}. Необходимо подчеркнуть, что величина h_{th} оказалась больше, чем предсказывает формула (43.5), в $(\gamma_{\text{el}}/\gamma)^{1/2}$ раз. Этот множитель возникает из-за частичного разрушения фазовой корреляции.

Мы привели здесь подробное обсуждение вопроса о пороге параметрической нестабильности для того, чтобы продемонстрировать качественно новые особенности, возникающие в поведении ПСВ в магнетодиэлектриках со случайными неоднородностями. Изучению этого поведения и будет посвящена настоящая глава. В § 44 мы рассмотрим рассеяние СВ на неоднородностях в отсутствие параметрической накачки. Далее, в § 45, используя диаграммную технику, мы сформулируем исходные уравнения для статистического описания ПСВ в случайно-неоднородной среде, в § 46 изучается общая структура этих уравнений и находится функция распределения ПВ, в § 47 найден порог параметрического возбуждения в различных предельных случаях. В § 48 описано запороговое поведение ПВ, и, наконец, в § 49 мы исследуем устойчивость этого стационарного состояния и получим спектр коллективных колебаний.

Теоретическая часть результатов, описанная в этой главе, получена в основном в работах В.Е. Захарова, В.С. Львова, М.И. Широкова и В.Б. Черепанова [103, 155, 160, 161]. Некоторая часть результатов публикуется впервые.

§ 44. Рассеяние волн на статических неоднородностях

44.1. Гамильтониан. Для выяснения структуры и порядка величины гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{el}}$, описывающего хаотические неоднородности, мы вычислим его, задаваясь простыми моделями неоднородного ФМ.

Вариация обменной константы. Будем считать, что в гайзенберговский ФМ с простой кубической решеткой и взаимодействием ближайших соседей $\mathcal{J}$ введены атомы примеси замещения, отличающиеся от атомов матрицы только значением обменного интеграла $\mathcal{J}'$. Тогда

$$\begin{gathered} \mathcal{H} = -(\mathcal{J}/z_0) \sum_{n,z} \mu_n \mu_{n+z} - H_0 \sum_n \mu_n, \\ \mathcal{H}_{\text{el}} = (\mathcal{J} - \mathcal{J}') \sum_{m,z} \mu_m \mu_{m+z}. \end{gathered} \tag{44.1}$$

Здесь μ_m – магнитный момент на узле, n нумерует все узлы решетки, m – узлы, занятые примесями, z – номера атомов первой координационной сферы, z_0 – число этих атомов. Поступая далее стандартным образом, а именно переходя от μ_n к плотности магнитного момента – намагниченности $M(r_n) = \mu_n / v_0$ ($v_0 = a$ – объем элементарной ячейки), затем от $M(r)$

к фурье-компонентам M_k, затем от M_k к каноническим переменным b_k, по формулам (8.8) получим

$$\mathcal{H} = \int \omega_k b_k^* b_k \, dk + \mathcal{H}_{el}, \quad \omega_k = gH_0 + \omega_{ex}(ak)^2, \tag{44.2}$$

$$\mathcal{H}_{el} = \int \eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \, g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \, b^*(\boldsymbol{k}') \, b(\boldsymbol{k}) \, d\boldsymbol{k} \, d\boldsymbol{k}', \tag{44.3}$$

$$\eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \eta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \quad \eta(\boldsymbol{k}) = v_0 \sum_m \exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_m)/(2\pi)^3, \tag{44.4}$$

$$g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = (\mathcal{J} - \mathcal{J}') \, \omega_{ex} a^2 (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')/\mathcal{J} = g \cos(\widehat{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}). \tag{44.5}$$

Здесь $\eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ характеризует распределение примесей, а матрица $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ представляет амплитуду рассеяния из $\boldsymbol{k}$ в $\boldsymbol{k}'$ на одном примесном центре.

Вариация поля анизотропии. Более важным с точки зрения эксперимента представляется случай, когда характеристикой, отличающей атомы примеси от матрицы, является внутриионное спино-орбитальное взаимодействие, приводящее к вариации энергии анизотропии $\omega_a' \neq \omega_a$. Рассматривая для простоты гайзенберговский одноосный ФМ с одноионной анизотропией типа "легкая ось", аналогично получим: во-первых, квадратичный гамильтониан (44.2) и, во-вторых, гамильтониан взаимодействия СВ с дефектами вида (44.3), (44.4), в которых

$$\omega_k = \omega_a + gH_a + \omega_{ex}(ak)^2, \tag{44.6}$$

$$g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \omega_a' - \omega_a = \Delta\omega_a. \tag{44.7}$$

Сравнивая (44.7) с (44.5), убеждаемся, что для длинных СВ более существенным является последний механизм нарушения однородности ФМ, его изучению, преимущественно теоретическому, в различных конкретных ситуациях посвящено много работ, см., например, А.Г. Гуревич [7].

Вариация поля анизотропии в поликристаллах. Рассмотрим теперь неоднородности в поликристаллах (и в блочных монокристаллах), возникающие из-за того, что кристаллографические оси в зернах (или блоках) повернуты относительно друг друга. Гамильтониан $\mathcal{H}_{el}$ возникает из-за вариации энергии кристаллографической анизотропии. В одноосном ФМ

$$\mathcal{H}_{el} = -\frac{\omega_a}{gM} \int (\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}))^2 \, d\boldsymbol{r}, \tag{44.8}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ — направление легкой оси. Переходя к каноническим переменным b_k, получим гамильтониан $\mathcal{H}_{el}$ в виде (43.1), где амплитуда $\Psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ есть

$$\Psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \frac{\omega_a}{2V} \int [3n_z^2 - 1] \exp[i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}] \, d\boldsymbol{r}, \tag{44.9}$$

V — объем кристалла. Учитывая, что в пределах каждого кристаллита направление поля анизотропии неизменно, и пренебрегая для простоты различиями в размерах и форме кристаллитов, можно записать $\mathcal{H}_{el}$ в более привычном виде (44.3). В этом случае

$$\eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \eta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \qquad \eta_k = v_c \sum_m f_m \exp[i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_m)/(2\pi)^3], \tag{44.10}$$

$$2f_m = 3n_z^2(\boldsymbol{r}_m) - 1, \quad g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \frac{\omega_a}{v_c} \int d\boldsymbol{r}' \exp[i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}'], \tag{44.11}$$

где $\boldsymbol{r}_m$ — координаты центров кристаллитов, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_m$. Интегрирование в (44.11) проводится по объему одного кристаллита v_c. Конкретный вид матрицы $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ зависит от размеров и формы кристаллитов. Если характерный размер кристаллитов l меньше длины волны, то $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \omega_a$. В обратном предельном случае $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \approx \omega_a / v_c \, |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'|^3$. В конкретных расчетах можно принять модельную зависимость

$$g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \omega_a, \quad |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'| < k_m,$$
$$g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = 0, \quad |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'| > k_m. \tag{44.12}$$

Здесь k_m определяется из условия нормировки $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$:

$$\int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')\, d\boldsymbol{k}' = (2\pi)^3 \omega_a / v_c, \quad k_m^3 v_c = 6\pi^2. \tag{44.13}$$

Если учесть диполь-дипольное взаимодействие, то круговые переменные $b_{\boldsymbol{k}}$ уже не будут диагонализировать квадратичную часть гамильтониана. В новых, нормальных переменных $a_{\boldsymbol{k}}$ выражение для η станет более сложным, чем (44.10):

$$\eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \frac{v_c}{(2\pi)^3} \sum_m f_m(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \exp[i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}_m],$$
$$2 f_m(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = (3n_z^2 - 1)(u_{\boldsymbol{k}} u_{\boldsymbol{k}'} + v_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}'}^*) + \tag{44.14}$$
$$+ \tfrac{1}{2}[u_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}'} (n_x - i n_y)^2 + u_{\boldsymbol{k}'} v_{\boldsymbol{k}}^* (n_x + i n_y)^2],$$

где $u_{\boldsymbol{k}}$, $v_{\boldsymbol{k}}$ – коэффициенты диагонализующего преобразования (5.19). Случай кубического поликристалла с диполь-дипольным взаимодействием подробно изучен в 1958 г. в пионерской работе Е. Шлеманна [230].

44.2. Декремент затухания волн. Для вычисления декремента затухания плоской волны, обусловленного ее рассеянием на статических неоднородностях, можно воспользоваться обычной теорией возмущений по $\mathcal{H}_{\text{el}}$:

$$\gamma_{\text{el}} = \pi \int |g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')|^2 \eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \delta(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{k}'})\, d\boldsymbol{k}',$$
$$\overline{\eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')\eta^*(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}'')} = \eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'). \tag{44.15}$$

Здесь черта означает усреднение по статистике неоднородностей. Для точечных дефектов из (44.4) и для поликристаллов со случайной ориентацией осей из (44.10) можно получить соответственно

$$\eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = v_0 c(1 - c)/(2\pi)^3, \tag{44.16}$$

$$\eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = v_c/(2\pi)^3. \tag{44.17}$$

Здесь c – концентрация дефектов. Из (44.15), (44.16) и (44.5) получаем выражение для декремента рассеяния СВ на дефектах с вариацией обменной постоянной:

$$\gamma_{\text{el}}(\boldsymbol{k}) = \frac{c}{48\pi} \frac{\Delta J}{J} (ak)^5 \omega_{\text{ex}}. \tag{44.18}$$

В случаях, когда в дефектах варьируется константа анизотропии, вместо (44.18) получается

$$\gamma_{\text{el}}(\boldsymbol{k}) = \frac{c}{4\pi} \frac{(\Delta\omega_a)^2 ak}{\omega_{\text{ex}}}. \tag{44.19}$$

Выражение для $\gamma_{el}(\boldsymbol{k})$ в поликристаллах мы приведем в двух предельных случаях. Если длина волны $2\pi/k$ превышает размер кристаллита l, то $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ в соответствии с (44.12) равно ω_a. Тогда

$$4\pi\gamma_{el}(\boldsymbol{k}) = \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{\omega_a^2 kl}{\omega_{ex}}, \qquad kl \lesssim 2\pi. \tag{44.20}$$

В случае коротких волн ($kl \gtrsim 2\pi$) становится существенной форма кристаллов. По порядку величины

$$\gamma_{el} \approx \omega_a^2\, l/(2\pi\omega_{ex}\, a^2 k). \tag{44.21}$$

Как и следовало ожидать, рассеяние максимально, когда длина волны порядка размеров кристаллитов, $kl \approx 1$. Очевидно также, что формула (44.21) не верна, когда длина пробега волн меньше чем размер кристаллитов, ибо тогда само понятие рассеяния волн на поликристаллической структуре становится бессмысленным.

§ 45. Основные уравнения

В предыдущем параграфе при вычислении γ_{el} – декремента затухания плоской волны на случайных неоднородностях – мы воспользовались теорией возмущений по $\mathcal{H}_{el}$. Однако в присутствии параметрической накачки, компенсирующей затухание волн, теория возмущений становится неприменимой, так как в каждом ее порядке найдутся большие слагаемые, интегралы в которых будут расходиться из-за совпадения полюсов. Поэтому для построения теории параметрического возбуждения волн в средах со случайными неоднородностями необходимо воспользоваться диаграммной техникой, развитой в гл. 7 и позволяющей суммировать эти слагаемые.

45.1. Диаграммная техника. Включение $\mathcal{H}_{el}$ в гамильтоновы уравнения движения (34.2) приведет к дополнительному слагаемому, пропорциональному $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$, в уравнениях (34.5) для b_q:

$$b_q = G_q^0\,[hV_{\boldsymbol{k}}\, b_q^+ + \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')\eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')\delta(\omega - \omega')\, a_{q'}\, dq' +$$
$$+ \int T_{\boldsymbol{k}1,23}\, b_1^* b_2 b_3 \delta(q + q_1 - q_2 - q_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3 + f_q]. \tag{45.1}$$

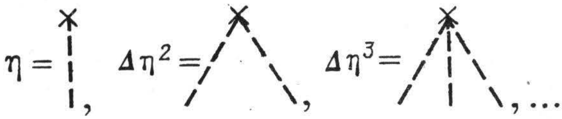
В результате в диаграммных рядах для b_q, возникающих при итерации этого уравнения, окажутся вершины, пропорциональные $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$, а соответствующие им аналитические выражения будут представлять собой ряды по степеням η и f. При вычислении функций Грина G_q, L_q и корреляторов n_q, σ_q будет необходимо вычислять средние по статистике неоднородностей от степеней $\eta_{\boldsymbol{k}}$: $\overline{\eta}_{\boldsymbol{k}}$, $\overline{\eta_{\boldsymbol{k}}\eta_{\boldsymbol{k}'}}$, $\overline{\eta_{\boldsymbol{k}}\eta_{\boldsymbol{k}'}\eta_{\boldsymbol{k}''}}$, . . . Для хаотически расположенных примесей, когда $\eta_{\boldsymbol{k}}$ определяется выражением (44.4), непосредственное выполнение процедуры усреднения дает

$$\begin{gathered}
\overline{\Delta\eta_{\boldsymbol{k}}\,\Delta\eta_{\boldsymbol{k}'}} = \Delta\eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'), \qquad \Delta\eta_{\boldsymbol{k}} = \eta_{\boldsymbol{k}} - \overline{\eta}_{\boldsymbol{k}},\\
\overline{\Delta\eta_{\boldsymbol{k}}\,\Delta\eta_{\boldsymbol{k}'}\,\Delta\eta_{\boldsymbol{k}''}} = \Delta\eta^3_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}''},\\
\overline{\Delta\eta_1\,\Delta\eta_2\,\Delta\eta_3\,\Delta\eta_4} = \Delta\eta^2_{12}\,\Delta\eta^2_{34} + \Delta\eta^2_{13}\,\Delta\eta^2_{24} + \Delta\eta^2_{14}\,\Delta\eta^2_{23} + \Delta\eta^2_{1234},\\
\overline{\eta}(\boldsymbol{k}) = \eta_1\delta(\boldsymbol{k}), \quad \eta_1 = c, \quad \Delta\eta_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \eta_2\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'),\\
\eta_2 = c(1 - c)v_0/(2\pi)^3, \quad \Delta\eta_3(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}'') = \eta_3\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k}''),\\
\eta_3 = c(1 - c)(1 - 2c)(v_0/(2\pi)^3)^2,
\end{gathered} \tag{45.2}$$

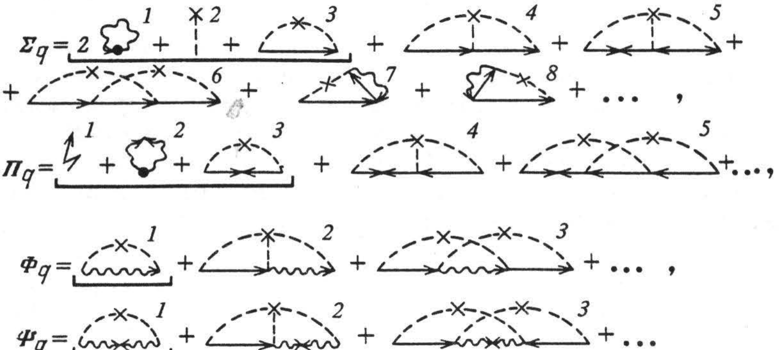
где c и v_0, как уже отмечалось, есть концентрация примесей и объем элементарной ячейки. В случае поликристаллов с хаотически ориентированными кристаллитами из (44.10), (44.11) можно вновь получить формулы (45.2), в которых, в отличие от (45.2),

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = \overline{f_m^2} v_c/(2\pi)^3, \quad \overline{f_m^2} = 1/5,$$
$$\eta_3 = \overline{f_m^3}\,[v_c^2/(2\pi)^3], \quad \overline{f_m^3} = 18/35. \tag{45.3}$$

Для величин $\overline{\eta}_k$, $\Delta\eta_{12}^2$, $\Delta\eta_{123}^3$ и т.д. введем обычные графические обозначения:



Тогда процедура усреднения некоторой диаграммы в соответствии с (45.2) будет сводиться к соединению всевозможным образом пунктирных линий η_k, $\eta_{k'}$, $\eta_{k''}$ в пучки из одной, двух, трех и более штук. Включение этих диаграмм в ряды для функций Грина приводит к появлению дополнительных компактных (неприводимых) диаграмм в рядах (36.9) для Σ_q, Π_q, Φ_q и Ψ_q:



(45.4)

45.2. Основные приближения теории. В рядах (45.4) не учтены диаграммы, содержащие две и более вершин T. Тем самым при рассмотрении четырехволнового взаимодействия мы ограничились приближением самосогласованного поля, т.е. сделали основное допущение S-теории.

Приступим теперь к оценке диаграмм, описывающих рассеяние волн на неоднородностях. Диаграмма (2) в ряду для Σ_q равна $cg(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ (для ситуации с точечными дефектами). В силу эрмитовости гамильтониана $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ вещественно, и поэтому эта диаграмма описывает вклад в частоту волн $\omega_{\boldsymbol{k}}$, возникающий из-за изменения средних характеристик среды. В рассмотренных выше примерах с вариацией обменной константы (см. (44.5)) и константы анизотропии (см. (44.7)) получим соответственно

$$\Delta\omega_{\boldsymbol{k}} = c(J' - J)\,\omega_{\text{ex}}(ak)^2/J, \quad \Delta\omega_{\boldsymbol{k}} = c\,\Delta\omega_a. \tag{45.5}$$

Для поликристаллов $\Delta\omega_{\boldsymbol{k}} = 0$. Рассмотрим теперь более сложную диаграмму (3) в ряду (45.4). Наибольший интерес представляет ее мнимая часть:

$$\operatorname{Im}\Sigma_3(\boldsymbol{k},\omega)=\eta_2\int|g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2\operatorname{Im}G(\boldsymbol{k}',\omega)\,d\boldsymbol{k}'. \tag{45.6}$$

Оценка этого выражения зависит от конкретного вида функции Грина. В отсутствие накачки

$$G(\boldsymbol{k},\omega)=(\omega-\omega_{\boldsymbol{k}}+i\Gamma_{\boldsymbol{k}})^{-1} \tag{45.7}$$

и для $\gamma_{\rm e1}=\operatorname{Im}\Sigma$ получается выражение, совпадающее с (44.15). Впоследствии мы покажем, что функция Грина G_q имеет простой вид (45.7) и в присутствии накачки, если $\gamma_{\rm e1}>\gamma$. В этом же приближении получаем для диаграммы (4) в ряду (45.4):

$$\operatorname{Im}\Sigma_4(\boldsymbol{k},\omega)=\eta_3\int g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')g(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}'')g(\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{k})\times$$
$$\times\operatorname{Im}\{(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'}+i\Gamma_{\boldsymbol{k}'})^{-1}(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}''}+i\Gamma_{\boldsymbol{k}''})^{-1}\}\,d\boldsymbol{k}'d\boldsymbol{k}''. \tag{45.8}$$

По порядку величины

$$\alpha=\operatorname{Im}\Sigma_4/\operatorname{Im}\Sigma_3\approx$$
$$\approx(\eta_3/\eta_2 g_{\boldsymbol{kk}})\int[\,|g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2/(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'}+i\Gamma_{\boldsymbol{k}'})]\,d\boldsymbol{k}'. \tag{45.9}$$

Выбирая закон дисперсии в стандартном виде (44.2) и пользуясь формулами (44.5), (44.7), (45.3) и (45.4), получим следующие оценки: для вариации обменной константы $\alpha=\alpha_1$, для вариации поля анизотропии $\alpha=\alpha_2$, для вариации поля анизотропии в поликристаллах $\alpha=\alpha_3$, где

$$\alpha_1=(J'-J)/J,$$
$$\alpha_2=\Delta\omega_a/\omega_{\rm ex}, \tag{45.10}$$
$$\alpha_3\approx\omega_a l^2/\omega_{\rm ex}a^2.$$

Здесь l – размер кристаллитов, a – постоянная решетки. Впредь мы будем считать, что параметр α мал, и на этом основании не будем учитывать диаграммы с пучками из трех и более линий. Это означает, что статистические свойства поля неоднородностей η являются гауссовыми. Физический смысл этого в том, что мы рассматриваем рассеяние волн в борновском приближении. При $\alpha\gtrsim1$ суммирование диаграмм с пучками из трех и более линий приводит к возникновению полюсов в полной амплитуде рассеяния $\tilde g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$, описывающих локальные или квазилокальные колебания. Вдали от резонанса они не оказывают влияния на поведение ПСВ и учет локальных колебаний сводится к замене в формулах борновской амплитуды рассеяния $g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ на полную $\tilde g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$. Специальный случай резонанса исследован В.Б. Черепановым в 1979 г. [226].

Оценим теперь диаграмму (6) в ряду (45.4) с пересечением примесных линий:

$$\operatorname{Im}\Sigma_6(\boldsymbol{k},\omega)=\eta_2^2\int g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')g(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}'')g(\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{k}''')g(\boldsymbol{k}''',\boldsymbol{k})\times$$
$$\times\operatorname{Im}[G(\boldsymbol{k}',\omega)G(\boldsymbol{k}'',\omega)G(\boldsymbol{k}''',\omega)\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}''-\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}''')]\,d\boldsymbol{k}'d\boldsymbol{k}''d\boldsymbol{k}''' \tag{45.11}$$

По порядку величины $\beta=\operatorname{Im}\Sigma_6/\operatorname{Im}\Sigma_3\approx\gamma_{\rm el}/\omega_{\boldsymbol{k}}$. В рассмотренных нами случаях (см. формулы (44.18) – (44.21)) с большим запасом выполняется условие $\beta\ll1$, и диаграммами с пересечением примесных линий можно пренебречь. В заключение оценим "комбинированные" диаграммы вида

(7), (8) в ряду (45.4):

$$\Sigma_7 = \eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') g(\boldsymbol{k}'', \boldsymbol{k}''') G(\omega_{\boldsymbol{k}''}, \boldsymbol{k}''') n(\boldsymbol{k}'') \times$$
$$\times \delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'' - \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}''') d\boldsymbol{k}' d\boldsymbol{k}'' d\boldsymbol{k}''' \approx \dot{\gamma}_{\rm el} TN/kv. \tag{45.12}$$

Видно, что при не слишком большой надкритичности в пределах применимости S-теории $\Sigma_7/\mathrm{Im}\,\Sigma \ll 1$ и "комбинированные" диаграммы вида (7) также несущественны. Комбинированные диаграммы также несущественны для нашей теории.

Таким образом, в рядах для Σ, Π, Φ и Ψ мы оставляем только подчеркнутые в (45.4) диаграммы. Приведем соответствующие им аналитические выражения

$$\Sigma = 2\int T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') n(\boldsymbol{k}') d\boldsymbol{k}' + \Sigma_{\rm el},$$
$$\Sigma_{\rm el} = \eta_1 g_{\boldsymbol{kk}} + \eta_2 \int |g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')|^2 G(\boldsymbol{k}', \omega) d\boldsymbol{k}',$$
$$\Pi(\boldsymbol{k}, \omega) = P_{\boldsymbol{k}} + \Pi_{\rm el}(\boldsymbol{k}, \omega),$$
$$\Pi_{\rm el}(\boldsymbol{k}, \omega) = \eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') g(\bar{\boldsymbol{k}}, \bar{\boldsymbol{k}}') L(\boldsymbol{k}', \omega) d\boldsymbol{k}', \tag{45.13}$$
$$\Phi(\boldsymbol{k}, \omega) = \Phi_{\rm el}(\boldsymbol{k}, \omega) = \eta_2 \int |g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')|^2 n(\boldsymbol{k}') d\boldsymbol{k}',$$
$$\Psi(\boldsymbol{k}, \omega) = \Psi_{\rm el}(\boldsymbol{k}, \omega) = \eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') g(\bar{\boldsymbol{k}}, \bar{\boldsymbol{k}}') \sigma(\boldsymbol{k}', \omega) d\boldsymbol{k}'.$$

Легко заметить, что если $n(k, \omega)$ и $\sigma(k, \omega) \backsim \delta(\omega - \omega_p/2)$, то и $\Phi(k, \omega)$, $\Psi(k, \omega) \backsim \delta(\omega - \omega_p/2)$ так же. Это означает, что рассеяние ПВ на статических неоднородностях не нарушает одночастотность параметрической турбулентности волн, характерную для S-теории. Таким образом, при построении теории мы можем пользоваться "одночастотными" уравнениями (37.4) и преобразовать (45.13) с помощью (37.5) и (37.3):

$$\Gamma(\Omega) = \gamma(\Omega) + \pi\eta_2 \int |g(\Omega, \Omega')|^2 \Gamma(\Omega') [k^2(\Omega')/\nu(\Omega')v(\Omega')] d\Omega',$$
$$\Pi(\Omega) = P(\Omega) + \pi\eta_2 \int g(\Omega, \Omega') g(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}') \Pi(\Omega') [k^2(\Omega')/\nu(\Omega')v(\Omega')] d\Omega',$$
$$P(\Omega) = hV(\Omega) + \int S(\Omega, \Omega') \Sigma(\Omega') d\Omega', \tag{45.14}$$
$$\Phi(\Omega) = \eta_2 \int |g(\Omega, \Omega')|^2 N(\Omega') d\Omega',$$
$$\Psi(\Omega) = \eta_2 \int g(\Omega, \Omega') g(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}') \Sigma(\Omega') d\Omega'.$$

Дополнительно к (45.13) в выражении для $\Gamma(\Omega)$ здесь мы учли слагаемое $\gamma(\Omega)$, описывающее затухание ПСВ, возникающее из-за их взаимодействия с тепловыми волнами. Соотношения (45.14) вместе с уравнениями (37.14) представляют замкнутую систему интегральных уравнений, позволяющих описывать систему взаимодействующих параметрически возбужденных волн в среде со случайными неоднородностями.

§ 46. Функция распределения параметрических спиновых волн

Перепишем уравнение (37.4) для функций распределения с помощью соотношений (45.14) в виде

$$N(\Omega) = \pi k^2(\Omega) \Gamma(\Omega) [\Gamma(\Omega)\Phi(\Omega) + \mathrm{Im}\,\Pi^*(\Omega)\Psi(\Omega)],$$
$$\Gamma(\Omega)\Sigma(\Omega) + i\Pi(\Omega) N(\Omega) = 0, \tag{46.1}$$
$$\nu^2(\Omega) = \Gamma^2(\Omega) - |\Pi(\Omega)|^2.$$

Это уравнение имеет смысл баланса энергии в системе ПСВ: первое слагаемое описывает диссипацию энергии за счет собственных механизмов затухания, второе – поступление энергии от накачки. Правая часть уравнения, в приближении S-теории равная нулю, описывает перераспределение энергии на резонансной поверхности за счет рассеяния волн на неоднородностях. Из (46.1) следует интегральное соотношение

$$\int \gamma(\Omega) N(\Omega) d\Omega + \operatorname{Im} \int h V^*(\Omega) \Sigma(\Omega) d\Omega = 0, \tag{46.2}$$

в которое двухмагнонное рассеяние не входит, так как оно происходит с сохранением частоты и не выводит, следовательно, энергию из системы ПСВ.

Влияние неоднородностей, как мы сейчас покажем, приводит к двум эффектам: очевидному – изотропизации распределения $N(\Omega)$ и менее очевидному – разрушению фазовых корреляций в парах, приводящему к уменьшению $|\Sigma(\Omega)|$ по сравнению с $N(\Omega)$. Изучим вначале это явление в наиболее интересном предельном случае, когда концентрация неоднородностей велика.

46.1. Случай большой интенсивности рассеяния: $\gamma_{\mathrm{el}} \gg \gamma$. В этом пределе исходные интегральные уравнения значительно упрощаются. За одним исключением, о котором будет идти речь ниже, они имеют решение, при котором $N(\Omega) \gg |\Sigma(\Omega)|$, $\Gamma(\Omega) \gg \Pi(\Omega)$. Используя эти неравенства, получим из (45.14), (37.4) уравнение, определяющее распределение $N(\Omega)$:

$$\int |g(\Omega, \Omega')|^2 [N(\Omega) - N(\Omega')]\, d\Omega' = 0.$$

Единственное разумное решение этого уравнения – изотропное распределение: $N(\Omega) = N/4\pi$. Для вычисления $\Sigma(\Omega)$, как это видно из (37.4), необходимо знать $\Gamma(\Omega)$ и $\Pi(\Omega)$:

$$\Sigma(\Omega) = -i\, \Pi(\Omega) N(\Omega)/\Gamma(\Omega). \tag{46.3}$$

Учитывая, что мы ищем решение, при котором $\Gamma(\Omega) \approx \nu(\Omega)$, получим из (37.4) выражение для $\Gamma(\Omega)$ и интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определения $\Pi(\Omega)$:

$$\Gamma(\Omega) = 4\pi^2 \eta_2 \langle |g(\Omega, \Omega')|^2\, k^2(\Omega')/v(\Omega') \rangle_{\Omega'}, \quad 4\pi \langle f_\Omega \rangle = \int f_\Omega\, d\Omega, \tag{46.4}$$

$$\Pi(\Omega) = P(\Omega) + \langle K(\Omega, \Omega')\, \Pi(\Omega') \rangle_{\Omega'}, \tag{46.5}$$

$$K(\Omega, \Omega') = [k^2(\Omega')/v(\Omega')] \times$$
$$\times\, g(\Omega, \Omega')\, g(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}')/\langle |g(\Omega', \Omega'')|^2\, k^2(\Omega) v^2(\Omega'') \rangle_{\Omega''}. \tag{46.6}$$

В ряде случаев, например, при $V(\Omega) = V$, $g(\Omega, \Omega') = g$ это уравнение не имеет решения. Это означает, что наше допущение $\Gamma(\Omega) \gg \Pi(\Omega)$ несправедливо. Можно показать, что при этом исходные уравнения имеют другое решение, в котором

$$\Gamma \approx |\Pi| \approx \gamma_{\mathrm{el}} (\gamma_{\mathrm{el}}/\gamma)^{1/3} \gg \nu \approx \gamma_{\mathrm{el}}.$$

Этот вырожденный случай нас интересовать не будет, и мы будем считать, что уравнение (46.5) для $\Pi(\Omega)$ имеет единственное решение, в котором Π порядка P. Используя уравнение (46.3), преобразуем равенство (46.1) к виду

$$\langle \gamma(\Omega) \rangle = \operatorname{Re} \langle P^*(\Omega)\, \Pi(\Omega)/\Gamma(\Omega) \rangle. \tag{46.7}$$

Отсюда и из (46.3) немедленно следует, что

$$|P|^2 \approx \gamma_{el}\gamma,$$
$$|\Sigma(\Omega)| \approx N(\Omega)(\gamma/\gamma_{el})^{1/2} \ll N(\Omega). \tag{46.8}$$

Это обстоятельство – разрушение фазовых корреляций – приводит, как уже отмечалось, к увеличению порога. Вместо оценки М. Спаркса (43.4) $h_{th}V \approx \langle \gamma \rangle$, которая получалась бы в случае $|\Sigma| = N$ из (46.7) следует выражение, близкое к (43.9):

$$h_{th}^2 \langle |V(\Omega)|^2 \rangle \approx \langle \gamma(\Omega) \rangle \gamma_{el}. \tag{46.9}$$

Рассмотрим также другой предельный случай, представляющий интерес.

46.2. Случай почти однородной среды: $\gamma_{el} \ll \gamma$. Разумеется, под влиянием таких неоднородностей порог параметрического возбуждения и поведение волн за порогом изменятся мало, принципиальным моментом здесь будет выяснение ширины функции распределения, которая в пределе $\gamma_{el} \to 0$ в соответствии с S-теорией равна нулю. Характер ее уширения оказывается различным в ситуациях, когда волны сосредоточены на линиях или в точках резонансной поверхности. Мы не будем их изучать в общем случае, хотя это и нетрудно. Достаточно полное представление об этих ситуациях можно получить, рассматривая два конкретных случая, реализующиеся при параллельной накачке СВ в кубических ФМ.

Если пренебречь кубической анизотропией (а она, как правило, мала), то ПВ в S-теории сосредоточены на экваторе резонансной поверхности и

$$V(\boldsymbol{k}) = V(x)\exp 2i\varphi, \qquad V(x) = V(1 - x^2),$$
$$S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = S(x, x', \varphi - \varphi'), \;\; g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = g(x, x', \varphi - \varphi'), \quad x = \cos\theta. \tag{46.10}$$

При $\gamma_{el} \ll \gamma$ ПВ локализованы вблизи $x = 0$ и зависимость $N(x)$ в (37.4) определяется множителем $\nu^{-3}(x)$, остальные коэффициенты этого уравнения с достаточной точностью могут быть взяты в точке $x = 0$. Тогда

$$N(\Omega) = 2\pi N(x), \qquad 2N(x) = A/\nu^3(x),$$
$$A = 4\pi^2\gamma_0(\gamma_0\Phi_0 + \operatorname{Im} P_0^* \Psi_0)/v_0. \tag{46.11}$$

В выражении для A мы оставили лишь члены первого порядка по γ_{el}, полагая $\Gamma = \gamma$ и $\Pi = P$. Зависимость $\nu(x)$ при малых x можно выбрать в виде

$$\nu^2(x) = \nu_0^2 + \gamma^2(\alpha^2 x^2 - \beta^2 x^4), \tag{46.12}$$

где коэффициенты α и β порядка единицы и зависят, вообще говоря, от надкритичности. При малой надкритичности, когда $P(x) \approx hV(x)$ в силу (46.10) $\alpha^2 = 2$, $\beta^2 = 1$. Интегрируя (46.11) по x и используя (45.14), имеем

$$N = A\int_0^1 \nu^{-3}(x)dx = A/\alpha\gamma\nu_0^2, \qquad A = N\gamma_{el}\gamma(1 - K),$$
$$\gamma_{el} = 2\pi\eta_2 k_0^2 v_0^{-1} \int |g(0,0,\varphi)|^2 d\varphi, \tag{46.13}$$
$$K = \int g^2(0,0,\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi \Big/ \int |g(0,0,\varphi)|^2 d\varphi.$$

В случаях вариации обменного взаимодействия, когда $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ задается выражением (44.5), $K = 1/2$. Для двух других случаев – вариации поля анизотропии и для поликристаллов при $(kl) \ll 1$, когда $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ определяется формулами (44.7) и (44.12), легко убедиться, что $K = 0$. Если же $(kl) \gg 1$, то K близко к единице:

$$1 - K = 6^{1/3}\,\pi^{4/3}(kl)^{-2}. \tag{46.14}$$

Из (46.13) следует выражение для ν_0^2:

$$\nu_0^2 = \gamma\,\gamma_{el}(1 - K)/\alpha, \tag{46.15}$$

определяющее в соответствии с равенствами (46.11) и (46.12) зависимость $N(\theta)$. В частности, полуширина распределения $N(\theta)$ равна

$$\Delta\theta \approx 2\nu_0/\alpha\gamma = [\gamma_{el}(1 - K)/\gamma\alpha^3]^{1/2} \approx (\gamma_{el}/\gamma)^{1/2}. \tag{46.16}$$

При вычислении порогового поля необходимо учитывать перенормировку (45.14) накачки и затухания ПВ:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \gamma + 2\pi\eta_2 \int_0^1 dx' \int_0^{2\pi} d\varphi\, |g(x, x', \varphi)|^2\, k^2(x)/\nu(x)v(x), \\ \Pi(x) &= P(x) + 2\pi\eta_2 \int_0^1 dx' \int_0^{2\pi} d\varphi g^2(x, x', \varphi) \times \\ &\times \exp(2i\varphi)\, k^2(x)/\nu(x)v(x). \end{aligned} \tag{46.17}$$

Как видно из (46.12), в этих интегралах существенна вся область изменения x, и поэтому их вычисление требует конкретизации зависимостей $g(x, x')$, $S(x, x')$ и т.п. Соответствуюшие модельные расчеты будут сделаны в следующем параграфе.

При $\gamma_{el} \ll \gamma$ может оказаться существенной даже слабая кубическая анизотропия, нарушающая аксиальную симметрию задачи и приводящая к тому, что в приближении S-теории на экваторе $(\theta = \pi/2)$ возбуждены при $\boldsymbol{M} \parallel [110]$ только одна пара $\varphi_1 = (0, \pi)$, при $\boldsymbol{M} \parallel [100]$ две пары $\varphi_1 = (0, \pi)$, $\varphi_2 = (\pi/2, 3\pi/2)$, при $\boldsymbol{M} \parallel [111]$ три пары $\varphi_1 = (0, \pi)$, $\varphi_2 = (\pi/3, 4\pi/3)$, $\varphi_3 = (2\pi/3, 5\pi/3)$. Учет кубической анизотропии приводит к зависимости ν от φ, причем ν минимальна в тех точках резонансной поверхности, в которых в приближении S-теории расположены пары. Вблизи минимума с $x = 0$, $\varphi = \varphi_j$ вместо (46.12) имеем

$$\nu^2(\Omega) = \nu_0^2 + \gamma^2\,[\alpha^2 x^2 + \delta^2(\varphi - \varphi_j)^2], \tag{46.18}$$

где безразмерный параметр $\delta \ll 1$ характеризует малость кубической анизотропии. Например, при $\boldsymbol{M} \parallel [110]$ $\delta^2 = \omega_a/\omega_M$, что для ЖИГ при комнатной температуре составляет 0,05%. Рассматривая узкие распределения мы так же, как и в предыдущем случае, в уравнениях (37.4) будем учитывать зависимость от Ω только в величине $\nu(\Omega)$, все остальные коэффициенты можно взять в точках $x = 0$, $\varphi = \varphi_j$. Тогда после интегрирования (37.4) по x и φ получим вместо (46.13)

$$\begin{aligned} N &= A \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi/(2\pi\nu^3(x, \varphi)) = 2zA/\alpha\delta\,\nu_0\gamma^2, \\ A &= N\gamma_{el}\,\gamma^2(1 - K), \\ \gamma_{el} &= 4\pi^2 k_0^2\,(\eta_2/v_0 z) \sum_{j=1}^{z} |g(\varphi_j)|^2, \\ K &= \sum_{j=1}^{z} g^2(\varphi_j)\exp(2i\varphi_j) \Big/ \sum_{j=1}^{z} |g(\varphi_j)|^2, \end{aligned} \tag{46.19}$$

где $z = 1, 2, 3$ – число пар в приближении S-теории. Из (46.19) следует выражение для ν_0:

$$\nu_0 = 2z\gamma_{e1}(1-K)/\alpha\delta \tag{46.20}$$

и в соответствии с (46.18) выражения для полуширины функции распределения по θ и φ:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \nu_0/\alpha\gamma = 4z\,\gamma_{e1}(1-K)/\alpha^2\delta\gamma, \\ \Delta\varphi &= \nu_0/\delta\,\gamma = 4z\gamma_{e1}(1-K)/\alpha\delta^2\gamma. \end{aligned} \tag{46.21}$$

Полученные результаты (46.20) и (46.21) справедливы, если $z\,\Delta\varphi \ll 2\pi$. При $\delta \ll 1$ это налагает ограничение на величину двухмагнонного рассеяния

$$\gamma_{e1} < \gamma\alpha\delta^2\pi/2z^2(1-K) \approx \delta^2\gamma.$$

При выполнении обратного неравенства, функцию распределения $N(x, \varphi)$ можно считать не зависящей от φ. Это означает, что кубической анизотропией, нарушающей аксиальную симметрию, можно пренебречь, как это сделано в предыдущем пункте. Отметим еще, что при $z = 1$ в соответствии с (46.19), (46.20) $K = 1$ и $\nu_0 = 0$. Это означает, что случай одной пары необходимо рассматривать отдельно, оставляя в (37.4) зависимость от φ не только в $\nu(\varphi)$, но и в подынтегральных выражениях (45.14) для Φ и Ψ. Учитывая это обстоятельство, получим вместо (46.19) более точные уравнения:

$$N(\varphi) = \frac{\gamma_{e1}\gamma}{\alpha\,[\nu_0^2 + \gamma^2\delta^2\sin^2\varphi]} \times$$
$$\times \int \frac{|g(\varphi-\varphi')|^2}{|g(0)|^2}\,[1 - \exp(2i(\varphi-\varphi'))]\,N(\varphi')\,d\varphi.$$

Здесь γ_{e1} определяется выражением (46.19) при $z = 1$ и использовано выражение для $\nu(\Omega)$ и $N(\varphi)$:

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= \int_{-1}^{1} N(\varphi, x)\,dx, \\ \nu^2(\Omega) &= \nu_0^2 + \gamma^2(\alpha^2x^2 + \delta^2\sin^2\varphi). \end{aligned} \tag{46.22}$$

Последнее переходит в (46.18) при малых φ. В (46.22) оказывается существенной вся область интегрирования по φ, поэтому необходимо задать явный вид $g(0, 0, \varphi)$. Предполагая для простоты $g = \mathrm{const}$, получаем интегральное уравнение для $N(\varphi)$ с вырожденным ядром:

$$\begin{aligned} &N(\varphi) = (\gamma_{e1}\gamma/\alpha)\,[N - N_1\exp(2i\varphi)]\,[\nu_0^2 + \gamma^2\delta^2\sin^2\varphi]^{-1}, \\ &N = \int N(\varphi)d\varphi, \qquad N_1 = \int \exp(-2i\varphi)\,N(\varphi)\,d\varphi. \end{aligned} \tag{46.23}$$

Дважды интегрируя (46.23) по φ с весом 1 и $\exp(-2i\varphi)$, получаем систему линейных уравнений для N и N_1, условие разрешимости которой дает

$$\begin{aligned} \alpha^2 = (\gamma_{e1}\,\gamma)^2\,\{&[\int(\nu_0^2 + \gamma^2\delta^2\sin^2\varphi)^{-1}d\varphi]^2 - \\ &- |\int(\nu_0^2 + \gamma^2\delta^2\sin^2\varphi)^{-1}\exp(2i\varphi)\,d\varphi|^2\}. \end{aligned} \tag{46.24}$$

Отсюда при $\nu_0 < \gamma$ получаем

$$\nu_0 = 4\pi^2\gamma_{e1}^2/\alpha^2\delta\gamma. \tag{46.25}$$

С этой же точностью можно, выразив N_1 через N с помощью (46.24), получить из (46.23)

$$\pi N(\varphi) = N(0)\,\frac{\Delta\varphi\cos 2\varphi + (\Delta\varphi)^{1/2}\delta^{-1}\sin^2\varphi}{(\Delta\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,,$$

$$\Delta\varphi = \nu_0/\gamma\delta = (2\pi\gamma_{el}/\alpha\delta\gamma)^2\,. \tag{46.26}$$

Это выражение для $N(\varphi)$ представляет собой функцию Лоренца с полушириной $\Delta\varphi$ при $\varphi < \varphi_0$, где

$$\varphi_0 \approx \delta^{1/2}(\Delta\varphi)^{1/4} \approx (2\pi\gamma_{el}/\alpha\gamma)^{1/2}, \tag{46.27}$$

и константу, равную $(\Delta\varphi)^{1/2}/\delta$ при $\varphi > \varphi_0$. Сравнивая (46.26) с (46.21), убуждаемся в том, что уширение функции распределения $N(\varphi)$ по φ, вызванное двухмагнонными рассеянием, в случае одной пары (46.26) оказывается существенно меньше, чем в случае двух или трех пар (46.21).

46.3. Малоугловое рассеяние. Ситуация, требующая отдельного рассмотрения, возникает в случае плавных неоднородностей среды, когда углы рассеяния малы и функция $g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ отлична от нуля лишь для $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'| \ll k$. Предполагая для простоты закон дисперсии волн изотропным, а $g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ зависящим от модулей $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ и угла между ними, перейдем в уравнениях (46.21) к дифференциальному приближению:

$$\Gamma(\Omega) = \gamma(\Omega) + \gamma_{el}\Gamma(\Omega)/\nu(\Omega) + \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\,\Delta^2\Delta(\theta,\varphi)[\Gamma(\Omega)/\nu(\Omega)]\,,$$

$$\Pi(\Omega) = P(\Omega) + \gamma_{el}\Pi(\Omega)/\nu(\Omega) + \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta,\varphi)[\Pi(\Omega)/\nu(\Omega)]\,,$$

$$\nu^2(\Omega) = \Gamma^2(\Omega) - |\Pi(\Omega)|^2, \tag{46.28}$$

$$\gamma_{el} = \pi\eta_2 k^2 v^{-1}\int |g(\Omega,\Omega')|^2\,d\Omega',$$

$$\gamma_{el}\Delta^2 = \pi\eta_2 k^2 v^{-1}\int |g(\Omega,\Omega')|^2\,d\Omega'\sin^2(\widehat{\Omega\;\Omega'}),$$

где $\Delta(\theta,\varphi)$ – угловая часть оператора Лапласа. Аналогично, переходя к дифференциальному приближению в уравнении баланса энергии (46.1), получим после ряда тождественных преобразований простое уравнение

$$\gamma(\Omega)N(\Omega) + \mathrm{Re}\,[\Pi^*(\Omega)P(\Omega)N(\Omega)/\Gamma(\Omega)] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\,\Delta^2\Delta(\theta,\varphi)[\nu(\Omega)N(\Omega)/\Gamma(\Omega)]\,. \tag{46.29}$$

Его правая часть описывает диффузию энергии ПСВ по резонансной поверхности за счет малоуглового рассеяния на плавных неоднородностях. Исследуем систему уравнений (46.28)–(46.29) для кубических ФМ (см. (46.10)) в двух предельных случаях – при $\gamma_{el}\Delta^2 \ll \gamma$ и $\gamma_{el}\Delta^2 \gg \gamma$. Тогда $\Pi(\Omega) = \Pi(\theta)\exp(2i\varphi)$ и в формулах (46.28) остается только зависимость от полярного угла θ:

$$\Gamma(\theta) = \gamma(\theta) + \gamma_{el}\Gamma(\theta)/\nu(\theta) + \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta)\,[\Gamma(\theta)/\nu(\theta)]\,,$$

$$\Pi(\theta) = P(\theta) + [\,\Pi(\theta)\,\gamma_{el}/\nu(\theta)]\,(1 - 2\Delta^2/\sin^2\theta) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta)\,[\Pi(\theta)/\nu(\theta)]\,, \tag{46.30}$$

$$\nu^2(\theta) = \Gamma^2(\theta) - |\Pi(\theta)|^2,$$

$$F^2(\theta) = [\Gamma(\theta) - |\Pi(\theta)|\,]\,/\,[\Gamma(\theta) + |\Pi(\theta)|\,]\,.$$

Отсюда получается замкнутое уравнение для функции $F(\theta)$:

$$\epsilon F^4 + F^3(\gamma - |P(\theta)|)/2\gamma + F(\gamma + |P(\theta)|)/2\gamma - \epsilon = 2\epsilon F^3\Delta(\theta)\ln F,$$
$$\epsilon = \gamma_{e1}\Delta^2/2\gamma. \qquad (46.31)$$

Зная выражение для F, можно найти Γ, Π и ν прямым вычислением:

$$\Gamma(\theta) = \gamma + 1/2\gamma_{e1}(F + F^{-1}) + \gamma\epsilon\Delta(\theta)[F + F^{-1}]. \qquad (46.32)$$

Малая интенсивность рассеяния $\epsilon \ll 1$. В этом приближении параметрические волны, как мы покажем ниже, сосредоточены в узкой области $\Delta\theta \leqslant \epsilon^{1/3}$ вблизи максимума $P(\theta)$. Считая для определенности, что $P(\theta)$ максимально при $\theta = \pi/2$, положим при малых $x = \cos\theta$ $P(x) = P_0 - \alpha\gamma x^2$, где α порядка единицы, и определим x_0 равенством $P(x_0) = \gamma$. При $x_0^3 \leqslant \epsilon$, $x^3 \leqslant \epsilon$ уравнение (46.31) имеет решение $F = \sqrt{2}/|x|$. При $x_0^3 \lesssim \epsilon$ и $x^3 \gg \epsilon$ вид решения (46.31) изменяется незначительно: $F = (2/\alpha)^{1/2}|x|$. Подставляя эти соотношения в (46.32), получим при $x^3 > \epsilon$:

$$\Gamma(x) = \gamma + \gamma_{e1}(2/\alpha)^{1/2}|x|^{-1} + 2\gamma\epsilon(2/\alpha)^{1/2}|x|^{-3},$$
$$\nu/\Gamma = (2\alpha)^{1/2}\ |x|\ |\Pi|/\Gamma = 1 - \alpha x^2. \qquad (46.33)$$

При $x^3 < \epsilon$ в этих соотношениях следует положить $\alpha = 1$. Подставляя соотношения (46.33) в уравнения (46.29), получим в области $x^3 > \epsilon$:

$$(2x^2 - x_0^2)N - \epsilon\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(|x|N) = 0.$$

При $x^3 < \epsilon$ здесь следует положить $\alpha = 1$. Для функции $\Psi(x) = N(x)$ это уравнение является уравнением Шредингера с "потенциальной энергией" U:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U\right)\Psi = E\Psi, \quad U = (2/\alpha)^{1/2}(2x^2 - x_0^2)/|x|\epsilon, \qquad (46.34)$$

и собственным значением "энергии" $E = 0$. По физическому смыслу задачи $\Psi \geqslant 0$, и поэтому нас интересует решение (46.34), не содержащее узлов, т.е. соответствующее "основному"состоянию. Величина x_0, входящая в выражение для "потенциала", и должна определяться из условия равенства нулю энергии основного состояния. Точно эта задача не решается, однако приближенно ее можно решить, используя вариационный принцип для уравнения Шредингера. В результате

$$x_0 \approx \epsilon^{2/3}\ln(\epsilon^{1/3}/\delta), \quad \delta \approx \epsilon^{1/3}, \qquad (46.35)$$

где δ – характерный размер "пробных функций". При $x \gg x_0$ уравнение (46.35) переходит в уравнение для функций Эйри и

$$N(x) \approx x^{-5/4}\exp[-2x^{3/2}/3\sqrt{\epsilon}] \to 1/|x| \text{ при } x^3 < \epsilon. \qquad (46.36)$$

Необходимо отметить, что эта асимптотика справедлива, если x больше чем характерный угол рассеяния Δ: при $x < \Delta$ нарушается исходное дифференциальное приближение и функция $N(x)$ выходит на плато. Таким образом, значение функции $N(x)$ становится вдвое меньше, чем ее максимальное значение при изменении угла θ от $\pi/2$ на величину порядка Δ, однако половина энергии пакета сосредоточена в области углов $|\theta - \pi/2| \approx \delta \approx \epsilon^{1/3}$, которую естественно считать характерной шириной пакета. Использованное нами дифференциальное приближение справедливо, если $\epsilon > \Delta^3$, что дает $\gamma_{el} > \Delta\gamma$. При выполнении обратного неравенства справедливы вычисления, проведенные в начале этого параграфа и в соответствии с (46.18), (46.14):

$$\Delta(\theta) \approx (\gamma_{el}\Delta/\gamma). \tag{46.37}$$

Здесь, как и всюду в этом пункте, γ_{el} определяется выражением (46.28) и отличается от γ_{el} в (46.16), определенной по (46.13), множителем порядка Δ.

Большая интенсивность рассеяния $\gamma_{el}\Delta^2 \gg \gamma$. В этом случае уравнения для перенормировки затухания и накачки (46.30) имеют решение, в котором $\Gamma(\theta) \gg \Pi(\theta)$. Отсюда

$$\Gamma(\theta) = \gamma_{el} + \gamma + |\Pi(\theta)|^2/2\gamma_{el}, \quad \nu(\theta) = \Gamma(\theta) - |\Pi(\theta)|^2/2\Gamma(\theta),$$

$$[4/\sin^2\theta + \Delta(\theta)]\Pi(\theta) = 2P(\theta)/\Delta^2, \qquad \nu(\theta) = \gamma + \gamma_{el}. \tag{46.38}$$

Из последнего уравнения следует, что $\Pi \approx P/\Delta^2$. В частности, при $P(\theta) = P\sin^2\theta$ $\Pi(\theta) = 2P(\theta)/3\Delta^2$ и уравнение (46.38) принимает вид

$$(\gamma - 2|P|^2\sin^4\theta/3\Delta^2\gamma_{el})N(\theta) = ½\,\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta)N(\theta). \tag{46.39}$$

Левая часть этого уравнения порядка γN, и поэтому с точностью до членов порядка $(\gamma/\gamma_{el}\Delta^2)$ $\Delta(\theta)N(\theta) = 0$ и распределение $N(\theta)$ является изотропным: $N(\theta) = N/4\pi$. Этот вывод, разумеется, не зависит от конкретного вида зависимости $P(\theta)$. Интегрируя (46.39) по телесному углу, получим

$$(45/16)\ \gamma\gamma_{el}\Delta^2 = |P|^2. \tag{46.40}$$

Отсюда и из (46.38), (46.36) и (46.3) можно найти угловую зависимость аномального коррелятора

$$\Sigma(\theta) = (N/4\pi)(5\gamma/4\gamma_{el}\Delta^2)^{1/2}\sin^2\theta. \tag{46.41}$$

Конкретный вид зависимости $\Sigma(\theta)$ возник из решения уравнения (46.38), в котором $P(\theta) \sim \sin^2\theta$, вывод же о степени разрешения фазовых корреляций является общим:

$$\Sigma(\theta)/N \approx (\gamma/\gamma_{el}\Delta^2)^{1/2} < 1. \tag{46.42}$$

§ 47. Порог параметрического возбуждения в неоднородной среде

На качественном уровне мы уже обсуждали во введении к настоящей главе вопрос о влиянии двухмагнонного рассеяния на порог параметрического возбуждения. Здесь же мы получим количественные результаты для наиболее интересных предельных случаев.

47.1. Большая интенсивность рассеяния $\gamma_{el} \gg \gamma$. Для определения порога необходимо прежде всего решить уравнение (46.5), связывающее перенормированную накачку с неперенормированной. Для определенности будем считать справедливой модель (46.10): $P(\Omega) = P(\theta)\exp(2i\varphi)$, ...

Рассеяние на точечных дефектах в случае вариации обменной константы. В этом случае уравнение (46.5) после интегрирования по φ приобретает вид

$$\Pi(x) = P(x) + ¾(1 - x^2)\int_0^1 (1 - x'^2)\Pi(x')\,dx' =$$

$$= 5P(x)/3 = 5hV(1 - x^2)/3. \tag{47.1}$$

Далее, для определения порога необходимо вычислить $\Gamma(\Omega)$. В соответствии с (46.4), (44.5), (47.1) и (46.7) имеем

$$\Gamma(\Omega) = 4\pi^2 g^2 k^2/3v \equiv \gamma_{el},$$
$$h_{th} V = (g\gamma\gamma_{el}/8)^{1/2}. \tag{47.2}$$

Рассеяние на точечных дефектах при вариации поля анизотропии и рассеяние в поликристаллах при $kl < 1$, когда $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = g$ (см. формулы (44.7) и (44.12)). В этих случаях соотношения (46.4) – (46.6) дают

$$\Gamma(x) = 4\pi^2 g^2 k^2/v \equiv \gamma_{el}, \quad \Pi(x) = P(x) = hV(1 - x^2).$$

Подставляя эти формулы в (46.7), получаем результат, близкий к (47.2):

$$h_{th} V = (15\,\gamma\gamma_{el}/\,8)^{1/2}. \tag{47.3}$$

47.2. Случай большой интенсивности рассеяния на плавных неоднородностях $\gamma_{el}\Delta^2 \gg \gamma$. Выражение для порога параметрического возбуждения следует из формулы (46.40), в которой следует положить $P = h_{th} V$:

$$(h_{th} V)^2 = 45\gamma\gamma_{el}\Delta^2/16. \tag{47.4}$$

Здесь γ_{el} и Δ^2 определяются из соотношений (46.28), в которых $g(\Omega, \Omega')$ следует взять из (44.12). При этом для γ_{el} в (47.4) получается выражение (44.21), а

$$\Delta^2 \approx 7{,}6(kl)^{-2}. \tag{47.5}$$

Как видно из сравнения формул (47.4) и (47.2), в выражение для порога при малоугловом рассеянии входит дополнительный малый параметр $\Delta \approx (kl)^{-1}$, имеющий смысл характерного угла рассеяния. Эти формулы позволяют определить зависимость порогового поля h_{th} в поликристаллах от размера кристаллитов l и длины волны $2\pi/k$. При $kl < 1$ из (47.2) и (44.20) следует

$$h_{th} V \approx \omega_a(\gamma_{\boldsymbol{k}}/\omega_{ex})^{1/2}(l/a)(kl)^{1/2}. \tag{47.6}$$

При $kl > 1$ из (47.4), (47.5) и (44.21) получим

$$h_{th} V \approx \omega_a(\gamma_{\boldsymbol{k}}/\omega_{ex})^{1/2}(l/a)(kl)^{-3/2}. \tag{47.7}$$

Как и следовало ожидать, пороговое поле h_{th} максимально, когда длина волны порядка размеров кристаллитов.

47.3. Малая интенсивность рассеяния $\gamma_{el} \ll \gamma$. С точки зрения эксперимента наибольший интерес здесь представляет аксиально-симметричный случай, когда $V(\Omega)$ определяется формулой (46.10), а $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \text{const}$. Как видно из (46.17), в этом случае не происходит перенормировки накачки: $\Pi(x) = hV(x)$ и пороговую амплитуду h_{th} можно определить из соотношения

$$(h_{th} V_0)^2 = \Gamma_0^2 - \nu_0^2. \tag{47.8}$$

Величину $\nu_0 = \nu(x)$ при $x = 0$ мы вычислили раньше (см. формулу (46.15)), перенормировка затухания задается формулой (46.17), в которой $\nu(x)$ следует взять из (46.12):

$$\Gamma = \gamma + \gamma\gamma_{el}\int_0^1 [\nu_0^2 + \gamma^2(2x^2 - x^4)]^{-1/2} dx,$$
$$\nu_0 = \gamma\gamma_{el}/\sqrt{2}. \tag{47.9}$$

Приближенное вычисление этого интеграла при $\gamma_{el} \ll \gamma$ дает

$$\Gamma = \gamma + (\gamma_{el}/2\sqrt{2}) \ln(1{,}14\gamma/\gamma_{el}). \tag{47.10}$$

Подставляя выражения для Γ и ν_0 в (47.8), получаем

$$h_{th} V = \gamma + (\gamma_{el}/2\sqrt{2}) \ln(0{,}42\gamma/\gamma_{el}). \tag{47.11}$$

На первый взгляд кажется удивительным, что увеличение порогового поля h_{th} оказалось даже большим, чем это следует из простой (и неверной) формулы (43.3), в которой учитывается только перенормировка затухания $\gamma \to \gamma + \gamma_{el}$ и не учитывается нарушение фазовых корреляций, приводящее к слагаемому ν_0 в (47.8). Дело в том, что накачка почти полностью компенсирует затухание параметрических волн, в результате усиливается процесс двухмагнонного рассеяния и полное затухание параметрических волн Γ, как это видно из (47.10), оказывается больше, чем $\gamma + \gamma_{el}$.

47.4. Малая интенсивность рассеяния на плавных неоднородностях: $\gamma\Delta^3 < \gamma_{el}\Delta^2 < \gamma$. Пороговая амплитуда h_{th} в этом случае определяется из формул (46.3) и $P(x_0) = \gamma$. По порядку величины

$$h_{th} V_0 - \gamma = \gamma(\gamma_{el}\Delta^2/\gamma)^{3/2} \ln(\gamma_{el}/\Delta\gamma). \tag{47.12}$$

На верхнем пределе применимости при $\gamma_{el}\Delta^2 \approx \gamma$ пороговсе поле совпадает с тем, которое дает формула (47.4), полученная при $\gamma_{el}\Delta^2 > \gamma$. На нижнем пределе при $\gamma_{el} \approx \gamma$ $h_{th} V_0 \approx \gamma + \gamma\Delta^2$. При $\gamma_{el} < \gamma\Delta$ ширина пакета (46.37) меньше чем Δ и диффузионное приближение неприменимо. Вычисления, аналогичные тем, которые мы провели в п. 47.3, и учитывающие перенормировку накачки, дают

$$h_{th} V - \gamma \approx \gamma_{el}\Delta \ln(\gamma\Delta/\gamma_{el}). \tag{47.13}$$

§ 48. Запороговое поведение параметрически возбужденных волн

При изучении поведения параметрически возбужденных волн наибольший интерес представляет случай большой интенсивности рассеяния, когда можно ожидать наиболее сильного влияния двухмагнонного рассеяния. Вычисления в этом случае упрощаются из-за того, что распределение $N(\Omega)$ является изотропным: $N(\Omega) = N/4\pi$, и для $P(x)$ из (45.14) и (46.3) следует простая формула

$$P(x) = hV(x) - i(N/\gamma_{el}) \int_0^1 S(x, x')\Pi(x')\, dx',$$
$$x = \cos\theta. \tag{48.1}$$

Для определения зависимости $N(h)$ необходимо совместно решить уравнения (48.1) и (46.5), выразив $P(x)$ и $\Pi(x)$ через hV и N, и подставить результат в уравнение баланса (46.2). Для кубических ФМ хорошей модельной зависимостью $S(x, x')$ является формула

$$S(x, x') = S(1 - x^2)(1 - x'^2). \tag{48.2}$$

Учитывая, что $V(x) \sim 1 - x^2$, получаем решение уравнения (48.1):

$$P(x) = P(1 - x^2),$$
$$P = hV - (iSN/\gamma_{el}) \int_0^1 (1 - x'^2)\Pi(x')\, dx' \tag{48.3}$$

Если $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \mathrm{const}$ и $P(x) = \Pi(x)$, то

$$\Pi(x) = P(x) = P(1 - x^2), \qquad P = hV[1 + i8SN/15\,\gamma_{\mathrm{el}}]^{-1}. \tag{48.4}$$

Подставляя это выражение в (46.2), получаем

$$SN = (15\gamma_{\mathrm{el}}/8)[(h/h_{\mathrm{th}})^2 - 1]^{1/2}, \tag{48.5}$$

где h_{th} определяется выражением (47.3).

Рассмотрим еще один случай – рассеяние на точечных дефектах при вариации обменной константы, когда $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ пропорционально $\cos(\widehat{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'})$. Тогда

$$P(x) = 3\Pi(x)/5 = P(1 - x^2), \qquad P = hV[1 + i8SN/9\gamma_{\mathrm{el}}]^{-1}. \tag{48.6}$$

Отсюда и из уравнения баланса (46.2) следует выражение, близкое к (48.5):

$$SN = (9\gamma_{\mathrm{el}}/8)[(h/h_{\mathrm{th}})^2 - 1]^{1/2}. \tag{48.7}$$

При интенсивном малоугловом рассеянии ($\gamma_{\mathrm{el}}\Delta^2 > \gamma$), когда связь между Π и P задается выражением (46.38), из (48.3) и (46.40) можно получить

$$P(1 + i\,16SN/45\,\gamma_{\mathrm{el}}\Delta^2) = hV, \qquad SN = (45\,\gamma_{\mathrm{el}}\Delta^2/16)[(h/h_{\mathrm{th}})^2 - 1]^{1/2}. \tag{48.8}$$

Во всех рассмотренных случаях уровень возбуждения ПВ при сильном рассеянии на неоднородностях оказывает (при той же надкритичности) в $\gamma_{\mathrm{el}}\Delta^2/\gamma$ раз больше (Δ – характерный угол рассеяния), чем в однородной среде. Причиной этого является частичное разрушение фазовых корреляций, приводящее к ослаблению фазового механизма ограничения. Конкретный же вид зависимости N от надкритичности в формулах (48.5), (48.7) и (48.8) не является универсальным, он связан с конкретным видом зависимости $S(x, x')$ в (48.2), по случайным обстоятельствам удовлетворяющей соотношению $S(x, x') \sim V(x)V(x')$. В других случаях (см., например, работу В.С. Львова, М.И. Широкова [155]) зависимость N от h является более сложной, она повторяет эти зависимости только качественно.

Для вычисления обобщенной восприимчивости воспользуемся формулами (21.1), (21.2), в которых выразим $\Sigma(\Omega)$ через $N(\Omega)$ с помощью (46.3):

$$\chi = -(2iN/h\Gamma)\int_0^1 V(x)\Pi^*(x)\,dx. \tag{48.9}$$

Во всех рассмотренных нами случаях $\Pi(x) \sim (1 - x^2)$ и $V(x) \sim (1 - x^2)$. Используя соответствущие выражения для N и Π, получим для трех рассмотренных случаев одно и то же выражение для χ:

$$\chi = -i\,16\,NV\Pi^*/15\,h\Gamma = (2V^2/S)(1 - p^{-1} + ip^{-1/2}(1 - p^{-1})^{1/2}), \qquad p = (h/h_{\mathrm{th}})^2. \tag{48.10}$$

Этот результат совпадает с известным выражением (21.6) для χ, полученным в S-теории для однородной среды. Это означает, что рассеяние волн на неоднородностях не изменяет существенно зависимость нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' от величины h/h_{th}. Само же значение порогового поля в неоднородной среде, разумеется, больше чем в однородной. Не следует придавать большого значения буквальному совпадению формул для χ. В более сложных ситуациях зависимость $\chi(p)$ похожа на (21.6) только качественно.

§ 49. Коллективные колебания в среде со случайными неоднородностями

Здесь мы изучим влияние неоднородностей на коллективные колебания системы ПВ. Ранее, в гл. 5, мы рассмотрели спектр коллективных колебаний $\Omega(\kappa)$ одночастотного состояния в приближении S-теории. Для кубических ФМ при $\kappa = 0$

$$\Omega_m = -i\gamma \pm [4S_m(2T_m + S_m)N^2 - \gamma^2]^{1/2}. \tag{49.1}$$

Можно отметить две особенности этого спектра. Во-первых, при некотором соотношении между коэффициентами гамильтониана взаимодействия S_m и T_m (именно, при $S_m(2T_m + S_m) > 0$) КК моды с номером m устойчивы, причем их декремент затухания равен декременту затухания ПСВ γ, определяемому по порогу параметрического возбуждения: $h_{\text{th}} V = \gamma$. Во-вторых, при $S_m(2T_m + S_m) < 0$ возникает неустойчивость КК (автоколебания ПВ) при $h > h_{\text{th}}$, т.е. сразу в точке порога параметрического возбуждения. Как покажут наши результаты по вычислению спектра Ω_m в неоднородной среде, рассеяние ПСВ на неоднородностях существенно изменяет поведение КК, прежде всего увеличивая их устойчивость. Так, даже слабое рассеяние на неоднородностях (т.е. при $\gamma_{\text{el}} \ll \gamma$) подавляет автоколебания в области надкритичностей $h < h_{\text{cr}}$,

$$\begin{aligned} &h_{\text{cr}}/h_{\text{th}} - 1 = \tfrac{1}{4}(\gamma_{\text{el}}/2\gamma)^{1/2} \, |S_0/(2T_0 + S_0)|, \quad m = 0, \\ &h_{\text{cr}}/h_{\text{th}} - 1 \lesssim \gamma_{\text{el}}/\gamma, \quad m \neq 0. \end{aligned} \tag{49.2}$$

При сильном рассеянии ($\gamma_{\text{el}} \gg \gamma$) мы покажем, что автоколебания вообще не могут возникнуть, а затухание КК оказывается порядка γ_{el}, что превышает величину $\sqrt{\gamma\gamma_{\text{el}}}$, определяющую порог параметрического возбуждения волн.

49.1. Основные уравнения. Диаграммная техника, приспособленная для вычисления спектра КК, была развита в гл. 7. В общие уравнения (38.4) необходимо только подставить конкретные выражения для $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Pi}$, $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ – отклонений массовых операторов от их значений в основном состоянии. Как и всюду, в этой главе мы будем учитывать самосогласованные диаграммы, линейные по вершине $T(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_4)$ взаимодействия волн, и гауссовы диаграммы без пересечения линий (линейные по η_2) для описания рассеяния на дефектах. А именно, учтем подчеркнутые диаграммы в (45.4). Тогда

$$\tilde{\Sigma}(q, q') = 2\int T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}_2)\, \tilde{n}^*(q_1, q_2)\, \delta(q + q_1 - q' - q_2)\, dq_1\, dq_2 +$$

$$+ \eta_2 \int g(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}_1)\, g(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k})\, \tilde{G}(\boldsymbol{k}_1, \omega, \boldsymbol{k}_2, \omega')\, \delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}_2)\, d\boldsymbol{k}_1\, d\boldsymbol{k}_2,$$

$$\tilde{\Pi}(q, q') = 2\int T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}_2)\, \tilde{\sigma}(q_1, q_2)\, \delta(q + q_1 - q' - q_2)\, dq_1\, dq_2 +$$

$$+\eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1) g^*(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}') \tilde{L}(\boldsymbol{k}_1, \omega, \boldsymbol{k}_2, \omega') \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2) d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2,$$

$$\tilde{\Phi}(q, q') =$$

$$= \eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1) g^*(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}_2) \tilde{n}(\boldsymbol{k}_1, \omega, \boldsymbol{k}_2, \omega') \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}_2) d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2,$$

$$\tilde{\Psi}(q, q') =$$

$$= \eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1) g^*(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}') \tilde{\sigma}(\boldsymbol{k}_1, \omega, \boldsymbol{k}_2, \omega') \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2) d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2. \tag{49.3}$$

Кроме того, мы ограничимся изучением колебаний не очень малой частоты, для которых многочастотный характер параметрической турбулентности несуществен. Это ограничение позволяет считать распределение ПВ по частотам сингулярным и представить в соответствии с (38.3) величины $\tilde{n}(q,q')$, $\tilde{\sigma}(q,q')$ в виде двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \tilde{n}(q, q') &= \tilde{n}(\boldsymbol{k}, q')\,\delta(\omega-\omega_p/2) + \tilde{n}(q, \boldsymbol{k}')\,\delta(\omega'-\omega_p/2), \\ \tilde{\sigma}(q, q') &= \tilde{\sigma}(\boldsymbol{k}, q')\,\delta(\omega-\omega_p/2) + \tilde{\sigma}(q, \boldsymbol{k}')\,\delta(\omega'-\omega_p/2), \end{aligned} \tag{49.4}$$

причем уравнения (38.4) для слагаемых первого и второго типов отщепляются друг от друга.

При изучении качественной картины явлений можно ограничиться исследованием аксиально-симметричного случая и сделать обычные модельные предположения:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\boldsymbol{k}} = \gamma,\ g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = g,\ V_{\boldsymbol{k}} = Vf(\cos\theta)\exp(2i\varphi), \\ &S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = S(\varphi-\varphi') f(\cos\theta) f(\cos\theta'), \\ &T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = T(\varphi-\varphi') f(\cos\theta) f(\cos\theta'), \\ &\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = 1. \end{aligned} \tag{49.5}$$

Это позволяет редуцировать исходные интегральные уравнения до системы шести алгебраических уравнений на интегральные величины

$$\begin{aligned} X_m &= \frac{1}{2N} \int k^2\, dk\, d\cos\theta\, d\varphi \exp(-im\varphi)(\tilde{n}_{\boldsymbol{k}} + \tilde{n}_{\boldsymbol{k}}^+) \equiv \\ &\equiv \langle\!\langle (\tilde{n}_{\boldsymbol{k}} + \tilde{n}_{\boldsymbol{k}}^+)/2N \rangle\!\rangle_m, \\ Y_m &= \langle\!\langle (\tilde{n}_{\boldsymbol{k}} - \tilde{n}_{\boldsymbol{k}}^+)/2iN \rangle\!\rangle_m, \\ U_m &= \langle\!\langle (\Pi_{\boldsymbol{k}}^* \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}} - \Pi_{\boldsymbol{k}} \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^+)/2i\Gamma N \rangle\!\rangle_m, \\ Z_m &= \langle\!\langle (\Pi_{\boldsymbol{k}}^* \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}} + \Pi_{\boldsymbol{k}} \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^+)/2\Gamma N \rangle\!\rangle_m, \\ F_m &= \langle\!\langle (\tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}} - \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^+)\, v/2\pi i k^2 \rangle\!\rangle_m, \\ Q_m &= \langle\!\langle (\tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}} + \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^+)\, v/2\pi k^2 \rangle\!\rangle_m, \end{aligned} \tag{49.6}$$

для каждого номера аксиальной гармоники $m = 0$, $m = \pm 1$ и т.д.

$$\begin{aligned} X_m = \mu^{-1}(\nu+\mu)^{-2}\ &\{[(\Gamma - i\Omega)(2\nu+\mu-\nu^3/\Gamma^2) + \\ &+ |\Pi|^2 (2\nu+\mu)/\Gamma]\,\gamma_{\rm el}\,\Delta(m)\,F_m + \\ &+ [(2\Gamma - i\Omega)(2\nu+\mu) + (\mu-\nu)\nu^2/\Gamma]\,2S_m N Z_m\} + \end{aligned}$$

$$+ [\Gamma(\Gamma - i\Omega) + \nu\mu + |\Pi|^2]\, \nu^2 \Delta(m) X_m / \mu(\nu+\mu)\Gamma^2,$$

$$\begin{aligned}
Y_m &= \mu^{-1}(\nu+\mu)^{-2}\{[(\Gamma - i\Omega)(2\nu + \mu - \nu^3/\Gamma^2) - \\
&- |\Pi|^2 (2\nu+\mu)/\Gamma]\, [\gamma_{\text{el}}\Delta(m) Q_m + 4T_m N X_m] - \\
&- [\nu^2(\nu+\mu)/\Gamma - i\Omega(2\nu+\mu)]\, 2S_m N U_m\} + \\
&+ [\Gamma(\Gamma - i\Omega) + \nu\mu - |\Pi|^2]\, \nu^2\Delta(m) Y_m/\mu(\nu+\mu)\Gamma^2, \\
U_m &= (\Gamma\mu)^{-1}(\nu+\mu)^{-2} \times \\
&\times \{-|\Pi|^2 [i\Omega(2\nu+\mu)/\Gamma + \nu^2(\mu-\nu)/\Gamma]\, \gamma_{\text{el}}\Delta(m) F_m - \\
&- [(\Gamma - i\Omega)(2\nu+\mu-\nu^3/\Gamma^2) + |\Pi|^2(2\nu+\mu)/\Gamma]\, 2S_m N\Gamma Z_m - \\
&- |\Pi|^2 (2\Gamma - i\Omega)\nu^2\Delta(m) X_m/\mu(\nu+\mu)\Gamma^3, \\
Z_m &= (\Gamma\mu)^{-1}(\nu+\mu)^{-2}\{|\Pi|^2 [i(2\nu+\mu)\Omega/\Gamma + \\
&+ (\mu-\nu)\nu^2/\Gamma]\, [\gamma_{\text{el}}\Delta(m) Q_m + 4T_m N X_m] + \\
&+ [(\Gamma - i\Omega)(2\nu+\mu-\nu^3/\Gamma^2) - |\Pi|^2(2\nu+\mu)/\Gamma]\, 2S_m N\Gamma U_m\} + \\
&+ i\Omega|\Pi|^2\nu^2\Delta(m) Y_m/\Gamma^3\mu(\nu+\mu), \\
F_m &= -[\nu\mu(\nu+\mu)]^{-1}\{[\Gamma(\Gamma - i\Omega) - \nu\mu + |\Pi|^2]\,\gamma_{\text{el}}\Delta(m) F_m + \\
&+ (2\Gamma - i\Omega)\, 2\Gamma S_m N Z_m\}, \\
Q_m &= -[\nu\mu(\nu+\mu)]^{-1}\{[\Gamma(\Gamma - i\Omega) - \nu\mu - |\Pi|^2]\,\gamma_{\text{el}}\Delta(m) Q_m + \\
&+ 4T_m N X_m + i\Omega\, 2S_m N\Gamma U_m\},
\end{aligned} \tag{49.7}$$

где $\Delta(0) = 1$, $\Delta(m) = 0$ при $m \neq 0$, величина ν определяется рассеянием на неоднородностях и по порядку величины

$$\nu^2 = \Gamma^2 - |\Pi|^2 \approx \gamma_{\text{el}}(\gamma_{\text{el}} + 2\gamma), \quad \mu^2 = \nu^2 - 2i\Gamma\Omega - \Omega^2.$$

Система уравнений (49.7) имеет различный вид для изотропных ($m = 0$) и анизотропных ($m \neq 0$) типов КК. Рассеяние ПВ на неоднородностях приводит к изотропизации функции распределения n_k, и поэтому оно оказывает наибольшее влияние на анизотропные моды, внося в них дополнительное затухание.

49.2. Высокочастотные коллективные колебания при малой интенсивности рассеяния ($\gamma_{\text{el}} \ll \gamma$). В этом случае высокочастотные ветви коллективных колебаний изменяются мало, и $\Omega_m^{\pm}$ будет определяться выражением (49.1) с точностью до γ_{el}. При малых надкритичностях $\Omega_m^{\pm}$ в соответствии с (49.1) равно

$$\Omega_m^+ = -2iS_m(2T_m + S_m)N^2/\gamma, \quad \Omega_m^- = -2i\gamma. \tag{49.8}$$

Влияние неоднородностей на анизотропные моды становится существенным при $(h - h_{\text{th}})\gamma \approx \gamma_{\text{el}} h_{\text{th}}$, когда Ω_m^+ сравнивается с γ_{el}. При меньшей надкритичности из системы (49.7) вместо (49.8) можно получить $\Omega_m^+ = -i\gamma_{\text{el}}$, $\Omega_m^- = -2i\gamma_{\text{el}}$. При промежуточной надкритичности можно предложить простую интерполяционную формулу ($m \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\Omega_m^{\pm} &= -i\gamma \pm (-\gamma^2 + \nu^2 + \Delta_m^2)^{1/2}, \quad \nu^2 = 2\gamma\gamma_{\text{el}}, \\
\Delta_m^2 &= 4S_m(2T_m + S_m)N^2.
\end{aligned} \tag{49.9}$$

Видно, что при $S_m(2T_m + S_m) < 0$ возникает неустойчивость КК, причем неоднородности подавляют эту неустойчивость в области (49.2). В высокочастотных движениях ($\Omega_m \gg \gamma_{el}$) основное участие принимают корреляторы $\tilde{n}_k$, $\tilde{\sigma}_k$, причем собственные векторы этих мод с точностью до $\gamma_{el}/\gamma \ll 1$ совпадают с вычисленными по S-теории. В области низких частот (т.е. при $\Omega_m \approx \gamma_{el}$) в колебаниях принимают участие также и функции Грина $\tilde{G}$, $\tilde{L}$. В частности, их демпфирующее влияние приводит к упомянутому выше подавлению неустойчивости.

Для изотропной моды ($m = 0$) из уравнений (49.7) при $\gamma_{el} \ll \gamma$ можно получить выражение, обобщающее формулу (49.1):

$$\Omega_0 = -i\gamma \pm (-\gamma^2 + \nu\gamma + \Delta_0^2)^{1/2}. \tag{49.10}$$

Здесь ν^2 и Δ_0^2 определяются по (49.9). Из (4.10) видно, что при $S_0(2T_0 + S_0) < 0$ возникает неустойчивость коллективных колебаний с порогом (49.2). При сильном рассеянии на неоднородностях ($\gamma_{el} \gg \gamma$) картина КК заметно перестраивается. Изучая высокочастотные моды ($\Omega \gtrsim \gamma_{el}$), можно воспользоваться неравенствами $\mu^2 \gg \nu^2 \gg |\Pi|^2$ и упростить уравнения (49.7) до вида

$$(\nu + \mu) U_m + 2S_m N Z_m = 0, \quad (\nu + \mu) Z_m - 2S_m N U_m = 0. \tag{49.11}$$

Отсюда для частоты $\Omega_m^{\pm}$ получаем

$$\Omega_m^{\pm} = -2i\gamma_{el} \pm 2S_m N. \tag{49.12}$$

Как видно из (49.11), в колебаниях с такими частотами участвуют только аномальные корреляторы $\tilde{\sigma}_k$, $\tilde{\sigma}_k^+$; величины n_k не колеблются.

49.3. Низкочастотные коллективные колебания. Рассмотрим типы колебаний, частоты которых в приближении S-теории равны нулю. Здесь мы покажем, что учет рассеяния ПВ на неоднородностях приводит к конечности частоты колебаний этих мод. Для низкочастотных мод характерна большая амплитуда колебаний величины $\tilde{n}_m + \tilde{n}_m^+$ при относительно малой амплитуде $\Pi^* \tilde{\sigma}_m + \Pi \tilde{\sigma}_m^+$. В приближении (49.5) условие $\Pi^* \tilde{\sigma}_m + \Pi \tilde{\sigma}_m^+$ дает при $m \neq 0$ в различных предельных случаях следующие дисперсионные уравнения:

$$\mu(\tilde{n}_m + \tilde{n}_m^+) = 0 \tag{49.13}$$

при $p - 1 < \gamma_{el}/\gamma$, $\gamma_{el} \ll \gamma$,

$$\mu^2 + 2\nu\mu + \nu^2 4S_m/(2T_m + S_m) - 3\nu^2 = 0 \tag{49.14}$$

при $p - 1 > \gamma_{el}/\gamma$, $\gamma_{el} \ll \gamma$,

$$\mu(\tilde{n}_m + \tilde{n}_m^+) = 0 \tag{49.15}$$

при $\gamma_{el} \gg \gamma$, $p = (h/h_{th})^2$. Соответствующие им частоты КК приведены ниже. Для изотропных колебаний ($m = 0$) при слабом рассеянии ($\gamma_{el} \ll \gamma$) можно получить

$$\Omega_0 = -8iV(p^{1/2} - 1), \quad (S_0 N)^2 < \nu\gamma, \tag{49.16}$$

$$\Omega_0 = -4i\gamma_{el}(K_0^{1/2} - K_0), \quad (S_0 N)^2 > \gamma\nu. \tag{49.17}$$

Здесь ν определяется выражением (49.9). Для изотропных КК при сильном рассеянии

$$K_m = 2T_m/(2T_m + S_m). \tag{49.18}$$

Для анизотропных КК при слабом рассеянии

$$\Omega_m = -i\gamma_{el} \text{ при } S_0N < \nu$$

и

$$\Omega_m = -4i\gamma_{el}(K_m^{1/2} - K_m) \text{ при } S_0N > \nu.$$

Здесь K_m задается по (49.17). В области сильного рассеяния $\Omega_m = -i\gamma_{el}$.

Отметим, что для того, чтобы эти КК были неустойчивы, необходимо выполнение двух неравенств:

$$S_m(2T_m + S_m) < 0,$$
$$h/h_{th} - 1 > \gamma_{el}/\gamma, \tag{49.19}$$

что совпадает с условием неустойчивости высокочастотной моды (49.2). Таким образом, за время γ_{el}^{-1} происходит изотропизация распределения n_k (если, конечно, выполнены условия устойчивости (49.19)).

При $m = 0$, во-первых, выключается механизм изотропизации распределения n_k и, во-вторых, в коллективных колебаниях, помимо $\tilde{n}_0 + \tilde{n}_0^+$, участвуют функции Грина $\tilde{G}_0$. Вычисления с учетом этих обстоятельств приводят к частотам изотропных колебаний, указанным в формулах (49.16), (49.17). Область неустойчивости этой моды

$$S_0(2T_0 + S_0) < 0,$$
$$h/h_{th} - 1 > (\gamma_{el}/\gamma)^{1/2} \tag{49.20}$$

снова совпадает с областью неустойчивости соответствующей высокочастотной моды. Совпадение первого из неравенств (49.20) как условия неустойчивости низкочастотных колебаний в случайно-неоднородных ФМ с соответствующим условием для однородных ФМ обусловлено одинаковым характером колебаний в соответствующих областях параметров.

Задачи

Задача 9.1. Получить и проанализировать уравнение для инкремента параметрической неустойчивости в среде со случайными неоднородностями.

Указание. Для описания нестационарного процесса нарастания параметрических волн использовать систему уравнений Дайсона – Уайльда (38.2) для величины (38.1) и убедиться, что в этой задаче уравнения для $n(q, q')$, $\sigma(q, q')$, $G(q, q')$ и $L(q, q')$ расцепляются.

Ответ. В простом случае, когда $g_{kk'}$ = const и $\Psi_{el} = 0$, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\gamma_{el}\int_0^1 \frac{\Gamma_x^2 - i\Gamma_x\Omega - \Omega^2/4}{\nu_x^2 - i\Gamma_x\Omega - \Omega^2/4}\,dx = 1.$$

При $\gamma_{el} \gg \gamma$ отсюда следует

$$\operatorname{Im}\Omega = -\gamma(1 + 2p) + [\gamma^2(1 + 2p)^2 + 4\gamma\gamma_{el}(p - 1)]^{1/2}.$$

Здесь $p = h^2/h_{th}^2$, $n(t) \propto \exp(-i\Omega t)$.