

КИНЕТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИЛЬНО НЕРАВНОВЕСНОЙ СИСТЕМЫ СЦИНОВЫХ ВОЛН

§ 56. Линейная теория кинетической неустойчивости

До сих пор при исследовании параметрического возбуждения СВ основное внимание мы уделяли изучению свойств узкого пакета ПСВ с частотами в области параметрической неустойчивости. При этом обычно предполагалось, что остальные СВ находятся в состоянии, близком к термодинамическому равновесию (см. гл. 8). Однако с ростом надкритичности возникает значительное искажение равновесного распределения СВ с частотами вдали от параметрического резонанса, вызванное влиянием ПСВ. Таким образом, при значительных надкритичностях должен возникнуть ряд новых эффектов, экспериментальное и теоретическое изучение которых только начинается. Среди явлений такого рода особый интерес представляют неустойчивости в сильно неравновесной системе СВ и вызванные ими кардинальные перестройки спектра СВ.

56.1. Кинетическая неустойчивость первого порядка. Вне области параметрического резонанса функция распределения СВ n_k удовлетворяет кинетическому уравнению (см. § 39). Если число ПСВ мало, то функция распределения СВ близка к термодинамически равновесной, а величина неравновесных поправок пропорциональна числу ПСВ. Эти поправки были найдены в гл. 8. Линейное приближение для вычисления возмущений функции распределения применимо до тех пор, пока затухание ТСВ можно считать равновесным. Понятно, что с ростом числа ПСВ растет и вклад в затухание ТСВ, обусловленный ими. В ряде случаев этот вклад бывает отрицательным, что приводит к уменьшению затухания СВ и качественной перестройке спектра по отношению к результатам линейного приближения.

Рассмотрим вклад в затухание ТСВ из-за распадов ПСВ:

$$\gamma(k) = \gamma_0(k) - \pi \int |V(k_p k k_1)|^2 n_p(k_p) \delta[\omega(k_p) - \omega(k) - \omega(k_1)] \delta(k_p - k - k_1) dk_p dk_1. \quad (56.1)$$

Здесь $\gamma_0(k)$ — равновесное затухание ТСВ. Видно, что в области k -пространства, в которую попадают продукты распада ПСВ, затухание СВ уменьшается, и при достаточно большом числе ПСВ оно может стать отрицательным. Понятно, что при $\gamma < 0$ число волн нарастает — развивается неустойчивость, которую мы назовем *кинетической*. Для более точного анализа *кинетической неустойчивости* (КН) следует линеаризовать кинетическое уравнение на фоне стационарного распределения, представляющего собой совокупность термодинамически равновесного распределения и пакета ПСВ. В результате оказываются связанными интенсивности пакетов вторичных СВ (ВСВ) с частотами ω_1 и ω_2 . Теория КН, обусловленная трехволновыми процессами, наиболее подробно развита для АФМ, в которых разрешены распады ПСВ на вторичные фононы (ВФ) и вторичные СВ (ВСВ) (В.С. Лутовин, Г.Е. Фалькович, В.Б. Черепанов, [147]). Косвенные проявления этой неустойчивости были обнаружены ранее в FeVO_3 Б.Я. Котюжанским, Л.А. Прозоровой и Л.Е. Свистовым [131].

Для анализа КН выпишем систему линеаризованных КУ для возмущений функций распределения ВСВ δn_k и ВФ δN_k в сферической нормировке:

$$\delta n_k = 2\pi^2 \frac{\theta_N^3 \delta n(\epsilon_n)}{\epsilon_k (\epsilon_k^2 - \epsilon_0^2)^{1/2}}, \quad \delta N_k = 2\pi^2 \frac{\theta_N^3}{\alpha^3 \Omega_k^2} \delta N(\Omega_k'), \quad (56.2)$$

$$(\gamma_k^0 - \Delta\gamma_k) \delta n(\epsilon_k) \delta n(\epsilon_k) = \alpha^{-3} D \delta N(\epsilon_p - \epsilon_N) + r(\omega_k), \quad (56.3)$$

$$(\Gamma_{k'}^0 - \Delta\Gamma_{k'}) \delta N(\epsilon_p - \epsilon_k) = D \frac{(\epsilon_p - \epsilon_k)^2}{\epsilon_k sk} \delta n(\epsilon_k) + R(\omega_p/2 - \omega_k),$$

где

$$\Delta\gamma_k = \pi \zeta \alpha^2 \frac{J_0^2 \epsilon_0^2 \Omega^2 n^p}{\epsilon_p sk_p \epsilon_k sk}, \quad \Delta\Gamma_{k'} = \Delta\gamma_k \frac{\epsilon_k sk}{\alpha^3 \Omega^2},$$

$$\Omega = ck' = \epsilon_p - \epsilon_k, \quad D = \pi \zeta \alpha^2 J_0 \epsilon_0^2 n^p / \epsilon_p sk_p.$$

Здесь γ_k^0 и Γ_k^0 — равновесные затухания магнов и фононов, θ_N — температура Нееля, ω_0 — щель в спектре магнов, S — их скорость (см. (7.5)), c — скорость звука, $\alpha = s/c$, k_p — волновой вектор ПСВ, N_p — их количество, ζ — параметр магнитоупругости, входящий в матричный элемент взаимодействия магнов и фононов (25.6), S — значение спина магнитного иона.

При

$$n^p = n_{cr}^p = \frac{\epsilon_p sk_p}{\pi \alpha^2 \zeta J_0 \epsilon_0^2} \frac{\gamma_k^0 \Gamma_q^0}{\gamma_k^0 \alpha^{-3} + \Gamma_q^0 (\epsilon_p - \epsilon_k)^2 / \epsilon_k sk} \quad (56.4)$$

определитель системы (56.3) обращается в нуль и развивается КН. В FeVO_3 частоты релаксации магнов и фононов одного порядка, $\alpha^{-3} \ll 1$, поэтому

$$n_{cr} \approx \frac{\epsilon_p \epsilon_k sk_p sk \gamma_k^0}{\pi \alpha^2 \zeta J_0 \epsilon_0^2 (\epsilon_p - \epsilon_k)^2}, \quad (56.5)$$

что соответствует обращению в нуль суммарного затухания магнов $(\gamma_k^0 - \Delta\gamma_k)$. Из (56.5) видно, что порог кинетической неустойчивости минимален при меньшем k вторичных магнов, разрешенном законами сохранения. Нетрудно определить, что для распадов ПСВ на магн и фон

$$sk_{\min} = |sk_p - 2(\alpha^2 - 1)^{-1} (\alpha\epsilon_p - \epsilon_k)|.$$

В условиях упомянутого выше эксперимента

$$n_{cr}^p \approx 2 \cdot 10^{-8} \frac{sk_p sk_{\min}}{(\epsilon_p - \epsilon_{k \min})^2}.$$

Множитель $k_p k_{\min} (\epsilon_p - \epsilon_{k \min})^{-2}$ зависит от магнитного поля и изменяется от $(\alpha^2 - 1) 4 \approx 2$ при $H = H_c$ ($k_p = 0$) до 0 при $H = 240$ Э. Если для оценки воспользоваться экспериментальным значением коэффициента нелинейного затухания, то порог кинетической неустойчивости $n_{cr} \approx 2 \cdot 10^{-8}$ достигается уже при $h/h_c - 1 \approx 0,1$:

$$(h_{cr}/h_{th}) - 1 \approx (2\omega_0/\omega_p)^2 \gamma_{01}/\gamma_{0p}. \quad (56.6)$$

По аналогии с суловскими процессами первого порядка (распада ОП на две СВ) кинетическую неустойчивость, обусловленную трехволновыми про-

цессами, мы назовем *кинетической неустойчивостью первого порядка*. Подчеркнем, что в отличие от параметрической неустойчивости в результате развития КН растет лишь число волн, а средняя амплитуда волн в пакете $\langle a_k \rangle$ равна нулю. Следует также отметить, что инкремент КН определяется лишь общим числом неравновесных СВ и не зависит от фазовых соотношений между ними.

56.2. Кинетическая неустойчивость второго порядка [139]. Если ПСВ находятся в нераспадной области спектра, КН первого порядка невозможна. Однако при больших надкритичностях возникает неустойчивость системы ПСВ по отношению к рождению вторичных СВ в результате четырехмагнного процесса: две ПСВ, сливаясь, дают две ВСВ. При этом выполняются законы сохранения энергии и импульса

$$\begin{aligned} \omega(k_p) + \omega(k'_p) &= \omega(k_1) + \omega(k_2), \\ k_p + k'_p &= k_1 + k_2. \end{aligned} \quad (56.7)$$

В нераспадной области спектра эта неустойчивость представляет наибольший интерес, поскольку все остальные мыслимые неустойчивости системы ПСВ связаны с процессами более высоких порядков и поэтому имеют более высокий порог. В столкновительный член кинетического уравнения вносят вклад всевозможные процессы рассеяния СВ, однако нас интересует случай, когда ПСВ находятся в нераспадной области спектра и длинные СВ могут взаимодействовать с параметрическими только в процессах четырехмагнного рассеяния. Во всех остальных процессах числа заполнения квазичастиц изменяются мало и их влияние приводит лишь к линейной релаксации СВ, если число последних не слишком велико. Таким образом, столкновительный член следует записать в виде (см. § 35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(k)}{\partial t} &= -2\gamma_0(k) [n(k) - n_0(k)] + 4\pi \int \{ |T(kk_1, k_2k_3)| \times \\ &\times [n(k)n_1(n_2 + n_3) - n_2n_3n(k) - n_1n_2n_3] + \\ &+ \text{Re } T(kk_1, k_2k_3) T^*(k\bar{k}_2, \bar{k}_1k_3) \times \\ &\times \sigma_1^* [\sigma_2 n(k) - \sigma_2 n_3 + \sigma_3 n(k) - \sigma_3 n_2] \} \times \\ &\times \delta [\omega(k) + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3] \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \\ \sigma_i &= \sigma(k_i), \quad n_i = n(k_i), \quad \omega_i = \omega(k_i), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (56.8)$$

Здесь $\gamma_0(k)$ — частота релаксации СВ за счет всех процессов, кроме (56.7): $\gamma_0(k) = \gamma_k - \gamma_4(k)$, где γ_4 — частота релаксации СВ, обусловленная четырехмагнным рассеянием, γ_k — полная частота релаксации. Уравнение (56.8) отличается от стандартного наличием аномальных корреляторов параметрических волн $\langle a_k a_{-k} \rangle$.

Для вычисления порога и инкремента этой неустойчивости линеаризуем кинетическое уравнение (56.8). Общее решение линеаризованного кинетического уравнения представимо в виде суммы частных решений вида

$$\begin{aligned} n(k) &= n_1(k) + n_2(k), \quad n_i(k) \propto \delta(\omega_k - \omega_i), \quad i = 1, 2, \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_p. \end{aligned}$$

Из (56.8) следует уравнение, похожее на (56.2) :

$$\begin{aligned} & [\nu + \gamma_{0i}(\Omega)] n_i(\Omega) + 2\pi k_i^2 v_i^{-1} \int \{ |T_{i123}|^2 [2n_p(\Omega_1) n_p(\Omega_2) n_i(\Omega) - \\ & - 2n_p(\Omega_1) n_p(\Omega_2) n_i(\Omega_3) - n_p(\Omega_2) n_p(\Omega_3) (n_i(\Omega) + n_j(\Omega_1))] + \\ & + 2\operatorname{Re} T_{i123} T_{i\bar{2}\bar{1}\bar{3}}^* \sigma^*(\Omega_1) \sigma(\Omega_2) [n_i(\Omega) - n_i(\Omega_3)] \} \times \\ & \times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3, \\ & k_i = k_i(\Omega), \quad v_i = v_i(\Omega), \quad \bar{k} = -k. \end{aligned} \quad (56.9)$$

В изотропном случае для n_i, n_j отсюда получается уравнение (56.3), в котором

$$\Delta\gamma_i = B_{ij} = \pi (TN)^2 / k_p v_p. \quad (56.10)$$

Порог неустойчивости достигается при числе ПСВ N_{cr} :

$$\pi (TN_{\text{cr}})^2 / k_p v_p = \gamma_{01} \gamma_{02} / (\gamma_{01} + \gamma_{02}). \quad (56.11)$$

Обычно правая часть минимальна, если одно из затуханий, например γ_{01} , минимально, т.е. при $k_1 \rightarrow 0$. При этом $\gamma_2 \gg \gamma_1$ и

$$\pi (TN_{\text{cr}})^2 / k_p v_p = \gamma_{01} = \gamma_0, \quad (56.12)$$

где γ_0 — минимальное затухание СВ. Определяя число ПСВ из S -теории, получим оценку для пороговой надкритичности, т.е. превышения мощности накачки p_{cr} над порогом параметрической неустойчивости h_{th} , при которой возникает обсуждаемая здесь неустойчивость:

$$p_{\text{cr}} = (h_{\text{cr}}/h_{\text{th}})^2 = \pi^{-1} (S/T)^2 (\gamma_0 k_p v_p / \gamma_p^2). \quad (56.13)$$

Дальнейшее исследование исходных уравнений (56.9) имеет смысл проводить при $\gamma_{01} \ll \gamma_{02}$, когда число вторичных СВ с большим затуханием мало, и поэтому в линеаризованном кинетическом уравнении для $n_1(\Omega)$ им можно пренебречь. Тогда вместо (56.9) получим

$$\begin{aligned} & [\nu + \gamma_{01}(\Omega_1) - 2\pi k_p^2(\Omega_1) v_p^{-1}(\Omega_1) \int |T_{12,34}|^2 n_p(\Omega_3) n_p(\Omega_4) \times \\ & \times \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) d\Omega_2 d\Omega_3 d\Omega_4] n_1(\Omega_1) = \\ & = 4\pi k_p^2(\Omega_1) v_p^{-1}(\Omega_1) \int \{ |T_{12,34}|^2 n_p(\Omega_2) n_p(\Omega_3) + \\ & + \operatorname{Re} T_{12,34} T_{1\bar{3},\bar{2}\bar{4}}^* \sigma^*(\Omega_2) \sigma(\Omega_3) \} [n_1(\Omega_3) - n_1(\Omega_1)] \times \\ & \times \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) d\Omega_2 d\Omega_3 d\Omega_4. \end{aligned} \quad (56.14)$$

Обратим внимание на то, что интеграл по Ω_1 правой части этого выражения равен нулю. Это является следствием того, что в четырехмагнотных процессах рассеяния ВСВ на ПСВ, в результате которых появляется ПСВ и вторичная СВ, сохраняется число ВСВ. В результате из (56.14) следует важное интегральное соотношение

$$\begin{aligned} & \int [\nu + \gamma_{01}(\Omega_1) - 2\pi k_p^2(\Omega_1) v_p^{-1}(\Omega_1) \int |T_{12,34}|^2 n_p(\Omega_3) n_p(\Omega) \times \\ & \times \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) d\Omega_2 d\Omega_3 d\Omega_4] n_1(\Omega_1) d\Omega_1 = 0. \end{aligned} \quad (56.15)$$

В интересующем нас случае (кубическом ФМ) минимум затухания достигается при $\theta = 0$ и малом волновом векторе k_1 . Спектр СВ имеет вид (6.5), поэтому на поверхности постоянной частоты допустимые значения угла θ малы: $\theta^2 \leq 2\omega_{\text{ex}} (ak_{10})^2$. Выражение в квадратных скобках в (56.15)

слабо зависит от угла θ в узком диапазоне углов, где $n_1(\theta) \neq 0$, и тождество (56.15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \{ \nu + \gamma_{01} + 2\pi \int |T(0, k_1 + k_2; k_1, k_2)|^2 n_p(\Omega_1) n_p(\Omega_2) \times \\ & \times \delta[\omega_0 + \omega(k_1 + k_2) - \omega_p] dk_1 dk_2 \} n_1 = 0, \end{aligned} \quad (56.16)$$

$$n_1 = \int n_1(\Omega) d\Omega.$$

Для вычисления порога КН необходимо знать распределения ПСВ по углам. Воспользуемся вначале простым выражением для $n_p(\Omega)$, полученным в S -теории при надкритичности, меньшей порога рождения второй группы пар

$$n_p(\Omega) = \frac{N\delta(\theta - \pi/2)}{2\pi}, \quad |S|N = \gamma(p-1)^{1/2}. \quad (56.17)$$

Тогда в соответствии с (56.16) получим

$$(TN_{cr})^2 = 2\pi\gamma_0\omega_M [(H_c - H)A/2\pi M]^{1/2}, \quad A \geq 0, \quad (56.18)$$

$$A = 4(\Omega_p^2 + 1)^{1/2} - 3 - 6\Omega_0 - [(\Omega_p - \Omega_0)^2 + 1/4]^{1/2}, \quad (56.19)$$

$$\Omega_p = \omega_p/\omega_M, \quad \Omega_0 = \omega_0/\omega_M.$$

Нетрудно убедиться, что величина A и вместе с ней пороговое число N_{cr} (56.18) обращаются в нуль при некотором поле H_2 :

$$\begin{aligned} H_2 = 4\pi M \{ N_z + [12(\Omega_p^2 + 1)]^{1/2} - 2\Omega_p - 9 - \\ - \frac{1}{16} [(2 + 4\Omega_p - 6(\Omega_p^2 + 1)^{1/2})^2 + 20\Omega_p - 7]^{1/2} \}. \end{aligned} \quad (56.20)$$

При полях, больших H_2 , процессы (56.7) с участием ПСВ на экваторе запрещены и порог (56.18) обращается в бесконечность. Обращение в нуль порога на границе разрешения процессов (56.7) связано с бесконечно большой плотностью состояний, возникшей из-за сингулярности в распределении ПСВ по θ в (56.17). В действительности распределение ПСВ имеет конечную ширину, увеличивающуюся с надкритичностью $\Delta\theta \approx [(p-1)\gamma_p/k_p\nu_p]^{1/3}$.

Учет этого приводит к исчезновению особенности при $H = H_2$: порог в этом поле хотя и уменьшается, но остается конечным, а при $H > H_2$ резко растет.

56.3. Экспериментальное исследование кинетической неустойчивости. В настоящее время наиболее подробно исследована кинетическая неустойчивость второго порядка в ферритах. Самым ярким ее проявлением являются электромагнитное излучение от ВСВ, возникающее пороговым образом с ростом амплитуды накачки, и возникающие одновременно особенности восприимчивости. Изучение этих явлений проведено А.В. Лавриненко и др. [139]. На рис. 56.1 изображена зависимость порога рождения ВСВ (и излучения) в зависимости от величины магнитного поля H , направленного вдоль легкой оси [111] феррита. Видно, что экспериментально доступная область возбуждения ВСВ заключена в пределах $H_1 \lesssim H \lesssim H_2$, где $H_1 = 0,9$ кЭ, $H_2 = 1,27$ кЭ. Вне этой области порог резко растет.

Существование верхней границы поля H_2 , т.е. минимального волнового вектора ПСВ, находит естественное объяснение в рамках предложенной вы-

ше модели неустойчивости и связано просто с законами сохранения энергии и импульса. Подставляя в формулу (56.21) числовые значения $\Omega_p = 1,92$, $4\pi M = 1750$ Гс, $N_z = 1/3$ (для $H \parallel [111]$), получим $H_2 = 1250$ Э, что прекрасно согласуется с экспериментальным значением этой величины.

Рост порога неустойчивости в полях, меньших H_1 , связан с тем, что для достаточно коротких ПСВ оказываются разрешенными трехмагнонные процессы взаимодействия — слияния и распады ПСВ. В результате возникает сильное нелинейное затухание ПСВ, и для достижения порогового уровня ПСВ необходима большая мощность накачки. В условиях эксперимента поле H^* , для которого оказываются разрешенными процессы слияния

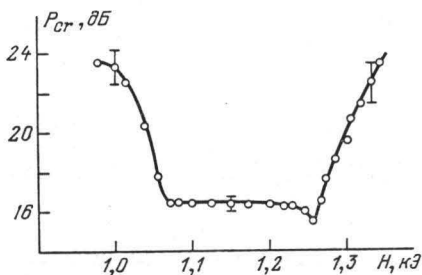


Рис. 56.1. Зависимость порога кинетической неустойчивости P_{cr} от магнитного поля для образца ЖИГ при $M \parallel [111]$, $T = 300$ К

двух ПСВ с $\theta = \pi/2$, есть $1,0$ кЭ. Распады ПСВ с $\theta = \pi/2$ разрешены для $H < 0,7$ кЭ, с $\theta = 0$ для $H < 1,14$ кЭ. Экспериментальное значение поля H_1 , как видно из рис. 56.1, находится в этом интервале.

Решающим доказательством существования кинетической неустойчивости ПСВ явилось экспериментальное обнаружение электромагнитного излучения из феррита, частота которого соответствует дну спин-волнового спектра:

$$\omega_0 = \omega(k \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0) = g(H - 4\pi N_z M). \quad (56.21)$$

Мощность излучения была весьма малой, так как оно обусловлено магнитодипольным излучением СВ с $k \approx 10^3 \div 10^4$ см⁻¹, существенно превышающим значение волнового вектора электромагнитных волн соответствующей частоты $k_r \approx \omega_0/c \approx 10^{-1}$ см. Потеря импульса СВ происходила на случайных неоднородностях образца или на регулярной неоднородности внутреннего магнитного поля. В последнем случае мощность излучения значительно возрастала.

Было также обнаружено и исследовано излучение на удвоенной частоте $2\omega_0$, возникающее в результате слияния двух ВСВ в фотон. Мощность излучения, обусловленная процессами (56.23), может быть вычислена обычным образом:

$$I = 2\dot{M}^2/3c^3 = (16\omega_0 k_r^3/3) \sum_k |V_k|^2 n_1(k). \quad (56.22)$$

Сделанные на основе (56.24) оценки показывают, что суммарное число вторичных СВ в области дна спектра должно быть сравнимо или превышать число ПСВ. Отметим, что для волн, лежащих точно на дне спектра, θ_k , а значит и V_k , обращается в нуль. Поэтому мощность излучения (56.22)

имеет дополнительную малость, связанную с угловым размером пакета вторичных СВ по полярным углам.

В отличие от излучения на частоте ω_0 , связанного с наличием неоднородностей, излучение на частоте $2\omega_0$ разрешено законами сохранения и поэтому является более мощным. Дополнительное усиление излучения на двойной частоте достигается при совпадении частоты ω_0 с частотой магнитостатической моды колебаний. При этом мощность I увеличивалась из-за высокой добротности магнитостатических колебаний и достигала 10^{-4} Вт при поглощенной ферритом мощности ~ 10 Вт (в условиях ферромагнитного резонанса на частоте $2\omega_0 = gH$). Такое излучение наблюдалось на сферических образцах в полях от 0,95 до 1,35 кЭ, соответственно диапазон излучаемых частот $\omega_p = 2\pi(2,5 \div 4,5) \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$, причем частота этого излучения не зависела от частоты накачки, изменявшейся в пределах $\omega_p = 2\pi(9,2 \div 9,5) \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$.

Оценки, проведенные на основе формулы (56.22), и исследования поведения восприимчивости, показывают, что уже при небольших (3 дБ) превышениях над порогом кинетической неустойчивости число ПСВ сравнивается с числом ПСВ и может превышать число последних.

Поскольку кинетическая неустойчивость обусловлена уменьшением до нуля затухания СВ, интересно параметрически возбудить ВСВ с помощью дополнительной, второй накачки. Можно думать, что по мере приближения к порогу КН будет уменьшаться пропорциональный затуханию ВСВ порог параметрической неустойчивости. Однако Лавриненко, Мелков и Фалькович в 1984 г. показали, что с увеличением числа ПСВ происходит увеличение, а не уменьшение порога параметрического возбуждения СВ близки дна спектра. Причина этого заключается в сильном упругом рассеянии волн, возбуждаемых второй накачкой, на ПСВ (см. (56.14)) и в особенностях матричных элементов взаимодействия СВ при $k \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$ с электромагнитным полем.

§ 57. Нелинейная теория кинетической неустойчивости [162]

Механизмы ограничения КН могут быть весьма разнообразными, существенно различаться в том или ином случае. Однако все это разнообразие возникает в результате последовательных актов трех- и четырехволновых взаимодействий, поэтому удастся выделить основные элементы мозаики, из которой складывается та или иная картина.

57.1. Ограничение кинетической неустойчивости нелинейным затуханием. Так же, как и при параметрической неустойчивости, одной из возможных причин ограничения числа волн является рост их затухания. Механизмы, приводящие к нелинейному затуханию ВСВ, точно те же, что и для ПСВ. Нелинейное затухание, обусловленное трехволновыми процессами, рассмотрено в гл. 8. Коэффициент нелинейного затухания для ВСВ совпадает с коэффициентом нелинейного затухания для ПСВ, если в нем заменить волновой вектор, частоту и число ПСВ на соответствующие параметры ВСВ. В случае, когда ВСВ находятся вблизи дна спектра, трехволновые процессы дают малый вклад или могут быть запрещены. Тогда следует рассмотреть относительно малые вклады в кинетическое уравнение, обусловленные четырехволновым взаимодействием. Они обусловлены

процессами слияния двух ВСВ с образованием двух тепловых волн:

$$\tilde{\gamma}_{NL,4S}(k) = 2\pi \int |T_{k_1, 23}|^2 n_1(k_1) [n_0(k_2) + n_0(k_3)] \times \\ \times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \delta[\omega(k) + \omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_3)] dk_1 dk_2 dk_3 \quad (57.1)$$

и процессами, в которых участвуют по крайней мере три ВСВ:

$$\gamma_{NL,4S}(k) = 2\pi \int |T_{k_1, 23}|^2 \{ n_1(k_1) [n_1(k_2) + n_1(k_3)] - n_1(k_2) n_1(k_3) \} \times \\ \times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \delta[\omega(k) + \omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_3)] dk_1 dk_2 dk_3. \quad (57.2)$$

Здесь, как и раньше, индекс 0 характеризует равновесные СВ ($n_0 = T/\omega(k)$), индекс 1 – вторичные СВ вблизи поверхности $\omega_k = \omega_1$. Анализ относительной роли различных процессов нелинейного затухания в ограничении КН ВСВ проведен В.С. Львовым и В.Б. Черепановым [162]. Результаты этой работы отражены в пп. 57.1 и 57.2. Далее мы ограничимся случаем $\gamma_{01} \ll \gamma_{02}$, когда СВ во втором пакете близки к равновесию.

В кинетическое уравнение для СВ подставим $n(k)$ в виде $n = n_0 + n_1$ и учтем, что n_0 является его решением при $n_1 = 0$. В результате для $n_1(k)$ получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial n_1(k)}{2\partial t} = \Delta \gamma_k [n_0(k) + n_1(k)] - \gamma(k) n_1(k) + \\ + J_{e1} \{ n_1(k) \} + \pi \Phi_{NL} \{ n_1(k) \}. \quad (57.3)$$

Здесь J_{e1} описывает упругое рассеяние ВСВ, Φ_{NL} – зависящая от n_1 часть приходных членов Φ_3 и Φ_4 .

На первом этапе исследования уравнения (57.3) мы будем учитывать только нелинейную зависимость $\gamma(k)$:

$$\gamma(k) = \gamma_0(k) + \gamma_{NL}(k). \quad (57.4)$$

Роль нелинейности в приходных членах Φ_{NL} будет рассмотрена ниже. Для простоты мы не будем учитывать также упругое рассеяние. Его роль в основном сводится к изотропизации распределения $n_1(k)$ и некоторому увеличению порога КН (см. задачу 11.3).

Рассмотрим вначале случай, когда процессы слияния ВСВ разрешены и нелинейное затухание является сильным. В этом приближении мы имеем интегральное уравнение, следующее из (57.3):

$$n_1(k) = \Delta \gamma_k n_0(k) [\gamma_0(k) + \gamma_{NL} \{ n_1(k) \} - \Delta \gamma]^{-1}. \quad (57.5)$$

Здесь γ_{NL} обусловлено трехволновыми процессами распада: $\gamma_{NL} = \gamma_{3S}$. Для выяснения качественного характера решения (57.5) пренебрежем зависимостью γ_{3S} и $\Delta \gamma_k$ от k в области, где $n_1 \neq 0$, и проинтегрируем (57.5) по k . Получим приближенно

$$N_1 (\gamma_0 + \eta_3 N_1 - \Delta \gamma) = \Delta \gamma n_0 k_1^3, \\ N_1 = \int n_1(k) dk, \quad \gamma_{3S} = \eta_3 N_1. \quad (57.6)$$

Здесь k_1^3 – объем области, где $\Delta \gamma \neq 0$:

$$\Delta \gamma n_0 k_1^3 = \int \Delta \gamma(k) n_0(k) dk, \quad (57.7)$$

$\Delta \gamma$ и n_0 – характерные значения $\Delta \gamma(k)$ и $n_0(k)$ в этой области. Переходя в

(57.6) к безразмерной переменной

$$x = \eta_3 N_1 / \gamma_0, \quad (57.8)$$

получим

$$x(1 + x - \Delta\gamma/\gamma_0) = A \Delta\gamma/\gamma_0 \quad (57.9)$$

Характер решения этого уравнения определяется величиной безразмерного параметра A , который имеет простой смысл:

$$A = \eta_3 n_0 k^3 / \gamma_0. \quad (57.10)$$

Если $A \ll 1$ (например, из-за того, что область, где $\Delta\gamma \neq 0$, аномально мала, как это бывает вблизи порога разрешения процесса), то тепловыми флуктуациями можно пренебречь, положив $A = 0$. Тогда $x = (\Delta\gamma - \gamma_0) / \gamma_0$, или, в исходных переменных,

$$\gamma_0 + \eta_3 N_1 = \Delta\gamma. \quad (57.11)$$

Учитывая отличие A от нуля, получим из (57.9)

$$\eta_3 N_1 = \Delta\gamma - \gamma_0 + \Delta\gamma \eta_3 n_0 k_1^3 / (\Delta\gamma - \gamma_0). \quad (57.12)$$

Оценки показывают, что величина A легко может достигать единицы и даже превышать ее. Например, для СВ в ФМ

$$A = (\omega_M T / \gamma_0 T_C) (\omega_0 / \omega_{ex})^{1/2} \approx 10^2.$$

При $A \gg 1$ решение (57.9) имеет вид $x = (A \Delta\gamma / \gamma_0)^{1/2}$ или

$$\eta_3 N = (\Delta\gamma \eta_3 k_1^3 n_0)^{1/2}. \quad (57.13)$$

Как видно, зависимость N_1 от $\Delta\gamma$ не носит критического порогового характера. Ограничение по существу происходит на допороговой стадии из-за нелинейного затухания "подогретых" ВСВ.

Если нелинейное затухание является слабым, то ограничение числа ВСВ происходит на более высоком уровне и тепловые флуктуации значительно менее существенны. В частности, пакет $n_1(k)$ будет сосредоточен вблизи поверхности, где $(\gamma_k - \Delta\gamma_k)$ минимально. В случае сферической симметрии из (57.6) следует

$$n_1(k) = \Delta\gamma n_0 [(\gamma_0 - \Delta\gamma - \eta N)^2 + \gamma''(\Delta k)^2 / 2]^{-1}, \quad (57.14)$$

где $\gamma'' = \partial^2 \gamma / \partial k^2$. Интегрируя (57.14) по модулю k , имеем кубическое уравнение для определения зависимости N_1 от $\Delta\gamma$:

$$N_1 = 4\sqrt{2} \pi^2 \Delta\gamma n_0 k_1^2 [(\gamma_0 + \eta N - \Delta\gamma) \gamma'']^{-1/2} \quad (57.15)$$

За порогом КН при $\Delta\gamma > \gamma_0$

$$\gamma_0 + \eta N - \Delta\gamma = 2A_1^3 \Delta\gamma^2 \gamma_0^2 / (\Delta\gamma - \gamma_0)^2 \gamma'' k_1^2, \quad (57.16)$$

$$A_1 = 4\pi^2 \eta n_0 k_1^3 / \gamma_0.$$

Для длинных СВ в ФМ с квадратичным законом дисперсии

$$A_1 = T \omega_{ex} (ak_1)^4 / (2\pi)^2 T_C \gamma_0 \ll 1.$$

При $A_1 \ll 1$ ширина пакета ВСВ является малой. Из (57.14) следует

$$\Delta k / k_1 \approx A_1 \Delta\gamma \gamma_0 / \gamma'' k_1^2 (\Delta\gamma - \gamma_0). \quad (57.17)$$

В узкой области вблизи порога (при $\Delta\gamma - \gamma_0 \ll A_1\gamma_0$) ширина пакета ВСВ не мала, и разложение (57.14) формулы (57.6) уже не справедливо.

При аксиальной симметрии роль тепловых флуктуаций будет еще меньше, в частности, поправка к общему числу N_1 имеет не степенную, а экспоненциальную малость по параметру A_1 . Вместо (57.16) из (57.6) можно получить

$$\gamma_0 + \eta N - \Delta\gamma \approx \left[k_1^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \cos^2 \theta} \right] \exp \left[\frac{\gamma - \Delta\gamma}{A_1 \Delta\gamma} \right]. \quad (57.18)$$

Следует отметить, что существенной особенностью механизма ограничения КН нелинейным затуханием волн является сингулярность функции распределения ВСВ $n_1(k)$: если пренебречь тепловыми флуктуациями, то n_1 будет отлична от нуля только в некоторых точках k -пространства, линиях или поверхностях (в зависимости от симметрии задачи), положение которых определяется из условия внешней устойчивости

$$\frac{\partial}{\partial k} [-\Delta\gamma_k + \gamma_k(n_1)] = 0. \quad (57.19)$$

При этом стационарное распределение ВСВ определяется из условия баланса

$$\Delta\gamma_k = \gamma_k(n_1). \quad (57.20)$$

Нетривиальный момент в теории возникает, если необходимо учитывать тепловые флуктуации. Тогда при слабом нелинейном затухании возникают поправки к формуле (57.20), зависящие от симметрии задачи (см. (57.16) и (57.18)). Если же нелинейное затухание велико, то распределение ВСВ перестраивается кардинально и формула (57.20) несправедлива даже приблизительно. Вместо нее см. (57.13), где $N_1 \sim (\Delta\gamma)^{1/2}$.

57.2. Столкновительный механизм ограничения КН. С увеличением надкритичности числа количество ВСВ n_1 растет, так что становятся существенными не только взаимодействие ВСВ с тепловыми волнами, но и их столкновения между собой. Четырехволновые процессы

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) = \omega(k_3) + \omega(k_4), \quad (57.21)$$

в которых участвуют только ВСВ, не выводят энергию из системы ВСВ и поэтому, казалось бы, не могут ограничить кинетическую неустойчивость. Однако процессы рассеяния ВСВ (57.21) приводят к уширению функции распределения ВСВ за границы области неустойчивости, причем с увеличением надкритичности ширина функции распределения растет так, что результирующий баланс энергии соблюдается:

$$\int [\Delta\gamma_k - \gamma_k(n_1)] dk = 0. \quad (57.22)$$

Это условие определяет зависимость ширины функции $n_1(k)$ от надкритичности: общее число N_1 должно быть таким, чтобы процессы (57.21) обеспечили требуемую ширину НК.

При большой надкритичности тепловыми флуктуациями можно пренебречь и учитывать из приходных членов только $\Phi_{NL,4S}$. Из механизмов нелинейного затухания мы явно будем учитывать только $\gamma_{NL,4S}$. Остальные слагаемые, если они существенны в сравнении с $\gamma_{NL,4S}$, будут считаться включенными в $\gamma_k = \gamma_0(k) + \gamma_{NL,4S} + \dots$. В результате уравнение (57.3)

переписывается в виде

$$\frac{\partial n_1(\mathbf{k})}{2\partial t} = (\Delta\gamma_{\mathbf{k}} - \gamma_{\mathbf{k}})n_1(\mathbf{k}) + J_{e1}\{n_1(\mathbf{k})\} - \gamma_{NL,4S}n_1(\mathbf{k}) + \pi\Phi_{NL,4S}, \quad (57.23)$$

где J_{e1} , $\gamma_{NL,4S}$ и $\Phi_{NL,4S}$ задаются выражениями (56.14), (57.2). Случай сферической симметрии наиболее прост для анализа. Поскольку n_1 не зависит от ориентации \mathbf{k} , $J_{e1} = 0$. Выбирая n_1 в виде

$$n_1(\mathbf{k}) = N_1(\kappa)/4\pi k_1^2, \quad \kappa = |\mathbf{k}| - k_1, \quad N_1 = \int N_1(\kappa) d\kappa, \quad (57.24)$$

и выполняя в (57.2) интегрирование по углам, получим вместо (57.23)

$$N_1(\kappa) = \frac{2F^2}{2\gamma_{ef} + \gamma''\kappa^2} \int N_1(\kappa_1)N_1(\kappa_2)N_1(\kappa_3)\delta(\kappa + \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (57.25)$$

$$\gamma_{ef} = \gamma_0 + F^2 N_1^2 - \Delta\gamma, \quad (57.26)$$

$$F^2 = 2\pi |T|^2/k_1 v_1. \quad (57.27)$$

Уравнение (57.25) совпадает по виду с уравнением для формы пакета ПСВ по частотам (51.13). Его единственным устойчивым решением является

$$N_1(\kappa) = \frac{N_1}{2\kappa_0 \operatorname{ch}(\pi\kappa/2\kappa_0)}, \quad (57.28)$$

где эффективная ширина пакета κ_0 и его интегральная величина определяются из условий

$$\gamma_{ef} = \gamma''\kappa_0^2/2, \quad (57.29)$$

$$F^2 N_1^2 = \gamma''\kappa_0^2/2 + \gamma_{ef}.$$

Здесь происходит компенсация слагаемого с нелинейным затуханием $\gamma_{NL,4S}$, соответствующим приходным слагаемым $\Phi_{NL,4S}$, так что (57.29) (с учетом (57.26), (57.27)) переписывается в виде

$$\Delta\gamma = \gamma_0 + \gamma''\kappa_0^2/2. \quad (57.30)$$

Таким образом, эффективное увеличение затухания ВСВ на величину $\gamma''\kappa_0^2/2$ происходит из-за уширения пакета ВСВ в результате четырехволновых процессов рассеяния ВСВ друг на друге. Используя (57.29) и (57.27), представим (57.30) в виде

$$\Delta\gamma = \gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_{NL,4S}, \quad (57.31)$$

$$\pi(TN_1)^2/k_1 v_1 = \Delta\gamma - \gamma_0.$$

Это означает, что эффективность столкновительного механизма ограничения кинетической неустойчивости совпадает с точностью до числа (равного 1/2 в сферически-симметричном случае) с эффективностью механизма нелинейного затухания при "выключенном" приходном члене $\Phi_{NL,4S}$. В слу-

чае более низкой симметрии эффективность столкновительного механизма несколько выше.

57.3. Кинетическая неустойчивость при большой надкритичности. С ростом надкритичности растет амплитуда ВСВ и развивается новая кинетическая неустойчивость, приводящая к нарастанию волн третьего поколения. Если число ПСВ порядка или превосходит число ТСВ, участвующих в процессах релаксации волн следующих поколений, то может развиваться целая иерархия кинетических неустойчивостей, возникающих в результате последовательных распадов волн. Полная картина возникающих при этом явлений отсутствует. В настоящее время достаточно подробно исследована иерархия неустойчивостей, возникающих при параметрическом возбуждении СВ в АФМ в случае, когда разрешены распады СВ на СВ и звук [147]. При этом возникает целый ряд кинетических неустойчивостей первого порядка, которые, однако, не могут привести к значительному поглощению энергии, поступающей от накачки. Ограничение амплитуд волн в этом случае связано с процессами слияния волн высших поколений с образованием относительно высокочастотных быстро релаксирующих СВ.

При дальнейшем росте мощности накачки, по-видимому, происходит переход от слабо неравновесного к сильно неравновесному (турбулентному) состоянию волновой системы, когда возбуждены все степени свободы и реализуются плавные спектры колмогоровского типа.

Задачи

Задача 11.1. Определить порог кинетической неустойчивости первого порядка для спиновых волн в АФМ ЛП в процессах распада магнона на два фонана [147].

Указание. В качестве амплитуды этого процесса можно взять следующее модельное выражение:

$$|U(kqq')|^2 = 2 \xi^2 \omega_{ex} \Omega_q \Omega_{q'} \left[\frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_q^2 - \Omega_q^2} + \frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_{q'}^2 - \Omega_{q'}^2} \right]^2 / \epsilon(k).$$

где $\epsilon^2(k) = \epsilon_0^2 + s^2 k^2$ — частота магнона, $\Omega_q = cq$ — частота фонана, $s > c$, ξ — малый параметр магнитострикции, $\omega_{ex} \gg \Omega_q$, $\epsilon(k)$.

Задача 11.2. Рассмотреть КН первого порядка относительно распада ПСВ на СВ и фононы (см. п. 56) в пределе $\alpha = s/c \gg 1$ [219].

Задача 11.3. Получить условие для порога кинетической неустойчивости в анизотропной среде при сильном упругом рассеянии.

Задача 11.4. Определить ширину и интенсивность пакета ВСВ в изотропной среде, обусловленные четырехмагнонным рассеянием, если отрицательная добавка в затухание СВ имеет вид

$$-\Delta\gamma = \begin{cases} 0 & \text{при } k < k_0, \\ \Delta - \gamma'(k - k_0) & \text{при } k > k_0, \end{cases}$$

а амплитуда четырехволнового взаимодействия постоянна (В.С. Лутовинов, Г.Е. Фалькович, В.Б. Черепанов [147]).

Указание. Удобно воспользоваться вариационным принципом, рассмотренным в § 52.

Задача 11.5. Определить условия баланса трех пакетов волн в изотропной среде, из которых один является узким пакетом ПСВ с частотой ω_1 и волновым вектором k_1 , другой — с частотой ω_2 и волновым вектором k_2 , находится в области кинетической неустойчивости, а третий образован в результате слияний ВСВ и ПСВ $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ [147].

Задача 11.6. Определить порог КН первого порядка в изотропном ФМ с законом дисперсии СВ:

$$\omega_k = \omega_0 + \omega_{ex}(ak)^2$$

и не зависящим от волновых векторов матричным элементом трехмагнетонного взаимодействия $V_{123} = V = \text{const}$.

Указание Кроме процессов распада ПСВ на две ВСВ, необходимо учесть также процессы слияния ВСВ и ПСВ.

Ответ:

$$|V|^2 N_{cr} = \left[\frac{8\gamma_1\gamma_2(\omega_p - 2\omega_0)}{(\omega_1 - \omega_0)^{1/2}(\omega_2 - \omega_0)^{1/2}} \right]^{1/2},$$

где N_{cr} – пороговое количество ПСВ, $\omega_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ – частоты и затухания пакетов ВСВ, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p/2$.