В. С. ЛЬВОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

Дорогому Гене —
соратнику по борьбе
с маниеизмом. С
глубоким уважением —
В. Лебл

19/01 88 г.

В. С. ЛЬВОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

$e^{-i\omega t}$

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.31
Л89
УДК 539.21

Львов В.С. **Нелинейные спиновые волны.** – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.

Посвящена динамике и кинетике взаимодействующих спиновых волн. Приведены основные экспериментальные факты и объясняющие их физические модели. Последовательно изложен классический гамильтонов метод описания нелинейных волн (их релаксации, самофокусировки, автоколебаний, коллапса и т.д.). Построена нелинейная теория параметрического и кинетического возбуждения волн, проведено ее подробное сравнение с экспериментами в ферро- и антиферромагнетиках.

Круг предполагаемых читателей весьма широк. Это – теоретики и экспериментаторы, изучающие физику магнетиков, нелинейные волновые процессы в конденсированных средах и плазме. Это – преподаватели, аспиранты, студенты университетов, приступающие к изучению новой области науки – физики нелинейных явлений.

Табл. 3. Ил. 39. Библиогр. 238 назв.

Рецензент
член-корреспондент АН СССР *В.Е. Захаров*

Л $\frac{1704020000-154}{053(02)-87}$ 106-87

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1987

ПРЕДИСЛОВИЕ

"Все счастливые семьи похожи друг на друга, каждая несчастливая семья несчастлива по-своему." Все равновесные системы схожи тем, что подчиняются распределению Гиббса. Вдали от положения равновесия возникает удивительное разнообразие процессов и явлений. Действительно, что общего между океаном в шторм, проводником с током и живым существом? Это разнообразие связано, во-первых, с различием источников неравновесности и, во-вторых, с особенностями внутреннего устройства систем, которые проявляются тем ярче, чем дальше система от равновесия.

Неуклонно возрастающий в последние два десятилетия интерес к сильно неравновесным системам связан прежде всего с изучением поведения веществ при высоких уровнях мощности внешнего воздействия: диэлектриков в поле мощной лазерной волны, магнетиков в сильных СВЧ полях, плазмы, нагреваемой до термоядерных температур, и т.д. Фактически появилась новая физическая дисциплина – физика нелинейных волн. Ее задача – изучать явления и процессы, возникающие при возбуждении, распространении и взаимодействии волн конечной амплитуды в различных средах по возможности с общей точки зрения. При этом выясняется, например, что образование "девятого вала" в штормовом море и самофокусировка света – весьма похожие явления, имеющие общую физическую причину.

В физике нелинейных волновых процессов спиновые волны занимают особое положение, связанное с удобством их исследования. Эксперименты часто можно проводить при комнатной температуре, в хорошо освоенном диапазоне частот на монокристаллах отличного качества. Спиновые волны легко возбуждаются СВЧ магнитным полем до существенно нелинейного уровня, когда их поведение целиком определяется взаимодействием между собой. Богатый экспериментальный материал, нуждающийся в интерпретации, привлекает в эту область теоретиков, занимавшихся ранее другими проблемами. Для них и для начинающих исследователей написана эта книга. Она может оказаться полезной также экспериментаторам, занимающимся физикой твердого тела, и всем тем, кто хочет познакомиться с идеями и методами теории нелинейных волн. Помимо теории, в книге содержится обзор экспериментальных результатов исследования нелинейных спиновых волн.

Логически эта книга не является линейно упорядоченной цепочкой умозаключений и экспериментальных фактов, хотя именно в таком виде она отображена на бумаге. Поэтому я попытался на рисунке, расположенном на форзаце книги, отразить логические связи между ее главами для того,

чтобы каждый читатель мог легче найти в ней то, что его интересует. Одиннадцать глав книги разбиты на четыре раздела. В первой, вводной главе дан краткий обзор необходимых сведений из физики магнитоупорядоченных диэлектриков. Во второй и третьей главах описываются нелинейные динамические процессы в системе взаимодействующих спиновых волн с учетом фазовых соотношений между ними. Главы 4–6 посвящены явлениям, которые можно эффективно описывать в приближении самосогласованного поля, когда роль взаимодействия волн сводится к изменению коэффициентов в линейных уравнениях движения для каждой волны. Идеологически центральное место в этом разделе занимает нелинейная теория параметрического возбуждения волн – S-теория Захарова, Львова, Старобинца. Наиболее сложным для первого чтения, по-видимому, является четвертый раздел книги (главы 7–11), в котором описывается кинетика спиновых волн вдали от равновесия. Этот раздел ориентирован главным образом на теоретиков и в меньшей степени – на экспериментаторов, изучающих спиновые волны.

Я обязан многим людям. Это, прежде всего, авторы работ, процитированных или изложенных в книге. Среди них я особенно хотел бы отметить В.Е. Захарова, С.С. Старобинца, Г.А. Мелкова, В.В. Зауткина, Л.А. Прозорову, В.Б. Черепанова и Г.Е. Фальковича, многочисленные обсуждения и совместная работа с которыми сделали возможным появление этой книги. За постоянную помощь и содействие я признателен моим коллегам И.В. Колоколову, Е.В. Подивилову, А.А. Родишевскому и другим. Хочу поблагодарить также Е.В. Янкайтис за неоднократную перепечатку разделов рукописи. И наконец, я хочу выразить особую благодарность моей жене Людмиле, чья поддержка и сочувственное отношение сыграли важную роль в работе над этой книгой.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

В скобках приведен номер параграфа (главы), в котором впервые встречается данное сокращение.

ФМ – ферромагнетик (§ 1)
АФМ – антиферромагнетик (§ 1)
ЛО, ЛП – "легкая ось", "легкая плоскость" – типы кристаллографической анизотропии в одноосных ФМ и АФМ (§ 3)
ЖИГ – железо-иттриевый гранат (§ 1)
СВ – спиновые волны (гл. 2)
ЯСВ – ядерные спиновые волны (§ 14)
ПСВ – параметрические (параметрически возбужденные) СВ (§ 15)
ПВ – параметрические (параметрически возбужденные) волны (§ 15)
ТСВ – тепловые (термически возбужденные) СВ (§ 50)
ТВ – тепловые (термически возбужденные) волны (§ 50)
ВСВ – вторичные (возникающие в результате развития кинетической неустойчивости) СВ (§ 56)
НСВ – неравновесные СВ (§ 29)
ОП – однородная прецессия намагниченности (§ 6)
ФМР – ферромагнитный резонанс (§ 22)
КдВ – уравнение Кортевега–де-Вриза (13.3) (§ 13)
МКдВ – модифицированное уравнение КдВ (13.4) (§ 13)
СТВ – сверхтонкое взаимодействие (§ 14)
КК – коллективные колебания (§ 23)
АК – автоколебания (§ 31)

СПИСОК НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ С КОММЕНТАРИЯМИ

$M_i, i = 1, 2, \ldots$ – намагниченность (плотность магнитного момента) подрешеток.
$M = \sum_i M_i$ – суммарная намагниченность магнетодиэлектрика.
M_x, M_y, M_z – проекции намагниченности.
$M_\pm = M_x \pm iM_y$ – круговые переменные для намагниченности.
μ_j, μ_a – намагниченность иона в узле R_j, R_a.
$R_{ab} = R_a - R_b$ – расстояние между атомами (ионами) в узлах R_a и R_b.
$\mathcal{H}_{ex} = -JS_aS_b$ – гамильтониан обменного взаимодействия между узлами a и b (гейзенберговский гамильтониан).
J – обменный интеграл. В ферромагнетиках (ФМ) $J > 0$, в антиферромагнетиках (АФМ) $J < 0$.

$\mathcal{H}_{dd}, W_{dd}$	– гамильтониан и энергия магнитного диполь–дипольного взаимодействия.
$\mathcal{H}_{s0}, W_{s0}$	– гамильтониан и энергия спин-орбитального взаимодействия.
$\mathcal{H}_a, W_a$	– гамильтониан и энергия кристаллографической анизотропии.
$\mathcal{H}$	– оператор или функция Гамильтона, именуемая для краткости гамильтонианом.
$q, p; Q, P$	– канонические переменные – обобщенные координаты и импульс.
k	– волновой вектор (спиновых) волн.
$a_k = a(k), b_k,$ c_k, d_k	– канонические переменные – комплексные амплитуды бегущих (спиновых) волн. Они же – классические аналоги бозе-операторов, т.е. числа.
$\mathcal{H}_2$	– квадратичная по каноническим переменным часть гамильтониана.
$\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \ldots$	– гамильтониан взаимодействия.
$\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$	– части $\mathcal{H}_{\text{int}}$ кубические и четвертого порядка по каноническим переменным. Они описывают процессы с участием трех или четырех волн соответственно.
$\mathcal{H}_p$	– гамильтониан взаимодействия (спиновых) волн с накачкой.
$\mathcal{H}_{\text{el}}$	– гамильтониан взаимодействия волн с дефектами и другими случайными неоднородностями. В магнетиках он описывает упругие двухмагнонные процессы.
H	– постоянное магнитное поле, как правило, пространственно однородное. Не путать с гамильтонианом $\mathcal{H}$.
μ_0	– магнетон Бора.
$g = \mu_0/\hbar$	– магнетомеханическое отношение для электрона. Это размерная величина, равная примерно $2\pi \cdot 2{,}8$ МГц/Э. Не путать с безразмерным g-фактором, равным примерно двойке у электрона.
$\omega_O = gH$	– круговая частота прецессии магнитного момента электрона во внешнем поле H.
ω_{ex}	– "Обменная частота". По порядку величины $\hbar\omega_{\text{ex}} \approx T_c$, где T_c – температура Кюри.
$\omega_M = 4\pi gM$	– характерная частота диполь-дипольного взаимодействия.
N_x, N_y, N_z	– размагничивающие факторы: $N_x + N_y + N_z = 1$.
$H_i = H - 4\pi N_z M$	– внутреннее магнитное поле в эллипсоиде ($H \parallel M \parallel z$).
$\omega_D = gH_D$	– частота и поле, характеризующие взаимодействие Дзялошинского–Мориа в АФМ.
$\omega_a = gH_a$	– частота и поле, характеризующие кристаллографическую анизотропию.
ω_n	– частота, характеризующая взаимодействие электронных спинов в АФМ с ядерными.
$\omega(k) = \omega_k,$ $\omega_j(k) = \omega_{jk}$	– зависимость собственной частоты волн бесконечно малой амплитуды от волнового вектора k – закон дисперсии волн. j – индекс поляризации или типа волн.
$\tilde{\omega}_k$	– частота волн конечной амплитуды, перенормированная на их взаимодействие между собой.
$\Omega_p(\kappa)$	– частота коллективных колебаний (КК) системы параметрически возбужденных (спиновых) волн – ПСВ с волновым вектором κ. p – номер моды.
$\Omega_p(0) = \Omega_p$	– частота пространственно-однородных КК (с $\kappa = 0$).
Δ_p	– частота пространственно-однородных КК системы ПСВ в отсутствие затухания.
$\Omega = \theta, \varphi$	– Ω – телесный угол; θ и φ – полярный и азимутальный углы в системе координат, ориентированной по намагниченности.
$\gamma(k) = \gamma_k$	– параметр затухания волн (декремент).
$\gamma_k = \gamma_0(k)$	– декремент волн вблизи термодинамического равновесия.

РАЗДЕЛ 1

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МАГНЕТИКОВ

ГЛАВА 1

МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫЕ ДИЭЛЕКТРИКИ

Эта глава вводная. В ней дан краткий обзор необходимых сведений из физики магнитоупорядоченных диэлектриков, подробно освещенных в многочисленных монографиях по магнетизму [1–31].

§ 1. Типы магнитного упорядочения

В настоящее время известно огромное количество веществ (диэлектриков, полупроводников и металлов – как кристаллических, так и аморфных), обладающих магнитной структурой [2, 11, 21, 37]. Это означает, что в их состав входят парамагнитные атомы (ионы) с нескомпенсированными спиновыми магнитными моментами электронов, которые ориентированы определенным образом друг относительно друга. Среди таких веществ ферромагнетики встречаются наиболее редко и то, что этот тип магнитного упорядочения был обнаружен первым, объясняется яркими внешними проявлениями их внутреннего магнитного порядка. Опишем различные типы магнитного упорядочения.

1.1. Ферромагнетик – ФМ. По современной классификации это вещества, у которых магнитные моменты всех атомов ориентированы параллельно. В результате возникает макроскопический магнитный момент, равный сумме магнитных моментов всех атомов. В отсутствие внешнего магнитного поля такое полностью упорядоченное состояние часто оказывается термодинамически невыгодным и ФМ разбивается на домены – макроскопические области, внутри которых магнитные моменты электронов параллельны. Суммарный же момент образца при этом близок к нулю. Тогда говоря, что ферромагнетик (например, железо) не намагничен или, другими словами, находится в многодоменном состоянии. Для создания однодоменного состояния нужно приложить внешнее магнитное поле. Чтобы это состояние не разрушилось в отсутствие поля, принимаются специальные меры, препятствующие движению доменных стенок и повороту магнитных моментов внутри доменов. Подробнее о доменной структуре можно прочесть в [6, 15, 35]. В общем случае при магнитном упорядочении возникает несколько магнитных подрешеток, каждая из которых объединяет ионы с одинаковыми магнитными моментами. Точнее говоря, магнитные

ионы одной подрешетки трансляционно инвариантны, т.е. переводятся друг в друга целым числом элементарных трансляций кристаллической решетки. При этом число магнитных подрешеток определяется числом магнитных атомов (ионов) в элементарной ячейке, учитывающей магнитный порядок. Такая магнитная ячейка может состоять из одной или нескольких элементарных ячеек кристалла. В этих терминах ФМ – это вещества с одной магнитной подрешеткой.

1.2. Ферримагнетики. Это вещества с несколькими магнитными подрешетками (с намагниченностями M_i), причем обменное взаимодействие между подрешетками ориентирует их так, что суммарный магнитный момент $M = \Sigma M_i$ не равен нулю. В простейшем случае есть две коллинеарные подрешетки с различными магнитными моментами $M_1 \neq M_2$, ориентированные антипарраллельно, так что $M = M_1 - M_2 \neq 0$. Для трех и более подрешеток коллинеарная ориентация вовсе не обязательна. Классическим примером ферримагнетика является железо-иттриевый гранат (ЖИГ) $Y_3Fe_5O_{12}$ с двадцатью магнитными подрешетками.

1.3. Антиферромагнетики – АФМ. В отличие от ферримагнетиков, у АФМ сумма магнитных моментов подрешеток равна нулю. В простейшем случае у АФМ две эквивалентные антипараллельные подрешетки: $M_1 = -M_2$. Антиферромагнитное упорядочение встречается, например, у окислов MnO, FeO, CoO и фторидов MnF_2, CoF_2, FeF_2.

1.4. Антиферромагнетики со слабым ферромагнетизмом. В отличие от чистых АФМ, они характеризуются малой неколлинеарностью подрешеток, вызванной специфическим релятивистским взаимодействием Дзялошинского – Мориа. Поскольку это взаимодействие существенно слабее обменного, результирующий магнитный момент M оказывается существенно меньшим, чем намагниченность каждой подрешетки. Такими структурами обладают, например, α-Fe_2O_3, NiF_2, $MnCO_3$, $CoCO_3$.

1.5. Геликоидальные структуры или гелимагнетики характеризуются более сложными типами упорядочения, которые нельзя описать в терминах магнитных подрешеток. Если имеется один магнитный атом на элементарную ячейку кристалла (в парамагнитной фазе), то такую структуру можно представить, например, как "стационарную волну магнитного момента"

$$\mu_{jz} = \mu_z, \quad \mu_{jx} = \mu_\perp \cos qR_j, \quad \mu_{jy} = \mu_\perp \sin qR_j. \tag{1.1}$$

Здесь μ_j – намагниченность иона в узле R_j, q – волновой вектор спирали, несоизмеримый с периодом обратной решетки. В так называемой простой $S-S$-спирали полный магнитный момент кристалла равен нулю ($\mu_z = 0$). Такое упорядочение будет антиферромагнитным. Если $\mu_z \neq 0$, то спираль называется конической или ферромагнитной. Известны также более сложны спирали, в которых μ_z периодически зависит от номера иона. Спиральной магнитной структурой обладают при низких температурах многие редкоземельные металлы. Эти структуры были обнаружены также в сплаве $MnAu_2$, в соединениях MnI_2 и т.д.

Нужно сказать, что приведенная классификация является до некоторой степени условной так же, как и всякая попытка втиснуть реальный мир в формальную схему. Так, например, нет резкой границы между АФМ со слабым ферромагнетизмом и ферримагнетиком, между гелимагнетиком,

у которого период спирали соизмерим с кристаллохимическим периодом и многоподрешеточным АФМ. Более подробно обо всех этих проблемах – о типах магнитного порядка, его связи с симметрией кристалла и т.п. – можно прочесть в монографиях [23, 30], работах Л.Д. Ландау [38] и И.Е. Дзялошинского [78].

§ 2. Обменное взаимодействие и модель Гейзенберга

2.1. Обменное взаимодействие в молекуле водорода. Как хорошо известно, обменное взаимодействие имеет электростатическую природу и связано с принципом Паули, запрещающим двум электронам находиться в одном квантовомеханическом состоянии. Проще всего происхождение обменного взаимодействия можно продемонстрировать на примере молекулы водорода. Гамильтониан $\mathcal{H}$ такой системы состоит из гамильтонианов $\mathcal{H}_a$ и $\mathcal{H}_b$ двух атомов и гамильтониана V_{ab} их взаимодействия между собой:

$$V_{ab} = e^2 [1/R_{ab} + 1/R_{12} - 1/R_{a2} - 1/R_{b1}], \tag{2.1}$$

где R_{ab} – расстояние между ядрами, R_{12} – между электронами, R_{a2} и R_{b1} – между электроном и "чужим" протоном. Поскольку $\mathcal{H}$ не зависит от спиновых переменных S_1, S_2, волновую функцию молекулы следует искать в мультипликативном виде. В соответствии с принципом Паули Ψ-функция должна быть антисимметричной относительно перестановки электронов. Поскольку в состоянии с полным спином системы $S = 1$, спины электронов параллельны, спиновая часть Ψ-функции будет симметричной. Поэтому ее координатная часть φ будет антисимметричной. Соответственно в состоянии с антипараллельными спинами, когда $S = 0$, функция φ будет симметричной. Ограничиваясь первым порядком теории возмущений по энергии взаимодействия V, построим функции нулевого приближения $\varphi_+(R_1, R_2)$ из волновых функций атомов водорода $\varphi(R_{\alpha i})$, состоящих из i-го электрона ($i = 1, 2$) и α-ядра ($\alpha = a, b$):

$$\varphi_\pm(R_1, R_2) = \tfrac{1}{2}[\varphi(R_{a1})\varphi(R_{b2}) \pm \varphi(R_{a2})\varphi(R_{b1})]/\sqrt{1 \pm \gamma^2}, \tag{2.2}$$

где γ – интеграл перекрытия. В этом приближении энергии связи $E_\pm$ и молекулы водорода в состоянии с $S = 0$ и $S = 1$ соответственно имеют вид

$$E_\pm = \int \varphi_\pm^2(R_1, R_2) V dR_1 dR_2 = [A(R_{ab}) \pm B(R_{ab})]/(1 \pm \gamma^2), \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} A(R_{ab}) &= \int V \varphi^2(R_{a1})\varphi^2(R_{b2}) dR_1 dR_2, \\ B(R_{ab}) &= \int V \varphi(R_{a1})\varphi(R_{b1})\varphi(R_{a2})\varphi(R_{b2}) dR_1 dR_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

С помощью численного расчета по этим формулам можно убедиться, что функция $E_-(R_{ab}) > 0$ и монотонно убывает с увеличением расстояния между ядрами R_{ab}, а функция $E_+(R_{ab})$ имеет резкий минимум при некотором $R_{ab} = R_0$, причем $E_+(R_0) < 0$. Это означает, что два атома водорода могут образовывать молекулу только в состоянии с антипараллельными спинами. Приведенное здесь квантовомеханическое объяснение гомеополярной химической связи принадлежит Гейтлеру и Лондону [67]. Как нетрудно увидеть из (2.4), величина $A(R)$ определяет кулонов-

скую энергию взаимодействия двух атомов в предположении, что первый электрон "принадлежит" только ядру a, а второй – ядру b. При увеличении расстояния между атомами эта энергия убывает как R_{ab}^{-1}. Величина $B(R)$ представляет собой недиагональный матричный элемент электростатической энергии V между состоянием $\langle a1, b2|$, в котором первый электрон принадлежит атому a, второй – атому b, и состоянием $|a2, b1\rangle$, в котором электроны обменялись местами. Так как $B(R)$ отличен от нуля только из-за перекрытия электронных оболочек, то $B(R)$ убывает с расстоянием экспоненциально.

Рассмотренный нами простой пример показывает, как чисто квантовый эффект обмена электронов приводит к взаимодействию между атомами, зависящему от суммарного спина атома S, несмотря на то, что гамильтониан взаимодействия не зависит от спиновых переменных. Два выражения (2.3) для энергий взаимодействия $E_{\pm}$ в состояниях с полным спином $S = 0$ и $S = 1$ можно записать единым образом, используя спиновые переменные S_1, S_2:

$$E_{\pm} = E - J\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2,$$
$$E = \tfrac{3}{4}E_- + \tfrac{1}{4}E_+, \quad J = E_- - E_+. \tag{2.5}$$

Мы учли здесь, что собственные значения оператора $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2 = 3/4$ в синглетном состоянии (при $S = 1$) и $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2 = 1/4$ в триплетном (при $S = 0$). Зависящую от спина часть (2.5) называют гамильтонианом обменного взаимодействия и обозначают

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = -J\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2. \tag{2.6}$$

Величина J называется *обменным интегралом*. Если $J < 0$ (как в нашем примере), то выгодна антипараллельная ориентация спинов, тогда говорят, что обменное взаимодействие *антиферромагнитно*. При $J > 0$ устанавливается параллельная ориентация спинов и обмен называется *ферромагнитным*.

Оператор (2.6) широко известен как *гейзенберговский гамильтониан*, хотя в такой форме он был впервые получен П. Дираком, а его впервые использовал в теории магнетизма Ван-Флек. Однако именно Гейзенберг после возникновения квантовой механики показал, что взаимодействия, приводящие к магнитному упорядочению, имеют квантовомеханическую природу, обусловленную принципом Паули. Первоначальная же идея о том, что спонтанная намагниченность возникает из-за специфического взаимодействия между магнитными атомами, выдвинута впервые Пьером Вейссом в 1907 году. Правда, его оценка температуры перехода T_c по магнитному дипольному взаимодействию дала $T_c \approx 0{,}25$ К, которое на четыре порядка меньше фактического значения. Но перед лицом такой неудачи он проявил неиссякаемый оптимизм, заявив, что "данная трудность должна рассматриваться не как возражение против теории (молекулярного поля), а как стимул для поиска новых идей в теории строения атома". И эти идеи были сформулированы через двадцать лет!

2.2. Внутриатомный обмен. Как правило, магнитные атомы имеют несколько валентных электронов, поэтому возникает вопрос об обменном взаимодействии между ними. Отличие этого случая от рассмотренного выше заключается, во-первых, в том, что энергия взаимодействия

включает только взаимодействие между электронами

$$V = e^2/R_{12}, \tag{2.7}$$

и, во-вторых, в том, что координатные части волновых функций $\varphi_\alpha(R)$ и $\varphi_\beta(R)$ различных квантовомеханических состояний электронов на одном атоме α и β ортогональны. Поэтому их интеграл перекрытия γ равен нулю и выражение (2.3) упрощается:

$$E_\pm = A \pm B. \tag{2.8}$$

Тогда из (2.4) и (2.5) следует простое выражение для J:

$$J = 2B = \int \rho^*(R_1)(e^2/R_{12})\rho(R_2)dR_1dR_2, \tag{2.9}$$

$$\rho(R) = \varphi_\alpha(R)\varphi_\beta^*(R). \tag{2.10}$$

Применив преобразования Фурье, можно получить

$$J = \frac{e^2}{2\pi^2}\int dk \ \frac{|\rho(k)|^2}{k^2}. \tag{2.11}$$

Таким образом, внутриатомный обмен является ферромагнитным и стремится выстроить спины валентных электронов одного атома параллельно друг другу. Отсюда следует известное правило Хунда: *из всех состояний атома с одной и той же конфигурацией (числом валентных электронов) наименьшее значение энергии имеет состояние с максимально возможным спином.* Обменный интеграл (2.10) не имеет малости перекрытия волновых функций. По порядку величины он совпадает с кулоновской энергией двух электронов на одном центре, т.е. имеет атомный масштаб 1 эВ. Этот вклад в энергию обычно значительно больше всех остальных, и поэтому можно считать, что магнитные моменты валентных электронов жестко связаны между собой и в межатомных взаимодействиях они проявляются как единый большой магнитный момент с соответствующим спином атома $S > 1/2$.

2.3. Межатомный обмен "длинных спинов": S_a, $S_b > 1/2$. Рассмотрим обменное взаимодействие двух атомов, находящихся в состоянии с полным спином атома S_a и S_b. Волновые функции атомов антисимметричны относительно перестановки N_a электронов на атоме a и N_b электронов на атоме b. Из них нужно составить полностью антисимметричную волновую функцию, включающую перестановку электронов между атомами. При этом каждому из допустимых типов перестановочной симметрии пространственной волновой функции соответствует определенное значение суммарного спина S (подробнее об этом см., например, в монографии [30]). Следовательно, каждому S соответствует свое значение энергии системы двух атомов $E(S)$. Полный спин системы пробегает $2S_b + 1$ значений (для определенности мы считаем, что $S_a > S_b$) от $S_a - S_b$ до $S_a + S_b$, и соответственно энергия двух атомов может принимать $2S_b + 1$ значений. Их можно описать с помощью эффективного спинового гамильтониана имеющего $2S_b + 1$ констант:

$$E(S) = E - J_{ab}^{(1)}S_aS_b - J_{ab}^{(2)}(S_aS_b)^2 - \ldots - J_{ab}^{(2S_b)}(S_aS_b)^{2S_b}. \tag{2.12}$$

Это означает, что гамильтониан обменного взаимодействия двух многоэлектронных атомов не имеет, вообще говоря, простого гейзенберговско-

го вида (2.6). Существенно, однако, что в первом приближении по перекрытию волновых функций атомов a и b, когда учитывается обмен лишь одной парой электронов между атомами, все $J_{ab}^{(i)}$, кроме $J_{ab}^{(1)}$, равны нулю (Г.М. Недлин, [187]). Поэтому, как правило, можно использовать гейзенберговское приближение (2.6) и для обменного взаимодействия между многоэлектронными атомами. Лишь в редких случаях учитывают слагаемое, пропорциональное $J_{ab}^{(2)}$, называя его *биквадратным обменом.*

2.4. Косвенные обменные взаимодействия. Нужно сказать, что в магнитных диэлектриках парамагнитные ионы, как правило, не являются ближайшими соседями и разделены диамагнитным ионом (кислородом, фтором). Поэтому их волновые функции не перекрываются и их прямое обменное взаимодействие, о котором шла речь выше, отсутствует.

Однако обменное взаимодействие возникает при учете членов более высоких порядков теории возмущения по интегралам перекрытия волновых функций парамагнитного и диамагнитного ионов. Один из механизмов такого обмена, предложенный А. Крамерсом и П. Андерсеном [39], связан со смешиванием состояния магнитного и немагнитного ионов. Действительно, даже в ионных кристаллах электроны не локализованы полностью на ионах, и существует отличная от нуля вероятность того, что один из электронов диамагнитного иона c (обозначим его $1c$) перейдет на соседний парамагнитный ион a. Так как исходный гамильтониан системы не зависит от спинов, этот переход произойдет без переворота спина. В результате спин электрона $1c$ остается антипараллельным спину второго, теперь уже неспаренного электрона на ионе (электрона $2c$). Поэтому два обменных взаимодействия — обмен неспаренного электрона иона a с пришельцем $1c$ и обмен электрона другого парамагнитного иона b с неспаренным электроном $2c$ на ионе c — приведут к тому, что полная энергия тройки ионов $a - c - b$ будет зависеть от взаимной ориентации спинов S_a и S_b. Это и означает возникновение обменного взаимодействия парамагнитных ионов a и b, разделенных диамагнитным ионом c. Такое взаимодействие получило название *суперобмена* или *косвенного обмена.* Существует и ряд других механизмов непрямого обмена, соответствующих различным слагаемым теории возмущений для энергии тройки ионов $a - c - b$. (См., например, обзоры [39, 40], монографию [30] и др.).

Понятно, что вычисление обменных интегралов для конкретных кристаллов — чрезвычайно громоздкая задача, требующая применения вычислительных машин, привлечения данных по спектроскопии ионов, необходимых для разумного выбора исходных волновых функций и т.д. и т.п. Все это, разумеется, не является нашей задачей. Впредь мы будем считать обменный интеграл J_{ab} между ионами кристалла a и b феноменологической константой, величину которой можно определить экспериментально. При изучении нелинейных свойств спиновых волн в этой книге мы будем исходить из гейзенберговского приближения для обменного гамильтониана магнетика:

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = -\sum_{a,\,b} J_{ab} \boldsymbol{S}_a \boldsymbol{S}_b. \tag{2.13}$$

Весь этот параграф не следует рассматривать как вывод формулы для $\mathcal{H}_{\text{ex}}$. Мы хотели лишь продемонстрировать два обстоятельства: во-первых,

то, что природа обменного взаимодействия проста: это часть кулоновского взаимодействия электронов, связанная с принципом Паули. Во-вторых, то, что конкретное вычисление обменных интегралов в реальных кристаллах не только затруднительно, но и не обязательно при изучении нелинейных свойств спиновых волн.

§ 3. Релятивистские взаимодействия

Обменное взаимодействие является самым сильным, но не единственным взаимодействием между магнитными ионами магнетика. Наряду с ним важную роль играют релятивистские взаимодействия: диполь-дипольное между магнитными моментами электронов и спин-орбитальное между спиновыми и орбитальным моментами электрона. Во-первых, они приводят к появлению эффективной *энергии анизотропии,* устанавливающей выделенные направления намагниченности относительно кристаллографических осей. Во-вторых, они приводят к возникновению процессов, в которых не сохраняется число спиновых волн. В результате устанавливается полное термодинамическое равновесие в системе. Более подробно эти вопросы будут обсуждаться ниже. Здесь же мы только выпишем и обсудим выражение для энергии этих взаимодействий. Начнем с магнитного диполь-дипольного

$$\mathcal{H}_{dd} = 2\mu^2 \sum_{a,\,b} R_{ab}^{-5}[(\boldsymbol{S}_a\boldsymbol{S}_b)R_{ab}^2 - 3(\boldsymbol{S}_a\boldsymbol{R}_{ab})(\boldsymbol{S}_b\boldsymbol{R}_{ab})]. \tag{3.1}$$

Здесь так же, как и раньше, $\boldsymbol{R}_{ab} = \boldsymbol{R}_a - \boldsymbol{R}_b$ – расстояние между атомами. Энергия диполь-дипольного взаимодействия в расчете на один атом есть $4S^2\mu^2/a^3$, где a – постоянная решетки. Соответствующее ей значение температуры магнитного упорядочения порядка 0,25 К. Это значительно меньше, чем экспериментально наблюдаемая температура Кюри T_c, лежащая в пределах от 10 до 1000 К, обусловленная обменным взаимодействием.

Другим релятивистским взаимодействием является спин-орбитальное, оператор которого имеет вид

$$\mathcal{H}_{so} = \lambda(\boldsymbol{LS}). \tag{3.2}$$

Здесь $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{S}$ – операторы механического и спинового моментов атома, λ – параметр связи. По порядку величины $\lambda \approx (v/c)^2 E_a$, где v – характерная скорость электрона в атоме, c – скорость света, E_a – атомная энергия порядка 1 Ридберга, т.е. 10 эВ. Обычно $\lambda \approx 10^{-2}$ эВ. Энергия (3.2) зависит от ориентации $\boldsymbol{S}$ относительно $\boldsymbol{L}$. С другой стороны, энергия иона в "кристаллическом" электрическом поле зависит от ориентации $\boldsymbol{L}$ относительно решетки, ибо различным L_z соответствуют разные волновые функции. Поэтому во втором порядке теории возмущений по гамильтониану (3.2) возникает зависимость энергии иона от ориентации его спина относительно кристаллографических осей. Ее можно описать эффективным спиновым гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{ef}^{(2)} = \lambda_{\alpha\beta}^{(2)} S_\alpha S_\beta, \qquad \alpha, \beta = x, y, z, \tag{3.3}$$

в котором $\lambda^{(2)} \approx \lambda^2/\Delta$, где Δ – расщепление уровней иона с различными L кристаллическим полем. Так как $\Delta \approx 1$ эВ, то $\lambda^{(2)} \approx 10^{-4}$ эВ ≈ 1 К.

Если же основное состояние иона синглетное ($L = 0$), то $\lambda^{(2)}$ еще меньше, ибо тогда анизотропия возникает из-за примесей состояний с $L \neq 0$ в основном состоянии. В результате в различных кристаллах $\lambda^{(2)} \approx \approx 0{,}01 \div 1$ К, что соответствует эффективному полю кристаллографической анизотропии $H_a \approx 0{,}1 \div 10$ кЭ. В одноосных кристаллах $\lambda^{(2)}_{\alpha\beta} = \widetilde{\lambda}\delta_{\alpha\beta} + \widetilde{\lambda}_1\delta_{zz}$. При $\widetilde{\lambda}_1 < 0$ поле анизотропии стремится ориентировать спины по оси z. Тогда говорят, что "кристалл имеет анизотропию типа *легкая ось*". При $\lambda_1 > 0$ анизотропия ориентирует спины перпендикулярно оси z. Это анизотропия типа *легкая плоскость*.

Если же ближайшее окружение иона имеет кубическую симметрию, то $\widetilde{\lambda}_1 = 0$ и $\mathcal{H}^{(2)}_{\text{ef}} = \text{const}$. Тогда во втором порядке теории возмущений по спин-орбитальному взаимодействию (3.2) кристаллографическая анизотропия отсутствует. Она возникает только в четвертом порядке. При этом

$$\mathcal{H}^{(4)}_{\text{ef}} = \lambda^{(4)}_{\alpha\beta\gamma\delta} S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta , \tag{3.4}$$

где $\lambda^{(4)} \approx \lambda^4/\Delta^3 \ll \lambda^{(2)} \ll \lambda$. Соответствующее поле кубической анизотропии будет еще меньше, чем поле одноионной анизотропии H_a, – порядка единиц – десятков Эрстед. В зависимости от знака определенной комбинации констант в (3.4) легкой осью будет направление [111] или [100].

В заключение нужно сказать, что учет перекрытия волновых функций ионов вместе со спин-орбитальным взаимодействием приводит к эффективному гамильтониану в виде (3.3), в котором спины принадлежат соседним атомам i, j, именно $\mathcal{H}_D \propto S_{\alpha j} S_{\beta j}$. Как уже отмечалось, это взаимодействие может привести к слабой неколлинеарности подрешеток [39, 23].

§ 4. Структура конкретных кристаллов

Мы не собираемся сколько-нибудь подробно описывать и классифицировать типы магнитных кристаллов. Для этого существуют специальные монографии [4, 11, 23, 31], обзоры [14], главы в книгах [2, 5, 6, 16, 21]. Здесь мы приведем структуры лишь тех магнетиков, которые наиболее часто используются в экспериментах.

4.1. Кристаллы со структурой шпинели. Они интересны тем, что на них была впервые проверена теория ферримагнетизма Нееля [2], представляющая обобщение теории молекулярного поля Вейсса на случай нескольких магнитных подрешеток. Структуру шпинели имеет большинство двойных окислов переходных металлов с формулой $A^{2+}B^{3+}_2O_4$. Здесь A^{2+} и B^{3+} обозначают двух- и трехзарядные ионы металлов. Шпинели образованы почти плотной упаковкой кислорода. Ионы металла расположены в октаэдрических и тетраэдрических пустотах, окруженных шестью и четырьмя ионами кислорода соответственно. Элементарная ячейка шпинели состоит из восьми формульных единиц (AB_2O_4) и содержит 32 атома кислорода, образующих 16 октаэдрических и 8 тетраэдрических узлов. Их обозначают буквами d и a соответственно. Ячейка образует куб с ребром $a \approx 8{,}5$ Å, состоящий из восьми октантов (кубиков с ребром $a/2$)

двух типов, каждый из которых характеризуется одинаковым расположением ионов. Октанты различных типов имеют общую грань (рис. 4.1).

В так называемых нормальных шпинелях катионы А находятся в тетраэдрических узлах, В – в октаэдрических. Это, например, ферриты $ZnFe_2O_4$, $CdFe_2O_4$.

В "обращенных" шпинелях катионы А и половина катионов В находятся в октаэдрах, вторая половина катионов В – в тетраэдрах. Это, например, ферриты марганца, лития, никеля. Феррит $MgFe_2O_4$ занимает промежуточное положение.

Если оба металла А и В парамагнитны, то шпинель, как правило, является ферримагнетиком с преобладающим межподрешеточным обменом

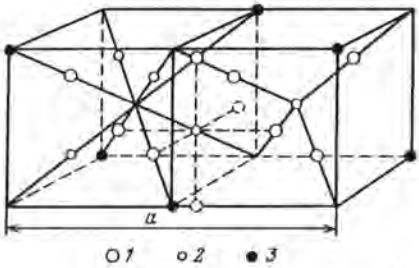


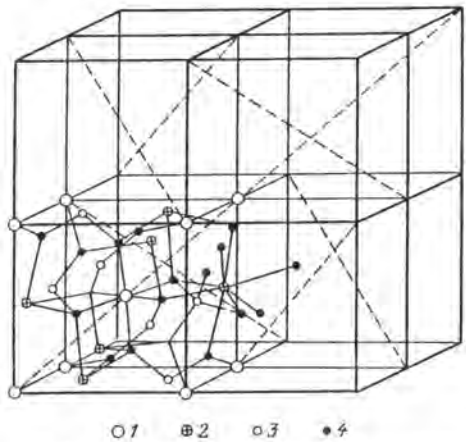
Рис. 4.1. Два из восьми октантов элементарной ячейки шпинели: *1* – кислород; *2* – металл в октаэдрических узлах *d*; *3* – металл в тетраэдрических узлах *a*

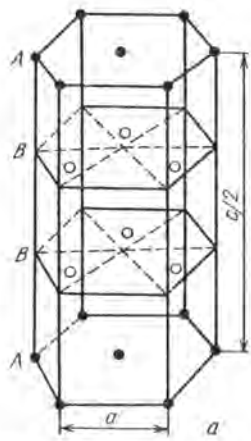
$|J_{AB}| \gg |J_{AA}|$, $|J_{BB}|$ антиферромагнитного знака. Намагниченности подрешеток А и В при этом антипараллельны.

Нормальные шпинели $ZnFe_2O_4$ и $CdFe_2O_4$, в которых магнитные ионы занимают только эквивалентные (октаэдрические) позиции, являются антиферромагнетиками. Это связано с антиферромагнитным знаком В – В-обмена, разбивающего совокупность узлов В на две магнитные подрешетки.

4.2. Кристаллы со структурой граната. Железо-иттриевый гранат (ЖИГ) – удивительное явление природы! В физике магнетиков он сыграл такую же роль, как германий в физике полупроводников, кварц в акустике кристаллов. Это произошло по ряду причин. Во-первых, у него высокая температура Кюри T_c = 560 К, позволяющая проводить эксперимент при комнатной температуре. Во-вторых, несмотря на то, что элементарная ячейка состоит из 80 атомов, каждый из которых должен найти свое единственное правильное положение, кристаллы ЖИГ научились выращивать так хорошо, что затухание звука в нем меньше, чем в кварце. В-третьих, он обладает самой узкой из известных в настоящее время линией ферромагнитного резонанса и самым малым затуханием спиновых волн. Все это делает его незаменимым не только в технике СВЧ, но и в экспериментальной физике магнетиков при изучении новых эффектов и явлений.

Элементарная ячейка ЖИГ – это половина куба с ребром a = 12,38 Å, состоящим из 4 одинаковых октантов – кубиков с ребром $a/2$, вмещающих по одной формульной единице (рис. 4.2). Расположение атомов в октанте не обладает кубической симметрией. Однако в элементарной ячейке октанты ориентированы так, что в целом она кубическая – группа симметрии O_h. Вершины и центры каждого октанта заняты катионами Fe^{3+}





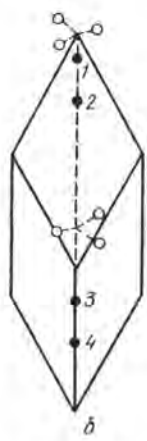


Рис. 4.2. Элементарная ячейка структуры граната: *1* – позиции *a*; *2* – позиции *c*; *3* – *d*; *4* – ионы кислорода

Рис. 4.3. Нижняя половина элементарной ячейки $CsMnF_3$ (A и B – ионы марганца) (*a*); элементарная ячейка FeO_3, Cr_2O_3: *1, 2, 3, 4* – ионы металла (*б*)

в октаэдрическом окружении (так называемая позиция *a*). Их координаты в первом октанте можно записать в виде: 0,0,0; 0,1/2,1/2; 1/2,0,1/2; 1/2,1/2,0; 1/2,1/2,1/2; 1/4, 1/4,1/4. Всего в элементарной ячейке 8 позиций *a*. Имеются также 12 тетраэдрических позиций (12*d*), занятых анионами Fe^{3+}, и 12 додекаэдрических позиций (12*c*), занятых анионами Y. Их координаты в первом октанте: позиции (12*d*) 3/8,0,1/4; 1/4,3/8,0; 0,1/4,3/8; позиции (12*c*) 1/8,0,1/4; 1/4,1/8,0; 0,1/4,1/8.

Анионы кислорода занимают общие положения. Позиции всех 80 атомов в элементарной ячейке $(Y_3Fe_2^{3+}Fe_3^{2+}O_{12})_4$ указаны, например, в монографии [31]. Итак, в ЖИГ есть две неэквивалентные позиции парамагнитных ионов железа – *a* и *d*. Поэтому в грубом приближении иногда считают ЖИГ двухподрешеточным ферримагнетиком. Однако это приближение не имеет области применимости (И.В.Колоколов, В.С.Львов, В.Б.Черепанов [122, 123]). При $T < 150$ К возбуждена только одна ветвь спектра спиновых волн, и ЖИГ можно считать ферромагнетиком. При больших T необходимо учитывать возбуждения по крайней мере еще четырех ветвей спектра.

Кроме иттриевого известны редкоземельные феррогранаты $R_3Fe_5O_{12}$, где R = Sm, Dy, Yb, Lu, Tm. У них редкоземельная подрешетка также магнитна, и число магнитных подрешеток еще больше, чем в ЖИГ.

4.3. Кристаллы с гексагональной структурой. Они характеризуются пространственной группой D_{6h}^4. Опишем вначале антиферромагнетик (АФМ) $CsMnF_3$, на котором Л.А.Прозоровой, Б.Я.Котюжанским и их коллегами были проведены очень интересные эксперименты по параметрическому возбуждению спиновых волн. Его элементарная ячейка содержит 6 формульных единиц, ионы Mn занимают два неэквивалентных положения A (2 иона) и B (4 иона) в центрах октаэдров, образованных ионами фтора

(рис. 4.3). Позиции А: 0,0,1/2. Позиции В: $1/3,2/3,u$; $1/3,\ 2/3,-u$; $2/3,1/3,1/2+u$; $2/3,1/3,-u$. Таким образом, в решетке чередуются слои Mn А и В в последовательности ABBABBA. В каждой плоскости упорядочение ферромагнитное, моменты лежат в плоскости, моменты всех соседних плоскостей антипараллельны. Таким образом, $CsMnF_3$ является чистым АФМ. В отличие от него, соединения $RbNiF_3$, $TlNiF_3$, $CsFeF_3$ кристаллизующиеся в той же структуре, являются ферримагнетиками. В этих кристаллах наблюдается сильный антиферромагнитный А – В-обмен и слабый ферромагнитный В – В-обмен. Поэтому эти кристаллы можно расматривать как квазидвумерные, образованные тройками сильно связанных ВАВ-плоскостей: (ВАВ) (ВАВ) ... Все моменты лежат в базисной плоскости, магнитное упорядочение плоскостей типа $(+-+)(+-+)(+-+)$ ...

В рассмотренной здесь структуре кристаллографическое окружение каждого магнитного иона характеризуется осью симметрии шестого порядка. Анизотропия в базисной плоскости возникает только в шестом порядке теории возмущений по спин-орбитальному взаимодействию и поэтому оказывается очень малой: $H \approx 1$ Э. В то же время одноосная анизотропия (типа легкой плоскости), возникающая во втором порядке теории возмущений, довольно велика – поле анизотропии порядка 10 кЭ.

4.4. Кристаллы с ромбоэдрической структурой. Наиболее примечательными представителями являются d-Fe_2O_3 и Cr_2O_3. На них была проверена теория Дзялошинского, связывающая возникновение слабого ферромагнетизма в АФМ с симметрией магнитного упорядочения [39, 23]. Пространственная группа этих кристаллов – D^6_{3d}. В элементарную ячейку входят две формульные единицы, т.е. четыре магнитных иона, расположенные на оси третьего порядка. Они упорядочены антиферромагнитно. При определенной последовательности чередования знаков спинов в элементарной ячейке возможен слабый ферромагнетизм, причем только тогда когда моменты лежат в базисной плоскости [39]. Эти условия реализуются в $MnCO_3$ при $950 > T > 250$ К. И действительно, экспериментально обнаружено, что это вещество обладает слабым ферромагнитным моментом в указанном интервале температур. Что касается Cr_2O_3, то в нем чередование спинов другого типа и в полном соответствии с теорией магнитный момент в нем отсутствует. К ромбоэдрическим кристаллам относятся также α-Fe_2O_3 – АФМ с анизотропией типа легкой плоскости со слабым ферромагнетизмом. Его температура Нееля – 32 К. Это вещество используется в экспериментах по параметрическому возбуждению спиновых волн. В отличие от $CsMnF_3$, оно обладает слабым ферромагнетизмом.

4.5. Другие магнитные структуры. Их мы подробно описывать не будем. Перечислим только некоторые кристаллы со структурой перовскита ($CaTiO_3$), имеющие формулу ABX_3, где X – кислород или фтор, А и В – металлы [46, 47], это $YFeO_3$, $KMnF_3$, $RbCoF_3$. Интересны магнитные кристаллы со структурой каменной соли: АФМ, MnO, FeO, CoO, NiO, ферромагнетики: EuO, EuS, EuSe (при $T < 2{,}8$ К). Подчеркнем, что в большом списке упомянутых кристаллов только эти три соединения европия являются простыми ФМ – с одной магнитной решеткой.

РАЗДЕЛ 2

ДИНАМИКА СПИНОВЫХ ВОЛН

ГЛАВА 2

КЛАССИЧЕСКИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ И СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В МАГНЕТИКАХ

Спиновые волны в магнитоупорядоченных диэлектриках обладают определенной спецификой, и традиционная программа обучения на физических факультетах обычно не предполагает ее изучения. Поэтому при описании нелинейных свойств системы взаимодействующих спиновых волн желательно использовать метод, не требующий знания спин-волновой специфики до тех пор, пока это действительно не будет необходимо для дальнейшего продвижения в изучении проблемы. С другой стороны, этот метод должен быть достаточно известным и удобным. Всеми этими качествами обладает классический гамильтонов формализм, описанный в этой главе применительно к спиновым волнам в магнитодиэлектриках. Для чтения этой главы не обязательно знакомство с физикой магнитоупорядоченных диэлектриков или хотя бы с одной из многочисленных монографий по магнетизму [1–31]. Почти достаточно будет сведений, изложенных в первой главе. В остальных случаях я пытался ограничиться ссылками на классическую монографию А.И.Ахиезера, В.Г.Барьяхтара, С.В.Пелетминского "Спиновые волны" [3].

Гамильтонов метод применим к широкому классу слабо взаимодействующих и слабо диссипативных волновых систем, он предельно четко проясняет их общие свойства. Действительно, уравнения движения для волн, записанные в естественных переменных среды, могут сильно отличаться друг от друга. Так, уравнения Блоха, описывающие движения магнитного момента, совершенно не похожи на уравнения Максвелла в нелинейном диэлектрике. Последние кардинально отличаются от уравнений Эйлера для сжимаемой жидкости. Между тем спиновые электромагнитные и звуковые волны – это прежде всего волны, т.е. колебания среды, передающиеся из одной точки в другую. Если мы интересуемся только особенностями распространения волны малой амплитуды, например, явлением дифракции, то совершенно не обязательно знать, что именно колеблется – магнитный момент, электрическое поле или плотность среды. Вся информация о свойствах среды, необходимая и достаточная для изучения распространения в ней невзаимодействующих волн, содержится в их законе дисперии $\omega(\boldsymbol{k})$. Точно так же в остальных коэффициентах разложения

гамильтониана ее содержится ровно столько, сколько необходимо для изучения нелинейных свойств волновой системы, и ничего лишнего. Поэтому ясно, что две системы волн с близким законом дисперсии и похожими k-зависимостями "существенных" коэффициентов гамильтониана взаимодействия будут характеризоваться одинаковым нелинейным поведением. При этом их уравнения движения в естественных переменных могут выглядеть совершенно различно.

Такими же качествами, позволяющими выявить общность различных волновых систем, обладает и метод вторичного квантования, в котором операторы, характеризующие естественные переменные среды, представляются через бозе-операторы рождения и уничтожения. Этот квантово-механический метод довольно часто используется в физике нелинейных волн, несмотря на то, что числа заполнения, при которых становятся существенными нелинейные эффекты, как правило, велики, и система волн является классической. Таким образом, при использовании мощного метода вторичного квантования на этапе формулировки задачи возникает постоянная Планка, которая затем благополучно сокращается в окончательных выражениях. Такая непоследовательность связана, видимо, с тем, что образование физика в наше время предполагает гораздо более подробное изучение квантовой механики, чем классической.

В задачах нелинейной волновой динамики нам представляется более логичным использовать классический гамильтонов метод, который позволяет избежать специфических, не адекватных задаче трудностей, связанных с некоммутативностью операторов a и a^*. Что касается простоты интерпретации и наглядности метода вторичного квантования, то гамильтонов метод обладает ими в равной мере, ибо комплексные канонические переменные a и a^* являются классическими аналогами (c-числами) бозе-операторов.

В § 5 будет развит классический гамильтонов формализм для волн в сплошной среде безотносительно к ее специфике: обобщены гамильтоновы уравнения движения на случай сплошной среды, изучена общая структура функции Гамильтона при малой нелинейности и сформулирована динамическая теория возмущений, позволяющая исключить нерезонансные члены в гамильтониане взаимодействия. При изложении этого параграфа я в значительной мере буду опираться на классический обзор В.Е.Захарова [106], обзор В.Е.Захарова, Е.А.Кузнецова [110] и курс лекций автора [159].

В следующих параграфах мы дадим гамильтонову формулировку задачи о нелинейной динамике спиновых волн – СВ – в магнетодиэлектриках. С прагматической точки зрения результатом этих параграфов будет вычисление коэффициентов гамильтониана СВ в ФМ и АФМ: закона дисперсии и матричных элементов гамильтониана взаимодействия. Сводка этих результатов с краткими комментариями содержится для ФМ в шестом, для АФМ в седьмом параграфах. При первом чтении ими и можно ограничиться, не вдаваясь в детали "внутреннего устройства" магнетодиэлектриков, необходимые для вычисления коэффициентов гамильтониана. Это и есть достоинство гамильтонова метода – возможность отделить изучение динамики волн в рамках стандартного гамильтониана (5.22) – (5.24) от всего остального, связанного с конкретной спецификой среды.

Все остальное в нашем случае – это вторая половина главы: §§ 8–10. Она будет интересна в первую очередь тем, для кого нелинейная динамика СВ – это метод изучения магнетодиэлектриков. В § 8, во-первых, приводится и комментируется словесный "вывод" уравнений движения для намагниченности, во-вторых, эти уравнения записываются в каноническом гамильтоновом виде. В § 9, исходя из спинового гамильтониана в ФМ, мы получаем выражение для его энергии в приближении сплошной среды, входящее в уравнения движения для намагниченности, и только после этого в § 10 оказывается возможным непосредственно приступить к вычислению коэффициентов спин-волнового гамильтониана по формальной схеме, описанной в § 5, и с помощью канонических переменных, полученных в § 8.

Читатель, который захочет пройти и пройдет через все нагромождение фактов и формул этой главы, осилив ее до конца, безусловно, должен быть вознагражден. Прежде всего чувством собственного удовлетворения. Потом, возможно, приобретенной точкой зрения на спиновые волны в магнетодиэлектриках, как на интересный и относительно простой объект исследования в физике нелинейных волновых явлений. И наконец, пониманием того, что в действительности все обстоит значительно сложнее, чем это может показаться. Например, неясны сейчас границы применимости описанного подхода при конечных температурах. Неясно, на сколько процентов мы ошибаемся в матричных элементах гамильтониана взаимодействия при $T = \frac{1}{2} T_c$, даже если подставить в соответствующие выражения измеренные при данной температуре значения намагниченности и других характеристик магнетодиэлектрика. Неясно и многое другое. Детальное изучение этих тонких и сложных проблем еще предстоит. Сейчас же можно только выразить уверенность в том, что описанный в этой главе простой гамильтонов метод описания динамики магнетодиэлектриков, безусловно, содержит значительную часть правды о спиновых волнах.

§ 5. Гамильтонов формализм для волн в сплошной среде

5.1. Гамильтоновы уравнения движения. Как хорошо известно, уравнения Гамильтона для системы с одной степенью свободы имеют вид [40]

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \tag{5.1}$$

Здесь функция Гамильтона $\mathcal{H}$ (именуемая в дальнейшем гамильтонианом) зависит от канонических переменных – обобщенной координаты q и обобщенного импульса p. Обычно $\mathcal{H}$ – это энергия системы, выраженная через канонические переменные. Системы с n степенями свободы характеризуются парами канонически сопряженных переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \tag{5.2}$$

где $\mathcal{H}$ – функция q_l, p_l. Сплошную среду в простейшем случае можно

характеризовать парой канонических переменных $q(\boldsymbol{r}, t)$, $p(\boldsymbol{r}, t)$ в каждой точке $\boldsymbol{r}$. Уравнения движения для $q(\boldsymbol{r}, t)$, $p(\boldsymbol{r}, t)$ получаются обобщением (5.2):

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p(\boldsymbol{r}, t)}, \qquad \frac{\partial p(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q(\boldsymbol{r}, t)}. \tag{5.3}$$

Гамильтониан $\mathcal{H}$ зависит от p и q во всех точках $\boldsymbol{r}$, т.е. является функционалом от $q(\boldsymbol{r}, t)$, $p(\boldsymbol{r}, t)$. Символы $\delta/\delta p$ и $\delta/\delta q$ обозначают вариационные производные, обобщающие понятия частных производных для случая континуального числа переменных. Правила обращения с ними кратко приведены в приложении 1.

Надо сказать, что уравнения (5.3) описывают динамику только одного типа волн, например звука. Для того чтобы учесть несколько типов волн или несколько поляризаций, необходимо характеризовать среду в каждой точке $\boldsymbol{r}$ несколькими парами переменных $q_j(\boldsymbol{r}, t)$, $p_j(\boldsymbol{r}, t)$, $j = 1, \ldots$ Соответственно уравнения движения (5.3) обобщаются до вида

$$\frac{\partial q_j(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_j(\boldsymbol{r}, t)}, \qquad \frac{\partial p_j(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_j(\boldsymbol{r}, t)}. \tag{5.4}$$

5.2. Переход к комплексным переменным. Формальное преимущество гамильтонова метода – это симметричная форма записи уравнения для координаты q и для импульса p. Для того чтобы реализовать его, совершим вначале переход к новым каноническим переменным $Q(\boldsymbol{r}) = \lambda q(\boldsymbol{r})$, $P(\boldsymbol{r}) = p(\boldsymbol{r})/\lambda$, причем размерный множитель λ выберем так, чтобы P и Q имели одинаковую размерность. Затем введем комплексные переменные

$$a_j = (Q_j + iP_j)/\sqrt{2}, \qquad a_j^* = (Q_j - iP_j)/\sqrt{2}. \tag{5.5}$$

Для них

$$\sqrt{2}\,\frac{\partial a_j}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P_j} - i\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q_j},$$

$$\sqrt{2}\,\frac{\partial a_j^*}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P_j} + i\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q_j}.$$

Подставляя сюда $\mathcal{H}\{a, a^*\}$, получим

$$i\frac{\partial a_j}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_j^*}, \qquad -i\frac{\partial a_j^*}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_j}. \tag{5.6}$$

Второе из этих уравнений можно получить из первого комплексным сопряжением, и, следовательно, вместо двух вещественных уравнений (5.4) мы получим одно комплексное. В квантовой механике такой замене переменных соответствует переход от представления координата-импульс к представлению бозе-операторов рождения и уничтожения. Комплексные канонические переменные являются их классическими аналогами.

Разумеется, канонические переменные (5.5) являются далеко не единственными. Существует широкий произвол в выборе преобразований от канонических переменных (a, a^*) к другим переменным (b, b^*), в которых уравнения движения сохраняют канонический вид

$$i\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b^*}, \qquad -i\frac{\partial b^*}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b}. \tag{5.7}$$

Такие преобразования называются каноническими [32]. Условия каноничности для частного вида преобразований $b(\boldsymbol{r}, t) = b(a, a^*)$, $b^*(\boldsymbol{r}, t) = b^*(a, a^*)$, не содержащих явно времени, получены в приложении 2. Нужно сказать, что указанная возможность выбора различных канонических переменных является важным достоинством гамильтонова метода. Она позволяет каждый раз выбирать переменные, наилучшим образом приспособленные для решения данной конкретной задачи. И этой возможностью мы будем широко пользоваться.

5.3. Структура гамильтониана при малой нелинейности. В самых различных задачах нелинейной волновой динамики амплитуду волн можно характеризовать некоторым естественным безразмерным параметром ξ. Для звуковых волн этим параметром является отношение вариации плотности в звуковой волне к средней плотности среды, для волн на поверхности жидкости – отношение высоты поднятия к длине волны. Для СВ соответствующим безразмерным параметром ξ является угол прецессии магнитного момента. Когда параметр ξ порядка единицы, возникают явления, специфические для каждой задачи: звук "переходит" в ударные волны, на поверхностных волнах в жидкости образуются барашки, в ФМ происходит переворот намагниченности – возникает доменная стенка, которая, вообще говоря, может двигаться. Понятно, что рассматривать все эти явления с общей точки зрения неконструктивно. Однако, если параметр нелинейности волн ξ мал, специфика среды в значительной степени оказывается несущественной, и независимо от ее свойств динамику волн можно описывать в общих терминах: терминах закона дисперсии $\omega(\boldsymbol{k})$, групповой и фазовой скорости, вероятностей элементарных процессов взаимодействия с участием трех, четырех волн и т.д. В этом пункте мы продемонстрируем, как возникают эти понятия в рамках гамильтонова формализма при малом уровне нелинейности ξ.

Канонические переменные a_j, a_j^* мы выберем так, что они будут характеризовать амплитуду волн и обращаться в нуль в их отсутствие. Индекс $j = 1, \ldots, n$ характеризует поляризацию волн или их тип, ведь, вообще говоря, в средах могут одновременно возбуждаться различные волны: звук, свет и т.п. полагая a_j, a_j^* малыми. Разложим функционал $\mathcal{H}\{a_j(\boldsymbol{r}, t), a_j^*(\boldsymbol{r}, t)\}$ в ряд по степеням a_j, нулевой член $\mathcal{H}\{0, 0\}$ нас не интересует, так как он не входит в уравнения движения: $\delta\mathcal{H}\{0, 0\}/\delta a = 0$. Члены первого порядка $\mathcal{H}_1$ равны нулю, так как мы считаем, что в отсутствие волн среда находится в равновесии и, следовательно, гамильтониан минимален при $a_j = a_j^* = 0$. Таким образом, разложение $\mathcal{H}$ начинается с членов второго порядка:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_{\text{int}}. \tag{5.8}$$

Наиболее общая форма $\mathcal{H}_2$ такова:

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\{A_{ij}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')a_i(\boldsymbol{r})a_j^*(\boldsymbol{r}') +$$

$$+ \tfrac{1}{2}[B_{ij}^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')a_i(\boldsymbol{r})a_j(\boldsymbol{r}') + \text{к.с.}]\}. \tag{5.9}$$

Величина $\mathcal{H}_2$ вещественна (гамильтониан эрмитов), поэтому

$$A_{ij}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = A_{ji}^*(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}), \quad B_{ij}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = B_{ji}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}). \tag{5.10}$$

Кроме того, в пространственно-однородной среде A и B зависят только от разности координат и, если среди элементов симметрии среды есть инверсия, являются четной функцией этой разности. Тогда из (5.10) следует, что

$$A_{ij}(\boldsymbol{R}) = A_{ji}^*(\boldsymbol{R}), \quad B_{ij}(\boldsymbol{R}) = B_{ji}(\boldsymbol{R}). \tag{5.11}$$

Существенного упрощения гамильтониана можно добиться, совершая преобразование Фурье

$$a(\boldsymbol{k}) \equiv a_{\boldsymbol{k}} = \left(\frac{1}{V}\right)\int d\boldsymbol{r}a(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}, \quad a(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}, \tag{5.12}$$

где V – объем образца (среды, в которой распространяются волны). Мы считаем, что волновой вектор $\boldsymbol{k}$ является дискретной переменной. При необходимости можно обычным образом перейти от суммирования по $\boldsymbol{k}$ к интегрированию:

$$(2\pi)^3\sum_{\boldsymbol{k}} = V\int d\boldsymbol{k}. \tag{5.13}$$

Преобразование Фурье (5.12) является каноническим, но не унимодальным. Это означает, что уравнение Гамильтона (5.6) сохраняет свой канонический вид, однако новый гамильтониан отличается от старого множителем – делится на объем образца:

$$i\frac{\partial a_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} = \frac{\delta\mathcal{H}(a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}}^*)}{\delta a_{\boldsymbol{k}}^*}, \qquad \mathcal{H}(a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}}^*) = \mathcal{H}\{a(\boldsymbol{r}), a^*(\boldsymbol{r})\}/V. \tag{5.14}$$

Существенно то, что квадратичная часть гамильтониана оказывается диагональной по волновым векторам. Именно:

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{i,j}\sum_{\boldsymbol{k}}[A_{ij}(\boldsymbol{k})a_i(\boldsymbol{k})a_j^*(\boldsymbol{k}) + \tfrac{1}{2}(B_{ij}^*(\boldsymbol{k})a_i(\boldsymbol{k})a_j(-\boldsymbol{k}) + \text{к.с.})], \tag{5.15}$$

$$A_{\boldsymbol{k}} \equiv A(\boldsymbol{k}) = \int d\boldsymbol{R}A(\boldsymbol{R})\exp i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}, \quad B_{\boldsymbol{k}} = \int d\boldsymbol{R}B(\boldsymbol{R})\exp i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}. \tag{5.16}$$

Разумеется, это целиком связано с пространственной однородностью среды.

Гамильтониан (5.15) можно диагонализовать по "типам волн" i, j с помощью линейного преобразования

$$b_i(\boldsymbol{k}) = \sum_j [u_{ij}(\boldsymbol{k})a_j(\boldsymbol{k}) + v_{ij}(\boldsymbol{k})a_j^*(-\boldsymbol{k})], \tag{5.17}$$

матрицы $\hat{u}$ и $\hat{v}$ которого удовлетворяют условиям каноничности (П2.8). При соответствующем выборе этих матриц гамильтониан $\mathcal{H}_2$ приобретает вид

$$\mathcal{H}_2 = \sum_j \sum_k \omega_j(k) b_j(k) b_j^*(k). \tag{5.18}$$

В простейшем случае одной ветви колебаний $i = j = 1$ коэффициенты преобразования (5.17) легко записать в явном виде

$$\begin{aligned} u(k) &= [(A_k + \omega_k)/2\omega_k]^{1/2}, \quad \omega_k \equiv \omega(k) = \operatorname{sign} A_k (A_k^2 - |B_k|^2)^{1/2}, \\ v(k) &= -(B_k/|B_k|)[(A_k - \omega_k)/2\omega_k]^{1/2}, \quad u_k^2 - |v_k|^2 = 1. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Подчеркнем, что знак ω_k совпадает со знаком A_k (В.Е. Захаров, [106]). Отрицательные значения ω_k означают, что энергия среды уменьшается при возбуждении волн. Это возможно в отсутствие термодинамического равновесия. При существовании нескольких ветвей это сделать не так просто, хотя частоты $\omega_j(k)$ можно определить и не находя преобразования (5.17). Для этого нужно записать уравнения движения (5.14) для $a_j(k)$:

$$\frac{\partial a_j(k)}{\partial t} + i \sum_l [A_{lj}(k) a_l(k) + B_{lj}(k) a_l^*(-k)] = 0,$$

$$\frac{\partial a_j^*(-k)}{\partial t} - i \sum_l [A_{lj}^*(k) a_l^*(-k) + B_{lj}^*(-k) a_l(k)] = 0$$

и, подставляя a, $a^* \sim e^{-i\omega t}$, получить алгебраическое "секулярное" уравнение для определения частот ω:

$$\begin{vmatrix} A_{lj} - \omega\delta_{lj} & B_{lj} \\ B_{lj}^* & A_{lj}^* + \omega\delta_{lj} \end{vmatrix} = 0. \tag{5.20}$$

Здесь уместно подчеркнуть, что канонические переменные b, b^*, в отличие от квантовомеханических бозе-операторов, являются размерными величинами. Их размерность легко определить из (5.18), зная, что $\mathcal{H}$ имеет размерность плотности энергии, а ω_k – частоты:

$$[\mathcal{H}] = \text{г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^2, \quad [\omega] = \text{с}^{-1}, \quad [b_k^2] = \text{см}^{-1} \cdot 2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Как и следовало ожидать, размерность Vb^2 совпадает с размерностью постоянной Планка. Естественно также, что наш классический подход справедлив, когда $V|b|^2 \gg \hbar$, и квантовомеханические числа заполнения $V|b|^2/\hbar$ велики по сравнению с единицей.

Переменные $b_j(k)$ являются нормальными переменными линейной теории и поэтому особенно удобны для исследования нелинейных проблем. Специфические "линейные" трудности, присущие исследуемой модели среды, преодолеваются один раз: при поиске переменных b_j. В этих переменных линеаризованные уравнения движения становятся тривиальными:

$$\frac{\partial b_j(k)}{\partial t} + i\omega_j(k) b_j(k) = 0, \tag{5.21}$$

они описывают распространение свободных волн с законами дисперсии $\omega_j(k)$. Вся "линейная" информация, необходимая для изучения нелиней-

ных проблем, заключена в функциях $\omega_j(k)$. Вся информация о взаимодействии волн содержится в остальных коэффициентах разложения $\mathcal{H}$ в ряд по степеням b_j:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad \mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \ldots \tag{5.22}$$

Физический смысл $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$ легко понять из аналогии с квантовой механикой. Гамильтониан $\mathcal{H}_3$ описывает трехволновые процессы. В простом случае одного типа волн

$$\mathcal{H}_3 = \tfrac{1}{2} \sum_{123} (V_q b_1 b_2 b_3^* + \text{к.с.}) \delta(1 - 2 - 3) +$$

$$+ \tfrac{1}{3} \sum_{123} (U_q b_1^* b_2^* b_3^* + \text{к.с.}) \delta(1 + 2 + 3). \tag{5.23}$$

Здесь и далее мы будем использовать целый ряд сокращенных обозначений: $b_1, b_2, \ldots$ есть $b(k_1), b(k_2)$, $\delta(\ldots)$ – символ Кронекера, $\delta(1+2+3)$ есть $\delta(k_1 + k_2 + k_3)$, что выражает закон сохранения импульса. Далее, мультииндекс $q = (k_1, k_2, k_3)$, так что $V_q = V_{123} = V(k_1, k_2, k_3)$. Наконец,

$$\sum_{123} \equiv \sum_{k_1 k_2 k_3}, \quad \sum_{1+2=3} \equiv \sum_{k_1 k_2 k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3), \quad \sum_{1234} = \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4}.$$

Гамильтониан $\mathcal{H}_4$ описывает процессы с участием четырех волн:

$$\mathcal{H}_4 = \tfrac{1}{2} \sum_{1+2=3+4} W_p b_1^* b_2^* b_3 b_4 + \tfrac{1}{4} \sum_{1=2+3+4} (G_p b_1 b_2^* b_3^* b_4^* + \text{к.с.}) +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \sum_{1+2+3+4=0} (R_p^* b_1 b_2 b_3 b_4 + \text{к.с.}), \quad p \equiv (k_1, k_2, k_3, k_4),$$

$$\sum_{1+2=3+4} \equiv \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4). \tag{5.24}$$

Может возникнуть вопрос – до какого порядка по b, b^* следует разлагать гамильтониан $\mathcal{H}$? На такой общий вопрос можно дать столь же общий ответ: "$\mathcal{H}_5$ и члены более высокого порядка, вообще говоря, учитывать не следует". Аргументируется он так: поскольку разложение в ряд происходит по малому параметру, каждый последующий член меньше предыдущего и динамика системы волн будет определяться самым первым членом разложения в $\mathcal{H}_{\text{int}}$, т.е. $\mathcal{H}_3$. Однако трехволновые процессы могут оказаться запрещенными законами сохранения энергии-импульса. Действительно, если закон дисперсии волн ω_k – квадратичный со щелью:

$$\omega_k = \omega_0 + \alpha k^2, \tag{5.25}$$

то для малых k трехволновые процессы распада

$$\omega(k) = \omega(k') + \omega(k - k') \tag{5.26}$$

запрещены, ибо волна с минимальной энергией не может далее распадаться. В этом случае говорят, что спектр волн является нераспадным. Более детальный анализ (5.25) и (5.26) показывает, что трехволновые процессы (5.26) запрещены при $\alpha k^2 < 2\omega_0$. Можно показать, что нераспадными являются также степенные законы дисперсии без щели: $\omega_k \propto k^\beta$, когда $\beta < 1$. Во всех этих случаях нужно учесть следующий член разложения $\mathcal{H}_{\text{int}}$, т.е. $\mathcal{H}_4$.

Важно, что процессы с участием четырех волн, описываемые этим гамильтонианом, разрешены всегда. Это видно из законов сохранения для процессов рассеяния:

$$\omega(k) + \omega(k') = \omega(k+\kappa) + \omega(k'+\kappa), \tag{5.27}$$

которые разрешены при $\kappa \to 0$ при любом законе дисперсии. Следовательно, $\mathcal{H}_4$ и будет определять динамику системы волн с нераспадным спектром, а следующие члены разложения $\mathcal{H}_5$, $\mathcal{H}_6$, . . . будут описывать малые и, как правило, несущественные поправки.

Разумеется, реальная действительность и на сей раз богаче этой формальной схемы. Например, для СВ в ФМ даже в распадной части спектра необходимо учитывать не только $\mathcal{H}_3$, но и $\mathcal{H}_4$. Дело в том, что гамильтониан $\mathcal{H}_3$ возникает только из-за магнитного диполь-дипольного взаимодействия и имеет релятивистскую малость в сравнении с гамильтонианом $\mathcal{H}_4$, обусловленным обменным взаимодействием. В задачах о динамике волн на поверхности жидкости известны случаи, когда необходимо учитывать $\mathcal{H}_5$. Тем не менее, если нет специальных обстоятельств, в распадной части спектра достаточно учитывать только трехволновые процессы $\mathcal{H}_3$, а в нераспадной – четырехволновые $\mathcal{H}_4$.

5.4. Динамическая теория возмущений – исключение "нерезонансных" членов в гамильтониане. Интуитивно ясно, что при нераспадном законе дисперсии, когда трехволновые процессы запрещены законами сохранения, гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_3$, описывающий эти процессы, в каком-то смысле оказывается несущественным. Сейчас мы покажем, что в этом случае можно перейти к новым каноническим переменным c_k, c_k^* таким, что $\mathcal{H}_3\{c_k, c_k^*\} = 0$. При этом квадратичная часть гамильтониана сохраняет прежний вид

$$\mathcal{H}_2 = \sum_k \omega_k c_k^* c_k, \tag{5.28}$$

а в четырехволновом гамильтониане взаимодействия возникнут дополнительные слагаемые, квадратичные по матричным элементам $\mathcal{H}_3\{b_k, b_k^*\}$ в старых переменных. Эта цель достигается квазилинейным преобразованием

$$b_k = c_k - \sum_{12}\{U_{k12}c_1^*c_2^*\delta(k+1+2)(\omega_k+\omega_1+\omega_2)^{-1} +$$
$$+ (V_{k,12}c_1c_2 - 2V_{2,k\bar{1}}c_{\bar{1}}^*c_2)\delta(k-1-2)(\omega_k-\omega_1-\omega_2)^{-1}\}. \tag{5.29}$$

Здесь $\bar{k} \equiv -k$. Преобразование (5.29) является каноническим приближенно, с необходимой точностью. В этом можно убедиться с помощью соотношений (П2.6) и (П2.7).

Подставляя (5.29) в гамильтониан (5.22), легко убедиться, что действительно $\mathcal{H}_2\{c_k, c_k^*\}$ сохраняет вид (5.28), $\mathcal{H}_3 = 0$, а матричные элементы $\mathcal{H}_4$ приобретают дополнительные слагаемые. Мы выпишем их только для наиболее существенных для нас в дальнейшем процессов рассеяния $2 \to 2$:

$$\mathcal{H}_4 = \tfrac{1}{2}\sum_{1+2=3+4} T_{12,34}\, c_1^*c_2^*c_3c_4,$$

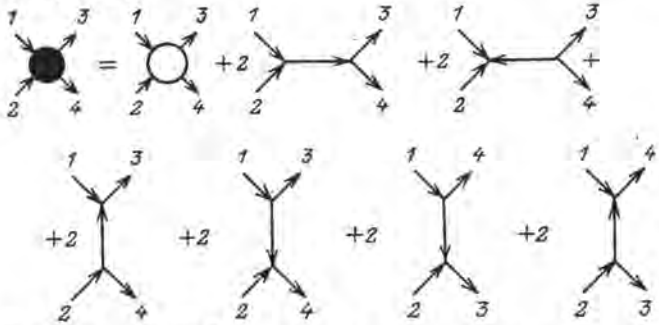
$$(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv p,$$

$$T_p = W_p - 2\frac{U_{\overline{(1+2)}12}U^*_{\overline{(3+4)}34}}{\omega_{(3+4)}+\omega_3+\omega_4} - 2\frac{V^*_{1+2,12}V_{3+4,34}}{\omega_{(1+2)}-\omega_1-\omega_2} -$$

$$-2\frac{V_{1,3(1-3)}V_{4,2(4-2)}}{\omega_{(4-2)}+\omega_2-\omega_4} - 2\frac{V^*_{2,4(2-4)}V_{3,1(3-1)}}{\omega_{(3-1)}+\omega_1-\omega_3} -$$

$$-2\frac{V^*_{2,3(3-2)}V_{4,1(4-1)}}{\omega_{(4-1)}+\omega_1-\omega_4} - 2\frac{V^*_{1,4(1-4)}V_{3,2(3-2)}}{\omega_{(3-2)}+\omega_2-\omega_3}. \qquad (5.30)$$

Здесь $(j \pm i) \equiv k_j + k_i$. Дополнительные слагаемые в T_p описывают процессы рассеяния, возникающие во втором порядке теории возмущений по трехволновым процессам. При этом на промежуточном этапе возникает "виртуальная" вынужденная волна, для которой не выполняется условие резонанса. В этой интерпретации каждому слагаемому в (5.30) можно сопоставить картинку:



(5.31)

В заключение необходимо напомнить, что вся описанная процедура принципиально основана на том, что преобразование (5.29) близко к линейному, что возможно, если частотные знаменатели не обращаются в нуль. А для этого необходимо, чтобы спектр волн был нераспадным. Другими словами, каноническими преобразованиями можно исключить только нерезонансные члены гамильтониана взаимодействия, для которых законы сохранения энергии-импульса не выполняются. Можно также сказать, что наилучшими в квазилинейном смысле каноническими переменными являются такие, для которых гамильтониан не содержит слагаемых, соответствующих запрещенным процессам.

§ 6. Гамильтониан спиновых волн в ферромагнетиках

Мы уже отмечали в первой главе, что классическим объектом для изучения нелинейной динамики СВ является кубический ферримагнетик – железо-иттриевый гранат – ЖИГ. При низких температурах относительные движения магнитных подрешеток (оптические магноны) не возбуждены, поэтому можно считать, что ЖИГ является ферромагнетиком. Именно поэтому мы начнем с гамильтониана СВ в ФМ с кубической симметрией. Ориентируясь на эксперимент, будем считать, во-первых, что внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}$ является пространственно-однородным. Во-вторых, что

образец имеет форму эллипсоида. Тогда магнитное поле внутри него также будет пространственно-однородным [3]:

$$H_{i,\alpha} = H_\alpha - 4\pi N_{\alpha\beta} M_\beta, \tag{6.1}$$

где $\boldsymbol{M}$ — намагниченность, а $N_{\alpha\beta}$ — тензор размагничивающих коэффициентов, сумма диагональных элементов которого равна единице. Наиболее технологичны в изготовлении образцы в форме сферы, длинного цилиндра и плоского диска. Для сферы, длинного (вдоль оси z) цилиндра и для плоского (поперек оси z) диска имеем соответственно

$$N_{\alpha\beta} = {}^1/_3\,\delta_{\alpha\beta}, \tag{6.2}$$

$$N_z \equiv N_{zz} = 0, \quad N_{\alpha\beta} = ½\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, \tag{6.3}$$

$$N_z \equiv N_{zz} = 1, \quad N_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = x, y. \tag{6.4}$$

И наконец, ограничимся случаем, когда поле $\boldsymbol{H}$ ориентировано по одной из главных осей эллипсоида, которая в свою очередь совпадает с одной из осей симметрии кристалла: осью четвертого (100), третьего (111) или второго порядка (110). Этого достаточно для того, чтобы намагниченность $\boldsymbol{M}$ в невозбужденном ФМ была параллельна $\boldsymbol{H}$.

6.1. Спектр спиновых волн. Приведем здесь результат вычисления частоты СВ, проделанного в последующих параграфах:

$$\omega_{\boldsymbol{k}}^2 = A_{\boldsymbol{k}}^2 - |B_{\boldsymbol{k}}|^2, \quad B_{\boldsymbol{k}} = ½\omega_M \sin^2\theta e^{2i\varphi} + \beta\omega_a, \tag{6.5}$$

$$A_{\boldsymbol{k}} = \omega_H - \omega_M N_z + \alpha\omega_a + \omega_{\text{ex}}(ak)^2 + ½\omega_M \sin^2\theta. \tag{6.6}$$

Здесь θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора $\boldsymbol{k}$ в сферической системе координат, ось которой ориентирована вдоль $\boldsymbol{M}$, угол φ отсчитывается от направления (100) в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{M}$, ω_H — круговая частота прецессии магнитного момента во внешнем поле:

$$\omega_H = gH, \tag{6.7}$$

где $g = \mu_0/\hbar$ — магнетомеханическое отношение для электрона, μ_0 — магнетон Бора, $g = 2\pi \cdot 2{,}8$ Мгц/Э — величина размерная, ее не следует путать с безразмерным g-фактором, примерно равным двойке у электрона.

Частоты ω_M и ω_a характеризуют магнитное диполь-дипольное взаимодействие и кристаллографическую анизотропию:

$$\omega_M = 4\pi gM, \tag{6.7}$$

$$\omega_a = gH_a. \tag{6.8}$$

Связь поля анизотропии H_a с общепринятой константой кубической анизотропии четвертого порядка K определена в § 10 формулой (10.3). Коэффициенты α и β зависят от ориентации магнитного поля $\boldsymbol{H}$ (и совпадающего с ней направления намагниченности) относительно кристаллографических осей (табл. 6.1).

Частота ω_{ex} характеризует обменное взаимодействие, по порядку величины $\hbar\omega_{\text{ex}} \sim T_c$, где T_c — температура магнитного упорядочения, обычно называемая температурой Кюри, a — постоянная решетки. Величину $\omega_{\text{ex}} a^2/2gM$ иногда называют константой неоднородного обмена и обозначают буквой α.

Таблица 6.1

Коэффициенты, характеризующие вклад энергии анизотропии в спектрСВ (6.5) и (6.25)

Ориентация намагниченности	α	β	γ
[100]	1	0	−9
[111]	−2/3	0	6
[110]	−1/2	−3/2	9/2

Обозначения в формуле (6.5) специально выбраны так, чтобы было удобно сравнивать вклады различных взаимодействий в частоту СВ ω_k (а впоследствии и в коэффициенты $\mathcal{H}_{\rm int}$). В качестве характерного масштаба удобно выбрать частоту ω_M и соответствующее ей магнитное поле $4\pi M$. Для ЖИГ при комнатной температуре $4\pi M = 1{,}75$ кЭ, $H_{\rm ex} = \omega_{\rm ex}/g = 390$ кЭ, $H_a = 0{,}084$ кЭ. При анализе экспериментальных данных полезно помнить, что полю $H = 1$ кЭ соответствует линейная частота $\nu = \omega/2\pi$, равная $2{,}8 \cdot 10^9$ Гц, круговая частота $1{,}76 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$ и температура 0,13 К. Видно, что в выбранном масштабе кубическая анизотропия ЖИГ является малой: $\omega_a/\omega_M = 0{,}05$. Мала она также и в ряде других кубических ФМ.

В первом приближении такие кристаллы можно считать изотропными. Это, однако, не означает, что кристаллографической анизотропией можно полностью пренебречь. Впоследствии мы увидим, что некоторые яркие проявления нелинейной динамики СВ принципиально связаны с наличием анизотропии.

Обменная частота $\omega_{\rm ex}$ существенно превышает ω_M. Так для ЖИГ $\omega_{\rm ex}/\omega_M \approx 220$. Из формулы (6.5) видно, что можно определить характерное значение волнового вектора k_M, при котором сравниваются вклады диполь-дипольного и обменного взаимодействий

$$\omega_{\rm ex}(ak_M)^2 = \omega_M. \tag{6.9}$$

Для ЖИГ $ak_M = 0{,}07$ и соответственно $k_M = 7 \cdot 10^5$ см$^{-1}$. В характерных экспериментах по параметрическому возбуждению СВ частота накачки лежит в диапазоне 10 или 36 ГГц (1 ГГц = 10^9 Гц), при этом в зависимости от величины H волновой вектор СВ может изменяться от $5 \cdot 10^3$ до $5 \cdot 10^6$ см$^{-1}$, следовательно, для нас оказываются существенными как диполь-дипольное, так и обменное взаимодействия. Зависимость (6.5) частоты СВ от $\boldsymbol{k}$ является довольно сложной. Ее можно изобразить (рис. 6.1) в виде семейства поверхностей постоянной частоты. При $\omega_k \gg \omega_M$ их форма близка к сферической:

$$\omega_k = \omega_H - \omega_M N_z + \omega_{\rm ex}(ak)^2 + \tfrac{1}{2}\omega_M \sin^2\theta. \tag{6.10}$$

При $\omega_k \sim \omega_M$ возникает перетяжка на экваторе поверхности $\omega_k = \text{const}$, и она напоминает гантель. При еще меньших k эта поверхность напоминает два скругленных конуса, соприкасающихся остриями. Как видно, при

$k \ll k_M$ важную роль играет зависимость ω_k от направления $\boldsymbol{k}$ при $\boldsymbol{k} \to 0$. Эта неаналитичность обусловлена дальнодействующим характером диполь-дипольного взаимодействия. Заканчивая анализ закона дисперсии СВ (6.5), мы хотим сделать еще два замечания. Во-первых, спектр СВ имеет щель. Минимальную частоту имеют СВ с $\boldsymbol{k} \to 0$, $\theta = 0$. В пренебрежении анизотропией

$$\omega_{\min} = \omega_H - \omega_M N_z = g(H - 4\pi N_z M). \tag{6.11}$$

Как видно из (6.1), эта частота соответствует прецессии магнитного момента во внутреннем поле H_i: $\omega_M = gH_i$.

При $H < 4\pi N_z M$ формула (6.11) уже не справедлива. Из (6.5) при этом следует, что ω_k^2 становится отрицательной при $\boldsymbol{k} \to 0$, $\theta = 0$ и, следовательно,

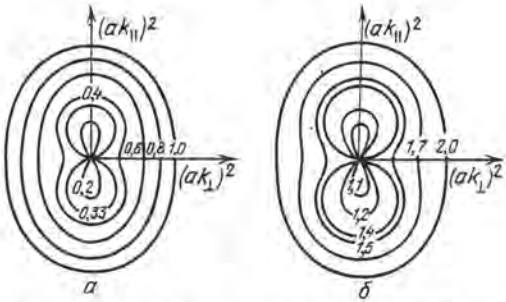


Рис. 6.1. Семейство поверхностей постоянной частоты для изотропного ферромагнетика: внутреннее поле $H_i = H - 4\pi N_z M$ выбрано равным 0,1 от $H_M = 4\pi M$ (*а*); $H_i = H_M$ (*б*). По вертикали отложена величина $(ak_{\parallel})^2$, по горизонтали – $(ak_{\perp})^2$. Цифры у кривых – отношение ω_k/ω_M

частота СВ становится чисто мнимой. В свою очередь это означает экспоненциальный рост амплитуд СВ, ибо $a_k(t) \backsim \exp(-i\omega_k t)$. Таким образом, при $H < 4\pi N_z M$ однородно намагниченное состояние ФМ оказывается неустойчивым, и образец разбивается на домены. Второе замечание касается области применимости формулы (6.5). Она справедлива только при $kL \gg 1$, где L – характерный размер образца. При меньших k само понятие волнового вектора теряет смысл, так как собственные колебательные моды образца уже не являются плоскими бегущими волнами. В ФМ такие моды принято называть *уокеровскими модами* (колебаний намагниченности). Они являются решением магнитостатического уравнения

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}) = 0 \tag{6.12}$$

с соответствующими граничными условиями на поверхности образца [3, 7, 34]. Простейшей уокеровской модой является однородная прецессия намагниченности – ОП. Можно сказать, что ОП – это СВ с $\boldsymbol{k} = 0$. Ее собственная частота ω_0 в пренебрежении кристаллографической анизотропией равна

$$\omega_0^2 = [\omega_H - \omega_M N_z + \tfrac{1}{2}\omega_M (N_x + N_y)]^2 - [\tfrac{1}{2}\omega_M (N_x - N_y)]^2. \tag{6.13}$$

Особенно простое выражение получается для сферы: $\omega_0 = gH$. Выражения для частот других уокеровских мод можно найти в [3, 7].

6.2. Оценка величины матричных элементов гамильтониана взаимодействия. Прежде всего рассмотрим вклад магнитного диполь-дипольного взаимодействия. Как хорошо известно [3], плотность его энергии W_M есть

$$8\pi W_M = H_M^2, \tag{6.14}$$

где H_M — это магнитное поле, создаваемое намагниченностью M. Из уравнений магнитостатики (6.12) следует, что

$$\boldsymbol{H}_M = -4\pi \boldsymbol{M}. \tag{6.15}$$

Эта оценка отличается от точного результата (6.1), приведенного без вывода, только фактором $N_{\alpha\beta} \approx 1$, учитывающим форму образца. Из (6.14), (6.15) следует

$$W_M \approx 2\pi M^2. \tag{6.16}$$

Предположим теперь, что в ФМ распространяется СВ, амплитуда которой характеризуется углом прецессии магнитного момента ξ_k. Разлагая W_M в ряд по ξ_k, получим

$$W_M = W_0 + W_2 + W_3 + \ldots \approx W_0 + 2\pi M^2 (A\xi_k^2 + B\xi_k^3 + C\xi_k^4 + \ldots). \tag{6.17}$$

Здесь безразмерные числовые коэффициенты A, B, C порядка единицы, ибо при $\xi \sim 1$ все члены ряда должны быть одного порядка величины. С другой стороны, квадратичное по ξ_k слагаемое должно иметь вид $\mathcal{H}_2 = \omega\,|\,a_k\,|^2$. Здесь характерная частота ω не может быть ни чем иным, кроме как частотой прецессии магнитного момента в поле H_M, т.е. $\omega = \omega_M$. Сравнивая W_2 и $\mathcal{H}_2$, имеем

$$\xi_k \approx a_k (2g/M)^{1/2}. \tag{6.18}$$

Подставляя ξ_k в разложение (6.17) для W_M и опуская несущественные числовые коэффициенты B и C, получаем оценки для диполь-дипольного вклада в матричные элементы трех- и четырехволнового гамильтониана взаимодействия:

$$V_M \approx \omega_M (2g/M)^{1/2} \to \omega_M (g/2M)^{1/2}, \tag{6.19}$$

$$W_M \approx \omega_M\, 2g/M \to \omega_M\, g/2M. \tag{6.20}$$

Справа от стрелки приведены точные выражения для матричных элементов. Отметим, что оценки (6.19), (6.20) (с точностью до чисел) можно получить просто из соображений размерности. Для этого из величин, характеризующих задачу, — намагниченности M и магнитомеханического отношения g — необходимо построить комбинации $M^\alpha g^\beta$, имеющие размерности матричных элементов V и W.

Можно показать, что остальные взаимодействия — обменное и кристаллографической анизотропии — не приводят к трехволновым процессам. Оценку для их вклада в $\mathcal{H}_4$ можно получить из (6.20), заменяя ω_M на соответствующие характерные частоты

$$W_{\text{ex}} \approx \omega_{\text{ex}} (ak)^2 g/2M, \qquad W_a \approx g\omega_a/2M. \tag{6.21}$$

Полученных здесь оценок матричных элементов гамильтониана взаимодействия бывает достаточно для вычисления грубых характеристик СВ, интегрально зависящих от матричных элементов $\mathcal{H}_{\text{int}}$, например, темпера-

турной зависимости намагниченности, частоты и затухания СВ. Однако другие нелинейные характеристики спиновой динамики, о которых будет идти речь в последующих параграфах, могут кардинально зависеть от тонких свойств матричных элементов $\mathcal{H}_{\text{int}}$ — деталей их угловых зависимостей и т.п. Поэтому остается единственный, хотя и не очень приятный путь — аккуратно вычислить $\mathcal{H}_{\text{int}}$, учитывая все сколько-нибудь заметные взаимодействия: обменное, дипольное, анизотропию и т.д. Все это будет проделано в §§ 8, 9. Здесь мы приведем только результаты вычислений.

6.3. Трехмагнонный гамильтониан. Вычисления показывают, что коэффициенты гамильтониана $\mathcal{H}_3$, задаваемого формулой (5.23), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{V}_{1,23} = \tfrac{1}{2}[(V_3 + V_2)u_1u_2u_3 + (V_2^* + V_3^*)v_1^*v_2v_3 + (V_1v_1^* + V_1^*u_1) * \\
&* (u_2v_3 + v_2u_3) + v_1^*(V_2u_2v_3 + V_3v_2u_3) + u_1(V_2^*v_2u_3 + V_3^*u_2v_3)], \\
&\widetilde{U}_{123} = \tfrac{1}{2}[V_1u_1(v_2u_3 + u_2v_3) + V_2u_2(u_1v_3 + v_1u_3) + \\
&+ V_3u_3(v_1u_2 + u_1v_2) + V_1^*v_1(v_2u_3 + u_2v_3) + \\
&+ V_2^*v_2(u_1v_3 + v_1u_3) + V_3^*v_3(u_1v_2 + v_1u_2)],
\end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}
&V_1 \equiv V(\boldsymbol{k}_1), \ldots, V(\boldsymbol{k}) = -Vk_z(k_x + ik_y)/k^2 = \\
&= -V\sin\theta_{\boldsymbol{k}}\cos\theta_{\boldsymbol{k}}\exp(i\varphi_{\boldsymbol{k}}), \qquad V = \omega_M(g/2M)^{1/2},
\end{aligned} \tag{6.23}$$

$u_{\boldsymbol{k}}$ и $v_{\boldsymbol{k}}$ — коэффициенты линейного канонического диагонализующего преобразования (5.19), в котором частота СВ $\omega_{\boldsymbol{k}}$ и коэффициенты $A_{\boldsymbol{k}}$ и $B_{\boldsymbol{k}}$ задаются формулами (6.5). Видно, что по порядку величины $V_{1,23}$ определяется простой оценкой (6.19). Для дальнейшего, однако, будут существенны угловые зависимости $V_{1,23}$, в частности то, что $V_{1,23}$ обращается в нуль, если все волновые векторы $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ ориентированы вдоль или поперек $\boldsymbol{M}$, т.е. $\theta_{\boldsymbol{k}} = 0$ или $\theta_{\boldsymbol{k}} = \pi/2$.

6.4. Четырехмагнонный гамильтониан взаимодействия. Общее выражение для матричных элементов $\mathcal{H}_4$ (5.24) слишком сложно, чтобы его здесь приводить. Поэтому мы рассмотрим несколько предельных случаев. Именно тех, которые понадобятся в дальнейшем. Начнем с ситуации, когда ω_M мало́ в сравнении с ω_H или $\omega_{\text{ex}}(ak)^2$. При этом $A_{\boldsymbol{k}} \gg |B_{\boldsymbol{k}}|$, и в $\mathcal{H}_4$ можно не делать $u - v$-преобразования, считая, что $a_{\boldsymbol{k}} \approx b_{\boldsymbol{k}}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&W_{12,34} = E_{12} + E_{34} + \tfrac{1}{4}(C_{13} + C_{14} + C_{23} + C_{24}) - \\
&- \tfrac{1}{4}(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) + W_a, \\
&E_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} = -\omega_{\text{ex}}a^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'g/2M, \qquad C_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} = C(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \\
&C(\boldsymbol{k}) = (g/M)\omega_M(k_z/k)^2, \qquad C(0) = \omega_M N_z g/M, \\
&D_{\boldsymbol{k}} = |B_{\boldsymbol{k}}|g/M = (g/M)\omega_M(k_+/k)^2, \quad k_+ = k_x + ik_y, \\
&W_a = \beta\omega_a g/2M.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Значения β приведены в табл. 6.1,

$$G_{1,234} = -\tfrac{1}{3}(g/M)(B_2 + B_3 + B_4). \tag{6.25}$$

Отказавшись от предположения $A_k \gg |B_k|$, мы запишем выражения для $W_{12,34}$ в случае, когда волновые векторы $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ и $\boldsymbol{k}_4$ удовлетворяют специальным соотношениям

$$S_W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = W(\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}; \boldsymbol{k}', -\boldsymbol{k}') = W_1(u_k^2 u_{k'}^2 + v_k^2 v_{k'}^2) + 4W_2 u_k u_{k'} v_k v_{k'} -$$
$$- \tfrac{1}{2}(g/M)\{v_k u_{k'}[u_k u_{k'}(B_k^* + 2B_{k'}^*) + v_k v_{k'}^*(B_{k'}^* + 2B_k^*)] +$$
$$+ v_{k'}^* u_k [u_k u_{k'}(2B_k + B_{k'}) + v_k v_{k'}^*(2B_{k'} + B_k)]\}, \tag{6.26}$$

$$T_W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \tfrac{1}{2}[W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'; \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') + W(\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}'; \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}')] =$$
$$= 2W_1 \operatorname{Re} u_k u_{k'} v_k v_{k'} + W_2(u_k^2 + |v_k|^2)(u_{k'}^2 + |v_{k'}|^2) -$$
$$- \tfrac{1}{2}(g/M)[(u_k^2 + |v_k|^2)\operatorname{Re}(B_k + 2B_{k'})v_{k'}^* u_k +$$
$$+ (u_{k'}^2 + |v_{k'}|^2)\operatorname{Re}(2B_k + B_{k'})v_k^* u_{k'}], \tag{6.27}$$

$$W_1 = [\omega_{\text{ex}}(ak)^2 - \omega_M]\, g/2M + W_a,$$
$$W_2 = \omega_M(N_z - 1)g/2M + W_a. \tag{6.28}$$

Кроме того, в четырехволновое взаимодействие существенный вклад вносят члены трехволнового гамильтониана во втором порядке теории возмущения. Общая формула для этого вклада приведена в § 5. Здесь нас интересует ее частный случай при $\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3$, $\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_4$; $\boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_4 = -\boldsymbol{k}_3$:

$$S_{12} = S_W(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) - 2\tilde{U}^*_{01\bar{1}}\, \tilde{U}_{022}\, (\omega_0 + 2\omega_k)^{-1} -$$
$$- 2\operatorname{Re}\tilde{V}^*_{01\bar{1}}\tilde{V}_{02\bar{2}}(\omega_0 - 2\omega_k)^{-1} - 4\tilde{V}_{1,25}\tilde{V}^*_{\bar{2},15}/\omega_5 - 4\tilde{V}_{1,\bar{2}6}\tilde{V}^*_{\bar{2},15}/\omega_6, \tag{6.29}$$

$$T_{12} = T_W(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) - |\tilde{U}_{216}|^2(\omega_6 + 2\omega_1)^{-1} - |\tilde{U}_{1\bar{2}\bar{5}}|^2(\omega_5 + 2\omega_k)^{-1} -$$
$$- |V_{6,12}|^2(\omega_6 - 2\omega_k)^{-1} - |V_{5,1\bar{2}}|^2(\omega_5 - 2\omega_k)^{-1} -$$
$$- 4\operatorname{Re}(\tilde{V}_{1,10}\tilde{V}_{2,20})/\omega_0 - 2(|V_{1,25}|^2 + |V_{2,\bar{1}5}|^2)/\omega_5 -$$
$$- 2(|V_{1,\bar{2}6}|^2 + |V_{\bar{2},1\bar{6}}|^2)/\omega_6. \tag{6.30}$$

Здесь $\boldsymbol{k}_5 = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_6 = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$, ω_0 – частота ОП, и предполагается, что $\omega(\boldsymbol{k}_1) = \omega(\boldsymbol{k}_2) = \omega(\boldsymbol{k})$. Второе и третье слагаемые в (6.30) обусловлены взаимодействием пар СВ с $\pm\boldsymbol{k}_1$ и $\pm\boldsymbol{k}_2$ через "виртуальную" ОП, последние два слагаемых – взаимодействием через "виртуальные" СВ с $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 \pm \boldsymbol{k}_2$. По порядку величины слагаемые (6.29), (6.30) такие же, как и непосредственный вклад диполь-дипольного взаимодействия в W, т.е. порядка πg^2 в полном соответствии с оценкой (6.20). Однако в важном частном случае, когда $\boldsymbol{k}_1 \perp \boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{k}_2 \perp \boldsymbol{M}$ (т.е. $\theta(\boldsymbol{k}_1) = \theta(\boldsymbol{k}_2) = \pi/2$), члены третьего порядка вообще не вносят вклад в $S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ и $T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$.

Важно отметить, что в формулах (6.24) – (6.28) частота анизотропии ω_a умножается на числовой коэффициент $9 \div 11$, в то время как ω_M делится пополам. Таким образом, относительный вклад ω_a в сравнении с ω_M увеличивается в 20 раз, что приводит к сильной кристаллографической анизотропии четырехволнового взаимодействия в "почти изотропных" ФМ с малым отношением ω_a/ω_M. Напомним, что в классическом ФМ – ЖИГ – $\omega_a/\omega_M \approx 1/20$.

В выражения для W_p входит размагничивающий фактор N_z (z – направление намагниченности). Это приводит к зависимости W от формы образца и направления намагниченности. Так, для нормально намагниченного диска $N_z = 1$, для касательно намагниченного диска $N_z = 0$. Все перечисленное дает экспериментатору редкую возможность изменять по своему желанию коэффициенты гамильтониана взаимодействия СВ. Для удобства работающих с экспериментаторами теоретиков можно даже написать на ручках установки, какие именно коэффициенты гамильтониана они изменяют.

§ 7. Гамильтониан спиновых волн в антиферромагнетиках

7.1. Спектр СВ в АФМ. Простейшие АФМ имеют две магнитные подрешетки и соответственно две ветви СВ. Квадратичная часть гамильтониана имеет стандартный вид (5.18):

$$\mathcal{H}_2 = \sum_k (\omega_k a_k^* a_k + \Omega_k b_k^* b_k). \tag{7.1}$$

Мы привели ее для того, чтобы договориться об обозначениях частот СВ в двух ветвях ω_k и Ω_k и нормальных канонических переменных a_k, b_k, в которых квадратичная часть гамильтониана диагональна. В одноосных АФМ с анизотропией типа "легкая ось" (АФМ ЛО) поле кристаллографической анизотропии $\boldsymbol{H}_a$ стремится удержать намагниченности параллельно этой оси (ее обычно называют осью z).

По аналогии с ФМ можно было бы предположить, что частоты СВ с $k \to 0$ должны соответствовать прецессии намагниченности подрешеток в поле $\boldsymbol{H}_a$, т.е. $\omega_0 = \Omega_0 = \omega_a$, где

$$\omega_a = gH_a. \tag{7.2}$$

Это, однако, неверно. Дело в том, что на намагниченность одной подрешетки $\boldsymbol{M}_1$, ориентированной вверх, действует поле анизотропии $\boldsymbol{H}_{a1}$, ориентированное также вверх: $\boldsymbol{H}_{a1} = \boldsymbol{H}_a$ На вторую подрешетку ($\boldsymbol{M}_2 = -\boldsymbol{M}_1$) действует другое поле $\boldsymbol{H}_{a2} = -\boldsymbol{H}_{a1}$. В результате подрешетки "хотят" прецессировать в разные стороны. При этом неизбежно должна нарушаться антипараллельность $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$, чему препятствует сильное обменное взаимодействие между подрешетками. В результате оказывается, что [3]

$$\omega_0^2 = \Omega_0^2 = (\omega_a + \omega_{\text{ex}})^2 - \omega_{\text{ex}}^2 \approx 2\omega_a\omega_{\text{ex}}, \qquad \omega_{\text{ex}} = gH_{\text{ex}}. \tag{7.3}$$

Здесь $\omega_{\text{ex}} = gH_{\text{ex}}$ характеризует величину антиферромагнитного обмена между подрешетками. Иногда для такой характеристики используется безразмерная "обменная константа" B: $H_{\text{ex}} = BM$.

Если к АМФ ЛО приложить внешнее магнитное поле вдоль оси $\boldsymbol{c}$, то эквивалентность подрешеток, приводящая к совпадению частот ω_0 и Ω_0, нарушается. При этом

$$\begin{gathered} \Omega_0^2 = 2\omega_a\omega_{\text{ex}} + \omega_H^2, \qquad \omega_0 = 2\omega_a\omega_{\text{ex}} - \omega_H^2, \\ \omega_H = gH. \end{gathered} \tag{7.4}$$

В критическом поле $H = (2H_aH_{\text{ex}})^{1/2}$ частота ω_0 обращается в нуль и развивается неустойчивость СВ, приводящая к смене основного состояния – опрокидыванию подрешеток [3].

В одноосных АФМ с анизотропией типа "легкая плоскость" (АФМ ЛП) поле анизотропии разворачивает моменты $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ в плоскость, перпендикулярную оси $\boldsymbol{c}$. Возможность почти беспрепятственных колебаний моментов в этой плоскости приводит к тому, что одна из частот СВ при $k \to 0$ оказывается малой – порядка gH. Вычисления, которые мы проделаем в следующем параграфе, показывают, что

$$\begin{aligned} \omega_{\boldsymbol{k}}^2 &= \omega_H(\omega_H + \omega_D) + 2\omega_{\text{ex}}(\omega_n + \omega_{ph}) + v_1^2 k_z^2 + v_2^2 k_\perp^2, \\ \Omega_{\boldsymbol{k}}^2 &= 2\omega_a \omega_{\text{ex}} + \omega_{\boldsymbol{k}}^2. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Здесь $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{c}$, v_1 и v_2 – продольная и поперечная скорости СВ, по порядку величины $v_{1,2} \approx v_{\text{ex}} a$, где a – постоянная решетки, $\omega_D = gH_D$, где H_D – поле Дзялошинского, возникающее из-за специфического релятивистского взаимодействия между подрешетками. Величина H_D обычно порядка нескольких килоэрстед. В ряде АМФ из-за симметрии $H_D = 0$. Оставшиеся два слагаемых в (7.5) ω_n и ω_{ph} обусловлены очень малым взаимодействием электронов с ядерными спинами и с кристаллической решеткой соответственно. Однако в формуле (7.5) эти частоты умножаются на самую большую частоту ω_{ex}, так что вклад этих малых взаимодействий в частоту $\omega_{\boldsymbol{k}}$ может оказаться вполне заметным. В АФМ этот феномен принято называть *обменным усилением малых взаимодействий*. Частота ω_n соответствует прецессии магнитного момента электрона в эффективном магнитном поле H_n, обусловленном сверхтонким взаимодействием электронов с ядром:

$$\omega_n = gH_n = A\langle I_z \rangle/\hbar. \tag{7.6}$$

Здесь A – константа сверхтонкого взаимодействия, $\langle I_z \rangle$ – среднее значение ядерного спина, обратно пропорциональное температуре. Например, для ядер марганца $H_n \approx (10/T)$ Э и "ядерная щель" $H_\Delta^2 = 2H_{\text{ex}}H_n$ оказывается порядка нескольких килоэрстед при $T = 4$ К (табл. 7.1).

Может возникнуть вопрос – откуда при $H = 0$ берется щель в спектре СВ, равная $gH_\Delta = (2\omega_{\text{ex}}\omega_n)^{1/2}$, если в этой ситуации задача обладает аксиальной симметрией относительно поворота моментов подрешеток в легкой плоскости? Ответ в том, что частота прецессии ядерных спинов Ω_n значительно меньше, чем частоты прецессии электронной подсистемы gH_Δ, gH_D, ... Поэтому ядерные спины из-зи сильной инерционности почти не принимают участия в электронных движениях, выстраиваясь вдоль среднего значения намагниченности подрешеток. Таким образом, возникает нарушение аксиальной симметрии кристалла, приводящее к появлению

Таблица 7.1

Феноменологические константы, определяющие спектр СВ в АФМ ЛП

Кристалл	T, K	M_0, кЭ	H_{ex}, кЭ	H_a, кЭ	H_Δ, кЭ	a, Å	$H_\Delta^2 T$, кЭ · К
$MnCO_3$	32,4	0,39	320	3,07	4,4	2,5	5,8
$CsMnF_3$	53,6	0,28	350	2,4	0	–	6,4

эффективных магнитных полей $\boldsymbol{H}_{n1} = \boldsymbol{H}_n$, $\boldsymbol{H}_{n2} = -\boldsymbol{H}_n$, действующих на подрешетки M_1, M_2 соответственно. А эти поля в соответствии с формулой (7.3) для АФМ ЛО приводят к прецессии электронных спинов с частотой $(2\omega_{ex}\omega_n)^{1/2}$. То же самое происходит и с магнитострикцией, приводящей к одноосной деформации кристалла, которая не успевает следить за прецессией моментов подрешеток. Эта деформация в свою очередь приводит к появлению эффективных полей $\boldsymbol{H}_{ph1} = -\boldsymbol{H}_{ph2} = \boldsymbol{H}_{ph}$ в легкой плоскости. Поле $\boldsymbol{H}_{ph}$ мало – оно пропорционально квадрату константы магнитострикции. Однако в результате обменного усиления магнитострикция может привести к заметному вкладу в частоту СВ. В кубических АФМ (например, в $RbMnF_3$) выражения для частот СВ имеют вид

$$\omega_k^2 = 3\omega_a\omega_{ex} + \omega_\Delta^2 + v^2k^2,$$
$$\Omega_k^2 = \omega_k^2 - {}^3/_2\,\omega_a\omega_{ex} + \omega_\Delta^2 + v^2k^2. \tag{7.7}$$

Здесь предполагается, что $\boldsymbol{H} \parallel [100]$ и его значение больше, чем поле опрокидывания $({}^3/_2 H_a H_{ex})^{1/2}$.

Во всех выражениях для частоты СВ в АФМ мы не учитывали диполь-дипольное взаимодействие. Дело в том, что магнитный момент $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2$ в АФМ, возникающий под действием внешнего магнитного поля и релятивистских взаимодействий, является малым. $M/M_0 \approx H_0/H_{ex}$. В соответствии с этим относительный вклад диполь-дипольного взаимодействия в частоту СВ оказывается, как правило, малым по параметру H_0/H_{ex}, что для большинства АФМ составляет $10^{-3} \div 10^{-4}$. Тем не менее, это взаимодействие может оказаться существенным при изучении тонких нелинейных свойств СВ в АФМ.

7.2. Гамильтониан взаимодействия СВ в АФМ ЛП. Наибольший интерес для экспериментов по нелинейным свойствам СВ представляют АФМ ЛП и кубические АФМ, имеющие низколежащие ветви СВ, частота которых попадает в удобный диапазон ниже 50 ГГц. Наиболее простая ситуация возникает в АФМ ЛП, у которых вторая ветвь СВ лежит значительно выше первой: $\Omega_k \gg \omega_k$. Именно для АФМ ЛП мы и выпишем результаты вычислений для интересующей нас части $\mathcal{H}_{int}$:

$$\mathcal{H}_3 = \sum_{1=2+3} [\tfrac{1}{2} V_q^{(1)} b_1 a_2^* a_3^* + V_q^{(2)} a_1 b_2^* a_3^* + \text{к.с.}] +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{1+2+3=0} [U_q b_1^* a_2^* a_3^* + \text{к.с.}] + \ldots, \qquad \boldsymbol{q} = (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3), \tag{7.8}$$

$$\mathcal{H}_4 = \tfrac{1}{2} \sum_{1+2=3+4} W_p a_1^* a_2^* a_3 a_4, \qquad \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_4), \tag{7.9}$$

$$V_q^{(1)} = -\tfrac{1}{4}[(2g\omega_{ex})/(M\omega_2\omega_3\Omega_1)]^{1/2}\omega_H(\Omega_1 + \omega_2 + \omega_3),$$
$$V_q^{(2)} = -\tfrac{1}{4}[(2g\omega_{ex})/(M\omega_1\omega_3\Omega_2)]^{1/2}\omega_H(\omega_1 - \Omega_2 + \omega_3), \tag{7.10}$$
$$U_q = -\tfrac{1}{4}[(2g\omega_{ex})/(M\omega_2\omega_3\Omega_1)]^{1/2}\omega_H(\Omega_1 - \omega_2 - \omega_3).$$

$$W_p = (9\omega_{ex}/8M)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 - \omega_{(1-3)}^2 - \omega_{(2-3)}^2 - \omega_{(1+2)}^2) \times$$
$$\times (\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4)^{-1/2}. \tag{7.11}$$

Так же, как и раньше, мы использовали сокращенную запись

$$\Omega_1 \equiv \Omega(k_1), \quad \omega_i = \omega(k_i), \quad \omega_{(1-3)} = \omega(k_1 - k_3).$$

Напомним, что при описании процессов рассеяния типа $2 \to 2$ нужно учитывать не только гамильтониан $\mathcal{H}_4$, но и гамильтониан $\mathcal{H}_3$ во втором порядке теории возмущений. Можно показать, что по параметру ω_k/ω_{ex} наиболее существенным будет вклад процессов с участием виртуальной волны из верхней ветви, гамильтониан которых явно выписан в (7.8). Используя формулу (5.30), получаем выражение для эффективного матричного элемента четырехволновых процессов:

$$T_p = W_p - \tfrac{1}{2}\{V^{(1)}_{5,12} V^{(1)*}_{5,34}[\omega(k_5) - 2\omega(k)]^{-1} +$$
$$+ u_{521} u^*_{\bar{5}34}[\omega(k_5) + 2\omega(k)]^{-1} + [V^{(2)}_{1,63} V^{(2)*}_{4,62} +$$
$$+ V^{(2)*}_{3,\bar{6}1} V^{(2)}_{2,64}]\omega^{-1}(k_6) + [V^{(2)}_{2,73} V^{(2)*}_{4,71} + V^{(2)*}_{3,\bar{7}2} V^{(2)}_{1,\bar{7}4}]\}\omega^{-1}(2k). \quad (7.12)$$

Здесь $\bar{1}$ соответствует $-k_1$, $k_5 = k_1 + k_2$, $k_6 = k_1 - k_3$, $k_7 = k_2 - k_3$. Из формул (7.10) – (7.12) можно увидеть, что диагональный вклад в T_p, возникающий из-за $\mathcal{H}_3$, того же порядка величины, что и W_p. Общее выражение для T_p довольно громоздко. Мы выпишем его в наиболее интересном для нас случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_k$ и $k_1 = k_3$, $k_2 = k_4$ или $k_1 + k_2 = 0$:

$$S(kk') \equiv T(k\bar{k}, k'\bar{k}'), \quad T(kk') \equiv T(kk', kk'),$$

$$S(kk') = T(kk') = -g^2 \frac{\omega_{ex}}{8\omega^2(k)} \left[\omega_0^2 + \omega_H^2 \frac{3\Omega_0^2 - 4\omega^2(k)}{\Omega_0^2 - 4\omega^2(k)} \right]. \quad (7.13)$$

В заключение этого параграфа укажем на одно обстоятельство, которое внимательный читатель должен был давно заметить: СВ в АФМ ЛП гораздо более нелинейны, чем в ФМ. Действительно, частоты СВ в АФМ ЛП и ФМ одного порядка величины $\omega_k \approx 2\pi \cdot (10 \div 30)$ ГГц при полях H порядка нескольких килоэрстед. В то же время в ФМ T_p порядка $g\omega_k/2M \approx \pi g^2$, а в АФМ ЛП T_p порядка $g\omega_{ex}/2M \approx g^2 B/2$. В $MnCO_3$ константа $B = \omega_{ex}/M = 800$ (см. табл. 7.1), в $CsMnF_3$ $B \approx 10^3$. Следовательно, четырехмагнонное взаимодействие СВ в АФМ ЛП на два порядка сильнее, чем в ФМ.

Итак, в §§ 5–7 этой главы мы записали гамильтоновы уравнения движения для слабо нелинейных волн и предъявили в готовом виде гамильтониан СВ в ферро- и антиферромагнетиках. Читатели, не интересующиеся рецептами магнитной кухни, могут пропустить вторую половину этой главы (§§ 8, 9) и перейти к третьей. С остальными мы рассмотрим в следующем параграфе уравнения движения для СВ и изучим простейший способ вычисления коэффициентов спин-волнового гамильтониана.

§ 8. Уравнения движения и канонические переменные

8.1. Уравнения движения магнитного момента. Последовательный вывод уравнений движений магнитного момента $M(r)$ при конечных температурах — это чрезвычайно сложная задача даже для длинноволновых колебаний. Решение этой проблемы означало бы, в частности, что мы определили температурные зависимости матричных элементов взаимодей-

ствия, частоты СВ, нашли их затухание и еще массу полезных вещей. При попытке получить все это строго и последовательно мы бы застряли в самом начале пути и забыли бы о нашей конечной цели – получить простой и понятный метод описания нелинейной динамики СВ при низких и промежуточных температурах. Поэтому мы сделаем несколько плохо контролируемых, но зато простых, в высшей степени "естественных" и столь же традиционных допущений. Процитируем для этого монографию [3], с. 44: "Благодаря сильному обменному взаимодействию между спинами отдельных атомов ферромагнетика его магнитный момент с большой степенью точности является "жестким", если только температура ферромагнетика достаточно низка". Иными словами, модуль вектора плотности магнитного момента лишь в очень слабой степени может зависеть от времени. Поэтому изменение со временем плотности магнитного момента должно в первом приближении носить характер прецессии, т.е. происходить по закону

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = g[\boldsymbol{H}_{\mathrm{ef}}(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)], \tag{8.1}$$

где $\boldsymbol{H}_{\mathrm{ef}}(\boldsymbol{r}, t)$ – некоторый вектор, который мы будем называть *эффективным магнитным полем*. Точно так же, рассуждая на принятом нами уровне строгости, можно утверждать, что уравнения движения (8.1) должны быть консервативными, т.е. сохранять полную энергию ФМ W. Действительно, если ничего, кроме СВ, описываемых уравнением (8.1), в нашей модели нет, то их полная энергия должна сохраняться. Поскольку W является функционалом от намагниченности,

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \int \frac{\delta W}{\delta \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)} \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} d\boldsymbol{r}.$$

Подставляя сюда $\partial \boldsymbol{M}/\partial t$ из уравнений движения (8.1), имеем

$$\frac{dW}{dt} = g \int \left(\frac{\delta W}{\delta \boldsymbol{M}} [\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{ef}}] \right) d\boldsymbol{r}.$$

Для того чтобы этот интеграл равнялся нулю при любом виде зависимости $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$, необходимо, чтобы вектор $\boldsymbol{H}_{\mathrm{ef}}$ был параллелен вектору $\delta W/\delta \boldsymbol{M}$. Коэффициент пропорциональности можно установить, рассматривая какую-нибудь простую ситуацию с заранее известным уравнением движения, например однородную прецессию магнитного момента в однородном поле $\boldsymbol{H}$. Тогда W – это энергия взаимодействия с внешним полем:

$$W = -\boldsymbol{H} \int \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}. \tag{8.2}$$

Вычисляя функциональную производную по правилу (П1.2), получим

$$\delta W/\delta \boldsymbol{M}_\alpha = -\boldsymbol{H}_\alpha. \tag{8.3}$$

Это означает, что искомый коэффициент пропорциональности есть минус единица:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{ef}} = -\delta W/\delta \boldsymbol{M}. \tag{8.4}$$

Таким образом, мы приходим к уравнениям движения

$$\frac{\partial M(r,t)}{\partial t} = g\left[\frac{\delta W}{\delta M}\cdot M\right]. \tag{8.5}$$

Разумеется, та непринужденная легкость, с которой я совместно с авторами монографии [3] производил манипуляции, приведшие к уравнению (8.5), отнюдь не гарантирует их правильности. Совместными усилиями мы упрятали под ковер много тонких и сложных вопросов. Некоторые из них будут обсуждаться значительно позже. Сейчас же мы будем исходить из уравнений (8.5), будучи твердо уверенными в том, что они дают хорошее первое приближение для описания СВ.

8.2. Канонические переменные для спиновых волн в ферромагнетиках. В уравнении (8.5) перейдем к круговым переменным

$$M_\pm = M_x \pm iM_y, \quad \frac{\partial M_\pm}{\partial t} = \pm 2igM_z, \quad M_z^2 = M_0^2 - M_+M_-. \tag{8.6}$$

Направление оси z разумно выбрать вдоль равновесного значения намагниченности. Тогда при малых амплитудах колебаний магнитного момента величины $M_\pm$ будут малы, а M_z будет близко к длине вектора M, т.е. M_0. Сравнивая (5.7) и (8.6), видим, что эти уравнения в линейном по $M_\pm$ приближении имеют гамильтонов вид, если в качестве канонических переменных a и a^* взять следующие величины:

$$M_-(2gM_0)^{-1/2}, \quad M_+(2gM_0)^{-1/2}.$$

Поэтому канонические переменные разумно искать в виде

$$M_+ = af(a^*a)\,(2gM_0)^{1/2}, \quad M_- = a^*f(a^*a)\,(2gM_0)^{1/2}, \quad f(0) = 1. \tag{8.7}$$

Подставляя (8.7) в (8.6), получим уравнение для $\dot{a}$, которое должно совпадать с каноническим (5.7). В результате получается дифференциальное уравнение для $f(|a|^2)$, единственным решением которого, удовлетворяющим условию $f(0) = 1$, является

$$f(x) = [1 - gx/2M_0]^{1/2}.$$

Таким образом, мы выразили "естественные переменные" ФМ M_z, $M_\pm$ через канонические:

$$M_+ = a[2gM_0(1 - ga^*a/2M_0)]^{1/2}, \quad M_- = M_+^*, \quad M_z = M_0 - ga^*a. \tag{8.8}$$

Энергия ФМ W, выраженная через канонические переменные, становится функцией Гамильтона (гамильтонианом) $\mathcal{H}(a^*, a)$. Нетрудно видеть, что преобразование (8.8) является классическим аналогом преобразования Гольштейна – Примакова [2,7]. Впервые для анализа нелинейных процессов в ФМ они использовались Е. Шлеманном и др. (1960 [234]).

Разумеется, этот выбор канонических переменных не является единственным. Так можно показать (см. задачу 2.1), что для уравнения (8.5) существуют другие канонические переменные, через которые вектор M выражается следующим образом:

$$M_z + iM_x = M_0[1 + g|b^* - b|^2/2M_0]^{1/2}\exp\{i(b^* + b)(g/2M_0)^{1/2}\},$$
$$M_y = i(\tfrac{1}{2}gM_0)^{1/2}(b^* - b). \tag{8.9}$$

Эти формулы являются классическим аналогом представления спиновых операторов через бозе-операторы, предложенного в работе В.Г. Барьяхтара, Д.А. Яблонского (1975 [55]).

Сравнивая формулы (8.8) и (8.9), можно увидеть, что переменные Гольштейна – Примакова a^*, a и Барьяхтара – Яблонского b, b^* совпадают в линейном приближении. Вопрос о преимуществе того или иного представления намагниченности через канонические переменные при решении конкретных задач мы обсудим ниже. Здесь же мы еще раз подчеркнем саму возможность широкого произвола при выборе переменных, в которых уравнения движения имеют канонический вид.

§ 9. Спин-волновой гамильтониан в ферромагнетиках и его энергия в приближении сплошной среды

9.1. Оператор Гамильтона. Как хорошо известно, в спиновой системе магнитодиэлектриков наиболее сильным является обменное взаимодействие, обеспечивающее само существование магнитного порядка. Основная часть этого взаимодействия описывается гейзенберговским гамильтонианом $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ (2.13). В динамике длинных СВ важную роль играет также диполь-дипольное взаимодействие $\mathcal{H}_{dd}$ (3.1). Необходимо учитывать также взаимодействие магнитных моментов электронов с однородным внешним магнитным полем $\boldsymbol{H}$:

$$\mathcal{H}_m = -2\mu_0 \sum_a (\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_a). \tag{9.1}$$

В § 3 мы показали, что спин-орбитальное взаимодействие приводит к появлению эффективной энергии магнитной анизотропии. В одноосных кристаллах (см. (3.3))

$$\mathcal{H}_a^{(2)} = \lambda^{(2)} \sum_a (S_{ax})_z^2. \tag{9.2}$$

В ФМ с кубической симметрией (см. (3.4))

$$\mathcal{H}_a^{(4)} = \lambda^{(4)} \sum_a \left((S_{ax})^4 + (S_{ay})^4 + (S_{az})^4\right). \tag{9.3}$$

В эти выражения включены только члены второго и четвертого порядков по спин-орбитальному взаимодействию. Иногда учитывают еще более слабые члены шестого порядка. В одноосных гексагональных кристаллах они приводят к анизотропии в "базисной плоскости", перпендикулярной главной оси симметрии шестого порядка.

Полный гамильтониан спиновой системы ФМ включает в себя, вообще говоря, все перечисленные слагаемые:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ex}} + \mathcal{H}_{dd} + \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_a. \tag{9.4}$$

В этом выражении не учитывается взаимодействие спиновой подсистемы кристалла с его другими подсистемами – фононами, экситонами и т.д.

9.2. Энергия ферромагнетика в приближении сплошной среды. В этом пункте мы обсудим классическое приближение для энергии ФМ в предположении, что магнитные моменты электронов на соседних узлах почти параллельны. Формально мы должны поступить следующим образом:

во-первых, записать классическое выражение для энергии ФМ, соответствующее гамильтониану (9.4). Во-вторых, внести понятие усредненной плотности магнитного момента, "размазывая" магнитный момент электрона по элементарной ячейке. В-третьих, перейти от суммирования по узлам к интегрированию по пространству. Проще всего это проделать для той части гамильтониана, которая содержит однократное суммирование по узлам. Именно из (9.1)–(9.3) легко получаем известные выражения для W_m и W_a:

$$W_m = -\int \boldsymbol{H}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}, \quad W_a^{(2)} = \tfrac{1}{4}(\lambda^{(2)}v_0/\mu_0^2)\int M_z^2(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r},$$
$$W_a^{(4)} = (\lambda^{(4)}v_0^3/16\mu_z^4)\int [M_x^4(\boldsymbol{r}) + M_y^4(\boldsymbol{r}) + M_z^4(\boldsymbol{r})]\,d\boldsymbol{r}. \tag{9.5}$$

Здесь $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ – плотность магнитного момента, v_0 – объем элементарной ячейки. Несколько более сложно выглядит преобразование выражения (5.1) для обменной энергии (см. задачу 2.2):

$$W_{ex} = \tfrac{1}{2}\alpha_{ik}\int \frac{\partial M_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial M_j}{\partial x_k}\,d\boldsymbol{r}, \tag{9.6}$$

$$\alpha_{ik} = (\tfrac{1}{8}\mu_0^2)\sum_n J(\boldsymbol{r}_n)\,r_i(n)\,r_k(n). \tag{9.7}$$

Здесь $r_i(n)$ – i-я проекция ($i = x, y, z$) координаты $\boldsymbol{r}_n$ магнитных атомов в решетке. При выводе выражений (9.6), (9.7) предполагалось, что расстояние l, на котором существенно изменяется обменный интеграл, мало в сравнении с расстоянием, на котором существенно меняется $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$.

Отметим, что выражение (9.6) для обменной энергии обладает большой общностью. В значительной мере оно не зависит от модельных предположений: величины спина, зависимости обменного интеграла от расстояния между атомами и т.п. Его можно рассматривать как феноменологическое выражение для энергии магнитной неоднородности. Действительно, если предположить, что, во-первых, эта энергия не зависит от ориентации намагниченности относительно кристаллографических осей, во-вторых, среди элементов симметрии кристалла есть инверсия, в-третьих, зависимость энергии от намагниченности квадратичная, то, пользуясь соображениями симметрии, можно получить выражение (9.6). Доказательство этого простого утверждения содержится, например, в монографиях [3,39], и мы его приводить не будем. Отметим только, что первое из сделанных предположений достаточно общее и следует из природы обменного взаимодействия, инвариантного относительно вращений всех спинов. Второе предположение мы сделали потому, что большинство магнитоупорядоченных диэлектриков именно таково. Что касается последнего предположения, то, строго говоря, оно справедливо только для случая $S = 1/2$, когда оператор обменного взаимодействия имеет гейзенберговский вид (2.13). При $S > 1/2$ приближение (2.13) иногда оказывается недостаточным, и необходимо учитывать дополнительное слагаемое, так называемый "биквадратный обмен", оператор которого выписан в п. 2.2. Ему соответствует дополнительное слагаемое в энергии магнитной неоднородности:

$$W_{ex}^4 = \tfrac{1}{2}\tilde{\alpha}_{ik}\int M_\alpha \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_i}\,M_\beta\,\frac{\partial M_\beta}{\partial x_k}\,d\boldsymbol{r}, \tag{9.8}$$

$$\tilde{\alpha}_{ik} = 1/(8\mu_0^4)\sum_a J(a)\,a_i a_k. \tag{9.9}$$

Выражение (9.9) получено в предположении, что существенны взаимодействия только ближайших соседей. В общем случае выражение (9.8) можно получить из соображений симметрии: инвариантности относительно вращений $\boldsymbol{M}$ и наличия инверсии.

9.3. Энергия диполь-дипольного взаимодействия. Гамильтониану $\mathcal{H}_{dd}$ (3.1) соответствует макроскопическая энергия

$$W_{dd} = \tfrac{1}{2} v_0^2 \sum_{a \neq b} R_{ab}^{-5} [(\boldsymbol{M}_a \boldsymbol{M}_b) R_{ab}^2 - 3(\boldsymbol{M}_a \boldsymbol{R}_{ab})(\boldsymbol{M}_b \boldsymbol{R}_{ab})]. \tag{9.10}$$

Переход к интегрированию в (9.10) не столь тривиален, хотя окончательное выражение для W_{dd} является простым:

$$W_{dd} = -\tfrac{1}{2} \int d\boldsymbol{r} [\boldsymbol{M}\boldsymbol{H}_m + 4\pi M^2/3 + \beta_{ik} M_i M_k], \tag{9.11}$$

$$\beta_{ik} = v_0 \sum_b \frac{\partial^2}{\partial R_{ab}^i \partial R_{ab}^k} \left(\frac{1}{R_{ab}} \right). \tag{9.12}$$

Здесь $\boldsymbol{H}_m$ – статическое магнитное поле, создаваемое непрерывным распределением магнитного момента $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$. Ясный и подробный вывод этих выражений содержится в монографии [3]. Поэтому мы его приводить не будем, ограничившись только обсуждением физического смысла этих выражений. Первое слагаемое в (9.11) – это хорошо известное выражение для магнитной энергии при непрерывном распределении магнитных диполей в пространстве, остальные учитывают дискретную структуру вещества. Они возникают из-за разницы между истинным значением магнитного поля в местах расположения диполей и усредненной величиной $\boldsymbol{H}_m$. Второе слагаемое в (9.11) учитывает это обстоятельство приближенно, аналогично тому, как это делается при вычислении поправки Лоренц – Лоренца к диэлектрической проницаемости кристалла. Именно, при вычислении магнитного поля $\boldsymbol{H}$, действующего на диполь, считается, что он находится внутри сферической полости (сферы Лоренца) в сплошной среде с непрерывным распределением намагниченности $\boldsymbol{M}$. Можно показать (см. ниже раздел о размагничивающих факторах), что

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_m + \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{M}. \tag{9.13}$$

С учетом этого понятно, что два первых слагаемых в (9.11) есть просто энергия взаимодействия диполей $-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{H})$. Наконец, последнее слагаемое в (9.11) учитывает отличие реальной дискретности кристалла от приближенной модели со сферой Лоренца. В кубических кристаллах из соображений симметрии $\beta_{ik} = \beta\delta_{ik}$. С другой стороны, из (9.12) следует, что $\mathrm{Sp}\,\beta_{ik} = 0$ и, следовательно, $\beta = 0$. Это означает, что в кубических кристаллах приближенная модель со сферой Лоренца дает точный результат. В одноосных же кристаллах

$$\beta_{ik} = \beta_i \delta_{ik}, \quad \beta_z \neq \beta_x = \beta_y, \tag{9.14}$$

и последнее слагаемое в (9.11) не обращается в нуль. Его можно представить в виде

$$-\frac{\beta_z - \beta_x}{2} \int M_z^2(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} - \frac{\beta_x}{2} \int M^2(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}. \tag{9.15}$$

Первое слагаемое здесь совпадает по форме с выражением (9.5) для $W_a^{(2)}$ и представляет, таким образом, диполь-дипольный вклад в энергию кристаллографической анизотропии. Впредь мы будем считать, что оно уже учтено в (9.5) соответствующей перенормировкой коэффициента $\lambda^{(2)}$. Оставшиеся слагаемые в (9.11) и (9.15), пропорциональные $M^2(\boldsymbol{r})$, представляют собой не интересующий нас постоянный вклад в энергию W, не зависящий от ориентации $\boldsymbol{M}$. Таким образом, в (9.11) можно оставить только первое слагаемое. Для того чтобы выразить его только через намагниченность, необходимо решать уравнения магнитостатики

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{9.16}$$

с соответствующими граничными условиями. В дальнейшем нас будут интересовать два случая:

Плоская волна:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{M} \rangle + [\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{k}} \exp(i\boldsymbol{kr}) + \text{к.с.}],$$

причем длина СВ $2\pi/k$ много меньше, чем размер образца.

Образец имеет форму эллипсоида, а $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = M = \text{const}$. Как хорошо известно, уравнения (9.16) решаются точно в обоих случаях. В первом случае

$$\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{k})\exp(i\boldsymbol{kr}) + \text{к.с.}], \quad \boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{k}) = -4\pi\boldsymbol{k}(\boldsymbol{km}_{\boldsymbol{k}})/k^2. \tag{9.17}$$

Во втором случае

$$H_{m,i} = -4\pi N_{ik} M_k, \quad \operatorname{Sp} N_{ik} = 1, \tag{9.18}$$

где N_{ik} – тензор "размагничивающих факторов", зависящий от формы эллипсоида. Теперь можно выразить энергию диполь-дипольного взаимодействия (9.11) через $\boldsymbol{M}$. Представим для этого $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ в виде разложения по плоским волнам:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{M} \rangle + \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{k}} \exp(i\boldsymbol{kr}). \tag{9.19}$$

Здесь мы считаем, что $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{k}} = 0$ при $k = 0$, а среднее значение намагниченности по образцу определено формулой

$$V\langle \boldsymbol{M} \rangle = \int \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}, \tag{9.20}$$

в которой V – объем образца. Подставляя разложение (9.19) в формулы (9.17), (9.18) и затем в (9.11), получим

$$W_{dd} = 2\pi V N_{ik} \langle M_i \rangle \langle M_k \rangle + 2\pi V \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{km}_{\boldsymbol{k}})(\boldsymbol{km}_{-\boldsymbol{k}})/k^2. \tag{9.21}$$

Напомним, что при выводе этого выражения предполагалось, что минимальный линейный размер образца много больше, чем $2\pi/k$. Это означает, что мы не учитываем уокеровские моды – собственные магнитостатические типы колебаний намагниченности с характерным размером порядка размера образца (см., например, § 11 в [3]). Единственная уокеровская мода, которая учитывается первым слагаемым в (9.21), – это однородная прецессия намагниченности – ОП. Впрочем, этот дефект выражения (9.21) не слишком существен, ибо в большинстве экспериментов, которые нас будут интересовать в дальнейшем, уокеровские моды (за исключением ОП) не возбуждаются.

Резюмируя результаты этого параграфа, можно сказать, что энергия ферромагнетика W – это сумма

$$W = W_m + W_a + W_{ex} + W_{dd}, \tag{9.22}$$

в которой энергия взаимодействия с внешним полем W_m, энергия кристаллографической анизотропии W_a, обменная энергия W_{ex} и энергия диполь-дипольного взаимодействия W_{dd} определяются выражениями (9.5), (9.6) и (9.21) соответственно. Теперь у нас уже все готово для того, чтобы определить закон дисперсии СВ и матричные элементы гамильтониана взаимодействия. Эти вычисления не содержат никаких принципиальных затруднений, и их предлагается сделать самостоятельно, решив задачи 2.3, 2.4.

Задачи

Задача 2.1. Показать, что для уравнения Блоха (8.5) каноническими переменными координата – импульс являются

$$q = M_x/g, \quad p = \varphi = \operatorname{arctg}(M_x/M_z). \tag{9.23}$$

Указание. Прямым дифференцированием с учетом связи $M^2(p, q) = M_0^2$ убедиться, что (8.5) в переменных (9.23) приводятся к виду (5.3). Далее, по описанной в § 5 схеме можно перейти от p, q к комплексным переменным b, b^*, через которые вектор M будет выражаться по формулам (8.9).

Задача 2.2. Используя гейзенберговский гамильтониан $\mathcal{H}_{ex}$ (2.13), получить выражения (9.6), (9.7) для обменной энергии в континуальном приближении.

Указание. Действовать по схеме, изложенной в § 9.2, и затем, разложив M в ряд по $(r - r')$, проинтегрировать по частям, предполагая, что кристалл имеет центр инверсии.

Задача 2.3. Вычислить коэффициенты спин-волнового гамильтониана в ферромагнетиках.

Указание. Удобно действовать в следующей последовательности: представить намагниченность в виде разложения по плоским волнам, далее выразить энергию ФМ (9.22) в виде ряда по степеням $M_k(t)$, затем в полученном выражении перейти к переменным Гольштейна – Примакова a_k, a_k^* (8.11), наконец, совершить $u - v$-преобразование (5.17) к каноническим переменным b_k, b_k^*, диагонализующим его квадратичную часть.

Задача 2.4. Вычислить закон дисперсии и коэффициенты гамильтониана взаимодействия СВ в АФМ с анизотропией типа "легкая плоскость". Исходить из феноменологического выражения для энергии АФМ ЛП в двухподрешеточной модели:

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}\int dr\ \{[BM^2 + \alpha_1(\partial L/\partial r)^2 + \alpha_2(\partial M/\partial r)^2] + \\ &+ bM_z^2 + aL_z^2 - 2\beta(n\,[ML]) - 2MH\}, \\ n &= r/r. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Здесь M_1, M_2 – намагниченности подрешеток, $M_1 = M_2 = M_0$, $M = M_1 + M_2$, $L = M_1 - M_2$, $\beta > 0$, $\alpha_{1,2} > 0$ – обменные константы, β – константа Дзялошинского [78], $a > 0$, b – константы анизотропии.

Указание. Удобно действовать в следующей последовательности: сначала из условия минимума энергии (9.23) найти конфигурацию моментов M_1^0, M_2^0 в основном состоянии, затем в двух вспомогательных системах координат, каждая из которых ориентирована по соответствующей намагниченности M_i^0 $(i = 1, 2)$, перейти к каноническим переменным (8.8) $C_i(r)$, $C_i^*(r)$ $(i = 1, 2)$ в каждой подрешетке так же, как и в ФМ, далее перейти к представлению Фурье $C(r) \to C_k$, и перейти к симметризованным переменным $\sqrt{2}\,d_\pm = C_1 \pm C_2$, при этом квадратичная часть гамильтониана окажется квазидиагональной, переменные d_+, d_+^* будут описывать одну ветвь СВ, а d_-, d_-^* – другую, потом с помощью преобразования (5.17) в каждой ветви диагонализовать квадратичные части гамильтониана, наконец, получить выражения для ω_k, Ω_k и $\mathcal{H}_{int}$ в этих переменных.

Замечание. Существенным моментом при $u - v$-преобразовании будет то, что $u \geqslant 1$, $v \geqslant 1$, в то время как $|u|^2 - |v|^2 = 1$. Это приводит к сокращению в $\mathcal{H}_{int}$ са-

мых больших слагаемых, пропорциональных Bu^4, Bu^2v^2 и заставляет проводить громоздкие вычисления очень аккуратно, удерживая в исходном выражении для энергии малые члены, вклад которых после умножения на степени u и v может стать существенным. Высказывалось мнение, что магнитное дипольное взаимодействие может таким образом привести к аномально большому вкладу в $\mathcal{H}_{\text{int}}$. Однако вычисления В.С. Лутовинова, В.Л. Сафонова [146] показали, что этого не происходит.

Приложение 1. **Вариационные производные**

Мы не хотим здесь приводить сколько-нибудь строгое определение этого понятия, которое удовлетворило бы математиков или хотя бы физиков-теоретиков. Для простых пешеходов мы собираемся пояснить несколько правил вычисления вариационных производных $\delta/\delta f(r)$. Они следуют из того, что $\delta/\delta f(r)$ обобщает понятие частной производной $\partial/\partial f(r_n)$ (r_n – дискретный набор точек) на случай континуального числа переменных.

1. Пусть I – следующий функционал от функции $f(r)$:

$$I = \int f(r)\,\varphi(r)\,dr, \tag{П1.1}$$

где $\varphi(r)$ – весовая функция. Для вычисления $\delta I/\delta f(r')$ можно мысленно заменить ее на частную производную, одновременно заменив интегрирование суммированием и получив окончательный результат, перейти обратно от дискретной к непрерывной форме записи. Например,

$$\frac{\delta}{\delta f(r)} \int \varphi(r')\,f(r')\,dr' \Rightarrow \frac{\partial}{\partial f(r_n)} \sum_m \varphi(r_m)\,f(r_m) =$$

$$= \sum_m \varphi(r_m)\,\frac{\partial f(r_m)}{\partial f(r_n)} = \sum_m \varphi(r_m)\,\delta(r_m, r_n) = \varphi(r_n) \Rightarrow \varphi(r).$$

Этот результат можно представить символической формулой

$$\delta f(r')/\delta f(r) = \delta(r - r'). \tag{П1.2}$$

2. Если в функционале на функцию f действуют дифференциальные операторы, то для того, чтобы воспользоваться правилом (П1.2), необходимо предварительно "перебросить их налево", выполняя интегрирование по частям. Например,

$$\frac{\delta}{\delta f(r)} \int \varphi\,\nabla f\,dr' = \frac{\delta}{\delta f(r)} \int f\,\nabla\varphi\,dr' = -\nabla\varphi(r). \tag{П1.3}$$

3. Остальные правила вычисления функциональной производной, которые нам могут понадобиться, совпадают с правилами для частных производных. Например,

$$\frac{\delta}{\delta f(r)} f^2(r') = 2f(r)\,\frac{\delta f(r)}{\delta f(r')}. \tag{П1.4}$$

Приложение 2. **Условия каноничности преобразований**

1. Пусть $a_j(r,t)$, $a_j^*(r,t)$ – канонические переменные, так что их уравнения движения имеют канонический вид (5.6). Введем новые переменные $b_i(r,t)$, $b_i^*(r,t)$ с помощью преобразований, не содержащих явно время:

$$b_i = f_i\{a_j, a_j^*\},\quad b_i^* = f_i^*\{a_j, a_j^*\}, \tag{П2.1}$$

Здесь f_i – некоторый функционал. Вычислим

$$\frac{\partial b_i}{\partial t} = \sum_j \int dr' \left[-i\,\frac{\delta b_i}{\delta a_j(r')}\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta a_j^*(r')} + i\,\frac{\delta b_i}{\delta a_j^*(r')}\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta a_j(r')} \right],$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta a_j(r')} = \sum_l \int dr'' \left[\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta b_l(r'')}\,\frac{\delta b_l(r'')}{\delta a_j(r')} + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta b_l^*(r'')}\,\frac{\delta b_l^*(r'')}{\delta a_j(r')} \right],$$

$$i\,\frac{\partial b_i}{\partial t} = \sum_j \int dr' \left[\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta b_j^*(r')}\,\{b_i(r)\,b_j(r')\}_{aa^*} + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta b_j(r)}\,\{b_i(r)\,b_j(r')\}_{aa^*} \right]. \tag{П2.2}$$

Мы ввели здесь обозначения для скобок Пуассона:

$$\{f(r)g(r')\}_{aa^*} = \sum_j \int dr'' \left[\frac{\delta f(r)}{\delta a_j^*(r'')} \frac{\delta g(r')}{\delta_j a(r'')} - \frac{\delta f(r)}{\delta a_j(r'')} \frac{\delta g(r')}{\delta a_j^*(r'')} \right]. \qquad (П2.3)$$

Потребовав, чтобы уравнения движения переменных b, b^* (П2.2) совпадали с каноническими уравнениями (5.6), получаем условие каноничности преобразований (П2.1):

$$\{b_i b_j\} = 0, \quad \{b_i(r) b_j^*(r')\} = \delta_{ij}\delta(r - r'). \qquad (П2.4)$$

Эти условия являются классическим аналогом перестановочных соотношений для бозе-операторов.

2. Пусть $a_j(k)$, $a_j^*(k)$ – канонические переменные, заданные в k-представлении. Нетрудно убедиться, что условие каноничности преобразования

$$b_j(k) = b_{jk}\{a_j(k), a_j^*(k)\} \qquad (П2.5)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} &\{a_j(k), a_i^*(k')\} bb^* = \delta_{ij}\delta(k - k'), \\ &\{a_j(k), a_i(k')\} bb^* = 0. \end{aligned} \qquad (П2.6)$$

Здесь $\{\ldots\}$ – скобки Пуассона

$$\{f_i(k), g_j(k')\}_{bb^*} = \sum_l \sum_{k''} \left[\frac{\delta f_i(k)}{\delta b_l(k'')} \frac{\delta g_j(k')}{\delta b_l^*(k'')} - \frac{\delta f_i(k)}{\delta b_j^*(k'')} \frac{\delta g_j(k')}{\delta b_j^*(k'')} \right]. \qquad (П2.7)$$

Некоторое отличие формул (П2.6) и (П2.7) от (П2.3) и (П2.4) возникло из-за того, что волновой вектор k является у нас дискретной величиной.

3. Рассмотрим линейную замену переменных вида (5.17). Вычисляя скобки Пуассона (П2.6), (П2.7), получим условие каноничности этого преобразования:

$$\begin{aligned} &\sum_j [u_{ij}(k) v_{lj}(k) - v_{ij}(k) v_{lj}^*(k)] = \delta_{il}, \\ &\sum_j [u_{ij}(k) v_{lj}(-k) - v_{ij}(k) u_{lj}(-k)] = 0. \end{aligned} \qquad (П2.8)$$

ГЛАВА 3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН

В этой главе дано краткое описание процессов взаимодействия СВ между собой и с другими колебаниями и волнами в магнетиках: однородной прецессией намагниченности, внешним переменным магнитным полем, звуком и т.д. Эти процессы описываются динамическими уравнениями движения для комплексных амплитуд волн, в которых существенны фазовые соотношения. Их поэтому естественно назвать *динамическими* процессами, в отличие от процессов взаимодействия широких в k-пространстве пакетов волн, которые описываются кинетическими уравнениями для чисел заполнения и которые можно назвать *кинетическими* процессами. Их мы будем изучать ниже, начиная с гл. 7.

Последовательно пользуясь гамильтоновым методом описания нелинейных волн, изложенным в предыдущей главе, мы будем на первом этапе описывать динамические процессы (процесс слияния двух волн в одну, гене-

рацию второй гармоники, распад одной волны на две, различные типы четырехволновых процессов, включая самофокусировку и коллапс) безотносительно к типу волн и характеру среды, в которой они распространяются. И только потом, используя явный вид закона дисперсии СВ и коэффициентов гамильтониана взаимодействия, мы изучим конкретные особенности этих нелинейных волновых процессов в ферро- и антиферромагнетиках. Разумеется, в ограниченном объеме невозможно сделать это сколько-нибудь подробно для всех известных процессов. При отборе материала я руководствовался несколькими соображениями: во-первых, возможностью простой и общей идеализированной формулировки задачи, ее важностью для понимания более сложных и реальных ситуаций. Во-вторых, возможностью наблюдения и степенью экспериментальной изученности соответствующих нелинейных эффектов в магнетиках. В-третьих, степенью влияния этих эффектов на нелинейное запороговое поведение параметрически возбужденных СВ.

Результат этого отбора достаточно подробно отражен в оглавлении. Насколько он соответствует перечисленным критериям, пусть судит читатель.

§ 10. Уравнения движения в слабо неконсервативной среде

10.1. Гамильтоновы канонические уравнения для волн. В наиболее простом случае – когда 1) среду, в которой распространяются волны, можно считать неограниченной и пространственно-однородной, 2) консервативной, т.е. затуханием волн можно пренебречь, 3) достаточно рассматривать волны одного типа, а взаимодействием с другими волнами можно пренебречь, – уравнения движения имеют хорошо известный вид (1.6). Их можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial b_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} + i\omega(\boldsymbol{k})\, b_{\boldsymbol{k}} = -i\,\frac{\delta \mathcal{H}_{\mathrm{int}}}{\delta b_{\boldsymbol{k}}^{*}} \,. \tag{10.1}$$

В пренебрежении взаимодействием волн ($\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = 0$) это уравнение описывает вращение фазы волны с частотой $\omega_{\boldsymbol{k}}$. Гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$ состоит из слагаемых третьего $\mathcal{H}_3$ и четвертого $\mathcal{H}_4$ порядков по степеням амплитуд $b_{\boldsymbol{k}}$, $b_{\boldsymbol{k}}^{*}$ (см. формулы (5.23), (5.24)). Как мы увидим ниже, они описывают элементарные процессы с участием трех или четырех волн соответственно.

10.2. Учет линейного затухания волн. В реальной среде всегда существуют процессы, приводящие к затуханию. Для длинных СВ в ФМ это прежде всего их взаимодействие с "термостатом магнонов" – термически возбужденным резервуаром остальных СВ. Важную роль, особенно в АФМ, может играть взаимодействие СВ с фононами (звуком). К затуханию СВ приводит также их взаимодействие с примесями различной природы, кристаллическими дефектами, порами и другими нарушениями пространственной однородности.

Как известно, в подавляющем большинстве случаев затухание волн малой амплитуды происходит по экспоненциальному закону

$$|\, b_{\boldsymbol{k}}(t)\,| = |\, b_{\boldsymbol{k}}(0)\,| \exp(-\gamma_{\boldsymbol{k}} t)\,. \tag{10.2}$$

Декремент γ_k зависит от волнового вектора волны k, температуры среды T, магнитного поля H и других условий эксперимента. В хороших образцах магнетодиэлектриков (ЖИГ, $MnCO_3$, $CsMnF_3$ и т.д.) затухание СВ является малым в сравнении с их частотой: отношение $\gamma_k/\omega_k \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$. Это оправдывает использование в нулевом приближении гамильтоновых уравнений (10.1), не учитывающих затухание. В первом приближении малое затухание можно учесть, добавляя к каждому из них слагаемое $\gamma_k b_k$, приводящее к экспоненциальному закону убывания амплитуды (10.2):

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + i\omega_k b_k + \gamma_k b_k = -\frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta b_k^*} . \tag{10.3}$$

Эта феноменологическая процедура учета малого затухания волн как мнимой добавки к их частоте часто используется в теоретической физике и считается почти очевидной. Помимо малостей затухания и взаимодействия, (эти условия приближенно можно записать так: $\gamma_k \ll \omega_k$, $\mathcal{H}_{\text{int}} \ll \mathcal{H}_2$) для справедливости уравнения (10.3) амплитуды волн должны быть ограничены сверху и снизу. Действительно, мы считаем, что весь мир разделен на две части: на систему волн с амплитудами $b_k(t)$, гамильтонианом $\mathcal{H}$, которую мы собираемся описывать детально, динамически с помощью уравнения (10.3), и на ее окружение, термостат, который мы будем считать находящимся в термодинамическом равновесии с температурой T. Слагаемое $\gamma_k b_k$ описывает "трение волн о термостат", т.е. уход энергии в термостат, и приводит к уменьшению амплитуд волн b_k до нуля. Однако эти амплитуды должны релаксировать не к нулю, а к термодинамически равновесному значению, которое задается распределением Рэлея–Джинса

$$|b_0(k)|^2 = n_0(k) = T/\omega_k, \tag{10.4}$$

справедливым в классическом пределе $T \gg \hbar\omega_k$. Поэтому (10.3) справедливо при $|b_k| \gg |b_0(k)| = (T/\omega_k)^{1/2}$.

10.3. Учет теплового шума. Если неравенство $|b| \gg |b_0|$ не выполняется, к уравнению (10.3) необходимо добавить ланжевеновскую случайную силу $f_k(t)$:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + (i\omega_k + \gamma_k) b_k = -i\frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta b_k^*} + f_k(t), \tag{10.5}$$

имитирующую тепловой шум – беспорядочные толчки со стороны термостата, приводящие в среднем к увеличению энергии волн $b_k(t)$. Как известно из статистической физики, случайная сила $f_k(t)$ является гауссовой с коррелятором:

$$\langle f_k(t) f_{k'}(t) \rangle = 2\delta(k - k')\,\delta(t - t')\,\gamma_k n_0(k). \tag{10.6}$$

Свойства теплового шума (10.6) довольно очевидны: он не скоррелирован в различные моменты времени и для волн с разными k. Что касается множителя $2\gamma_k n_k^0$, то он выбран так, чтобы числа волн n_k релаксировали к равновесному значению $n_0(k)$. Действительно, из (10.5) и (10.6) при $\mathcal{H}_{\text{int}} = 0$ довольно просто получить уравнение

$$\frac{\partial n_k}{2\partial t} = -\gamma_k (n_k - n_0(k)), \tag{10.7}$$

$$\langle b_k b_{k'}^* \rangle = n_k \delta (k - k'), \tag{10.8}$$

описывающее это явление. Термин "число волн" употребляется нами по аналогии с квантовой механикой. Необходимо, однако, помнить, что в нашем, классическом подходе величина n_k имеет размерность действия (эрг · с), а квантовомеханические числа заполнения $n_{\text{кв}}(k)$ являются безразмерными. При $n_{\text{кв}}(k) \gg 1$ между ними имеется соответствие:

$$n_k = \hbar n_{\text{кв}}(k). \tag{10.9}$$

10.4. Нелинейность затухания волн. Другое ограничение области справедливости уравнений (10.3) проистекает из предположения о том, что γ_k вообще не зависит от всех остальных чисел волн $n(k')$. Вообще говоря, это не так. Однако при малых $n(k')$ можно разложить γ_k в ряд по $n(k')$ и ограничиться первыми членами:

$$\gamma_k (n(k')) = \gamma_k^0 + \sum_{k'} \eta (kk') n(k'). \tag{10.10}$$

Если $\eta(kk') > 0$, то говорят о положительном нелинейном затухании, при $\eta(kk') < 0$ — об отрицательном. Природу нелинейности затухания мы обсудим позже. Здесь отметим только, что коэффициенты $\eta(kk')$ могут иметь любой знак и быть как симметричными относительно перестановки $k \leftrightarrow k'$, так и антисимметричными. Они могут также не обладать этой симметрией вовсе. На первом этапе (в том числе и всюду в этой главе) мы будем считать, что числа $n(k')$ достаточно малы для того, чтобы можно было пренебрегать нелинейностью затухания волн.

В заключение этого параграфа отметим, что уравнения (10.3) и (10.5) можно с успехом использовать для описания широкого круга нелинейных волновых явлений. Необходимо только сформулировать исходные уравнения среды в гамильтоновом виде. К сожалению, достаточно эффективный и общий метод поиска канонических переменных неизвестен. Однако в целом ряде общих случаев канонические переменные уже найдены. Так, например, в монографии [45] приведены давно известные канонические переменные Клебша, описывающие вихревые и потенциальные баротропные течения идеальной жидкости. В работе В.Е. Захарова и Н.Н. Филоненко [91] найдены канонические переменные для волн на поверхности жидкости, В.П. Покровским и И.М. Халатниковым введены четыре пары канонических переменных, описывающих течение нормальной и сверхтекучей компонент жидкого гелия в рамках двухжидкостной гидродинамики. В обзоре В.Е. Захарова [106] приведены канонические переменные для релятивистской гидродинамики, для гидродинамики заряженной жидкости (плазмы), взаимодействующей с электромагнитным полем, для магнитной гидродинамики. Этот список можно продолжить.

Еще одно замечание. Уравнения (10.3), (10.5) являются приближенными и в некоторых специфических случаях могут оказаться несправедливыми даже при выполнении обсужденных выше условий. Это относится, например, к задаче о параметрическом возбуждении волн при их рассеянии на статических дефектах. В таких случаях при изучении тонких нелинейных эффектов необходимо пользоваться более последовательным подходом. В нем все взаимодействия, в том числе и приводящие к затуханию нелинейных волн, рассматриваются детально, микроскопически, что позволяет от-

казаться от несколько условного разделения системы на нелинейные волны и термостат. Этот микроскопический подход, основанный на диаграммной технике Уайльда, понадобится нам лишь на следующем этапе изучения нелинейных СВ (начиная с гл. 7) и будет описан позднее. Здесь же для изучения нелинейных явлений первого круга вполне можно ограничиться простыми феноменологическими уравнениями (10.3), (10.5).

§ 11. Трехволновые процессы

Подставляя в уравнение (10.3) гамильтониан $\mathcal{H}_3$, определенный формулой (5.23), получим

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + (\gamma_k + i\omega_k)\, b_k = -\tfrac{1}{2} i \sum_{1+2=k} V^*_{k,12}\, b_1 b_2 - \\ - i \sum_{k+2=1} V_{1,k2}\, b_1 b_2^* - i \sum_{1+2+k=0} U_{k\ 12}\, b_1^* b_2^*. \tag{11.1}$$

11.1. Слияние двух волн в одну. Генерация второй гармоники и другие вынужденные процессы. Пусть в среде (например, в ферромагнетике) распространяются две монохроматические волны (например, спиновые):

$$b_k(t) = b_1 \delta(k - k_1) \exp[-i\omega(k_1)t] + b_2 \delta(k - k_2) \exp[-i\omega(k_2)t]. \tag{11.2}$$

В силу (11.1) они приведут к образованию дополнительных трех волн:

$$\tilde{b}_k(t) = b_3 \delta(k - k_1 - k_2) \exp[-i\omega(k_1)t - i\omega(k_2)t] + \\ + b_4 \delta(k + k_2 - k_1) \exp[-i\omega(k_1)t + i\omega(k_2)t] + \\ + b_5 \delta(k + k_2 + k_1) \exp[i\omega(k_1)t + i\omega(k_2)t] \tag{11.3}$$

с амплитудами

$$b_3 = \tfrac{1}{2} V^*_{1+2,12}\, b_1 b_2\, [\omega(k_1) + \omega(k_2) - \omega(k_1 + k_2) - i\gamma(k_1 + k_2)]^{-1}, \\ b_4 = -V_{1,(1-2)2}\, b_1 b_2^*\, [\omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_1 - k_2) - i\gamma(k_1 - k_2)]^{-1}, \\ b_5 = U_{-(1+2),12}\, b_1^* b_2^*\, [\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_1 + k_2) + i\gamma(k_1 + k_2)]^{-1}. \tag{11.4}$$

Если частоты $\omega(k_1)$, $\omega(k_2)$ удовлетворяют условию

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) = \omega(k_1 + k_2), \tag{11.5}$$

то амплитуда b_3 велика в сравнении с b_4 и b_5. В этом случае говорят о резонансном процессе слияния двух волн в одну. Если же вместо (11.5) выполняется другое условие:

$$\omega(k_1) - \omega(k_2) = \omega(k_1 - k_2), \tag{11.6}$$

то, наоборот, $|b_4| \gg |b_{3,5}|$. На квантовомеханическом языке квазичастиц несколько затруднительно сказать, что бы это значило, однако на классическом языке, в терминах амплитуд волн, понятно, что речь идет о резонансном возбуждении волны с волновым вектором $k_4 = k_1 - k_2$ на одной из комбинационных частот $\omega_4 = \omega(k_1) - \omega(k_2)$.

Если среда, в которой распространяются волны, находится в состоянии термодинамического равновесия, то эти волны имеют положительные час-

тоты. Поэтому условие

$$\omega(\boldsymbol{k}_1) + \omega(\boldsymbol{k}_2) + \omega(-\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) = 0, \tag{11.7}$$

необходимое для того, чтобы амплитуда b_5 в (11.4) была велика, в равновесии не выполняется. Этими процессами можно пренебречь по параметру обратной добротности волн

$$1/Q_{\boldsymbol{k}} = \gamma_{\boldsymbol{k}}/\omega_{\boldsymbol{k}} \ll 1. \tag{11.8}$$

Разобранные примеры приводят нас к чрезвычайно важному утверждению о том, что по параметру (11.8), как правило, можно не учитывать нерезонансные процессы, выбрасывая соответствующие члены на самом первом этапе решения задачи – при формулировке гамильтониана взаимодействия. И только при изучении относительно слабых четырехволновых процессов (см. § 12) необходимо учитывать вклад нерезонансных трехволновых процессов во втором порядке теории возмущений.

Рассмотрим несколько более подробно процесс (11.5) слияния двух волн в одну. Из первого выражения в (11.4) видно, что резонансная кривая имеет лоренцеву форму. Если функция $V_{3,12}$ вещественна, то в резонансе сдвиг фазы $\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \pi/2$. Вдали от резонанса $\Delta\varphi = 0$. Для того чтобы оценить эффективность процесса преобразования двух волн в одну, необходимо знать величину матричного элемента $V_{3,12}$, закон дисперсии волн $\omega_{\boldsymbol{k}}$ и их декремент $\gamma_{\boldsymbol{k}}$. В качестве примера рассмотрим слияние двух СВ в одну в изотропном ФМ для случая, когда условие трехмагнонного резонанса (11.5) выполнено. Пусть в ФМ возбуждены две СВ $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$. Они вызывают прецессию магнитного момента

$$m_+(\boldsymbol{r}, t) = 2m_1 \cos(\omega_1 t - \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r}) + 2m_2 \cos(\omega_2 t - \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r}).$$

Считая поляризацию СВ круговой (для этого, например, необходимо, чтобы $\omega_M \ll \omega_{\text{ex}}(ka)^2$) и используя, во-первых, связь (8.8) между "натуральными" $m_{1,2}$ и каноническими $b_{1,2}$ амплитудами волн и, во-вторых, выражения (6.22), (6.23) для $V_{1,23}$ (полагая в нем $u = 1, v = 0$), получим в резонансе:

$$\frac{m_3}{M} = -i\,\frac{\omega_M m_1 m_2}{4\gamma_3 M^2}\left[\frac{k_{1z}k_{1+}}{k_1^2} + \frac{k_{2z}k_{2+}}{k_2^2}\right]. \tag{11.9}$$

Отношение $(m_{\boldsymbol{k}}/M)$ является углом прецессии и характеризует уровень нелинейности СВ. Отношение $(\omega_M/\gamma) \approx 10^3 \div 10^4$ (для ЖИГ при комнатной температуре) описывает резонансное усиление процесса преобразования. Нужно сказать, что экспериментальное наблюдение в магнетиках описанного здесь нелинейного процесса довольно затруднительно в связи с трудностями создания и регистрации монохроматических СВ и с тем, что даже при низких температурах они имеют небольшую длину пробега порядка нескольких миллиметров. Гораздо проще наблюдать процесс слияния двух уокеровских типов в третий. С точностью до числового коэффициента порядка единицы их амплитуды в резонансе будут связаны соотношением типа (11.9).

11.2. Распадная неустойчивость. Здесь мы рассмотрим неустойчивость плоской монохроматической волны $b_{\boldsymbol{k}}$ относительно распада на две другие волны. Примерами такого процесса могут служить распад однородной

прецессии намагниченности (или электромагнитного СВЧ излучения) на две СВ, распад фонона на две СВ и т.д. В этот список входит также вынужденное рассеяние света: распад фотона на фотон и фонон, на фотон и СВ и целый ряд других процессов. Итак, пусть в среде распространяется монохроматическая волна с частотой $\omega_0 = \omega(k)$ и амплитудой b:

$$b_k(t) = b\delta(k - k_0)\exp(-i\omega_0 t). \tag{11.10}$$

Тогда (11.1) для волн малой амплитуды имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{b}_1 + [\gamma_1 + i\omega(k_1)]\, b_1 + iVb\, b_2^* \exp(-i\omega_0 t) = 0, \\ &\dot{b}_2^* + [\gamma_2 - i\omega(k_2)]\, b_2^* - iV^* b^* b_1 \exp(i\omega_0 t) = 0. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Здесь оставлено второе из нелинейных слагаемых в уравнении (11.1). Первое и третье слагаемые для интересующего нас процесса распада являются нерезонансными, и по параметру добротности волн (11.8) их можно не учитывать. Ищем решение этих уравнений в виде

$$b_1(t) = b_1 \exp(\nu - i\omega_1)\, t, \qquad b_2^*(t) = b_2^* \exp(\nu + i\omega_2)\, t, \tag{11.12}$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_0. \tag{11.13}$$

Подчеркнем, что инкремент неустойчивости ν во втором из выражений (11.12) не сопрягается, даже если он окажется комплексной величиной. Только в таком случае и при выполнении условия (11.13) подстановка (11.12) приводит дифференциальное уравнение (11.11) к алгебраическому с постоянными коэффициентами. Оно имеет ненулевые решения, если

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 + \nu + i[\omega(k_1) - \omega_1] & iVb \\ -iVb^* & \gamma_2 + \nu - i[\omega(k_2) - \omega_2] \end{vmatrix} = 0. \tag{11.14}$$

Здесь полезно заметить, что условие (11.13) фиксирует только сумму $\omega_1 + \omega_2$, оставляя их разность произвольной. Смысл этого произвола простой: если к ω_1 добавить, а от ω_2 отнять некоторую частоту δ, то это в соответствии с (11.12) приведет к замене $\nu \to \nu - i\delta$. Мы можем воспользоваться отмеченным произволом для того, чтобы упростить анализ уравнения (11.14). Именно, выберем ω_1 и ω_2 так, чтобы

$$(\gamma_1 + \nu)[\omega(k_2) - \omega_2] = (\gamma_2 + \nu)[\omega(k_1) - \omega_1]. \tag{11.15}$$

Тогда коэффициент при мнимой единице в (11.14) обращается в нуль, и для ν из (11.14) и (11.15) получим

$$\begin{aligned} &2\nu = -\gamma_1 - \gamma_2 + [B + (B^2 + 2(\Delta\gamma\Delta\omega)^2)^{1/2}]^{1/2}, \\ &2B = 4|Vb|^2 + (\Delta\gamma)^2 - 4(\Delta\omega)^2, \\ &\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2, \quad 2\Delta\omega = \omega(k_1) + \omega(k_2) - \omega_0. \end{aligned} \tag{11.16}$$

Далее, подставив ν из (11.16) в (11.15), можно найти ω_1 и ω_2 из совместного решения уравнений (11.15) и (11.13). Понятно, что при этом ω_1 будет близко к $\omega(k_1)$, а ω_2 – к $\omega(k_2)$. В простом случае, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$,

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \omega(k_1) - \tfrac{1}{2}\Delta\omega, \quad \omega_2 = \omega(k_2) + \tfrac{1}{2}\Delta\omega, \\ &\nu = -\gamma + (|Vb|^2 - (\Delta\omega)^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{11.17}$$

При $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ амплитуды волн b_1, b_2 растут во времени по экспоненциаль-

ному закону (11.12), в этом случае говорят, что исходная волна b неустойчива по отношению к распаду на две волны b_1 и b_2, ν называют инкрементом распадной неустойчивости. Часто (особенно, если $k_0 = 0$) эту неустойчивость называют также параметрической. Инкремент неустойчивости максимален в резонансе $\Delta\omega = 0$:

$$2\nu_{\max} = -(\gamma_1 + \gamma_2) + (4|Vb|^2 + (\Delta\gamma)^2)^{1/2}. \tag{11.18}$$

Распадная неустойчивость имеет порог, связанный с затуханием волн:

$$|Vb_{\rm cr}|^2 = \gamma_1\gamma_2. \tag{11.19}$$

Зная матричный элемент V и измеряя $b_{\rm cr}$, можно определить затухание волн. Это основной способ определения затухания СВ в ФМ. Граница области неустойчивости определяется из (11.16) при $\nu = 0$. Если $\gamma_1 = \gamma_2$, то область неустойчивости

$$(\Delta\omega)^2 < 4|Vb|^2 - \gamma^2. \tag{11.20}$$

Надо сказать, что условия резонанса в процессе распада

$$\omega_k = \omega(k_1) + \omega(k_1 - k_2) \tag{11.21}$$

не всегда выполняются и в соответствии с этим законы дисперсии ω_k делятся на распадные и нераспадные. Так, степенные спектры $\omega_k \sim k^\alpha$ являются распадными, если $\alpha \geqslant 1$, звуковой спектр $\omega_k = kc_s$ является граничным и условия (11.21) выполняются только на линии $k_1 \parallel k$; для спектра $\omega_k = \omega_0 + \beta k^2$ распадные условия (11.20) выполняются, если $\omega_k > 3\omega_0$.

В качестве важного примера мы вычислим границу распада для спектра СВ (6.5) в кубическом ФМ, ограничившись ориентацией $M\parallel$ [100] или $M\parallel$ [110], когда $\beta = 0$. Рассмотрим вначале симметричный случай, когда $k_1 = k_2$ и соответственно $k_0 = 2k_1$. Тогда из резонансного условия $\omega(k_0) = 2\omega(k_0/2)$ имеем выражение для волнового вектора k_S:

$$\begin{aligned} &\omega_{\rm ex}(ak_S)^2 = 2(A^2 - B^2)^{1/2}, \\ &B = \tfrac{1}{2}\omega_M \sin^2\theta, \qquad A = \omega_H - \omega_M N_z - \alpha\omega_a + B. \end{aligned} \tag{11.22}$$

Более детальный анализ закона дисперсии (6.5) показывает, что значение (11.22) волнового вектора k_S является граничным в том смысле, что при $k < k_S$ процессы распада для СВ с $\omega(k_S)$ запрещены, а при $k > k_S$ разрешены.

В § 14, посвященном методам параметрического возбуждения СВ в магнетиках, будет подробно описана распадная неустойчивость СВ с $k = 0$, т.е. однородной прецессии намагниченности на две СВ, на так называемые ядерные СВ в АФМ и т.д. Здесь же в качестве примера мы кратко рассмотрим неустойчивость монохроматической СВ относительно распада на две другие СВ. Подставляя матричный элемент $V_{1,23}$ (6.22), (6.23) в формулу (11.19) и считая для простоты, что k_1 — волновой вектор исходной волны конечной амплитуды b_1 перпендикулярен M ($\sin\theta = 1$), получаем критическое значение b_1:

$$|b_{1\,\rm cr}| = (2\gamma/\omega_M)(2M/g)^{1/2}, \qquad \gamma = (\gamma_2\gamma_3)^{1/2}, \tag{11.23}$$

соответствующее порогу распада на две СВ, распространяющиеся под

оптимальными углами $\theta_2 = \pi - \theta_3 = \pi/4$, $\varphi_2 = \varphi_3$. Амплитуде (11.23) соответствует критическое значение угла прецессии

$$\psi_{1\,\mathrm{cr}} = m_{1\,\mathrm{cr}}/M = b_{1\,\mathrm{cr}}(2g/M)^{1/2} = 4\gamma/\omega_M. \tag{11.24}$$

Таким образом, СВ с амплитудой b и углом прецессии ψ, превышающими критические значения (11.23) и (11.24), неустойчива относительно распада на две другие.

11.3. Взаимодействие трех волн конечной амплитуды (задача Бломбергена) [44]. Рассмотрим взаимодействие трех спектрально-узких пакетов волн, характерные волновые векторы $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ которых удовлетворяют условию резонанса $\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3$, $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. Положим

$$b_{\boldsymbol{k}} = \sum_{j=1}^{3} b_j(\boldsymbol{k}) \tag{11.25}$$

и будем считать, что b_j отлично от нуля, если $\vec{\kappa} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_j$ мало́. Внутри каждого пакета исключим быструю зависимость от $\boldsymbol{r}$, t заменой

$$a_j(\vec{\kappa}) = b_j(\boldsymbol{k}_j + \vec{\kappa}) \exp i[\omega(\boldsymbol{k}_j)\, t - \boldsymbol{k}_j \boldsymbol{r}] \tag{11.26}$$

и упростим уравнения, считая

$$\omega(\boldsymbol{k}_j + \vec{\kappa}) = \omega(\boldsymbol{k}_j) + (\vec{\kappa}\, \mathbf{v}_j). \tag{11.27}$$

Далее перейдем в $\boldsymbol{r}$-представление по формулам

$$a_j(\boldsymbol{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int a_j(\vec{\kappa}) \exp[i\vec{\kappa}\boldsymbol{r}]\, d\vec{\kappa}. \tag{11.28}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 + \mathbf{v}_1 \nabla\right) a_1(\boldsymbol{r}, t) = -iV a_2(\boldsymbol{r}, t)\, a_3(\boldsymbol{r}, t),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2 + \mathbf{v}_2 \nabla\right) a_2(\boldsymbol{r}, t) = iV a_1(\boldsymbol{r}, t)\, a_3^*(\boldsymbol{r}, t),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3 + \mathbf{v}_3 \nabla\right) a_3(\boldsymbol{r}, t) = iV a_2^*(\boldsymbol{r}, t)\, a_1(\boldsymbol{r}, t).
\end{aligned} \tag{11.29}$$

Здесь $V = (2\pi)^{3/2} V_{1,23}$, переменные $a_j(\boldsymbol{r}, t)$ имеют смысл комплексных огибающих для волн $\exp[i(\boldsymbol{k}_j \boldsymbol{r} - \omega_j t)]$. Уравнение (11.29) при $\gamma_j = 0$ является гамильтоновым с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{3} \tfrac{1}{2} i \mathbf{v}_j \int [a_j^* \nabla a_j - a_j \nabla a_j^*]\, d\boldsymbol{r} + V \int [a_1^* a_2 a_3 + \text{к.с.}]\, d\boldsymbol{r}. \tag{11.30}$$

Кроме $\mathcal{H}$, уравнение (11.29) при $\gamma_j = 0$ имеет еще два независимых интеграла движения (интегралы Мэнли–Роу):

$$\begin{aligned}
&N_1 + N_2 = \text{const}, \qquad N_1 + N_3 = \text{const},\\
&N_j = \int a_j^*(\boldsymbol{r})\, a_j(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}.
\end{aligned} \tag{11.31}$$

Величины N_j имеют смысл полного числа частиц сорта j. Наличие трех интегралов движения позволяет эффективно исследовать эти уравнения (см., например, [44]). Более того, с помощью метода обратной задачи

рассеяния (см., например, обзор В.Е. Захарова, [111]) В.Е. Захаровым и С.В. Манаковым [104, 109] была построена теория резонансного взаимодействия волновых пакетов, позволяющая проследить их эволюцию в рамках уравнений (11.29) для произвольных локализованных начальных условий. Здесь же мы рассмотрим простой, но интересный пример – генерацию второй гармоники ($a_2 = a_3$) в стационарном случае. Пусть для простоты $\gamma_j = 0$, $v_j = v$ и при $z = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = A_2^0$ и вещественно. Подставляя в (11.29) $a_1 = iA_1$, $a_2 = a_3 = A_2$, имеем

$$v \frac{\partial}{\partial z} A_1 = VA_2^2, \quad v \frac{\partial}{\partial z} A_2 = -VA_1 A_2. \tag{11.32}$$

Решение этих уравнений с нулевым условием для A_1 на границе имеет вид

$$A_1(z) = A_2^0 \operatorname{th}(VA_2^0 z/v),$$
$$A_2(z) = A_2^0 \operatorname{ch}^{-1}(VA_2^0 z/v). \tag{11.33}$$

Характерная длина $L = v/(VA_2^0)$ называется длиной взаимодействия, при $z \gg L$ вся энергия исходной волны A_2 переходит во вторую гармонику A_1. Эксперимент по генерации второй гармоники является одним из наиболее зрелищных в нелинейном оптике – в кристалл входит красный луч, а выходит зеленый. Добиться полного преобразования не удается из-за неточного выполнения условий резонанса и т.п. В лучших экспериментах $k_{\text{преоб}} \approx 90\,\%$.

11.4. Взрывная неустойчивость трех волн. Если в среде могут существовать волны с отрицательной энергией (активная среда), то могут выполняться резонансные условия для процесса "рождения трех волн из вакуума":

$$\omega(\boldsymbol{k}_1) + \omega(\boldsymbol{k}_2) + \omega(\boldsymbol{k}_3) = 0, \quad \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = 0. \tag{11.34}$$

Этот процесс описывается последним слагаемым в уравнении (11.1). Удерживая вблизи резонанса (11.34) только это слагаемое, ищем решение в виде трех волн:

$$b_{\boldsymbol{k}}(t) = \sum_{j=1}^{3} a_j(t)\,\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_j) \exp[-i\omega(\boldsymbol{k}_j)\,t].$$

С наибольшей скоростью амплитуды волн будут расти, если $\omega(\boldsymbol{k}_j)$ и $\boldsymbol{k}_j$ точно удовлетворяют условию (11.34). В этом случае из (11.1) получается

$$\dot{a}_1 + \gamma_1 a_1 = -2iUa_2^* a_3^*,$$
$$\dot{a}_2 + \gamma_2 a_2 = -2iUa_1^* a_3^*, \tag{11.35}$$
$$\dot{a}_3 + \gamma_3 a_3 = -2iUa_1^* a_2^*.$$

При $\gamma_j = \gamma$ эти уравнения имеют решение $|a_j| = a$, где

$$a(t) = a_0 \gamma \exp(-\gamma t)\,[\gamma + 2Ua_0(\exp(-\gamma t) - 1)]^{-1}. \tag{11.36}$$

Если начальная амплитуда a_0 достаточно велика: $2Ua_0 > \gamma$, амплитуда $a(t)$ обращается в бесконечность за конечное время t_0, при малых γ $t_0 = 1/(2Ua_0)$. Такая неустойчивость называется взрывной. В этом простейшем решении "взрыв" происходит одновременно во всем пространстве.

В действительности любая неоднородность начальных условий приведет к тому, что "взрывы" будут происходить в изолированных точках. Последовательная теория этого явления построена В.Е. Захаровым и С.В. Манаковым [109] в рамках уравнений в частных производных, аналогичных уравнениям (11.9), а также интегрируемым методом обратной задачи рассеяния.

Отметим, что в магнетодиэлектриках нельзя в чистом виде реализовать условия возникновения взрывной неустойчивости (11.34). Однако в ФМ в области малых магнитных полей можно выполнить условия распада ОП на три СВ:

$$\omega_0 = \omega(\boldsymbol{k}_1) + \omega(\boldsymbol{k}_2) + \omega(\boldsymbol{k}_3), \qquad \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = 0. \tag{11.37}$$

Этот процесс описывается четырехмагнонным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_4 = {}^1/_3 \sum_{1+2+3=0} (T_{0123}\, b_0 b_1^* b_2^* b_3^* + \text{к.с.}). \tag{11.38}$$

Ясно, что амплитуды СВ b_1, b_2, b_3 при большом b_0 будут эволюционировать по закону (11.36) (с заменой $U \to T b_0$) до тех пор, пока можно пренебречь обратным влиянием СВ на ОП. Любознательный читатель может в порядке упражнения дописать к трем уравнениям (11.40) четвертое – для амплитуды ОП, находящейся во внешнем поле h, – и учесть это обратное влияние.

§ 12. Четырехволновые процессы

В случае, когда трехволновые процессы запрещены законами сохранения, в уравнении движения (10.1) необходимо учитывать дополнительные слагаемые, возникающие из четырехволнового гамильтониана взаимодействия (5.24). Трехволновые слагаемые полностью не учитывать нельзя, ибо в соответствии с (5.30) во втором порядке теории возмущений они приводят к разрешенным четырехволновым процессам.

Интересно выяснить, какой вклад в четырехволновые матричные элементы больше – исходный W или возникающий при итерации трехволновых процессов $\tilde{T} \sim V^2/\Delta\omega$. Если разложение исходного гамильтониана происходит по одному малому параметру, то $\omega_k W \sim V^2$. В таком случае рассматриваемые вклады одного порядка величины. Так обстоит дело, например, с диполь-дипольным вкладом в $\mathcal{H}_{\text{int}}$ для СВ в ФМ. В более сложных ситуациях преобладающим по специальным причинам может быть любой из этих вкладов.

Напомним один из результатов п. 5.4: с помощью соответствующего нелинейного канонического преобразования (типа (5.29)) можно исключить все слагаемые в гамильтониане взаимодействия, отвечающие процессам, которые запрещены законами сохранения. Поэтому особенный интерес представляет четырехволновой процесс (5.30) рассеяния волн типа $2 \to 2$:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \qquad \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4, \tag{12.1}$$

ибо он разрешен при любом законе дисперсии, если все $\boldsymbol{k}$ близки друг к другу. Учитывая это, в дальнейшем мы будем рассматривать только

такие процессы. Уравнения движения (10.1) в этом случае:

$$\dot{b}_k + i\omega_k b_k + i\sum_{123} T_{k\,1,23} b_1^* b_2 b_3 \delta(k+1-2-3) = 0, \tag{12.2}$$

где $T = W + \tilde{T}$ – полная амплитуда процессов (5.30). Их изучение начнем с простейшей задачи.

12.1. Модуляционная неустойчивость плоской волны (В.Е. Захаров, [92]). Пусть $b_k = b\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)$ – волна конечной амплитуды, распространяющаяся в среде. Уравнения движения (12.2) для b имеют вид

$$\dot{b} + i\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_0)\, b = 0, \tag{12.3}$$

$$\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_0) = \omega(\boldsymbol{k}_0) + T_{00}|b|^2, \qquad T_{00} = T(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_0; \boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_0). \tag{12.4}$$

Здесь $\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_0)$ – частота волны b, зависящая от ее амплитуды. В присутствии волны b запишем уравнения движения (12.2) для волн малой амплитуды, волновые векторы и частоты которых удовлетворяют резонансным условиям

$$2\omega(\boldsymbol{k}_0) = \omega(\boldsymbol{k}_1) + \omega(\boldsymbol{k}_2), \qquad 2\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2, \tag{12.5}$$

$$\begin{aligned} &\dot{b}_1 + i\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_1)\, b_1 + iT_{12} b^2 b_2^* = 0, \\ &\dot{b}_2 - i\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_2)\, b_2^* - iT_{12} b^{*2} b_1 = 0. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_1) = \omega(\boldsymbol{k}_1) + 2T_{10}|b|^2, \\ &\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_2) = \omega(\boldsymbol{k}_2) + 2T_{20}|b|^2, \\ &T_{10} = T_{10,10}, \quad T_{12} = T_{00,12}, \quad T_{20} = T_{20,20} \end{aligned} \tag{12.7}$$

– зависимость частоты волн b_1, b_2 от амплитуды другой волны b. Обращаем внимание на коэффициент два, отличающий (12.7) от (12.4). Вычисление инкремента неустойчивости производится аналогично случаю трехволновых процессов. Сравнивая (12.6) с (11.11), можно по аналогии с (11.17) сразу написать ответ:

$$\nu^2 = |T_{12} b^2|^2 - \tfrac{1}{4}[\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_1) + \tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_2) - 2\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_0)]^2. \tag{12.8}$$

Если $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ сильно отличаются от $\boldsymbol{k}_0$ и при этом $\Delta\omega = 0$, инкремент неустойчивости $\nu = T_{12}|b|^2$ и по порядку величины совпадает с нелинейной добавкой к частоте волн. В диссипативной среде, когда волны $\boldsymbol{k}_{1,2}$ затухают с декрементом $\gamma_{1,2}$, возникает порог неустойчивости. Пороговая амплитуда (по аналогии с (11.19))

$$|T_{12} b_{\text{cr}}^2| = (\gamma_1\gamma_2)^{1/2}. \tag{12.9}$$

В случае, когда $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ близки к $\boldsymbol{k}_0$, в законе сохранения (12.5) следует учитывать нелинейные добавки к частоте

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}(\boldsymbol{k}_{1,2}) = \omega(\boldsymbol{k}_0) \pm \mathbf{v}\vec{\kappa} + \frac{\partial^2\omega}{2\partial k_\alpha \partial k_\beta}\kappa_\alpha\kappa_\beta + 2T_{00}|b|^2, \\ &\boldsymbol{k}_{1,2} = \boldsymbol{k}_0 \pm \vec{\kappa}, \quad \mathbf{v} = (\partial\omega/\partial\boldsymbol{k})_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0}. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Здесь мы разложили $\tilde{\omega}_{1,2}$ в ряд по $\vec{\kappa}$ и пренебрегли зависимостью от $\vec{\kappa}$

в матричных элементах T. Теперь

$$\nu^2(\kappa) = -\hat{L}\kappa^2(\hat{L}\kappa^2 + 2T_{00}|b|^2), \tag{12.11}$$

$$\hat{L}\kappa^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2\omega(\boldsymbol{k})}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\kappa_\alpha\kappa_\beta. \tag{12.12}$$

Если $T_{00}\hat{L}\kappa^2 > 0$, то $\nu^2 < 0$ и неустойчивости нет. Этим рассматриваемая ситуация отличается от трехволнового случая, когда для возникновения неустойчивости достаточно было выполнения законов сохранения, а знак матричного элемента не играл роли. В случае, когда квадратичная форма (12.11) не является знакоопределенной, критерий неустойчивости

$$T_{00}\hat{L}\kappa^2 < 0 \tag{12.13}$$

можно выполнить при любом знаке T_{00}, изменяя направление $\vec{\kappa}$. Если форма $\hat{L}\kappa^2$ знакоопределена, то область неустойчивости ограничена по κ^2 от 0 до $\hat{L}\kappa^2 = -4T_{00}|b|^2$. Инкремент неустойчивость максимален для $\hat{L}\kappa^2 = -2T_{00}|b|^2$. В результате развития неустойчивости (12.11) волны $\boldsymbol{k}_0$ возникают новые волны с $\boldsymbol{k}$, близкими к $\boldsymbol{k}_0$, это можно интерпретировать как возникновение модуляции амплитуды и фазы исходной волны. Поэтому такую неустойчивость называют *модуляционной* [92].

Эта неустойчивость встречается очень часто. Так, например, для ленгмюровских волн в плазме $L\kappa^2 > 0$, $T_{00} < 0$, и возникает модуляционная неустойчивость, приводящая к ленгмюровскому коллапсу. Неустойчивы волны на воде, развитие этой неустойчивости приводит к явлению "девятого вала". В нелинейных диэлектриках, у которых $\partial n/\partial|E|^2$ (коэффициент преломления растет с напряженностью поля E), $T_{00} < 0$, ибо $\omega_{\boldsymbol{k}} = kcn^{-1/2}$ и $\partial\omega/\partial|E|^2 \backsim -\partial n/\partial|E|^2$. Так как для линейного закона дисперсии $\omega'' > 0$, то $T_{00}\omega'' < 0$ и возникает модуляционная неустойчивость, развитие которой приводит к самофокусировке света.

12.2. Модуляционная неустойчивость спиновых волн [93, 95].

12.2.1. Наиболее просто она исследуется в АФМ ЛП, для которых закон дисперсии СВ близок к изотропному (и соответственно $L\kappa^2 > 0$), а четырехмагнонный матричный элемент T_p отрицателен (см. (7.13)) и является непрерывной функцией. Это означает, что развитая выше теория непосредственно применима к СВ в АФМ ЛП и в соответствии с критерием (12.13) СВ конечной амплитуды в АФМ ЛП неустойчивы.

12.2.2. Неустойчивы также и СВ в ФМ, гамильтониан которого включает только обменное взаимодействие. Действительно, из (5.25), (6.25) видно, что в этом случае

$$\hat{L}\kappa^2 = \omega_{\text{ex}}(\kappa a)^2, \quad T_{00} = -(g/M)\,\omega_{\text{ex}}(ak_0)^2 \tag{12.14}$$

и критерий неустойчивости (12.13) выполнен. Из (12.11) и (12.14) следует, что инкремент неустойчивости максимален при

$$\kappa/k_0 = -2|b|^2 T_{00}/L = 2g|b|^2/M = 2\Delta M_z/M, \tag{12.15}$$

где ΔM_z – изменение статической намагниченности, вызванное существованием исходной волны $b_{\boldsymbol{k}}$. Пороговая амплитуда СВ задается формулой

(12.9), и, следовательно,

$$(\Delta M_z/M)_{cr} = \gamma g/(2\sqrt{2}\,MT_{00}) = \gamma/(2\sqrt{2}\,\omega_{ex}(ak_0)^2). \qquad (12.16)$$

Таким образом, "обменная" СВ в ФМ достаточно большой амплитуды всегда оказывается неустойчивой по отношению к процессу (12.5) с малыми $(\kappa/k_0)^2$, лежащими вблизи $\gamma/\omega_{ex}(k_0a)^2$. Эта неустойчивость приводит к появлению длиннопериодных продольных $\vec{\kappa} \parallel \boldsymbol{k}$ и поперечных $\vec{\kappa} \perp \boldsymbol{k}$ модуляций амплитуды бегущей СВ. Для длинных СВ в ФМ ситуация является более сложной из-за дальнодействующего магнитного дипольного взаимодействия, которое приводит к неаналитической зависимости $T_{12,34}$ от своих аргументов. В этом случае формула (12.11) оказывается неприменимой к СВ в ФМ и вместо нее из (12.7), (12.8) следует

$$\nu = -\gamma \pm [(\hat{L}\kappa^2 + 2T(\kappa)\,|b|^2)^2 - 4|F(\kappa)\,b^2|^2]^{1/2}. \qquad (12.17)$$

Здесь предположено, что $\kappa \ll k$, и введены обозначения $T(\vec{\kappa})$ и $F(\vec{\kappa})$ для следующих функций, зависящих только от направления $\vec{\kappa}$:

$$\begin{aligned} T(\vec{\kappa}) &= T(\boldsymbol{k}_0 + \vec{\kappa}, \boldsymbol{k}_0) + T(\boldsymbol{k}_0 - \vec{\kappa}, \boldsymbol{k}_0) - T(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_0), \\ F(\vec{\kappa}) &= T(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_0 + \vec{\kappa}, \boldsymbol{k}_0 - \vec{\kappa}). \end{aligned} \qquad (12.18)$$

Отметим, что при аналитической зависимости $T_{12,34}$ от волновых векторов $T(\vec{\kappa}) = F(\vec{\kappa}) = T_{00}$ при $\kappa \to 0$ и выражение (12.17) благополучно переходит в (12.11). Используя (6.5) и (6.25), можно получить

$$\begin{aligned} &F(\vec{\kappa}) = T(\vec{\kappa}) = [g/(2\pi)^3 M][\omega_M \cos^2\theta\,\varphi(\vec{\kappa}) - \omega_{ex}(ak_0)^2], \\ &\varphi(\vec{\kappa}) = (\Omega - \omega_M \sin^2\theta)/(\Omega + \omega_M \sin^2\theta), \quad \Omega = gH - \omega_M N_z, \\ &L(\vec{\kappa}) = \omega_{ex}(ak_0)^2 + \tfrac{1}{2}\omega_M \sin^2\theta, \quad \cos\theta \equiv \kappa_z/|\kappa|. \end{aligned} \qquad (12.19)$$

При $F = T$ необходимым условием неустойчивости, как следует из (12.19), (12.17), является $TL^{-1} < 0$. Заметим, что $L(\vec{\kappa})$ всегда положительно, а $T(\vec{\kappa}) > 0$, лишь если $\omega_{ex}(ak_0)^2 < \omega_M$, поэтому внешнее магнитное поле, большее, чем $4\pi M(N_z + 1)$, стабилизирует модуляционную неустойчивость бегущей волны с $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{M}$. Если же $H < 4\pi M(N_z + 1)$, то $\varphi(\vec{\kappa})$ будет отрицательной для некоторых направлений и возникает неустойчивость с малыми κ, в первую очередь с такими, которые удовлетворяют уравнению

$$\kappa/k_0 = \gamma/L(\vec{\kappa}). \qquad (12.20)$$

Порог этой неустойчивости задается выражением (12.16), в котором T определяется формулой (12.19).

12.2.3. Случай поперечного распространения волны $\boldsymbol{k}_0 \perp \boldsymbol{M}$ отличается от продольного $\boldsymbol{k}_0 \parallel \boldsymbol{M}$ тем, что может возникать неустойчивость с большими κ. Это происходит потому, что при распаде волны с $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{M}$ ее диполь-дипольная энергия уменьшается и может скомпенсировать увеличение обменной энергии при некоторых κ. Порог неустойчивости с большими κ, однако, совпадает по порядку величины с порогом для $\kappa \ll k_0$, и для простоты мы ограничимся этим последним случаем. Анализ неустойчивости при произвольных ω_M, Ω и k_0 занял бы слишком много места, мы рассмотрим только один интересный случай $\omega_M \gg \Omega$, $\omega_{ex}(ak_0)^2$. Другие частные случаи рассмотрены В.Е. Захаровым, В.С. Львовым, С.С. Старо-

бинцем (1969 г) [95]. В нашем случае из (6.5) и (6.25) получаем

$$T(\vec{\kappa}) = \frac{g\omega_M}{(2\pi)^3 M(\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2)} (\cos^2\theta - 2N_z) \frac{\omega_M}{8},$$

$$F(\vec{\kappa}) = \frac{g\omega_M}{(2\pi)^3 M(\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2)} (N_z - \cos^2\theta) \frac{\omega_M}{8},$$

$$L(\vec{\kappa}) = \frac{\omega(k_0)}{k_0^2} \frac{\Omega}{\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2} \left[\frac{\omega_{ex}\sin^2\theta}{\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2} + \cos^2\theta \right].$$

Так как $L(\vec{\kappa})$ может изменять знак, то СВ неустойчивы при любых знаках F и T. Пороговая амплитуда равна

$$(\Delta M_z/M)_{cr} = 8\gamma[\Omega + \omega_{ex}(ak_0)^2]/(\omega_M^2 |N_z - \cos^2\theta|).$$

Отсюда видно, что для длинных СВ $(\omega_{ex}(ak_0)^2 \ll \omega_M)$, распространяющихся в образце, в котором внутреннее поле мало́ $(\Omega \ll \omega_M)$, порог неустойчивости существенно уменьшается.

12.2.4. Оценим интенсивность СВ, при которой возникает модуляционная неустойчивость. Из (12.16) следует оценка для потока энергии в СВ:

$$P_{cr} = \omega b_{cr} \partial\omega/\partial k \approx \gamma\omega_{ex} a^2 kM/g. \tag{12.21}$$

Для монокристалла ЖИГ $\gamma \sim 10^6$ с$^{-1}$, $M \approx 10^2$ Гс, $\omega_{ex}a^2 \approx 0{,}1$ см$^2 \cdot$ с$^{-1}$. Выбирая $k = 10^4$ см$^{-1}$, получим $P_{cr} \approx 10^{-3}$ вт $\cdot$ см$^{-2}$. Следует отметить, что выражение (12.21) ограничивает сверху поток энергии, который может переноситься в кристалле спиновой волной. Этот поток обычно значительно меньше, чем максимальный поток энергии (0,1 вт $\cdot$ см$^{-2}$) для звуковой волны в ФМ (А.Г. Гуревич, [74]), поэтому критические значения потока (12.21) могут достигаться в процессе преобразования звука в СВ в неоднородном магнитном поле (Е. Шлеманн и др., [232]).

При изучении нелинейной стадии развития модуляционной неустойчивости следует воспользоваться тем обстоятельством, что все вторичные волны сосредоточены в узкой области вблизи $\boldsymbol{k}_0$, т.е. следует изучать распространение узкого пакета волн или, что то же самое, необходимо следить за медленными изменениями комплексной амплитуды (*огибающей*) монохроматической волны. Получим уравнение для огибающих.

12.3. Уравнение для огибающих. В уравнении (12.12) разложим ω_k в ряд по $\vec{\kappa}$ до членов $\sim\kappa^2$ и будем считать

$$T_{12,34} = T(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_0; \boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_0) = T/(2\pi)^3. \tag{12.22}$$

Этот переход справедлив, если в среде отсутствуют дальнодействующие силы и $T_{12,34}$ является непрерывной функцией своих аргументов. Далее, так же как и в п. 11.3, перейдем к медленным переменным

$$a(\vec{\kappa}) = b(\boldsymbol{k} + \vec{\kappa}) \exp[i(\boldsymbol{kr} - \omega_0 t)] \tag{12.23}$$

и затем в $\boldsymbol{r}$-представление по формулам (11.28). Для $a(\boldsymbol{r})$ в результате получится

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right) + \hat{L} - T|a|^2 \right] a = 0, \quad \hat{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega(\boldsymbol{k})}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{12.24}$$

В изотропной среде $\omega(\boldsymbol{k}) = \omega(k)$ и

$$L = \frac{\omega''}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{v}{2k}\Delta_\perp, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$
$$\mathbf{v} = \partial\omega/\partial\boldsymbol{k}, \qquad \omega'' = \partial^2\omega/\partial k^2. \tag{12.25}$$

Уравнение (12.24) описывает эволюцию узкого пакета волн: член $\mathbf{v}\nabla$ – его движение как целого с групповой скоростью, члены $\partial^2/\partial z^2$ и $\Delta_\perp$ – дисперсию и дифракцию, последнее слагаемое – нелинейное самодействие волн в пакете. На оптическом языке это слагаемое описывает зависимость коэффициента преломления среды от квадрата амплитуды электрического поля. Рассматривая (12.24) как уравнение Шредингера, нелинейный член можно трактовать как самосогласованный потенциал притяжения (при $T<0$) или отталкивания (при $T>0$), пропорциональный плотности частиц. Уравнения (12.24), (12.25) являются гамильтоновыми с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = ½\int d\boldsymbol{r}\,[i\mathbf{v}(a^*\nabla a - a\nabla a^*) + \omega''(\partial a/\partial z)^2 +$$
$$+ (v/k)\,|\nabla_\perp a|^2 + 2T\,|a|^4]. \tag{12.26}$$

Кроме того, это уравнение имеет еще один интеграл движения

$$N = \int |a|^2 d\boldsymbol{r}, \tag{12.27}$$

имеющий смысл "полного числа частиц".

Существуют две постановки задачи для уравнения (12.24): амплитуда волн задана на границе среды – например, свет падает на нелинейный диэлектрик. В этом случае членом $\sim \omega''$ можно пренебречь по сравнению с $v\partial a/\partial z$ (z – направление $\mathbf{v}$); если задача стационарна, то $\dot{a} = 0$. Тогда

$$\left[iv\frac{\partial}{\partial z} + \frac{v}{2k}\Delta_\perp - T\,|a|^2\right]a = 0. \tag{12.28}$$

Рассматривая $\tau = z/v$ как новое время, можно трактовать (12.28) как двумерное ($\boldsymbol{r} = x, y$) уравнение Шредингера.

12.4. Эволюция пакета в безграничной среде. При этом можно перейти в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, и член $\mathbf{v}\nabla$ исчезнет. Дисперсионный член $\sim \omega''$ необходимо сохранить:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\omega''}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{v}{2k_0}\Delta_\perp - T\,|a|^2\right]a = 0. \tag{12.29}$$

Рассмотрим качественно решение этой задачи в трехмерном ($d = 3$), двумерном ($d = 2$) и одномерном случаях. Случай $d = 3$ в рамках (12.29) соответствует эволюции трехмерного сгустка, движущегося с групповой скоростью, случай $d = 2$ – это задача об эволюции плоского пакета $a(x, y, t)$, движущегося с групповой скоростью, или задача о стационарной самофокусировке пакета $a(x, y, t)$ в рамках уравнения (12.28) после замены $z/v \to t$. Случай $d = 1$ соответствует, например, стационарной плоской самофокусировке $a(x\ z)$. Далее, для определенности всюду мы будем считать $\omega''>0$ и рассмотрим случай "притяжения частиц" $T<0$. Пусть в некоторый момент времени пакет имеет характерный размер l и амплитуду в центре a. Число частиц в нем $N = \int |a|^2 d\boldsymbol{r} \approx |a|^2 l^d$, где d – размерность пакета.

Так как N – интеграл движения, то

$$a(t) = N^{1/2} l^{-d/2}(t). \tag{12.30}$$

Оценим с помощью (12.26), (12.30) энергию пакета

$$\mathcal{H} \approx \omega'' N l^{-2} - |T| N^2 l^{-d}. \tag{12.31}$$

Видно, что при $d = 1$ существует стационарное решение с

$$l = l_0 \approx \omega''/(|T|N) \approx \omega''/(|Ta^2|l_0), \tag{12.32}$$

минимизирующее энергию (12.31). В этом случае давление частиц, возникающее из-за их движения в потенциальной яме, уравновешивает силу притяжения. В трехмерном случае давление при $l \to 0$ растет медленнее, чем сила притяжения, и происходит коллапс – падение частиц на центр за конечное время. При этом амплитуда в центре $a(t)$ и размер $l(t)$ связаны соотношением (12.30), где N – число частиц, захваченных в коллапсе, энергия (12.31) коллапсирующих частиц убывает. Полная энергия, включающая кинетическую энергию не захваченных в коллапс, разлетающихся частиц, разумеется, сохраняется. В двумерном случае судьба пакета частиц зависит от начальных условий: при $\omega'' > TN \approx T|a|^2/l^2$ минимум (12.31) достигается при $l \to \infty$, т.е. частицы разлетаются; при $\omega'' < TN$, так же как и в трехмерном случае, часть пакета захватывается в процесс коллапса.

Изучим подробнее стационарные решения (12.29) в одномерном случае. Подставляя $a(z, t)$ в виде

$$a(z, t) = \varphi(z)\exp(i\lambda^2 t), \tag{12.33}$$

получим

$$\omega''\varphi_{zz} = 2(\lambda^2\varphi - |T|\varphi^3) = -\partial U/\partial\varphi,$$
$$U = \tfrac{1}{2}|T|\varphi^4 - \lambda^2\varphi^2. \tag{12.34}$$

После преобразования $z \to t$ это уравнение можно рассматривать как уравнение Ньютона для частиц с массой ω'', координатой φ, движущихся в поле $U(\varphi)$. Оно имеет интеграл движения, имеющий смысл "энергии":

$$E = \tfrac{1}{2}\omega''\varphi_z^2 + \tfrac{1}{2}|T|\varphi^4 - \lambda^2\varphi^2. \tag{12.35}$$

Простейшее решение – покоящаяся частица на дне ямы, $\varphi = \text{const}$, $\lambda^2 = |T|\varphi^2$ – соответствует в исходном уравнении (12.29) плоской волне с нелинейным сдвигом частоты $-|T|\varphi^2$. При $E > E_{\min}$ возникают периодические колебания частицы в яме, т.е. периодическая модуляция волны $a(z)$. Большой интерес представляет решение с $E = 0$. Из (12.35) при $E = 0$ можно получить

$$\varphi(z, t) = \left(\frac{2}{|T|}\right)^{1/2} \frac{\lambda\exp(i\lambda^2 t)}{\operatorname{ch}(\sqrt{2}\lambda z/\sqrt{\omega''})}. \tag{12.36}$$

Характерный размер l_0 этого локализованного решения – *солитона* – задается, как нетрудно убедиться, выражением (12.32). Кроме покоящегося (в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью) солитона (12.36) существуют также решения с двумя, тремя и т.д. солитонами. N-солитонные решения имеют большое значение. Методом *обратной задачи рассеяния* В.Е. Захаров и А.Б. Шабат [100] проинтегрировали не-

линейное уравнение Шредингера (12.28), (12.29) и, в частности, показали, что произвольное (достаточно гладкое) начальное распределение $a(z,0)$ при $t \to \infty$ распадается в основном на N солитонов, число, амплитуды и скорости которых можно определить по $a(z,0)$. Солитоны часто являются устойчивыми образованиями: при столкновении двух солитонов сохраняются их скорости и амплитуды.

В заключение этого параграфа подтвердим прямым вычислением полученный ранее качественный вывод о том, что в двумерном и трехмерном случаях за конечное время происходит разрушение начального пакета. Для упрощения расчетов запишем (12.29) в безразмерном виде. При $\omega'' = 0$, $T < 0$

$$i\dot{\psi} + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0, \qquad i\dot{\psi} = \delta\mathcal{H}/\delta\psi^*,$$
$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\int(|\nabla\psi|^2 - \tfrac{1}{2}|\psi|^4)\,d\boldsymbol{r}. \tag{12.37}$$

Вслед за В.И. Власовым, В.И. Талановым и В.А. Петрищевым [64] вычислим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle r^2\rangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int r^2|\psi|^2 d\boldsymbol{r} =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial t}\int\sum_\alpha x_\alpha^2\,\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\,d\boldsymbol{r} =$$

$$= -2i\frac{\partial}{\partial t}\int x_\alpha\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\alpha} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)d\boldsymbol{r}.$$

Воспользовавшись еще раз уравнением движения и интегрируя по частям так, чтобы не оставалось слагаемых, пропорциональных x_α, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle r^2\rangle = 4\int|\nabla\psi|^2 d\boldsymbol{r} - 2d\int|\psi|^4 d\boldsymbol{r} =$$

$$= 8\mathcal{H} + 2(2-d)\int|\psi|^4 d\boldsymbol{r}, \tag{12.38}$$

где d – размерность пространства, $\mathcal{H}$ – гамильтониан (12.37). Таким образом, при $d \geqslant 2$

$$8\mathcal{H} \geqslant \frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle r^2\rangle, \tag{12.39}$$

поэтому

$$\langle r^2\rangle \leqslant 4\mathcal{H}t^2 + C_1 t + C_2\ . \tag{12.40}$$

Если в начальный момент времени $\mathcal{H} < 0$, т.е. $2\int|\nabla\psi|^2 d\boldsymbol{r} < \int|\psi|^4 d\boldsymbol{r}$, то за конечное время решение становится сингулярным, происходит коллапс, ибо $\langle r^2\rangle$ обращается в нуль. Для практики большой интерес представляло бы стационарное двумерное решение уравнений (12.29) (круглый волновод), позволяющее передавать энергию лазерного излучения на большие расстояния без потерь из-за дифракционной расходимости. Такое решение, как видно из (12.31), соответствует $\mathcal{H} = 0$. К сожалению, это решение неустойчиво. Если в начальный момент $\mathcal{H}$ из-за флуктуаций окажется положительным, то в силу (12.40) (напомним, что при

$d=2$ в (12.40) стоит знак равенства) $\langle r^2 \rangle$ будет расти и волновод "расплывается ". В обратном случае $\mathcal{H}<0$, напряженность поля в центре станет очень большой. Как правило, в этом случае происходит необратимое разрушение нелинейного диэлектрика, сопровождающееся потерями энергии излучения. Подробнее об этом см. в обзоре С.А. Ахманова, А.П. Сухорукова, Р.В. Хохлова [52], в работе В.Е. Захарова, В.С. Сынаха [108].

§ 13. Самофокусировка магнитоупругих волн в антиферромагнетиках

13.1. Структура исходных уравнений. Значительная нелинейность магнитной подсистемы кристалла приводит к тому, что система других квазичастиц, взаимодействующих с СВ, также становится нелинейной. Например, в большинстве твердых тел при практически достижимых деформациях нелинейные акустические эффекты малы. Это связано с наличием в кристалле дефектов, вследствие чего образец обычно разрушается при относительных деформациях u, много меньших единицы $(u \sim 10^{-6} \div 10^{-4})$. В АФМ из-за обменного усиления магнитострикции (см. § 7) нелинейность и дисперсия магнитоупругих волн могут оказаться значительными. При этом звуковой закон дисперсии приобретет следующий вид:

$$\omega^2 = (V_S + Q_1 u + Q_2 u^2)^2 k_x^2 + 2V_S D k_x^4 + 2V_S a k_\perp^2 . \tag{13.1}$$

Здесь учтена нелинейность (которую можно свести к перенормировке скорости звука), дисперсия скорости волн, а также дифракция (мы полагаем упругую волну слабо неодномерной: $k^2 = k_x^2 + k_\perp^2$, $k_\perp \ll k_x$). В изотропной среде $a = V_S/2$, в кристаллах из-за анизотропии упругих свойств и магнитострикции значение a может быть как положительно, так и отрицательно (С.К. Турицын, Г.Е. Фалькович, [216]). При не слишком высоких уровнях возбуждения эволюция магнитоупругих волн может быть разделена на быструю и медленную. Быстрая представляет собой перенос исходного возмущения со скоростью звука, а медленная эволюция обусловлена малыми эффектами нелинейности, дисперсии и дифракции. Для изучения этих эффектов удобно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью звука, заменив в (13.1) $\omega = \Omega - V_S k_x$, $\Omega \ll V_S k_x$, и совершив обратное фурье-преобразование $u(\boldsymbol{r}, t) = \int u(\boldsymbol{k}, \Omega) \exp(i\boldsymbol{kr} - i\Omega t)\, d\boldsymbol{k} d\Omega$. В результате получится следующее уравнение:

$$u_t + Q_1 u u_x + Q_2 u^2 u_x + D u_{xxx} + a \int_{-\infty}^{x} \Delta_\perp u dx' = 0,$$

$$u_t = \partial u/\partial t, \quad u_x = \partial u/\partial x, \qquad u_{xxx} = \partial^3 u/\partial x^3 . \tag{13.2}$$

Разумеется, проделанные для вывода этого уравнения манипуляции носят лишь иллюстративный характер. Строгий вывод (13.2) из уравнений Ландау – Лифшица и теории упругости содержится в работе С.К. Турицина и Г.Е. Фальковича [216], по результатам которой написан этот параграф, и где приведены выражения для констант Q, D, a в АФ ромбоэдрической структуры. Здесь же отметим, что в ряде случаев

$Q_1 = 0$, т.е. первой неисчезающей нелинейностью является кубическая. Коэффициент дисперсии $D \sim (V_S^2 - V_m^2)$ пропорционален разности скорости звука и предельной скорости магнонов. Стало быть, в АФ, у которых $V_S > V_m$ (или, иными словами, температура Дебая выше температуры Нееля), $D > 0$, т.е. дисперсия отрицательна – скорость магнитоупругих волн падает с ростом волнового вектора (В.И. Ожогин и др. [191]).

В одномерном случае (когда исходное возмущение однородно в плоскости, перпендикулярной к линии распространения) (13.2) сводится в зависимости от типа нелинейности либо к уравнению Кортевега – де Вриза – КдВ

$$u_t + Quu_x + Du_{xxx} = 0, \tag{13.3}$$

либо к модифицированному уравнению КдВ – МКдВ

$$u_t + Qu^2 u_x + Du_{xxx} = 0. \tag{13.4}$$

13.2. Свойства одномерных уравнений. Одномерные уравнения (13.3), (13.4) обладают следующим замечательным свойством: если рассматривать какое-либо решение этого уравнения $u(x,t)$ в качестве потенциала линейного уравнения Шредингера

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + u(x,t)\right]\Psi(x,t) = E\,\Psi(x,t), \tag{13.5}$$

то спектр энергий $\{E\}$ не зависит от времени. Иными словами, эволюция $u(x,t)$ в силу уравнений КдВ (13.3) или МКдВ (13.4) осуществляет изоспектральное преобразование потенциала уравнения Шредингера. Этот факт, обнаруженный С. Гарднером и др. [66], лежит в основе метода обратной задачи рассеяния и его дальнейших обобщений [42, 111]. Связь с уравнением (13.5) позволяет для уравнений (13.3), (13.4) описать эволюцию произвольного локализованного начального возмущения $u(x,0)$. Для этого следует найти спектр (13.5) с потенциалом $u(x,0)$. Количество дискретных уровней в спектре равно количеству солитонов, на которые в асимптотике $t \to \infty$ распадается исходное возмущение. Солитоны, как и в одномерном уравнении (12.32), являются асимптотическими состояниями. Именно изучение уравнений (12.32) и (13.3) привело к осознанию фундаментальной роли солитонов в нелинейной волновой динамике (см. [42]). Формирование таких локализованных стационарных импульсов возможно, начиная с амплитуд, при которых сравниваются эффекты нелинейности uu_x и дисперсии u_{xxx}. При таких амплитудах плоские волны уже не являются хорошо определенными объектами, так как время их взаимодействия становится порядка времени разбегания волновых пакетов из-за дисперсии групповых скоростей. К сожалению, надежды на использование солитона в роли фундаментального объекта описания вместо плоской волны не вполне оправдались, так как солитоны зачастую оказываются неустойчивыми. В результате развития неустойчивости в ряде случаев развивается коллапс (на другом языке – самофокусировка), который, таким образом, играет в нелинейной динамике волн не менее фундаментальную роль, чем солитоны.

13.3. Устойчивость неодномерных солитонов и теорема о самофокусировке. Рассмотрим слабо неодномерное обобщение уравнения модифи-

цированного уравнения КдВ (13.4):

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + Du_{xxx} + Qu^2u_x) = au_{yy} + cu_{zz},$$
$$u_{yy} = \partial^2 u/\partial y^2, \qquad u_{zz} = \partial^2 u/\partial z^2. \tag{13.6}$$

В АФЛП, как правило, реализуется случай $Q > 0$ (см. [191]), обсуждением которого мы и ограничимся. Плоские солитоны

$$u_0(x - Vt) = \frac{(2V/Q)^{1/2}}{\operatorname{ch}[(x - Vt)(V/D)^{1/2}]}$$

бегут со сверхзвуковой скоростью ($V > 0$; напомним, что (13.4), (13.6) записаны в системе отсчета, движущейся со скоростью звука). Как видно из выражения для u_0, солитоны существуют лишь при $D > 0$, т.е. для АФМ, у которых $V_S > V_m$ (в случае $D < 0$), стационарным является решение в виде бегущей "доменной стенки":

$$u_1 = \frac{(2V/Q)^{1/2}}{\operatorname{cth}[(x - Vt)(V/D)^{1/2}]}.$$

Устойчивость одномерных солитонов относительно поперечных возмущений была первые изучена Б.Б. Кадомцевым и В.И. Петвиашвили [114]. Они показали, что солитоны устойчивы лишь при $a < 0$, $c < 0$; если же знак хотя бы одной (или обеих) из величин a, c положителен, плоские солитоны неустойчивы относительно гофрировки. Качественная причина этой неустойчивости заключается в том, что локальное возрастание амплитуды солитона приводит к уменьшению его скорости в этом месте, этот участок начинает отставать, фронт искривляться, что в свою очередь приводит к концентрации энергии и дальнейшему нарастанию амплитуды в месте первоначальной флуктуации и т.д. При $a > 0$, $c > 0$ возможна самофокусировка упругой волны. Для того чтобы показать это, представим уравнение (13.6) в виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u},$$

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\int (Du_x^2 + aw_y^2 + cw_z^2 - 2u^4)d\boldsymbol{r}, \tag{13.7}$$

где $w_x = u$. Так же, как и (12.37), (11.29), уравнения (13.7) являются гамильтоновыми и сохраняют гамильтониан $\mathcal{H}$.

Поступая аналогично § 12, вычислим вторую производную по времени от положительной величины, пропорциональной квадрату характерного поперечного размера пучка:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int r_\perp^2 u^2 d\boldsymbol{r} = 16a\mathcal{H} - 8Da\int u_x^2\, d\boldsymbol{r}. \tag{13.8}$$

Видно, что при $D > 0$, $a = c > 0$ любое распределение с отрицательным гамильтонианом $\mathcal{H}$ испытывает самофокусировку.

В случаях, когда знак хотя бы одной из величин D, a отрицателен, (13.8) позволяет установить факт дефокусировки пучка. Действительно, если $D > 0$, $a > 0$, достаточное условие расплывания поперечных неоднород-

ностей $\mathcal{H} < 0$. При $a < 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r_\perp^2 u^2 dr = 16a \left[\frac{1}{2} \int a(\nabla_\perp w)^2 dr - \int u^4 dr \right] > 0 \tag{13.9}$$

и, следовательно, любое начальное распределение расплывается.

13.4. Эволюция магнитоупругих волн в отсутствие линейной связи между магнонами и фононами. Система уравнений, описывающих совместную эволюцию тензора деформации u и угла поворота вектора антиферромагнетизма φ, в безразмерных переменных имеет вид ($\alpha = V_m/V_S$)

$$u_{tt} - u_{xx} = (\varphi^2)_{xx}, \qquad \varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{xx} + \varphi = 2u\varphi. \tag{13.10}$$

Дальнейшие редукции (13.10) зависят от способа возбуждения магнитной или упругой подсистемы кристалла. При параметрической генерации СВ высокочастотным электромагнитным полем можно перейти от $\varphi(x,t)$ к медленной огибающей $\psi(x,t)$:

$$\varphi = \psi \exp[ikx - i(1 + \alpha^2 k^2)^{1/2} t] + \text{к.с.},$$

после чего придем к системе, впервые полученной В.Е. Захаровым [101] для взаимодействия ленгмюровских и ионнозвуковых волн в плазме:

$$u_{tt} - u_{xx} = |\psi|^2_{xx},$$

$$i(\psi_t + \alpha^2 ik\, \psi_x) + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \psi_{xx} = u\psi. \tag{13.11}$$

В рамках этой системы существуют устойчивые одномерные солитоны, а неодномерные обобщения (13.11) описывают неустойчивость солитонов относительно поперечной гофрировки и (в трехмерном случае) коллапс волн. Возможна и другая постановка эксперимента, при которой возбуждаются (например, пьезопреобразователем) медленные звуковые движения u. Система (13.10) имеет солитонные решения. В исходных переменных

$$u_0 = -2\,\mathrm{ch}^{-2}\left[\frac{x - Vt}{(\alpha^2 - V^2)^{1/2}}\right],$$

$$\varphi_0 = [(2(1 - V^2)]^{1/2}\mathrm{ch}^{-1}\left[\frac{x - Vt}{(\alpha^2 - V^2)^{1/2}}\right] \tag{13.12}$$

(в отличие от *солитонов огибающих* в (13.11)). Эти солитоны, однако, неустойчивы уже в одномерной геометрии. В этом случае также можно доказать возможность коллапса, который в силу одномерности имеет смысл не самофокусировки, а опрокидывания волны за конечное время.

Разумеется, неограниченное возрастание амплитуды (или ее производных) не может иметь физического смысла, так как при этом мы выйдем за рамки применимости используемых уравнений (12.29), (13.6) или (13.10). Существенной здесь является сама возможность нарастания амплитуд волн до такой степени, когда нелинейность перестает быть малой.

§ 14. Методы параметрического возбуждения спиновых волн в магнетиках

14.1. Поперечная накачка СВ в ферромагнетиках — сулловская неустойчивость первого порядка. Так принято называть распад однородной прецессии намагниченности (ОП) с частотой ω_0 на пару СВ с волновыми векторами $\boldsymbol{k}$ и $-\boldsymbol{k}$ и частотами $\omega(\boldsymbol{k}) = \omega(-\boldsymbol{k}) = \omega_p/2$. Этот процесс описывается следующими слагаемыми гамильтониана $\mathcal{H}_3$:

$$\Delta\mathcal{H}_3 = \tfrac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} \left[V_{0,\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}}\, b_0^*\, b_{\boldsymbol{k}}\, b_{-\boldsymbol{k}} + \text{к.с.}\right] \tag{14.1}$$

с матричным элементом (6.22):

$$V_{0,\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}} = 2V_{\boldsymbol{k}}\, u_{\boldsymbol{k}}^2 + 2u_{\boldsymbol{k}}\, v_{\boldsymbol{k}}\, V_{\boldsymbol{k}}^* =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\omega_M (g/2M)^{1/2} \sin 2\theta_{\boldsymbol{k}} \exp\left[(2i\varphi_{\boldsymbol{k}})(A_{\boldsymbol{k}} + \omega_{\boldsymbol{k}} - |B_{\boldsymbol{k}}|)/\omega_{\boldsymbol{k}}\right]. \tag{14.2}$$

Здесь мы предположили, что намагниченность $\boldsymbol{M}$ направлена по оси вращения эллипсоидального образца так, что поляризация ОП является круговой и соответственно $v_0 = 0$. В соответствии с (11.18) пороговая амплитуда ОП b_{th} относительно ее распада на пару СВ $\pm\boldsymbol{k}$ определяется формулой

$$|V_{0,\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}}|\, b_{\text{th}}(\boldsymbol{k}) = \gamma_{\boldsymbol{k}}. \tag{14.3}$$

Поэтому первыми (по мере увеличения b_0) возбуждаются те пары СВ, для которых отношение $\gamma_{\boldsymbol{k}}/V_{0,\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}}$ минимально. Если $\gamma_{\boldsymbol{k}}$ не зависит от углов $\theta_{\boldsymbol{k}}$ и $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ на резонансной поверхности $\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_p/2$ (а входить в детали этой зависимости сейчас преждевременно), то вначале возбуждаются пары, для которых $|V_{0,\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}}|$ максимально. Их волновые векторы лежат на двух окружностях (меридианах) поверхности $2\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_p$ и имеют $0 \leqslant \varphi_{\boldsymbol{k}} \leqslant 2\pi$ и $\theta_{\boldsymbol{k}} = \theta_m, \pi - \theta_m$, где θ_m несколько менее $\pi/4$. Это видно, если тождественно переписать $|V_{0,\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}}|$ из (14.2) в виде

$$|V(0,\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k})| \equiv V_1(\theta) =$$

$$= \omega_M \left(\frac{g}{2M}\right)^{1/2} \frac{\omega_p + \omega_M \sin^2\theta + (\omega_p^2 + \omega_M^2 \sin^2\theta)^{1/2}}{2\omega_p} \sin 2\theta. \tag{14.4}$$

Таким образом (при $\omega_p > \omega_M$),

$$b_{\text{th}} = \min_{\theta_{\boldsymbol{k}}} b_{\text{th}}(\boldsymbol{k}) \approx (\gamma/\omega_M)(2M/g)^{1/2}. \tag{14.5}$$

Канонической амплитуде ОП b_{th} соответствует критический угол прецессии ψ_{th}:

$$\psi_{\text{th}} = m_{\text{th},\perp}/M = (2g/M)^{1/2}\, b_{\text{th}} \approx 2\gamma/\omega_M. \tag{14.6}$$

Для ЖИГ (при $\omega_M = 1700$ Гс, $\gamma \approx 0{,}5$ Гс) $\psi_{\text{th}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Осталось пояснить, почему такой метод параметрического возбуждения СВ в ФМ называется поперечной накачкой. Дело в том, что обычно ОП возбуждают СВЧ магнитным полем с поляризацией $\boldsymbol{h}_\perp$, ориентированной поперек постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}$ (и соответственно стационарной намагниченности $\boldsymbol{M}$). Гамильтониан этого взаимодействия обязан части

зеемановской энергии $-\boldsymbol{hM}(r,t) = -\boldsymbol{h}_\perp \boldsymbol{m}_\perp$ и имеет вид

$$\mathcal{H}_p^{(1)} = U[h_+(t)b_0^* + \text{к.с.}],$$
$$U = -(gM_0/2)^{1/2}, \qquad h_+ = h_x + ih_y. \tag{14.7}$$

Этот гамильтониан описывает хорошо известное явление ферромагнитного резонанса (ФМР)

$$\frac{\partial b_0}{\partial t} + i\omega_0 b_0 + \gamma_0 b_0 = -i\frac{\delta\mathcal{H}_p^{(1)}}{\delta b_0^*} = -uh_+(t). \tag{14.8}$$

Если СВЧ поле имеет правую круговую поляризацию, то

$$h_+(t) = h_+ \exp(-i\omega t),$$
$$b_0(t) = \frac{(gM_0/2)^{1/2}h_+\exp(-i\omega t)}{\omega_0 - \omega - i\gamma_0}. \tag{14.9}$$

При линейной поляризации

$$h_y = 0, \qquad h_+ = h_x = 2h\cos\omega t,$$
$$b_0(t) = b_0(\omega)\exp(-i\omega t) + b_0(-\omega)\exp(i\omega t), \tag{14.10}$$
$$b_0(\omega) = h(gM_0/2)^{1/2}(\omega - \omega_0 + i\gamma_0)^{-1}.$$

Вблизи от ФМР, когда $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, слагаемое $\sim b_0(\omega)$ описывающее правополяризованную часть b_0, является главным, и выражение для критической амплитуды h_{th}, соответствующее порогу неустойчивости ОП (14.3), является одинаковым для правой круговой и линейной поляризаций h:

$$h_{\text{th}} = [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2]^{1/2} b_{\text{th}}/U \approx [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2]^{1/2}\gamma_k/g\omega_M. \tag{14.11}$$

В точном резонансе $(\omega = \omega_0)$ h_{th} очень мало. Взяв для оценки $\gamma_0/g \approx 1$ Гс, имеем $h_{\text{th}} \approx 0{,}002$ Гс. В экспериментах на частоте 10^{10} с$^{-1}$ амплитуда СВЧ поля h достигала значений до 10 Гс. Поэтому амплитуда ОП b_{th} достигает критических значений не только в условиях ФМР, но и вдали от него. В этом случае естественно рассматривать эту неустойчивость как параметрическую нестабильность внешнего поля по отношению к распаду на две СВ с волновыми векторами $\boldsymbol{k}$ и $-\boldsymbol{k}$. Соответственно уравнения (11.11) удобно переписать в виде, в котором амплитуда b_0 выражена через амплитуду поля накачки h:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + \gamma_k b_k + i\omega_k b_k + ih\exp(i\omega_p t)\,\tilde{V}_k\, b_{-k}^* = 0,$$
$$\frac{\partial b_k^*}{\partial t} + \gamma_k b_{-k}^* - i\omega_k b_{-k}^* - ih\exp(-i\omega_p t)\,\tilde{V}_k^*\, b_k = 0. \tag{14.12}$$

Здесь мы ввели величину $\tilde{V}_k$ – эффективный коэффициент связи СВ с накачкой, через который просто выражается пороговая амплитуда h_{th}:

$$h_{\text{th}}|\tilde{V}_k| = \gamma_k. \tag{14.13}$$

Для рассмотренного выше случая круговой поляризации

$$\tilde{V}_k = \left(\frac{gM}{2}\right)^{1/2}\frac{V_k}{\omega_p - \omega_0}\left(1 + \frac{A_k - |B_k|}{\omega_k}\right). \tag{14.14}$$

Из (14.13), (14.14) можно получить выражение (14.11) для h_{th}. В случае линейной поляризации вдали от ФМР необходимо в исходных уравнениях (11.11), помимо слагаемого $V(0, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}) b_0$ (которое теперь стало нерезонансным), учесть другое нерезонансное слагаемое $U(0, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}) b_0^*(-\omega)$. В результате уравнение (14.12) остается справедливым, но выражение для $\widetilde{V}_{\boldsymbol{k}}$ изменится:

$$\widetilde{V}_{\boldsymbol{k}} = \left(\frac{gM_0}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{V(\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}, 0)}{\omega_p - \omega_0} - \frac{U(\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}, 0)}{\omega_p + \omega_0}\right) =$$

$$= \left(\frac{gM_0}{2}\right)^{1/2} V_{\boldsymbol{k}} \left[\left(\frac{1}{\omega_p - \omega_0} + \frac{\exp(2i\varphi_{\boldsymbol{k}})}{\omega_p + \omega_0}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{A_{\boldsymbol{k}} - |B_{\boldsymbol{k}}|}{\omega_p} \left(\frac{1}{\omega_p - \omega_0} + \frac{\exp(2i\varphi_{\boldsymbol{k}})}{\omega_p + \omega_0}\right)\right]. \tag{14.15}$$

Существенно, что первое и второе слагаемые в этом выражении, описывающие соответственно вклады правой и левой поляризаций в линейной накачке, имеют разные зависимости от азимутального угла СВ $\varphi_{\boldsymbol{k}}$. Поэтому максимум модуля всего выражения достигается не на всем меридиане с фиксированным $\theta_{\boldsymbol{k}}$ и любым $\varphi_{\boldsymbol{k}}$, как в случае круговой поляризации, а в двух точках $\varphi_{\boldsymbol{k}} = 0, \pi$, соответствующих возбуждению двух пар СВ, с $\boldsymbol{k}$ и $-\boldsymbol{k}$, лежащих в плоскости накачки h и M_0. Именно это обстоятельство – максимальная связь с накачкой не целой группы пар с различными $\varphi_{\boldsymbol{k}}$, а только их конечного числа (в данном случае двух) – делает поперечную накачку очень интересной для будущих экспериментальных исследований запорогового поведения СВ.

В заключение этого пункта приведем выражения для минимального порога возбуждения СВ поперечной накачкой с $\theta_{\boldsymbol{k}} = \pi/4$, $\varphi_{\boldsymbol{k}} = 0, \pi$ в случае $\gamma_{\boldsymbol{k}} = \gamma_k$ и $\omega_M \ll \omega_p$:

$$h_{\text{th}} = 2\gamma_k(\omega_p - \omega_0)/(g\omega_M). \tag{14.16}$$

Для монокристаллов ЖИГ с $\gamma_k = g \cdot 0{,}1$ Э на частоте $\omega_p = 2\pi \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$ получаем $h_{\text{th}} \approx 0{,}3$ Гс. Эта величина легко достигается в эксперименте.

14.2. Параллельная накачка СВ в ферромагнетиках. Продольная часть зеемановской энергии $-h_z m_z$ приводит к гамильтониану

$$\mathcal{H}_{p2} = \mathcal{H}_{p1} + \mathcal{H}_p, \tag{14.17}$$

$$\mathcal{H}_p = \tfrac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} [h(t)\, V_{\boldsymbol{k}}\, b_{-\boldsymbol{k}}^* b_{\boldsymbol{k}}^* + \text{к.с.}], \qquad h(t) = h\exp(-i\omega_p t), \tag{14.18}$$

$$\mathcal{H}_{p1} = \sum_{\boldsymbol{k}} u_{\boldsymbol{k}}\, b_{\boldsymbol{k}}^* b_{\boldsymbol{k}}\, [h^*(t) + h(t)], \qquad h_z = h(t) + h^*(t) = \tag{14.19}$$

Первое слагаемое в $\mathcal{H}_{p2}$ описывает процессы, не изменяющие общее число магнонов. Из-за условия временного синхронизма это слагаемое может оказаться существенным лишь при низких частотах $h(t)$ порядка частот релаксации СВ $\gamma_{\boldsymbol{k}}$, с точностью до которых определена частота колебаний намагниченности в СВ. Происхождение гамильтониана $\mathcal{H}_p$, описывающего параметрическое возбуждение пары СВ продольным полем, можно понять

из простых геометрических соображений. Из-за магнитного дипольного взаимодействия и кристаллографической анизотропии намагниченность в каждой точке прецессирует по эллиптическому конусу (формально это проявляется в том, что круговые переменные $a_k \sim m_x + im_y$ не являются нормальными, и для диагонализации квадратичной части гамильтониана необходимо делать u–v-преобразование. Поскольку длина вектора $\boldsymbol{M}$ остается постоянной, основание конуса не является плоским и возникает переменная продольная составляющая (z-компонента) вектора $\boldsymbol{M}$, изменяющаяся с удвоенной частотой прецессии $2\omega_k$. Ясно, что эти волны можно возбудить с помощью магнитного поля частоты $2\omega_k$ и поляризованного вдоль z.

Из выражений (14.12) и (14.18) легко найти порог параметрической накачки СВ:

$$h_{\text{th}} \mid V_k \mid = \gamma_k. \tag{14.20}$$

Здесь V_k – коэффициент связи пары $\pm k$ с накачкой:

$$\begin{aligned} V_k &= 2gu_k v_k = gB_k/\omega_k = V\sin^2\theta\exp(2i\varphi_k), \\ V &= g\omega_M/2\omega_k. \end{aligned} \tag{14.21}$$

Видно, что $\mid V_k \mid$ максимально для пар СВ с волновыми векторами на экваторе резонансной поверхности: $0 \leqslant \varphi_k \leqslant 2\pi$, $\theta_k = \pi/2$. Если γ_k медленно зависит от θ_k, именно эти пары СВ имеют минимальный порог возбуждения:

$$gh_{\text{th}} = \gamma\omega_p/\omega_M. = \frac{g\Delta H_k}{2}\frac{\omega_p}{\omega_M} \qquad h_{th} = \frac{1}{2}\frac{\omega_p}{\omega_M}\Delta H_k = \frac{h_z k}{2} \tag{14.22}$$

$h_z k = \frac{\omega_p}{\omega_k} \Delta H_k$

По порядку величины пороговое поле параллельной накачки (14.22) совпадает с пороговым полем поперечной накачки (14.13) – (14.15) вдали от ФМР.

14.3. "Косая" накачка СВ в ферромагнетиках. Так называется метод параметрического возбуждения СВ в ФМ, промежуточный между поперечной и параллельной накачкой, когда направление линейно поляризованного СВЧ поля $h(t)$ составляет некоторый угол θ_0 с намагниченностью, и необходимо одновременно учитывать как продольную, так и поперечную части накачки. В результате эффективный коэффициент связи с косой накачкой $V'_k(\theta_0)$ примет вид

$$V'_k(\theta_0) = \widetilde{V}_k(\theta, \varphi)\sin\theta_0 + V_k\cos\theta_0, \tag{14.23}$$

где $\widetilde{V}_k$ и V_k задаются формулам (14.15) и (14.21) соответственно. Как видно из этих выражений, порог параметрического возбуждения СВ минимален для единственной пары СВ с $\varphi_k = 0$ и некоторым θ_k, зависящим от θ_0.

14.4. Поперечная накачка СВ в ферромагнетиках – сулловская неустойчивость второго порядка. Если уменьшать частоту накачки ω_p или увеличивать постоянное магнитное поле H_0 и соответственно щель в спектре СВ, то легко добиться того, чтобы частота накачки стала меньше, чем удвоенная минимальная (по φ_k и θ_k) щель в спектре СВ. При этом условие параметрического резонанса

$$\omega_p = \omega_k + \omega_{-k} \tag{14.24}$$

не будет выполняться ни для каких $\boldsymbol{k}$, и, следовательно, трехволновые процессы распада (14.24) внешнего поля на две СВ будут запрещены. В этом случае легко создать условия наблюдения другого параметрического процесса – так называемой *сулловской неустойчивости ОП второго порядка*, условие параметрического резонанса для которой имеет вид

$$2\omega_p = \omega(\boldsymbol{k}) + \omega(-\boldsymbol{k}). \tag{14.25}$$

Поскольку гамильтониан взаимодействия СВ с внешним полем (14.18) пропорционален первой степени h, прямой процесс (14.25) распада двух квантов накачки на две СВ в ФМ не идет. Возможен, однако, косвенный процесс с участием однородной прецессии (ОП): внешнее поле h раскручивает в резонансе ОП $\omega_p \approx \omega_0$ и затем происходит четырехмагнонный параметрический процесс:

$$2\omega_0 = \omega(\boldsymbol{k}) + \omega(-\boldsymbol{k}). \tag{14.26}$$

Легко понять, что пороговая амплитуда ОП $(b_0)_{\text{th}}$ определяется условием

$$|S_{0k}(b_0)^2_{\text{th}}| = \gamma_k, \tag{14.27}$$

в котором b_0 связана с h уравнением (14.9) или (14.10). Подставляя в (14.27) S_{0k} из (6.26), имеем для кубических ФМ:

$$(gh_{\text{th}}/\omega_m)^2 = \gamma_k/\omega_k. \tag{14.28}$$

Если для параметрических процессов первого порядка $gh_{\text{th}}/\omega_M \approx \gamma_k/\omega_M$, то для процессов второго порядка $gh_{\text{th}}/\omega_M \approx (\gamma_k/\omega_M)^{1/2}$ и пороговая амплитуда h_{th} вдали от резонанса ОП оказывается существенно больше. Однако при выполнении резонансного условия для ОП: $\omega_p = \omega_0$ из (14.28) следует, что $gh_{\text{th}} \approx (\gamma_0\gamma_k)^{1/2}$, т.е. амплитуда h_{th} обсуждаемого процесса (14.26) оказывается одного порядка с таковой для параллельной накачки. Существенным моментом для параметрического процесса (14.26) является то, что порог неустойчивости (14.28) минимален для СВ на полюсах резонансной поверхности ($\theta_k = 0, \pi$), т.е. в единственной паре точек.

14.5. Параметрическое возбуждение СВ в АФМ ЛП – антиферромагнетиках с анизотропией типа "легкая плоскость". Как уже отмечалось во второй главе, именно АФМ ЛП представляют наибольший интерес при изучении нелинейных свойств СВ с АФМ, ибо они имеют низколежащие ветви СВ, попадающие в удобный диапазон ниже 50 ГГц. Механизм параметрического возбуждения СВ методом параллельной накачки здесь похож на механизм поперечной накачки линейно поляризованным полем или косой накачки СВ в ФМ: необходимо учитывать как непосредственное возбуждение полем h СВ в нижней ветви: $h \to a_k + a_{-k}$, так и косвенное возбуждение: распад СВ с $k = 0$ (однородная прецессия (ОП)) в верхней ветви $b_0 \to a_k + a_{-k}$, причем ОП b_0 линейно возбуждается нерезонансным полем: $h^* \to b_0$, $h \to b_0^*$. В соответствии с этим полный гамильтониан системы, включающий взаимодействия с накачкой, имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_k (\omega_k a_k^* a_k + \Omega_k b_k^* b_k) + 2hU(b_0 + b_0^*)\cos\omega_p t +$$

$$+ \tfrac{1}{2} h \sum_k [V_k a_k^* a_{-k}^* \exp(-i\omega_p t) + \text{к.с.}] + \mathcal{H}_3, \tag{14.29}$$

$$\mathcal{H}_3 = \sum_{2+3=1} [V^{(1)}_{1,23} b_1 a^*_2 a^*_3 + V^{(2)}_{1,23} a_1 b^*_2 a^*_3 + \text{к.с.}] +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{1+2+3=0} [U_{1,23} b^*_1 a^*_2 a^*_3 + \text{к.с.}].$$

Здесь ω_k и Ω_k – частоты квазиферромагнитной и квазиантиферромагнитной ветвей спектра (см. формулу (7.5)), коэффициенты U и V_k задают линейную и параметрическую связь поля h с антиферро- и ферромагнонами и, наконец, коэффициенты $V^{(1)}_{1,23}$, $V^{(2)}_{1,23}$ и $U_{1,23}$ описывают интересующие нас трехмагнонные процессы (см. для них формулы (7.10)). Вычисляя b_0 из уравнений движения (14.8), получаем выражение для эффективного коэффициента связи СВ нижней ветви с накачкой:

$$\tilde{V}_k = V_k - \frac{UV^{(1)}_{0,k,k^-}}{\Omega_0 - \omega_p} - \frac{UU_{0,k,k^-}}{\Omega_0 + \omega_p} = \frac{g^2}{2\omega_k}\left(H_D + \frac{2H\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \omega_p^2}\right), \quad (14.30)$$

где H – внешнее постоянное поле, H_D – поле Дзялошинского. Результат (14.30) впервые был получен В.И. Ожогиным [189]. Существенным его отличием от случая ФМ является сферическая симметрия: $\tilde{V}_k$ не зависит от направления $\boldsymbol{k}$, и поэтому при сферической симметрии затухания СВ в запороговом состоянии должны возбуждаться пары со всеми направлениями $\boldsymbol{k}$, т.е. "возбуждается вся резонансная поверхность" $2\omega_k = \omega_p$. Учитывая, что в АМФ ЛП $\omega_0^2 = g^2 H(H + H_D)$ (см. (7.3)) и обычно H одного порядка с H_D, легко убедиться, что $\tilde{V}_k \approx g$, т.е. имеет тот же порядок величины, что и V_k в методе параллельной накачки в ФМ (14.21). Затухание СВ в хороших образцах АФМ ЛП $MnCO_3$ при гелиевых температурах порядка 10^6 с$^{-1}$, так что пороговое поле h_{th} оказывается порядка 0,1 Гс. Это значение легко получить экспериментально.

14.6. Ядерные спиновые волны (ЯСВ) и их параметрическое возбуждение в АФМ ЛП. Концепция ЯСВ была впервые предложена в работе П.Ж. Де Женна и др. [77]. ЯСВ – это коллективные колебания спинов ядер, например ядер Mn в АФМ $MnCO_3$. Разумеется, прямое обменное взаимодействие ядерных спинов отсутствует, а их магнитное дипольное взаимодействие пренебрежимо мало из-за малости магнитного момента ядер. К коллективизации движения ядерных спинов приводит их косвенное обменное взаимодействие Сула – Накамуры. Оно возникает во втором порядке теории возмущений по сверхтонкому взаимодействию (СТВ) ядерных спинов с электронными. Отклонение спина i-го ядра отклоняет под действием СТВ электронный спин i-го атома, это возмущение распространяется в системе электронных спинов и в свою очередь действует через СТВ на другие ядерные спины. Полученная корреляция в движении спинов и есть ЯСВ. Подробное описание теоретических представлений и экспериментальных данных по ЯСВ можно найти в обзоре В.А. Тулина [215]. В двухподрешеточных АФМ ЛП есть две ветви электронных СВ $\omega_e(\boldsymbol{k})$ и $\Omega_e(\boldsymbol{k})$ и соответственно две ветви ЯСВ $\omega_n(\boldsymbol{k})$ и $\Omega_n(\boldsymbol{k})$:

$$\omega_n^2(\boldsymbol{k}) = \omega^2(0)\,[1 - \Delta^2/\omega_e^2(\boldsymbol{k})], \quad (14.31)$$

$$\Omega_n^2(\boldsymbol{k}) = \Omega_n^2(0)\,[1 - \Delta^2/\Omega_e^2(\boldsymbol{k})]. \quad (14.32)$$

Здесь $\Omega_n(0)$ – частота ядерного магнитного резонанса в сверхтонком

поле электрона $(\Omega_n(0)/2\pi$ для АФМ $CsMnF_s$, $MnCO_3$ и $RbMnF_3$ равняется соответственно 666 МГц, 640 МГц и 686 МГц, $\Delta^2 = 2\omega_{ex}\omega_n$, где ω_{ex} – частота межподрешеточного обмена, а ω_n – частота прецессии магнитного момента электрона в эффективном магнитном поле, вызванном СТВ и упорядочением ядерных спинов:

$$\omega_n = gH_n = A\,\langle I_z\rangle/\hbar \sim AH/T.$$

Величина Δ есть "обменно-усиленная" ядерная щель в спектре электронных СВ (см. (7.6) и табл. 7.1).

В работе В.И. Ожогина и А.Ю. Якубовского [191] вычислены пороги параметрического возбуждения двух ЯСВ $h_{th}^{(nn)}$ и одной электронной, одной ядерной СВ $h_{th}^{(en)}$, т.е. пороги двух процессов:

$$\omega_p = \omega_n(\boldsymbol{k}) + \omega_n(-\boldsymbol{k}), \tag{14.33}$$

$$\omega_p = \omega_n(\boldsymbol{k}) + \omega_p(-\boldsymbol{k}). \tag{14.34}$$

В наших обозначениях

$$h_{th}^{(nn)} = \gamma_n(\boldsymbol{k})/|\,\widetilde{V}_{\boldsymbol{k}}^{(nn)}\,|, \qquad h_{th}^{(en)} = [\gamma_e(\boldsymbol{k})\,\gamma_n(\boldsymbol{k})]^{1/2}/|\,V_{\boldsymbol{k}}^{(en)}\,|. \tag{14.35}$$

Здесь $\gamma_n(\boldsymbol{k})$ и $\gamma_e(\boldsymbol{k})$ – декременты затухания электронной и ядерной СВ соответственно, $V_{\boldsymbol{k}}^{(nn)}$ и $V_{\boldsymbol{k}}^{(en)}$ – эффективные матричные элементы связи с накачкой в процессах (14.33) и (14.34) соответственно. При $\omega_p \ll \Omega_e(0)$

$$V_{\boldsymbol{k}}^{(nn)} = \frac{g^2(2H+H_D)\,[\omega_n^2(0)-\omega_n^2(\boldsymbol{k})]}{2\omega_e^2(\boldsymbol{k})\,\omega_n(\boldsymbol{k})};$$

$$V_{\boldsymbol{k}}^{(en)} = \frac{g^2(2H+H_D)\,[\omega_n^2(0)-\omega_n^2(\boldsymbol{k})]^{1/2}}{2\omega_e(\boldsymbol{k})\,[\omega_e(\boldsymbol{k})\,\omega_n(\boldsymbol{k})]^{1/2}}. \tag{14.36}$$

В обозначениях этого параграфа эффективный матричный элемент связи внешнего поля с двумя электронными СВ (14.31) при $\omega_p \ll \Omega_e(\boldsymbol{k})$ имеет вид

$$\widetilde{V}_{\boldsymbol{k}} = \widetilde{V}_{\boldsymbol{k}}^{(ee)} = g^2(2H+H_D)/[2\omega_e(\boldsymbol{k})]. \tag{14.37}$$

Видно, что выполняется соотношение

$$\widetilde{V}_{\boldsymbol{k}}^{(ee)}\,\widetilde{V}_{\boldsymbol{k}}^{(nn)} = [\,\widetilde{V}_{\boldsymbol{k}}^{(en)}]^2. \tag{14.38}$$

Прямым следствием этого является соотношение для критических полей:

$$h_{th}^{(ee)}\,h_{th}^{(nn)} = [h_{th}^{(en)}]^2, \tag{14.39}$$

соответствующих возбуждению ядерных и электронных СВ с одним и тем же значением волнового вектора. Видимо, соотношение (14.39) не имеет глубокого физического смысла, однако оно полезно для численных оценок.

В заключение этого параграфа отметим, что все перечисленные процессы наблюдались и подробно исследовались в эксперименте. Так, в $MnCO_3$ при $T \approx 2k$ на частоте $\omega_k \approx 0{,}9$ ГГц $h_{th}^{(nn)} \approx (0{,}08 \div 0{,}15)$ Э и $h_{th}^{(en)} \approx (0{,}4 \div 1{,}0)$ Э в зависимости от величины внешнего поля H.

РАЗДЕЛ 3

ПРИБЛИЖЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

ГЛАВА 4

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ ЗА ПОРОГОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ. *S*-ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

§ 15. Введение

В результате развития параметрической неустойчивости в непрерывной среде (если размеры системы достаточно велики по сравнению с длиной возбуждающихся волн) возникает состояние, в котором одновременно возбуждены и интенсивно взаимодействуют между собой большое число волн. Характер этого состояния существенно зависит от конкретной ситуации – вида закона дисперсии волн, нелинейных и диссипативных свойств среды, которые в разных случаях совершенно различны.

В начале 70-х годов стало ясно, что существует один простой и одновременно чрезвычайно содержательный частный случай, когда построение общей нелинейной теории параметрического возбуждения волн оказалось возможным. Это случай, когда накачка осуществляется пространственно-однородным полем $k = 0$ или волной большой длины $k \ll k', k''$. Тогда характеристики запорогового состояния можно считать статистически однородными. Именно такая ситуация осуществляется в большинстве экспериментов по параметрическому возбуждению СВ в магнитоупорядоченных диэлектриках. Необходимо заметить, что эти эксперименты принадлежат к числу наиболее "чистых" экспериментов в физике нелинейных волн, что объясняется относительной простотой их проведения (по сравнению, например, с плазменным или нелинейно-оптическим экспериментом), а также высокими качествами магнетодиэлектриков. Особенно удобным объектом для экспериментов является кристалл ЖИГ – железо-иттриевый гранат, обладающий во многих отношениях уникальными свойствами. Большая часть экспериментальных данных, описанных в настоящей главе, относится к ЖИГ. Важные экспериментальные результаты были получены также на АФМ $MnCO_3$, $CsMnF_3$ и $FeBO_3$.

Экспериментальные данные о запороговом поведении СВ накапливаются с начала 60-х годов. К этому же времени относятся и первые ее модели, авторы которых ставили прежде всего цель – найти механизм, ограничивающий рост амплитуды неустойчивых СВ. Первым этапом на этом пути

была работа Х. Сула [211], который показал, что при накачке СВ однородной прецессией (ОП) намагниченности основным механизмом ограничения является их обратное влияние на накачку, приводящее к "замораживанию" ее амплитуды на пороговом уровне. Однако попытки объяснить эти явления при параллельной накачке встретили значительные трудности. Привлечение способов ограничения параметрической неустойчивости, традиционных для параметрического резонанса в системах с малым числом степеней свободы – нелинейного затухания и нелинейной расстройки частоты – оказалось недостаточным, в большинстве случаев нелинейное затухание оказывается слишком слабым и чувствительным к величине постоянного магнитного поля, чтобы объяснить наблюдаемый уровень СВ, нелинейная же расстройка частоты вообще не ограничивает параметрический резонанс в непрерывной среде, так как при любой амплитуде найдутся волны, перенормированные частоты которых в точности удовлетворяют условиям резонанса. Важный шаг в понимании запорогового поведения параметрически возбужденных СВ (ПСВ) был сделан Е. Шлеманном в 1962 г. [234], который обратил внимание на необходимость учета нелинейного взаимодействия ПСВ между собой и высказал мысль, что главный вклад в это взаимодействие вносят нелинейные процессы, удовлетворяющие условиям

$$\omega_k + \omega_{-k} = \omega_{k'} + \omega_{-k'} \tag{15.1}$$

и не выводящие волны из параметрического резонанса.

Новый период в изучении нелинейных явлений при параметрическом возбуждении волн начался в 69–70-х годах пионерскими работами В.Е. Захарова, С.С. Старобинца и автора 1969–1970 г.г. [93–96], которые показали, что процессы типа (15.1) сохраняют корреляцию фаз внутри каждой параметрически возбуждаемой пары волн с противоположными волновыми векторами и приводят к самосогласованному изменению суммарной фазы волн в каждой паре. Это приводит к ухудшению связи СВ с накачкой и, в конечном итоге, к ограничению их амплитуды. При этом возбужденными оказываются как раз те волны, перенормированные частоты которых в точности удовлетворяют условию параметрического резонанса. Такой *фазовый* механизм ограничения амплитуды волн, специфический для сплошной среды и в чистом виде осуществляющийся только в системе предельно больших (по сравнению с длиной волны) размеров, оказался главным механизмом ограничения амплитуды СВ при параллельной накачке в нераспадной части спектра. Процессы (15.1) с учетом необходимых фазовых соотношений удобно изучать, осуществив диагонализацию гамильтониана взаимодействия волн, аналогичную БКШ-приближению в теории сверхпроводимости. Теория, основанная на этом приближении (В.Е. Захаров, В.С. Львов, С.С. Старобинец, [96]), получила в дальнейшем название S-теории. В работах 70–74-х годов вышеупомянутых трех авторов и их коллег С.Л. Мушера, В.В. Зауткина, А.М. Рубенчика и некоторых других удалось в рамках S-теории и ее обобщений далеко продвинуться в изучении запорогового поведения СВ, объяснить качественно многие наблюдаемые в эксперименте эффекты и получить удовлетворительное количественное согласие с экспериментом [84–87, 98, 102, 103, 148–155].

В частности, в рамках S-теории были объяснены гигантские автоколебания намагниченности при параметрическом возбуждении СВ, обнаруженные

в 1961 г. Т.С. Хартвиком, Е.Р. Пересенни и М.Т. Вейсом [221] и впоследствии детально исследованные экспериментально. В 1974 г. В.Е. Захаров, В.С. Львов и С.С. Старобинец опубликовали обзор в УФН [105] (в основном по результатам, полученным с их участием), в котором была последовательно изложена S-теория и с ее точки зрения рассматривались и объяснялись результаты ряда экспериментов.

В последующие пять лет темп теоретических исследований нелинейных явлений при параметрическом возбуждении СВ снизился. В основном это было связано с тем, что к 1974 г. развитая теория, во-первых, существенно обогнала экспериментальные работы и, во-вторых, еще не стала достоянием основной части исследователей в этой области. В эти годы еще появлялись теоретические работы, опровергающие S-теорию (см., например, [225], [63]) или, напротив, переполучающие ее результаты другим методом (например, [185]). В некоторых теоретических работах промежуточного характера, основанных на S-теории, новые, но неверные результаты были связаны, например, с недопониманием границ ее применимости (см., например, [53], [179], [185]). В то же время в работах Г.А. Мелкова, Л.А. Прозоровой, В.И. Ожогина, В.В. Зауткина и их сотрудников [124–131], [133–136], [138–139], [172–177], [189–194], [197], [199–202], [204–208] были получены интересные и важные экспериментальные результаты по нелинейному поведению ПСВ, связанные с новым пониманием физики происходящих явлений за порогом параметрического возбуждения волн. Были подтверждены основные выводы S-теории, выяснены детали нелинейного поведения СВ и обнаружены количественно новые нелинейные эффекты, которые было трудно предсказать теоретически.

В этой главе изложены современные представления о той части S-теории и тех экспериментальных результатах, которые относятся к стационарному состоянию ПСВ. Разумеется, значение этих результатов выходит за рамки некоторой части физики магнетодиэлектриков. Они сыграли и, безусловно, будут продолжать играть важную роль в развитии физики нелинейных волн в других средах.

§ 16. Постановка задачи о нелинейном поведении параметрически возбужденных волн

При формулировке нелинейной теории параметрического возбуждения волн – S-теории – мы сделаем ряд упрощений, приближений, предположений разного характера.

1. Будем считать, что среда, в которой распространяются волны: СВ в магнетодиэлектриках, различные типы волн в плазме, волны на поверхности воды и т.д., является неограниченной и пространственно-однородной. Для этого необходимо, чтобы образцы магнетодиэлектриков, плазмы и т.д. были достаточно хорошего качества, а их линейные размеры L существенно превышали длину свободного пробега волн $l \approx \gamma^{-1}\,\partial\omega/\partial k$. Влияние статистически случайных неоднородностей на распространение волн и их нелинейное поведение будет рассмотрено в гл. 9.

2. Волны в среде будем описывать в рамках классического гамильтонова формализма, описанного в гл. 2, т.е. с помощью уравнений движения

(5.6) для комплексных амплитуд бегущих волн b_k, b_k^*, в которых квадратичный гамильтониан $\mathcal{H}$ является диагональным. Этот подход в большинстве случаев является бесспорным. Однако, как отмечалось в гл. 2, он неочевиден при описании СВ при температурах, не малых в сравнении с температурой Кюри. Строгий метод описания взаимодействующих СВ при конечных температурах должен опираться на спиновую диаграммную технику для неравновесных процессов (В.И. Белиничер, В.С. Львов, [56]). Однако в этой книге для простоты мы будем исходить из уравнений Блоха в канонических переменных, полагая, что в них заключена "значительная часть правды о спиновых волнах".

3. Так же, как и во второй главе, затухание волн на данном этапе исследования будем учитывать феноменологически с помощью диссипативного слагаемого $\gamma_k b_k$ в уравнении (10.3). Могут возникнуть сомнения в правомочности этой процедуры при описании когерентных волновых систем, в которых существенны фазовые соотношения. В дальнейшем, в гл. 10, эта процедура будет обоснована с помощью диаграммной техники (гл. 7) и будет показано, что декремент затухания волн γ_k в (10.3) можно вычислять с помощью обычного кинетического уравнения. Это не относится, однако, к рассмотренному в гл. 9 специальному случаю, в котором затухание волн обусловлено рассеянием на случайных неоднородностях.

4. Упрощения, изложенные в пп. 1–3, неспецифичны для проблемы нелинейного поведения ПСВ, и они используются в S-теории точно так же, как и во многих других задачах физики нелинейных волн. В этом пункте мы обсудим более узкий вопрос о выборе гамильтониана взаимодействия волн в S-теории. Все ПСВ имеют почти одинаковые частоты (в процессах первого порядка, равные половине частоты накачки), поэтому резонансными для них являются только четырехволновые процессы рассеяния типа $2 \to 2$, которые описываются гамильтонианом (5.30). Что касается остальной части $\mathcal{H}_{\text{int}}$, то она описывает взаимодействие ПСВ с резервуаром термически возбуждаемых волн и приводит к затуханию ПСВ, которое мы уже учли в (10.3) феноменологически. Забегая вперед, можно сказать, что эта процедура имеет широкую по надкритичности область применимости, если все трехволновые процессы запрещены законами сохранения, и наиболее узкую область применимости, если разрешены трехволновые процессы распада одной ПСВ на две тепловые. В гл. 8 детально рассмотрено влияние трехволновых процессов взаимодействия ПСВ с тепловыми СВ на нелинейное поведение ПСВ.

5. Внешнее воздействие на среду — параметрическую накачку будем считать монохроматической и пространственно-однородной (14.18). Эти предположения прекрасно выполняются для всех методов параметрического возбуждения СВ, рассмотренных в § 14. Действительно, характерные значения частот накачки СВ ω_p лежат в диапазоне $(10 \div 36)$ ГГц, что соответствует длинам волн электромагнитного излучения $(3{,}0 \div 0{,}8)$ см. Это существенно превышает характерные экспериментальные значения длин ПСВ $(10^{-1} \div 10^{-5})$ см. Что касается степени некогерентности накачки, то частотная ширина линии используемых в экспериментах источников СВЧ излучения — магнетронов и клистронов — по крайней мере на два порядка уже, чем рекордная ширина линии СВ $\gamma_k = 10^5$ Гц.

Для параметрических процессов первого порядка (распада одного "кванта" поля накачки на два магнона, гамильтониан взаимодействия с накачкой $\mathcal{H}_p$ имеет вид (14.18):

$$\mathcal{H}_p = \tfrac{1}{2}\sum_k [h V_k b_k^* b_{-k}^* \exp(i\omega_p t) + \text{к.с.}]. \tag{16.1}$$

Для процесса второго порядка (распада двух "квантов" ОП на две СВ) гамильтониан $\mathcal{H}_p$ получается из (16.1) после замены $h V_k \exp(i\omega_p t) \to T_{0k} b_0^2$. Поэтому будем считать, что $\mathcal{H}_p$ имеет вид (16.1), и только в окончательных формулах будем при необходимости проводить эту замену.

6. В этом последнем пункте мы запишем уравнения движения СВ, которые в дальнейшем будем использовать, для анализа их нелинейного поведения при параметрическом возбуждении. Подставляя в динамические уравнения движения (10.3) гамильтониан ПСВ $\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_p + \mathcal{H}_4$, в котором $\mathcal{H}_p$ и $\mathcal{H}_4$ определены формулами (16.1) и (5.30) соответственно, получим окончательно

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i\omega_k\right) b_k + ih V_k \exp(i\omega_p t) b_{-k}^* = -i\,\frac{\delta\mathcal{H}_4}{\delta b_k^*}, \tag{16.2}$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}_4}{\delta b_k^*} = \sum_{k+1=2+3} T_{k\,1,23}\, b_1^* b_2 b_3. \tag{16.3}$$

§ 17. Фазовые соотношения при параметрическом возбуждении волн и механизмы ограничения амплитуды

17.1. Анализ фазовых соотношений. Исходные уравнения движения (16.2) в линейном приближении (т.е. при $\mathcal{H}_4 = 0$) распадаются на независимые пары уравнений для СВ с равными и противоположно направленными волновыми векторами $\pm k$. После исключения быстрой зависимости от времени, т.е. в "медленных" переменных

$$a_k(t) = b_k(t)\exp(i\omega_p t/2), \tag{17.1}$$

они приобретают вид

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\omega_k - \omega_p/2)\right] a_k + ih V_k a_{-k}^* = 0, \\ &\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k - i(\omega_k - \omega_p/2)\right] a_{-k}^* - ih V_k^* a_k = 0. \end{aligned} \tag{17.2}$$

Полагая $a_k, a_k^* \sim e^{\nu_k t}$, имеем

$$\nu_k = -\gamma_k \pm [\,|h V_k|^2 - (\omega_k - \omega_p/2)^2\,]^{1/2}. \tag{17.3}$$

Разумеется, это выражение совпадает с формулой (11.17), полученной в гл. 3, в которой параметрическая неустойчивость рассматривалась как частный случай трехволновой распадной неустойчивости волны с $k_p = 0$. Минимальный порог, соответствующий параметрическому резонансу $2\omega_k = \omega_p$, определяется из условия $|h V_k| = \gamma_k$, имеющего простой смысл баланса энергии. Действительно, поток энергии W_+, поступающий от накач-

ки в пару волн $\pm \boldsymbol{k}$, равен

$$W_+ = -\partial\mathcal{H}_p/\partial t = i\omega_p(hV_k a_k^* a_{-k}^* + \text{к.с.}) =$$
$$= 2\,|hV_k|\,\omega_p\,|a_k|^2 \sin(\tilde{\psi}_k - \psi_k). \tag{17.4}$$

Здесь $a_k = |a_k| \exp(-i\varphi_k)$, $\psi_k = \varphi_k + \varphi_{-k}$ – фаза пары, $\tilde{\psi}_k = \arg(hV_k)$. С другой стороны, энергия W_-, диссипируемая парой в единицу времени, равна

$$W_- = 2\gamma_k[\omega_k\,|a_k|^2 + \omega_{-k}\,|a_{-k}|^2] = 2\omega_p\gamma_k\,|a_k|^2. \tag{17.5}$$

В точке порога $W_+ = W_-$. Наибольший поток энергии и наименьший порог неустойчивости осуществляются для пары с наиболее выгодным фазовым соотношением $\psi_k = \tilde{\psi}_k + \pi/2$. При этом для порога вновь справедливо соотношение $|hV_k| = \gamma_k$. Условие параметрического резонанса, очевидно, может одновременно выполняться для большого числа пар, волновые векторы которых лежат на резонансной поверхности. Минимальный порог возбуждения h_1 имеют пары, у которых отношение $\gamma_k/|V_k|$ минимально:

$$h_1 = \min(\gamma_k/|V_k|). \tag{17.6}$$

При $h > h_1$ начинается экспоненциальный рост амплитуд пар:

$$a_k(t) = a_k \exp(\nu_k t - i\psi_k/2),$$
$$a_{-k}^*(t) = a_{-k}^* \exp(\nu_k t + i\psi_k/2)$$

с инкрементом (17.3), причем из (17.2) следует, что

$$\cos(\psi_k - \tilde{\psi}_k) = (\omega_k - \omega_{p/2})/hV_k. \tag{17.7}$$

Это означает, что на линейной стадии параметрической неустойчивости устанавливается определенное соотношение между фазами волн в паре. Фазовую корреляцию волн с равными и противоположно направленными волновыми векторами по аналогии со сверхпроводимостью можно назвать *спариванием*. В отличие от сверхпроводимости, физической причиной, приводящей к спариванию волн, служит накачка, выделяющая из первоначального фазового хаоса пары волн, для которых максимален инкремент неустойчивости. В дальнейшем будет показано, что на нелинейной стадии развития неустойчивости фазовая корреляция является полной. Это означает, что, хотя величина a_k случайна, величина $a_k a_{-k}$ будет динамической, при этом $\langle a_k a_{-k}\rangle = a_k a_{-k}$, $\langle \psi_k \rangle = \psi_k$.

17.2. Нелинейные механизмы ограничения параметрической неустойчивости. Простейшим механизмом такого рода может быть нелинейное затухание, т.е. зависимость γ_k от квадратов амплитуд параметрических волн $|a_k|^2$ (Е. Шлеманн [235], П. Готлиб и Х. Сул, [69]). Стационарные амплитуды волны определяются известным условием баланса энергии: $|hV_k| = \gamma_k$. Для качественного анализа выберем простейшую зависимость $\gamma_k = \gamma_0 + \eta \sum_{k'} |a_{k'}|^2$. Тогда

$$\sum_{k'} |a_{k'}|^2 = (|hV| - \gamma_0)/\eta = V(h - h_1)/\eta. \tag{17.8}$$

При этом фазы φ_k определяются из условия параметрического резонанса и сдвинуты на $\pi/2$ относительно фазы накачки.

Еще один очевидный механизм ограничения параметрической неустойчивости связан с обратным влиянием ПСВ на накачку. Действительно, поток энергии в систему ПСВ, необходимый для того, чтобы поддерживать их количество на конечном уровне, отбирается от накачки и уменьшает ее амплитуду. В простейшем случае, когда другие механизмы ограничения отсутствуют, амплитуда накачки "замораживается" на пороговом уровне, а количество возбужденных ПВ определяется из условия баланса энергии в системе накачки. В ряде случаев, например, когда накачкой для СВ в ФМ служит ОП, возбуждаемая в резонансе внешним СВЧ полем, механизм "обратного влияния" действительно важен, и он будет рассмотрен подробно в § 22. В других случаях, например, при "параллельной накачке", когда СВ в маленьком образце магнетодиэлектрика возбуждаются СВЧ полем большого резонатора, обратное влияния ПСВ на поле h в резонаторе, как правило, можно не учитывать.

Третий "фазовый" механизм ограничения, предложенный В.Е. Захаровым, В.С. Львовым и С.С. Старобинцем [94], играет определяющую роль при параметрическом возбуждении волн. Его подробному рассмотрению и сопоставлению с экспериментом в ферро- и антиферромагнетиках посвящена в основном эта глава. Здесь мы только отметим, что фазовый механизм ограничения связан со спариванием и возникающим из-за него четырехволновым взаимодействием, которое приводит к фазовому рассогласованию ($\sin\psi < 1$) между парами и внешней накачкой, т.е. к уменьшению потока энергии в систему. Четвертый механизм ограничения, связанный с образованием и коллапсом солитонов, действует, когда коэффициент гамильтониана (16.1) V_k максимален в одной паре точек, так что за порогом возбуждается узкий пакет волн. Этот механизм ограничения будет описан нами в гл. 6.

§ 18. Диагональный гамильтониан, уравнения движения и основное состояние в S-теории

18.1. Приближение диагонального гамильтониана. Обсудим более подробно упрощение гамильтониана взаимодействия волн, намеченное в предыдущем параграфе в связи с рассмотрением фазового механизма ограничения. Оно состоит в замене гамильтониана четырехволнового взаимодействия (5.30) его диагональной по парам волн $\pm k$ частью. В "медленных" переменных диагональный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}_S = \sum_{k,k'} T_{k,k'} a_k^* a_k a_{k'}^* a_{k'} + \tfrac{1}{2} \sum_{k,k'} S_{kk'} a_k^* a_{-k}^* a_{k'} a_{-k'},$$

$$T_{kk'} \equiv T_{kk',kk'} = T_{k'k}^*, \quad S_{kk'} \equiv T_{k-k,k'-k'} = S_{k'k}^*. \tag{18.1}$$

В $\mathcal{H}_{\text{int}}$ оставлены только члены, либо не зависящие от фаз волн вообще (первая сумма в (18.1)), либо зависящие только от суммы фаз $\psi_k = \varphi_k + \varphi_{-k}$ в парах. Все остальные слагаемые, зависящие от индивидуальных фаз волн (точнее, от разностей $\varphi_k - \varphi_{k'}$), опущены. Физический смысл оставленных в (18.1) членов становится ясным из уравнения движения для амплитуд a_k.

Подставляя в уравнения (16.2) гамильтониан (18.1), получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)\right] a_k + iP_k a^*_{-k} = 0. \tag{18.2}$$

Эти уравнения отличаются от линейных уравнений (17.2), описывающих параметрическую неустойчивость, только перенормировкой частоты $\omega_k \to \tilde{\omega}_k$ и накачки $hV_k \to P_k$, возникающей из-за первой и второй сумм в (18.1) соответственно:

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\sum_{k'} T_{kk'} \, |a_{k'}|^2, \; P_k = hV_k + \sum_{k'} S_{kk'} a_{k'} a'_{-k'}. \tag{18.3}$$

Выбирая в уравнениях (18.2) $a_k = |a_k| \exp(-i\varphi_k)$ и вычисляя $\partial\varphi_k/\partial t$, найдем соотношение $\partial(\varphi_k - \varphi_{-k})/\partial t = 0$, демонстрирующее безразличную устойчивость разности фаз в рамках теории с диагональным гамильтонианом (18.1). Этого и следовало ожидать, так как разность фаз бегущих навстречу волн определяет пространственное положение узлов образующейся стоячей волны, которая в однородном поле накачки ничем не фиксирована. Безразличное равновесие разностей фаз приводит к тому, что они могут быть хаотизированы любым малым взаимодействием, например малыми случайными неоднородностями или неточностями формы кристалла. Причиной стохастизации фаз является и "остаточное" взаимодействие, не учтенное в диагональном гамильтониане (18.1). Впрочем, это взаимодействие приводит к некоторой корреляции разностей фаз в различных парах, однако эта корреляция вместе с недиагональными членами гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{int}}$ остается малой. Более подробное и строгое обоснование приближения диагонального гамильтониана (18.1) будет дано в гл. 10. Здесь же мы только отметим, что это приближение пригодно вплоть до амплитуд поля накачки $h < h^*$, где

$$h^* \approx h_1 \, [(k\,\partial\omega/\partial k)/\gamma]^{1/2} \gg h_1. \tag{18.4}$$

Теорию, основанную на диагонализации гамильтониана взаимодействия до формы (18.1), мы будем называть S-теорией. В таком названии отражено определяющее влияние коэффициентов $S_{kk'}$ на нелинейное поведение системы ПСВ. В дальнейшем мы будем предполагать, что индивидуальные фазы волн являются случайными и по их ансамблю произведено усреднение. При этом система взаимодействующих СВ описывается на языке корреляционных функций:

$$\langle a_k a^*_{k'} \rangle = n_k \Delta(k - k'), \quad \langle a_k a_{k'} \rangle = \sigma_k \Delta(k + k'). \tag{18.5}$$

Величины n_k и σ_k имеют размерность действия (эрг с). Уравнения для этих величин легко могут быть получены непосредственно усреднением уравнения (18.3):

$n_k \cdot e^{-ikx}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial n_k}{\partial t} &= -\gamma_k n_k - \operatorname{Im}(P^*_k \sigma_k), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_k}{\partial t} &= -\sigma_k[\gamma_k + i(\omega_k - \omega_p/2)] - \frac{1}{2} i(n_k + n_{-k}) P_k. \end{aligned} \tag{18.6}$$

Приведем другой вывод основных уравнений S-теории. Для этого необходимо из динамических уравнений (16.2) с точным гамильтонианом задачи

(16.3) получить усредненные уравнения для корреляционных функций n_k, σ_k (18.5). В их правых частях возникают корреляционные функции четвертого порядка $\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle, \langle a_1^* a_2 a_3 a_4 \rangle$. Уравнения (18.6) получатся, если эти функции вычислить приближенно с помощью стандартного расщепления на парные корреляционные функции n_k, σ_k:

$$\begin{aligned}
&\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle = n_1 n_2 [\Delta(k_1 - k_3)\Delta(k_2 - k_4) + \Delta(k_1 - k_4) \times \\
&\times \Delta(k_2 - k_3)] + \sigma_1^* \sigma_3 \Delta(k_1 + k_2)\Delta(k_3 + k_4), \\
&\langle a_1^* a_2 a_3 a_4 \rangle = n_1 [\sigma_3 \Delta(k_1 - k_2)\Delta(k_3 + k_4) + \sigma_2 \Delta(k_1 - k_3) \times \\
&\times \Delta(k_2 + k_4) + \sigma_2 \Delta(k_1 - k_4)\Delta(k_2 - k_3)].
\end{aligned} \tag{18.7}$$

Разумеется, эта процедура не является более строгой, чем насильная редукция гамильтониана (16.3) до вида (18.1). Она, однако, более традиционна, и поэтому для многих такой вывод основных уравнений S-теории (18.6) выглядит более убедительным.

После этого вывода становится понятно, что приближение диагонального гамильтониана представляет по существу первый порядок теории возмущений по $\mathcal{H}_{\text{int}}$ – приближение, в котором не учитываются корреляции флуктуаций волнового поля, возникающие под действием $\mathcal{H}_{\text{int}}$. В теоретической физике такое приближение часто называют приближением самосогласованного поля. Его классическими примерами являются теория *молекулярного поля Кюри–Вейсса,* созданная в начале века и объяснившая магнитное упорядочение, а также БКШ – теория сверхпроводимости. Эти два в высшей степени содержательных примера относятся к физике фазовых переходов второго рода. В физике нелинейных волн, однако, приближение самосогласованного поля обычно несодержательно, ибо не улавливает нетривиальную динамику волн. Действительно, из уравнений (18.6) видно, что в отсутствие накачки и спаривания волн (т.е. при $hV_k = 0$, $\sigma_k = 0$) кинетика числа волн тривиальна: $\dot{n}_k = -2\gamma_k n_k$. Кроме спаривания, к нетривиальной кинетике волн в приближении самосогласованного поля может приводить пространственная неоднородность или неэрмитовость матричного элемента взаимодействия волн $T_{12,34}$. Теория возникающих при этом явлений кратко изложена, например, в моих "Лекциях по физике нелинейных явлений" [159]. Она существенна для понимания ряда ситуаций в физике плазмы, нелинейной оптике и даже в экологии. Можно убедиться, что она имеет много общих черт с S-теорией.

18.2. Динамическая форма записи уравнений S-теории. Приступая к анализу основных уравнений S-теории (18.6), получим из них следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\gamma_k\right)(n_k n_{-k} - |\sigma_k|^2) = 0, \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_k\right)(n_k - n_{-k}) = 0
\end{aligned} \tag{18.8}$$

показывающие, что произвольные начальные условия за время порядка $1/\gamma_k$ релаксируют к состоянию (не обязательно стационарному), в котором $n_k = n_{-k}$, $|\sigma_k| = n_k$. Условие $|\sigma_k| = n_k$, означающее, что фазы пар волн полностью коррелированы, позволяет вместо переменных σ_k, σ_k^* и n_k

ввести только две вещественные переменные $-n_k$ и ψ_k: $\sigma_k = n_k \exp(-i\psi_k)$. В этих переменных уравнения (18.6) и определения (18.3) приобретают вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial n_k}{\partial t} = n_k\{-\gamma_k \mp \mathrm{Im}[P_k^* \exp(-i\psi_k)]\},$$

$$P_k = hV_k + \sum_{k'} S_{kk'} n_{k'} \exp(-i\psi_{k'}), \tag{18.9}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \tilde{\omega}_k - \frac{\omega_p}{2} + \mathrm{Re}[P_k^* \exp(-i\psi_k)], \qquad \tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\sum_{k'} T_{kk'} n_{k'}.$$

Еще более компактную запись можно получить, если вместо двух вещественных переменных: числа волн n_k и фазы пары ψ_k использовать одну комплексную c_k:

$$n_k = n_{-k} = |c_k|^2, \quad \sigma_k = c_k^2 \exp(-i\psi_k), \quad c_k = (n_k)^{1/2}\exp(-i\psi_k/2). \tag{18.10}$$

В этих переменных вместо четырех уравнений (18.6) для n_k, n_{-k}, σ_k и σ_k^* или двух уравнений (18.9) для n_k и ψ_k имеем одно комплексное уравнение

$$\frac{\partial c_k}{\partial t} + [\gamma_k + i(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)]c_k + iP_k c_k^* = 0, \tag{18.11}$$

в котором

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\sum_{k'} T_{kk'}|c_{k'}|^2, \qquad P_k = hV_k + \sum_{k'} c_{k'}^2. \tag{18.12}$$

Уравнения (18.11) буквально совпадают с (18.2), если положить $a_k = a_{-k} = c_k$. Это означает, что уравнения S-теории по существу являются динамическими, несмотря на то, что получены в результате статистического усреднения и расщепления корреляций по правилу (18.7). Более того, при $\gamma_k = 0$ уравнения S-теории являются гамильтоновыми. В переменных c_k, c_k^* этот факт является тривиальным, так как уравнения (18.11) совпадают с (18.2). Что касается уравнений (18.9), то нетрудно убедиться, что их можно получить варьированием гамильтониана

$$\mathcal{H}_S = \sum_k (\omega_k + \sum_{k'} T_{kk'} n_{k'}) n_k + \tfrac{1}{2}\sum_k (hV_k \cos\psi_k + \tfrac{1}{2}\sum_{k'} S_{kk'} n_{k'} \cos(\psi_k + \psi_{k'}))$$

по правилу

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \gamma_k n_k = -\frac{\delta \mathcal{H}_S}{\delta \psi_k}, \qquad \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}_S}{\delta n_k}. \tag{18.14}$$

18.3. Основное состояние ПСВ в S-теории. Условие внешней устойчивости. Приступим к изучению стационарных состояний системы пар, в которых все амплитуды n_k и фазы ψ_k не зависят от времени. Полагая в (18.9) $\dot{n}_k = \dot{\psi}_k = 0$, немедленно получаем для тех точек k-пространства, где $n_k \neq 0$, условие

$$|P_k|^2 = \gamma_k^2 + (\omega_k - \omega_p/2)^2. \tag{18.15}$$

Прежде чем анализировать этот результат, сделаем два замечания общего характера. Во-первых, ясно, что амплитуды пар не равны нулю лишь в уз-

ком слое вблизи резонансной поверхности $2\omega_k = \omega_p$. Это делает удобным использование следующих координат в k-пространстве: $\vec{\kappa}$ – отклонения от этой поверхности в нормальном направлении и Ω – координату на поверхности. Во-вторых, коэффициенты уравнения (18.9), имеющие размерность частоты: γ_k, hV_k, $\sum_{k'} T_{kk'} n_{k'}$, значительно меньше собственной частоты ω_k. Поэтому в теории достаточно учесть зависимость от $\vec{\kappa}$ только коэффициента $\omega_k - \omega_p/2$, а все остальные коэффициенты заменить их значениями на резонансной поверхности γ_Ω, hV_Ω и $T_{\Omega\Omega}$ соответственно. Используя указанные приближения, можно из уравнения (18.15) легко найти те $\vec{\kappa}$, на которых $n(\vec{\kappa}, \Omega)$ может быть не равно нулю:

$$\tilde{\omega}_{\vec{\kappa}\Omega} = \tfrac{1}{2}\omega_p \pm (|P_\Omega|^2 - \gamma_\Omega^2)^{1/2}. \tag{18.16}$$

Таким образом, в стационарном состоянии распределение амплитуд пар сингулярно: $n(\vec{\kappa}, \Omega)$ может отличаться от нуля только на двух поверхностях (18.16). Отметим, что имеется бесчисленное множество стационарных состояний, отличающихся как функцией $P(\Omega)$, задающей поверхности (18.16), так и распределением $n(\Omega)$ на них. В самом деле, можно произвольно задавать направления Ω, в которых n_Ω равно нулю. В действительности из всех стационарных состояний могут реализоваться только такие, которые устойчивы по отношению к малым возмущениям. Требование устойчивости сильно сужает класс возможных стационарных состояний. Можно показать, что исследование устойчивости стационарных состояний в рамках диагонального гамильтониана разбивается на две независимые задачи: исследование *внутренней устойчивости* – по отношению к возмущению амплитуд и фаз уже имеющихся пар и *внешней* – по отношению к рождению новых пар.

Проще всего исследовать внешнюю устойчивость. Запишем для этого с помощью (18.2) уравнение для пары волн возмущения:

$$b_q, b_q^* \sim \exp(\nu_q t),$$

аналогичное (17.2). Максимальный по q инкремент ν_Ω (при фиксированном Ω) соответствует $2\tilde{\omega}_q = \omega_p$, т.е. лежит посередине между поверхностями (18.16). Он равен

$$\nu(\Omega) = \gamma(\Omega) + |P(\Omega)|.$$

Условие внешней устойчивости, $\nu(\Omega) \leqslant 0$, таким образом, может быть записано в виде

$$|P(\Omega)| \leqslant \gamma(\Omega). \tag{18.17}$$

С другой стороны, из (18.16) следует, что $|P_\Omega| \geqslant \gamma_\Omega$ для тех направлений Ω, в которых $n_{\kappa\Omega} \neq 0$. Следовательно, для этих направлений оба неравенства совместимы лишь в случаях $|P(\Omega)| = \gamma_\Omega$, когда две поверхности (18.16) сливаются в одну:

$$2\tilde{\omega}(k_0) = \omega_p. \tag{18.18}$$

Таким образом, условие внешней устойчивости при заданном угловом распределении ПСВ полностью устраняет произвол в выборе поверхности, на которой $n_k \neq 0$. Ее мы будем называть *резонансной поверхностью*, а

стационарное состояние, обладающее внешней устойчивостью, *основным состоянием*.

Полученный результат имеет простой физический смысл. Как видно из (17.2), в линейном режиме наиболее сильно связаны с накачкой волны, для которых расстройка частоты равна нулю. Величина $\tilde{\omega}_k - \omega_p/2$ представляет собой расстройку частоты с учетом нелинейных членов. Если две поверхности (18.1), на которых $n(k) \neq 0$, не сливаются в одну, то пары СВ, значения k которых попадают в шаровой слой между этими поверхностями, оказываются более сильно связанными с накачкой, чем уже возбужденные СВ. В результате СВ в этом шаровом слое будут нарастать.

Надо сказать, что описанная здесь неоднозначность решения стационарных уравнений и устранение этого произвола (полное или частичное) с помощью условия устойчивости не является специфическим для S-теории, а является общим свойством приближения самосогласованного поля в теории нелинейных волн. Другой способ устранения отмеченной неоднозначности – несколько более сложный технически, но для многих более естественный – заключается во введении в S-теорию теплового шума с помощью замены в уравнении (18.6) для n_k слагаемого $-\gamma_k n_k$ на $-\gamma_k(n_k - n_k^0)$. Эта замена в отсутствие накачки (при $h = 0$) обеспечивает релаксацию n_k не к нулю, а к термодинамически равновесному значению $n_k^0 = T/\omega_k$. С другой стороны, при $hV_k > \gamma_k$ слагаемое $\gamma_k n_k^0$ обеспечивает развитие всех неустойчивостей и, как следствие, единственность стационарных решений (18.6). Более подробно этот вопрос будет исследован в гл. 10.

Интересно также в деталях выяснить, каким образом из теплового шума n_k^0 в процессе развития параметрической неустойчивости возникает когерентное по $|k|$ состояние СВ $n_k \backsim \delta(k - k_0)$. Этот вопрос мы рассмотрим в гл. 6. Аналитически и с помощью ЭВМ мы покажем, в частности, что через некоторое время после включения накачки распределение волн по $|k|$ имеет гауссов вид, причем ширина распределения асимптотически стремится к нулю как $t^{-1/2}$.

18.4. Распределение пар на резонансной поверхности. Введем функцию распределения n_Ω – "число" пар на единицу телесного угла, определив ее так:

$$N = \sum_k n_k = \int n_\Omega \, d\Omega. \tag{18.19}$$

Стационарное уравнение для n_Ω и ψ_Ω, следующее из (18.9) и (18.18), перепишем в виде

$$[P_\Omega \exp(i\psi_\Omega) - i\gamma_\Omega] n_\Omega = 0, \qquad P_\Omega = hV_\Omega + \int S_{\Omega\Omega'} n_{\Omega'} \exp(-i\psi_{\Omega'}) d\Omega'. \tag{18.20}$$

Эти уравнения еще не определяют однозначно распределение n_Ω и ψ_Ω, ибо произвольным образом можно задавать области на поверхности, в которых $n_\Omega = 0$. Требование внешней устойчивости по отношению к рождению новых пар на резонансной поверхности, как будет показано в следующем параграфе, значительно сокращает класс возможных решений, а в ряде случаев остается только одно устойчивое распределение.

Условию внешней устойчивости полезно придать следующую геометрическую интерпретацию. Выражения $\gamma = \gamma_\Omega$ и $P = P_\Omega$ являются уравнениями для поверхностей в $\boldsymbol{k}$-пространстве. Условие (18.17) означает, что поверхность P_Ω заключена целиком внутри поверхности γ_Ω и касается ее в тех точках Ω, где сосредоточено решение. В силу соотношений $V_{\boldsymbol{k}} = V_{-\boldsymbol{k}}$ и $S_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} = S_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'}$ обе эти поверхности имеют центр симметрии. Касание поверхностей γ_Ω и P_Ω может происходить либо по дискретному набору точек, либо по континууму – линии или даже части поверхности. В первом случае в основном состоянии возбуждено конечное число монохроматических пар СВ, во втором – непрерывное распределение n_Ω. Возможен и промежуточный режим, когда поверхности касаются в изолированной паре точек и, кроме того, по некоторой линии. В этом случае в системе одновременно присутствуют монохроматическая пара и непрерывный фон. Заметим, что применимость S-теории при наличии небольшого числа дискретных пар требует специального обоснования, включающего исследование их устойчивости в рамках точного гамильтониана.

§ 19. Простейшие решения основных уравнений S-теории

19.1. Состояние с одной группой пар. Самое простое основное состояние в S-теории относится к сферически-симметричному случаю, реализующемуся, например, в АФМ (в пренебрежении исключительно малым магнитным дипольным взаимодействием). При $V_\Omega = V$, $\gamma_\Omega = \gamma$ и $S_{\Omega\Omega'} = S$ уравнения (18.20) имеют изотропное решение $n_\Omega = N/4\pi$, при котором

$$N = [(hV)^2 - \gamma^2]^{1/2}/S, \quad hV \sin\Psi = \gamma. \tag{19.1}$$

Такое же решение имеют эти уравнения, если $S_{\Omega\Omega'}$ зависит только от угла между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$. Тогда в формуле (19.1)

$$4\pi S = \int S_{\Omega\Omega'}\, d\Omega'. \tag{19.2}$$

Большой интерес представляет также аксиально-симметричный случай, который реализуется в изотропном и кубическом ФМ, намагниченном вдоль оси [111] или [100]. При этом коэффициент связи с накачкой определяется формулой (14.21), а коэффициенты, описывающие взаимодействие, имеют вид

$$S_{\Omega\Omega'} = S(\theta, \theta', \varphi - \varphi'), \qquad T_{\Omega\Omega'} = T(\theta, \theta', \varphi - \varphi'). \tag{19.3}$$

Из уравнений для $n_{\boldsymbol{k}}$ ясно, что величина $P^*_{\boldsymbol{k}}\sigma_{\boldsymbol{k}}$ также не зависит от φ. Учитывая выражения (14.21) для $V_{\boldsymbol{k}}$, получим

$$\psi_\Omega = \psi_{\theta,\varphi} = \psi_\theta + 2\varphi.$$

Эти соотношения позволяют исключить зависимость от угла в уравнении (18.20) и записать его в виде

$$P_x \exp(i\psi_x - i\gamma_x)\, n_x = 0, \qquad 2\pi n_x = n_\Omega, \; x = \cos\theta,$$

$$P_x = P_\Omega \exp(-2i\varphi) = hV_x + \int S_{xx'}\, n_{x'} \exp(-i\Psi_{x'})\, dx',$$

$$2\pi S_{xx'} = \int_0^{2\pi} S(x, x', \varphi - \varphi') \exp[2i(\varphi - \varphi')]\, d(\varphi - \varphi').$$

Покажем, что это уравнение можно дополнительно упростить с помощью следующей подстановки, после которой коэффициент связи с накачкой не будет зависеть от $x = \cos\theta$:

$$N_x = n_x |f_x|, \quad f_x = V_x / |V_1|, \quad V_1 = V(\pi/2),$$
$$\widetilde{P}_x = P_x / f_x, \quad \Gamma_x = \gamma_x / |f_x|, \tag{19.4}$$
$$\widetilde{S}_{x,x'} = S_{x,x'} / f_x f_{x'}.$$

Для величин N_x, Ψ_x уравнения движения сохраняют вид (19.4) с заменой $\gamma \to \Gamma$, $P \to \widetilde{P}$, причем в выражении для $\widetilde{P}$ коэффициент связи с накачкой оказывается постоянным:

$$[\widetilde{P}_x \exp(i\Psi_x) - i\Gamma_x] N_x = 0,$$
$$\widetilde{P}_x = hV_1 + \int \widetilde{S}_{xx'} N_{x'} \exp(-i\Psi_{x'}) dx'. \tag{19.5}$$

Для решения вопроса о распределении N_x при малом превышении над порогом параметрического возбуждения, т.е. при малой надкритичности, воспользуемся приведенным выше геометрическим толкованием условия внешней устойчивости (18.17). При весьма малой надкритичности, когда амплитуды малы, линия $|\widetilde{P}_x|$ мало отличается от прямой $hV = \text{const}$. Мала также и кривизна линии $|\widetilde{P}_x|$. Отсюда ясно, что линии $|\widetilde{P}_x|$ и Γ_x соприкасаются друг с другом только в точке $x = 0$. Это означает, что при малой надкритичности распределение N_x отлично от нуля только при $x = 0$, причем для интегральной амплитуды N_1 и фазы Ψ_1 из (19.5) легко получить:

$$N_x = N_1 \delta(x), \quad N_1 = [(hV)^2 - \Gamma_1^2]^{1/2} / S_{11},$$
$$\sin\Psi_1 = \Gamma_1 / hV_1,$$
$$\Gamma_1 = \gamma_1 = \gamma(x), \tag{19.6}$$
$$S_{11} = \widetilde{S}_{xx} = S_{xx} \quad \text{при} \quad x = x_1 = 0.$$

Важным свойством полученных решений является то, что значение фазы пар $\Psi = \varphi_k + \varphi_{-k} - \varphi_p$ (φ_p – фаза накачки, которая обычно выбирается равной нулю) отличается от значения $\Psi = \pi/2$, при котором поток энергии

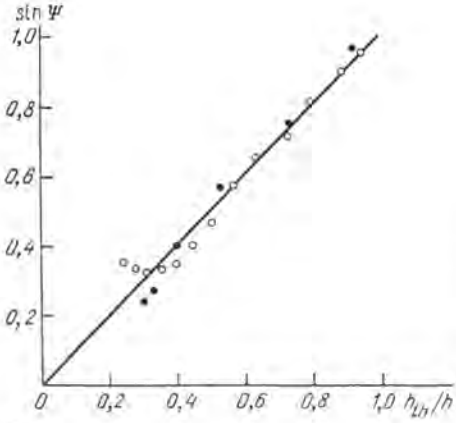


Рис. 19.1. Зависимость стационарной фазы Ψ от величины СВЧ поля h_{th}/h. Результаты эксперимента, проведенного Прозоровой и Смирновым (1974) на монокристаллах при гелиевых температурах – • и Мелковым и Круценко (1977) на ЖИГ при комнатной температуре – ○. Сплошная прямая – предсказание S-теории

от внешней накачки (17.5) максимален. Условие $hV \sin \Psi = \Gamma$ описывает баланс энергии, характерный для фазового механизма ограничения. Этот принципиально важный вывод S-теории был подтвержден в прямых экспериментах по измерению фазы пар Ψ при параметрическом возбуждении СВ в АФМ ЛП $MnCO_3$ и в ФМ в ЖИГе Л.А. Прозоровой и А.И. Смирновым ([200]) и затем Г.А.Мелковым и И.В.Круценко [177] в ФМ ЖИГ (рис. 19.1). Видно, что в пределах ошибки эксперимента точки ложатся на биссектрису координатного угла, как это следует из формул (19.1) для АФМ и (19.5) для ФМ. Это свидетельствует о том, что S-теория правильно описывает существенные черты запорогового поведения ПСВ. Отклонение данных для ЖИГа при надкритичности более 10 дБ ($h > 3h_{th}$) от простой формулы (19.6) связано с возбуждением второй группы пар с $\theta = \pi/2$. Это явление опишем в следующем пункте.

19.2. Порог рождения второй группы волн. Займемся исследованием распределения ПСВ n_Ω по резонансной поверхности при увеличении амплитуды внешнего поля h. Отметим вначале, что использованные в § 18.4 геометрические рассуждения легко обобщаются на случай произвольной зависимости $V(\Omega)$. Можно доказать [96] общую теорему о том, что при достаточно малой надкритичности n_Ω отлично от нуля только в тех точках резонансной поверхности, где $|V(\Omega)|$ максимально. Для сферической симметрии это точки всей поверхности, при аксиальной симметрии – точки одной ($\theta = \pi/2$) или двух линий. В случае более низкой симметрии это одна или несколько эквивалентных пар точек. Интересно, что интегральная амплитуда мало чувствительна к степени симметрии задачи. Она определяется формулой (19.6), в которой $V_1 = \max|V(\Omega)|$, а S_{11} есть среднее значение $S(\Omega, \Omega')$ на множестве точек, где $n_\Omega \neq 0$.

Возвращаясь к случаю аксиальной симметрии, покажем, что функция распределения пар (19.6), сосредоточенная на экваторе, сохраняет устойчивость по отношению к рождению пар на других широтах вплоть до достаточно большой надкритичности. Рассмотрим для этого функцию $|\widetilde{P}_x|$. Из (19.4)–(19.6) получим

$$|P_x|^2 = N_1^2(S_{11} - \widetilde{S}_{x1})^2 + \Gamma_1^2. \tag{19.7}$$

Ясно, что состояние (19.6) будет устойчивым до тех пор, пока $|\widetilde{P}_x| < \Gamma_x$ для всех x, кроме $x = x_1 = 0$. *Второй порог* $p_2 = h_2/h_{th}$ соответствует минимальному значению p, при котором происходит касание линий $|P_x|$ и Γ_x при некотором $x = x_2 \neq x_1$. Значение p_2 определяется из условия $p_2 = \min p(x)$, где

$$p(x) = 1 + S_{11}^2\,[\Gamma_x^2 - \Gamma_1^2]/\Gamma_1^2(\widetilde{S}_{1x} - S_{11})^2. \tag{19.8}$$

При простейших предположениях $\gamma_x = \gamma$ и $S_{x1} = S_{11}$ получаем, что $p_2 = 2$ при $x_2 = 1$. В действительности же для кубических ФМ реальная функция S_{x1} сильно отличается от константы, что приводит как правило, к значительному увеличению второго порога.

Изучим вид функции $S_{xx'}$ в кубических ФМ. Из определения функции $S_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$ (18.1) и формул (19.4) и (19.5) следует, что $S_{xx'}$ должна быть четной функцией каждого аргумента:

$$S_{xx'} \equiv S(x, x') = S(x, -x) = S(-x, x') = S(-x, -x'),$$

а ее реальная часть $\mathrm{Re}\, S_{xx'}$ симметрична относительно перестановки x, x'. Конкретные вычисления показывают, что $\mathrm{Im}\, S_{xx'} = 0$. Поэтому

$$\mathrm{Re}\, S_{xx'} = S_{xx'} = S_{x'x}.$$

Из аксиальной симметрии задачи (вокруг направления намагниченности) следует, что $S(\theta, \theta', \varphi - \varphi')$ не зависит от $(\varphi - \varphi')$, если $\theta = 0$ или $\theta' = 0$. Поэтому интеграл в (19.4) должен обращаться в нуль, если $x \to 1$, либо $x' \to 1$ и соответственно $\widetilde{S}_{xx'}$ остается конечной при x, $x' \to 1$, несмотря на сингулярный множитель $f(x) = 1 - x^2$ в (19.5). Итак $\widetilde{S}_{1x} = \widetilde{S}_{x1}$ – конечно.

При выяснении поведения $\widetilde{S}_{xx'}$ при малых x, x' будем опираться на явный вид формул (6.26), (6.29) для $S_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$. В этих формулах есть слагаемые, пропорциональные $\cos^2\theta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'}$ и $\cos^2\theta_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'}$. После интегрирования по φ в соответствии с (19.4) каждое из них дает неаналитический вклад в $\widetilde{S}_x$, пропорциональный степеням $|x \pm x'|$. С учетом этого обстоятельства и обсужденных выше свойств симметрии (19.9) разложение $\widetilde{S}_{xx'}$ при малых x и x' с точностью до членов $\propto x^2$ примет вид

$$\widetilde{S}_{xx'} = S[1 + \tfrac{1}{2}a(|x + x'| + |x - x'|) + b(x^2 + x'^2)]. \tag{19.9}$$

Вычисления по формулам (6.26), (6.29) с помощью ЭВМ для ЖИГ при комнатной температуре показывают, что в интервале магнитных полей $H_C - H$ от 100 Э до 500 Э коэффициент a изменяется в пределах от 2,6 до 2,1, а коэффициент b от – 1,8 до 1,3, обращаясь в нуль при $H_C = H + 180$ Э.

Возвращаясь к анализу выражения (19.8) для $p(x)$, отметим, что в предположении аналитичности функции $S_{xx'}$ (т.е., при $a = 0$ в (19.11)) и при $\gamma_x = \mathrm{const}$ минимум $p(x)$ реализуется при $x = x_2$

$$x_2^2 = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \approx 0{,}38, \qquad p_2 = 1 + 11b^{-2}.$$

Это значение p_2 существенно больше величины $p_2 = 2$, полученной в простейшем предположении $S_{xx'} = \mathrm{const}$. Однако предположение аналитичности $S_{xx'}$, приводящее к $a = 0$ также далеко от действительности. При $a \neq 0$, $b \neq 0$ и учете зависимости $\gamma(x)$ анализ выражения (19.8) для второго порога существенно затрудняется. Поэтому здесь мы ограничимся случаем малых b, когда x_2 мало и можно разложить выражение (19.8) для $p(x)$ в ряд:

$$p(x) = p(0) + |x|\, p' + \tfrac{1}{2}x^2 p, \tag{19.10}$$

$$p(0) = 1 + \Gamma''/a^2\Gamma, \qquad p' = -b\Gamma''/a^3\Gamma,$$

$$p'' = \frac{3\Gamma''^2 + \Gamma\Gamma^{(4)}}{6a^2\Gamma^2} - \frac{2\Gamma'' b^2}{\Gamma a^4}. \tag{19.11}$$

Здесь Γ'' и $\Gamma^{(4)}$ – вторая и четвертая производные Γ_x при $x = x_1 = 0$. Видно, что неаналитичность $\widetilde{S}_{xx'}$ $(a \neq 0)$ приводит к тому, что $p(0)$ – конечно. Случай, когда при $x = 0$ реализуется минимум функции $p(x)$ мы рассмотрим в следующем разделе, а здесь будем считать, что $p' \leqslant 0$. Этот случай

реализуется в ЖИГе при $H > H_C + 180$ Э. Из (19.10) видно, что при малых b

$$|x_2| = -p'/p'', \quad p_2 = p(0) - 2p'^2/p''. \tag{19.12}$$

Конкретный численный анализ для ЖИГа при комнатной температуре дает значения x_2 и p_2, приведенные в таблице

$(H_C - H)$, Э	200	300	400	500
x_2	0,05	0,1	0,25	0,5
p_2	4,6	5,0	5,3	5,6

Необходимо отметить, что гораздо более важным, чем вычисление конкретных числовых значений p_2 и x_2, является доказательство самого факта последовательного, поэтапного возбуждения сингулярных в $\boldsymbol{k}$-пространстве пакетов волн. Этот качественный вывод S-теории был подтвержден в прямом эксперименте по наблюдению второго порога в ЖИГе (В.В. Зауткин и др., 1971 г. [84]). Он заключался в следующем. Образец ЖИГ помещался в резонатор с двумя вырожденными ортогональными модами, магнитное поле которых $\boldsymbol{h}$ и $\tilde{\boldsymbol{h}}$ было соответственно параллельно и перпендикулярно намагниченности $\boldsymbol{M}$. Параллельный канал использовался для параметрического возбуждения СВ, ортогональный ему канал – для регистрации излучения образца на частоте накачки. Наблюдалось (рис. 19.2) резкое увеличение мощности излучения в перпендикулярный канал при надкритичности 8–12 дБ в зависимости от величины постоянного магнитного поля, ориентации и формы образца. Мода резонатора с поляризацией $\tilde{\boldsymbol{h}} \perp \boldsymbol{M}$ возбуждается ОП намагниченности, которая в свою очередь "раскручивается" ПСВ. Этот процесс описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} [U_{\boldsymbol{k}}^* b_0^* b_{\boldsymbol{k}} b_{-\boldsymbol{k}} + \text{к.с.}], \tag{19.13}$$

в котором $U_{\boldsymbol{k}} = U \sin 2\theta \exp i\varphi$. Отсюда для излучения в поперечный канал можно получить выражение

$$P_\perp \backsim \left| \sum_{\boldsymbol{k}} U_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} b_{-\boldsymbol{k}} \right|^2, \tag{19.14}$$

которое обращается в нуль для $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Зависимость $P_\perp(h)$, приведенная на рис. 19.2, таким образом убедительно свидетельствует о том, что в интервале 0–9 дБ возбуждены только пары с $\theta = \pi/2$. Излучение $P_\perp$, возникающее при большой надкритичности, естественно связать с возбуждением второй группы пар с $\theta = \pi/2$. В более позднем эксперименте И.В. Круценко и Г.А. Мелкова [177] удалось не только зарегистрировать "второй порог" (в их условиях он оказался равным 14 дБ), но и определить угол рас-

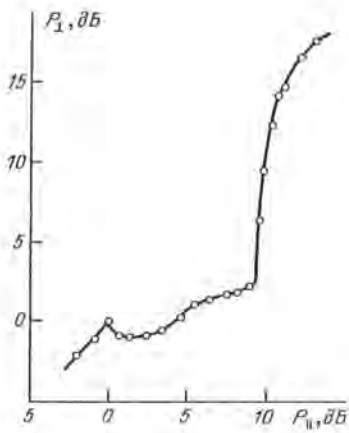


Рис. 19.2. Зависимость мощности излучения в перпендикулярный канал от мощности накачки для сферы ЖИГ: $H = 1600$ Э и направлено параллельно оси [100]

пространения второй группы пар $\theta_2 \approx 45°$, значение которого хорошо совпадает с теоретическим предсказанием.

19.3. Промежуточный порог. В этом разделе [171] мы покажем, что при увеличении надкритичности вместо рождения второй группы пар может произойти совсем другая перестройка функции распределения ПСВ на резонансной поверхности. Именно, при некотором $p = p_c$ (эта величина надкритичности названа *промежуточным порогом*) возникает регулярная часть в N_x вблизи экватора: $N_x \neq 0$ в интервале $|x| \leqslant \delta$, причем ширина этого распределения δ равна нулю при $p = p_c$ и далее увеличивается с ростом надкритичности.

Для вычисления p_c рассмотрим зависимость (19.7) для самосогласованной накачки

$$|\widetilde{P}(x)|^2 = \Gamma^2 \{1 + x^2[a^2 + 2ab|x| + b^2x^2](p-1)\} \tag{19.15}$$

и сравним ее с зависимостью $\Gamma^2(x)$:

$$\Gamma^2(x) = \Gamma^2 + \Gamma\Gamma''x^2 + \frac{(3\Gamma''^2 + \Gamma\Gamma^{(4)})x^4}{12}. \tag{19.16}$$

Видим, что при $p = p(0)$, определенном формулой (19.11), коэффициенты при x^2 у этих зависимостей сравниваются: в точке $x = 0$ происходит касание второго порядка линий $|\widetilde{P}(x)|^2$ и $\Gamma^2(x)$ – совпадают значения этих функций, их первых и вторых производных. Если же $p > p(0)$, возникает область неустойчивости $|x| \leqslant \delta_1$, в которой

$$|\widetilde{P}(x)| > \Gamma(x).$$

Граница области неустойчивости $\delta_1(p)$ определяется из сравнения (19.15) и (19.16)

$$p - p(0) = \frac{2b(p-1)|\delta_1|}{a\Gamma^2} + \left[\frac{b^2(p-1)}{a^2} - \frac{2\Gamma''^2 + \Gamma\Gamma^{(4)}}{12\Gamma^2}\right]\delta_1^2. \tag{19.17}$$

Поскольку δ_1 имеет малость $p - p(0)$, то в правой части (19.17) можно заменить p на $p(0)$. Тогда (19.17) можно представить в виде, похожем на (19.10):

$$p - p(0) = p'\delta_1 + \tfrac{1}{2}p''\delta_1^2. \tag{19.18}$$

Отсюда видно, что при $p' > 0$ область неустойчивости δ_1 ограничена, причем

$$\delta_1 \backsim [p - p(0)].$$

Если $p' = 0$, то для ограниченности δ_1 необходимо $p'' > 0$ и тогда

$$\delta_1 \backsim [p - p(0)]^{1/2}.$$

В работе В.С. Львова, Е.В. Подивилова [171] показано, что развитие этой неустойчивости приводит к появлению регулярной части в функции распределения ПСВ с шириной по x, равной $\delta(p)$, причем при малой надкритичности над промежуточным порогом $p_c = p(0)$ зависимость $\delta(p)$ можно определить из уравнения, похожего на (19.5):

$$p - p(0) = 6[p'|\delta| + \tfrac{1}{2}p''\delta^2]. \tag{19.19}$$

Можно также показать, что существенная перестройка функции распределения ПСВ выше промежуточного порога (то есть при $p > p(0)$) очень мало влияет на интегральные характеристики системы ПСВ, такие как χ', χ'', N и т.д.

19.4. Особенности поведения ПВ в случае комплексных коэффициентов S и V. Переходя к изучению этого случая, напомним, что без уменьшения общности можно считать, что $V(\Omega)$ = const и вещественно. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести замену типа (19.4). Мнимая часть $S(\Omega, \Omega')$ приводит к изменению выражения (19.7):

$$|\widetilde{P}_x|^2 = N_1(S_{11} - \widetilde{S}'_{1x})^2 + (\Gamma_1 - N_1\widetilde{S}''_{1x})^2. \tag{19.20}$$

Местоположение первой пары определяется из условия

$$\frac{\partial}{\partial x}(|P_x| - \Gamma_x) = 0,$$

которое дает

$$\frac{N_1 \partial \widetilde{S}''_{1x}}{\partial x} = \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x}, \tag{19.21}$$

так что в отличие от предыдущего $\partial\Gamma_x/\partial x = 0$ только в пороговой точке. В дальнейшем возникает "уход" пары Δx, пропорциональный N_1 ($\Delta x = x - x_1$ при $p = 0$). Этот уход из точки x_1 вызывает дополнительное ослабление взаимодействия СВ с накачкой и служит еще одной, кроме фазового рассогласования, причиной ограничения амплитуды пары. Решая совместно (18.20) с (19.21), получим при малых N_1:

$$N_1^2 = [h^2 V_1^2 - \Gamma^2]\left[S_{11}^2 + \frac{(\partial\widetilde{S}''/\partial x)^2 h^2 V_1^2}{(\partial\Gamma_x/\partial x)^2}\right]^{-1}. \tag{19.22}$$

Сравнивая этот результат с (19.1), видим, что "уход" приводит к появлению дополнительного слагаемого в знаменателе, вообще говоря, того же порядка величины.

Нужно сказать, что при возбуждении СВ методом параллельной накачки первая группа пар возникает в симметричном месте резонансной поверхности – на ее экваторе. С ростом надкритичности пары не уходят с экватора, так как "не знают", куда им уходить: на север или на юг. Формально это проявляется в том, что в (19.21)

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{Im} S_{\theta,\pi/2}) = 0$$

при $\theta = \pi/2$. Иное дело при возбуждении СВ методом поперечной накачки, когда первая группа пар возбуждается при $\theta = \theta_1$ и $\pi - \theta_1$, $\theta_1 = \pi/4$ и их уход к экватору или полюсам вполне возможен. Применительно к конкретной ситуации никто не изучал зависимость местоположения пар от надкритичности – ни экспериментально, ни теоретически. В этом же пункте – в порядке развития общей теории – мы только отмечаем такую возможность.

§ 20. Основное состояние системы параметрических волн при большой надкритичности

Поведение системы ПВ с непрерывным распределением проще всего описать в предельном случае очень большой накачки ($hV \gg \gamma$). В нулевом приближении по параметру $\xi = \gamma/hV$ будет $P_\Omega = 0$, откуда согласно (18.20) при вещественном $S_{\Omega\Omega'}$ следует

$$hV_\Omega + \int S_{\Omega\Omega'} X_{\Omega'} d\Omega' = 0, \qquad X = N_\Omega \cos \Psi_\Omega, \tag{20.1}$$

$$\int S_{\Omega\Omega'} Y_{\Omega'} d\Omega' = 0, \qquad Y_\Omega = N_\Omega \sin \Psi_\Omega. \tag{20.2}$$

Задача, таким образом, сводится к решению линейных уравнений Фредгольма первого рода. Для простоты будем предполагать, что среда в отсутствие накачки является изотропной, т.е. V_Ω зависит от полярного угла θ, а $S_{\Omega\Omega'}$ зависит только от угла между направлениями Ω и Ω'. Тогда, разлагая все функции в (20.1), (20.2) по полиномам Лежандра и воспользовавшись теоремой сложения для $P_n(\cos\alpha)$, получим после элементарного интегрирования по θ' и φ' формальное решение

$$\begin{aligned} 4\pi X_\theta &= -\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) hV_n P_n(\cos\theta)/S_n, \\ S(\cos\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_n(\cos\alpha). \end{aligned} \tag{20.3}$$

При общем исследовании решений уравнений (20.1), (20.2) возможны следующие три случая:

1. Уравнения (20.2) имеют нетривиальные решения, не ортогональные V_Ω. Тогда уравнение (20.1) не имеет решений, теория, исходящая из диагонального гамильтониана, не дает ограничения амплитуды. Этот случай мы будем называть *сингулярным.* Для изотропной модели сингулярный случай осуществляется, когда хотя бы при одном j будет $S_j = 0$, а $V_j \neq 0$. В § 19 было показано, что при $V \neq \text{const}$ и не слишком большой надкритичности решение в виде одной или нескольких пар существует и в сингулярном случае. Таким образом, имеется некоторая критическая амплитуда накачки h_c, при достижении которой происходит "срыв" стационарного состояния и выше нее ограничение происходит уже за счет более слабых нелинейных механизмов. Из формулы (20.3) следует, что в наиболее сингулярном случае, когда $S_0 = 0$, а $V = \text{const}$, ограничения амплитуды нет ни при каких превышениях над порогом, т.е. $h_c = h_1$. В менее сингулярных случаях $h_c > h_1$.

Рассмотрим подробнее случай, когда $S = \text{const}$, а V_θ изменяется монотонно от V_1 до V_2. В этом случае поверхность P_θ имеет не более двух максимумов. Поэтому в стационарном состоянии может быть не более двух пар. Решая уравнение (19.20), получим следующее выражение для суммарной амплитуды:

$$N_1 + N_2 = \frac{\gamma}{S} \frac{h(V_1 + V_2)}{[4\gamma^2 - h^2(V_1 - V_2)^2]^{1/2}}.$$

Отсюда видно, что

$$h_c = 2\gamma/(V_1 - V_2) \quad \text{при} \quad S = \text{const}.$$

2. Уравнения (20.2) имеют нетривиальные решения, ортогональные V_Ω. Тогда для уравнения (20.1) имеют решения, определенные с точностью до решений уравнения (20.2), и теория, исходящая из диагонального гамильтониана, не определяет стационарное состояние однозначно. Этот случай мы будем называть *неопределенным*. Для изотропной модели неопределенный случай осуществляется, когда хотя бы при одном $n = j$ будет $S_j = 0$ и $V_j = 0$. Так же, как и в сингулярном случае, если $V \neq \text{const}$, при малых превышениях над порогом существует однозначное решение в виде одной пары. Следовательно, имеется некоторая критическая амплитуда накачки h_u, выше которой стационарное состояние теряет определенность. Решение обладает различной степенью произвола в зависимости от числа гармоник, для которых $S_j = V_j = 0$. В наиболее неопределенном случае $S = \text{const}$, $V = \text{const}$ величина $h_u = h_1$ и допустимы любые распределения, удовлетворяющие следующему условию, совпадающему с (19.1):

$$\int N_\Omega \, d\Omega = (h^2 V^2 - \gamma^2)^{1/2} / |S|. \tag{20.4}$$

3. Уравнение (20.2) не имеет нетривиальных решений. Этот случай мы будем называть *регулярным*. В регулярном случае все $S_n \neq 0$. Тогда уравнение (20.1) имеет единственное решение (20.3), которое, однако, имеет физический смысл лишь при некоторых ограничениях. Прежде всего необходима достаточно быстрая сходимость последовательности V_n/S_n к нулю при $n \to 0$. Это условие, однако, не является достаточным. В самом деле, учтем конечность затухания γ в уравнениях (20.1), (20.2). Для этого воспользуемся уравнениями (18.20):

$$-\gamma \sin \psi_\Omega = hV_\Omega + \int S_{\Omega\Omega'} N_{\Omega'} \cos \psi_{\Omega'} \, d\Omega',$$

$$-\gamma \cos \psi_\Omega = \int S_{\Omega\Omega'} N_{\Omega'} \sin \psi_{\Omega'} \, d\Omega'$$

для изотропной модели, линеаризуя которые на "фоне" решения (20.3), получим

$$\begin{aligned} -\gamma \delta\psi_\Omega &= \int S(\cos\alpha) \delta N(\Omega') \, d\Omega', \\ -\gamma &= \int S(\cos\alpha) N(\Omega') \delta\Psi_{\Omega'} \, d\Omega'. \end{aligned} \tag{20.5}$$

Отсюда

$$\delta\psi_\Omega = -\frac{\gamma}{4\pi S_0 N_\Omega}, \qquad \delta N_m = -\gamma \frac{2m+1}{4\pi S_m} \delta\psi_m.$$

Поэтому для существования области применимости решений (20.3) требуется, чтобы распределение N_Ω никогда не обращалось в нуль. Напомним, что при $V = \text{const}$ можно получить точное решение уравнений с затуханием при любом превышении над порогом. Это решение имеет вид (20.4). В регулярном случае, кроме того, $N = \text{const}$, т.е. $N_\Omega = N/4\pi$.

Качественный вывод из всего сказанного заключается в том, что распределение пар N_Ω при больших h чрезвычайно чувствительно к тонкой структуре функций V_Ω и $S_{\Omega\Omega'}$: в одних случаях устанавливается непрерывное распределение пар по резонансной поверхности, в других — срыв ограничения и возникновение существенно нестационарной картины.

§ 21. Нелинейные восприимчивости: методы измерения и сравнение теории с экспериментом

21.1. Определение восприимчивостей для ПСВ. Наиболее распространенный метод экспериментального изучения параметрического возбуждения СВ основывается на поглощении волнами энергии накачки. Определим высокочастотную нелинейную восприимчивость ферромагнетика обычным образом: $M_z(\omega_p) = \chi h$, $\chi = \chi' + i\chi''$. Мнимая часть восприимчивости определяет величину поглощенной мощности

$$W = \tfrac{1}{2}\omega_p \chi'' h^2 .$$

Применяя формулу (17.4) для потока энергии, втекающей в образец из окружающего поля накачки, получим

$$\chi'' = (2/h) \sum_{\boldsymbol{k}} | V_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}^2 | \sin(\widetilde{\psi}_{\boldsymbol{k}} - \psi_{\boldsymbol{k}}) . \tag{21.1}$$

Аналогичное выражение получается для вещественной части.

$$\chi' = -(2/h) \sum_{\boldsymbol{k}} | V_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}^2 | \cos(\widetilde{\psi}_{\boldsymbol{k}} - \psi_{\boldsymbol{k}}) . \tag{21.2}$$

Поведение восприимчивостей χ' и χ'' за порогом существенно зависит от механизма ограничения амплитуды. Так, для механизма нелинейного затухания из (17.8) следует

$$\chi' = 0, \quad \chi'' = \frac{2V^2}{\eta} \frac{h - h_1}{h} , \tag{21.3}$$

а для фазового механима ограничения из (21.1), (21.2) и (19.1)

$$\chi' = \frac{2V^2}{S} \frac{h^2 - h_1^2}{h^2} , \qquad \chi'' = \frac{2V^2}{S} \frac{h_1 (h^2 - h_1^2)^{1/2}}{h^2} . \tag{21.4}$$

На рис. 21.1 видно, что принципиальное различие диссипативного и фазового механизмов проявляется в поведении величины $\chi' : \chi'' = 0$ для диссипативного и $\chi' \approx \chi''$ для фазового механизмов. Экспериментальные результаты, которые мы подробно обсудим в п. 21.3, показывают, что вещественная восприимчивость χ' отлична от нуля и может быть порядка или даже больше, чем χ''. Эти факты также говорят в пользу фазового механизма ограничения.

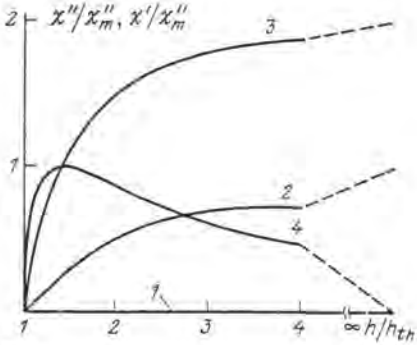


Рис. 21.1. Зависимости нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' от амплитуды накачки h: *1* и *2* – χ' и χ'' для механизма нелинейного затухания; *3* и *4* – χ'' и χ' для фазового механизма ограничения

21.2. Методика измерения магнитной восприимчивости. В СВЧ диапазоне обычно используют реакцию высокодобротного электромагнитного резонатора на изменение состояния находящегося в нем образца. Возникающее при этом изменение добротности резонатора определяет мнимую часть восприимчивости χ'', а изменение собственной частоты – вещественную часть χ'. По сравнению со стандартной методикой, применяемой в опытах по магнитному резонансу, методика измерений нелинейных восприимчивостей при параллельной накачке имеет ряд специфических особенностей: импульсный режим СВЧ генератора, широкая область полей, в которых наблюдается поглощение энергии, зависимость χ' и χ'' от мощности накачки. Последнее приводит к тому, что мощность генератора не является хорошей мерой амплитуды поля накачки. Поле в резонаторе удобнее определять по мощности на выходе резонатора. Это позволяет автоматически учесть эффект обратного влияния СВ на накачку, который является существенным вблизи порога даже при малом коэффициенте заполнения резонатора.

Типичная схема экспериментальной установки, применяемой для изучения явления параллельной накачки, показана на рис. 21.2. Принцип действия заключается в следующем. Невозмущенный резонатор (до порога параметрического возбуждения) обычно согласовывается с волноводным трактом таким образом, чтобы коэффициент отражения от резонатора был близким к нулю. При возбуждении СВ ухудшается нагруженная добротность резонатора Q_H и изменяется его собственная частота ω_0, что приводит к появлению отраженного сигнала, по которому можно судить о величине χ' и χ''. Величина χ'' связана с коэффициентом отражения следующей формулой:

$$\chi'' = \frac{1}{AQ_H} \frac{|\Gamma|_{\omega=\omega_0}}{1-|\Gamma|_{\omega-\omega_0}},$$

где $A = 2\pi \int\limits_{\text{обр}} h^2 dr / \int\limits_{\text{рез}} h^2 dr$ – коэффициент заполнения резонатора. Для настройки в резонанс ($\omega = \omega_0$) производится небольшое изменение частоты

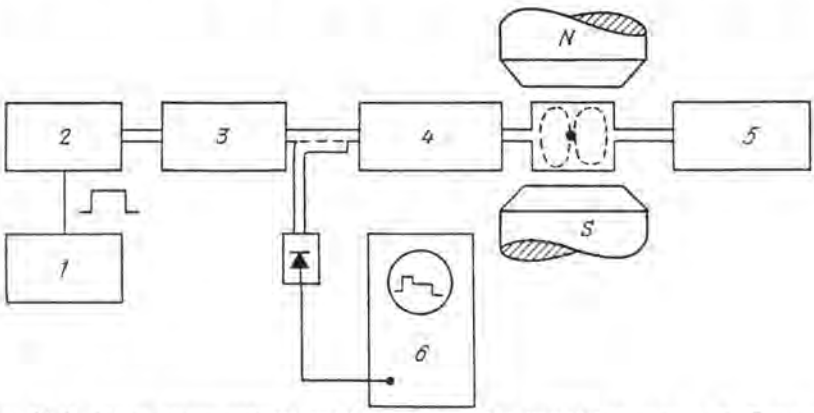


Рис. 21.2. Схема экспериментальной установки для параметрического возбуждения спиновых волн: *1* – модулятор; *2* – магнетрон; *3* – аттенюатор; *4* – согласователь; *5* – измеритель мощности; *6* – осциллограф

генератора (или собственной частоты резонатора) по минимуму коэффициента отражения, величина этого изменения $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ непосредственно определяет вещественную восприимчивость. По ряду причин, главной из которых является неточность в определении коэффициента A, погрешность измерений абсолютных величин χ' и χ'' обычно порядка 20–40%.

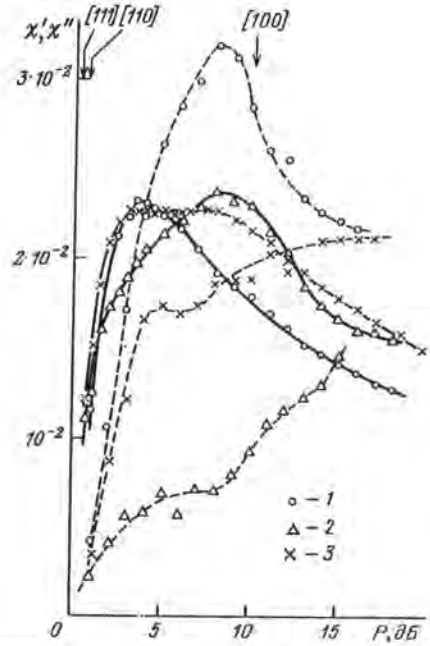
Г.А. Мелковым и И.В. Круценко [177] была предложена более совершенная методика измерения восприимчивости, позволяющая уменьшить относительную погрешность измерения χ' и χ'' до нескольких процентов. Ее идея заключается в измерении реакции резонатора на возбуждение ПСВ не по изменению отражения от него СВЧ излучения, как в традиционной методике, а путем сравнения прошедшего через него излучения с опорным сигналом. При $h < h_{th}$ сигнал рассогласования полностью компенсируется с помощью фазовращателя и аттенюатора (поглотителя), включенных в канал опорного сигнала. После возбуждения ПСВ при $h > h_{th}$ компенсация производится вторично.

21.3. Сопоставление S-теории с экспериментом по нелинейным восприимчивостям. В интересующем нас случае аксиальной симметрии нелинейные восприимчивости, определенные формулами (21.1), (21.2), можно представить в виде

$$\chi' = \frac{2}{h}\sum_{\theta} V_\theta N_\theta \cos\psi_\theta = \frac{2}{h^2}\sum_{\theta,\theta'} S_{\theta\theta'} N_{\theta'} N_\theta \cos(\psi_\theta - \psi_{\theta'}),$$
$$\chi'' = \frac{2}{h}\sum_{\theta} V_\theta N_\theta \sin\psi_\theta = \frac{2}{h^2}\sum_{\theta} \gamma_\theta N_\theta. \qquad (21.5)$$

Видно, что мнимая часть восприимчивости χ'' характеризует только интегральную интенсивность пар, в то время как вещественная часть χ' существенно зависит от фазовых соотношений между парами. Поэтому величина χ' является более тонкой характеристикой системы, чувствительной к деталям распределения пар в пространстве, автоколебаниям, неоднородностям и т.п. С этим обстоятельством в значительной мере связан большой разброс экспериментальных значений χ', имеющихся у различных авторов. Так, например, в одной из ранних работ Т.С. Хартвика и др. [222] сообщалось, что в ЖИГ отношение $\chi'/\chi'' = 0{,}1$ и слабо зависит от магнитного поля. Малость этого отношения явилась причиной, на основании которой в качестве механизма ограничения предлагались различные варианты нелинейного затухания, приводящие к $\chi' = 0$ (Е. Шлеманн, [235], П. Готтлиб и Х. Сул, [69]). Картина поведения СВ за порогом параметрического возбуждения, описанная в монографии А.Я. Моносова [17], и в частности механизм "автоподавления" амплитуды, также существенным образом исходит из предположения, что $\chi' \ll \chi''$. Однако последующее тщательное изучение поведения χ' и χ'' в различных экспериментальных ситуациях показало, что в совершенных монокристаллах в отсутствие автоколебаний величина χ' не мала и может даже превосходить величину χ''.

На рис. 21.3 показаны характерные зависимости $\chi'(h^2)$ и $\chi''(h^2)$ для сферы ЖИГ в трех основных кристаллографических направлениях: в направлении [100], когда отсутствуют автоколебания намагниченности, и в направлениях [111] и [110], когда наблюдаются интенсивные автоколебания. Видно, что автоколебания намагниченности, не влияя существенно



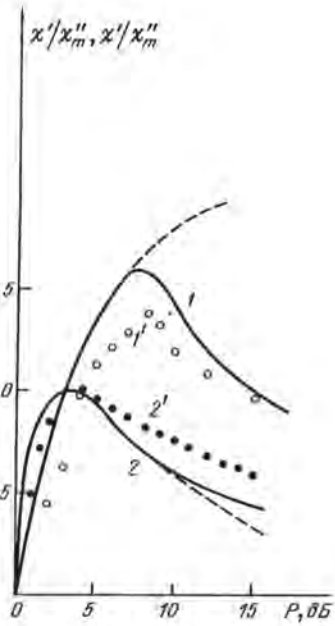


Рис. 21.3. Экспериментальные зависимости вещественной χ' (штриховая кривая) и мнимой χ'' (сплошная кривая) частей продольной восприимчивости от мощности накачки для сферы ЖИГ: *1* – ориентация [100]; *2* – ориентация [111]; *3* – ориентация [110]. Стрелками обозначены пороги возбуждения автоколебаний

Рис. 21.4. Зависимость восприимчивости χ' и χ'' от мощности накачки. Сплошные линии – результ численного расчета, штриховая линия – восприимчивости в модели одной группы пар. Точки – результат эксперимента для сферы ЖИГ, $H = H_c - 100$ Э, $M \parallel [100]$: *1, 1′* – χ'; *2, 2′* – χ''

на величину χ'', могут уменьшить величину χ' в несколько раз. Это можно объяснить следующим образом: при больших превышениях над порогом неустойчивости

$$\sin\psi = h_1/h \ll 1,$$

$$|\cos\psi| \approx 1 - \tfrac{1}{2}(h_1/h)^2,$$

т.е. косинус фазового сдвига пар по отношению к накачке, определяющей величину χ', близок к своему экстремальному значению. Развитие автомодуляций, приводящих к периодическому изменению угла ψ, не меняя среднего значения $\sin\psi$, уменьшает среднее значение $\cos\psi$ и вместе с ним восприимчивость χ'.

То, что $\chi' \approx \chi''$, однозначно свидетельствует о наличии существенного фазового рассогласования между накачкой и парами СВ, которое следует из S-теории. Сравнение ее выводов с экспериментальными зависимостями $\chi'(h)$ и $\chi''(h)$ существенно облегчается при малой надкритичности ($h \lesssim 2h_1$), когда возбуждены только пары на экваторе с $\theta = \pi/2$. В этом

случае из (21.5) и (19.6) следует

$$\chi'' = \frac{2V_1^2}{S_{11}} \frac{h_1(h^2 - h_1^2)^{1/2}}{h^2}, \quad \chi' = \frac{2V_1^2}{S_{11}} \frac{h^2 - h_1^2}{h^2}. \tag{21.6}$$

На рис. 21.4 видно качественное совпадение характера теоретических и экспериментальных кривых (см. рис. 21.3, $M \parallel (100)$). Например, в соответствии с теорией кривая $\chi'(h)$ пересекает кривую $\chi''(h)$ в максимуме. Расхождение теоретических и экспериментальных кривых $\chi'(h)$ при $h^2 > 8$ дБ естественным образом объясняется возбуждением второй группы пар, которые не учитывают формулы (21.6).

Для сравнения S-теории с экспериментом в области большой надкритичности В.В. Зауткиным и др. [86] проводились численные расчеты на ЭВМ. Для этого прежде всего вычислялись коэффициенты $S_{\theta\theta'}$ в конкретных экспериментальных ситуациях для ЖИГ. При этом использовались только известные значения основных параметров ЖИГ: намагниченности, поля кристаллографической анизотропии и обменного поля. Полученные таким образом значения подставлялись в нестационарные уравнения движения S-теории (18.11), которые решались на ЭВМ методом итерации по времени от уровня теплового шума. Вычисленные стационарные значения амплитуд и фаз при различной надкритичности позволили определить величины χ' и χ'' по формулам (21.5). Результаты этих вычислений приведены на рис. 21.4 вместе с результатами лабораторного эксперимента. Видно не только качественное, но и хорошее количественное совпадение теории с экспериментом.

В табл. 21.1 приведено сравнение теоретических и экспериментальных значений максимальной восприимчивости $\chi''_m = \max \chi''(h)$ для различных кубических ФМ сферической формы. Для ЖИГ проводились абсолютные измерения восприимчивости по стандартной методике, описанной в п. 21.2. Значения χ''_m для остальных кристаллов измерены на той же установке путем сравнения их с ЖИГ. Теоретические значения вычислялись по формуле (21.6):

$$\chi''_m = V_1^2 / |S_{11}|, \tag{21.7}$$

которая для кубических ФМ в случае аксиальной симметрии ($M \parallel [111]$, $[100]$) после подстановки выражений для V_1 и S_1 приобретает вид (В.В. Зауткин и др., [86])

$$8\pi\chi''_m = [N_z - 1 + \beta(\omega_a/\omega_M) + (1 + (\omega_p/\omega_M)^2)^{1/2}]^{-1}, \tag{21.8}$$

где

$$\beta = \begin{cases} -8 & \text{при } M \parallel [111], \\ 9 & \text{при } M \parallel [100]. \end{cases}$$

Из таблицы видно, что простая формула (21.8) хорошо описывает абсолютные значения запороговой восприимчивости для широкого класса кубических ФМ. Некоторое расхождение теории с экспериментом для $NiFe_2O_4$ (ориентация $[111]$), по-видимому, связано с тем, что в этом случае максимум восприимчивости лежит за порогом рождения второй группы пар, когда формула (21.8) неприменима.

Таблица 21.1

Сравнение теории с экспериментом для линейной восприимчивости χ''

Кристалл	$4\pi M = \omega_M/g$, Гс	$H_A = \frac{\omega_a}{g}$, Э	$2\Delta H_k = \gamma/g$, Э	$\chi'' \cdot 10^3$		Ориентация
				Эксперимент	Теория	
1. $Y_3Fe_5O_{12}$ (ЖИГ)	1750	84	0,12	24 + 5	21	[100]
2. $Y_3Fe_{4,3,5}Se_{0,6,5}O_{12}$	1500	8	0,36	23	22	[100]
3. $Bi_{0,2}Ca_{2,8}Fe_{3,6}V_{1,4}O_{12}$	650	58	0,45	5	7,5	[100]
4. $Li_{0,5}Fe_{2,5}O_4$	3700	580	0,80	80	70	[111]
5. $NiFe_2O_4$	3200	490	1,40	25	19	[100]
				55	84	[111]

В работе Дж.Дж. Грина и В.Дж. Хели [71] измерялась восприимчивость χ''_m для одноосного ФМ $Ba_2Zn_2Fe_{12}O_{14}$ с анизотропией типа "легкая плоскость" и было получено аномально большое значение $\chi''_m \approx 0{,}2$. Теоретическая оценка для χ''_m, которую можно сделать по формуле (21.7), вычисляя для этого случая коэффициенты V_1 и S_{11} без учета диполь-дипольного взаимодействия (при $\omega_M < \omega_a$, $\omega_p \lesssim \omega_a$), дает

$$2\pi\chi''_m = \omega_M\,\omega_a/\omega_p^2.$$

Взяв из [71] значения параметров для $Ba_2Zn_2Fe_{12}O_{14}$, $4\pi M = 2850$ Гс, $\omega_a/g = 9900$ Э и частоту накачки $\omega_{p/g} \approx 6300$ Э, получим $\chi''_m \approx 0{,}1$. Качественное соответствие между теоретическим и экспериментальным значениями χ''_m имеется также при параметрическом возбуждении СВ в АФМ (В.С. Львов, М.И. Широков, [155]; Л.А. Прозорова, А.И. Смирнов, [201]).

Большой интерес представляет также сравнение знаков вещественной восприимчивости χ', которые получаются в теории и эксперименте. В соответствии с формулой (21.6) знак χ' совпадает со знаком S_{11} и для кубических ФМ определяется знаком знаменателя в формуле (21.8). В соответствии с экспериментом теория предсказывает для слабо анизотропных кристаллов, перечисленных в табл. 21.1, под номерами 1, 2, 3 $\chi' > 0$. Для кристаллов с большой анизотропией (номера 4, 5) $\chi' > 0$ для ориентации [100] и $\chi' < 0$ для ориентации [111].

§ 22. Нелинейная теория ферромагнитного резонанса

Существовавшая ранее нелинейная теория ферромагнитного резонанса Х. Сула [210] учитывала только взаимодействие СВ с ОП и пренебрегала взаимодействием ПСВ друг с другом (СВ–СВ-взаимодействие), хотя последнее при больших амплитудах волн велико, и пренебрегать им в большинстве случаев нельзя. По этому поводу интересно привести мнение Е. Шлеманна [231]: "Это приближение (исключение СВ–СВ-взаимодействия) сделано для упрощения математической стороны проблемы и, вообще говоря, не может быть оправдано. Принимая его, мы, вероятно, теряем большую часть физически существенной информации".

С теоретической точки зрения ясно, что по мере роста амплитуды СВ за порогом энергия СВ–СВ-взаимодействия вначале сравнивается, а потом и превосходит энергию СВ–ОП-взаимодействия. Мощность накачки, при которой СВ–СВ-взаимодействие становится существенным, зависит от свойств спиновой системы и типа нелинейных процессов и, как правило, превышается в эксперименте. Вместе с тем широко распространено мнение, что ограничение параметрического возбуждения происходит в основном за счет обратной реакции СВ на ОП (СВ–ОП-взаимодействие). Это мнение основывается на предсказываемом "СВ–ОП-теорией" явлении "замораживания" ОП за порогом, которое нашло применение в ферритовых ограничителях мощности.

Как показано Е. Шлеманном и др. [233] практически полное прекращение роста амплитуды ОП наблюдается при ФМР для процессов первого порядка. С другой стороны, имеется ряд фактов, которые нельзя объяснить "СВ–ОП-взаимодействием". В частности, поведение нелинейных восприимчивостей χ', χ'' вдали от резонанса отличается от теоретического и предсказанного при больших превышениях мощности накачки над порогом (Р.В. Даймон [75]). Особое внимание следует обратить на тот факт, что вещественная часть восприимчивости χ' практически не меняется за порогом, в то время как по теории СВ–ОП-взаимодействия она должна убывать как h^{-2} (h – амплитуда переменного магнитного поля). Укажем также на опыты А.Г. Гуревича и С.С. Старобинца [73] по "насыщению ФМР" (в случае процессов второго порядка), свидетельствующие "о росте амплитуды ОП за порогом".

Эти и некоторые другие факты находят естественное объяснение в изложенной ниже теории, одновременно учитывающей СВ–ОП- и СВ–СВ-взаимодействия в приближении диагонального гамильтониана $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}$.

22.1. Основная модель. Гамильтониан задачи выбираем в виде

$$\mathcal{H} = \omega_0 a_0^* a_0 + \sum_k \omega_k a_k^* a_k + \mathcal{H}_{00} + \mathcal{H}_\perp + \sum_k \mathcal{H}_{0k} + \widetilde{\mathcal{H}}_{\text{int}},$$

$$\mathcal{H}_{00} = T_{00}|a_0|^4, \quad \mathcal{H}_\perp = [h_\perp \exp(-i\omega_p t) U a_0^* + \text{к.с.}], \tag{22.1}$$

$$\mathcal{H}_{0k} = ½(V_{0k}^* a_0^* a_k a_{-k} + \text{к.с.}) + (S_{0k} a_0^{*2} a_k a_{-k} + \text{к.с.}) + 2T_{0k}|a_0|^2|a_k|^2.$$

Здесь $\mathcal{H}_{00}$ описывает собственный нелинейный сдвиг частоты ОП, $\mathcal{H}_\perp$ – взаимодействие ОП с однородным магнитным СВЧ полем с частотой ω_p (для простоты мы считаем, что это поле поляризовано по кругу в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{M}$) и, наконец, $\mathcal{H}_{0k}$ описывает ОП–СВ-взаимодействие. Первые два члена определяют параметрическое взаимодействие первого и второго порядков соответственно, а последнее слагаемое – нелинейный сдвиг частоты. $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ – диагональный по парам гамильтониан СВ–СВ-взаимодействия (см. формулу (18.1)).

Уравнения движения с гамильтонианом (22.1):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_0\right) a_0 = -i\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta a_0^*}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k\right) a_k = -i\,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta a_k^*} \tag{22.2}$$

можно представить в стандартном для S-теории виде (18.2):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_0 + i(\widetilde{\omega}_0 - \omega_p)\right] a_0 + iP_0 a_0^* = 0, \tag{22.3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\tilde{\omega}_k - l\omega_p/2)\right] a_k + iP_k a^*_{-k} = 0, \tag{22.4}$$

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + 2T_{00}|a_0|^2 + 2\sum_{k>0} T_{0k}|a_k|^2,$$
$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\sum_{k'} T_{kk'}|a_{k'}|^2 + 2T_{0k}|a_0|^2. \tag{22.5}$$

Здесь $\tilde{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}_k$ описывают нелинейную расстройку частоты ОП и СВ, $l = 1, 2$ соответственно для процессов первого и второго порядков. Выражения для величин P_0, P_k, представляющих "комплексные потоки энергии" в ОП и k-пару, зависят от того, какой процесс рассматривается. Для процессов первого порядка

$$P_0 = \frac{1}{a_0^*}\left[hU + \tfrac{1}{2}\sum_k V_{0k} a_k^2\right],$$
$$P_k = V_{0k} a_0 + \sum_k S_{kk'} a_{k'} a_{-k'}. \tag{22.6}$$

Порог неустойчивости второго порядка значительно выше первого. Однако, если частота $(\omega_p/2)$ лежит вне спектра СВ, процессы первого порядка запрещены, и можно наблюдать неустойчивость второго порядка с $\omega_k = \omega_p$. Для нее

$$a_0^* P_0 = hU + \sum_{k>0} S_{0k} a_k^2 a_0^*,$$
$$P_k = S_{0k} a_0^2 + \sum_{k'} S_{kk'} a_{k'} a_{-k'}. \tag{22.7}$$

Наша задача сводится к исследованию решений связанных уравнений (22.3) – (22.5) в зависимости от амплитуды накачки h. Нетрудно заметить, что уравнения (22.4) для ПСВ в предположении $a_0 = \text{const}$ полностью совпадают с уравнениями, описывающими параметрическую неустойчивость в заданном поле, которые подробно описаны выше. Подставив решение этих уравнений в (22.3), получим одно комплексное уравнение, определяющее зависимость $a_0(h)$. Буквальная реализация этой программы требует применения ЭВМ и целесообразна лишь для некоторых важных случаев (например, для монокристаллов ЖИГ). Однако она до сих пор не проведена. В этом же параграфе мы ограничимся качественным анализом поведения СВ и ОП за порогом неустойчивости ФМР. Учитывая, что интегральные характеристики системы ПВ мало чувствительны к конкретному виду коэффициентов V_{0k}, S_{0k} и $S_{kk'}$, будем считать, что V_{0k}, $S_{0k} = \text{const}$. Тогда для процессов первого порядка из (19.1) получим

$$N_1 = [V_{01}^2 n_0 - \gamma_1^2]^{1/2}/|S_{11}|,$$
$$\sin(\psi_1 - \psi_0/2) = \gamma(V_{01}^2 n_0)^{-1/2}. \tag{22.8}$$

Для процессов второго порядка аналогично:

$$N_1 = [S_{01}^2 n_0^2 - \gamma_1^2]^{1/2}/|S_{11}|, \quad \sin(\psi_1 - \psi_0) = \gamma_1/(S_{01} n_0). \tag{22.9}$$

Здесь N_1 — интегральная амплитуда параметрических СВ, $V_{0k} \equiv V_0$, $S_{01} \equiv S_{0k}$, S_{11} – среднее значение $S_{kk'}$.

22.2. Процессы первого порядка. Стационарное решение уравнений (22.2), (22.8) для ОП имеет вид

$$a_0(\tilde{\omega} - \omega_p + i\tilde{\gamma}) = hU, \tag{22.10}$$

в котором $\tilde{\omega}$ – "эффективная" частота, $\tilde{\gamma}$ – затухание ОП:

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega} = \omega_0 + 2T_{00}|a_0|^2 + 2T_{01}N_1 - S_{11}N_1^2/2|a_0|^2, \\ &\tilde{\gamma} = \gamma + \gamma_1 N_1/2n_0. \end{aligned} \tag{22.11}$$

Здесь T_{01} – среднее значение T_{0k}. Теперь мы имеем полную систему уравнений (22.8), (22.10), необходимую для вычисления стационарного режима. Для дальнейшего целесообразно эти уравнения сделать безразмерными, что позволит легче оценить относительную величину различных членов. Введя с этой целью следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} &x_0 = n_0/n_c, \quad x_1 = N_1/n_c, \quad n_c = \gamma_1/V_{01}^2, \quad \xi = h/h_1, \\ &h_1 = \gamma_0\gamma_1/UV_{01}, \quad \delta = (\omega_0 - \omega_p)/\gamma_0, \\ &\epsilon = 2\gamma_0 S_{11}/V_{01}^2, \quad a = (T_{00}/S_{11})(\gamma_1/\gamma_0)^2, \quad b = 2T_{01}\gamma_1/S_{11}\gamma_0, \end{aligned} \tag{22.12}$$

мы приводим исходные уравнения к виду

$$\begin{aligned} &\gamma_1|\epsilon|x_1 = 2\gamma_0(x_0 - 1)^{1/2}, \quad (\tilde{\omega}_0 + \tilde{\gamma}^2)x_0 = \xi^2\gamma_0^2, \\ &\tilde{\gamma}^2 = \gamma_0^2[1 + (x_0 - 1)^{1/2}/|\epsilon|x_0], \\ &\tilde{\omega}/\gamma_0 = \delta - (x_0 - 1)/\epsilon x_0 + b(x_0 - 1)^{1/2} + \epsilon a x_0. \end{aligned} \tag{22.13}$$

Эти уравнения содержат малый параметр $|\epsilon| \approx \gamma/\omega_M \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$, который в теории, не учитывающей СВ – СВ-взаимодействия, полагался равным нулю.

Поведение однородной прецессии в резонансе. Как следует из (22.13), амплитуда x_0 максимальна при $\tilde{\omega} = 0$ и определяется уравнением

$$(x_0 - 1)^{1/2} + |\epsilon|x_0 = \epsilon\xi(x_0)^{1/2}. \tag{22.14}$$

Ввиду малости ϵ решение этого уравнения имеет две характерные области: "малых превышений" $|\epsilon|\xi \ll 1$, в которой

$$x_0 = (1 + \epsilon^2\xi^2)^{-1}, x_1 = 2(\xi - 1)\gamma_0/\gamma_1, \tag{22.15}$$

и область "больших превышений" $|\epsilon|\xi \approx 1$, в которой

$$x_0 = (1 - \epsilon^2\xi^2)^{-1}, \quad x_1 = 2\gamma_0\gamma_1^{-1}(\xi - 1)[1 - \epsilon^2\xi^2]^{-1}. \tag{22.16}$$

Эти соотношения справедливы до тех пор, пока $x_0 < |\epsilon|^{-2/3}$. При остальных превышениях, как следует из (22.14), ОП должна расти по линейному закону $(x_0)^{1/2} = \xi$ (рис. 22.1), однако при этом мы вступаем в область $x_0 \sim |\epsilon|^{-1}$, в которой исходные уравнения (22.3) теряют силу.

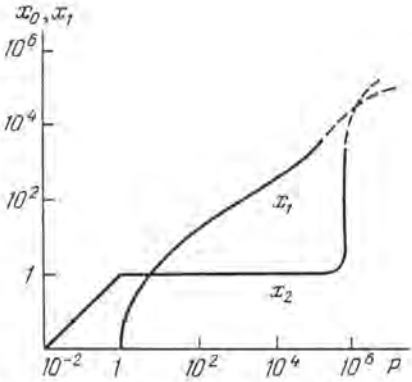
Форма резонансной кривой. Когда точный резонанс отсутствует или невозможен, условие порога имеет вид

$$\xi = \xi_c \equiv (1 + \delta^2)^{1/2}.$$

При $\xi \to \xi_c \gg |\epsilon|$ получим из (22.13) соотношение

$$x_0 = 1 + \epsilon^2(\xi^2 - \delta^2)/(1 - \delta\epsilon)^2, \tag{22.17}$$

которое верно до тех пор, пока $x_0 < |\epsilon|^{-2/3}$. Соотношение (22.17) указы-



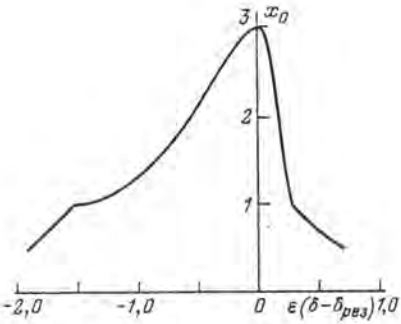


Рис. 22.1. Зависимость амплитуды однородной прецессии $x_0 = n_0/n_c$ и спиновых волн $x_1 = n_1/n_c$ от безразмерной мощности накачки $P = (h/h_{th})^2$ для процессов первого порядка. Штриховыми линиями обозначена область, в которой теория теряет силу

Рис. 22.2. Форма резонансной кривой при большом уровне мощности для процессов первого порядка $\epsilon^2 p = 2/3$

вает, что в пределе больших ξ амплитуда ОП растет по линейному закону

$$(x_0)^{1/2} = \frac{|\epsilon|(1+\delta^2)^{1/2}}{|1-\epsilon\delta|}\,\frac{\xi}{\xi_c},$$

причем вдали от резонанса, когда $(1-\epsilon\delta) \sim 1$, коэффициент пропорциональности близок к единице, т.е. по порядку величины такой же, как и в линейном режиме. Форма резонансной кривой ФМР становится понятной после тождественного преобразования (22.17) к виду

$$x_0 = \left[1 - \epsilon^2\left(\frac{\epsilon\xi^2 - \delta}{1-\epsilon\delta}\right)^2\right][1-(\epsilon\xi)^2]^{-1}. \tag{22.18}$$

Мы видим, что резонансное значение x_0 определяется формулой (22.16) и достигается при $\delta_{рез} = \epsilon\xi^2$, что соответствует условию ФМР за порогом. Резонансная кривая (22.16), изображенная на рис. 22.2, существенно отличается от нормальной кривой обычного ФМР. Полуширина кривой на половине высоты (справа и слева от резонанса) равна

$$\delta_\pm = \delta_{рез} \pm \delta_{1/2} = \pm\,[1-(\epsilon\xi)^2]/(\epsilon(\sqrt{2}\mp 1)),$$

так что отношение $\delta_+/\delta_- = -6$.

Нелинейная восприимчивость. Из (22.6) и (22.10) можно получить

$$\chi = 2Ua_0/h = 2U^2/(\tilde{\omega} - i\tilde{\gamma}). \tag{22.19}$$

В безразмерном виде

$$\chi' = \chi_0\,\frac{\tilde{\omega}}{\gamma}\,\frac{x_0}{\xi^2}, \quad \chi'' = \chi_0\,\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma_0}\,\frac{x_0}{\xi^2}, \tag{22.20}$$

где $\chi_0 = 2U^2/\gamma_0$ – резонансная восприимчивость ОП к поперечному СВЧ полю в линейном режиме. Рассмотрим теперь поведение нелинейных восприимчивостей вдали от резонанса ($\delta \gg 1$), т.е. в области *дополнительного*

поглощения. Из (22.17) и (22.20)

$$\chi'' = \chi_0(\xi^2 - \delta^2)^{1/2}/(\xi^2 \mid 1 - \epsilon\delta \mid), \quad \xi - \xi_c \gg \mid \epsilon \mid. \tag{22.21}$$

Отсюда, в частности, следует, что за порогом χ'' растет по линейному закону и достигает максимума:

$$\chi''_{\max} = \chi_0/(2\delta \mid 1 - \epsilon\delta \mid) \tag{22.22}$$

при $\xi = \sqrt{2}\delta \approx \sqrt{2}\xi_c$. Спад χ'' при больших превышениях согласно (22.22) происходит по закону ξ^{-1}. Вещественная часть нелинейной восприимчивости изменяется в существенно менее широких пределах. Из (22.16) и (22.20) получим

$$\chi' = (\chi_0/\delta)[1 + (1 - \delta^2/\xi^2)/(\epsilon\delta - 1)], \quad \xi - \xi_c \gg 1. \tag{22.23}$$

В теории, не учитывающей СВ – СВ-взаимодействия, $\epsilon = 0$ и χ' согласно (22.23) убывает до нуля как ξ^{-2}. Учет СВ – СВ-взаимодействия радикально изменяет этот результат: при больших превышениях $\chi' \to \chi_0\epsilon/\mid 1 - \epsilon\delta \mid$, т.е. восприимчивость по порядку величины такая же, как до порога. Этим объясняется то, что фазовые постоянные ферритовых СВЧ приборов практически не зависят от уровня мощности (А.Г. Гуревич [7]).

22.3. Процессы второго порядка. Поступая так же, как и в предыдущем разделе, из уравнений (22.3), (22.4) и (22.7) получим систему уравнений для определения стационарного режима процессов второго порядка:

$$\begin{aligned} &x_0^2 = 1 + c^2\gamma_1^2 x_1^2/\gamma_0^2, \quad (\tilde{\omega}^2 + \tilde{\gamma}^2)x_0 = \gamma_0^2\xi^2, \\ &(\tilde{\gamma}/\gamma_0) = 1 + (x_0^2 - 1)^{1/2}/(cx_0), \\ &\tilde{\omega} = \delta\gamma_0 + \gamma_1[2x_0(T_{00}/S_{01}) + 2(x_0^2 - 1)^{1/2}(T_{01}/S_{11}) - \\ &- (x_0^2 - 1)S_{11}/(S_{01}x_0)]. \end{aligned} \tag{22.24}$$

Здесь x_0 и x_1 по-прежнему означают безразмерные амплитуды n_0/n_c и

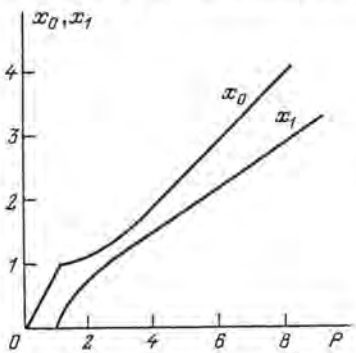


Рис. 22.3. Зависимость амплитуд однородной прецессии x_0 и спиновых волн x_1 от безразмерной мощности накачки $P = h^2/h_{th}^2$ для процессов второго порядка

N_1/n_c, только теперь пороговая амплитуда $n_c = \gamma_1/\mid S_{01} \mid$ и вместо малого параметра ϵ в уравнениях стоит коэффициент $c = \gamma_0 S_{11}/\gamma_1 S_{01} \approx 1$. Последнее обстоятельство определяет глубокое различие между процессами первого и второго порядков.

Зависимость резонансной амплитуды x_0 от ξ определяется уравнением

$$cx_0 + (x_0^2 - 1)^{1/2} = c(x_0)^{1/2}\xi. \tag{22.25}$$

Если не учитывать СВ – СВ-взаимодействие, то $c = 0$ и $x_0^2 = 1$. В действительности же "замораживания" ОП не происходит и уже при малых $\xi - 1$ амплитуда x_0 заметно отличается от единицы:

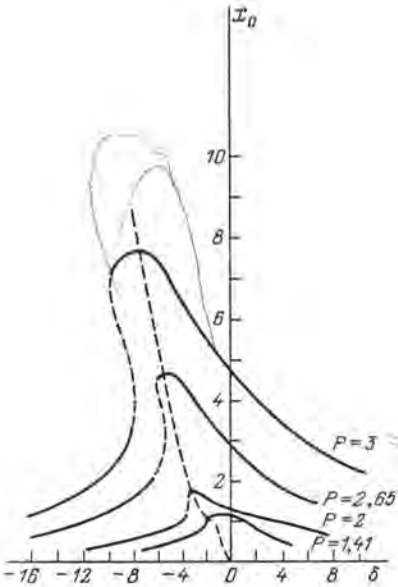
$$x_0^2 = 1 + \tfrac{1}{2} c^2 (\xi - 1) \text{ при } \xi - 1 \lesssim 1. \tag{22.26}$$

Отсюда видно, что не учитывать СВ – СВ-взаимодействие можно только вблизи самого порога, когда $(\xi - 1) \ll c^{-1} \approx 1$. Для процессов первого порядка соответствующее условие выполняется в значительно более широком интервале накачки: $(\xi - 1) \ll \epsilon^{-1} \approx 10^3 \div 10^4$. При больших превышениях ($\xi \gg 1$)

$$x_0 = [c\xi/(c+1)]^2 + (c+1)/(c^2 \xi^2). \tag{22.27}$$

Зависимости $x_0(\xi)$, $x_1(\xi)$ показаны на рис. 22.1. На рис. 22.3 приведены вычисленные с помощью ЭВМ по формулам (22.24) нелинейные резонансные кривые $x_0(\delta)$ при различных амплитудах ξ внешнего поля.

22.4. Сравнение с экспериментальными результатами. В эксперименте А.Г. Гуревича и С.С. Старобинца [73] при неустойчивости второго порядка наблюдается сильный рост амплитуды ОП за порогом, что можно рассматривать как качественное подтверждение механизма СВ – СВ-взаимодействия. Наблюдаемая при больших ξ форма резонансной кривой обычно имеет значительно более сложный вид, чем на рис. 22.4. На кривой имеются



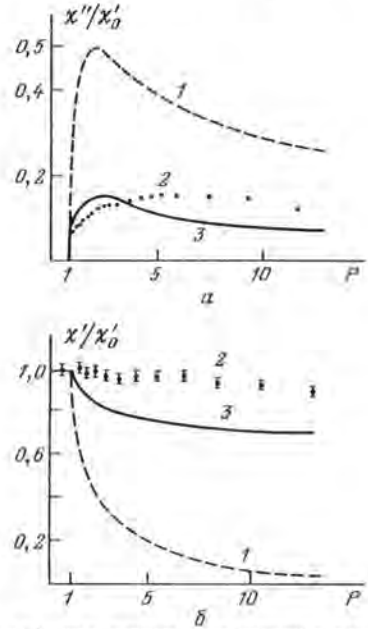


Рис. 22.4. Нелинейные резонансные кривые $x_0(\delta)$ при разных надкритичностях. Участки с отрицательным наклоном неустойчивы

Рис. 22.5. Сравнение теоретических и экспериментальных зависимостей нелинейных восприимчивостей $\chi''(a)$ и $\chi'(б)$ от мощности накачки $P = h^2/h_{th}^2$: *1* – теория Сула ($\epsilon = 0$); *2* – эксперимент; *3* – теория ($\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$)

провалы, при некоторых расстройках δ наблюдаются автоколебания. По нашему мнению, их происхождение связано с потерей устойчивости. Это подтверждено численным экспериментом с уравнениями S-теории В.И. Закайдаковым и С.Л. Мушером. Подробно вопрос об автоколебаниях будет изучен в гл. 5 для более простой ситуации – параллельной накачки СВ в кубических ФМ.

Сравним полученные результаты с измерениями А.Г. Гуревича и С.С. Старобинца [73] нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' в зависимости от амплитуды накачки ξ при неустойчивости первого порядка, когда ОП не находится в резонансе: $\delta \gg 1$ (рис. 22.5). На этом же рисунке приведены теоретические зависимости, вычисленные по формулам (22.21) и (22.23). Входящий в уравнения теории параметр ϵ был определен из условия равенства экспериментального и теоретического значений $\chi''_{\max}$. Оказалось, что $\epsilon \approx \approx 3 \cdot 10^{-4}$, что по порядку величины хорошо совпадает с теоретической оценкой (см. формулу (22.22)). Несмотря на столь малое значение, его учет (т.е. учет СВ – СВ-взаимодействия) оказывает существенное влияние на характер зависимостей $\chi'(\xi)$, $\chi''(\xi)$. Для сравнения на рис. 22.5 приведены теоретические зависимости для случая $\epsilon = 0$, соответствующие теории, учитывающей только СВ – ОП-взаимодействие.

Задачи

Задача 4.1. Исследовать основное состояние системы ПСВ, в котором возбуждены две группы пар.

Указание. Для простоты предположить, что местоположение первой и второй групп пар не зависит от надкритичности. Тогда в выражения для $N_1(h)$, $N_2(h)$ будут входить только величины $\gamma_1, \gamma_2, V_1, V_2, S_{11}, S_{22}$ и S_{21}. При анализе этих выражений полезно вычислить производные $\partial N_1/\partial h$, $\partial N_2/\partial h$ слева и справа от второго порога $h = h_2$. Особое внимание нужно уделить случаю $S_{11} \to 0$, при котором $h_2 \to h_{\text{th}}$.

Задача 4.2. Обобщить S-теорию на "несимметричный" случай, когда параметрически возбуждаются разные типы волн: $\omega_p = \omega_k + \Omega_{-k}$, например, звук и магноны, электронные и ядерные магноны и т.п.

Указание. Выписать диагональный по парам гамильтониан взаимодействия, получить уравнения для $N_k = \langle |b_k|^2 \rangle$, $n_k = \langle |a_k|^2 \rangle$ и $\sigma_k = \langle a_k b_{-k} \rangle$, сформулировать условие внешней устойчивости и получить простейшие решения этих уравнений. Результаты можно сравнить с работой В.С. Львова, А.М. Рубенчика [154], посвященной параметрическому возбуждению ленгмюровских волн и ионного звука в неизотермической плазме.

Ответ. Уравнения "несимметричной" S-теории:

$$\left(\frac{d}{2dt} + \gamma_k\right) n_k + \operatorname{Im} P_k^* \sigma_k = 0, \qquad \left(\frac{d}{2dt} + \Gamma_k\right) N_k + \operatorname{Im} P_k^* \sigma_k = 0,$$
$$\left[\left(\frac{d}{dt} + \gamma_k + \Gamma_k\right) + i(\tilde{\omega}_k + \Omega_k - \omega_p)\right] \sigma_k + iP_k[n_k + N_k] = 0. \tag{22.28}$$

Здесь

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\sum_{k'} (T^{aa}_{kk'} n_{k'} + T^{ab}_{kk'} N_{k'}),$$

$$\tilde{\Omega}_k = \tilde{\Omega}_k + 2\sum_{k'} (T^{ba}_{kk'} n_{k'} + T^{bb}_{kk'} N_{k'}), \quad P_k = hV_k + \sum_{k'} S_{kk'} \sigma_{k'}. \tag{22.29}$$

Соотношения, обобщающие формулы (18.18):

$$\frac{d}{2dt}(n_k - N_k) + (\gamma_k n_k - \Gamma_k N_k) = 0,$$
$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma_k + \Gamma_k\right)(n_k N_k - |\sigma_k|^2) = 0. \tag{22.30}$$

Условие внешней устойчивости:

$$\widetilde{\omega}_k + \widetilde{\Omega}_k = \omega_p. \tag{22.31}$$

Задача 4.3. Обобщить S-теорию на случай, когда накачкой служит плоская волна:

$$\omega_p(k) = \omega(k/2 + k') + \omega(k/2 - k').$$

Указание. Действовать по схеме, предложенной в задаче 4.2. Убедиться, что ответ совпадает с формулами (22.28) – (22.31), если положить

$$n_k \equiv \langle a_{k_p/2+k} a^*_{k_p/2+k} \rangle,$$
$$N_k \equiv \langle a_{k_p/2-k} a^*_{k_p/2-k} \rangle, \tag{22.32}$$
$$\sigma_k \equiv \langle a_{k_p/2+k} a_{k_p/2-k} \rangle$$

и сделать соответствующую замену в матричных элементах гамильтониана взаимодействия.

Задача 4.4. В приближении S-теории попытаться исследовать случай, когда матричные элементы гамильтониана взаимодействия $T_{k1,23}$ не являются непрерывными функциями своих аргументов, например,

$$\lim_{\kappa \to 0} T_{k,\, k'+\kappa,\, k+\kappa,\, k'} \neq T_{kk',\, kk'}.$$

Это может быть вызвано существованием дальнодействующих взаимодействий в системе, например магнитного дипольного взаимодействия в ФМ.

Пожелание. Хорошо бы понять, является ли в этом случае стационарное распределение СВ сингулярным по $|k|$? Если да, то как выглядит условие внешней устойчивости; если нет, то что его заменяет? После ответа на эти вопросы можно найти стационарные решения полученных уравнений и опубликовать результаты.

Задача 4.5. Используя уравнение Фоккера – Планка, получить выражение для стационарной функции распределения ПВ в приближении S-теории.

Ответ (А.С.Михайлов [178]):

$$\Phi_k = z_k^{-1} \exp\left\{-\frac{2\gamma_k}{\alpha_k}\left[(a_k^+ a_k + a^*_{-k} a_{-k}) + 2\, I_m\left(\frac{P^*_k}{-i\widetilde{\omega}_k + \gamma_k} a_k a_{-k}\right)\right]\right\},$$
$$\alpha_k = \frac{2T\gamma_k}{\hbar\omega_k}. \tag{22.33}$$

Задача 4.6. Используя функцию распределения пар (22.33) вычислить среднее значение $A^*_k A_k$, $A_k A_{-k}$ и дисперсию этих величин. Убедиться, что этот же ответ получится, если обычным образом распределить четверные средние через всевозможные произведения парных.

ГЛАВА 5

КОЛЛЕКТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДЕННЫХ ВОЛН

В предыдущей главе описано стационарное состояние системы параметрически возбужденных волн. Малые колебания относительно этого состояния будут изучены в этой главе.

§ 23. Спектр пространственно-однородных коллективных колебаний – элементарная теория

23.1. Спектр коллективных колебаний в бездиссипативном пределе $\gamma = 0$. Если затухание СВ γ равно нулю, то гамильтониан системы $\mathcal{H}$ является интегралом движения. Пусть значение $\mathcal{H}$ в возмущенном состоянии не совпадает с его значением $\mathcal{H}_0$ в основном состоянии. Это означает, что система никогда не сможет прийти в основное состояние и, поскольку других устойчивых стационарных состояний у нее нет, ее поведение будет существенно нестационарным. Для того чтобы выяснить характер этой нестационарности, найдем частоты (спектр) коллективных колебаний (КК) системы ПСВ.

Имея в виду сравнение теории с экспериментом, рассмотрим для определенности кубический ФМ при надкритичности ниже второго порога, когда в основном состоянии ПСВ возбуждены в плоскости экватора. Обозначая через α_k отклонения комплексных амплитуд b_k от основного состояния, выделим в гамильтониане S-теории (18.1) часть $\mathcal{H}_0$, соответствующую основному состоянию, и части $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, содержащие линейные и квадратичные по α_k члены. Учитывая уравнения движения, убеждаемся в экстремальности энергии основного состояния: $\mathcal{H}_1 = 0$. Квадратичная по малым возмущениям часть гамильтониана после перехода от суммирования к интегрированию принимает вид

$$(2\pi)^2\mathcal{H}_2 = N_1\{2\int[S_{\varphi\varphi'}\exp[-i(\varphi-\varphi')] + T_{\varphi\varphi'}\exp i(\varphi-\varphi')]\,\alpha_\varphi\alpha^*_{\varphi'}\,d\varphi d\varphi' +$$
$$+ [\exp(i\psi_1)\int(T_{\varphi\varphi'}\exp[-i(\varphi+\varphi')\alpha_\varphi\alpha_{\varphi'}] + \text{к.с.})\,d\varphi d\varphi']\}, \tag{23.1}$$

где $T_{\varphi\varphi'} = T_{kk'}$, при $\theta = \theta' = \pi/2$, $|k| = |k'| = |k_0|$. Переходя к фурье-компонентам и используя аксиальную симметрию, получим

$$\mathcal{H}_2 = N_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} [2(T_m + S_m)\alpha_m\alpha^*_m + (T_m\alpha_m\alpha_{-m} + \text{к.с.})], \tag{23.2}$$

$$2\pi T_m = \int_0^{2\pi} T(\varphi-\varphi')\exp[-im(\varphi-\varphi')]\,d(\varphi-\varphi'),$$
$$2\pi S_m = \int_0^{2\pi} S(\varphi-\varphi')\exp[-i(m-2)(\varphi-\varphi')]\,d(\varphi-\varphi'). \tag{23.3}$$

Гамильтониан (23.1) может быть диагонализован линейным каноническим преобразованием к виду

$$\mathcal{H}_2 = \sum_m \Omega_m \beta_m^* \beta_m . \tag{23.4}$$

Это преобразование возможно, если частота КК Ω_m в системе ПСВ вещественна. При $S_m(2T_m + S_m) < 0$ эта частота оказывается мнимой, что указывает на неустойчивость основного состояния относительно возбуждения экспоненциально нарастающих колебаний (внутренняя неустойчивость, упомянутая ранее).

Каноническое преобразование однозначно определяет знак частоты КК в (23.4). Впрочем, этот знак можно найти из простых соображений. Именно при $|T_m| \ll |T_m + S_m|$ знак Ω_m, очевидно, совпадает со знаком $(S_m + T_m)$. При непрерывном увеличении T_m знак Ω_m в силу непрерывности канонического преобразования сохраняется и может измениться лишь после обращения Ω_m в нуль. Отрицательность Ω_m означает, что в результате возбуждения КК энергия системы ПСВ уменьшается. При этом в процессе их релаксации энергия системы возрастает. Это не противоречит закону сохранения энергии, так как система ПСВ получает энергию от накачки.

В кубическом ФМ в симметричных направлениях [111] и [100] величины S_m и T_m отличны от нуля только при $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Выражения для коэффициентов S_m, T_m, соответствующих этим модам, можно получить из (6.26), (6.27) и (23.2):

$$S_0 = 2\pi g^2 (\omega_m/\omega_p)^2 \{[1+(\omega_p/\omega_m)^2]^{1/2} + \widetilde{N}_{z0} - 1\},$$

$$T_0 = S_0 + 2\pi g^2 (\widetilde{N}_{z0} - 1),$$

$$\widetilde{N}_{z0} = N_z + \beta\omega_p/\omega_m, \qquad \beta = \begin{cases} -8, & \boldsymbol{M} \parallel [111], \\ 9, & \boldsymbol{M} \parallel [100], \end{cases}$$

$$S_1 = S_{-1} = 0, \tag{23.5}$$

$$T_1 = T_{-1} = \tfrac{1}{2}(T_2 + T_{\bar{2}} + T_0 - S_0 - S_2 - S_{\bar{2}}),$$

$$T_{\pm 2} = \tfrac{1}{2}\pi g^2 (\omega_m/\omega_p)^2 [(\widetilde{N}_{zz} - 1)u_\pm^2 + (1+(\omega_p/\omega_m)^2)^{1/2}],$$

$$S_{\pm 2} = 2\pi g^2 [(N_{zz} - 1)u_\pm^2 + u_\pm \omega_m/2\omega_p],$$

$$u_\pm = \tfrac{1}{2}[(1+(\omega_m/\omega_p)^2]^{1/2} \mp 1), \quad \widetilde{N}_{zz} = \omega_{ex}(ka)^2 + \beta\omega_a/\omega_p.$$

Формулы (23.5) показывают зависимость частот КК от условий эксперимента: надкритичности, частоты накачки, намагниченности, внешнего магнитного поля, формы образца и кристаллографической анизотропии. Для АФМ ЛП из формул (7.13) видно, что $S_0 = T_0$, а остальные S_m и T_m равны нулю. Отсюда, в частности, следует устойчивость основного состояния, наблюдающаяся в экспериментах Б.Я.Котюжанского и Л.А.Прозоровой [125], Л.А.Прозоровой и А.И.Смирнова [200] вплоть до очень большой надкритичности.

23.2. Как влияет затухание спиновых волн на спектр КК? Этот вопрос очень важен особенно потому, что величина затухания СВ γ_k может быть одного порядка с частотой Ω_m. Линеаризуя уравнения (18.11) относительно возмущения на фоне основного состояния (19.6) и, полагая α, $\alpha^* \sim \exp(-i\Omega t)$, получим систему однородных по α, α^* алгебраических уравнений. Условие их разрешимости определяет частоту и затухание КК:

$$\Omega_m = -i\gamma \pm [4S_m(2T_m + S_m)N_1^2 - \gamma^2]^{1/2}. \tag{23.6}$$

Отсюда следует важный вывод о том, что критерий возникновения внутренней неустойчивости на m-й коллективной моде не зависит от величины затухания и определяется, как и в консервативном случае, неравенством

$$S_m(2T_m + S_m) < 0. \tag{23.7}$$

В рамках изложенной выше элементарной теории КК системы ПСВ являются пространственно-однородными. При учете пространственной дисперсии каждой нормальной моде соответствует целая ветвь $\Omega_m(\vec{\kappa})$, причем формулой (23.6) определяется ее щель. Зависимость $\Omega_m(\vec{\kappa})$ мы вычислим в следующем параграфе.

§ 24. Пространственно-неоднородная S-теория

До сих пор при описании нелинейного поведения ПСВ мы предполагали, что статистические свойства волнового поля являются пространственно-однородными. На языке корреляционных функций это означает, что $\langle a_k^*, a_k \rangle \sim \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$ и $\langle a_k a_{-k'} \rangle \sim \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$. Если же отказаться от этого предположения и допустить, что в сравнении с длиной волны пространственная неоднородность плавная, то величины

$$n_{kk'} \equiv \langle a_{k'}^* a_k \rangle, \quad \sigma_{kk'} = \langle a_k a_{-k'} \rangle \tag{24.1}$$

уже не будут пропорциональны $\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$: по $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$ они будут сосредоточены в узком слое шириной $1/L$, где L – характерный пространственный размер неоднородности. В этом параграфе мы получим и проанализируем уравнения S-теории для $n_{kk'}$ и $\sigma_{kk'}$ в случае плавной неоднородности.

24.1. Основные уравнения. Для того чтобы получить уравнения S-теории для корреляторов (24.1), вычислим производные

$$\frac{\partial n_{kk'}}{\partial t} = \left\langle a_k \frac{\partial a_{k'}^*}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a_k}{\partial t} a_{k'}^* \right\rangle. \tag{24.2}$$

Так же, как и при выводе основных уравнений пространственно-однородной S-теории (18.6), мы используем динамические уравнения движения (16.2) и "расщепим" четверные корреляторы через парные по правилу, обобщающему (18.7):

$$\begin{aligned}
&\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle = n_{31} n_{42} + n_{41} n_{32} + \sigma_{1\bar{2}}^* \sigma_{3\bar{4}}, \\
&\langle a_1^* a_2 a_3 a_4 \rangle = n_{21} \sigma_{3\bar{4}} + n_{31} \sigma_{2\bar{4}} + n_{41} \sigma_{2\bar{3}}, \\
&\langle a_1^* a_2^* a_3^* a_4 \rangle = n_{41} \sigma_{2\bar{3}}^* + n_{42} \sigma_{1\bar{3}}^* + n_{43} \sigma_{1\bar{2}}^*, \\
&n_{13} \equiv n(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_3), \quad \sigma_{1\bar{2}} \equiv \sigma(\boldsymbol{k}_1, -\boldsymbol{k}_2).
\end{aligned} \tag{24.3}$$

В результате из (24.2) следует

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + \gamma_{k'} + i(\omega_k - \omega_{k'})\right] n_{kk'} =$$

$$= -i \sum_{1,2,3} \{ T_{k1,23}(n_{2k'} n_{31} + n_{3k'} n_{21} + \sigma^*_{1\bar{k}'} \sigma_{23\bar{3}}) \Delta(k+1-2-3) -$$

$$- T_{23,k'1}(n_{k2} n_{13} + n_{k3} n_{12} + \sigma_{k\bar{1}} \sigma^*_{23\bar{3}}) \Delta(k'+1-2-3)\},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + \gamma_{k'} + i(\omega_k + \omega_{k'} - \omega_p)\right] \sigma_{kk'} = \tag{24.4}$$

$$= -i \sum_{1,2,3} \{ T_{k1,23}(n_{k'1} \sigma_{23\bar{3}} + n_{21} \sigma_{3k'} + n_{31} \sigma_{2k'}) \Delta(k+1-2-3) +$$

$$+ T_{\bar{k}'1,23}(n_{k1} \sigma_{23\bar{3}} + n_{21} \sigma_{k3\bar{3}} + n_{31} \sigma_{k\bar{2}}) \Delta(-k'+1-2-3)\}.$$

Далее, для простоты мы предположим, что пространственная однородность одномерна (вдоль оси z). Тогда

$$n_{kk'} = n(k_\perp, k_z, k'_z)\, \delta(k_\perp - k'_\perp),$$

$$\sigma_{kk'} = \sigma(k_\perp, k_z, k'_z)\, \delta(k_\perp - k'_\perp). \tag{24.5}$$

Учитывая, что при фиксированном $k_\perp$ пакеты $n_{k_\perp}(k_z, k'_z)$ и $\sigma_{k_\perp}(k_z, k'_z)$ сосредоточены в узком слое: $\Delta k_z \ll k$, можно в (24.4) разложить $\omega(k_\perp, k_z)$ в ряд по $k_z - k_z^0$ (k_z^0 — центр пакета: $k_z^0 = f(k_\perp)$) и пренебречь зависимостью $T_{12,34}(k_z - k_z^0)$. Полученные уравнения упрощаются после перехода в r-представление по координате z:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_k + v_k\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\right) + i\tilde{\omega}_k(z) - i\tilde{\omega}_k(z')\right] n_k(z, z') +$$

$$+ i\,[\sigma^*_{-k}(z, z') P_k(z', z') - P_k^*(z, z)\, \sigma_k(z', z)] = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_k + v_k\left(\frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial z}\right) + i\tilde{\omega}_k(z) + i\tilde{\omega}_k(z') - i\omega_p\right] \sigma_k(z', z) + \tag{24.6}$$

$$+ i\,[P_k(z', z')\, n_{-k}(z', z) + P_{-k}(z, z)\, n(z, z')] = 0.$$

Здесь

$$(2\pi)^3 n_k(z, z') = \int n_{k_\perp}(k_z, k'_z) \exp i\,[k_z z - k'_z z' - k_z^0(z - z')]\, dk_z dk'_z,$$

$$\tilde{\omega}_k(z) = \omega_k + 2\int T_{kk'} n_{k'}(z, z)\, dk'_\perp,$$

$$P_k(z, z') = h V_k + \int S_{kk'} \sigma_{k'}(z', z)\, dk', \tag{24.7}$$

$$(2\pi)^3 \sigma_k(z', z) = (2\pi)^3 \sigma_{-k}(z, z') =$$

$$= \int \sigma_{k_\perp}(k_z, k'_z) \exp i\,(k_z z - k'_z z' - k_z^0(z - z'))\, dk_z dk'_z,$$

$$v_k = \partial\omega_k/\partial k_z,\ \omega'' = \partial^2\omega_k/\partial k_z^2,$$

$$T_{kk'kk'} \equiv T_{kk'},$$

$$T_{k\bar{k}, k'\bar{k}'} = S_{kk'}.$$

Для простоты мы отбросили несущественные, как правило, члены с антиэрмитовыми частями S и T, а также дифракционные члены, пропорциональные ω''.

В пространственно-однородном случае уравнения (24.7) переходят в основные уравнения S-теории. Если амплитуда накачки h медленно (по сравнению с длиной волны k^{-1}) изменяется в пространстве, то в (24.6) h зависит от z. Существенно, что приведенные здесь уравнения допускают факторизованное решение вида

$$n_k(z, z') = A_k^*(z) A_k(z'), \quad \sigma_k(z, z') = A_k(z') A_{-k}(z), \tag{24,8}$$

где $A_k(z)$ удовлетворяет уравнению, обобщающему (18.11):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + v_k \frac{\partial}{\partial z} + i(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)\right] A_k + iP_k A_{-k}^* = 0,$$

$$P_k = hV_k + \int S_{kk'} A_{k'} A_{-k'} dk', \quad \tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\int T_{kk'} |A_{k'}|^2 dk'. \tag{24.9}$$

Подчеркнем, что уравнения (24.6), полученные в приближении самосогласованного поля, не содержат стохастизирующих факторов и именно поэтому допускают динамическое решение (24.9). Если же есть внешние причины для стохастизации, например, за счет начальных или граничных условий, то поведение волн будет описываться решениями уравнений (24.6) более общего вида.

24.2. Спектр коллективных колебаний $\Omega(\vec{\kappa})$. Для того чтобы найти $\Omega(\vec{\kappa})$, необходимо линеаризовать уравнения (24.9) на однородном фоне: $A_k(z) = A_k^0 + b_k(z)$ и отыскивать их решение в виде $b_k(z)$, $b_k^*(z) \sim \exp(i\kappa r - i\Omega t)$. Приведем результаты в двух простых, но важных случаях.

Изотропная модель: $S_{kk'} = S$, $T_{kk'} = T$, $V_k = V$. Этот случай характерен для АФМ ЛП. Зависимость частоты КК от их волнового вектора определяется дисперсионным уравнением

$$\Delta^2 (\Omega + 2i\gamma)\Omega \int_0^{2\pi} [(\kappa v)^2 \cos^2\varphi + \Omega(\Omega + 2i\gamma)]^{-1} d\varphi = 4\pi^2, \tag{24.10}$$

в котором Δ задается формулой (23.6) при $\gamma = 0$. Для $(\kappa v) \ll \Delta$ решение (24.10) имеет вид

$$\Omega(\kappa) = -i\gamma \pm [\Delta^2 + (\kappa v)^2 - \gamma^2]^{1/2}. \tag{24.11}$$

При $\kappa = 0$ (24.11) переходит в выражение для частоты пространственно-однородных КК, изученных нами в предыдущем параграфе. При отрицательных Δ^2 развивается неустойчивость. Наиболее неустойчивы колебания $\kappa = 0$, область неустойчивости простирается до $\kappa v = \Delta/2$, при $\Delta^2 > 0$ стационарное решение устойчиво при всех κ. *Аксиально-симметричная* модель. Изучим спектр КК $\Omega(\kappa)$ в важном для экспериментов в ФМ случае, когда амплитуда волн отлична от нуля на широтах $\theta = \theta_0$ и $\theta = \pi/2 - \theta_0$. В кубических ФМ при параллельной накачке при надкритичности до 6÷8 дБ $\theta = \pi/2$ (экватор), при поперечной накачке часто реализуется случай $\theta = \pi/4$. Наиболее просто выглядит зависимость $\Omega(\vec{\kappa})$ в случае, когда $\vec{\kappa}$ параллельно оси

симметрии. Для каждой гармоники с номером m можно получить

$$\Omega_{m1\pm}(\kappa) = -i\gamma \pm [\delta_{m1}^2 - \gamma^2]^{1/2}, \; \Omega_{m2\pm}(\kappa) = -i\gamma \pm [\delta_{m2}^2 - \gamma^2]^{1/2},$$

$$\delta_{m1,2}^2 = (\kappa v)^2 + \tfrac{1}{2}[\Delta_{m1}^2 + \Delta_{m2}^2] \pm$$

$$\pm [\tfrac{1}{4}(\Delta_{m1}^2 - \Delta_{m2}^2)^2 + (\kappa v)^2 (\Delta_{m1}^2 + \Delta_{m2}^2 + \Delta_m^2)]^{1/2}, \tag{24.12}$$

$$\Delta_m^2 = 4(T_m^+ - T_m^-)(T_m^+ + T_m^- + S_m)N^2,$$

$$\Delta_{m1}^2 = [\tfrac{1}{2}\omega''\kappa^2 + (2S_m + T_m^+ + T_m^-)N]^2 - (T_m^+ + T_m^-)^2 N^2,$$

$$\Delta_{m2}^2 = [\tfrac{1}{2}\omega''\kappa^2 + (T_m^+ - T_m^-)N]^2 - (T_m^+ - T_m^-)^2 N^2.$$

Здесь $T_m^\pm$, S_m — фурье-гармоники коэффициентов $T(k_z, k_z, (\varphi - \varphi'))$, $S[k_z', k_z(\varphi - \varphi')]$ уравнения (24.9). При $\delta_{m1,2}^2(\kappa) > 0$ выражения (24.12) соответствуют КК с частотой $\pm\delta_{m1,2}$ и декрементом затухания γ, равным декременту затухания СВ при $\delta_{m1,2}^2(\kappa) < 0$: $\operatorname{Im}\Omega > 0$. Это соответствует экспоненциальному росту КК — неустойчивости пространственно-однородного распределения ПСВ.

Проанализируем полученные выражения (24.12) для частот КК. При $\kappa = 0$

$$\delta_{m1}^2(0) = \Delta_{m1}^2(0) = 4S_p(T_p^+ + T_p^- + S_p)N^2. \tag{24.13}$$

Это выражение для частоты пространственно-однородных колебаний получено в предыдущем параграфе. Колебание $\Omega_m(0)$ устойчиво, если $S(T_m^+ + T_m^- + S_m) > 0$. Колебание Ω_{m2} безразлично устойчиво. При малых κv имеем

$$\delta_{m1}^2(\kappa) = \delta_{m1}^2(0) + (\kappa v)^2(2S_m + T_m^+ - T_m^-)/S_m,$$

$$\delta_{m2}^2(\kappa) = (\kappa v)^2(T_m^- - T_m^+)/S_m. \tag{24.14}$$

Таким образом, если $S_m(T_m^+ - T_m^-) < 0$, становится неустойчивой ветвь КК $\delta_{m2}(\kappa)$ при $\kappa \neq 0$. При этом с ростом κ увеличивается запас устойчивости и ветви δ_{m1}. Полагая $\Delta_{m1}^2 > 0$, $\Delta_m^2 > 0$, находим, что ветвь δ_{m1} устойчива при любых κv, а область неустойчивости δ_{m2} заключена между $\kappa = 0$ и $\kappa = \kappa_0$, где $(\kappa_0 v) = \Delta_m^2$. В кубических ФМ может оказаться, что $\kappa v = 0$. Это происходит, если волны возбуждены на экваторе, а возмущение перпендикулярно его плоскости, или когда из-за анизотропного закона дисперсии групповая скорость для возбужденных волн $v(\theta)$ обращается в нуль для $\theta = \theta_0$. В этом случае (24.12) упрощается и принимает вид

$$\Omega_{m\pm}(\kappa) = -i\gamma \pm \{[2(T_m + S_m)N + \tfrac{1}{2}\omega''\kappa^2]^2 - 4T_m^2N^2 - \gamma^2\}^{1/2}. \tag{24.15}$$

Для простоты мы положили $T^+ = T^- = T$. Это соотношение всегда выполняется, например, для волн, возбужденных на экваторе. При этом вторая ветвь колебаний δ_{m2} всегда устойчива. Из выражения (24.15) видно, что, даже если $\delta_{m1}^2(0) > 0$, возможно возникновение неустойчивости в области $\omega''\kappa^2 \approx 4(T_m + S_m)N$, если $\omega''(T_m + S_m) > 0$. Как будет показано ниже, развитие неустойчивости с $\kappa = 0$ приводит к возникновению автоко-

лебаний интегральной амплитуды волн. При параметрическом возбуждении СВ в ФМ экспериментально они проявляются как автоколебания намагниченности. В кубических ФМ знак ω'' зависит от напряженности внешнего поля, и легко создать ситуацию, когда пространственно-однородные колебания устойчивы, а неустойчивость локализована в области $\omega''\kappa^2 \sim SN$. В результате развития этой неустойчивости может возникнуть стационарная, пространственно-однородная картина $A_k(z)$ с масштабом $(SN/\omega'')^{1/2}$, глубиной модуляции порядка единицы и средним уровнем порядка N. Возникает интересная и до сих пор не решенная задача нахождения таких стационарных состояний и исследования их устойчивости в рамках уравнений (24.9). Интересно попытаться также обнаружить это явление экспериментально.

24.3. Замечание к S-теории в ограниченном образце. Очевидно, что в глубине достаточно большого образца реализуется решение S-теории, а на границе амплитуда отлична от него. Поэтому большой интерес представляет вопрос о характере приближения решения $A(z)$ к однородному распределению S-теории. Очевидно, что получающиеся уравнения идентичны уравнениям (24.9), изученным в задаче о КК, если положить там $\partial/\partial t = 0$. Поэтому дисперсионное уравнение для κ получаем непосредственно из (24.12), полагая $\Omega(\kappa) = 0$:

$$\delta^2_{m1,2}(\kappa) = 0, \ \delta A(z) \sim \exp i\kappa z. \tag{24.16}$$

Поскольку $\delta^2_{m1,2}$ как функции κ являются полиномами, выход на асимптотику S-теории носит экспоненциальный характер. Определим характерные масштабы выхода на однородное решение.

За исключением случая, когда волны распространяются параллельно границам образца, можно пренебречь в (24.16) членами с $\omega''\kappa^2$. Тогда (24.16) упрощается до вида

$$(\kappa v)^2 = \Delta^2_m = 4(T^+_m - T^-_m)(T^+_m + T^-_m + S_m)N^2. \tag{24.17}$$

Выход на однородное решение происходит лишь при $\Delta^2_m < 0$, т.е. когда оказывается устойчивой мода δ_{m2}. Если же волны распространяются параллельно границе ($\kappa v = 0$ и $T^+ = T^-$), то дисперсионное уравнение для κ получается, если положить равными нулю $\Omega(\kappa)$ в формуле (24.15):

$$[2(T+S)N + \tfrac{1}{2}\omega''\kappa^2]^2 = 4T^2N^2. \tag{24.18}$$

Отрицательные κ^2 являются решением этого уравнения только в том случае, если $S(2T+S) > 0$, $\omega''(T+S) > 0$. Мы видим, что эти требования совпадают с условиями устойчивости основного состояния. Таким образом, экспоненциальная асимптотика выхода на однородное решение S-теории тесно связана с устойчивостью основного состояния относительно коллективных возбуждений. Именно в устойчивом случае существуют только комплексные решения уравнения $\Omega_p(\kappa)$. Если же основное состояние неустойчиво относительно пространственно-неоднородных возмущений, то, как уже отмечалось выше, кроме однородного существуют квазипериодические распределения колебаний со средним уровнем SN. В этом случае действительные κ, полученные из (24.17), (24.18), означают, что мы нашли простейшие решения такого типа.

§ 25. Резонансное возбуждение коллективных колебаний малой амплитуды – теория и эксперимент

Рассмотренные выше КК системы ПСВ можно возбуждать (так же, как и колебания любой другой природы) различными способами – с помощью резонансного внешнего воздействия, параметрически или ударным образом. И все эти способы возбуждения были реализованы в экспериментах на ФМ и АФМ ЛП. Проще всего построить теорию и интерпретировать экспериментальные данные для резонансного способа возбуждения КК. Именно таким образом в 1972 г. и были обнаружены и исследованы КК В.В. Зауткиным, В.С. Львовым и С.С. Старобинцем [85]. В этой работе на образец ЖИГ, помимо параллельной накачки, подавался другой СВЧ сигнал с той же поляризацией $\boldsymbol{h}_z \parallel \boldsymbol{h} \parallel \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{h}_z(t)\exp(-i\omega t)$, частота которого ω отличалась от частоты накачки ω_p на частоту КК Ω. При этом роль резонансной внешней силы играли биения между двумя СВЧ сигналами на резонансной частоте. Впоследствии в 1975 г. Б.И. Орлом и С.С. Старобинцем [194] был реализован прямой резонансный метод возбуждения с помощью переменного магнитного поля на частоте КК, которая лежит в радиочастотном диапазоне (порядка 1 МГц). В принципе КК можно возбуждать и звуком, частота и волновой вектор которого совпадают с частотой и волновым вектором КК. Все эти методы возбуждения КК и будут рассмотрены в настоящем параграфе.

25.1. Исходные уравнения и их решение в линейном приближении. Интересуясь поведением только пространственно-однородных КК нулевой моды ($\kappa = 0$, $m = 0$), мы усредним уравнения движения S-теории (18.11) по всем направлениям $\boldsymbol{k}$ в пакете ПСВ:

$$[\partial/\partial t + \gamma + i(\omega_k - \omega_p/2 + 2T_0 c^* c)]\, c + i(hV_0 + S_0 c^2)\, c^* = -if(t), \quad (25.1)$$

$$f(t) = f_\Omega \exp(-i\Omega t) + f_{\overline{\Omega}} \exp i\Omega t. \quad (25.2)$$

Здесь $|c^2| = N$ – интегральное число ПСВ в пакете, V_0, T_0 и S_0 – усредненные по пакету коэффициенты гамильтониана задачи. Для кубических ФМ они задаются формулами (23.5), для АФМ ЛП – формулами (7.13). В первую часть (25.1) добавлена периодическая сила $f(t)$, природу которой мы сейчас конкретизируем.

а) В случае, когда на систему ПСВ действует дополнительный слабый сигнал на частоте ω (см. задачу 5.3),

$$f_\Omega = h_z V_0 c_0^*, \quad f_{\overline{\Omega}} = 0, \quad \Omega = \omega - \omega_p. \quad (25.3)$$

б) Если частота слабого сигнала Ω лежит в радиочастотном диапазоне, то (см. задачу 5.3)

$$f_\Omega = f_{-\Omega} = U_0 c_0 h_z, \quad U_0 = g(1 + \omega_M^2/\omega_p^2). \quad (25.4)$$

Выражение для U_0 соответствует кубическому ФМ, когда ПСВ сосредоточены на экваторе.

в) Если КК в АФМ ЛП возбуждаются звуком, то (см. задачу 5.4)

$$\begin{aligned} f_{\Omega\vec{\kappa}} &= V_{sm}(\vec{\kappa}, \boldsymbol{k})\, c_0 [\beta_{\vec{\kappa},\Omega} + \beta^*_{-\vec{\kappa},-\Omega}], \\ f_{-\Omega\vec{\kappa}} &= V_{sm}(-\vec{\kappa}, \boldsymbol{k})\, c_0 [\beta_{-\vec{\kappa},\Omega} + \beta_{\vec{\kappa},-\Omega}]. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Здесь $\beta_{\vec{\kappa}}(t)$ – каноническая амплитуда звука, а V_{sm} – матричные элементы

взаимодействия звука со СВ, вычисленные В.С. Лутовиновым [144]:

$$\mathcal{H}_{sm} = \sum_{\vec{\kappa}, k} [V_{sm}(\vec{\kappa}, k)\beta_{\vec{\kappa}}(t)\, c_k c^*_{k+\vec{\kappa}} + \text{к.с.}],$$
$$V_{sm} \propto \{\Omega(\vec{\kappa})/[\omega(k)\,\omega(k+\vec{\kappa})]\}^{1/2}. \tag{25.6}$$

Выражения (25.2) подсказывают форму, в которой следует искать решение уравнений (25.1) в линейном по f приближении:

$$C(t) = C_0 + C(\Omega)\exp(-i\Omega t) + C(-\Omega)\exp i\Omega t,$$
$$C(\Omega) + \epsilon_+(\Omega) f(\Omega) + \epsilon_-(\Omega) f^*(-\Omega). \tag{25.7}$$

Простые вычисления здесь дают

$$\epsilon_+(\Omega) = -[\Omega + i\gamma + 2(T_0 + S_0)N]\,\Delta^{-1}(\Omega),$$
$$C_0\epsilon_+ = C_0^*\epsilon_-,$$
$$\Delta(\Omega) = \Delta_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega,\ \ \Delta_0^2 = 4S_0(2T_0 + S_0)N, \tag{25.8}$$
$$N = |C_0|^2.$$

Как и следовало ожидать, восприимчивости ϵ максимальны, когда частота внешней силы Ω близка к собственной частоте коллективного резонанса Δ_0.

25.2. Возбуждение КК СВЧ магнитным полем. Эффективность возбуждения КК магнитным полем h_z можно характеризовать восприимчивостью $\chi(\omega_p + \Omega)$:

$$m_z(\omega_p + \Omega) = \chi(\omega_p + \Omega)\, h_z(\omega_p + \Omega). \tag{25.9}$$

Здесь $m_z(\omega_p + \Omega)$ – амплитуда колебаний на частоте $\omega_p + \Omega$ продольной компоненты намагниченности $m_z(t)$, которая зависит от числа СВ и, следовательно, изменяется при возбуждении КК. В нашем приближении и в обозначениях, принятых в этом параграфе, нетрудно получить $m_z(\omega_p + \Omega) = V_0 C_0 C_\Omega$. Используя выражения (25.7), (25.8) для C_Ω, C_0 и f_Ω и определение (25.9), получим выражение для мнимой части восприимчивости к слабому СВЧ сигналу, характеризующей поглощение его энергии системой ПСВ:

$$\chi''(\omega_p + \Omega) = \chi''\left(\frac{h}{h_{\text{th}}}\right)^2 \frac{2\gamma^2[\Omega_0^2 + \Omega^2 + 4\Omega(T_0 + S_0)N]}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}. \tag{25.10}$$

Здесь χ'' – мнимая часть восприимчивости к полю накачки h, задаваемая формулой (21.4). При большой надкритичности, когда $\Delta_0^2 \gg \gamma^2$, форма линии (25.10) близка к лоренцевой с шириной, равной затуханию СВ γ. В точках резонанса восприимчивость равна

$$\chi''(\omega_p \pm \Omega_0) = \chi''(h/h_1)^2[(1 + T_0^2/(S_0(2T_0 + S_0))^{1/2}]. \tag{25.11}$$

Имеет принципиальное значение то, что восприимчивость может стать отрицательной: это соответствует не поглощению, а усилению слабого сигнала. Из формул (25.11) следует, что поглощение происходит на частоте $\omega_p + \Omega$, а усиление – на зеркальной частоте $\omega_p - \Omega$. Возникновение усиления можно трактовать как следствие распадной неустойчивости основного состояния (с "медленной" частотой, равной нулю) на электромагнитное излучение (с медленной частотой Ω) и КК с собственной частотой Δ_0. Закон сох-

ранения энергии в этом процессе $\Delta_0 + \Omega = 0$. Таким образом, усиление происходит на частоте $\Omega = -\Delta_0$, что соответствует формуле (25.11). Поглощение на этом языке есть следствие процесса распада слабого сигнала на основное состояние и КК с законом сохранения $\Omega = \Omega_0$.

Экспериментально коллективный резонанс наблюдался В.В. Зауткиным, В.С. Львовым, С.С. Старобинцем [85] на монокристаллах ЖИГ. Отмечено хорошее количественное согласие с представленной здесь теорией. В частности, экспериментальные зависимости восприимчивости к слабому сигналу и частоты КК от мощности накачки хорошо согласуются с зависимостями, определяемыми формулами (25.11) и (25.8) вплоть до второго порога $h/h_{\text{th}} = 8$ дБ. Отметим также, что коллективный резонанс можно использовать как удобный и наглядный метод измерений времени релаксации СВ. Измерения показывают, что в соответствии с теорией ширина линии резонансного поглощения практически не зависит от мощности накачки и хорошо согласуется со значением γ, полученным по значению порога параллельной накачки.

25.3. Радиочастотная магнитная восприимчивость и коллективный резонанс ПСВ в ФМ и АФМ. Рассмотренный в предыдущем пункте способ раскачки КК на частоте Ω с помощью продольного СВЧ поля h_z на частоте $\omega_p + \Omega$ выглядит несколько искусственно. Казалось бы, более естественно для этого использовать РЧ магнитное поле на частоте Ω. Однако первые попытки зарегистрировать этот эффект не увенчались успехом из-за малой восприимчивости в РЧ диапазоне, и только в 1975 г. Б.И. Орлу и С.С. Старобинцу [194] удалось обнаружить обсуждаемый эффект с помощью примененной ими высокочувствительной методики.

Для вычисления восприимчивости $\chi(\Omega)$ к продольному полю $h_z(\Omega)$ отметим, что в обозначениях этого параграфа выражение для переменной части m_z на частоте Ω имеет вид

$$m_z(\Omega) = U_0 (C_0^* C_\Omega + C_0 C_{-\Omega}^*) = \chi(\Omega) h_z(\Omega). \tag{25.12}$$

Используя формулы (25.4), (25.7) и (25.8), легко получить

$$\begin{aligned} &\chi = 2U_0^2 S_0 N^2/\Delta^*(\Omega), \\ &\Delta(\Omega) = \Delta_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega. \end{aligned} \tag{25.13}$$

Максимальному значению χ''_Ω соответствует резонансная частота $\Omega_{\text{рез}}$, которая, вообще говоря, не совпадает с Δ_0 и при $\Delta_0 \gtrsim 2\gamma$ с хорошей точностью равна

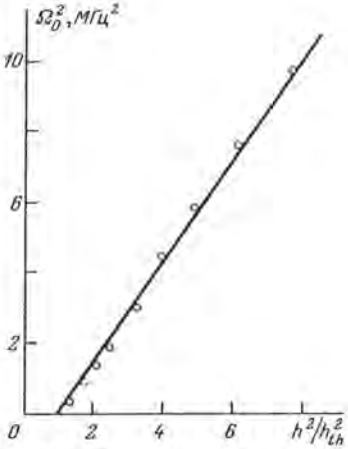
$$\Omega_{\text{рез}}^2 \approx \Omega_0^2 - \gamma^2. \tag{25.14}$$

В этом приближении полуширина кривой коллективного резонанса, измеренная на уровне 1/2, равна релаксации СВ γ. Приведем значение восприимчивости в резонансе:

$$\chi''_{\text{рез}} \approx \frac{g^2 (\Omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} S_0 N_0^2}{\gamma (\Omega_0^2 - \frac{3}{4}\gamma^2)}. \tag{25.15}$$

При большой надкритичности $\Delta_0^2 \gg \gamma^2$ и формула (25.15) упрощается. Раскрывая зависимость Ω_0 и N_0 от $p = (h/h_{\text{th}})^2$, получим

$$\chi''_{\text{рез}} = \frac{S_0}{|S_0|} \frac{g^2 (p-1)^{1/2}}{2S_0 (T_0 + S_0)^{1/2}}. \tag{25.16}$$



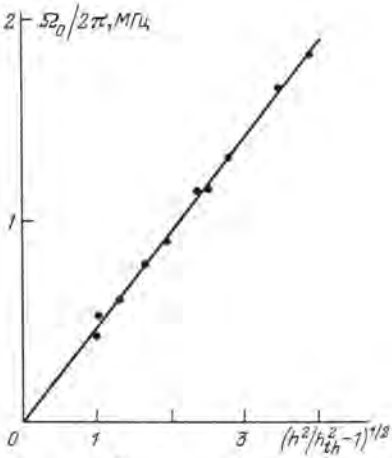


Рис. 25.1. Зависимость частоты коллективных колебания от мощности накачки в сфере ЖИГ

Рис. 25.2. Зависимость частоты КК от мощности накачки в антиферромагнитном $MnCO_3$

Из этой формулы следует важный вывод: при $S_0 > 0$, как это обычно бывает в ФМ, $\chi'' > 0$ и радиочастотное излучение поглощается в образце. Если же $S_0 < 0$ (случай АФМ ЛП), то $\chi'' < 0$, чему соответствует не поглощение, а усиление радиочастотного сигнала. Если это усиление превысит затухание в колебательном контуре, то должна возникнуть неустойчивость относительно возбуждения колебаний на частоте Ω – своеобразный лазерный эффект.

Изложенная в этом пункте теория хорошо подтверждается экспериментом Б.И. Орла и С.С. Старобинца [194]. В частности, их экспериментальные данные по зависимости χ'' от надкритичности в резонансе полностью описываются формулой (25.16). Наблюдаемая частота КК также количественно совпадает с вычисленной по формуле (25.16) (рис. 25.1). Таким образом, S-теория дает согласующееся с экспериментом описание СВЧ и РЧ резонанса КК без каких-либо подгоночных параметров. Это свидетельствует о том, что физические представления о природе КК, описанные в этом параграфе, являются правильными.

К резонансным методам возбуждения КК примыкает изящный метод ударного возбуждения КК с помощью резкого изменения фазы накачки, который предложен Л.А. Прозоровой и А.И. Смирновым в 1974 г. [200]. Их данные по собственной частоте ПСВ в антиферромагнитном $MnCO_3$ (рис. 25.2) также хорошо согласуются с теоретической зависимостью (23.4). Это еще раз свидетельствует о том, что S-теория верно описывает параметрическое возбуждение СВ не только в ФМ, но и в АФМ.

25.4. Взаимодействие КК со звуком и его неустойчивость (В.Б. Черепанов [288]). С теоретической точки зрения этот вопрос не отличается от вопроса о взаимодействии КК с РЧ полем, необходимо только заменить выражение для силы f_Ω (25.4) на (25.5). Однако поставить эксперимент по измерению восприимчивости КК к звуку довольно сложно. Поэтому при изу-

чении взаимодействия КК со звуком больше внимания заслуживает другая постановка задачи, в которой изучаются совместные движения КК и звука. Вычислим частоты этих движений. Из выражения для гамильтониана магнитоупругого взаимодействия $\mathcal{H}_{sm}$ (25.6) следуют уравнения движения для комплексной амплитуды звука $\beta_{\Omega\vec{\kappa}}$:

$$[\Omega - \Omega_S(\vec{\kappa}) + i\Gamma_S(\vec{\kappa})]\beta_{\vec{\kappa}\Omega} = V^*(\boldsymbol{k}, \vec{\kappa})[C_0^* C_\Omega + C_0 C_{\bar{\Omega}}^*],$$
$$[\Omega + \Omega_S(\vec{\kappa}) + i\Gamma_S(\vec{\kappa})]\beta_{\vec{\kappa}\bar{\Omega}} = V^*(\boldsymbol{k}, \vec{\kappa})[C_0^* C_\Omega + C_0 C_{\bar{\Omega}}^*]. \tag{25.17}$$

Здесь $\Omega_S(\vec{\kappa})$ и $\Gamma_S(\vec{\kappa})$ – частота и затухание звука с волновым вектором $\vec{\kappa}$ в отсутствие ПСВ. Рассматривая эти уравнения совместно с (25.7), (25.8) и (25.5), получим из условия равенства нулю детерминанта полной системы уравнений для $\beta_{\vec{\kappa},\Omega}, \beta_{\vec{\kappa},\Omega}, c_\Omega$ и $c_{-\Omega}$:

$$\{[\Omega + i\Gamma_S(\vec{\kappa})]^2 - \Omega_S^2(\vec{\kappa})\}\ [\Omega(\Omega + i\gamma) - \Delta_0^2] =$$
$$= 8\Omega_S(\vec{\kappa})\, SN^2\, |\chi(\vec{\kappa}, \boldsymbol{k})|^2. \tag{25.18}$$

Наиболее прост для исследования случай, когда можно пренебречь затуханием СВ и звука. Тогда

$$\Omega_\pm^2(\vec{\kappa}) = ½\{\Omega_S^2(\vec{\kappa}) + \Omega_0^0 \pm [(\Omega_S^2 - \Omega_0^2)^2 + 32SN\Omega_S(\vec{\kappa})|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2 N]^{1/2}\}, \tag{25.19}$$

матричный элемент S отрицателен (см. (7.13)), поэтому вблизи резонанса связанные колебания ПСВ и упругой подсистемы неустойчивы. Учет затухания СВ и звука приводит к тому, что неустойчивость связанных колебаний (25.18) развивается, если число ПСВ N больше порогового $N_{\text{cr}}(\vec{\kappa})$. Минимальное значение N_{cr} достигается в резонансе при $\Omega_0 = \Omega_S(\vec{\kappa})$:

$$2|SN_{\text{cr}}|^2 = -\gamma\Gamma\Omega_0^2\,|S|/(\Omega_{\vec{\kappa}}|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2). \tag{25.20}$$

Взаимодействие КК со звуком существенно и вдали от резонанса. В этом случае из (25.18) следует

$$\Omega_1(\vec{\kappa}) = \Omega(\vec{\kappa}) + 4SN^2\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2/(\Omega_{\vec{\kappa}}^2 - \Omega_0^2) -$$
$$- i[\Gamma_{\vec{\kappa}} + 8\gamma_{\boldsymbol{k}}\Omega_{\vec{\kappa}}SN^2\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2/(\Omega_{\vec{\kappa}}^2 - \Omega_0^2)^2], \tag{25.21}$$
$$\Omega_2(\vec{\kappa}) = \Omega_0 + 4SN^2\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2\,\Omega_{\vec{\kappa}}/(\Omega_0(\Omega_0^2 - \Omega_{\vec{\kappa}}^2)) -$$
$$- i[\gamma_{\boldsymbol{k}} + 8\Gamma_{\vec{\kappa}}\Omega_{\vec{\kappa}}SN^2\,|V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\vec{\kappa}}|^2/(\Omega_0 - \Omega_{\vec{\kappa}}^2)^2].$$

В отсутствие магнитоупругого взаимодействия колебания с частотой Ω_1 являются чисто акустическими, а с частотой Ω_2 – коллективными колебаниями ПСВ. Затухание длинноволнового звука $\Gamma_{\vec{\kappa}}$, как правило, мало́ по сравнению с затуханием ПСВ $\gamma_{\boldsymbol{k}}$, поэтому при отрицательном S затухание колебаний звукового типа $\Omega_1(\vec{\kappa})$ может стать отрицательным, что означает неустойчивость. Порог этой неустойчивости достигается при некотором числе ПСВ $N_{\text{cr}}(\vec{\kappa})$, когда

$$8S^2N_{\text{cr}}^2 = \gamma_{\boldsymbol{k}}\Gamma_{\vec{\kappa}}\frac{|S|(\Omega_{\vec{\kappa}}^2 - \Omega_0^2)^2}{|V|^2\Omega_{\vec{\kappa}}\gamma_{\boldsymbol{k}}^2}.$$

А.И. Смирновым в 1983 г. [208] было обнаружено возбуждение акустической моды образца при достижении некоторой мощности накачки. Ввиду конечности образца частота акустических колебаний $\Omega_S(\vec{\kappa})$ была сущест-

венно больше частоты КК Ω_0. В этом случае порог возбуждения звуковых колебаний равен N_{cr}. Оценка по S-теории соответствующей величины $p = (h_{cr}/h_{th})^2$ для эксперимента А.И. Смирнова дает $p = 25$. Экспериментально полученное значение этой величины составляет $50 \div 100$. Учитывая то, что значения $|V_{kk\vec{\kappa}}|$, $|S|$ и затухание γ_k известны недостаточно точно, такое соответствие теории и эксперимента следует считать удовлетворительным.

§ 26. Порог параметрического возбуждения в условиях периодической модуляции магнитного поля: теория и эксперимент

Наша задача заключается теперь в изучении КК большой амплитуды. Одним из методов их возбуждения является сильная периодическая модуляция магнитного поля на частоте, близкой к собственной частоте КК. Разумеется, прежде чем исследовать запороговое состояние СВ в присутствии сильного РЧ поля, необходимо изучить влияние этого поля на порог параметрического возбуждения. Впервые этот вопрос рассматривался Х. Сулом [213], показавшим, что при периодической модуляции подмагничивающего поля (или частоты накачки) порог параметрической неустойчивости растет вследствие нарушения в среднем условия параметрического резонанса. Согласно Х. Сулу при соответствующем выборе частоты и амплитуды модуляции неустойчивость пропадает – ее порог становится бесконечно большим. Идея Х. Сула экспериментально проверялась Т.С. Хартвиком, Е.Р. Пересини и М.Т. Вейссом [221]. Они, однако, не получили полного соответствия с выводами теории, в частности, им не удалось увеличить порог больше чем на 10 дБ. Это несоответствие объясним в развитой ниже теории. Приведем также подробные экспериментальные результаты, которые подтверждают нашу теорию.

Рассмотрим параметрическое возбуждение СВ в магнитном поле

$$H = H_m(t) + H_0 + h\cos\omega_p t. \tag{26.1}$$

Здесь H_0 – постоянное магнитное поле, $H_m(t)$ – модулирующее поле, $h\cos\omega_p t$ – СВЧ накачка на частоте ω_p. Вычисление порога параллельной накачки в поле (26.1) с произвольным законом модуляции $H_m(t)$ представляет собой довольно трудную задачу. Поэтому рассмотрим вначале простейший вариант модуляции – с помощью прямоугольных периодических импульсов (режим типа "меандр" с периодом 2τ). Уравнения движения для нормальных амплитуд СВ в линейном приближении имеют вид

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\Delta_k + 2\upsilon_k H_m)\right] c_k + ihV_k c^*_{-k} = 0,\\
&0 < t < \tau,\\
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\Delta_k - 2\upsilon_k H_m)\right] c_k + ihV_k c^*_{-k} = 0,\\
&\tau < t < 2\tau.
\end{aligned} \tag{26.2}$$

Полагая c_k, $c^*_{-k} \sim \exp\nu t$, находим, что инкремент ν в разные временные

интервалы равен

$$\nu_1 = \nu(0-\tau) = -\gamma \pm [\,|hV_k|^2 - (\Delta_k + 2v_k H_m)^2\,]^{1/2},$$
$$\nu_2 = \nu(\tau - 2\tau) = -\gamma \pm [\,|hV_k|^2 - (\Delta_k - 2v_k H_m)^2\,]^{1/2}. \qquad (26.3)$$

Рассмотрим случай $\gamma\tau \gg 1$, когда можно пренебречь затухающими решениями, соответствующими отрицательному знаку перед квадратным корнем в (26.3). Тогда суммарный инкремент нарастания за период следования импульсов равен $\nu_1 + \nu_2$.

Из условия $\mathrm{Re}\,\nu = 0$ получим порог неустойчивости:

$$|h_{\mathrm{th}1} V|^2 = \gamma_k^2 + (2v_k H_m)^2 + \Delta_k^2\,[1 + 4v_k^2 H_m^2/\gamma^2], \qquad (26.4)$$

$$|h_{\mathrm{th}2} V|^2 = 4\gamma_k^2 + (\Delta_k \mp 2v_k H_m)^2. \qquad (26.5)$$

Выражение (26.4) соответствует малым амплитудам модуляции, когда $|hV_k| > |2v_k H_m \pm \Delta_k|$, при этом минимальный порог неустойчивости достигается при $\Delta_k = 0$, т.е. для СВ на резонансной поверхности $\omega_k = \omega_p/2$. Соответствующий им порог равен

$$|h_{\mathrm{th}1} V|^2 = \gamma_k^2 + 4v_m^2 H_m^2, \quad \Delta_k = 0. \qquad (26.6)$$

При больших амплитудах модуляции, соответствующих (26.5), возникают дополнительные локальные минимумы порога при $\Delta_k = \pm 2v_k H$. Величина порога $|h_{\mathrm{th}2} V|$ на этих поверхностях постоянна и равна $2\gamma_k$. Таким образом, критическая амплитуда модуляции $H_{m,\mathrm{cr}} = \sqrt{3}\gamma/2v_k$ разделяет два режима параллельной накачки: режим слабой модуляции, когда минимальный порог задается уравнением (26.6), и режим сильной модуляции, когда он перестает расти и равен 2γ. При этом возникает расстройка, величина которой растет пропорционально амплитуде модулирующего поля. Этот характерный эффект сильной модуляции — замораживание порога при $H_m > H_{m,\mathrm{cr}}$, вообще говоря, присущ только модуляции прямоугольного типа. Так, нетрудно показать (В.В. Зауткин и др. [88]), что для синусоидальной и пилообразной модуляции величина h_{th} хотя и медленно, но неограниченно растет с увеличением H_m. При $H > H_{m,\mathrm{cr}}$ для синусоидальной и пилообразной модуляции соответственно

$$2|h_{\mathrm{th}} V| = \pi\gamma^{2/3}(v_k H_m)^{1/3}, \quad |h_{\mathrm{th}} V| = (\gamma v_k H_m)^{1/2}. \qquad (26.7)$$

До сих пор мы рассматривали низкочастотную модуляцию с периодом, меньшим времени релаксации СВ. Отбросим теперь это ограничение и рассмотрим параллельную накачку СВ в магнитном поле, модулированном по синусоидальному закону с произвольной частотой Ω: $H_m(t) = H_m \cos\Omega t$. Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i\Delta_k + iv_k H_m \cos\Omega t\right) c_k + ihV_k c^*_{-k} = 0. \qquad (26.8)$$

Ограничиваясь малыми амплитудами H_m, запишем

$$c_k = c_k^0 + \alpha(\Omega, k)\exp(i\Omega t) + \alpha(-\Omega, k)\exp(-i\Omega t). \qquad (26.9)$$

Стационарное решение уравнений (26.8) соответствует порогу неустойчивости. Подстановка (26.9) в (26.8) дает систему уравнений для c_k^0, $\alpha(\pm\Omega, k)$, из которой в квадратичном по α приближении находим соотношение, опре-

деляющее порог:

$$|h_{\text{th}} V_k|^2 = (\gamma_k^2 + \Delta_k^2)\,[1 + 4v_k^2 H_m^2/(\Omega^2 + 4\gamma^2)]^2. \tag{26.10}$$

Минимальный порог, как и следовало ожидать, для режима слабой модуляции достигается при $\Delta_k = 0$. На низких частотах формула (26.10) при $\Delta_k = 0$ эквивалентна точной формуле (26.6), полученной выше для модуляции прямоугольного типа. Это, по-видимому, означает, что формула (26.10), выведенная в рамках теории возмущений, применима с хорошей точностью вплоть до значений $H_m = H_{m,\text{cr}}$. Причина этого заключается в том, что на высоких частотах модуляции малым параметром теории является $2v_k H_m/\Omega$, а на низких частотах – Ω/γ_k.

В общем случае модуляции с произвольной частотой и произвольной амплитудой сравнительно простое выражение для порога неустойчивости получается лишь для прямоугольной модуляции. Приведем без вывода уравнение, определяющее h_{th}:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch}(2\gamma_k \tau) = \operatorname{ch}(\mu_+ \tau)\operatorname{ch}(\mu_- \tau) + \\ &+ \operatorname{sh}(\mu_+ \tau)\operatorname{sh}(\mu_- \tau)\,(|h_{\text{th}} V_k|^2 - \Delta_+\Delta_-)/(\mu_+\mu_-), \\ &\Delta_\pm = \Delta_k \pm 2v_k H_m, \quad \mu_\pm = |h_{\text{th}} V_k|^2 - \Delta_\pm^2. \end{aligned} \tag{26.11}$$

В случае низких частот (больших τ) отсюда несложно получить формулу (26.2). На высоких частотах ($\tau \to 0$) имеем

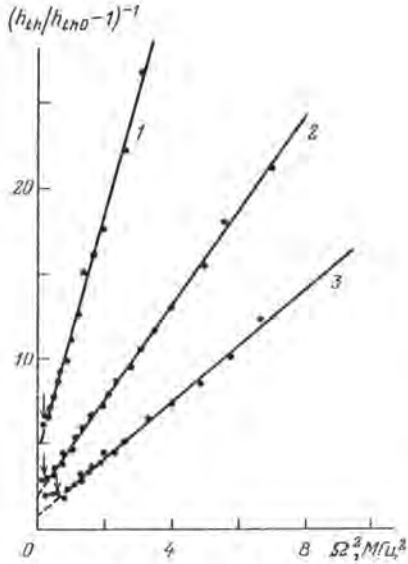
$$|h_{\text{th}} V_k| = \gamma_k (1 + 4v_k^2 H_m^2 \tau^2/3)^{1/2}. \tag{26.12}$$

На рис. 26.1 приведены экспериментальные зависимости порога параллельной накачки в ЖИГ, полученные В.В. Зауткиным и др. [88]. Эти зависимости приведены в "спрямляющих" координатах, в которых по формуле (26.10) при $\Delta_k = 0$ они должны быть прямыми линиями. Видно, что экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую. Наклоны этих прямых и участки, отсекаемые ими на осях координат, в пределах экспериментальных ошибок (10%) совпадают с теорией. Расхождение начинается в области, лежащей ниже некоторой частоты Ω^*, для которой развитая выше теория неприменима. Действительно, мы полагали, что РЧ поле модулирует собственную частоту СВ ω_k, не сдвигая, однако, с места пакета ПСВ в k-пространстве. Очевидно, что на достаточно низких частотах это условие не соблюдается и пакет ПСВ будет следовать за изменением ω_k. При этом условие параметрического резонанса $2\omega_k = \omega_p$ автоматически выполняется в каждый момент времени и влияние модуляции магнитного поля на порог отсутствует.

Оценим характерную частоту, при которой центр тяжести пакета начинает следить за изменением поля. Характерное время нарастания СВ от тепловой амплитуды τ_1 до амплитуды N определяется из условия $\tau_1 (hV - \gamma) \approx \ln(N/N_T)$. Время τ_2, за которое собственная частота СВ изменяется на величину 2γ – ширину пакета ПСВ – очевидно, равно $\tau_2 = \gamma\pi/\Omega v_k H_m$. При $\tau_2 \gtrsim \tau_1$ перемещение пакета будет успевать за изменением магнитного поля. Из условия $\tau_1 = \tau_2$ найдем граничную частоту

$$2\Omega^* \approx \pi v_k H_m/\ln(N/N_T). \tag{26.13}$$

Входящая в эту формулу величина N есть некоторое минимальное число СВ, которое еще регистрируется экспериментальной установкой (обычно



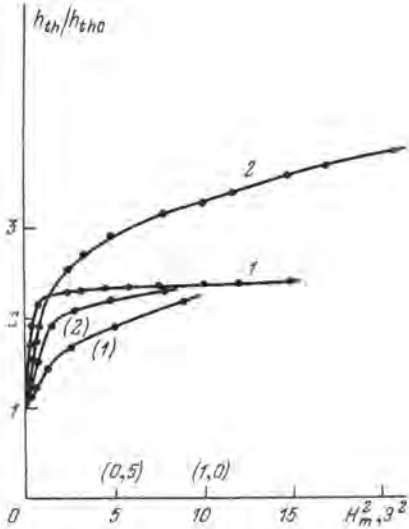


Рис. 26.1. Зависимость порога параметрического возбуждения от частоты РЧ поля ($H = H_c - 100$ Э). H_m, Э: *1* – 0,14; *2* – 0,21; *3* – 0,28

Рис. 26.2. Зависимость порогового поля h_{th} от H_m^2: *1* – для прямоугольной модуляции; *2* – для синусоидальной модуляции. (*1*), (*2*) соответствуют начальным участкам кривых с увеличенным в 10 раз масштабом по H_m. $H = H_c = 100$ Э

$N \approx 10^{16} \div 10^{17}$ см$^{-3}$). При комнатной температуре число тепловых СВ в полосе частот $\Delta\omega_k \approx \gamma_k \approx 10^6$ с около $\omega_k = \omega_p/2$ равно $N_T \approx 10^9$ см$^{-3}$, т.е. $\ln(N/N_T) \approx 10$. Взяв $H_m \approx 0{,}1$ Э, находим из (26.13) $\Omega^* = 0{,}02$ МГц, что, учитывая оценочный характер формулы, неплохо согласуется с экспериментом (см. рис. 26.1, на котором Ω^* отмечена стрелкой). Эксперимент также свидетельствует о том, что Ω^* пропорциональна H_m, как и следует из (26.13).

На рис. 26.2 приведены зависимости порогового поля от амплитуды модуляции H_m для сигнала прямоугольной (меандр) и синусоидальной формы. Для $H_m \leqslant 0{,}3$ Э зависимость h_{th} от H_m^2 линейна в соответствии с формулами (26.6) и (26.10). При $H_m > 0{,}3$ Э происходит переход в режим сильной модуляции. Теория в этом случае предсказывает возбуждение двух пакетов СВ. Вследствие зависимости $\gamma(k)$ пороги возбуждения этих пакетов должны несколько отличаться друг от друга. Действительно, при $H_m > 0{,}3$ Э можно наблюдать в некоторой области частот два следующих друг за другом порога, причем больший из них проявляется значительно резче: соответствующее ему время нарастания неустойчивости много меньше.

В режиме сильной модуляции зависимость $h_{th}(H_m)$ для меандра (кривая *1* на рис. 26.2) выходит на плато в соответствии с теорией. Предельное значение h_{th} зависит от Ω и с уменьшением Ω стремится к значению $2h_{th,0}$. При синусоидальном сигнале порог монотонно растет в соответствии с формулой (26.7). В наших экспериментах увеличение значения порога дости-

гало 3,8 раза при $H_m = 5$ Э. При существенно больших H_m увеличение порога должно прекратиться из-за смещения пакета при модуляции поля.

В заключение этого параграфа надо сказать, что вывод о монотонном возрастании порога по формуле (26.7) для периодической модуляции относится к возбуждению СВ с предельной расстройкой $\Delta_k = \pm 2 v_k H_m$. В интересной работе А.М. Фришмана [220] показано, что при больших H_m возбуждаются СВ с расстройкой $\Delta_k(n) = n\Omega/2$ (Ω – частота РЧ поля), если поле накачки превышает величину $h_{\text{th}}/|J_n(z)|$. Здесь $J_n(z)$ – функция Бесселя от аргумента $z = -v_k H_m/\Omega$. Отсюда следует, что порог параметрической неустойчивости

$$h_{\text{th}}(H_m, \Omega) = h_{\text{th}}(0)\,[\max_n |J_n(z)|]^{-1}$$

является сложной немонотонной функцией от H_m и Ω. Этот нетривиальный вывод теории находится в хорошем количественном соответствии с экспериментом В.И. Ожогина и др. [193] по параметрическому возбуждению СВ в АФМ ЛП.

§ 27. Коллективные колебания большой амплитуды и двойной параметрический резонанс

27.1. Стационарное состояние за порогом в условиях периодической модуляции. Естественно полагать, что периодическая модуляция магнитного поля не изменяет качественный характер процессов, приводящих к ограничению параметрической неустойчивости. При этом, однако, возникает ряд дополнительных эффектов, которые могут заметно изменить стационарные значения амплитуды N и фазы ψ пар ПСВ. Под действием модулирующего РЧ поля возбуждаются КК СВ, которые нелинейным образом взаимодействуют с исходными ПСВ и РЧ полем, в результате чего увеличивается затухание СВ и изменяется их взаимодействие друг с другом. За дополнительное затухание ответственны процессы взаимодействия типа $H_m c\alpha^*$, представляющие собой слияние СВ с РЧ фотоном и при возбуждении коллективной моды α. Очевидно, что эти процессы приводят к добавке к γ, пропорциональной квадрату амплитуды модулирующего поля. Другие процессы взаимодействия типа $c^* c^* \alpha\alpha$ обеспечивают дополнительный канал связи между СВ через коллективные колебания. Эти процессы можно трактовать как перенормировку коэффициента четырехмагнонного взаимодействия $S_{kk'}$. Для того чтобы учесть все эти эффекты, напишем уравнение движения СВ с учетом их взаимодействия друг с другом и с РЧ полем:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k + i(\Delta_k + 2T|c|^2) + 2iv H_m(t)\right] c + i(hV + Sc^2)c^* = 0. \qquad (27.1)$$

Оно получается в результате усреднения уравнений движения для амплитуд c_k и c^*_{-k} по всем направлениям волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Мы можем это сделать без потери общности, поскольку нас интересует реакция СВ на однородное РЧ поле, и мы не рассматриваем здесь неоднородные моды коллективных колебаний. Полагая $H_m(t) = H_m \cos\Omega t$, находим из формул (25.4), (25.7) и (25.8) линейную реакцию КК $c(\pm\Omega)$ на поле H_m; под-

ставляя выражение для нее в (27.1), получаем уравнение для стационарной амплитуды c_0:

$$\gamma[1 + 4H_m^2 v^2\Omega^2 |\Delta(\Omega)|^{-2}] + i\{\Delta_k + [2T + S + \\ + 2v_k^2 H_m^2 (S\Delta_0^2 + 2T\Omega^2 + 3S\Omega^2)|\Delta(\Omega)|^{-2}]N + hV\exp(i\psi)\} = 0. \quad (27.2)$$

Здесь $\Delta(\Omega)$ и Δ_0 задаются уравнениями (25.8), Δ_k – расстройка. Положение поверхности в k-пространстве, на которой возбуждены СВ в стационарном состоянии, т.е. величина Δ_k должна находиться из условия устойчивости решения (27.3) относительно малых возмущений δ_c, лежащих вне стационарной поверхности: из условия *внешней устойчивости*. Предоставляем читателю получить его самостоятельно, решив задачу 5.5.. Подставляя ее ответ (27.11) в уравнение (27.2), предствим последнее в виде

$$hV\exp(i\psi) + \widetilde{S}N = i\Gamma, \quad (27.3)$$

$$\Gamma = \gamma[1 + (2\Omega v H_m)^2 |\Delta(\Omega)|^{-2}], \\ \widetilde{S} = S\left[1 + 2\,\frac{(vH_m)^2(3\Omega^2 + 4\gamma^2)(\Omega^2 - 4S^2N^2)}{(\Omega^2 + 4\gamma^2)|\Delta(\Omega)|^2}\right]. \quad (27.4)$$

Уравнение (27.3) по форме совпадает с уравнением для стационарного состояния в S-теории (19.4), если в последнем заменить $\gamma \to \Gamma$, $S \to \widetilde{S}$ в соответствии с (27.4). Поэтому в присутствии РЧ поля вместо (19.6) следует писать

$$|\widetilde{S}|N = (|hV|^2 - \Gamma^2)^{1/2}, \qquad hV\sin\psi = \Gamma, \qquad hV\cos\psi + \widetilde{S}N = 0. \quad (27.5)$$

Эти выражения позволяют вычислить зависимости нелинейных восприимчивостей χ' и χ''от надкритичности h и величины РЧ поля H_m, эти зависимости, как показано В.В. Зауткиным и др. [88], качественно согласуются с экспериментами на образцах ЖИГ.

В интересной работе В.И. Ожогина и др. [193] теоретически и экспериментально изучалось параметрическое возбуждение ядерных спиновых волн (ЯСВ) в АФМ $CsMnF_3$ в условиях модуляции магнитного поля. Продемонстрировано хорошее соответствие между основными выводами линейной по H_m теории с экспериментом до надкритичности ~ 7 дБ и $H_m \approx$ $\approx$0,25 Э. В частности, параметр релаксации ПСВ γ_k, определенный по порогу параметрического возбуждения из формулы $h_{th}V = \gamma$, с точностью до погрешностей измерений совпал с величиной γ, определенной из частотной зависимости по формуле (26.3). Существенно, что последний метод определения γ_k дает более высокую абсолютную точность измерений.

27.2. Параметрическое возбуждение коллективных колебаний. Кроме рассмотренного выше линейного взаимодействия коллективных колебаний СВ с РЧ полем, приводящего к резонансу на частоте $\Omega = \Omega_0$, существует нелинейное взаимодействие типа $H_m\beta^*\beta^*$, которое приводит к параметрическому резонансу коллективных мод в РЧ поле с частотой $\Omega = 2\Omega_0$. К этому же эффекту, как не трудно понять, относится и неустойчивость исходной моды α с частотой Ω, возбуждаемой РЧ полем, от отношению к распаду на две моды β с частотой $\Omega/2$. В результате действия обоих механизмов при превышении некоторой критической амплитуды РЧ поля возникает явление двойного параметрического резонанса СВ – одновременное возбуждение колебаний на СВЧ – с частотой $\omega_p/2$ и РЧ – с частотой $\Omega/2$.

Для нахождения порога неустойчивости относительно параметрического возбуждения КК ищем решение уравнения движения (27.1) в виде

$$c = c_0 + \alpha_+ \exp(i\Omega t) + \alpha_- \exp(-i\Omega t) + \beta_+ \exp(i\Omega t/2) + \beta_- \exp(-i\Omega t/2). \tag{27.6}$$

Используя соотношение (27.5) для основного состояния и линеаризуя (27.1) по малым амплитудам α и β, получим

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma + 2i(T+S)N\right]\beta_+ + (-\gamma + 2iTN)\exp(-i\psi)\beta_-^* + \\
&+ i\omega_+\beta_- + iP_+\exp(-i\psi)\beta_+^* = 0, \\
&\omega_+ = (H_m v_k)^* + 2(2T+S)(c_0^*\alpha + c_0\alpha_-^*), \qquad \omega_- = \omega_+^*, \\
&P_\pm = 2(2T+S)c_0\alpha_\pm\exp(i\psi).
\end{aligned} \tag{27.7}$$

Напомним, что амплитуды колебаний $\alpha_\pm$ задаются формулами (25.7) и (25.8). Уравнение (27.7) можно записать в более симметричном виде, если от переменных $\beta_\pm$ перейти к нормальным переменным $\rho_\pm$ с помощью следующего $u-v$ -преобразования:

$$\begin{aligned}
&\rho_+ = u\beta_+\exp(i\psi/2) - v\beta_-^*\exp(-i\psi/2), \\
&\rho_-^* = -v\beta_+\exp(i\psi/2) + u^*\beta_-\exp(-i\psi/2), \\
&u = \left[\frac{2(T+S)N + \Omega_0}{2\Omega_0}\right]^{1/2}, \qquad v = -\left[\frac{2(T+S)N - \Omega_0}{2\Omega_0}\right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{27.8}$$

Тогда для перенормированных $\rho_\pm$ получим уравнение

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma + i\Omega_0\right)\rho_+ + iA_+\rho_+^* + iB_+\rho_- - \gamma\rho_-^* = 0, \\
&A_+ = 2uv\omega_+ + u^2P_+ + v^2P_-^*, \\
&B_+ = v^2\omega_+ + uv(P_+ + P_-^*).
\end{aligned} \tag{27.9}$$

Полагая $\beta_\pm(t) = \rho_\pm\exp(\pm i\Omega t/2 + \nu t)$ и записывая систему четырех уравнений для амплитуд $\rho_+, \rho_+^*, \rho_-, \rho_-^*$, находим инкремент неустойчивости ν из условия равенства нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix}
\nu + \gamma + i(\Omega_0 + \Omega/2) & iA_+ & iB_+ & -\gamma \\
-iA_+^* & \nu + \gamma - i(\Omega_0 + \Omega/2) & -\gamma & -iB_+^* \\
iB_+ & -\gamma & \nu + \gamma + i(\Omega_0 - \Omega/2) & iA_- \\
-\gamma & -iB_+ & -iA_-^* & \nu + \gamma - i(\Omega_0 - \Omega/2)
\end{vmatrix}. \tag{27.10}$$

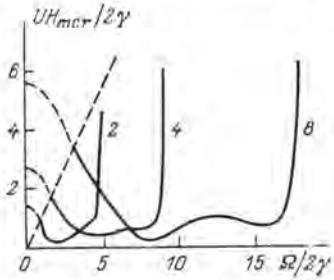
Порог неустойчивости ($\nu = 0$) для заданных значений Ω и Ω^0 вычислялся из (27.10) с помощью ЭВМ (рис. 27.1). Оказывается, что минимальный порог достигается при резонансе $\Omega = \Omega_0$ и он слабо зависит от Ω_0:

$$\min\{H_m\}_{\text{cr}} \approx 0{,}4\gamma/v \approx \gamma/g.$$

Второй минимум порога на частоте $2\Omega_0$ проявляется лишь при достаточно большой добротности КК, когда $\gamma \ll \Omega_0$.

Параметрическое возбуждение КК в системе параметрически возбужденных СВ – *двойной параметрический резонанс* был обнаружен и эксперимен-

тально исследован В.В. Зауткиным и др. в 1977 г. [88]. В этой работе к сферическому образцу ЖИГ прикладывались три параллельных друг другу магнитных поля: H – постоянное подмагничивающее поле, $h \exp(i\omega_p t)$ – СВЧ накачка, $H_m \exp(-i\Omega t)$ – РЧ накачка, РЧ поле создавалось миниатюрной катушкой, расположенной в центре СВЧ резонанса. Измерения проводились в диапазоне радиочастот от 0,1 до 10 МГц. Параметрические колебания на частоте $\Omega/2$ возникли при некотором критическом значении РЧ поля. Сигнал на частоте $\Omega/2$, наведенный в катушке, усиливался селективным приемником и регистрировался на осциллографе. Возникновение этого



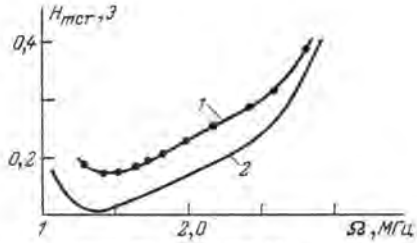


Рис. 27.1. Теоретические зависимости порога неустойчивости КК H_{mcr} от частоты Ω РЧ поля. Цифры у кривых соответствуют значениям собственной частоты КК ($\Omega_0/2\gamma$). Область применимости теории ограничена сверху штриховой линией

Рис. 27.2. Зависимости порога коллективных колебаний H_{mcr} от частоты РЧ поля: *1* – экспериментальная $H = H_c - 100$ Э, $p = 2{,}5$ (4 дБ); *2* – теоретическая $\Omega_0 = 3{,}4\gamma$ ($\gamma = 0{,}37$ Мгц)

сигнала носило пороговый характер. С ростом H_m сигнал пороговым образом почти пропадал – его амплитуда ослаблялась более чем в десять раз.

На рис. 27.2 приведена одна из экспериментальных зависимостей $H_{m,\mathrm{cr}}(\Omega)$ (при $H = H_c - 100$ Э, надкритичность 4 дБ) и соответствующая теоретическая кривая, полученная из условия равенства нулю детерминанта (27.10). Ход обеих кривых хорошо согласуется между собой, за исключением, возможно, области низких частот, где сигнал очень слаб, и не удается провести надежные измерения порога. Отметим, что теория, построенная в квадратичном по H_m приближении, предсказывает существование только одного порога $H_{m,\mathrm{cr}}$ при фиксированной частоте Ω и надкритичности h/h_{th}. Между тем в эксперименте наблюдается и второй порог – порог исчезновения интенсивных КК с ростом H_m. Физически этот порог связан с зависимостью собственной частоты КК от H_m^2, приводящей к нарушению условия параметрического резонанса. Однако фактическое его вычисление весьма затруднительно, так как требует учета старших членов по H_m^2, и может быть вообще невозможно в рамках теории возмущений по vH_m/γ.

В заключение отметим, что мы рассмотрели пространственно-однородные КК с волновыми вектором $\kappa = 0$. Наряду с ними в системе ПСВ существует широкий спектр КК (см. п. 23.4). Отдельные участки этого спектра в принципе можно возбудить параметрическим образом с помощью однородного РЧ поля на частоте, удовлетворяющей условию $\Omega = \Omega_\kappa + \Omega_{-\kappa}$. Эти колебания с $\kappa \neq 0$ плохо связаны с резонатором, и поэтому излучение

на половинной частоте будет сильно ослаблено. В.В. Зауткину и Б.И. Орлу [88] удалось не только с достоверностью зарегистрировать факт существования неоднородных КК при двойном параметрическом резонансе, но и исследовать их спектр. Они сделали это по целому ряду косвенных данных, анализируя экспериментально определенные зависимости частоты и амплитуды КК от H, H_m и h.

Задачи

Задача 5.1. Учесть влияние взаимодействия резонатора с СВЧ-магнитным полем накачки на частоту КК ПСВ, возбужденных методом параллельной накачки. Исследовать область неустойчивости связанных колебаний.

Задача 5.2. Получить выражения для частот, совместных коллективных колебаний ПСВ и ОП при параметрическом возбуждении СВ методом поперечной накачки: во-первых, для процессов первого порядка вдали от резонанса ОП, во-вторых, для процессов второго порядка при резонансе ОП.

Задача 5.3. Используя гамильтониан взаимодействия СВ с магнитным полем (14.18) и (14.19), получить выражения (25.4) для "внешней силы", действующей на систему ПСВ (25.1) в присутствии радиочастотного и СВЧ-магнитного полей.

Задача 5.4. Получить выражение гамильтониана взаимодействия звука со СВ в АФМ ЛП (В.С. Лутовинов [144]).

Указание. Использовать выражение для магнитоупругой энергии и канонические переменные для звука и СВ в АФМ ЛП.

Ответ. – См. формулу (25.6).

Задача 5.5. Получить условие внешней устойчивости стационарного состояния ПСВ (27.2) в условиях радиочастотной модуляции $H_m(t) = H_m \cos \Omega t$:

$$\Delta_k = \tilde{\omega}_k - \tfrac{1}{2}\omega_p = 4H_m^2 v_k^2 \{T(\Omega^2 + 4S^2N^2) +$$

$$+ 4S[\Omega^2(\gamma^2 + 2S^2N^2) + (2\gamma SN)^2](\Omega^2 + 4\gamma^2)^{-2}\}|\Delta(\Omega)|^{-2}. \qquad (27.11)$$

Задача 5.6. Получить выражение для частот пространственно-неоднородных коллективных колебаний $\Omega_p(\kappa)$ (κ – волновой вектор КК) при параметрическом возбуждении волн в сферически-симметричном случае: $V_k = V$, $S_{kk'} = S$, $T_{kk'} = T$. Этот случай реализуется в АФМ ЛП, например, в $CsMnF_3$, $MnCO_3$ и т.д.

Указание. Использовать для анализа уравнение (24.10).

Ответ:

$$\Omega(\kappa) = -i\gamma \pm [(v\kappa)^2 \operatorname{cth}^2(v\kappa/\Delta) - \gamma^2]^{1/2},$$

$$\Delta^2 = 2S(2T + S)N^2, \qquad v = \partial\omega_k/\partial k. \qquad (27.12)$$

Задача 5.7. Найти инкремент неустойчивости (частоты $\Omega_{\pm 1}(\kappa)$) пространственно-неоднородной моды КК с аксиальным номером $m = \pm 1$ при параметрическом возбуждении СВ методом параллельной накачки в кубических ФМ, когда ПСВ возбуждены только на экваторе резонансной поверхности, и проанализировать (аналитически и с помощью ЭВМ) нелинейную стадию развития этой неустойчивости в некоторых предельных случаях. Возникнет ли в результате стационарное, но пространственно-однородное распределение ПСВ? Если нет, то какой характер будут иметь автоколебания в системе?

Замечание. Ответы на эти вопросы сейчас неизвестны, но представляют большой интерес для интерпретации экспериментов на ФМ в ЖИГ, при которых, вероятно, может реализоваться неустойчивость одной из мод $m = 1$ или $m = -1$. Было бы хорошо, чтобы кто-нибудь нашел в себе достаточно сил и энергии для анализа этой непростой задачи и опубликовал свои результаты.

Задача 5.8. Показать, что уравнения пространственно-неоднородной S-теории (24.9) в стационарном случае имеют следующий "интеграл движения" F, не зависящий от z:

$$F(A_k(z)) = S\,|A_k(z)A_{-k}(z)| + hV\cos(\varphi_k(z) + \varphi_{-k}(z)) = \text{const}. \qquad (27.13)$$

Как совместить это с обсужденным в п. 24.4 утверждением о выводе при $z \to \infty$ решения $A_k(z)$ на стационарное состояние S-теории A_k^0, если граничные условия при $z = 0$ таковы, что $F(A_k(0)) \neq F(A_k^0)$?

ГЛАВА 6

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН

Нестационарные процессы при параметрическом возбуждении волн могут носить самый разный характер. Их условно можно разбить на три группы: к первой относятся *переходные процессы* установления стационарного состояния, возникающие при включении накачки или при других скачкообразных изменениях условий эксперимента: переключении фазы, частоты, амплитуды накачки, внешнего магнитного поля и т.д. Часть из них описана в § 28. Вторая группа – это *вынужденные нестационарные процессы* отслеживания непрерывных изменений условий эксперимента: периодических, мотонотонных или шумовых. Они описаны в §§ 25–27 предыдущей главы и §§ 29, 30. Третью группу составляют *спонтанные нестационарные процессы,* возникающие из-за неустойчивости основного состояния ПСВ и приводящие к автоколебаниям намагниченности. Эти процессы существенно различаются для ситуации, когда возбужден широкий пакет ПСВ (§ 31) и когда порог параметрического возбуждения минимален для одной или нескольких пар волн, так что при не малых надкритичностях возбужден узкий пакет ПСВ (§ 32).

§ 28. Переходные процессы в системе параметрических волн при включении накачки

Этот вопрос рассмотрен В.Е. Захаровым, автором и С.М. Мушером в 1972 г. и далее автор следует этой работе [102].

28.1. Область малых надкритичностей. В этом пункте изучен процесс установления стационарного состояния S-теории (19.1) от уровня теплового шума $n_k = n_0$ при малых превышениях $hV - \gamma \ll \gamma$. Очевидно, что до тех пор, пока $N = \sum_k n_k \ll N_0$, амплитуды пар будут расти так, как предсказывает линейная теория, т.е. с инкрементом $hV - \gamma$. При этом в k-пространстве возникает узкий пакет СВ шириной $\Delta\omega \approx (hV - \gamma)$. Дальнейшее его поведение описывается уравнениями (18.9). Из них видно, что время релаксации амплитуд и фаз порядка $(hV - \gamma)^{-1}$ и γ^{-1} соответственно, поэтому можно считать, что фазы Ψ_k адиабатически следят за амплитудами, т.е. в (18.9) можно пренебречь $\partial\Psi_k/\partial t$. То, что пакет узкий: $\Delta\omega \ll \gamma$, позволяет разложить в уравнениях (18.9) тригонометрические функции в ряд и представить эти уравнения в виде

$$-\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \tau} = x^2 + x(2\alpha - 1)\left(\int f dx' - 1\right) + \alpha \int f dx' - \alpha +$$

$$+ \left[\int f dx' - 1\right]^2 \alpha^2 + \int x' f dx',$$

$$f = n_k(\tau)/N_0, \qquad x = (\omega_k - \omega_{k_0})/(2SN_0), \tag{28.1}$$

$$\tau = \gamma t (2SN_0/\gamma)^2, \qquad \alpha = (2T + S)/S.$$

Отметим, что в этом уравнении зависимости от надкритичности $p = (h/h_{\text{th}})^2$ исчезла, а параметры системы ПСВ входят в него лишь через α. Уравнение

(28.1) имеет автомодельное решение

$$f(x,\tau) = A(\tau)(\tau/\pi)^{1/2}\exp\{-[(x - x_0(t))/d(\tau)]^2\}, \tag{28.2}$$

где $A(\tau) = \int f(x,\tau)\,d\tau$ – суммарная интенсивность пакета ПСВ, $x_0(\tau) = A^{-1}\int f x dx$ – положение его центра тяжести, $d(\tau)$ – ширина пакета. Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{d\tau} + \frac{1}{2\tau} - \frac{d(\tau x_0^2)}{d\tau} = -Ax_0^2 - \alpha A(A-1)[\alpha(A-1)+1].$$

$$\frac{d(\tau x_0)}{d\tau} = -(A-1)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right), \qquad d(\tau) = t^{-1/2}. \tag{28.3}$$

Эти уравнения имеют следующую асимптотику при $\tau \to \infty$:

$$x_0 = -1/2\tau, \qquad A - 1 = -[2(4\alpha - 1)\tau^2]^{-1}, \qquad d(\tau) = \tau^{-1/2}. \tag{28.4}$$

Таким образом, при небольших превышениях над порогом произвольная функция распределения пар n_k релаксирует к имеющему вид δ-функции стационарному состоянию (18.9) по степенному закону (28.4):

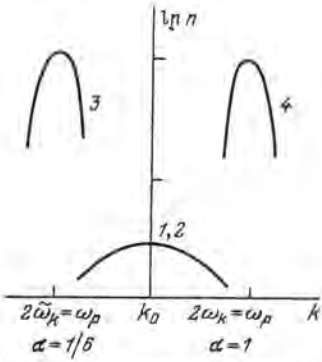
$$N_0 - N \sim N_0(hV - \gamma)^{-2}t^{-2},$$

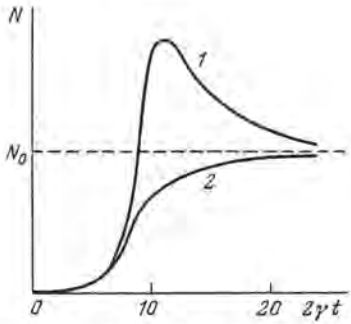
$$\omega_k - \omega_{k_0} \sim \gamma^{1/2}(hV - \gamma)^{-1/2}t^{-1}. \tag{28.5}$$

$$\omega_k^2 - (\overline{\omega}_k)^2 \backsim \gamma[(hV - \gamma)/t]^{1/2}.$$

Для детального изучения нестационарного поведения системы при произвольных hV, S, T уравнения (18.9) решались численно. На рис. 28.1 изображена функция распределения $n_k(t)$ для двух последовательных моментов времени и значений параметра $\alpha = 1/6$ и $\alpha = 1$. Начальное распределение выбрано однородным, $hV = 1{,}4\gamma$. Вначале волны растут экспоненциально, максимум $n_k(t)$ находится на поверхности $\omega_k = \omega_p/2$, как это следует из линейной теории. Естественно, что вид функции n_k при этом не зависит от параметра α. В дальнейшем, когда $\sum_k n_k$ не мала по сравнению с N_0, поведение $n_k(t)$ существенно зависит от отношения коэффициентов S и T, описывающих взаимодействие волн, а именно, при $T = 0$ пакет n_k продолжает расти и сужаться, оставаясь на поверхности $\omega_k = \omega_p/2$. При $T \neq 0$ пакет растет и передвигается как целое, несколько деформируясь, к поверхности $\omega_k + 2T_0 N_0 = \omega_p/2$ (т.е. в сторону бо́льших или ме́ньших k в зависимости от знака T). Когда максимум пакета $n_k(t)$ близок к этой поверхности, начинается асимптотическое сужение пакета. Отметим, что вид кривой $\ln n_k(t)$ (см. рис. 28.1) при больших t близок к параболе, что подтверждает выход на автомодельное решение (28.2) – гауссов пакет.

Из рис. 28.2 видно, что процесс установления стационарного состояния от теплового уровня при включении параметрической накачки происходит в три стадии: в первой – линейной – стадии происходит экспоненциальный рост амплитуды, а зависимость от нелинейных характеристик T, системы волн отсутствует. Естественно поэтому, что две кривые $N(t)$ (для $\alpha = 1/6$; 1) на этой стадии совпадают. На второй – нелинейной – стадии становятся существенными взаимный нелинейный сдвиг частоты и параметрическое





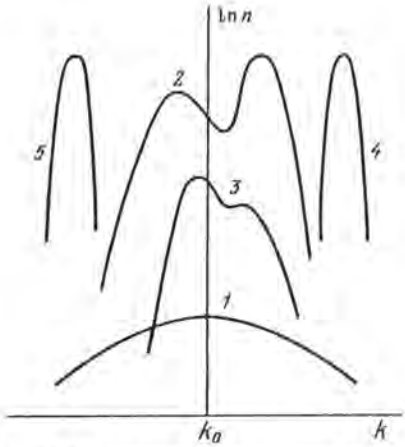
Р и с. 28.1. Функция распределения ПСВ $n(k)$ при $p = 2$. Линейная стадия: *1* – $\alpha = 1/6$; *2* – $\alpha = 1$; асимптотическая стадия: *3* – $\alpha = 1/6$; *4* – $\alpha = 1$

Р и с. 28.2. Зависимость суммарной амплитуды пар $N(t)$ от времени для $p = 2$: *1* – $\alpha = 1/6$; *2* – $\alpha = 1$

взаимодействие пар волн. При этом еще отсутствует характерная для стационарного состояния в S-теории компенсация затухания волн γ_k полной накачкой P_k. Поведение системы на этой стадии наиболее сложно и доступно лишь численному моделированию. Оказывается, что при $T < 0$ интегральная амплитуда проходит через максимум, а при $T > 0$ растет монотонно. На третьей – асимптотической – стадии $|P_k| - \gamma_k \ll \gamma_k$ и происходит медленное приближение к стационарному состоянию (19.1), описываемому S-теорией. Отметим, что знак разности $N - N_0$ в численном эксперименте (см. рис. 28.2) совпадает с тем, который следует из аналитической асимптотики (28.4).

28.2. Большие превышения над порогом неустойчивости. Численный эксперимент выявил существенные качественные отличия в нестационарном поведении системы ПСВ при малых $hV - \gamma \ll \gamma$ и больших $hV - \gamma \gg \gamma$ превышениях над порогом (рис. 28.3 и 28.4 для $hV = 4\gamma$) на второй – нелинейной – стадии переходного процесса. Пакет $n_k(t)$ не ведет себя как целое, когда амплитуда $N(t)$ уже не мала по сравнению с N_0, "прорастает" второй максимум функции $n_k(t)$ в том месте, где $\tilde{\omega}_k = 0$ в данный момент времени. Затем амплитуда второго максимума растет, а первого уменьшается. На рис. 28.3 при $\gamma t = 6$ второй максимум уже больше первого. Кроме того, как видно из рис. 28.4, суммарная амплитуда осциллирует, приближаясь к N_0. В предельном случае недиссипативной среды, когда $(\gamma/Lv) \to 0$, система ПСВ вообще не выходит на стационар, осциллируя бесконечно долго. Это связано с тем, что при $\gamma = 0$ существует интеграл движения $\mathcal{H}_s$ (18.13). В начальный момент времени $\mathcal{H}_s = 0$ и не совпадает со значением $\mathcal{H}_s = -(2T + S)N_0^2$ в основном состоянии S-теории, которое поэтому при $\gamma = 0$ недостижимо.

На последней – асимптотической – стадии, как видно из рис. 28.3, пакет n_k гауссов. Этого и следовало ожидать, так как эта стадия описывается уравнениями (28.1), имеющими автомодельное решение (28.2) – гауссов пакет. Действительно, критерий справедливости уравнений (28.1) есть малость отношения $S(N - N_0)/\gamma \ll 1$. В соответствии с асимптотикой (28.4) $N(t)$ при-



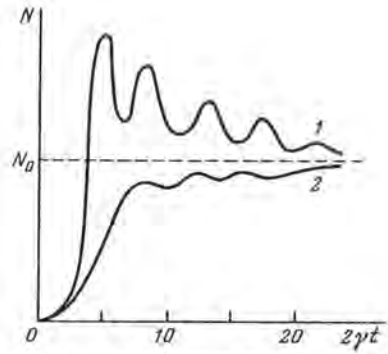


Рис. 28.3. Функция распределения $n(k)$ при $p = 16$; *1* – линейная стадия ($\alpha = 1/6$; 1); *2, 3* – нелинейная стадия ($\alpha = 1/6$; 1 соответственно); *4, 5* – асимптотическая стадия ($\alpha = 1/6$; 1 соответственно)

Рис. 28.4. Зависимость суммарной амплитуды ПСВ $N(t)$ от времени для $p = 16$: *1* – $\alpha = 1/6$; *2* – $\alpha = 1$

ближается к N_0 сверху или снизу, как это видно из рис. 28.4, в зависимости от величины T/S. Причина осцилляций $N(t)$ в переходном режиме очевидна и заключается в ударном возбуждении коллективных колебаний. Их декремент затухания равен γ, а частота $\Omega_0 = [2S\ (2T + S)]^{1/2} \sim hV$ при $hV \gg \gamma$. Поэтому число колебаний порядка $hV/\gamma = p^{1/2}$.

§ 29. Параметрическое возбуждение волн в условиях дрейфа частоты

Анализ экспериментальных данных В.С. Житнюка и Г.А. Мелкова [80] показывает, что при параметрическом возбуждении СВ в ЖИГ в определенной области значений постоянного поля H возникает дрейф собственной частоты СВ ω_k в k-пространстве, т.е. появляется монотонная временная зависимость $\omega_k(t)$. Причиной такого дрейфа является накопление неравновесных СВ/(НСВ), возникающих в результате диссипации ПСВ. Накопление большого числа НСВ в области малых k наблюдалось давно Х. Ле-Галлом и др. [143], В.Н. Веницким и др. [62]. Естественно думать, что в течении некоторого времени число НСВ линейно нарастает со временем, а затем выходит на стационарный режим. В работе Е.В. Подивилова и В.Б. Черепанова [198], по результатам которой написан этот параграф, показано, что в течении времени порядка $10^2\gamma_k^{-1}$ может происходить накопление НСВ с постоянной скоростью, приводящее к постоянному дрейфу частоты ω_k с безразмерной скоростью

$$\eta_k \equiv \frac{1}{2\gamma_k}\ \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \approx \frac{2|\tilde{T}|}{S}\ (p-1)^{1/2}. \tag{29.1}$$

Здесь $\tilde{T}$ – характерное значение величины $T_{kk'}$, описывающей нелинейный

сдвиг частоты ПСВ под действием НСВ. Отметим, что, поскольку величины T и S, вообще говоря, одного порядка, оценка (29.1) демонстрирует возможность возникновения значительного дрейфа частоты, при котором ω_k изменяется на величину γ_k за время $1/\gamma_k$. Разумеется, учет такого дрейфа должен приводить к существенному изменению результатов S-теории, в частности к возникновению конечной ширины пакета ПСВ. Модификации S-теории с учетом дрейфа и посвящен настоящий параграф.

29.1. Качественный анализ формы пакета ПСВ и его амплитуды при линейном дрейфе частоты. Уравнения S-теории представим в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n_k}{\partial t} + 2\gamma_k n_k + 2\operatorname{Im} P_k^* \sigma_k = 2\gamma_k n_k^0, \\ &\frac{\partial \sigma_k}{\partial t} + [i(2\tilde{\omega}_k - \omega_p) + 2\gamma_k]\,\sigma_k + 2iP_k n_k = 0. \end{aligned} \tag{29.2}$$

Они отличаются от (18.6) дополнительным слагаемым $2\gamma_k n_k^0$, описывающим тепловой шум. Строгое обоснование уравнений (29.2) будет дано в гл. 10. Здесь мы только отметим, что в отсутствие накачки они описывают релаксацию n_k к термодинамически равновесному значению n_k^0. Так же, как и в § 28, перейдем к новым переменным $\epsilon_k = \tilde{\omega}_k^0 - \omega_p/2$ – расстройка частоты и $\Omega = (\theta, \varphi)$ – полярный и азимутальный углы волнового вектора $\boldsymbol{k}$. В этих переменных уравнения (29.2) переходят в

$$\frac{\partial n_{\epsilon\Omega}}{\partial t} + 2\gamma_\Omega n_{\epsilon\Omega} + 2\operatorname{Im} P_\Omega^* \sigma_{\epsilon\Omega} = 2\gamma_\Omega n^0, \tag{29.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\epsilon\Omega}}{\partial t} + 2\,[ig(t) + i\epsilon + \gamma_\Omega]\,\sigma_{\epsilon\Omega} + 2iP_\Omega n_{\epsilon\Omega} = 0,$$

$$g(t) = \omega_k - \omega_k^0 = \alpha t + c. \tag{29.4}$$

Здесь $g(t)$ – стационарный дрейф собственной частоты. В отсутствие дрейфа (при $\alpha = 0$) уравнения (29.3) имеют единственное решение

$$n_{\epsilon\Omega} - n^0 = \frac{|P_\Omega|^2 n^0}{\tilde{\epsilon}^2 + \gamma_\Omega^2 - |P_\Omega|^2}, \quad \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon} + c. \tag{29.5}$$

В пределе $n^0 \to 0$ это решение переходит в то из решений S-теории, которое удовлетворяет условию внешней устойчивости (18.18). Действительно, $n_{\epsilon\Omega}$ максимально на резонансной поверхности $\epsilon = 0$ и в пределе малых n^0 может отличаться от нуля только в тех ее точках, где $|P_\Omega| = \gamma_\Omega$. В остальной части поверхности обязано выполняться условие $|P_\Omega| < \gamma$, иначе возможно противоречие: $n_\Omega < 0$. При $|P_\Omega| > \gamma$ решение системы (29.3) нарастает экспоненциально с инкрементом

$$\nu_\Omega = -\gamma_\Omega + (|P_\Omega|^2 - \tilde{\epsilon}^2)^{1/2}. \tag{29.6}$$

Область неустойчивости по частотам ω_k определяется неравенством $\nu_\Omega > 0$. Это дает

$$|\tilde{\epsilon}| < (|P_\Omega|^2 - \gamma_\Omega^2)^{1/2}. \tag{29.7}$$

При линейном дрейфе частоты возможно существование таких пакетов ПСВ, которые с постоянной скоростью по частоте движутся в $\boldsymbol{k}$-простран-

стве без изменения формы, другими словами, уравнения (29.3), (29.4) должны иметь стационарные решения вида

$$n(\Omega, \epsilon, t) = n_\Omega(\epsilon + \alpha t + c). \tag{29.8}$$

Приведем качественный анализ этих решений. При дрейфе в каждый момент времени одни волны попадают в область неустойчивости у резонансной поверхности, а другие из нее выходят. Приходящие волны нарастают экспоненциально с инкрементом $\nu_\Omega(t)$ (29.6), начиная с уровня тепловых флуктуаций. Они проходят область неустойчивости (29.7) за время

$$\tau_0 = 2(|P_\Omega|^2 - \gamma_\Omega^2)^{1/2}/|\alpha| \approx 2(2\gamma(|P| - \gamma))^{1/2}/|\alpha|, \tag{29.9}$$

а их уровень нарастает при этом до

$$n_{\max} = n_\Omega(\tau_0) = n^0 \exp\left[2\int_0^{\tau_0} \nu_0(t)\,dt\right] \approx$$

$$\approx n^0 \exp\left[4(2\gamma)^{1/2}(|P| - \gamma)^{3/2}/|\alpha|\right]. \tag{29.10}$$

Далее, эти волны выходят из области неустойчивости и затухают за время τ_1 со средним декрементом $\nu(\tau_1) \approx (\alpha\tau_1)^2/2\gamma$. Отсюда и из (29.10) следует оценка для τ_1:

$$\tau_1 = (\gamma/|\alpha|\,(|P|^2 - \gamma^2)^{1/2})^{1/2}. \tag{29.11}$$

Вдали от области неустойчивости дрейфом можно пренебречь, и в соответствии с (29.5) $(n_\Omega - n^0) \sim \epsilon^{-2}$. Максимальная интенсивность в пакете определяется выражением (29.10) и лежит на задней границе области неустойчивости (29.7):

$$\Delta\omega_k \approx (|P|^2 - \gamma^2)^{1/2}\alpha/|\alpha|. \tag{29.12}$$

Ширина пакета δ определяется временем, за которое СВ убывают в e раз, пройдя границу области неустойчивости:

$$\delta^2 \approx |\eta|\,\gamma^3/(|P|^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad \eta = \alpha/2\gamma^2. \tag{29.13}$$

При выполнении условия адиабатической медленности дрейфа:

$$\eta < (|P|^2 - \gamma^2)^{3/2}/\gamma^3, \tag{29.14}$$

при котором справедливы описанные выше соображения, ширина пакета δ (29.13) много меньше, чем его сдвиг $\Delta\omega_k$ (29.12). Интегральная интенсивность N_Ω оценивается легко:

$$N_\Omega \approx n_{\max}\delta \sim n^0 \exp\left[\frac{4}{3}(|P|^2 - \gamma^2)^{3/2}/|\alpha|\gamma\right]. \tag{29.15}$$

Предэкспоненциальный множитель в (29.15) на нашем уровне строгости не определяется, для нас существенно только, что в отсутствие шума $n^0 = 0$ амплитуда ПСВ $N_\Omega = 0$. Отметим также, что (29.15) не является решением

задачи, так как для определения числа ПСВ необходимо самосогласованным образом найти перенормированную накачку P_Ω.

Для качественного анализа амплитуды и фазы ПСВ за порогом удобно воспользоваться условием равенства вкачиваемого и диссипируемого потоков энергии:

$$hV\sin\Psi = \gamma, \tag{29.16}$$

где Ψ – разность фаз аномального коррелятора ПСВ и накачки. Таким образом, на векторной диаграмме (рис. 29.1) вектор $\boldsymbol{S}\sigma$ наклонен под углом $\Psi = \arcsin(\gamma/hV)$ к накачке $\boldsymbol{P}$ (мы считаем для определенности, что $S > 0$). Сумма $\boldsymbol{hV} + \boldsymbol{S}\sigma$ есть перенормированная накачка. Оценим теперь угол между $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{S}\sigma$. Из уравнений (29.3) следует, что в стационарном случае

$$\sigma_k = -\frac{iP_k n_k}{\gamma_k + i(\omega_k - \omega_p/2)},$$

$$\operatorname{Re} P_k^* \sigma_k = -\frac{|P_k|^2(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)\, n_k}{\gamma_k^2 + (\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)^2}. \tag{29.17}$$

При не слишком быстром дрейфе частоты пакет является узким по частотам, поэтому в центре пакета $|P_k|^2 = \gamma_k^2 + \Delta\omega$, и

$$\operatorname{Re} P_k^* \sigma_k = -\Delta\omega\, n_k. \tag{29.18}$$

Поскольку при положительном дрейфе $\Delta\omega > 0$, угол между $\boldsymbol{S}\sigma$ и $\boldsymbol{P}$ тупой.

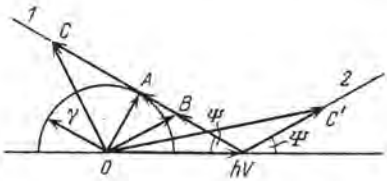


Рис. 29.1. Комплексная плоскость векторов накачки, hV – внешняя накачка, Ψ – фаза пар, γ – затухание, $S\sigma = \sum_k S_{kk'}\sigma$ – поле реакции системы ПСВ; OA – самосогласованная накачка без дрейфа, OB – с положительным дрейфом, OC, OC' – с отрицательным дрейфом. Линия *1* соответствует непрерывной модификации решения S-теории; линия *2* – дополнительное решение при сильном отрицательном дрейфе

Поэтому величина $|\boldsymbol{S}\sigma|$ меньше, чем ее значения в отсутствие дрейфа, т.е. $|S\sigma| < (|hV|^2 - \gamma^2)^{1/2}$. В случае отрицательного дрейфа $\Delta\omega < 0$, угол между $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{S}\sigma$ острый и, следовательно, $S\sigma > (|hV|^2 - \gamma^2)^{1/2}$ при любой скорости дрейфа. Строго говоря, при отрицательном дрейфе условию (29.16) можно удовлетворить и в том случае, когда вектор $\boldsymbol{S}\sigma$ наклонен к $\boldsymbol{hV}$ под углом $(\pi - \operatorname{arctg}\gamma/hV)$ (прямая *2*). Для того чтобы такое решение существовало, необходимо, чтобы дрейф был достаточно велик. Однако это дополнительное решение, как показано ниже, неустойчиво.

29.2. Основные уравнения S-теории с дрейфом. Для исследования пакетов СВ, возникающих при дрейфе с постоянной скоростью, удобно перейти от переменной ϵ к переменной ω – текущему значению расстройки частоты $\omega = \epsilon + \alpha t$. Это аналогично переходу в движущуюся со скоростью α

систему отсчета при преобразовании Галилея. При этом уравнения (29.3) переходят в следующие:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}+\gamma_\Omega\right)n(\omega,\Omega)+\operatorname{Im}P^*_\Omega\,\sigma(\omega,\Omega)=\gamma_\Omega n^0,$$
$$\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}+i\omega+\gamma_\Omega\right)\sigma(\omega,\Omega)+iP_\Omega\,n(\omega,\Omega)=0, \tag{29.19}$$
$$\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}-i\omega+\gamma_\Omega\right)\sigma^*(\omega,\Omega)-iP^*_\Omega\,n(\omega,\Omega)=0.$$

Стационарный дрейф пакета описывается решениями (29.19), не зависящими явно от времени. Они должны, очевидно, удовлетворять граничным условиям

$$[n(\omega,\Omega)-n^0],\ \sigma(\omega,\Omega),\ \sigma^*(\omega,\Omega)\to 0 \quad \text{при} \quad \omega\to\pm\infty. \tag{29.20}$$

Стационарные решения однородной системы (29.19) при $n^0=0$, $|\omega|\to\infty$ имеют следующие асимптотики:

$$\operatorname{Im}P^*_\Omega\,\sigma_{\omega\Omega}\backsim\exp\left[(\gamma\omega\pm i\omega^2)/\alpha\right]\omega^{-3}\exp(-2\gamma\omega/\alpha). \tag{29.21}$$

Ни одно из этих решений не стремится к нулю при $\omega/\alpha\to-\infty$, поэтому никакая линейная комбинация решений однородной системы не удовлетворяет граничным условиям (29.20). Физический смысл этого в том, что в отсутствие теплового шума параметрическое возбуждение волн при дрейфе невозможно. Поэтому для определения формы пакета ПСВ при дрейфе нам необходимо найти регулярное стационарное решение неоднородной системы (29.19), удовлетворяющее граничным условиям (29.20). Требование регулярности решения эквивалентно условию внешней устойчивости без дрейфа.

Уравнения (29.19), в стационарном дрейфе, можно привести к безразмерному виду, вводя новые переменные:

$$x_\Omega=\omega/\gamma_\Omega,\ \eta_\Omega=\alpha/2\gamma_\Omega^2,\ \Pi_\Omega=P_\Omega/\gamma_\Omega,$$
$$u(x)=\operatorname{Re}\Pi^*\sigma(x),\quad V(x)=-\operatorname{Im}\Pi^*\sigma(x), \tag{29.22}$$
$$m(x)=n(x)-n^0.$$

Заметим, что угол Ω в уравнениях (29.19) является параметром, поэтому при исследовании формы пакета по собственным частотам при фиксированном Ω можно опускать зависимость от этого угла. Удобно также произвести преобразование Фурье, позволяющее понизить порядок дифференциального оператора, и сделать еще одну замену переменной:

$$f(x)=\int f_k\exp(ikx)\,dk,$$
$$z=(1+i\eta k^2)/i\eta. \tag{29.23}$$

В результате из (29.19) в стационарном случае получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-(1/4-i|\Pi|^2/4\eta z)\,V=i|\Pi|^2 n^0\delta(z+i/2)/2\eta z. \tag{29.24}$$

Решения этого уравнения выражаются через функции Уиттекера с индексом

$m = 1/2$ [43]: $W_{\kappa,1/2}(z)$ и $W_{-\kappa,1/2}(z)$:

$$W_{\kappa,1/2}(z) = \frac{e^{-z/2}}{\Gamma(1-\kappa)} \int_0^\infty \left(1 + \frac{z}{t}\right)^\kappa e^{-t} dt,$$

$$\kappa = -i\,|\Pi|^2/4\eta. \tag{29.25}$$

Это решение уравнения (29.24) было получено Е.В. Подивиловым и В.Б. Черепановым [198].

29.3. Решения уравнений S-теории с дрейфом. Отметим, что до порога параметрической неустойчивости и при малой скорости дрейфа имеет место обычный допороговый подогрев системы волн. В случае адиабатического дрейфа, когда выполняется условие (29.14),

$$n_\Omega = [\pi\,|\Pi_\Omega|^2 n^0/(1-|\Pi_\Omega|^2)^{1/2} \exp[2(|\Pi_\Omega|^2-1)^{3/2}/3\eta]. \tag{29.26}$$

Именно этот случай мы качественно обсудили в п. 29.1, и приведенный здесь ответ (29.26) качественно совпадает с полученной ранее оценкой (29.15). При неадиабатическом дрейфе, когда $|\eta\Pi_\Omega| > (|\Pi|^2 - 1)^{3/2}$, число ПСВ ограничивается на уровне, близком к тепловому:

$$n_\Omega \approx \pi\,|\Pi_\Omega|^2 n_0 (1 + |\eta|^{-1/3}). \tag{29.27}$$

При этом с ростом скорости дрейфа интегральная величина $\mathrm{Re}\,\Pi^* \sigma$ падает: $\sim|\eta|^{-1}$. Имеется еще один важный случай, когда при быстром дрейфе ($\eta \gg 1$, $|\Pi|$) число ПСВ велико. Это случай большой надкритичности $|\Pi|^2 \gg \eta > 1$, $|\Pi|$. При этом

$$\begin{aligned} n_\Omega &= 4k_\Omega^2 \gamma_\Omega (|\eta|^{1/2}/v_\Omega\,|\Pi_\Omega|^2) \exp(\pi\,|\Pi_\Omega|^2/2\eta), \\ \mu_\Omega &= 2(|\Pi_\Omega|^2/\eta) \ln(|\eta/\Pi|). \end{aligned} \tag{29.28}$$

Перейдем теперь к вопросу о форме пакета ПСВ. В п. 29.1 на качественном уровне мы показали, что при выполнении условия адиабатичности дрейфа (29.14) ширина пакета ПСВ (29.13) много меньше, чем его сдвиг от резонанса $\Delta\omega_k$ (29.12). Точные выражения для δ и $\Delta\omega_k$ совпадают с этими оценками с точностью до постоянной. В случае большой скорости дрейфа и большой надкритичности можно получить

$$\begin{aligned} \Delta\omega_k &= -(|P|^2/2\alpha) \ln[(\alpha/\gamma)^2(|P|^2 + 2\alpha\gamma e^{-C})^{-1}], \\ \delta^2 &= |P|^2\{1 + {}^1/_4 \ln[(\alpha/\gamma)^2(|P|^2 + 2\alpha\gamma e^{-C})^{-1}]\}. \end{aligned} \tag{29.29}$$

Здесь $C = 0{,}577\ldots$ – постоянная Эйлера. Видно, что так же, как и при адиабатическом дрейфе, выполняется условие $|\Delta\omega_k| \gg \gamma_k$. Собственно говоря, на этом заканчивается специфическая часть S-теории, связанная с дрейфом. Далее следует обычная процедура самосогласования числа ПСВ с амплитудой перенормированной накачки P.

29.4. Определение зависимости числа ПСВ от амплитуды накачки – процедура самосогласования. Проще всего это сделать в сферически-симметричном случае (например, для АФМ ЛП), когда для вычисления полного числа ПСВ N достаточно умножить (29.26) и (29.28) на 4π. В ак-

сиально-симметричном случае, характерном для кубического ФМ ЖИГ, на котором был проделан эксперимент с дрейфом, также достаточно просто выполняется интегрирование (29.26) и (29.28) по углам. В результате при $|\eta_0| \ll (|\Pi_0|^2 - 1)^{3/2}$ получим выражение

$$N = N_T(\pi\eta_0/\beta)^{1/2}[|\Pi_0|^2/(|\Pi_0|^2-1)^{3/4}\exp[3(|\Pi_0|^2-1)^{3/2}/|\eta_0|],$$
$$\mu = (|\Pi_0|^2 - 1)^{1/2}\,\mathrm{sign}\,\eta, \tag{29.30}$$
$$N_T = 4\pi^2k^2n_k^0\gamma/v_k, \qquad v_k = \partial\omega_k/\partial k.$$

Здесь N_T – число тепловых СВ в слое шириной $\Delta\omega_k = \pi\gamma_k$ вблизи резонансной поверхности. Если $|\Pi_0|^2 \gg |\eta_0| \gg 1, |\Pi_0|$, то

$$N = 2N_T|\eta_0||\Pi_0|(\pi\beta)^{-1/2}\exp(\pi|\Pi_0|^2/2|\eta_0|),$$
$$\mu = (2|\Pi_0|/\eta_0)\ln(|\eta_0|/|\Pi_0|). \tag{29.31}$$

В этих выражениях Π_0 и η_0 – значения Π_Ω и η_Ω на резонансной поверхности, а коэффициент $\beta \approx 2$ характеризует угловую зависимость Π_Ω:

$$|\Pi_\Omega|^2 = |\Pi_0|^2 - \beta\cos^2\theta. \tag{29.32}$$

Видно, что в случаях различной симметрии – сферической и аксиальной – соответствующие формулы отличаются друг от друга только предэкспоненциальным фактором. При дальнейшем преобразовании это приведет только к несущественному отличию логарифмических множителей. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем аксиальной симметрии, для которого В.В.Зауткиным и др. [90] поставлен эксперимент.

Следующим этапом самосогласования является использование связи между P и hV. Из формулы (18.3) можно получить

$$|hV|^2 = |P|^2 + 2\mu\gamma|S|N + (SN)^2\gamma^2(1+\mu^2)/|P|^2,$$
$$\mu = \mathrm{Re}\,P^*\Sigma/\gamma N. \tag{29.33}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$SN_\pm = \frac{|P|^2}{1+\mu^2}\left[-\mu \pm \left(\mu^2 + \frac{1+\mu^2}{|P|^2}(h^2V^2 - |P|^2)\right)^{1/2}\right]. \tag{29.34}$$

Если выполняется условие адиабатичности дрейфа (29.14), то число ПСВ N велико по сравнению с тепловым шумом, а $\mu = \alpha(|P|^2 - \gamma^2)^{1/2}/|\alpha|\gamma$. Тогда из (29.34) следует

$$|S|N_\pm = -\frac{\alpha}{|\alpha|}(|P|^2-\gamma^2)^{1/2} \pm \gamma(p-1)^{1/2}, \quad p = (h/h_{\mathrm{th}})^2. \tag{29.35}$$

Наиболее прост для анализа случай $S\alpha > 0$. При этом в (29.35) имеет смысл лишь решение N_+. При малом уровне теплового шума

$$\epsilon = |S|N_T/\gamma \ll 1. \tag{29.36}$$

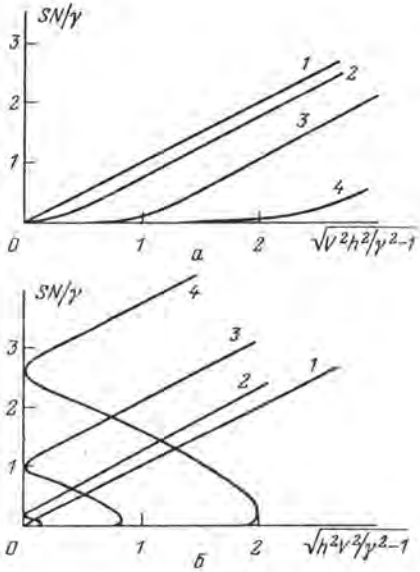


Рис. 29.2. Зависимость числа ПСВ N от амплитуды накачки при различных скоростях собственного дрейфа: *1* – $|\eta| = 0$; *2* – $|\eta| = 10^{-2}$; *3* – $|\eta| = 3 \cdot 10^{-2}$; *4* – 0,1. $S\partial\omega_k/\partial t > 0$ (*а*); $S\partial\omega_k/\partial t < 0$ (*б*)

Из (29.35) и (29.30) следует, что

$$|S|N_+ = \gamma(p-1)^{1/2} - (\alpha/4\gamma^2)\{\ln[(p-1)/p]\}^{1/3}. \tag{29.37}$$

Здесь первое слагаемое соответствует известному результату S-теории. С ростом скорости дрейфа число ПВ падает. При очень малой надкритичности, когда $p - 1 < \eta^2$, формула (29.37) неприменима, так как нарушается условие (29.14). В этом случае число параметрических волн невелико по сравнению с числом тепловых. При большой надкритичности применимость условия (29.14) также нарушается, и необходимо использовать формулы (29.31). При этом качественное поведение зависимости N от скорости дрейфа η сохраняется (рис. 29.2).

При отрицательной скорости дрейфа ситуация существенно сложнее, поскольку могут иметь смысл оба решения (29.35). При не слишком малых уровнях шума и не слишком больших скоростях дрейфа существует единственное решение, соответствующее корню N_+ в (29.35) и описываемое формулой (29.37). При $S\alpha \to 0$ это выражение, естественно, совпадает с результатом S-теории. Если уровень шума мал, а скорость дрейфа достаточно велика, то имеются три решения для числа волн N и перенормированной накачки $|\Pi|$. Наименьшее из них соответствует ситуации, когда уровень шума настолько мал, а скорость дрейфа велика, что амплитуда ПСВ за время прохождения области неустойчивости не успевает вырасти до значительной величины. Другие два решения соответствуют большим N, промежуточное значение неустойчиво. На рис. 29.2, *б* приведен набор зависимостей числа волн N от мощности накачки p, вычисленных для различных значений скорости дрейфа α и амплитуды теплового шума $\epsilon = 10^{-3}$. Видно, что имеется гистерезис зависимости числа ПСВ от мощности накачки при фиксированной скорости дрейфа. При мощности накачки, меньшей некоторой, критический уровень ПСВ близок к тепловому. При $p > p_1$, где

$$p_1 \approx 1 + [{}^3/_4(|\alpha|/\gamma^2)\ln(|\alpha|/4\gamma^2\epsilon)]^{2/3}, \tag{29.38}$$

могут существовать два устойчивых состояния ПСВ. С ростом мощности накачки при $p > p_2$, где

$$p_2 = 1 + [{}^3/_4(|\alpha|/\gamma^2)|\ln\epsilon|]^{2/3}, \tag{29.39}$$

остается единственное состояние, которое при $\alpha \to 0$ переходит в стандартное решение S-теории. Амплитуда этого решения близка к известному выражению

$$|S|N = \gamma(p-1)^{1/2}. \tag{29.40}$$

Следует подчеркнуть, что число ПВ на решении (29.37), соответствующем S-теории в отсутствие дрейфа, при увеличении скорости дрейфа и при фиксированной мощности накачки неограниченно растет.

В заключение этого параграфа приведем выражения для частоты однородных коллективных колебаний в случае адиабатического дрейфа:

$$\Omega_{\pm} = -i\gamma \pm [4(SN + \Delta\omega_k)(2T + S)N - \gamma^2]^{1/2}. \tag{29.41}$$

Здесь $\Delta\omega_k$ – сдвиг пакета ПСВ, задаваемый (29.12). Нужно сказать, что выражения (29.41) получены Е.В.Подивиловым, В.Б.Черепановым [198] в результате громоздкого аккуратного расчета, при этом они совпадают с выражениями, которые можно получить из простых уравнений S-теории без дрейфа для узкого пакета ПСВ, локализованного на поверхности $\widetilde{\omega}_k = \Delta\omega_k + \omega_p/2$. Кстати, то же самое можно сказать относительно выражений для общего числа ПСВ N и Σ. Таким образом, в тех случаях, когда число ПСВ велико в сравнении с тепловым шумом, роль дрейфа в значительной мере сводится к модификации условия внешней устойчивости: вместо $2\widetilde{\omega}_k = \omega_p$ получается $2\widetilde{\omega}_k = 2\Delta\omega_k + \omega_p$, где положение центра пакета $\Delta\omega_k$ задается выражениями (29.12) или (29.29).

§ 30. Параметрическое возбуждение спиновых волн некогерентной накачкой при шумовой модуляции их частот

Хорошо известно, что к параметрической неустойчивости волн приводит не только монохроматическая, но и шумовая накачка. Порог этой неустойчивости зависит от ν – частотной ширины накачки. По порядку величины

$$\langle h_{\text{th}}^2 V^2 \rangle \approx \gamma(\gamma + 2\nu). \tag{30.1}$$

Существует ошибочное мнение, что при некогерентной накачке фазовый механизм ограничения амплитуды ПСВ не работает. Однако легко увидеть, что амплитуда ПСВ и фазовые соотношения, вычисленные по S-теории, не зависят от ширины спектра накачки ν при $\nu \ll \gamma$. Поэтому следует ожидать, что при $\nu \sim \gamma$ эти величины качественно не изменятся, т.е. аномальные корреляторы σ_k в парах ПВ не малы по сравнению с нормальными n_k. Значит, и при $\nu > \gamma$ аномальные корреляторы ведут себя как некоторая функция от ν/γ, которая стремится к постоянной, когда $\nu/\gamma \to 0$, и если эта функция убывает достаточно медленно с ростом ν/γ, то существует такая область $\nu > \gamma$, в которой самосогласованное взаимодействие является главным.

Особенности нелинейного поведения СВ при шумовой накачке изучались теоретически В.Б.Черепановым [227] и экспериментально В.В.Зауткиным и др. [90]. По их результатам и написан этот параграф.

30.1. Уравнения S-теории при шумовой накачке. Будем считать, что накачка $\widetilde{h}(t)$ есть $\widetilde{h}(t) = h(t)\exp(-i\omega_p t)$, где $h(t)$ – случайная функция

с шириной спектра ν такой, что $\omega_p \gg \nu \gg \gamma$. Уравнения S-теории для медленных амплитуд ПСВ в этом случае легко получить из (18.11), (18.12) заменой $h \to h(t)$. Из этих уравнений, в частности, следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_k\right)|a_k|^2 + 2\,\mathrm{Im}\,[P_k^*(t)a_k(t)a_{-k}(t)] = 0, \tag{30.2}$$

$$|a_k(t)|^2 = \\ = -2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \exp(-2\gamma_k\tau)P_k^*(t-\tau)a_k(t-\tau)a_{-k}(t-\tau)\,d\tau. \tag{30.3}$$

Поскольку частота флуктуаций подынтегрального выражения велика по сравнению с γ_k, то при интегрировании по τ за время $(2\gamma_k)^{-1}$ происходит усреднение. Именно:

$$\gamma_k\,|a_k(t)|^2 = -\mathrm{Im}\,\langle P_k^* a_k a_{-k}\rangle. \tag{30.4}$$

Таким образом, число волн $n_k = |\overline{a_k}|^2$ (черта означает усреднение по случайным фазам пар ПСВ), а вместе с ним и перенормированная частота $\widetilde{\omega}_k$ не флуктуируют при шумовой накачке. Для величины $\sigma_k = \overline{a_k a_k}$ аналогично можно получить

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2(\gamma_k + i\widetilde{\omega}_k)\right]\sigma_k + 2iP_k(t)n_k = 0, \tag{30.5}$$

$$\sigma_k(t) = -2in_k\int_0^\infty P_k(t-\tau)\exp[-2(\gamma_k + i\omega_k)\tau]\,d\tau, \tag{30.6}$$

$$\mathrm{Im}\,\langle P_k^*\sigma_k\rangle = -2\pi n_k P^2(\boldsymbol{k}, 2\widetilde{\omega}_k), \tag{30.7}$$

$$P_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\boldsymbol{k}, \omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega,$$

$$\langle P(\boldsymbol{k}, \omega), P^*(\boldsymbol{k}, \omega')\rangle = P^2(\boldsymbol{k}, \omega)\delta(\omega - \omega'). \tag{30.8}$$

Подставляя (30.6) в (30.4), получим $\gamma_k n_k = 2\pi n_k P^2(\boldsymbol{k}, 2\widetilde{\omega}_k)$. Стационарное решение $n_k \neq 0$ существует при

$$2\pi P^2(\boldsymbol{k}, 2\widetilde{\omega}_k) = \gamma_k. \tag{30.9}$$

Если для какого-либо $\boldsymbol{k}$ выполняется неравенство

$$2\pi P^2(\boldsymbol{k}, 2\widetilde{\omega}_k) > \gamma_k,$$

то для этого $\boldsymbol{k}$ происходит нарастание амплитуды ПВ, что противоречит предположению о существовании стационарного состояния. Таким образом, для всех $\boldsymbol{k}$ должно быть выполнено условие внешней устойчивости:

$$2\pi P^2(\boldsymbol{k}, 2\widetilde{\omega}_k) \leqslant \gamma_k, \tag{30.10}$$

причем n_k отлично от нуля только в случае знака равенства в (3.2). Это условие аналогично условию внешней устойчивости, возникающему при монохроматической накачке $|P_k| \leqslant \gamma_k$. Из обычного выражения для перенормировки накачки (например, (18.3)) и уравнения (30.5) получим

$$h_\omega^2 V_k V_{k'}^* = P^2(k, k', \omega) - 2\int dk_1 \left[\frac{S(k, k_1) P(k, k', \omega) n(k_1)}{\omega - 2\tilde{\omega}(k_1) + 2i\gamma(k_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{S(k', k_1) P(k, k_1, \omega) n(k_1)}{\omega - 2\tilde{\omega}(k_1) - 2i\gamma(k_1)}\right] + \tag{30.11}$$

$$+ \int dk_1 dk_2 n(k_1) n(k_2) \frac{S(k, k_1) S^*(k', k_1) P^2(k_1, k_2, \omega)}{(\omega - 2\tilde{\omega}(k_1) + 2i\gamma(k_1))(\omega - 2\tilde{\omega}(k_1) - 2i\gamma(k_2))}.$$

Решая это уравнение совместно с условием внешней устойчивости (30.10), можно получить распределение ПВ n_k.

Как известно, при параметрическом возбуждении волн когерентной накачкой n_k отлично от нуля в малой области k-пространства. В дальнейшем мы увидим, что при $\nu \ll kv$ (v – групповая скорость ПВ) область, занятая ПВ, тоже мала. Это позволяет нам считать все коэффициенты в (30.11) не зависящими от k. В ряде важных случаев, например при сферической и аксиальной симметрии распределения ПВ, можно избавиться в уравнении от угловой зависимости матричных элементов. Это позволяет упростить уравнение (30.11), переходя от переменной k к переменной $\tilde{\omega}_k$:

$$\tilde{h}_{2\omega}^2 V^2 = P_{2\omega}^2 \left\{1 - S \fint \frac{n(\tilde{\omega}_k) d\omega_k}{\tilde{\omega}_k - \omega} + \right.$$

$$\left. + S^2 \left(\fint \frac{n(\tilde{\omega}_k) d\tilde{\omega}_k}{\tilde{\omega}_k - \omega}\right)^2 + \pi^2 S^2 n_\Omega^2 \right\}, \tag{30.12}$$

$$n(\tilde{\omega}_k) = \int (n_k k^2 / v_\Omega) d\Omega.$$

30.2. Распределение ПСВ за порогом при шумовой накачке. В.Б.Черепанов проанализировал [227] полученные им уравнения (30.12) для специального вида спектральной плотности шумовой накачки

$$2\pi h_{2\omega}^2 V^2 = \gamma p (1 - \omega^2/\nu^2), \quad \nu \gg \gamma. \tag{30.13}$$

В области малых надкритичностей ($p - 1 < 1$) он получил

$$3\pi S n_\omega = (p-1)(\sqrt{3}\,\omega + \mu)^{3/2} (3\mu - \sqrt{3}\,\omega)^{1/2} / \nu^2,$$
$$\mu = (p-1)^{1/2} \nu \operatorname{sign} S. \tag{30.14}$$

Следует отметить, что это решение отлично от нуля в несимметричном интервале $(-\mu/\sqrt{3}, \sqrt{3}\mu)$ и не является симметричным, несмотря на симметричный профиль накачки (30.13). В предельном случае больших

надкритичностей из (30.12) и (30.10) следует

$$3\pi S n_\omega = (p-1)^{1/2}(3-4\omega^2/\nu^2)^{3/2}. \tag{30.15}$$

Это решение отлично от нуля в симметричной области $|\omega| < \omega_1 = \sqrt{3}\,\nu/2$, более узкой, чем область неустойчивости $|\omega| < \nu$, в которой $h^2_{2\omega} > 0$. Такое сужение характерно для S-теории. Благодаря этому поведение $h^2_{2\omega}$ при $|\omega| > \omega_1$ несущественно для нашей задачи и решение (30.12) качественно справедливо при любом виде спектральной плотности накачки.

Интегрируя (30.14) и (30.15) по ω, легко получить зависимость полного числа ПСВ от надкритичности:

$$N = 4\nu(p-1)^{3/2}/9\pi\sqrt{3}\,|S|, \qquad p-1 < 1, \tag{30.16}$$

$$N = \sqrt{3}\,\nu(p-1)^{1/2}/2\pi\,|S|, \qquad p \gg 1. \tag{30.17}$$

При $\nu \sim \gamma$ выражение (30.17) согласуется с формулой (19.1) для случая когерентной накачки. Что касается соответствия формул (30.15) и (19.1) для малых надкритичностей, то при $\nu \sim \gamma$ справедлива первая из них, так как в этом случае нельзя говорить о жесткой корреляции фаз волн в парах. При дальнейшем уменьшении ν член $\mathrm{Re}\,\langle P^*_k \sigma_k \rangle$ в (30.11) будет мал по параметру $(\nu/\gamma)^2$, и при малых ν следует учитывать квадратичный по σ член.

Определим теперь предел применимости приближения самосогласованного поля при параметрическом возбуждении волн шумовой накачкой. Для этого сравним член $\mathrm{Im}\langle P^*_k \sigma_k \rangle$ в уравнении для n_k (30.2) с опущенными в нем членами кинетического уравнения, имеющими порядок величины $(SN)^2 n_k/(kv)$. В результате получим, что наш подход справедлив при

$$\nu^2(p-1) < \gamma k v. \tag{30.18}$$

В твердых телах $kv/\gamma \approx 10^4 \div 10^6$, что обеспечивает достаточно широкие рамки применимости для приближения S-теории. Отметим также, что противоположный предельный случай, когда рассеяние ПВ превосходит их самосогласованное взаимодействие, изучался И.Б.Левинсоном [141].

Приведем теперь оценку для углового размера возбуждаемых пакетов. Как и в случае монохроматической накачки в приближении S-теории, при шумовой накачке угловые размеры пакетов ПВ равны нулю. Это легко установить на примере простейшей модели

$$V_k = Vf(\theta), \quad S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = Sf(\theta)f^*(\theta'), \quad \gamma_k = \gamma,$$

качественно справедливой в ФМ. При этом $P^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}', \omega) = P^2_\omega f(\theta) f^*(\theta')$, и в (30.11) удается исключить зависимость от углов, ПВ сосредоточены в угле θ_0, где $|f(\theta_0)|$ максимально. Можно показать, что слабое рассеяние ПВ приводит к уширению пакета на угол $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta \approx (SN/kv) \approx \nu(p-1)^{1/2}/kv. \tag{30.19}$$

В заключение этого параграфа отметим, что развитая в нем теория находится в хорошем соответствии со специально поставленным экспериментом В.В.Зауткина, Б.И.Орла и В.Б.Черепанова [90]. Это позволяет считать, что амплитуда ПСВ в условиях шумового возбуждения ограничивается, как и при когерентном возбуждении, фазовым механизмом S-теории.

§ 31. Неустойчивые коллективные колебания – автоколебания намагниченности

Хорошо известно, что при параметрической генерации СВ стационарный режим часто не устанавливается и намагниченность совершает сложные автоколебания – АК – вокруг некоторого среднего значения. Основные экспериментальные факты, относящиеся к АК и полученные для высококачественных кристаллов ЖИГ при параллельной накачке, заключаются в следующем [17]:

1. Частоты АК намагниченности лежат в интервале от 10^4 до $\sim 10^6$ Гц (в зависимости от мощности накачки и величины постоянного магнитного поля). При небольшом превышении порога спектр АК состоит из одной линии, с ростом уровня мощности происходит увеличение числа линий и смещение их в сторону более высоких частот. При больших превышениях над порогом спектр имеет шумовой характер.

2. Порог АК обычно превышает порог параметрического возбуждения СВ: $0{,}1 \div 1$ дБ, за исключением области малых волновых векторов $k \approx \approx 10^3 \div 10^4$ см$^{-1}$, где порог АК увеличивается. Порог также возрастает при введении в кристалл неоднородностей.

3. Наблюдается гигантская кристаллографическая анизотропия свойств АК, значительно превышающая анизотропию спектра СВ. Так, интенсивность АК в ЖИГ при ориентации намагниченности вдоль оси [111] превышает интенсивность этих колебаний вдоль оси [100] приблизительно в 100 раз.

Вопрос о физической природе АК был одной из основных проблем в задаче о параметрическом возбуждении СВ. Для объяснения природы АК привлекались различные гипотезы [17]. Сейчас, однако, все они представляют только исторический интерес. В рамках S-теории АК находят естественное объяснение как результат развития описанной в гл. 5 неустойчивости стационарного состояния относительно возбуждения КК. Если хотя бы для одной моды (с номером m) выполнены условия неустойчивости $S_m(2T_m + S_m) < 0$, то в рамках S-теории система ПСВ не имеет устойчивых стационарных состояний. При этом можно представить две возможности – "выброс" системы за пределы применимости S-теории (при этом должна сильно возрасти амплитуда возбужденных волн) или установление колебаний вокруг стационарного состояния. Эти колебания, если они развиваются, и наблюдаются на опыте как автоколебания намагниченности. Из общих соображений следует ожидать, что АК могут носить как регулярный, как и хаотический характер, в последнем случае их можно трактовать как "вторичную" турбулентность с временным масштабом, много большим масштаба "основной" турбулентности – периода СВ.

Как видно из формулы (23.6), неустойчивость стационарного состояния является чисто апериодической ($\mathrm{Re}\,\Omega_m = 0$), поэтому вторичная турбулентность является сильной. Это делает крайне затруднительным аналитическое решение вопроса о нелинейной стадии развития КК и о характере вторичной турбулентности, если таковая возникает. Поэтому представляется целесообразным численное моделирование вторичной турбулентности на ЭВМ. При этом расчет реальной ситуации, например для ЖИГ, потребовал бы огромных затрат машинного времени и вряд ли целесообразен. Это заставляет

обращаться к численному эксперименту на упрощенных моделях основного состояния. В работах В.С. Львова, С.Л. Мушера, С.С. Старобинца [152], В.Л. Гранкина и др. [70] описан численный эксперимент по возбуждению АК на модели "двух лучей", в которой считалось, что СВ сосредоточены при двух фиксированных углах $\theta_1 = \pi/2$ $\theta_2 = \pi/4$. Значения коэффициентов S_0 и T_0 выбирались близкими к вычисленным для ЖИГ при ориентации магнитного поля относительно оси [111] (см. ниже), так что выполнялись условия неустойчивости нулевой моды. Численный эксперимент показал, что в такой модели устанавливаются АК амплитуд и фаз волн на лучах

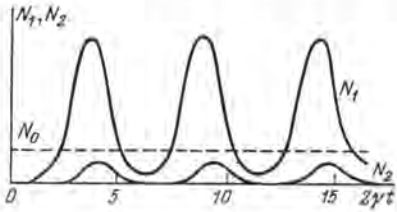


Рис. 31.1. Зависимость амплитуды пар на лучах от времени при неустойчивости нулевой моды (N_1 и N_2 отвечают лучам с $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi/4$)

(рис. 31.1). Зависимость частоты этих АК от уровня накачки качественно согласуется с аналогичной зависимостью, обычно наблюдающейся в лабораторном эксперименте. На модели двух лучей был, кроме того, проделан эксперимент, моделировавший развитие коллективной неустойчивости при $m \neq 0$. При этом изучался вопрос о поведении суммарной амплитуды волн на нелинейной стадии развития этой неустойчивости, интересный потому, что на линейной стадии изменения суммарной амплитуды не происходит. Были выбраны лучи с $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2, \varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$. Численный эксперимент показал (рис. 31.2), что устанавливается режим, в котором испытывают колебания как разность, так и сумма амплитуд волн на лучах. Колебания суммы амплитуд возникают из-за взаимодействия коллективных мод с различными m.

Существенным результатом этих численных экспериментов было доказательство того, что при $p < p_c \approx (1{,}0 \div 1{,}5)$ дБ система ПСВ выходит на устойчивый предельный цикл, областью притяжения которого является все фазовое пространство. При $p > p_c$ траектории вблизи этого цикла становятся экспоненциально неустойчивыми, причем средний по циклу инкремент расходимости растет пропорционально $(p - p_c)$. При малых $(p - p_c)$ вблизи предельного цикла образуется узкий слой, заполненный экспоненциально неустойчивыми траекториями. Расходимость траекторий исследовалась и в лабораторном эксперименте В.Л. Гранкина и др. [70]. Для этого на один и тот же экран записывались зависимости $\chi''(t)$ для разных импульсов накачки одной серии с фиксированной надкритичностью и другими условиями эксперимента. При этом для разных импульсов из-за флуктуаций система волн каждый раз стартует (при $t = 0$) с различными начальными условями. При надкритичностях $p = 2{,}5$ дБ последовательные кривые $\chi''(t)$ совпадают друг с другом. При превышении $p > 2{,}5$ дБ, когда появляется резкое уширение фурье-спектра АК, кривые $\chi''(t)$ для разных импульсов начинают расходиться. Вначале расходимость близких траекторий сказывается лишь при больших временах.

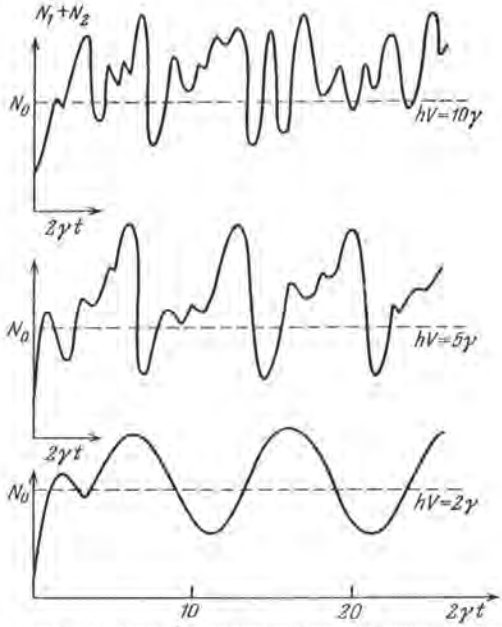


Рис. 31.2. Зависимость суммарной амплитуды пар на лучах от времени при неустойчивости моды $m = 2$

Затем по мере увеличения надкритичности "время разбегания" становится сравнимым с периодом АК $\tau \approx (3 \div 5)\ \Delta_0$ и последовательные кривые $\chi''(t)$ образуют широкую полосу.

Резюмируя, можно сказать, что численный эксперимент на моделях показывает, что в рамках уравнений S-теории развитие внутренней неустойчивости основного состояния приводит к автоколебаниям. Свойства этих АК – зависимость частоты и спектрального состава от мощности накачки – сопоставимы со свойствами реальных АК, наблюдаемых в лабораторном эксперименте. В частности, при малых надкритичностях в лабораторном и численном экспериментах АК являются периодическими. Образцом такого движения в фазовом пространстве является устойчивый предельный цикл. В обоих типах экспериментов переход к стохастическим АК с ростом надкритичности происходит не с помощью добавления новых типов движения на несоизмеримых частотах, а сопровождается уширением уже существующих спектральных линий с кратными частотами и связан с потерей устойчивости фазовых траекторий, приводящей к их разбеганию. Далее, как в численном, так и в лабораторном экспериментах развитие АК не влияет существенно на средний уровень ПСВ. Численный эксперимент показывает, кроме того, что при развитии неустойчивости на нулевой моде происходят глубокие, а при развитии неустойчивости на высших модах – мелкие колебания суммарной амплитуды волн и вместе с ней и наблюдаемой величины χ''. Любопытно, что возникновение АК в численном эксперименте, как правило, сопровождалось уменьшением среднего значения χ'. Эта закономерность наблюдается и в лабораторном эксперименте.

Полученные выше результаты позволяют сделать предсказание относительно того, в каких случаях АК должны наблюдаться в реальных экспериментах. Приведем значения коэффициентов S_m и T_m для ЖИГ, вычисленные С.Л. Мушером, С.С. Старобинцем и В.С. Львовым [152] для типичной экспериментальной ситуации: $N_z = 1/3$ (сфера), $\omega_p = 9{,}4$ ГГц, $k = 0$ $(H = H_c)$, $\omega_M = 49$ ГГц, $\omega_a = 0{,}23$ ГГц (комнатная температура), табл. 31.1.

Видно, что не только значения, но и знаки коэффициентов зависят от ориентации намагниченности. Подставляя табличные данные в критерий неустойчивости, можно убедиться, что в "легком" направлении [111] имеется неустойчивость относительно нулевой моды, в то время как в "трудном" направлении [100] все моды в рассмотренной ситуации устойчивы. На опыте при $H = H_c$ в "трудном" направлении АК действительно отсутствуют вплоть до превышений $p_2 \approx 6 \div 7$ дБ, соответствующих второму порогу, в "легком" же направлении наблюдаются интенсивные АК практически сразу за порогом p_1 [17].

Условия возникновения автоколебаний в различных экспериментальных ситуациях подробно проанализированы В.В. Зауткиным и С.С. Старобинцем [87]. Варьируя в широких пределах коэффициенты гамильтониана S_m, T_m (изменяя намагниченность с помощью температуры и концентрации примесей, изменяя форму образца – сфера, цилиндр, диск – и направление намагниченности), они, в частности, показали, что интенсивные АК возникают только при неустойчивости нулевой моды по критерию (23.7), в то время как неустойчивость мод с $m \neq 0$ всегда сопровождается возникновением АК малой амплитуды. Другие наблюдаемые особенности АК также находят естественное объяснение в рамках S-теории.

В последнее время в связи с успехами теории динамических систем в изучении перехода к турбулентности в рамках представлений о *стохастическом* (или *странном*) *аттракторе* возобновился интерес к изучению свойств АК в системе ПСВ. В частности, в работе Г. Гибсона и Ч. Джафриса [68] детально изучен переход от периодических АК к хаосу в ЖИГ (с примесью галлия) при параметрическом возбуждении СВ методом поперечной накачки на частоте $\omega_p/2\pi = 1{,}3$ ГГц. Исследованы фазовый портрет АК и *функция последования Пуанкаре* в зависимости от надкритичности. Обнаружены бифуркации удвоения периода АК. Показано, что в фазовом пространстве этой системы есть несколько сложных аттракторов, переход между которыми сопровождается гистерезисом. Бифуркации удвоения цикла АК были обнаружены также Ямазаки (1984 г., а) при параллельной накачке СВ в АФМ $CuCl_2\,2H_2O$ на частоте $\omega_p/2\pi = 8{,}9$ ГГц при температуре 1,4 К и надкритичности $p > 10^2$. Впоследствии аналогичные результаты

Таблица 31.1

Коэффициенты S_m, T_m в единицах $2\pi g^2$ для ЖИГ

Ориентация	T_0	S_0	$T_2 = T_{-2}$	S_2	S_{-2}
[100]	0,28	0,52	0,11	0,01	–0,36
[111]	–0,75	0,30	0,05	0,01	–1,27

были получены Х. Ямазаки и др. [239, 240] и при параметрическом возбуждении СВ методом параллельной накачки в квазидвумерном ФМ $(CH_3NH_3)_2CuCl_4$. Очень интересные результаты по исследованию перехода к хаосу АК в АФМ ЛП получены А.И. Смирновым [208]. К сожалению, сейчас еще рано говорить о том, каков "сухой остаток" от этих работ, во-первых, для понимания проблемы стохастизации в рамках общей теории динамических систем (кроме очевидного утверждения, что нелинейные спиновые волны – одна из систем, к которой она применима) и, во-вторых, для физики нелинейных спиновых волн собственно. Поэтому в этой книге мы не будем обсуждать интересную проблему перехода к хаосу при АК спиновых волн с точки зрения общей теории динамических систем. Отметим только, что численное моделирование перехода к хаосу в АК на моделях с небольшим числом уравнений проводилось Е.В. Асташкиной, А.С. Михайловым [51]. Однако вопрос о соответствии этих моделей эксперименту, в котором возбуждаются СВ в широкой области k-пространства, остается открытым.

В заключение надо сказать, что описанная здесь простая теория АК предсказывает, что порог их возникновения h_a совпадает с порогом параметрического возбуждения h_{th}, а частота автоколебаний при $h = h_a$ равна нулю. В экспериментах же наблюдается $h_a > h_{\text{th}}$ и ненулевая начальная частота.

В монокристаллах ЖИГ порог АК h_a обычно выше, чем h_{th} на $0{,}1 \div 1$ дБ, а начальная частота не коррелирует с величиной порога и в зависимости от постоянного магнитного поля изменяется в пределах $10^4 \div 10^5$ Гц [17]. Эти факты можно объяснять влиянием слабого нелинейного затухания, не изменяющего существенно величины χ' и χ'', присутствием в кристаллах случайных неоднородностей, отсутствием точной аксиальной симметрии, обратным влиянием образца на резонатор и т.п. Для выяснения относительного вклада этих механизмов необходимо дальнейшее теоретическое и экспериментальное изучение АК.

§ 32. Автоколебания и коллапс при параметрическом возбуждении узкого пакета волн

Ранее мы считали, что порог параметрической неустойчивости минимален для пар волн с векторами $\pm\boldsymbol{k}$, заполняющих линию или поверхность в $\boldsymbol{k}$-пространстве. При этом сумма фаз в паре является динамической переменной, а индивидуальные фазы волн хаотизированы. Здесь мы опишем ситуацию, когда порог возбуждения минимален для единственной пары $\pm\boldsymbol{k}_0$, например, при параллельной накачке в одноосных ФМ с анизотропией типа "легкая плоскость". Принципиальной особенностью задачи является узость возбуждаемых в $\boldsymbol{k}$-пространстве пакетов волн. Это не позволяет пользоваться статистическим описанием, как в S-теории, однако делает возможным упростить точный гамильтониан взаимодействия по другому параметру – узости пакета. Для этого задачу необходимо сформулировать на языке волн огибающих.

32.1. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд и "универсальная" неустойчивость одной пары. Используя канонические уравнения движения с точным гамильтонианом и предполагая, что в $\boldsymbol{k}$-пространстве возбуждены

узкие пакеты волн

$$a_k = A(k - k_0) + B(k - k_0),$$

получим также, как и в гл. 3, уравнения для огибающих $A(r)$, $B(r)$ – фурье-компонент $A(\vec{\kappa})$ и $B(\vec{\kappa})$:

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right) + \tfrac{1}{2}\hat{L}\right]A = -i\gamma A + hVB^* +$$

$$+ (\omega_{k_0} - \tfrac{1}{2}\omega_p + T|A|^2 + 2S|B|^2)A,$$

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v}\nabla\right) + \tfrac{1}{2}\hat{L}\right]B = -i\gamma B + hVA^* +$$

$$+ (\omega_{k_0} - \tfrac{1}{2}\omega_p + T|B|^2 + 2S|A|^2)B, \qquad (32.1)$$

$$S \equiv T(k_0, \bar{k}_0, k_0, \bar{k}_0), \qquad T \equiv T(k_0, k_0, k_0, k_0),$$

$$\mathbf{v} = \partial\omega_k/\partial k, \ \hat{L} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2\omega_k}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

Уравнения (32.1) имеют тривиальное решение $|A(r)| = |B(r)| = A^0$, где

$$A(r) = A_0\exp(-i\Psi_1), \quad B(r) = A_0\exp(-i\Psi_2),$$

$$2|A_0|^2 = N, \quad SN = ((hV)^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad \sin(\Psi_1 + \Psi_2) = \gamma/hV, \qquad (32.2)$$

соответствующее возбуждению стоящей волны $\pm k_0$. Покажем, что решение (32.2) практически всегда неустойчиво относительно нарастания модуляций амплитуд и фаз волн огибающих:

$$\delta A(r, t), \ \delta B(r, t) \sim \exp[i\vec{\kappa}r + \nu(\vec{\kappa})t].$$

На языке исходного гамильтониана это означает неустойчивость по отношению к четырехволновым процессам

$$2\omega(\pm k_0) = \omega(\pm k_0 + \vec{\kappa}) + \omega(\pm k_0 - \vec{\kappa}), \qquad (32.3)$$

$$\omega(k_0) + \omega(-k_0) = \omega(k_0 + \vec{\kappa}) + \omega(-k_0 - \vec{\kappa}). \qquad (32.4)$$

При больших κ величины $k_0 + \vec{\kappa}$ и $k_0 - \vec{\kappa}$, как правило, не могут одновременно попасть в область k-пространства, где затухание скомпенсировано накачкой и порог модуляционной неустойчивости (32.3) оказывается высоким. В этом случае существенны только процессы (32.4), в которых волны взаимодействуют парами $\pm k$, что соответствует приближению S-теории. Анализ выражения для инкремента (32.9) показывает, что вклад процессов (32.3) во взаимодействие волн мал, если

$$\vec{\kappa}/k_0 \gtrsim [(hV - \gamma)/\omega]^{1/3}. \qquad (32.5)$$

Это неравенство оценивает минимальное расстояние между парами в динамическом режиме, при котором их еще можно описывать в рамках S-теории. При κ, меньших, чем (32.5), существенны оба процесса (32.3) и (32.4), и следует рассматривать пары $\pm k_0$ по отношению к рождению четырех связанных СВ $\pm(k_0 + \vec{\kappa})$ и $\pm(k_0 - \vec{\kappa})$; соответствующее дисперсионное

соотношение имеет вид

$$(\gamma+\nu)^2-\gamma^2=-(\kappa\,\mathbf{v})^2-\gamma^2 W\kappa^2-\tfrac{1}{4}(L\kappa^2)^2-$$
$$-\tfrac{1}{2}L\kappa^2(2S+T)N-N^2S(2S+T)\pm\{(\vec{\kappa}\mathbf{v})^2[(L\kappa^2)^2+$$
$$+2L\kappa^2(2S+T)N+4N^2S(S+T)]+$$
$$+N^2[SL\kappa^2+NS(2S+T)]^2\}^{1/2}. \qquad (32.6)$$

Здесь мы учли зависимость V_k от k:

$$V(k_0+\vec{\kappa})=V(1+\tfrac{1}{2}W\kappa^2),$$

$$W\kappa^2\equiv\frac{1}{V}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 V_k}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\bigg|_{k=k_0}\kappa_\alpha\kappa_\beta.$$

Следует ожидать, что неустойчивость будет развиваться в основном для волновых векторов $\vec{\kappa}$ вблизи поверхности:

$$\pm\vec{\kappa}\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}L\kappa^2=0. \qquad (32.7)$$

Это означает, что $\vec{\kappa}$ почти перпендикулярен $\mathbf{v}$ и наиболее чувствительной по отношению к изменению направления $\vec{\kappa}$ величиной в (32.6) будет скалярное произведение $\vec{\kappa}\mathbf{v}$. Поэтому будем искать максимальный инкремент, варьируя (32.6) только по $\vec{\kappa}\mathbf{v}$. Получим в результате, что максимальный инкремент ν_m достигается на поверхности

$$(2\vec{\kappa}\mathbf{v})^2=[L\kappa^2+(2S+T)N]^2-T^2N^2-$$
$$-\frac{4N^2[SL\kappa^2+S(2S+T)N]^2}{[L\kappa^2+(2S+T)N]^2-T^2N^2}, \qquad (32.8)$$

которая при больших $L\kappa^2$ мало отличается от (32.7), и равен

$$(\gamma+\nu_m)^2-\gamma^2=-\gamma^2W\kappa^2+\frac{T^2S^2N^4}{[L\kappa^2+(2S+T)N]^2-T^2N^2}. \qquad (32.9)$$

Второе слагаемое (32.9) в S-теории отсутствует. Сравнивая его при больших значениях κ с первым слагаемым, получаем оценку (32.5) применимости S-теории. Поведение инкремента при $L\kappa^2\sim\gamma$ зависит от соотношения знаков S, T и $(2S+T)$.

Рассмотрим вначале случай $T>0, S>0$. Для него выражение (32.9) справедливо при $\kappa>\kappa_0, \kappa_0/k_0\approx SN/\omega$. При $\kappa\approx\kappa_0$

$$(\gamma+\nu_m)^2-\gamma^2=T^2N^2S/(T+S). \qquad (32.10)$$

При $\kappa<\kappa_0$ инкремент начинает резко уменьшаться, при $\kappa\ll\kappa_0$

$$(\gamma+\nu_m)^2-\gamma^2=(\kappa v)^2TSN^2$$

при $\vec{\kappa}\parallel\mathbf{v}$ (рис. 32.1). Если эти условия не выполняются, то выражения (32.8), (32.9) справедливы только при $\kappa>\kappa_1$, где

$$L\kappa_1^2=[(T^2+S^2)^{1/2}+|S|-(2S+T)]N.$$

При меньших κ инкремент максимален на плоскости $\vec{\kappa}\perp\mathbf{v}$ и равен

$$(\gamma+\nu_m)^2-\gamma^2=-\tfrac{1}{4}[L\kappa^2+(2S+T)N]^2+$$
$$+(\tfrac{1}{4}T^2-S^2)N^2+|SN[L\kappa^2+(2S+T)N]|-\gamma^2W\kappa^2. \qquad (32.11)$$

При $\kappa = 0$ отсюда следует

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -2S(2S + T)N^2\ ,\ \ \nu_m = 0. \tag{32.12}$$

Первая ветвь соответствует "собственной" неустойчивости в S-теории, вторая – состоянию безразличного равновесия по отношению к изменению разности фаз $\varphi_0 - \varphi_{\bar{0}}$ пары. Происхождение второй моды связано с динамическим характером стационара – отсутствует хаотизация разностей фаз, безразличное равновесие возникает из-за пространственной однородности,

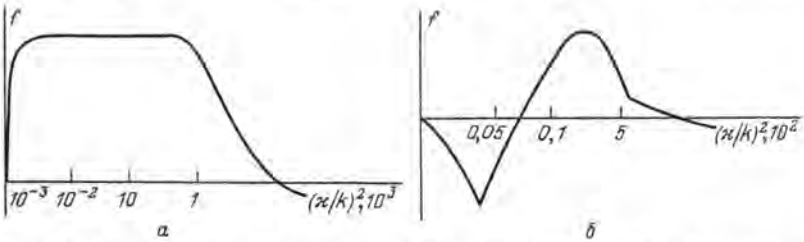


Рис. 32.1. Зависимость инкремента неустойчивости ν_{max}, $f = \nu^2_{max} + 2\gamma\nu_{max}$ от κ. $S < 0,\ 2S + T > 0$ (*а*); $S < 0,\ T > 0,\ 2S + T > 0$ (*б*)

так как разность $\varphi_0 - \varphi_{\bar{0}}$ определяет положение в пространстве узлов стоячей волны. При малых κ эта мода останется устойчивой, если

$$T > 0,\ (2S + T) > 0. \tag{32.13}$$

Интересно, что $T > 0$ – условие отсутствия самофокусировки монохроматической волны в консервативной среде. Условия (32.13) достаточно и для "собственной" устойчивости. При малых κ поведение (32.11) зависит от знака $S(2S + T)$. При $S(2S + T) > 0$

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -\tfrac{1}{4}(L\kappa^2)^2 - \tfrac{1}{2}L\kappa^2 TN. \tag{32.14}$$

Если $S(2S + T) < 0$, то

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -\tfrac{1}{4}(L\kappa^2)^2 - \tfrac{1}{2}L\kappa^2(4S + T)N - 2S(2S + T)N^2. \tag{32.15}$$

Подробнее рассмотрим случай "собственной" устойчивости пары $S(2S + T) > 0$. Тогда для устойчивости при малых κ необходимо, чтобы $T > 0$, как это видно из (32.14). Отсюда с необходимостью следует $S < 0$ (иначе реализуется неустойчивый случай $T > 0, S > 0$), поэтому $2S + T > 0$. При этом инкремент описывается формулой (32.14) при $\kappa_2 > \kappa > 0$, $L\kappa_2^2 = |2S + T|N$. Если $\kappa_1 > \kappa > \kappa_2$, то инкремент при $T > 0$, $S < 0$, $(2S + T) < 0$ описывается формулой (32.15). Из нее следует, что при $|SN| \sim \gamma$ инкремент становится положительным уже при $L\kappa^2 = 2L\kappa_2^2$ (рис.32.2). Он достигает максимального значения

$$(\gamma + \nu_m)^2 - \gamma^2 = -\gamma^2 W\kappa_1^2 + \tfrac{1}{2}|S|((T^2 + S^2)^{1/2} - |S|)N^2 \tag{32.16}$$

при $p = \kappa_1^2$. Считая $W \sim k_0^{-2}$, $L \sim \omega k_0^{-2}$, получаем оценку для порога неустойчивости:

$$(h_c V - \gamma)/\gamma \lesssim (\gamma/\omega)^2 (S/T)^4. \tag{32.17}$$

Оценивая $(\gamma/\omega) \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$, получим для порога неустойчивости пары

значения $(h_{\text{th}}V-\gamma)/\gamma \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$. Для того чтобы пара осталась устойчивой при превышениях в несколько децибелл $(hV-\gamma \approx \gamma)$, необходимо, чтобы $|T| \sim (0{,}1 \div 0{,}01)S$. Таким образом, монохроматическая стоячая СВ при параллельной накачке практически всегда неустойчива.

Характер развития неустойчивости существенно зависит от параметров гамильтониана T и S. За исключением случая $T>0$, $S>0$, который мы в дальнейшем обсуждать не будем, инкремент неустойчивости, как уже отмечалось, максимален на поверхности $\vec{\kappa}_0 \perp \boldsymbol{k}_0$, а при удалении от поверхности быстро убывает. Это приводит к тому, что основные свойства

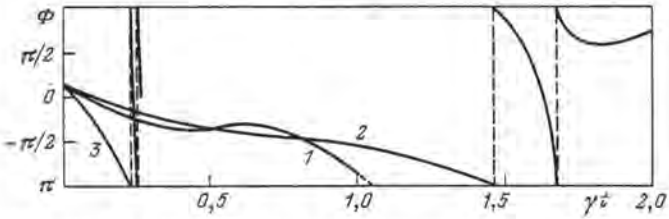


Рис. 32.2. Зависимость фазы $\Phi(0, t)$ в центре пакета для $p = 4$, $T = -S$. Кривые *1, 2, 3* соответствуют $k = 2; 3; 3{,}5$

нелинейной стадии развития неустойчивости можно проследить, пользуясь двумерными уравнениями, в которых A и B зависят только от координат x и y, ортогональных V. Выражения (32.14) и (32.15) для инкремента соответствуют возмущениям вида $\delta A(\boldsymbol{r}, t) \pm \delta B(\boldsymbol{r}, t)$. В случае $T>0$, $S<0$ видно, что возмущение $\delta A = -\delta B$ имеет запас устойчивости и, как показано В.С. Львовым, А.М. Рубенчиком [151], при этом $A(\boldsymbol{r}, t) = B(\boldsymbol{r}, t)$ и на нелинейной стадии движения. Ограничиваясь для простоты случаем $\omega'' > 0$, можно, изменяя масштаб, преобразовать уравнение (32.1) к виду

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma\right)A - hVA^* + \tfrac{1}{2}\Delta A = [(2S+T)|A|^2 - TA_0^2]A. \qquad (32.18)$$

Здесь мы определили значение $\omega_{\boldsymbol{k}_0}$ из условия внешней устойчивости (2.12). Этим выбирается наиболее устойчивая стоячая волна, для которой, как можно показать, область положительного инкремента в $\boldsymbol{k}$-пространстве органичена, $\kappa \ll k_0$. Изучение нелинейной стадии развития неустойчивости плоской стоячей волны в дальнейшем будет проводиться в рамках выведенных здесь уравнений (32.18).

Проведенный В.С. Львовым, А.М. Рубенчиком [151] анализ дает основания считать, что все стационарные солитоны в уравнениях (32.18) неустойчивы. Там же рассмотрена также начальная нелинейная стадия этой неустойчивости, причем особое внимание уделяется случаю, когда инкремент аномально мал. Он интересен тем, что нелинейное взаимодействие начинает играть существенную роль при весьма малых амплитудах. Оказалось, что тем не менее оно не ограничивает роста начального возмущения, а лишь сильно замедляет его. Амплитуда его при этом растет как $t^{1/2}$. В результате образуется узкий в $\boldsymbol{k}$-пространстве пакет волн с $\kappa \sim \kappa_0 \ll k_0$;

$\Delta\kappa \sim \kappa_0$. Такое состояние является сильно турбулентным, к его изучению мы приступим в следующем пункте.

32.3. Средние характеристики автоколебаний пары. Вначале оценим ширину возбужденной в $\boldsymbol{k}$-пространстве области при произвольной надкритичности. Из S-теории следует, что в обсуждаемом нами случае, когда $V_{\boldsymbol{k}}$ максимальна в точке $\boldsymbol{k}_0$, пакет параметрически возбужденных волн релаксирует к стоячей монохроматической волне с $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0$, если индивидуальные фазы волн можно считать случайными. Для случайности фаз достаточно, чтобы фазы двух волн в пакете расходились на величину порядка единицы за время, меньшее характерного времени нелинейного взаимодействия. Это происходит в пакете с $(\Delta k)^2 \gg \kappa_0^2 = SA_0^2/\omega''$. Поэтому пакет с $\Delta k \gg \kappa_0$ сужается до размеров $\kappa \sim \kappa_0$, а его средняя амплитуда релаксирует к величине A_0. Если же $\Delta k \ll \kappa_0$, то такой пакет неустойчив с инкрементом (32.14) относительно возмущений с $\kappa \sim \kappa_0$ и, следовательно, будет расширяться до $\Delta k \sim \kappa_0 \sim (SA_0^2/\omega'')^{1/2}$. Подчеркнем, что во всей области турбулентного движения инкремент неустойчивости (32.14) положителен в узком слое $\vec{\kappa}_{\parallel} < SA_0^2/V$ вблизи плоскости $\vec{\kappa} \perp \mathbf{v}$, т.е. рассматриваемая нами турбулентность является почти двумерной:

$$(\kappa_{\parallel}/\kappa_{\perp})^2 \approx SA_0^2/\omega_k \ll 1. \tag{32.19}$$

Средний уровень турбулентности A^2 не может сильно отличаться от величины A_0^2, определяемой формулой (32.2). Действительно, как отмечалось выше, монохроматическая плоская волна устойчива относительно коротковолновых возмущений с $\kappa \approx k_0$, только если ее амплитуда равна A_0. Очевидно, что такая неустойчивость сохраняется и для пары, промодулированной с $\kappa \ll k_0$, поэтому, если A^2 заметно отличается от A_0^2, то возбуждены коротковолновые модуляции, что противоречит полученному выше утверждению об узости пакета. Таким образом, развитие неустойчивости плоской волны приводит к сильной квазидвумерной турбулентности волн модуляции $A(\boldsymbol{r}, t)$ со средним уровнем

$$\overline{A^2} \approx A_0^2 = h^2 V^2 - \gamma^2/2S, \tag{32.20}$$

глубиной модуляции порядка единицы, характерной частотой движения $hV - \gamma$ и характерным масштабом в координатном пространстве $r_{\perp} \approx \kappa_0^{-1} \approx k_0^{-1}(\omega/SA_0^2)^{1/2}$. Можно сказать, что возникает динамическая солитонная структура с длиной когерентности порядка размеров солитонов, т.е. $A_0^{-1}(\omega''/S)^{1/2}$, которая существенно меняется в пространстве за время $(hV - \gamma)^{-1}$.

32.4. Разрушение солитонов и механизм ограничения амплитуды коллапсом. В тех областях, где амплитуда солитонов в процессе турбулентного движения оказалась аномально большой, $A \gg A_0$, в уравнениях движения можно пренебречь затуханием и накачкой, так как за характерное время задачи $(SA^2)^{-1}$ система ПВ не успеет существенно обменяться энергией с термостатом и накачкой. В этом приближении уравнения (32.1) описывают нестационарное поведение пары волн в консервативной среде. Прежде всего покажем, что явление коллапса характерно не только для огибающей монохроматической волны, но и для пары волн. Для этого отметим, что непосредственным вычислением можно убедиться в том, что уравнения

(32.1) (при $\gamma = h = 0$) имеют следующий интеграл движения:

$$I = \tfrac{1}{2}\omega'' \int (|\nabla A|^2 + |\nabla B|^2)\,dr + \tfrac{1}{2}T \int (|A|^4 + |B|^4)\,dr + 2S \int |A|^2 |B|^2 dr. \tag{32.21}$$

Далее мы покажем, что его знак во многом определяет эволюцию системы. Рассмотрим для этого вторую производную от существенно положительной величины

$$R = \tfrac{1}{2}\omega'' \int r_\perp^2 (|A|^2 + |B|^2)\,dr. \tag{32.22}$$

Непосредственным вычислением с помощью (32.1), в котором по параметру $(SA_0^2/\omega) \ll 1$ можно пренебречь вторыми производными по z, так же, как в п. 12.4 гл. 3, можно показать, что $\partial^2 R/\partial t^2 = 2I$, откуда следует

$$R(t) = It^2 + 2\alpha t + \beta, \tag{32.23}$$

где α и β – постоянные интегрирования. Видно, что при $I < 0$ за конечное время $R(t)$ становится отрицательным, что противоречит (32.22). Это означает, что решение уравнений (32.1) "разрушается" за конечное время, т.е. появляется особенность при $r = 0$.

Рассмотрим явления, происходящие при коллапсе солитонов. Очевидно, что при изучении эволюции коллапсирующего солитона можно не учитывать влияние накачки и затухания. Уравнение (32.4) переходит при этом в нелинейное параболическое уравнение, свойства решений которого подробно изучались в связи с задачей о самофокусировке света. Как показано В.Е. Захаровым и В.С. Сынахом [108], амплитуда в центре солитона быстро растет со временем: $A(0, t) \backsim (t - t_0)^{-2/3}$. При этом радиус солитона уменьшается так, что в процесс схлопывания захватывается строго определенное количество энергии

$$I_c = \omega \int |A|^2 dr = 1{,}86\omega''\omega/|2S + T|. \tag{32.24}$$

При увеличении амплитуды волн в коллапсирующем солитоне становится существенным нелинейное затухание, которое приводит к быстрому выгоранию энергии солитона. Оценим эффективное нелинейное затухание

$$\gamma_{nl} \approx I_c \kappa_0^2/\tau\omega A_0^2 \approx 1/\tau, \tag{32.25}$$

где τ – время между двумя последовательными коллапсами в области с размером κ_0^{-2}. Из соображений размерности можно получить, что $\tau \approx \approx (hV)^{-1}$ при $h > h_c$.

Учет этого механизма диссипации энергии приводит к тому, что средняя амплитуда турбулентных пульсаций становится меньше A_0, а восприимчивость χ'' с ростом амплитуды h не убывает, а выходит на плато, совпадающее по порядку величины с χ'' в максимуме.

Перспективным методом экспериментального изучения сильной солитонной турбулентности параметрически возбужденных СВ является измерение спектральной плотности электромагнитного излучения ФМ на частотах, близких к частоте накачки ω_p.

При $h < h_c$, когда коллапсы редки, спектральная плотность шума близка к гауссовой с шириной $|\omega - \omega_p| \sim \gamma(p-1)^{1/2}$. При $h > h_c$ заметный вклад в излучение вносят коллапсирующие солитоны, у которых фаза пары $\Psi(r, t)$ "отрывается" от фазы накачки и начинает быстро вращаться, при

этом: $\Psi \sim (t - t_0)^{-1/3}$. Быстрое вращение фазы приводит к уширению спектра излучения $(h^2)_\omega$, по которому можно регистрировать коллапсы. Можно показать, что $(h^2)_\omega \sim |\omega - \omega_p|^{-7/4}$.

Нелинейное затухание, ограничивающее амплитуду в коллапсе $A < A_{\max}$, должно обрезать шумовое излучение на частоте

$$SA_{\max} \approx |\omega_{\max} - \omega_p|.$$

Задачи

Задача 6.1. Вычислить зависимость от времени поглощенной мощности на линейной стадии развития параметрической неустойчивости при мгновенном включении накачки.

Указание. Использовать уравнения (29.2) в линейном приближении.

Ответ:

$$W_+(\tau) = \frac{\pi\omega_p}{2} \int \frac{\gamma_\Omega h V_\Omega k_\Omega^2 n_\Omega^0}{v_\Omega} F_\Omega(\tau_\Omega)\, d\Omega,$$

$$F_\Omega(\tau) = \int_0^\tau I_1(\tau') \exp(-\rho_\Omega \tau')\, d\tau',$$

где $I_1(\tau)$ – функция Бесселя от мнимого аргумента $\rho_\Omega = \gamma_\Omega / h V_\Omega$, $\tau_\Omega = 2hV_\Omega t$,

РАЗДЕЛ 4

КИНЕТИКА СПИНОВЫХ ВОЛН

ГЛАВА 7

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СПИНОВЫХ ВОЛН

§ 33. Необходимость диаграммного подхода для описания кинетики волн

В предыдущих гл. 4–6 была развита относительно простая S-теория, основанная на диагонализации гамильтониана взаимодействия волн. Эта теория, как уже отмечалось, находится в хорошем качественном и количественном соответствии с целым рядом экспериментов по параметрическому возбуждению СВ в ФМ и АФМ, волн на поверхности жидкости. Вместе с тем существует целый ряд экспериментальных результатов, и возможна постановка новых экспериментов, интерпретация которых требует выхода за ее рамки. Дело в том, что S-теория правильно описывает лишь интегральные характеристики ПСВ и принципиально не учитывает, например, конечную ширину их распределения в $\boldsymbol{k}$-пространстве. В S-теории

$$n(\boldsymbol{k}, \omega), \sigma(\boldsymbol{k}, \omega) \sim \delta(\tilde{\omega}_{\boldsymbol{k}} - \omega_p/2)\,\delta(\omega - \omega_p/2), \tag{33.1}$$

где

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{k}, \omega)\,\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\,\delta(\omega - \omega') &= \langle b^*_{\boldsymbol{k}'\omega'} b_{\boldsymbol{k}\omega} \rangle, \\ \sigma(\boldsymbol{k}, \omega)\,\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')\,\delta(\omega + \omega' - \omega_p) &= \langle b^*_{\boldsymbol{k}'\omega'} b_{\boldsymbol{k}\omega} \rangle. \end{aligned} \tag{33.2}$$

Между тем априори можно представить себе совершенно различные варианты поведения ПСВ, приводящие к различному уширению распределения (33.1) при сохранении интегральной по $|\boldsymbol{k}|$ и ω величины $n(\boldsymbol{k}, \omega)$ с точностью до малых параметров.

Как неоднократно отмечалось, S-теория по существу является теорией самосогласованного поля, учитывающей $\mathcal{H}_{\text{int}}$ в первом порядке теории возмущений. Предпринимались попытки улучшить это приближение, учитывая члены второго порядка по $\mathcal{H}_{\text{int}}$ так, как это делается при выводе кинетического уравнения для волн. Однако этот подход неверен, потому что кинетическое уравнение применимо, если пакет волн имеет большую ширину по частотам, гарантирующую стохастизацию фаз, в то время как распределение (33.1) в S-теории является одночастотным. При попытках

выйти за рамки второго порядка возмущений, как правило, необходимо применять диаграммную технику.

Существует несколько вариантов диаграммной техники, пригодной для описания неравновесных систем (см., например, Х.В. Уайльд [218], Л.В. Келдыш [118]). Для классических задач наиболее естественно применять технику Уайльда, построенную в 1961 г. на примере уравнения гидродинамического типа и послужившую основой для многих работ по турбулентности несжимаемой жидкости (см., например, В.И. Белиничер, В.С. Львов, [167]). В настоящей главе в § 34 мы, следуя работе В.Е. Захарова, В.С. Львова [107], опишем диаграммную технику Уайльда на языке канонических уравнений для классических волновых полей.

С помощью диаграммной техники легко вывести известные кинетические уравнения для волн и регулярным образом получать к ним поправки. В частности, это позволило в § 35 обосновать пределы применимости кинетического уравнения (т.е. приближение слабой турбулентности): затухание волн γ_k, характеризующее уровень нелинейной системы, должно быть меньше, чем $\Delta k \partial\omega/\partial k$, и меньше, чем $(\Delta k)^2 \partial^2 \omega_k/\partial k^2$, где Δk – характерная ширина пакета волн. Далее, в § 36, мы обобщим диаграммную технику так, чтобы кроме нормального коррелятора $n(k, \omega)$ можно было учитывать и аномальный коррелятор $\sigma(k, \omega)$, определенный в (33.2) и существенный в задаче о параметрическом возбуждении волн.

§ 34. Диаграммная техника

34.1. Конструирование диаграммных рядов и суммирование Дайсона – Уайльда. Рассмотрим волновое поле, в линейном приближении обладающее законом дисперсии ω_k, описываемое комплексной амплитудой b_k и имеющее гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int \omega_k b_k^* b_k dk + \mathcal{H}_{\text{int}}. \tag{34.1}$$

В качестве $\mathcal{H}_{\text{int}}$ в задаче о параметрическом возбуждении волн в среде с нераспадным законом дисперсии следует взять четырехволновой гамильтониан (5.30). Уравнения волнового поля имеют вид

$$i\frac{\partial b_k}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_k^*} - i\delta_k b_k + f_k(t). \tag{34.2}$$

В них мы включили дополнительные члены, описывающие взаимодействие выделенной нами системы волн с "окружающим миром" – термостатом. Слагаемое $\delta_k b_k$ описывает "трение волн о термостат", т.е. уход энергии в термостат. Ланжевеновская случайная сила $f_k(t)$ имитирует беспорядочные толчки со стороны термостата, приводящие в среднем к увеличению энергии волн b_k. Мы будем считать, что статистические свойства случайной силы являются гауссовыми с коррелятором

$$F_{k\omega} = \delta_k n_k^0/\pi, \qquad n_k^0 = T/\omega_k. \tag{34.3}$$

Здесь n_k^0 – термодинамически равновесное значение n_k. Мы предположили, что термостат находится в состоянии термодинамического равновесия с температурой T (измеряемой в энергетических единицах). Это разумно, если взаимодействие волн b_k с термостатом можно считать малым: $\delta_k \to 0$.

Полагая

$$b_{\boldsymbol{k}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b(\boldsymbol{k}, \omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega,$$
$$b^*_{\boldsymbol{k}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b^*(\boldsymbol{k}, \omega) \exp(i\omega t)\, d\omega \tag{34.4}$$

и вводя четырехмерное обозначение $q = (\boldsymbol{k}, \omega)$, получим из (34.1), (5.30) и (41.2)

$$b_q = G^0_q [\int T_{\boldsymbol{k}1,23} b^*(q_1) b(q_2) b(q_3) \delta(q + q_1 - q_2 - q_3)\, dq_1 dq_2 dq_3 + f_q],$$
$$G^0_q = (\omega - \omega_{\boldsymbol{k}} + i\delta_{\boldsymbol{k}})^{-1}. \tag{34.5}$$

Здесь G^0_q — затравочная функция Грина. Рассмотрим формальное решение уравнения (34.5) в виде ряда по степеням f_q:

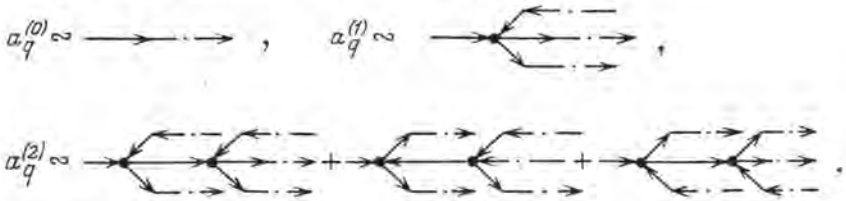
$$a^{(0)}_q = G^0_q f_q,$$
$$a^{(1)}_q = G^0_q \int T_{\boldsymbol{k}1,23} G^{0*}_1 G^0_2 G^0_3 \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) \times$$
$$\times f_1 f_2 f_3\, dq_1 dq_2 dq_3,$$
$$a^{(2)}_q = G^0_q \int T_{k1,23} [a^{(1)*}_1 a^{(0)}_2 a^{(0)}_3 + 2a^{(0)*}_1 a^{(1)}_2 a^{(0)}_3] \times$$
$$\times \delta(q + q_1 - q_2 - q_3)\, dq_1 dq_2 dq_3,$$
$$G^0_1 \equiv G^0(q_1), \quad a^{(0)}_1 \equiv a^{(0)}(q_1), \ldots$$

Каждому члену этого ряда можно сопоставить диаграмму с помощью графических обозначений:

$G^0_q =$ ⟶ , $G^{0*}_q =$ ⟵ .

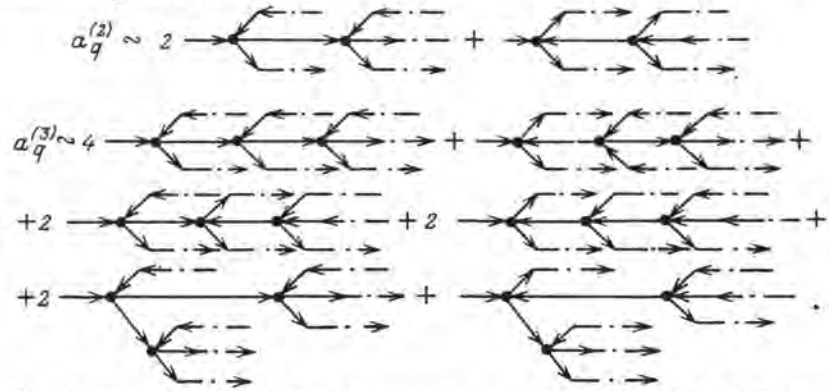
$f_q =$ - - -⟶ , $f^*_q =$ ⟵- - - , $T_{12,34} =$ ┼ (34.6)

Каждая диаграмма ряда для b_q представляет собой "дерево", ветвящееся в вершинах T, крона которого заканчивается пунктирами случайной силы. Вершинам $T_{12,34}$ следует сопоставить $\delta(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)$ и проинтегрировать по всем q внутренних линий. В диаграммах для $a^{(n)}_q$ есть все топологически различные деревья с вершинами T, числовой коэффициент перед каждым таким деревом 1. Диаграммы, соответствующие выражениям для $a^{(0)}_q$, $a^{(1)}_q$ и $a^{(2)}_q$, выглядят следующим образом:



Нетрудно заметить, что аналитические выражения, соответствующие деревьям, переходящим друг в друга при повороте части дерева вокруг некоторой вершины, совпадают. Первый пример такого рода – это два дерева

для $a_q^{(2)}$. Впредь мы будем считать такие деревья топологически эквивалентными. При этом необходимо приписать множитель 2 несимметричным вершинам, т.е. таким, из которых растет несимметричное относительно поворота дерево. В результате вся диаграмма порядка n приобретает множитель $2^n/p$, где p – число элементов ее группы симметрии, включая тождественный. Для деревьев второго и третьего порядков это обстоятельство можно изобразить так:



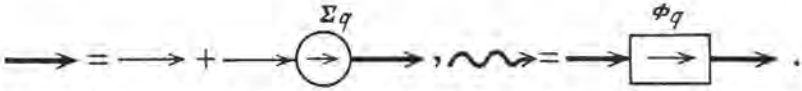
Указанная возможность уменьшения числа топологически различных диаграмм принципиально связана с тем, что волновое поле – классическое, и поэтому величины b_q коммутативны. Заметим далее, что один из концов дерева (корень) является выделенным: из четырех линий, сходящихся в каждой вершине, только одна соединяет ее с корнем. Как видно из выражения (34.6), в случае, когда эта линия ориентирована "от корня", точке + соответствует $T_{12,34}$. Если же эта линия ориентирована "к корню", точке + соответствует T^*. В дальнейшем, кроме обычных "левых" графиков, у которых корень находится слева, нам понадобятся "правые" графики – с корнем, расположенным справа. Условимся, что правому и левому графикам соответствует одно и то же аналитическое выражение, если они переходят друг в друга при зеркальном отражении от вертикальной черты.

Вычислим теперь следующие парные средние: спектральную плотность n_q, определенную формулой (33.2), и функцию Грина G_q – линейный отклик системы на внешнюю силу:

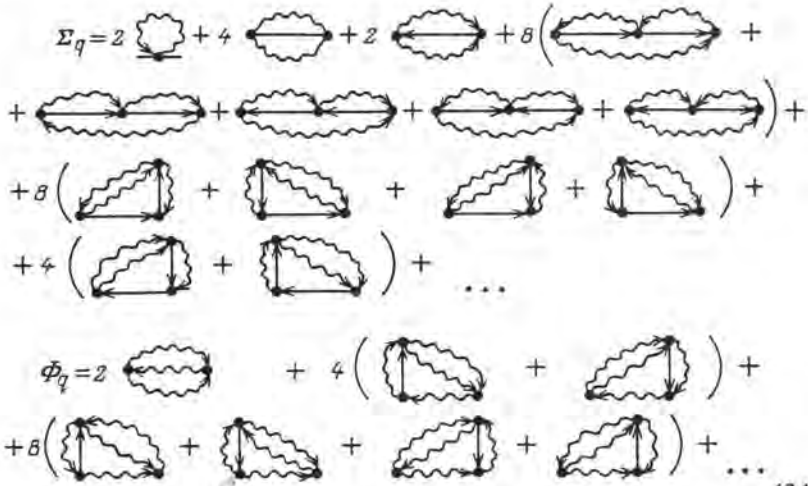
$$G_q \delta(q-q') = \langle a_q f_q^* \rangle / (f^2)_q = \langle \delta a_q / \delta f_q \rangle. \tag{34.7}$$

При вычислении средних мы воспользуемся тем, что внешняя сила f_q гауссова, т.е. будем считать, что корреляторы от произведения нечетного числа f_q отсутствуют, а корреляторы от четных произведений разбиваются на суммы произведений парных корреляторов. Графически это разбиение изображается попарным "склеиванием" внешних ветвей деревьев. При вычислении среднего происходит склеивание двух деревьев, изображенных на левом и правом графиках. При вычислении среднего для G_q происходят склеивания внутри одного дерева при фиксации последовательно каждой из его внешних ветвей. Производя суммирование приводимых графиков, приходим к системе уравнений Дайсона – Уайльда для n_q и G_q:

$$G_q = G_q^0 (1 + \Sigma_q G_q), \quad n_q = |G_q|^2 [\Phi_q + (f^2)_q]. \tag{34.8}$$



На графике жирная волнистая линия обозначает n_q, жирная прямая – G_q; Σ_q и Φ_q обозначают бесконечные ряды графиков определенной топологической структуры (все линии в них жирные):



(34.9)

Графики (34.9) являются компактными, т.е. не содержат слабо связанных частей, которые можно отделить друг от друга, разрывая одну линию. В этих рядах явно указаны все графики первого, второго и третьего порядков по вершинам $\mathcal{H}_{\text{int}}$. Графики для Φ_q имеют два эквивалентных конца ("корни" склеенных деревьев), графики для Σ_q имеют отличающиеся концы – вход и выход, соответствующие "корню" дерева и фиксированной ветви.

34.1. Топологические свойства графиков для Σ_q и Φ_q.

1. В диаграммах для Φ_q (для Σ_q) от каждой вершины можно пройти только по линиям $G_{q'}$ к входу или (и) выходу единственным образом. Таким образом, *нет* вершин с четырьмя линиями $n(q')$, *нет* замкнутых петель по линиям $G(q')$.

2. В каждом графике для Σ_q существует единственный путь, соединяющих вход и выход по линиям, $G(q')$ – "позвоночник" графика. Остальные линии графиков можно назвать ребрами.

3. Графики Φ_q содержат "основное сечение", по которому они единственным образом могут быть рассечены только по линиям $n(q')$ на две части. Эти линии $n(q')$ назовем *основными*.

4. Очевидно, что, заменяя в графиках для Φ_q последовательно основные линии $n(q')$ на $G(q')$, мы перечислим все топологические структуры графиков для Σ_q.

Укажем теперь правила вычисления коэффициентов графиков для Σ_q и Φ_q данной топологической структуры.

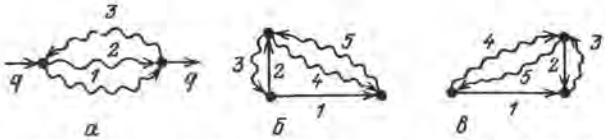


Рис. 34.1. График *а* симметричен по перестановке линий *1* и *2*. Графики *б* и *в* зеркально-симметричны. Примеры графиков для массовых операторов Φ_q (*а*) и Σ_q (*б* и *в*)

5. Числовой коэффициент при графике порядка n (по вершинам) для Σ_q и Φ_q равен $2^n/p$, где p — число элементов группы симметрии графика, включая тождественный. Так, например, график на рис. 34.1, *а* не изменится, если поменять местами линии $n(q_1)$ и $n(q_2)$; для него $p = 2$, и числовой коэффициент равен $2^2/2 = 2$.

Определим теперь процедуру размножения графиков. В графиках для Φ_q произведем последовательное выделение каждой из основных линий n_q (например, отмечая выделенную линию крестиком), а в графиках для Σ_q произведем последовательное выделение (также при помощи крестика) каждой из линий позвоночника. Из вышеперечисленных свойств графиков 1–5 следует основное структурное свойство графиков.

6. Между "размноженными" графиками для Φ_q и Σ_q имеется взаимно однозначное соответствие (включая числовые коэффициенты). Это соответствие осуществляется заменой волнистых отмеченных линий на прямые и наоборот.

7. В каждую вершину T входят две стрелки и две выходят. Дельта-функции в них устроены так, что сумма входящих в вершину четырех импульсов равна сумме выходящих. В любом сечении графиков Σ_q и Φ_q, отделяющем вход от выхода, алгебраическая сумма всех импульсов линий равна q.

8. При записи аналитических выражений для Σ_q следует в произведении всех вершин и функций $G(q')$ в ребрах оставлять только действительную часть. Например, график на рис. 34.1, *в* содержит произведение $\mathrm{Re}\,[G_2 n_3 n_4 n_5]$. Доказательство этого свойства диаграмм предлагается провести в задаче 7.1.

9. От любого графика для Σ_q в окончательное аналитическое выражение входит только действительная часть (см. задачу 7.2).

34.3. Замечания к методу Уайльда разложения по случайной силе. Прежде всего отметим, что если выполняется соотношение (34.4), обозначающее, что "внешний мир" (термостат), взаимодействующий с волновой системой, находится в термодинамическом равновесии при температуре T, то уравнения Дайсона – Уайльда (34.9) имеют решение

$$n_q = T\,\mathrm{Im}\,G_q/\pi\omega. \tag{34.10}$$

Это утверждение, доказанное В.Е. Захаровым, В.С. Львовым [170] (см. также задачу 7.3), совпадает с "флуктуационно-диссипационной теоремой", связывающей в термодинамическом равновесии спектральную плотность флуктуаций с мнимой частью функции Грина, и позволяет в термодинамически равновесной ситуации перейти от двух уравнений для n_q и G_q к одному уравнению для G_q. Необходимо заметить, что между термодинамически

равновесным и общим случаями есть принципиальная разница. В термодинамически равновесной ситуации усреднение проводится по гиббсовскому ансамблю и диаграммная техника является лишь вспомогательным инструментом, облегчающим вычисление средних. В неравновесной же ситуации диаграммная техника является способом получения уравнения для средних n_q и G_q. Существенно, что в этих уравнениях (34.9) коррелятор внешней силы $(f^2)_q$ входит в виде свободного члена и может быть положен равным нулю. Переход к пределу $\delta_k \to 0$ обоснован, если взаимодействие волн с термостатом мало по отношению к их вазимодействию между собой. Естественно предположить при этом, что решение диаграммных уравнений (34.9) для n_q, G_q непрерывно зависит от δ_k и остается конечным при $\delta_k \to 0$. Физический смысл этого в том, что корреляторы n_q и G_q не чувствительны к воздействию на волновое поле малой случайной гауссовой силы. Это свойство корреляторов соответствует представлению о турбулентности как о результате развития всех мыслимых неустойчивостей и о максимально стохастичном состоянии волнового поля.

Тем не менее может показаться, что введение случайной силы в исходные уравнения движения является принципиальным для вывода уравнений (34.9). В действительности "погружение системы волн в термостат" сделано только из соображений удобства. Внешние условия можно было считать не изотермическими, а адиабатическими, т.е. систему волн изолированной от окружения. В таком случае следовало бы учесть, что в начальный момент времени (например, в момент включения накачки) система волн находится в термодинамическом равновесии со случайными амплитудами $b_k(0)$, отличными от нуля:

$$\langle b^*_{k'}(0)\, b_k(0)\rangle = n^0_k\, \delta(k - k').$$

Совершая в исходных уравнениях движения преобразование Лапласа, можно получить

$$(\omega - \omega_k)\, b_{k\omega} = -\, i b_k(0) + \int_0^\infty \frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta b^*_k(t)} \exp(i\omega t)\, dt \tag{34.11}$$

и далее итерационной процедурой представить b_q в виде ряда по степеням начальных амплитуд $b_k(0)$. Можно сказать, что при таком подходе развитие неустойчивости волн происходит из-за ненулевых начальных условий, в то время как в подходе Уайльда неустойчивости волн развиваются при нулевых начальных условиях под действием толчков $f_k(t)$ со стороны термостата.

Несмотря на формальную однозначность процедуры получения уравнения для n_q и G_q, эти уравнения в действительности не являются однозначно определенными, поскольку ряды для n_q и G_q не являются абсолютно сходящимися. Это следует хотя бы из того, что число топологически различных деревьев факториальным образом растет с ростом числа вершин. Эти ряды станут однозначными лишь после определения правила их суммирования, что пока является нерешенной задачей. Можно, однако, предположить, что при любом правиле суммирования первые члены рядов останутся на своих местах и в этом смысле ограничение первыми членами рядов для n_q и G_q даже в случае сильной нелинейности имеет определенный

смысл. В случае малого уровня нелинейности ряды для n_q и G_q должны быть асимптотическими независимо от правил суммирования.

В заключение этого параграфа я обращаю внимание на задачу 7.4, в которой предлагается доказать, что диаграммная техника Уайльда в канонических переменных является классическим пределом техники для неравновесных процессов (Л.В. Келдыш, 1964 г. [118]) в бозе-поле.

§ 35. Кинетические уравнения для волн

В предположении о малом уровне нелинейности можно пренебречь перенормировкой вершин и ограничиться в выражении для Φ_q и Σ_q первыми диаграммами. Запишем уравнение Дайсона – Уайльда (34.9) для n_q в виде

$$n_{k\omega} = \Phi_{k\omega}[(\omega - \tilde{\omega}_{k\omega})^2 + \gamma^2_{k\omega}]^{-1}. \tag{35.1}$$

Если ширина пакета по частотам $\Delta\omega_k$ существенно больше, чем $\gamma_{k\omega} = -\operatorname{Im}\Sigma_{k\omega}$, то в этом выражении можно пренебречь зависимостью Φ_q и γ_q от ω, полагая в них $\omega = \tilde{\omega}_k = \omega_k + \operatorname{Re}\Sigma(k, \omega_k)$. Тогда после интегрирования по ω в (35.1) получим

$$\gamma_k n_k = \pi\Phi_k, \quad n_k \equiv \int n(k, \omega)\, d\omega. \tag{35.2}$$

Продолжая последовательно считать, что $\Delta\omega_k \gg \gamma_k$, можно в выражениях для $\Phi_k \equiv \Phi(k, \tilde{\omega}_k)$ и $\gamma_k = \gamma(k, \tilde{\omega}_k)$ проинтегрировать по частотам, полагая $n(k, \omega) \sim n_k \delta(\omega - \tilde{\omega}_k)$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_k &= 2\pi \int |T_{k1,23}|^2 \delta(k + k_1 - k_2 - k_3)\, \delta(\omega_k + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times \\ &\times \{n(k_1)[n(k_2) + n(k_3)] - n(k_2) n(k_3)\}\, dk_1 dk_2 dk_3, \\ \Phi_k &= 2 \int |T_{k1,23}|^2 n(k_1) n(k_2) n(k_3) \delta(k_1 + k - k_2 - k_3) \times \\ &\times \delta(\omega_k + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\, dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \tag{35.3}$$

Подставляя (35.3) в (35.2), получаем четырехволновое кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} &\int |T_{k1,23}|^2 [n_k n_1 (n_2 + n_3) - n_2 n_3 (n_k + n_1)] \times \\ &\times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3)\, \delta(\omega_k + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\, dk_1 dk_2 dk_3 = 0. \end{aligned} \tag{35.4}$$

Грубая оценка по формуле (35.3) дает $\gamma_k \approx (TN)^2/\Delta\omega_k$, где $N = \int n_k\, dk$ – общее число волн. Учитывая, что наш вывод справедлив, если $\Delta\omega_k \gg \gamma_k$, получаем один из критериев применимости кинетического уравнения (35.4):

$$\Delta\omega_k \gg TN, \tag{35.5}$$

т.е. раброс частот в пакете должен быть больше, чем характерная частота взаимодействия TN. При выполнении этого условия уравнение для $n(k, \omega)$ может быть редуцировано до уравнения для интегральной величины n_k.

Вычисляя первые поправки к вершине (диаграммы типа "рыба"), а также первые поправки к вещественной части функции Грина – частоте, можно убедиться (задача 7.5), что выражения для них отличаются от выражений для соответствующих затравочных величин одним из следующих

множителей:

$$TN/\omega_k''(\Delta k)^2, \quad (TN/\omega_k''(\Delta k)^2)\ln(\omega_k''(\Delta k)^2/TN). \tag{35.6}$$

Малость этих параметров в сравнении с единицей гарантирует применимость приближения кинетического уравнения. Логарифмический фактор возникает после интегрирования в k-пространстве расходящихся знаменателей типа $[\omega(k) - \omega(k') - \omega(k-k')]^{-1}$, которое обрезается затуханием волн. Необходимо иметь в виду, что оценки (35.5), (35.6) являются лишь ориентировочными, ибо при их получении мы не конкретизировали задачу: не указали вид зависимости n_k от k, конкретный вид матричных элементов и т.д. В такой общей постановке задачи параметры (35.6), (35.5) являются примерно одинаковыми. Выделенным является случай звуковой турбулентности: как видно из (35.6), при линейном законе дисперсии кинетическое уравнение неприменимо ни при каких уровнях нелинейности. Подтверждение этому легко получить, например, из непосредственного анализа диаграмм, перенормирующих вершины. Вследствие совпадения особенностей они не имеют параметра малости по отношению к затравочной вершине. Тем не менее при малом уровне нелинейности параметр (35.5) мал, и это означает, что можно исследовать задачу о звуковой турбулентности в терминах n_k. Обратная ситуация складывается в задаче о параметрическом возбуждении волн в нераспадной среде. В гл. 10 мы покажем, что в широком диапазоне надкритичностей можно не учитывать диаграммы, перенормирующие взаимодействие, однако уравнения для $n(k, \omega)$ нельзя редуцировать до уравнений для n_k.

В заключение этого параграфа приведем кинетическое уравнение в случае трехволнового гамильтониана взаимодействия:

$$\int |V_{1k2}|^2 [n_k(n_2 - n_1) - n_1 n_2]\, \delta(\omega_k - \omega_1 + \omega_2)\, \delta(k - k_1 + k_2)\, dk_1 dk_2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int |V_{k12}|^2 [n_k(n_1 + n_2) - n_1 n_2]\, \delta(\omega_k - \omega_1 - \omega_2) \times$$

$$\times\, \delta(k - k_1 - k_2)\, dk_1 dk_2. \tag{35.7}$$

Это уравнение справедливо, если выполняются следующие неравенства (см. задачи 7.6, 7.7):

$$\begin{aligned} &VN^{1/2} \ll \Delta k\, \partial\omega_k/\partial k, \\ &VN^{1/2} \ll \omega_k''(\Delta k)^2 \ln[VN^{1/2}/\omega_k''(\Delta k)^2]. \end{aligned} \tag{35.8}$$

§ 36. Диаграммные уравнения с аномальными корреляторами

Получим усредненные уравнения, описывающие параметрическую турбулентность волн с помощью диаграммной техники (см. § 35). Для этого в гамильтониан задачи добавим гамильтониан взаимодействия с накачкой (16.1). В результате в уравнениях движения (34.5) возникает дополнительное слагаемое $G_q^0 h V_k a_q^+$. Здесь и в дальнейшем операция + будет означать комплексное сопряжение и замену $q \to \bar{q} \equiv (-k, \omega_p - \omega)$, $a_q^+ \equiv a^*(-k, \omega_p - \omega)$. Это слагаемое приводит к дополнительной вершине hV_k в графиках. В результате, кроме нормальной функции Грина (34.8), возни-

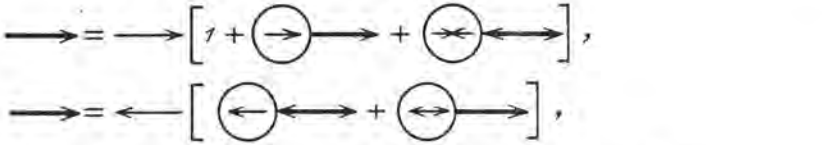
кает аномальная функция Грина L_q:

$$L_q \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\delta(\omega+\omega'-\omega_p) = \langle a_q f_{q'} \rangle / (f^2)_q = \langle \delta a_q / \delta f_{q'} \rangle \tag{36.1}$$

и, кроме нормального коррелятора n_q, аномальный коррелятор σ_q, определенный формулой (33.2). Аномальные величины описывают явление спаривания – фазовую корреляцию волн в парах, возникающую под действием накачки.

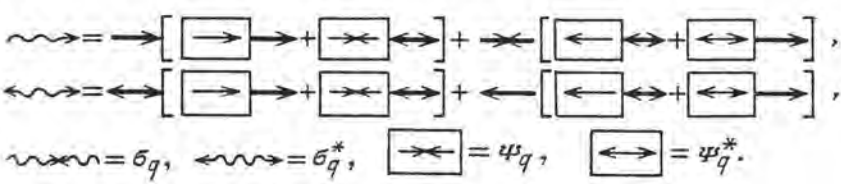
Производя, как обычно, суммирование приводимых графиков, приходим к системе уравнений Дайсона – Уайльда, обобщающих уравнения (34.9):

$$\begin{aligned} &G_q[\omega - \omega_{\boldsymbol{k}} - \Sigma_q + i\delta_{\boldsymbol{k}}] - L_q^+ \Pi_q = 1, \\ &-G_q \Pi_q^+ + L_q^+[\omega_p - \omega - \omega_{\boldsymbol{k}} - \Sigma_q^+ - i\delta_{\boldsymbol{k}}] = 0. \end{aligned} \tag{36.2}$$



$$n_q = G_q[(f_q^2 + \Phi_q)G_q^* + \Psi_q L_q^+] + L_q[\Psi_q^+ G_q^* + (f_q^2 + \Phi_q^+)L_q^+],$$

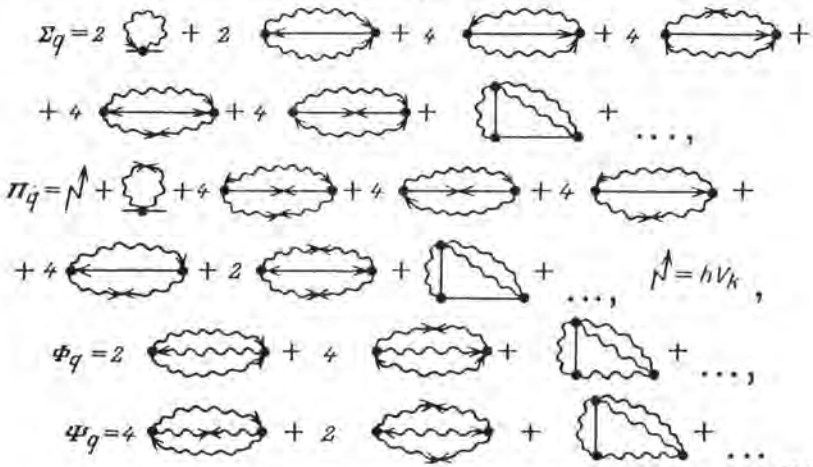
$$\sigma_q^+ = L_q^+[(f_q^2 + \Phi_q)G_q^* + \Psi_q L_q^+] + G_q^+[\Psi_q^+ G_q^* + (f_q^2 + \Phi_q^+)L_q^+]. \tag{36.3}$$



В этих формулах Π_q и Ψ_q означают суммы аномальных, т.е. не сохраняющих направления стрелок неприводимых графиков, графики для Φ_q, Ψ_q, в отличие от графиков для Σ_q и Π_q, могут быть рассечены на две части только по линиям n_q и σ_q. Уравнения (36.2) можно разрешить относительно функций Грина

$$\begin{aligned} &G_q = (\omega_p - \omega - \tilde{\omega}_q - i\gamma_q)\Delta_q^{-1}, \\ &L_q = \Pi_q \Delta_q^{-1}, \\ &\Delta_q = (\omega - \omega_q + i\gamma_q)(\omega_p - \omega - \tilde{\omega}_q - i\gamma_q) - |\Pi_q|^2, \\ &\gamma_q = \delta_{\boldsymbol{k}} - \operatorname{Im}\Sigma_q, \\ &\tilde{\omega}_q = \omega_{\boldsymbol{k}} + \operatorname{Re}\Sigma_{\boldsymbol{k}}. \end{aligned} \tag{36.4}$$

Неприводимые графики для массовых операторов расположим в ряд по степеням матричного элемента $T_{12,34}$ гамильтониана взаимодействия:



(36.5)

Впоследствии мы покажем, что при не слишком большой надкритичности диаграммы, содержащие три и более вершин T, можно не учитывать. Это означает, что мы получим замкнутые нелинейные интегральные уравнения для величин G_q, L_q и n_q, σ_q. Запишем аналитически соотношения (36.5) в этом приближении:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma(q) = \Sigma_S(q) + \Sigma_{\text{int}}(q), \quad \Pi(q) = \Pi_S(q) + \Pi_{\text{int}}(q),\\
&\Sigma_S(q) = 2\int T(k,k')n(q')dq',\\
&\Pi_S(q) = P_k = hV_k + \int S_{kk'}\sigma(q')dq',\\
&\Sigma_{\text{int}}(q) = 2\int T_{k1,23}\{T^*_{k1,23}[G_1 n_2 n_3 + n_1(G_2 n_3 + n_2 G_3)] +\\
&+ 2T_{k\bar{2},\bar{1}3}[\sigma_1^*(\sigma_2 G_3 + L_2 n_3) + L_1^*\sigma_2 n_3]\} \times\\
&\times \delta(q + q_1 - q_2 - q_3)\delta q_1 \delta q_2 \delta q_3,\\
&\Pi_{\text{int}}(q) = 2\int T_{k1,23}\{T_{k1,23}[\sigma_1^*(\sigma_2 L_3 + \sigma_3 L_2) +\\
&+ L_1^*\sigma_2\sigma_3] + 2T_{k\bar{2},\bar{1}3}[n_1(G_2\sigma_3 + n_2 L_3) +\\
&+ G_1^* n_2 \sigma_3]\}\delta(q + q_1 - q_2 - q_3)dq_1 dq_2 dq_3, \qquad (36.6)\\
&\Phi(q) = \Phi_{\text{int}}(q) = 2\int [\,|T_{k1,23}|^2 n_1 n_2 n_3 +\\
&+ T_{k1,23}T^*_{k\bar{2},\bar{1}3}\sigma_1^*(n_2\sigma_3 + \sigma_2 n_3)]\delta(q + q_1 - q_2 - q_3)dq_1 dq_2 dq_3,\\
&\Psi(q) = 2\int [T^2_{k1,23}\sigma_1^*\sigma_2\sigma_3 + T_{k1,23}T_{k\bar{2},\bar{1}3}n_1(\sigma_2 n_3 + n_2\sigma_3)] \times\\
&\times \delta(q + q_1 - q_2 - q_3)dq_1 dq_2 dq_3.
\end{aligned}
$$

В следующих главах мы займемся подробным анализом решений этих уравнений, полученные теоретические результаты будут сравниваться с экспериментом.

§ 37. Уравнения для одночастотной параметрической турбулентности волн

В приближении S-теории функции распределения параметрически возбужденных пар волн в $(\boldsymbol{k}-\omega)$-пространстве были сингулярными (см. (33.1)). Здесь мы покажем, что диаграммные уравнения (36.6) имеют частное решение вида

$$n_p(\boldsymbol{k},\omega)=n_p(\boldsymbol{k})\delta(\omega-\omega_p/2),\ \sigma_p(\boldsymbol{k},\omega)=\sigma_p(\boldsymbol{k})\delta(\omega-\omega_p/2), \tag{37.1}$$

слегка размытое в $\boldsymbol{k}$-пространстве. Действительно, в силу (36.3) распределения $n_p(\boldsymbol{k},\omega)$, $\sigma_p(\boldsymbol{k},\omega)$ по ω с точностью до несингулярных по ω множителей – функций Грина – повторяют распределение по ω величин $\Phi(\boldsymbol{k},\omega)$ и $\Psi(\boldsymbol{k},\omega)$. Подставляя же (37.1) в (36.6), получим

$$\Phi(\boldsymbol{k},\omega)=\Phi_{\boldsymbol{k}}\delta(\omega-\omega_p/2),\ \Psi(\boldsymbol{k},\omega)=\Psi_{\boldsymbol{k}}\delta(\omega-\omega_p/2). \tag{37.2}$$

На одночастотном решении (37.1) исходные уравнения (36.6) упрощаются до вида

$$\begin{aligned}
&n_{\boldsymbol{k}}=(|G_{\boldsymbol{k}}|^2+|L_{\boldsymbol{k}}|^2)\Phi_{\boldsymbol{k}}+2\,\mathrm{Re}\,(G_{\boldsymbol{k}}\Psi_{\boldsymbol{k}}L_{\boldsymbol{k}}^*),\\
&\sigma_{\boldsymbol{k}}=2L_{\boldsymbol{k}}\Phi_{\boldsymbol{k}}G_{\boldsymbol{k}}+L_{\boldsymbol{k}}^2\Psi_{\boldsymbol{k}}^*+G_{\boldsymbol{k}}^2\Psi_{\boldsymbol{k}},\\
&G_{\boldsymbol{k}}=G(\boldsymbol{k},\omega_p/2)=(\omega_p/2-\widetilde{\omega}_{\boldsymbol{k}}-i\Gamma_{\boldsymbol{k}})\Delta_{\boldsymbol{k}}^{-1},\\
&L_{\boldsymbol{k}}=L(\boldsymbol{k},\omega_p/2)=\Pi_{\boldsymbol{k}}\Delta_{\boldsymbol{k}}^{-1},\ \Delta_{\boldsymbol{k}}=\\
&=(\widetilde{\omega}_{\boldsymbol{k}}-\omega_p/2)^2+\nu_{\boldsymbol{k}}^2,\ \nu_{\boldsymbol{k}}^2=\Gamma_{\boldsymbol{k}}^2-|\Pi_{\boldsymbol{k}}|^2.
\end{aligned} \tag{37.3}$$

Из этих уравнений следует, что функции распределения $n_{\boldsymbol{k}}$ и $\sigma_{\boldsymbol{k}}$ есть квадрат функции Лоренца с шириной $\Delta\boldsymbol{k}=\nu_{\boldsymbol{k}}/v_{\boldsymbol{k}}$ ($v_{\boldsymbol{k}}$ – групповая скорость) и максимумом на резонансной поверхности. Так же, как и в S-теории, узость функции распределения вблизи нее делает удобным использование в $\boldsymbol{k}$-пространстве следующих координат: угловых $\Omega=(\theta,\varphi)$ и координаты κ – расстояния от резонансной поверхности по радиусу. Пренебрегая зависимостью матричных элементов $V_{\boldsymbol{k}}$ и T от κ, можно проинтегрировать (37.3) по κ и получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&N_\Omega=\pi k_\Omega^2\Gamma_\Omega[\Gamma_\Omega\Phi_\Omega+\mathrm{Im}\,(\Pi_\Omega^*\Phi_\Omega)]/v_\Omega\nu_\Omega^3,\\
&\Gamma_\Omega\Sigma_\Omega+i\Pi_\Omega N_\Omega=0,\ \nu_\Omega^2=\Gamma_\Omega^2-|\Pi_\Omega|^2
\end{aligned} \tag{37.4}$$

для интегральных величин

$$N_\Omega=k_\Omega^2\int n_p(\boldsymbol{k})d\kappa,\ \Sigma_\Omega=k_\Omega^2\int\sigma_p(k)d\kappa, \tag{37.5}$$

где k_Ω – радиус резонансной поверхности в точке с угловыми координатами Ω. С помощью обозначений

$$\widetilde{N}_\Omega=\pi k_\Omega^2\Phi_\Omega/v_\Omega\nu_\Omega,\ \widetilde{\Sigma}_\Omega=\pi k_\Omega^2\Psi_\Omega/v_\Omega\nu_\Omega \tag{37.6}$$

уравнения (37.4) можно тождественно преобразовать к виду

$$\Gamma_\Omega(N_\Omega - \widetilde{N}_\Omega) + \mathrm{Im}\,[\Pi^*_\Omega(\Sigma_\Omega - \widetilde{\Sigma}_\Omega)] = 0,$$
$$\Gamma_\Omega \Sigma_\Omega + i\Pi_\Omega N_\Omega = 0. \tag{37.7}$$

Для сравнения здесь полезно привести в обозначениях (37.5) уравнения S-теории, описывающие основное состояние ПСВ:

$$\gamma_\Omega N_\Omega + \mathrm{Im}\,(P^*_\Omega \Sigma_\Omega) = 0,$$
$$\gamma_\Omega \Sigma_\Omega + i\,\Pi_\Omega N_\Omega = 0. \tag{37.8}$$

Принципиальное отличие полученных здесь уравнений (37.7) от уравнений S-теории (37.8) заключается в наличии дополнительных "шумовых" слагаемых $\widetilde{N}_\Omega$ и $\widetilde{\Sigma}_\Omega$. Кроме того, в (37.7) перенормированы затухания ПСВ $\Gamma_\Omega = \gamma_\Omega + \ldots$ и накачка $\Pi_\Omega = P_\Omega + \ldots$. Детальный анализ уравнений одночастотной турбулентности ПСВ будет приведен в гл. 10.

§ 38. Диаграммные уравнения для коллективных колебаний

Рассматривая последовательность графиков для перенормировки вершины $T_{12,34}$, можно убедиться, что при передаче малого импульса, т.е. при $k_1 \approx k_4$, $k_2 \approx k_3$, $k_1 + k_2 \approx 0$, $k_3 + k_4 \approx 0$, эта перенормировка не является малой, и соответствующий ряд необходимо суммировать. При подстановке перенормированной вершины в уравнение Дайсона функции Грина приобретают дополнительный полюс, описывающий спектр коллективных колебаний. Другой путь, позволяющий ограничиться уравнениями Дайсона с неперенормированными вершинами, заключается в том, чтобы с самого начала учесть пространственно-неоднородные и нестационарные состояния. Для этого мы откажемся от предположения, что коррелятор случайной силы $\langle f_q f^*_{q'} \rangle$ пропорционален $\delta(q - q')$, и введем функции Грина $G(q, q')$, $L(q, q')$ и парные средние $n(q, q')$, $\sigma(q, q')$ с помощью следующих соотношений, обобщающих формулы (33.1), (34.8) и (36.1):

$$G(q, q') = \langle \delta a(q)/\delta f(q') \rangle,$$
$$L(q, q') = \langle \delta a(q)/\delta f^*(q') \rangle,$$
$$n(q, q') = \langle a^*(q') a(q) \rangle = n^*(q', q), \tag{38.1}$$
$$\sigma(q, q') = \langle a(q) a(q') \rangle = \sigma(q', q).$$

Графические изображения рядов для функций Грина и парных корреляторов имеют такой же вид, как и в пространственно-однородном и стационарном случаях. Поэтому можно обычным образом суммировать приводимые графики и получить систему уравнений Дайсона – Уайльда для величин (38.1):

$$G(q, q') = G^0_q[\delta(q - q') + (\Sigma G + \Pi L^*)_{q,q'}],$$
$$L^*(q, q^*) = G^{0*}_q(\Pi^* G + \Sigma^* L^*)_{q,q'},$$
$$n(q, q') = (G\Phi G^* + L\Psi^* G^* + L\Phi^* L + G\Psi L^*)_{q,q'}, \tag{38.2}$$
$$\sigma(q, q') = (G\Phi L + L\Psi^* L + L\Phi^* G + G\Psi G)_{q,q'}.$$

Здесь, как обычно, Σ, Π, Φ, Ψ означают суммы неприводимых диаграмм: Σ и Φ – нормальные, т.е. сохраняющие направление стрелок, диаграммы Π и Ψ – аномальные неприводимые диаграммы. Диаграммы Φ и Ψ, в отличие от диаграмм для Σ и Π, могут быть рассечены на две части только по волнистым линиям. По внутренним индексам в (38.2) необходимо интегрировать. Например,

$$(\Sigma G)_{q,q'} = \int \Sigma(q, q_1) G(q_1, q') dq_1,$$

$$(G\Phi L)_{q,q'} = \int G(q, q_1)\Phi(q_1, q_2) L(q_2, q') dq_1 dq_2.$$

Как будет показано в гл. 10, при не слишком большой надкритичности, а именно при $(h/h_{\text{th}})^2 < kv/\gamma$, в диаграммах для Σ, Π, Φ и Ψ можно не учитывать перенормировку вершин, т.е. ограничиться приведенными в (36.5) графиками с одной и двумя вершинами T. Полученные выражения представляют собой замкнутую систему интегральных уравнений для величин G, L и n, σ. Она имеет частное решение вида

$$\begin{aligned}
&G(q, q') = \overline{G}(q, q') = G_q \delta(q - q'),\ L(q, q') = \overline{L}(q, q') = \\
&= L_q \delta(q - \overline{q}'),\ \overline{n}(q, q') = n_q \delta(q - q'), \\
&\overline{\sigma}(q, q') = \sigma_q \delta(q - q'),\ \overline{\Sigma}(q, q') = \Sigma_q \delta(q - q'), \\
&\overline{\Pi}(q, q') = \Pi_q \delta(q - \overline{q}'),\ \overline{\Phi}(q, q') = \Phi_q \delta(q - q'), \\
&\overline{\Psi}(q, q') = \Psi_q \delta(q - q'),
\end{aligned} \tag{38.3}$$

соответствующее стационарному пространственно-однородному состоянию ПСВ, которое мы назвали в гл. 4 основным состоянием. Линеаризуя систему уравнений (38.2), приходим к следующей системе линейных интегральных уравнений относительно величин $\widetilde{G}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{n}$ и $\widetilde{\sigma}$, представляющих отклонения G, L, n и σ относительно их значений (38.3) в основном состоянии:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{G}(q, q') = A(q, q') G(q') + B(q, q') L^*(q'), \\
&\widetilde{L}(q, q') = A(q, q') L(q') + B(q, q') G^*(q'), \\
&\widetilde{n}(q, q') = (A(q, q') n(q') + B(q, q')\sigma^*(q')) + \\
&+ (A^*(q', q) n(q) + B^*(q', q)\sigma(q)) + \\
&+ C(q, q') G^*(q') + D(q, q') L^*(q'), \\
&\widetilde{\sigma}(q, q') = (A(q, q')\sigma(q') + B(q, q') n(q')) + \\
&+ (A(q', q)\sigma(q) + B(q', q) n(q)) + \\
&+ C(q, q') L(q') + D(q, q') G(q'), \\
&A(q, q') = G(q)\widetilde{\Sigma}(q, q') + L(q)\widetilde{\Pi}^*(\overline{q}, q'), \\
&B(q, q') = G(q)\widetilde{\Pi}(q, q') + L(q)\widetilde{\Sigma}^*(\overline{q}, q'), \\
&C(q, q') = G(q)\Phi(q, q') + L(q)\widetilde{\Psi}^*(\overline{q}, q'), \\
&D(q, q') = G(q)\widetilde{\Psi}(q, q') + L(q)\widetilde{\Phi}^*(q, q').
\end{aligned} \tag{38.4}$$

Величины A, B, C и D выражаются через $\widetilde{\Sigma}$, $\widetilde{\Pi}$, $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ – отклонения мас-

совых операторов Σ, Π, Φ и Ψ от их значений в основном состоянии (38.3). Выражения для них получаются линеаризацией соответствующих общий выражений.

Полагая в линеаризованных величинах $(\widetilde{G}, \widetilde{n})$ $\omega' - \omega = \Omega$, $\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} = \vec{\kappa}$, а в $(\widetilde{L}, \widetilde{\sigma})$ $\omega + \omega' - \omega_p = \Omega$, $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}' = \vec{\kappa}$, можно в качестве условия разрешимости линейной системы уравнений (38.4) получить зависимость Ω от $\vec{\kappa}$, т.е. спектр коллективных колебаний системы ПСВ относительно основного состояния. Для устойчивости основного состояния необходимо, чтобы $\operatorname{Im}\Omega(\kappa) < 0$ для всех $\vec{\kappa}$. В следующих главах мы подробно исследуем полученную в этом параграфе систему уравнений для наиболее интересных предельных случаев.

Задачи

Задача 7.1. Доказать свойство 8 графиков для Σ_q (см. § 34) о том, что при записи аналитических выражений для них в произведении всех вершин и функций n_q и G_q в ребрах следует оставлять только действительную часть.

Указание. Рассмотреть сумму зеркально-симметричных пар графиков, таких как графики на рис. 34.1, *б*, *в*.

Задача 7.2. Рассматривая зеркально-симметричные графики для Φ_q, доказать, что аналитические выражения для Φ_q являются действительными (свойство 9, § 34).

Задача 7.3. Доказать, что диаграммные ряды для n_q и G_q в технике Уайльда имеют частное решение (34.10), отвечающее термодинамическому равновесию (Захаров, Львов, [107]).

Указание. Необходимо убедиться, что при условии (34.10) в каждом порядке по вершинам выполняется соотношение $\pi\omega\Phi_q = T\operatorname{Im}\Sigma_q$ внутри каждой группы из $(m+1)$ графиков, включающей один график для Φ_q с m линиями n_q, пересекающими основное сечение и m графиков для Σ_q, которые "порождаются" единственным графиком для Φ_q в соответствии с топологическим свойством 4 графиков, указанным в § 34.

Задача 7.4. Доказать, что диаграммная техника для неравновесных процессов для взаимодействующего бозе-поля (техника Келдыша, [118]) переходит в технику Уайльда для канонических переменных в классическом пределе больших чисел заполнения. Насколько мне известно, опубликованное доказательство этого факта отсутствует, хотя сомнений в его справедливости ни у кого нет.

Указание. Соответствие должно наблюдаться между классическими величинами $n(q)$, $G(q)$, $\Phi(q)$ и $\Sigma(q)$ техники Уайльда и следующими величинами квантовой техники:

$$
\begin{aligned}
&n_q \backsim \hbar G_d(q),\ G(q) \backsim G_R(q),\\
&\Phi_q \backsim \hbar \Sigma_d(q),\ \Sigma(q) \backsim \Sigma_R(q),\\
&G_R(q) = G^{11}(q) - G^{21}(q),\ G_d(q) = G^{11}(q) + G^{22}(q).
\end{aligned}
\tag{38.5}
$$

Здесь индекс d характеризует дистрибутивные величины, индекс R – причинные, индексы 1 и 2 суть индексы Келдыша, относящиеся к нижнему и верхнему берегу временного контура.

Задача 7.5. Уточнить критерии применимости (35.5) и (35.6) четырехволнового кинетического уравнения (35.4) в случае обменного гамильтониана взаимодействия для следующих случаев: 1. Шаровой слой толщиной κ и радиусом $k_0 \gg \kappa$. 2. Тор с малым радиусом κ и большим $k_0 \gg \kappa$. 3. Сферу радиусом κ и центром в точке k_0. Эти три области имеют объем порядка $\kappa_0 k_0^2$, $\kappa^2 k_0$ и κ^3 соответственно. Принципиальный вопрос заключается в том, какой из существенно различных размеров k или κ, характеризующих пакет СВ, будет входить в эти оценки?

Задача 7.6. Пользуясь диаграммной техникой Уайльда, получить кинетическое уравнение (35.7) и его критерии применимости (35.8) для системы волн с трехволновым взаимодействием $\mathcal{H}_3$.

Задача 7.7. Уточнить критерии применимости (35.8) кинетического уравнения (35.7) с трехмагнонным диполь-дипольным взаимодействием для трех типов пакетов СВ, описанных в задаче 7.5.

Задача 7.8. Рассмотреть последовательность диаграмм для перенормировки вершин с малой передачей импульса (κ, Ω) вблизи $T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ и $S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ в лестничном приближении и показать, что они содержат те же полюсы коллективных колебаний системы ПСВ, что и уравнения (38.4), если в диаграммах для массовых операторов не учитывать перенормировку вершин.

Задача 7.9. Сформулировать ДТ Уайльда для рассмотренной в § 30 задачи о поведении ПСВ, находящихся под действием шумовой накачки. Переформулировать стандартный вариант ДТ так, чтобы получить диаграммные ряды, содержащие только нормальные ФГ G_q и корреляторы амплитуд волн n_q и перенормированной накачки $P^2_{k\omega}$, P^3 и т.д.

Задача 7.10. Показать, что мнимая часть массового оператора Σ_q для ФГ, полученных в предыдущей задаче, порядка затухания свободных СВ γ_k, если спектральная ширина шумовой накачки $\Delta\omega \gg \gamma_k$. Убедиться, что члены высших порядков в корреляторе накачки $\propto P^5$, P^6, ... в диаграммах для Σ_q не малы и, следовательно, стандартное суммирование рядов по Дайсону в задаче о шумовой накачке неэффективно. В пределе $\Delta\omega \gg \gamma_k$ доказать соотношение

$$P_k^2 = \pi\gamma\Delta\omega, \tag{38.6}$$

где $\Delta\omega$ – спектральная ширина накачки, $\langle P_k(t')P_k^*(t'')\rangle = P_k^2(t' - t'')$. Соотношение (38.6) было использовано в § 30 при выводе исходных уравнений для системы волн, возбуждаемых шумовой накачкой.

Указание. При выводе (38.6) удобно перейти в ω-представление.

ГЛАВА 8

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИНТЕНСИВНОГО УЗКОГО ПАКЕТА СПИНОВЫХ ВОЛН С ТЕПЛОВЫМИ

В настоящее время в связи с практическими задачами СВЧ-техники, нелинейной оптики, физики плазмы ведется широкое изучение явлений, связанных с возбуждением и распространением в веществе пакета волн большой амплитуды. При этом среда служит разервуаром тепловых волн (ТВ), взаимодействие с которыми во многих случаях является главной причиной затухания пакета. Если его амплитуда мала, то можно считать, что декремент затухания не зависит от амплитуды и находится линеаризацией кинетического уравнения на фоне равновесного распределения. Именно это мы имели в виду в гл. 3–6 при описании нелинейной динамики и параметрической кинетики СВ, когда декремент затухания СВ вводился феноменологически в уравнения движения. Когда число волн в пакете N много меньше общего числа ТВ N_T, система ТВ в целом слабо отклоняется от равновесия. Однако законы сохранения энергии и импульса разрешают участвовать в релаксации узкого $(\Delta\omega_k \ll \omega_k)$ пакета лишь небольшой части общего резервуара ТВ. Поэтому уже при сравнительно малой амплитуде пакета диссипируемая им энергия может существенно отклонить в этой области числа заполнения ТВ n_k от равновесных значений n_k^0. При этом время затухания пакета начинает зависеть от его амплитуды, т.е. релаксация становится нелинейной.

Параметром, определяющим отличие процесса релаксации от линейного, таким образом, является не N/N_T, а отношение числа волн N к числу участвующих в процессе релаксации ТВ или, иными словами, произведение линейного декремента затухания волн с характерным временем нелинейного взаимодействия ТВ с пакетом τ_k.

В этой главе рассмотрен как случай слабой нелинейности $\gamma_k\tau \gg 1$, так и сильной $\gamma_k\tau \ll 1$. Мы ограничимся рассмотрением наиболее существенных трехволновых процессов. Способ описания нелинейной кинетики волн существенно зависит от ширины возбуждаемого пакета в k-пространстве. Если $\Delta\omega_k \gg \gamma_k$, τ_k^{-1}, т.е. время хаотизации фаз $(\Delta\omega_k)^{-1}$ много меньше времени взаимодействия, то эволюция как пакета, так и взаимодействующих с ним волн описывается кинетическими уравнениями для чисел заполнения волн в k-пространстве. Первый параграф этой главы (§ 39) посвящен случаю слабой нелинейности $\Delta\omega_k \gg \gamma_k \gg \tau_k^{-1}$, в нем вычислен нелинейный декремент затухания СВ в ФМ. В § 40 изучается влияние нелинейного затухания на поведение СВ за порогом параметрического возбуждения и проведено сравнение с данными экспериментов. В § 41 рассмотрена нелинейная релаксация пакета волн большой амплитуды такой, что взаимодействие ТВ между собой гораздо слабее, чем их взаимодействие с нелинейным пакетом, $\Delta\omega_k \gg \tau_k^{-1} \gg \gamma_k$. И наконец, последний параграф этой главы (§ 42) посвящен релаксации в нелинейной среде монохроматических волн $\Delta\omega_k \ll \gamma_k$, τ_k^{-1}, когда кинетическое уравнение неприменимо, и описание строится с помощью динамических уравнений, дополненных феноменологическим учетом влияния остальной части термостата с помощью метода случайных сил Ланжевена.

§ 39. Нелинейная релаксация пакета волн в приближении самосогласованного поля

39.1. Схема вычисления нелинейной поправки к декременту затухания волн. Здесь мы будем предполагать, что

$$\tau_k^{-1} \ll \gamma_k \ll \Delta\omega_k. \tag{39.1}$$

Правая часть этого неравенства обусловливает возможность использования кинетического уравнения как для вычисления γ_k, так и нелинейной поправки к этой величине (см. задачи 7.5–7.7). Левая же часть (39.1) позволяет описывать процесс нелинейной релаксации в приближении самосогласованного поля, т.е. в терминах линейных характеристик (в данном случае декремента затухания), слабо перенормированных нелинейным взаимодействием. Эта перенормировка возникает следующим образом. Вычисленный с помощью кинетического уравнения декремент затухания волн исходного пакета является функционалом от чисел заполнения тепловых волн.

Отклонение $\delta n_k = n_k - n_k^0$ чисел заполнения ТВ от равновесных следует находить из кинетического уравнения, записанного для ТВ и линеаризованного по δn_k, N_k. При этом возникает линейная связь $\delta n(k')$ и N_k. Подставляя затем $\delta n(k')$ в формулу для декремента затухания, придем

к выражению вида (10.10):

$$\gamma_k = \gamma_k^0 + \int \eta(k, k') N(k') dk'. \qquad (39.2)$$

Как мы увидим ниже, условие $\gamma_k - \gamma_k^0 \ll \gamma_k^0$ эквивалентно $\gamma_k \tau \gg 1$. Найти выражения для ядра $\eta_{kk'}$ – основная цель этого параграфа.

Мы будем исходить из кинетического уравнения для трехволновых процессов (35.7). Первое слагаемое в нем описывает изменение числа волн с волновым вектором k под влиянием процессов распада на другие волны, а второе – из-за процессов слияния рассматриваемых волн с ТВ. Из (35.7) получаем выражения для декрементов затухания, обусловленных процессами распада (split – расщепление) и слияния (confluence):

$$\gamma_s = \frac{\pi}{2} \int U_{k12}(n_1 + n_2) dk_1 dk_2 = \gamma_s^0 + \pi \int U_{k1k-1} \delta n_1 dk_1 dk_2, \qquad (39.3)$$

$$U_{123} = |V(k_1, k_2, k_3)|^2 \delta(q_1 - q_2 - q_3), \; q = (k, \omega),$$
$$\gamma_c = \pi \int U_{1k2}(n_2 - n_1) dk_1 dk_2 = \gamma_c^0 + \pi \int U_{1k2}(\delta n_2 - \delta n_1) dk_1 dk_2. \qquad (39.4)$$

Отклонения чисел заполнения ТВ δn_k находим из кинетического уравнения для этих волн, положив в нем $\partial n(k')/\partial t = 0$ и линеаризуя по N_k (ведь в силу $\gamma_k \tau \gg 1$ число волн в нелинейном пакете много меньше числа взаимодействующих с ним ТВ):

$$\gamma(k_1)\delta n(k_1) = -\pi \int U(k + k', k, k')[n^0(k_1) -$$
$$- n^0(k_1 + k')] N(k') dk' + \pi \int U(k_1, k', k_1 - k') \times$$
$$\times [n^0(k_1 - k') - n^0(k_1)] N(k') dk' +$$
$$+ \pi \int U(k', k_1, k' - k_1)[n^0(k' - k_1) - n^0(k_1)] N(k') dk'. \qquad (39.5)$$

Слияние рассматриваемых ТВ с волнами $N(k')$ из исходного пакета (первое слагаемое в (39.5)) уменьшает число ТВ, а распады с участием волн $N(k')$ (второе и третье слагаемые) увеличивают. Подставляя $\delta n(k)$ из (39.5) в выражения для γ_c и γ_s, придем к выражению для $\eta_{kk'}$, состоящему из девяти слагаемых. Его анализ и конкретный расчет $\eta_{kk'}$ мы проведем на примере СВ в кубических ФМ (например, ЖИГ). В заключение этого отметим, что приведенная схема без изменений переносится на случай расчета нелинейной поправки к затуханию, связанной с четырехволновыми процессами.

39.2. Нелинейное затухание СВ в кубических ФМ (В.С.Львов, Г.Е.Фалькович, [168]). Анализ закона дисперсии СВ (6.2), проведенный в § 11, показывает, что процесс распада на две волны разрешен лишь для тех СВ, волновые векторы которых превышают величину k_s, задаваемую равенством (11.12). При фиксированной частоте накачки ω_p волновой вектор ПСВ можно менять, изменяя магнитное поле H, приложенное к образцу. Условие $k > k_s$ означает, что H меньше некоторого $H_1(\theta)$. Величина $H_1(\theta)$ легко вычисляется из (6.5). Процессы слияния разрешены

для всех k в интересующем нас интервале. Причиной нелинейного затуханий, помимо обсуждавшихся взаимодействий, может служить процесс слияния двух нелинейных волн из возбуждаемого пакета. Для ПСВ, имеющих одинаковую частоту $\omega_p/2$, это возможно при $k > k_{3M}$ и соответственно $H < H_{3M}(\theta)$. Эти величины легко вычисляются из закона дисперсии СВ (6.2), и мы их приводить не будем.

Отрицательное нелинейное затухание. Сначала рассмотрим случай, когда для ПСВ, возбуждающихся вблизи экватора, распады запрещены, т.е. $H > H_1(\pi/2) \equiv H_1$. В этом случае дифференциальное нелинейное затухание оказывается отрицательным, $\partial\gamma_c/\partial N < 0$, т.е. декремент затухания ПСВ уменьшается с ростом их числа. На качественном уровне это можно понять так: декремент затухания в процессах слияния параметрических и тепловых волн $\gamma_c(k)$ пропорционален разности $n(k') - n(k+k')$, в каждом акте слияния уменьшается число СВ $n(k')$ в области k' и увеличивается число СВ $n(k+k')$, что и приводит к уменьшению $\gamma_c(k)$. Подставляя получившуюся из (39.5) δn_k в выражение для $\gamma_c(k)$, имеем в соответствии с (39.2)

$$
\begin{aligned}
&\eta_c(k,k') = \int dk_1 \mid V(k_1, k, k_1-k)\mid^2 \delta(\omega_1 - \omega_k - \omega(k_1-k)) \times \\
&\times \mid V(k_1+k', k_1, k')\mid^2 \delta(\omega(k_1+k') - \omega_1 - \omega(k')) \times \\
&\times [n^0(k_1) - n(k_1+k')]/\gamma_1^0 + \int dk_1 \mid V(k_1+k, k_1, k)\mid^2 \times \\
&\times \delta(\omega(k_1+k) - \omega_1 - \omega_k) \mid V(k_1, k', k_1-k')\mid^2 \times \\
&\times \delta(\omega_1 - \omega(k') - \omega(k_1-k'))[n^0(k_1-k) - \\
&- n^0(k_1)]/\gamma_1^0 - \int dk_1 \mid V(k_1, k, k_1-k)\mid^2 \times \\
&\times \delta(\omega_1 - \omega_k - \omega(k_1-k)) \mid V(k_1, k', k_1-k')\mid^2 \times \\
&\times \delta(\omega_1 - \omega(k') - \omega(k_1-k'))[n^0(k_1-k) - n^0(k_1)]/\gamma_1^0 - \\
&- \int dk_1 \mid V(k_1+k, k_1, k)\mid^2 \delta(\omega(k_1+k) - \omega_1 - \omega_k) \mid \times \\
&\times V(k_1+k', k_1, k')\mid^2 \delta(\omega(k_1+k') - \\
&- \omega_1 - \omega(k'))[n^0(k_1) - n^0(k_1+k')]/\gamma_1^0, \\
&\omega_1 \equiv \omega(k_1), \quad \gamma_1^0 = \gamma^0(k_1), \quad n_1 = n(k_1).
\end{aligned}
\tag{39.6}
$$

Третье и четвертое слагаемые в выражении для $\eta_c(k, k')$ имеют особенность при $k' \to k$, возникающую из-за совпадения аргументов у δ-функций. При $|k' - k| = \kappa \ll k$, разлагая $\omega(k')$, $\omega(k_1 \pm k')$ до первого порядка по κ, видим, что $\eta_c(k, k') \propto \kappa^{-1}$. Таким образом, для распределений ПСВ, узких хотя бы по двум направлениям в k-пространстве, можно ограничиться в (39.6) лишь сингулярными слагаемыми. Действительно, в этом случае, интегрируя $1/\kappa$ по dk', мы получим нелинейную добавку к $\gamma_0(k)$, пропорциональную логарифму малой величины. Пакет же ПСВ имеет обычно

при небольших надкритичностях малую ширину как по модулю k, так и по углу θ_k (см. далее (40.6)).

Проанализируем выражение (39.6) при $\boldsymbol{k}'$, близком к $\boldsymbol{k}$ для волновых векторов, близких к экватору резонансной поверхности $x = \pi/2 - \theta_k \ll 1$, $x' = \pi/2 - \theta(\boldsymbol{k}') \ll 1$.

Ограничиваясь лишь сингулярными слагаемыми и считая, что вблизи $\theta = \pi/2$ выражение (6.2) для ω_k можно заменить на более простое: $\omega_k = \omega_0 + \omega_M/2 + \alpha k^2 \equiv \omega_1 + \alpha k^2$ (для интересующих нас экспериментов это соответствует приблизительно 10%-ной погрешности), и учитывая угловую зависимость матричного элемента трехмагнонного взаимодействия (6.22), получим

$$\eta_c(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \approx -(2T\omega_p V^4/\alpha k)[\sin^2(\varphi/2) + (x - x')^2/4 + (k - k')^2/4k^2]^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\omega_1 + \alpha k^2} \int\limits_{\tilde{k}_1}^{\infty} \frac{dk_1 \tilde{k}_1^5 [k_1^2 - \tilde{k}_1^2]^{3/2}}{k_1^7 \gamma_1^0 \omega(k_1)[\omega(k_1) - \omega_p/2]} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_1} \int\limits_{\tilde{k}_2}^{\infty} \frac{dk_1 \tilde{k}_2^5 [k_1^2 - \tilde{k}_2^2]^{3/2}}{k_1^7 \gamma_1^0 \omega(k_1)[\omega(k_1) - \omega_p/2]} \right\}. \tag{39.7}$$

Здесь $\tilde{k}_1 = (\omega_1 + \alpha k^2)/2\alpha k \cos(\varphi/2)$, $\tilde{k}_2 = \omega_1/2\alpha k \cos(\varphi/2)$, φ – разность азимутальных углов векторов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$.

Как известно, при переходе $\boldsymbol{k}$ из нераспадной области в распадную декремент затухания $\gamma(\boldsymbol{k})$ быстро увеличивается с ростом k (открывается новый канал релаксации). Легко видеть, что $\tilde{k}_1 > k_S(\pi/2)$. Поэтому при $\tilde{k}_2 < k_S(\pi/2)$, что эквивалентно $H < H_2 \approx (8\omega_p - 3\omega_M)/18g$, основной вклад в $\eta_c(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ вносит второе слагаемое в (39.7). При полях, больших H_2, $\eta_c(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ быстро уменьшается с ростом поля. Это связано с тем, что с ростом H уменьшается волновой вектор ПСВ и в силу законов сохранения увеличивается волновой вектор k_1 и затухание $\gamma(\boldsymbol{k}_1)$ взаимодействующих с ними ТВ. Увеличение же $\gamma(\boldsymbol{k}_1)$ приводит к уменьшению отклонения чисел заполнения ТВ от равновесных.

Для изучения влияния нелинейного затухания на возбуждение ПСВ в случае аксиальной симметрии нам понадобится значение $\eta_c(k, k') = \int \eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') d\varphi/2\pi$. Вычисляя ее при $H < H_2$, получим

$$\eta_c(k, k') \approx -\frac{T\omega_p V^4 \ln[(x - x')^2 + (k - k')^2/4k^2]}{20\pi(\omega_1 + \omega_p/2)(\alpha k)^2 \gamma^0(\omega_1/2\alpha k)}. \tag{39.8}$$

Трехмагнонный механизм слияния включается (и $\eta(k, k')$ обращается в нуль) при $\tilde{k}_2 = \omega_1/2\alpha k > 0$, что соответствует $H > H_3 = H_c - \omega_1^2 a^2/2\alpha g_1$, где H_c – магнитное поле, при котором k ПСВ с $\theta = \pi/2$ равны нулю.

Отметим, еще, что в сферическом случае для распределений ПСВ, заполняющих всю резонансную поверхность, несмотря на то, что в (39.6) все

четыре слагаемых одного порядка, результирующее нелинейное затухание оказывается отрицательным (в чем можно убедиться, проводя непосредственные вычисления).

Положительное нелинейное затухание в процессах распада. Рассмотрим теперь нелинейное затухание параметрических волн в распадной части спектра $H < H_1$:

$$\gamma_s(\boldsymbol{k}) = \gamma_0(\boldsymbol{k}) + \pi \int |V(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)|^2 \delta(\omega(\boldsymbol{k}) - \omega(\boldsymbol{k}_1) - \\ - \omega(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)) \delta n(\boldsymbol{k}_1) d\boldsymbol{k}_1 . \tag{39.9}$$

Пренебрегая в (39.5) всеми слагаемыми, кроме третьего, поскольку они дают "нерезонансный" вклад (соответствующая функция $\eta_s(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ не имеет особенности при $\boldsymbol{k}' \to \boldsymbol{k}$), получим

$$\eta_s(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \int d\boldsymbol{k}_1 \, |V(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)|^2 \delta(\omega(\boldsymbol{k}) - \omega(\boldsymbol{k}_1) - \omega(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)) \times \\ \times |V(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1)|^2 \delta(\omega(\boldsymbol{k}') - \omega(\boldsymbol{k}_1) - \omega(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1)) \times \\ \times [n^0(\boldsymbol{k}_1) + n^0(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1)] / \gamma_0(\boldsymbol{k}_1). \tag{39.10}$$

Анализ законов сохранения в этом интеграле показывает, что $\eta_s(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}+\vec{\kappa})$ отлично от нуля при $\sin^2\beta > \left(\frac{k_S}{k}\right)^2$, где β — угол между $\boldsymbol{k}$ и $\vec{\kappa}$. При $k \to k_S$ $\beta \to \pi/2$. Для ПСВ вблизи экватора получим у границы распадов $k^2 = k_S^2(1+\delta)$, $\delta \ll 1$, аналогично (39.8):

$$\eta_s(k, k') \approx \frac{2^6 V^4 T(\delta + x_1^2)(\delta + x'^2)}{\pi \omega_p \gamma^0(k/2) \alpha^2 k} \ln\left[(x - x')^2 + \left(\frac{k-k'}{2k}\right)^2\right]. \tag{39.11}$$

Видно, что для ПСВ в точности на экваторе ($x = x' = 0$) $\eta \sim \delta^2$ из-за того, что матричный элемент $V(k, k', k-k')$ обращается в нуль для волн, распространяющихся в плоскости, перпендикулярной намагниченности.

Сравнение (39.8) и (39.11) показывает, что отрицательное нелинейное затухание сменится положительным уже при

$$\delta^2 > \frac{\omega_p^2 \gamma(k/2)}{\alpha k^2(\omega_1 + \omega_p/2)\gamma(\omega_1/2\alpha k)} \frac{2^{-8}}{5} \approx \frac{1}{8}. \tag{39.12}$$

В последней формуле учтено, что при $k \approx k_S \approx 2\omega_1/\alpha$ $\omega_p \approx 2(\omega_1 + \alpha k_S^2) \approx 6\omega_1$ и что $\gamma(k_S/2) \approx 2\gamma(k_S/4)$. Таким образом, в распадной области $H < H_1$ нелинейное затухание ПСВ является положительным и описывается формулой (39.11).

Положительное нелинейное затухание в процессах слияния. Вычислим коэффициент нелинейного затухания, обусловленный слиянием двух ПСВ. Этот коэффициент, разумеется, не зависит от состояния системы тепловых волн. Исходя из формулы для декремента затухания в про-

цессах слияния γ_c, получим вблизи поля H_{3M} для ПСВ около экватора:

$$\eta_{2c}(k, k') \approx \frac{V^2}{\pi\omega_1} \frac{(x+x')^2}{[\delta'^2 + (x^2+x'^2)/2]^{1/2}},$$

$$kk' = k_{3M}^2(1+\delta'), \quad \delta' \ll 1. \tag{39.13}$$

Видно, что этот процесс эффективен лишь вблизи H_{3M} в небольшой области, определяемой шириной пакета по углу (рис. 39.1). Действительно, вычислим $\tilde{\eta} = \int\limits_{-a}^{a} \eta(0, x')dx'/2a$.

Эта величина равна коэффициенту нелинейного затухания ПСВ на экваторе при модельном выборе $N(x)$ в виде прямоугольника ширины $2a$. Для $\eta_{2c}(k, k')$, определяемой формулой (39.13),

$$\tilde{\eta}_{2c} \approx \frac{8V^2}{\pi\omega_1}\frac{\delta'}{a}\left[\arcsin\frac{a}{\delta'} - \frac{a}{\delta'}\left(1-\left(\frac{a}{\delta'}\right)^2\right)^{1/2}\right],$$

$$\tilde{\eta}_{2c,\max} \approx \frac{4V^2a^2}{\omega_1}. \tag{39.14}$$

Так как H_{3M} находится в нераспадной области, то следует сравнивать η_{2c} с η_c определяемой из (39.8): $\eta_c(k, k') = \eta_c \ln[(x-x')^2+(k-k')^2/4k']$. Для возбуждения волн в ЖИГ при комнатной температуре накачкой частоты $\omega_p/2\pi = 9{,}4$ ГГц, когда характерная угловая ширина пакета ПСВ вблизи порога $a \approx 5\cdot10^{-2}$ (А.С. Бакай и др. [54]), получим $|\eta_c|/|\eta_{2c,\max}| \approx$ $\approx 3/2$. Таким образом результирующее нелинейное затухание и при $H \approx H_{3M}$ остается отрицательным. На рис 39.1 представлена зависимость коэффициента нелинейного затухания (нормированного на коэффициент $S \approx 2\pi g^2$ – как мы увидим в следующем параграфе, именно отношение η/S играет важную роль в определении запорогового состояния ПСВ) от постоянного поля H. Черными кружками на этом рисунке отмечены данные экспериментальной работы Г.А. Мелкова [172]. Видно удовлетворительное согласие теории и эксперимента.

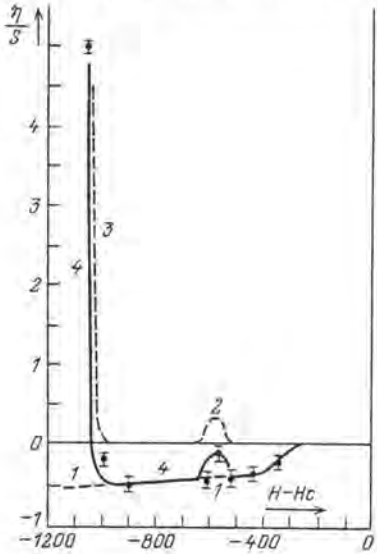


Рис. 39.1. Зависимость коэффициента нелинейного затухания от магнитного поля: *1* – теория для процессов слияния ПСВ и ТСВ; *2* – для процессов слияния двух ПСВ; *3* – для процессов распада. Сплошная кривая *4* описывает сумму этих процессов, точки – эксперимент

§ 40. Влияние нелинейного затухания на стационарное состояние параметрически возбужденных волн

Как и любой другой механизм, изменяющий линейные характеристики возбуждаемых волн (перенормировка частоты, накачки), нелинейное затухание определяет свойства запорогового состояния системы волн. Положительное нелинейное затухание (39.8) может играть роль механизма ограничения амплитуды возбуждаемых волн, отрицательное же (39.11), наоборот, должно приводить к жесткому возбуждению волн на пороге неустойчивости Следует также отметить важное качественное свойство коэффициента нелинейного затухания, вычисленного в рамках кинетического уравнения: при $k' = k$ кривая $\eta(k, k')$ имеет особенность. Физический смысл этого в том, что в перенормировку декремента затухания волны с данным k основной вклад вносят волны с близкими волновыми векторами. Как мы сейчас увидим, это приводит к тому, что при возбуждении волны накачкой, достаточно широкой в k-пространстве, возбуждаются спектры волн, также заполняющие конечные области k-пространства. Действительно, из-за локальности нелинейного затухания в каждой точке k-пространства, где накачка превышает линейное затухание, должно возбудиться число волн, достаточное для установления стационарного запорогового состояния. Рассмотрим конкретный пример параметрического возбуждения СВ. Уравнение баланса энергии, описывающее стационарное состояние ПСВ, имеет вид $\gamma_k(N) = |P_k(N)|$ и справедливо в той области k-пространства, где возбуждаются ПСВ. В остальной части k-пространства для устойчивости стационарного состояния должно выполняться условие внешней устойчивости (18.17). В случае аксиальной симметрии, реализующемся при возбуждении ПСВ в кубических ФМ, условие баланса энергии с учетом зависимости (39.2) $\gamma_k(N)$ приводит к интегральному уравнению для функции распределения ПСВ $N(x)$ по полярным углам $x = \pi/2 - \theta$:

$$\gamma + \eta \int \ln|x - x'|\, N(x')\,dx' = P(x) = P\cos^2 x. \tag{40.1}$$

Здесь мы воспользовались модельной зависимостью $P(\theta) = P\cos^2 x$. Общее решение этого уравнения локализованное в некоем интервале $-a \leqslant x \leqslant a$ и равное нулю снаружи, согласно [41] имеет вид

$$N(x) = \frac{1}{\pi\eta} \fint_{-a}^{a} \left(\frac{a^2 - t^2}{a^2 - x^2}\right)^{1/2} \frac{P'(t)\,dt}{t - x} + \frac{A}{(a^2 - x^2)^{1/2}},$$

где P' – производная накачки по углу, A – произвольная постоянная, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Как легко показать, ограниченное на обоих концах интервала решение существует лишь при выполнении равенства

$$\int_{-a}^{a} P'(t)\,(a^2 - t^2)^{-1/2}\,dt = 0$$

(что обеспечивается четностью функции $P(t)$) и имеет вид

$$N(x) = \frac{1}{\pi\eta} \int_{-a}^{a} \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 - t^2}\right)^{1/2} \frac{P'(t)\,dt}{t - x}. \tag{40.2}$$

Вычисленная в предыдущем параграфе поправка к декременту затухания получена в предположении $\gamma(k) - \gamma_0(k) \ll \gamma_0(k)$, что эквивалентно $|\int \eta(x, x') N(x') dx'| \ll \gamma$. Последнее условие, как мы увидим ниже, обеспечивает узость возбуждаемых пакетов ($a \ll 1$), поэтому интеграл в выражении (4.20) для $N(x)$ имеет смысл вычислять, разложив $P(t)$ при малых t: $P_t' = -2tP$. Пакет при этом имеет форму

$$N(x) = (2P/\pi\eta)(a^2 - x^2)^{1/2}, \tag{40.3}$$

что в силу естественного условия $N(x) \geqslant 0$ возможно лишь при $\eta \geqslant 0$. Имея в виду этот случай, подставим полученное решение в уравнение (40.1) и получим ширину пакета

$$a^2 = \frac{P - \gamma}{P \ln(2/a)}. \tag{40.4}$$

Для того чтобы определить зависимость числа волн и ширины пакета a от поля накачки h, воспользуемся интегральным соотношением $\int N(x)\, dx = N$:

$$Pa^2/\eta = N = \frac{P - \gamma}{\eta \ln(2/a)}.$$

Отсюда, пренебрегая логарифмической зависимостью, получим

$$N = \frac{\gamma}{|S|} \frac{-c + (p(c^2+1) - 1)^{1/2}}{c^2 + 1}, \tag{40.5}$$

$$a^2 = \frac{c}{c^2+1}\left[-c + (p(c^2+1) - 1)^{1/2}\right], \tag{40.6}$$

где $c = \eta/|S|$, $p = h^2V^2/\gamma^2$. Как мы видели в предыдущем параграфе, в распадной области, где $\eta > 0$, величина η сильно зависит от магнитного поля, и изменением H можно менять c в широких пределах. При $c \gg 1$, $a^2 \approx p^{1/2} - 1$, а в обратном предельном случае $c \ll 1$, $p - 1 \gg c^2$, получим $a^2 = c(p-1)^{1/2}$.

Обсудим пределы применимости полученных результатов. Проведенное в § 39 вычисление нелинейной поправки к затуханию справедливо лишь, если эта поправка мала: $\eta N \ll \gamma$.

При $c \ll 1$ это условие выполняется в широком интервале значений надкритичности $p \ll c^{-1/2}$, а при $c \gg 1$ – только при малых превышениях над порогом $p - 1 \ll 1$. Условие $\eta N \ll \gamma$ обеспечивает узость пакета, так как $a^2 \approx \eta N/\gamma \ll 1$. Важно также отметить, что конечная ширина возбуждаемого пакета возникла уже в приближении самосогласованного поля. Это, как уже было сказано, связано с сингулярностью ядра $\eta(k, k')$. Действительно, в случае решения нулевой ширины по θ, получающегося в рамках уравнений без нелинейного затухания, нелинейная добавка к декременту расходится. С другой стороны, в случае аксиальной симметрии, как видим, эта расходимость довольно слабая (логарифмическая), что позволяет при вычислении интегральных характеристик исходить из простого уравнения $\gamma + \eta N = P$, не учитывающего сингулярный характер нелинейного затухания.

Обратимся теперь к случаю отрицательного нелинейного затухания. При $\eta < 0$ уравнение (40.1) (соответствующее приближению самосогласованного поля) допускает лишь решения, имеющие интегрируемую особенность:

$$N(x) = A\,(a^2 - x^2)^{-1/2} + 2P(a^2 - x^2)^{1/2}/\pi\eta.$$

Подставляя это решение в уравнение баланса энергии, получим связь P, a и A:

$$-\frac{P^2a^2}{\eta}\ln\frac{2}{a} - \pi A\ln\frac{2}{a} = -\frac{2P}{\eta}\,\frac{P-\gamma}{P}. \tag{40.7}$$

Связь другого рода между этими тремя параметрами можно получить из соотношения $\int N(x)\,dx = N$. Таким образом, у нас в наличии однопараметрический набор решений. Которое же из них реализуется в действительности? Для ответа на этот вопрос заметим, что для любого из этих решений перенормированные затухание и накачка совпадают для всех x, а не только для $-a \leqslant x \leqslant a$. Это означает, что любое из решений безразлично устойчиво относительно появления волн вне интервала $[-a, a]$. Следовательно, будет реализовываться решение с максимальной (при данной надкритичности) шириной a. Учитывая условие $N(x) \geqslant 0$, получим, что максимальная ширина соответствует выбору $A = -Pa^2/\pi\eta$ и равна

$$a^2 = -\eta N/P, \tag{40.8}$$

т.е. совпадает с выражением (40.6) для случая $\eta > 0$ (надо лишь считать $c < 0$ и сменить общий знак), как и зависимость числа волн N от безразмерной амплитуды накачки p по-прежнему задается формулой (40.5), но теперь уже с $c < 0$. При этом действительно число волн имеет скачок на пороге неустойчивости:

$$N(p=1) = \frac{\gamma}{S}\,\frac{2c}{c^2+1}. \tag{40.9}$$

Ширина пакета на пороге $a^2 = 2c^2/|1 - c^2|$. В случае отрицательного нелинейного затухания критерий применимости полученных результатов значительно жестче. Условие $\eta N \ll \gamma$ приводит к требованию $|c| \ll 1$. В этом случае приведенные формулы справедливы при $p \ll 1/|c|$.

Зная $N(p)$, легко вычислить восприимчивость χ системы ПСВ. Ее мнимая часть χ'' пропорциональна мощности, поглощаемой волнами, $W = \omega_p\chi''h^2/2$ и связана с числом СВ при помощи следующей формулы:

$$\chi'' = (2/h^2)\int\gamma(x)\,N(x)\,dx =$$
$$= \frac{2V^2}{S}\,\frac{[p(c^2+1)-1]^{1/2} - c}{p(c^2+1)}\{p(c^2+1)^2 - [(p(c^2+1)^2-1)^{1/2} - c]^2\}^{1/2}. \tag{40.10}$$

Графики зависимости $\chi''(p)$ при различных c представлены на рис. 40.1. При $c > 0$ возникает конечный наклон $\chi''(p)$ при $p = 1$, и конечное значение $\chi'(\infty) = V^2\eta/(\eta^2 + S^2)$. Интересно отметить, что при $c < 1$ $(\eta < S)$ максимальное значение $\chi''_{max} = V^2/S$, т.е. не зависит от η и совпадает с максимальным значением χ'', вычисленным в S-теории без нелинейного затухания (при $c = 0$). С ростом η положение максимума сдвигается в сторону

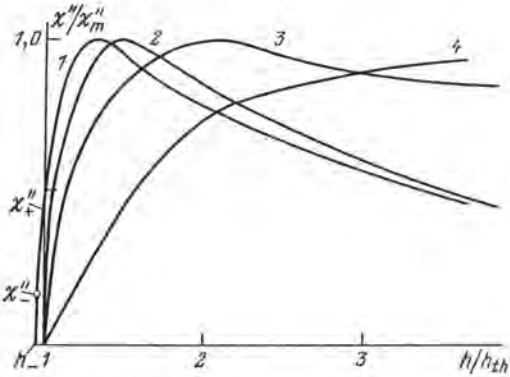


Рис. 40.1. Зависимость мнимой части восприимчивости χ'' от амплитуды накачки: *1* – $\eta/|S| = -0{,}25$; *2* – $\eta/|S| = 0$; *3* – $|\eta|/|S| = 0{,}25$; *4* – $\eta/|S| = 1$

больших p: $p_m = 2S^2/(S-\eta)^2$. При $\eta > S$ восприимчивость χ'' монотонно возрастает с ростом p.

Для $\eta < 0$ происходит, как уже говорилось, жесткое возбуждение ПСВ, сопровождаемое гистерезисом зависимости $\chi''(p)$. При прохождении p через пороговое значение $p = 1$ со стороны меньших полей восприимчивость испытывает скачок при $p = 1$ от нуля до величины

$$\chi_+ = -\frac{4V^2}{S}\,\frac{c\,((c^2+1)^2 - 4c^2)^{1/2}}{(c^2+1)^2}\,.$$

При уменьшении амплитуды поля до значений ниже порогового происходит обратный скачок восприимчивости при $p_- \approx 1/(c^2+1)$, в случае $|c| \ll 1$ равный половине прямого скачка:

$$\chi_- = \chi_+/2 = 2V^2|c|/S. \qquad (40.11)$$

Явление жесткого возбуждения и гистерезиса χ'' было обнаружено в 1967 г. Х. Ле-Галем, Б. Лемайром и Д. Сере в монокристаллах ЖИГ при $\omega_p/2\pi = 9{,}8$ Ггц [142]. Явление, как и было предсказано, наблюдалось в интервале магнитных полей $H_1 < H < H_2$, где нелинейное затухание является отрицательным. При $H > H_2$ эффект исчезал из-за малости $H > H_2$. Отрицательное нелинейное затухание приводит также к обнаруженной экс-

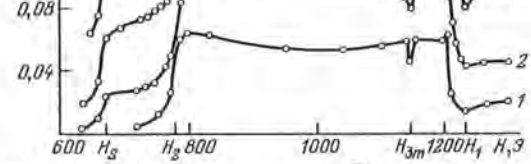


Рис. 40.2. Экспериментальная зависимость χ'' от внешнего магнитного поля *M*[100]. Кривые *1–5* соответствуют надкритичностям 0,5; 1; 2; 5; 10 дБ

периментально Г.А. Мелковым [172] характерной зависимости $|\eta|$ от постоянного магнитного поля (рис. 40.2). При небольшой надкритичности (когда справедлива изложенная выше теория) видно резкое увеличение χ'' при $H = H_1$ и $H = H_2$. Действительно, как ясно из рис. 40.1, при малой надкритичности и при $c < 0$ увеличение $|c|$ приводит к увеличению восприимчивости. Функция $\chi''(H)$ обнаруживает аномалию также вблизи значений поля $H = H_{3M}$: узкий резонансный минимум, переходящий в резонансный максимум с ростом надкритичности. Это согласуется как с рис. 39.1, показывающим, что положительный вклад в нелинейное затухание, связанный со слиянием двух ПСВ, существен лишь в малой окрестности H_{3M}, так и с рис. 40.1, откуда видно, что положительная добавка к нелинейному затуханию уменьшает χ'' при малых надкритичностях и увеличивает при больших. Возникновение скачка вблизи поля H_{3M} при надкритичности, большей 8 дБ, связано с рождением второй группы пар с $\theta = \pi/2$, для которой матричный элемент процесса слияния не имеет малости, связанной с угловой шириной пакета.

§ 41. Релаксация нелинейного пакета волн в холодном термостате

В этом параграфе, написанном по результатам Г.Е. Фальковича [219] рассмотрен случай, когда число волн в нелинейном пакете много больше числа взаимодействующих с ним ТВ. В этом случае характерное время затухания малых отклонений распределения волн от равновесия, равное обратному декременту затухания $\gamma_k^{-1} \approx \Delta\omega_k / V_{n_0}^2(k) k^3$, намного превышает время трехволнового взаимодействия $\tau \approx \Delta\omega_k / V^2 N$:

$$\gamma_k \ll \tau^{-1} \ll \Delta\omega_k \ll \omega_{k'}. \tag{41.1}$$

При этом, разумеется, искажения равновесного распределения нельзя считать небольшими, понятие декремента затухания теряет смысл, так как релаксация пакета происходит, как мы увидим, отнюдь не по экспоненциальному закону.

Мы опять начнем рассмотрение со случая, когда процессы распада волн из нелинейного пакета запрещены и его релаксация определяется исключительно слияниями ПСВ. Поставим вопрос: за какое время затухает пакет волн, удовлетворяющий условиям (41.1) после отключения накачки? Ясно, что в силу $\Delta\omega_k \gg \gamma_k, \tau^{-1}$ аномальные корреляторы $\langle A_k A_{-k} \rangle$ быстро затухнут (за время $1/\Delta\omega_k$), что и наблюдалось в экспериментах В.С. Житнюка и Г.А. Мелкова [79] а, также А.И. Смирнова и С.В. Петрова [197].

В результате для описания эволюции как пакета, так и взаимодействующих с ним тепловых волн применимы кинетические уравнения для нормальных корреляторов:

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = -N(k) \int U(k+k', k, k') [n_2(k') - n_3(k'+k)]\, dk' + \int U(k+k', k, k')\, n_2(k')\, n_3(k+k')\, dk', \tag{41.2}$$

$$\frac{\partial n_2(k')}{\partial t} = -\int U(k_1+k_1', k_1, k_1') \{[n_2(k') - n_3(k'+k_1)] N(k_1) + n_2(k')\, n_3(k'+k_1)\}\, dk_1 + \Phi(k'),$$

$$\partial n_3(k'')/\partial t = \int U(k'', k_1, k'' - k_1)\{[n_2(k'' - k_1) - n_3(k'')]N(k_1) - n_2(k'' - k_1)n_3(k'')\}dk_1 + \Phi(k'').$$

Нелинейная волна с волновым вектором k сливается с волнами, волновые векторы которых k' лежат на поверхности $\omega(k) + \omega(k') = \omega(k + k')$ (их числа заполнения обозначены $n_2(k')$). В результате слияния образуются волны с волновыми векторами k'' на поверхности $\omega(k) + \omega(k'' - k) = \omega(k'')$ (числа заполнения $n_3(k'')$). Слагаемые $\Phi(k')$, $\Phi(k'')$ описывают взаимодействие волн $n_2(k')$, $n_3(k'')$ с остальным термостатом. В равновесии $\Phi(k') = \Phi(k'') = 0$, при малых отклонениях $\Phi(k) = \gamma_k[n(k) - n^0(k)]$, а при отклонениях порядка $n^0(k)$ $\Phi(k) \approx \gamma_k n^0(k)$. Как видно из (41.2), взаимодействие волн устроено таким образом, что при $\Phi = 0$ разность $n_2(k') - n_3(k + k')$ уменьшается при постоянстве суммы $n_2(k') + n_3(k + k')$. Это означает, что величины $n_0(k')$, $n_3(k' + k)$ меняются на величины порядка $n_0(k')$, при этом $\Phi(k') \approx \gamma(k')n^0(k')$, и пока амплитуда нелинейного пакета удовлетворяет условию (41.1) как квадратичные по n_2, n_3 члены, так и Φ меньше слагаемых, содержащих амплитуду нелинейного пакета, в $\gamma_k\tau$ раз. Эти малые члены описывают влияние теплового шума, и в нулевом порядке по $\gamma_k\tau$ их можно не учитывать, а в первом считать не зависящими от времени. В пренебрежении тепловым шумом система (41.2) приобретает вид

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = -N(k)\int U(k + k', k, k')n(k')dk',$$
$$\frac{\partial n(k')}{\partial t} = -2n(k')\int U(k_1 + k', k_1, k')N(k_1)dk_1. \tag{41.3}$$

Здесь мы, пользуясь узостью пакета ($\Delta\omega_k \ll \omega_k$), положили $n_2(k') - n_3(k' + k_1) \approx n(k')$. Решение этой системы нелинейных интегральных уравнений – трудная задача, однако, как мы сейчас покажем, для того, чтобы сделать содержательные выводы о релаксации пакета, в этом нет необходимости. Дело в том, что система (41.3) обладает гамильтоновой структурой. В этом можно убедиться, введя обозначения $z(k) = \ln 2N(k)$, $y(k') = \ln n(k')$,

$$\frac{\partial z(k)}{\partial t} = \int U(k + k', k, k')\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta y(k')}dk',$$
$$\frac{\partial y(k')}{\partial t} = -\int U(k + k', k, k')\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta z(k)}dk, \tag{41.4}$$
$$\mathcal{H} = \int \exp[z(k)]dk - \int \exp[y(k')]dk' = 2\int N(k)dk - \int n(k')dk'.$$

Гамильтонианом $\mathcal{H}$ является интеграл Мэнли – Роу. Хорошо известно, что гамильтонова система не может иметь асимптотически устойчивых стационарных состояний с конечным временем релаксации. Поэтому затухание исходного пакета, т.е. приход к равновесному состоянию, обусловлен нарушающим гамильтоновость тепловым шумом, т.е. малым взаимодействием волн $n(k')$ с термостатом:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = -\Delta\omega_k\int[\Phi(k') - \Phi(k' + k)]\delta(\omega(k + k')) - \omega(k) - \omega(k'))dk.$$

Отсюда можно оценить время затухания пакета $t \approx \gamma^{-1}(k')(\gamma(k')\tau)^{-1}$, где k' – волновой вектор ТВ, эффективно взаимодействующий с нелинейным пакетом. Это время превышает характерное время нелинейного взаимодействия τ в $(\gamma_k \tau)^2$ раз. Добавим еще, что при эволюции в рамках уравнений (41.3) сохраняется разность $2N - \int n(k')\,dk'$, т.е. условие (41.1) остается справедливым.

Для иллюстрации сказанного решим систему уравнений (41.4) в модельном случае $U(k_1, k_2, k_3) = \text{const}$. При этом мы, естественно, отвлекаемся от деталей распределения волн $n(k')$, $N(k)$, а интересуемся только интегральными величинами. Вводя обозначения

$$N = 2\int N(k)\,dk,\ n = \Delta\omega_k \int n(k')\,\delta(\omega(k+k') - \omega(k) - \omega(k'))\,dk',$$

$$\Phi = \Delta\omega_k \int [\Phi(k') - \Phi(k+k')]\,\delta(\omega(k+k') - \omega(k) - \omega(k'))\,dk',$$

запишем

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{V^2 N n}{\Delta\omega_k},\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{V^2 N n}{\Delta\omega_k} + \Phi.$$

При $t \approx \tau = \Delta\omega_k / V^2 \mathcal{H} \ll \mathcal{H}/\Phi$ решение имеет вид

$$N(t) = \frac{N_0 \mathcal{H} \exp(t/\tau)}{N_0 \exp(t/\tau) - n_0},\ n(t) = N(t) - \mathcal{H} = \frac{n_0 \mathcal{H}}{N_0 \exp(t/\tau) - n_0}$$

при

$$\mathcal{H}/\Phi \gg t \gg \tau,\ N(t) = \mathcal{H} - \Phi t + \mathcal{H}(n_0/N_0)\exp(-t/\tau).$$

Видно, что за время нелинейного взаимодействия τ величина $n(t)$ падает до малого значения $\Phi/\mathcal{H}$, определяемого тепловым шумом. За это время амплитуда пакета N меняется незначительно: $N_0 \to N_0 - n_0$. Далее происходит медленное затухание пакета по линейному (а не экспоненциальному) закону за счет конечности $n(t)$. Характерное время затухания $t_d \approx \mathcal{H}/\Phi$. Итак, время затухания нелинейного пакета в среде со слияниями растет с ростом амплитуды по линейному закону $t_d \propto N$.

Обратимся теперь к случаю, когда исходная нелинейная волна может распадаться на вторичные волны, волновые векторы которых лежат на поверхности $\omega(k) = \omega(k') + \omega(k - k')$.

Обозначим их числа заполнения $n_1(k') = n(k') + n(k - k')$. В предположении справедливости условия (41.1) кинетические уравнения примут вид (переобозначим $N(k) \to 2N(k)$)

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = -N(k)\,[\int U(k, k', k - k')\,n_1(k')\,dk' +$$

$$+ \int U(k + k'', k, k'')\,n(k'')\,dk'' - \Gamma],$$

$$\frac{\partial n(k'')}{\partial t} = -n(k'')\,[\int U(k + k', k, k')\,N(k)\,dk + \gamma] + \Phi(k''), \qquad (41.5)$$

$$\frac{\partial n_1(k')}{\partial t} = n_1(k')\,[\int U(k, k', k - k')\,N(k)\,dk - \gamma] + \Phi_1(k').$$

Здесь мы ввели линейный инкремент нарастания Γ, моделирующий источ-

ник и линейные декременты затухания вторичных волн γ, γ_1, которые мы для простоты приняли не зависящими от k, что не окажет качественного влияния на последующие результаты. Эти декременты могут быть обусловлены несобственными процессами релаксации: рассеянием на дефектах, взаимодействием с квазичастицами других сортов и т.д. Как мы увидим ниже, введение этих слагаемых не нарушает гамильтоновости системы (41.5) в отсутствие малых шумовых членов Φ и Φ_1. Необходимо, однако, заметить следующее. В отличие от системы (41.2), применимой при временах, меньших t_d (но много больших τ), уравнения (41.5) в отсутствие Γ, γ_1 перестают быть справедливыми уже через время порядка τ. За это время исходный пакет уменьшится в несколько раз, а вторичные волны n, n_1 вырастут до его уровня. Это связано с тем, что в процессах распада идет прямая перекачка энергии из нелинейного пакета в тепловые волны (сохраняется сумма $2N$ и $\int n_1(k')\,dk'$ при уменьшении разности этих величин). Однако при наличии подкачки исходного пакета Γ и затухания вторичных волн γ_1 возможно стационарное состояние системы, не совпадающее с термодинамическим равновесием. Стационарные значения чисел волн $\bar{N}(k)$, $\bar{n}_1(k')$, $\bar{n}(k'')$ должны подчиняться уравнениям

$$\begin{aligned}
&\int U(k,k',k-k')\,\bar{n}_1(k')\,dk' + \int U(k+k'',k,k'')\,\bar{n}(k'')\,dk'' = \Gamma,\\
&\int U(k+k'',k,k'')\,\bar{N}(k)\,dk = -\gamma + \Phi(k'')/\bar{n}(k''),\\
&\int U(k,k',k-k')\,\bar{N}(k)\,dk = \gamma_1 - \Phi_1(k')/\bar{n}_1(k').
\end{aligned} \tag{41.6}$$

При $\gamma_1 \gg \Gamma$ для состояний системы, близких к стационарному, выполняется условие (41.1), и в уравнениях (41.6) Φ, Φ_1 – малые члены, которые в нулевом порядке можно не учитывать, а в первом считать не зависящими от $N(k)$, $n_1(k')$, $n(k'')$.

Покажем теперь, что любое начальное условие, удовлетворяющее (41.1), релаксирует к стационарным значениям (41.6). За время порядка τ разность чисел заполнения вторичных волн, участвующих в слияниях $n(k'')$, уменьшается до малого значения, определяемого тепловым шумом. Поэтому мы в дальнейшем пренебрежем влиянием процессов слияния на эволюцию пакета, так как оно приводит лишь к перенормировке Γ на малую величину. Выражая Γ и γ из (41.6), перепишем систему (41.5) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial n_1(k')}{\partial t} = -n_1(k')\int U(k,k',k-k')\,[N(k)-\bar{N}(k)]\,dk +\\
&+\Phi_1(k')\,[1-n_1(k')/\bar{n}_1(k')],\\
&\frac{\partial N(k)}{\partial t} = -N(k)\int U(k,k',k-k')\,[n_1(k')-\bar{n}_1(k')]\,dk'.
\end{aligned} \tag{41.7}$$

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\{N(k),n_1(k')\} = \int [N(k)-\bar{N}(k)\ln N(k)]\,dk +\\
&+\int [n_1(k')-\bar{n}_1(k')\ln n_1(k')]\,dk'.
\end{aligned}$$

Как видно, $\mathcal{H}$ ограничен снизу, причем минимум достигается в стационарном состоянии

$$\mathcal{H}\{N(k),n_1(k')\} \geqslant \mathcal{H}\{\bar{N}(k),n_1(k')\} = \bar{\mathcal{H}}.$$

Вычисляя его производную по времени, получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\int \Phi_1(k') \{[n_1(k') - \bar{n}_1(k')]^2 / n_1(k') \bar{n}_1(k')\} dk' \leqslant 0.$$

Таким образом, в отсутствие шума $\mathcal{H}$ сохраняется (переписав (41.7) в переменных $z = \ln N(k)$, $x = \ln n_1(k)$, можно убедиться, что $\mathcal{H}$ является гамильтонианом системы (41.7) при $\Phi = \Phi_1 = 0$). Наличие же теплового шума приводит к тому, что произвольное начальное распределение, удовлетворяющее критерию (41.1), за конечное время эволюционирует к стационарному (41.6). Это время t_d можно оценить так:

$$\frac{1}{t_d} \approx \frac{1}{\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}} \int \Phi(k') \frac{n_1(k') - \bar{n}_1(k')}{n_1(k') \bar{n}_1(k')} dk'. \tag{41.8}$$

Отыскивая минимум этого выражения, легко установить, что дольше всего протекает заключительная стадия эволюции, когда $\mathcal{H}$ близко к $\bar{\mathcal{H}}$. При этом

$$\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}} = \int \frac{[N(k) - \bar{N}(k)]}{\bar{N}(k)} dk + \int \frac{[n_1(k') - \bar{n}_1(k')]^2}{\bar{n}_1(k')} dk'.$$

(Напомним, что во всех интегралах, содержащих $n_1(k')$, интегрирование идет по поверхности $\omega(k') + \omega(k - k') = \omega(k)$.)

Линеаризуя (3.7) вблизи стационара, для интегральных величин δN и δn получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{\partial^2 \delta N}{\partial t^2} = -\omega^2 \delta N, \ \omega^2 = (\bar{N}/\Delta\omega_k) \int |V(k, k', k - k')|^4 \delta(\omega(k) -$$

$$- \omega(k') - \omega(k - k')) n_1(k') dk' \approx \gamma_1 \Gamma.$$

Такое же уравнение получается для интегральной величины:

$$\delta n = \Delta\omega_k \int [n_1(k') - \bar{n}_1(k')] \delta(\omega(k) - \omega(k') - \omega(k - k')) dk'.$$

Усредняя по периоду колебаний $T \approx 2\pi/(\gamma_1 \Gamma)^{1/2}$, получим соотношение $\langle \delta N^2 \rangle / \bar{N} = \langle \delta n^2 \rangle / \bar{n}$ – аналог теоремы вириала. Возвращаясь к оценке времени релаксации, находим, что

$$t_d \approx \max_{k'} [\bar{n}_1(k') / \Phi_1(k')] \approx \gamma^{-1}(k') [\Gamma / \gamma(k')]. \tag{41.9}$$

Итак, обусловленная распадами эволюция нелинейного пакета со слабой подкачкой в среде с сильным затуханием вторичных волн представляет собой осцилляции с частотой $(\gamma_1 \Gamma)^{1/2}$, затухающие к стационарному решению (41.6). Время релаксации превышает период колебаний, если $\gamma_k \ll \Gamma \ll \gamma_1$, т.е. когда ведущий вклад в затухание тепловых волн вносят несобственные процессы релаксации. Для наблюдения этих осцилляций следует включить достаточно мощный ($\Gamma \gg \tau^{-1}$) источник (например, параметрическую накачку) на время, меньшее τ, а затем выключить его, оставив слабую ($\Gamma \ll \gamma_1$) подкачку и регистрируя поглощаемую мощность. Измеряя частоту осцилляций, мы получим способ определения времени релаксации волн, не связанных непосредственно с накачкой.

В заключение этого параграфа следует сказать, что описанные здесь результаты (рост времени релаксации $t_d \sim N$ с увеличением амплитуды

пакета в среде со слияниями и возможность осцилляций в среде с распадами) являются достаточно универсальными, т.е. не зависят от конкретного вида матричных элементов и законов дисперсии (лишь бы выполнялись условия (41.1) и соответствующие процессы были разрешены законами сохранения).

§ 42. Релаксация монохроматической волны в нелинейной среде

В случае пакета малой ширины по частотам $\Delta\omega_k \ll \gamma_k$ кинетическое уравнение неприменимо ни для описания эволюции самого пакета, ни для описания эволюции взаимодействующих с ним тепловых волн из узкого слоя вблизи "резонансных" поверхностей $\omega(k+k') = \omega(k) + \omega(k')$, $\omega(k-k') + \omega(k') = \omega(k)$. Необходимо развить другой метод, явно учитывающий возможность сильной фазовой корреляции в каждой паре волн с волновыми векторами k' и $k-k'$ (или $k+k'$), участвующих в процессах релаксации. Мы сделаем это наиболее простым и наглядным образом. А именно, будем исходить из динамических уравнений движения для амплитуд волн около резонансной поверхности, а их взаимодействие со всеми остальными волнами опишем феноменологически – методом случайных сил Ланжевена (В.С. Львов, [156]).

Рассмотрим для определенности процесс слияния и запишем динамические уравнения движения для канонических амплитуд волн $a(k')$, $a(k'')$ вблизи резонансной поверхности:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k') + \gamma(k')\right] a(k') + \\
&+ iV(k, k', k'') \exp(i\omega(k)t) A^* a(k'') = f(k', t), \\
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k'') + \gamma(k'')\right] a(k'') + \\
&+ iV^*(k, k', k'') \exp(-i\omega(k)t) A a(k') = f(k'', t).
\end{aligned} \tag{42.1}$$

Здесь A – амплитуда монохроматической волны, $f(k, t)$ – ланжевеновская случайная сила с коррелятором

$$(f^2)_{k\omega} = \gamma_k n_0(k)/\pi.$$

При записи уравнений (42.1) мы учли, что интересующая нас система волн $a(k')$, $a(k'')$ сосредоточена в узком слое и запасенная в ней энергия существенно меньше общей энергии остальных волн. Поэтому волны вне этого слоя (их естественно назвать термостатом) можно считать находящимися в термодинамическом равновесии, а их фазы – почти случайными. Это позволило в уравнениях (42.1) эффективно описать взаимодействие выделенной системы $a(k)$, $a(k'')$ с термостатом: слагаемые $\gamma(k')\,a(k')$, $\gamma(k'')\,a(k'')$ описывают "трение волн о термостат". Случайные силы $f(k', t)$, $f(k'', t)$ имитируют беспорядочные толчки со стороны термостата, приводящие в среднем к увеличению энергии волн $a(k')$, $a(k'')$. В результате при $A = 0$ корреляторы $n(k')$, $n(k'')$ релаксируют, как и должно быть, не до нуля, а к термодинамически равновесным значениям $n_0(k')$, $n_0(k'')$.

С одной стороны, поток энергии от исходной нелинейной волны в среду равен $2\omega_k \gamma_k |A|^2$, а с другой стороны, он равен скорости изменения энергии волновой системы $\partial \langle \mathcal{H}_{\text{int}} \rangle / \partial t$, где

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \tfrac{1}{2} \int dk\, dk'\, dk''\, [V^*(k, k', k'')\, a_k a_{k'} a^*_{k''} + \text{к.с.}]\, \delta(k + k' - k''). \quad (42.2)$$

Приравнивая два выражения для потока энергии, получим формулу для декремента затухания нелинейной волны в процессах слияния:

$$\gamma_k = \operatorname{Im} \int dk' \int d\omega'\, d\omega''\, V(k + k', k, k') \times$$
$$\times \exp i(\omega_k + \omega' - \omega'') \langle a(k', \omega') a(k + k', \omega'') \rangle. \quad (42.3)$$

Разложив в (42.1) $a(k', t)$ и $a(k'', t)$ в интеграл Фурье, выразим $a(k', \omega')$ и $a(k'', \omega'')$ через фурье-компоненты случайных сил $f(k', \omega')$ и $f(k'', \omega'')$ и подставим результаты в (42.3). Учитывая, что $\langle f(k, \omega) f^*(k', \omega') \rangle = (f^2)_{k\omega} \delta(k - k') \delta(\omega - \omega')$, и используя выражение для $(f^2)_{k\omega}$ и интегрируя по ω' и ω'', получим

$$\gamma_k = \int dk' \,|\, V(k + k', k, k') |^2 \times$$
$$\times [n_0(k') - n_0(k - k')][\gamma(k') + \gamma(k + k')] / \{[\omega(k) + \omega(k') - \omega(k + k')]^2 +$$
$$+ [\gamma(k') + \gamma(k + k')]^2 [1 + |V(k + k', k, k') A|^2 / \gamma(k') \gamma(k + k')]\}^{-1}. \quad (42.4)$$

При $A = 0$ этот результат отличается от полученного из кинетического уравнения конечной шириной резонанса, определяемой суммой затуханий $\gamma(k') + \gamma(k + k')$. В случае, когда процессы слияния разрешены законами сохранения, последняя формула упрощается до

$$\gamma_k = \int dk' \,|\, V(k + k', k, k') |^2 [n_0(k') - n_0(k + k')]\, \delta(\omega(k + k') -$$
$$- \omega(k) - \omega(k'))[1 + |V(k + k', k, k')|^2 A^2 / \gamma(k') \gamma(k + k')]^{-1/2}. \quad (42.5)$$

Эта формула отличается от (39.3) только присутствием радикала в знаменателе. Как видим, и в случае монохроматической волны декремент затухания убывает с ростом ее амплитуды (так называемый "эффект просветления среды"). При больших значениях A время затухания монохроматической волны возрастает с ростом интенсивности по корневому закону $t_d \propto A \propto N^{1/2}$, в отличие от полученного в § 40 для широкого пакета линейного закона.

При изучении затухания монохроматической волны в процессах распада следует исходить из уравнений движения для амплитуд волн $b(k', t)$ и $b(k'', t)$, лежащих вблизи поверхности $\omega(k') + \omega(k - k') = \omega(k)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k') + \gamma(k')\right] b(k') + iV(k', k'', k) \times$$
$$\times A \exp(-i\omega(k)\, t)\, b^*(k'') = f(k', t),$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - i\omega(k'') + \gamma(k'')\right] b^*(k'') - iV(k', k'', k)\, A^* \times \quad (42.6)$$
$$\times \exp(i\omega(k)\, t)\, b(k') = f^*(k'', t),$$

и аналогичным образом получить из них выражение для декремента затухания:

$$\gamma_k = ½ \int dk' \,|\, V(k, k', k-k') \,|^2 \, [n_0(k') + n_0(k-k')] \delta(\omega(k) -$$

$$- \omega(k') - \omega(k-k'))[1 - |\, V(k, k', k-k') \,|^2 A^2 / \gamma(k')\gamma(k-k')]^{-1/2}. \quad (42.7)$$

Для процессов распада, таким образом, $\partial\gamma_k/\partial A > 0$. Амплитуда волны

$$A_1 = \min\{\,[\gamma(k')\gamma(k-k')]^{1/2} / \,|\, V(k, k', k-k') \,|\,\}, \quad (42.8)$$

при которой радикал обращается в нуль, а γ_k – в бесконечность, соответствует порогу распадной неустойчивости монохроматической волны. При $A > A_1$ амплитуды $b(k')$, $b(k-k')$ растут во времени экспоненциально и формулы (42.5), (42.7), полученные в линейном по этим амплитудам приближении, несправедливы.

Следует отметить, что формулы (42.5), (42.7) описывают асимптотические по времени значения γ_k. Действительно, в момент включения монохроматической волны при $t = 0$ волны в среде еще не успели отклониться от равновесия, и затухание будет определяться обычными формулами (39.3) и (39.4). И лишь через время $t > \gamma^{-1}(k), \gamma^{-1}(k')$ волны вблизи резонансной поверхности отрелаксируют к новому стационарному состоянию, в котором затухание определяется формулами (42.5) и (42.7).

Задачи

Задача 8.1. Найти изменения химического потенциала и температуры СВ, вызванные пакетом ПСВ в ФМ (В.Б. Черепанов, [229]).

Указание. Помимо главного обменного взаимодействия ТСВ, необходимо учесть относительно более слабое магнитодипольное взаимодействие и взаимодействие с фононным термостатом.

ГЛАВА 9

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН В МАГНЕТОДИЭЛЕКТРИКАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ. Sg^2-ТЕОРИЯ

§ 43. Качественные особенности задачи

За редкими исключениями реальные магнетодиэлектрики имеют различного рода неоднородности, нарушающие их идеальную трансляционную симметрию. Природа неоднородностей в ферромагнитных кристаллах и их влияние на ферромагнитный резонанс и СВ исследовались в большом числе работ: см., например, монографию М. Спаркса [22], работу Е. Шлеманна [236]. Более подробную библиографию можно найти в книге А.Г. Гуревича [7]. Принято считать, что наибольшую роль в ферродиэлектриках играют следующие неоднородности: нарушение порядка в расположении магнитных ионов в узлах решетки, неоднородности химического состава образцов, нарушения постоянства направления осей кристалла, поликристалличность

или блочность, неоднородные упругие напряжения, в частности, вызванные дислокациями, "геометрические" неоднородности: поры, трещины и, наконец, шероховатости поверхности образца.

В неоднородной среде, как хорошо известно, плоская волна не является нормальной колебательной модой, диагонализующей квадратичную часть гамильтониана, и, следовательно, неоднородности приводят к появлению дополнительного слагаемого в $\mathcal{H}_2$, недиагонального по $\boldsymbol{k}$:

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}^* b_{\boldsymbol{k}} \, d\boldsymbol{k} + \mathcal{H}_{\text{el}}, \quad \mathcal{H}_{\text{el}} = \int \Psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \, b_{\boldsymbol{k}}^* \cdot b_{\boldsymbol{k}} \, d\boldsymbol{k} \, d\boldsymbol{k}'. \tag{43.1}$$

В принципе можно было бы перейти к новым каноническим переменным, отличным от плоских волн, так, чтобы квадратичная часть гамильтониана (43.1) стала диагональной. Однако, несмотря на принципиальную простоту, этот путь исследования обычно неконструктивен, а в случае хаотического распределения мелкомасштабных неоднородностей и вовсе невозможен. Поэтому обычно строят теорию возмущений по гамильтониану $\mathcal{H}_{\text{el}}$. Первый порядок теории возмущений приводит к перенормировке средних характеристик среды, например к изменению намагниченности в ФМ и т.п. Второй порядок описывает процесс рассеяния волн на неоднородностях с сохранением частоты: $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k}'$, $\omega(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}')$. В магнетодиэлектриках этот процесс называется *двухмагнонным рассеянием*. Влияние двухмагнонного рассеяния на параметрическое возбуждение СВ впервые рассматривалось Х. Сулом [212] и Е. Шлеманном [231] в случае нестабильности однородной прецессии (ОП) второго порядка. В этом случае частота ОП ω_0 совпадает с частотой параметрически возбужденных ею СВ:

$$2\omega_0 = \omega(\boldsymbol{k}) + \omega(-\boldsymbol{k}). \tag{43.2}$$

Поэтому СВ, возникающие в результате двухмагнонной релаксации ОП, вовлекаются также и в параметрический процесс (43.2). В результате ПСВ достигают значительного уровня возбуждения и оказывают эффективное обратное влияние на ОП еще до порога нестабильности. Это явление приводит к размытию порога даже малым количеством неоднородностей.

В случае нестабильности ОП первого порядка и для параллельной накачки ПСВ имеют частоту, равную половине частоты накачки, и размытия порога не происходит. Это не означает, однако, что неоднородности в этой ситуации вообще не оказывают влияния на порог и поведение спиновых волн за порогом.

Вопросу о влиянии неоднородностей на параллельную накачку посвящено много экспериментальных работ (см. М. Спаркс [22]; Е. Шлеманн [231, 236]; Х. Сул [212]). Эксперименты проводились в основном на поликристаллах, они показали, в частности, значительное увеличение порога при уменьшении размера зерна до значения порядка длины ПСВ. Для трактовки полученных результатов использовались простые представления: порог параллельной накачки определялся по формуле

$$h_1 \, | V_{\boldsymbol{k}} | = \gamma_{\boldsymbol{k}} + \gamma_{\text{el}}(\boldsymbol{k}), \tag{43.3}$$

где γ_{el} – декремент затухания СВ, обусловленный их рассеянием на границах зерен, $\gamma_{\boldsymbol{k}}$ – затухание, обусловленное собственными процессами релаксации. В монографии М. Спаркса [22] содержится критика этой точки зрения, заключающейся в следующем: двухмагнонные процессы не выво-

дят энергию из системы ПСВ, и поэтому условие баланса энергии для них даже в присутствии неоднородностей имеет прежний вид $hV = \gamma$, в котором учитывается только собственное затухание γ_k. Влияние же неоднородностей заключается в том, что нормальными модами теперь являются не плоские волны, а некоторые их линейные комбинации, которые и возбуждаются под действием накачки. Для вычисления порога, очевидно, нужно усреднить условие баланса энергии $hV = \gamma$ по волнам, входящим в состав нормальной моды, имеющей минимальный порог. В наших обозначениях формула М. Спаркса для порога имеет вид

$$h_{\text{th}} \int |V_\theta| N(\theta) \sin\theta d\theta = \int \gamma(\theta) N(\theta) \sin\theta d\theta. \tag{43.4}$$

Она предсказывает слабую зависимость h_1 от концентрации неоднородностей. Действительно, в предельном случае сильно неоднородной среды ПСВ равномерно заполняют всю резонансную поверхность $2\omega_k = \omega_p$, и из (43.4) следует

$$h_{\text{th}} \int |V_\theta| \sin\theta d\theta = \int \gamma(\theta) \sin\theta d\theta. \tag{43.5}$$

Подставляя для оценки $\gamma(\theta) = \text{const}$ и V_θ из формулы (14.21) для изотропных МФ, получим увеличение порога по отношению к однородному случаю всего в 1,5 раза.

В действительности и эта позиция (повторенная по существу и в более поздней монографии А.Г. Гуревича [7]) соответствует истине лишь частично. В рассуждениях необходимо было учесть, что новые нормальные моды, отличающиеся от плоских волн, не связаны попарно с пространственно-однородной накачкой, как это следовало из закона сохранения импульса $\boldsymbol{k} + (-\boldsymbol{k}) = 0$ для плоских волн. Поэтому условие баланса $hV = \gamma$, следующее из системы двух уравнений для $a(\boldsymbol{k})$ и $a(-\boldsymbol{k})$, вообще несправедливо в неоднородной среде. Качественные рассуждения удобнее производить в терминах теории возмущений по $\mathcal{H}_{\text{el}}$, стартующей от плоских волн в однородной среде. Тогда, кроме параметрического процесса

$$\omega_p = \omega(\boldsymbol{k}) + \omega(-\boldsymbol{k}), \tag{43.6}$$

приводящего к возбуждению волн на той части резонансной поверхности, где $h|V_k| \geqslant \gamma_k$, необходимо учитывать также двухмагнонное рассеяние $\omega_k = \omega_{k'}$, приводящее к возбуждению волн на остальной части поверхности (43.6). До сих пор это рассуждение эквивалентно позиции М. Спаркса. Однако далее необходимо учесть, что рассеяние на хаотических неоднородностях приводит к случайному сбою фазы волн, и поэтому пара волн $\pm\boldsymbol{k}'$, возникающая при двухмагнонном рассеянии исходной пары, уже не будет находиться в идеальном фазовом соотношении с накачкой. Поэтому при многократном двухмагнонном рассеянии будет разрушаться спаривание волн и в результате окажется, что $|\sigma_k| < n_k$. Естественно думать, что при сильном двухмагнонном рассеянии (когда $\gamma_{\text{el}} > \gamma$) коэффициент фазовой корреляции волн в паре $|\sigma_k|/n_k$ окажется порядка отношения коррелирующего фактора hV_k к хаотизирующему фактору $\gamma_{\text{el}}(\boldsymbol{k})$:

$$|\sigma_k|/n_k \approx h|V_k|/\gamma_{\text{el}}(\boldsymbol{k}). \tag{43.7}$$

Учитывая это, перепишем условие баланса энергии для одной пары:

$$\gamma_k n_k = hV_k |\sigma_k|$$

в следующем виде:

$$|h_{\text{th}} V_k|^2 \approx \gamma_k \gamma_{\text{el}}(k). \tag{43.8}$$

Сильное двухмагнонное рассеяние приводит к эффективному обмену энергией между парами волн на резонансной поверхности, поэтому условие (43.8) имеет место не для каждой пары в отдельности, а только для всего ансамбля ПСВ:

$$h_{\text{th}}^2 \int V_\theta^2 \, [\sin\theta/\gamma_{\text{el}}(\theta)] \, d\theta = \int \gamma_\theta \sin\theta d\theta. \tag{43.9}$$

Эта формула и определяет при $\gamma_{\text{el}} > \gamma$ порог параметрического возбуждения волн h_{th}. Необходимо подчеркнуть, что величина h_{th} оказалась больше, чем предсказывает формула (43.5), в $(\gamma_{\text{el}}/\gamma)^{1/2}$ раз. Этот множитель возникает из-за частичного разрушения фазовой корреляции.

Мы привели здесь подробное обсуждение вопроса о пороге параметрической нестабильности для того, чтобы продемонстрировать качественно новые особенности, возникающие в поведении ПСВ в магнетодиэлектриках со случайными неоднородностями. Изучению этого поведения и будет посвящена настоящая глава. В § 44 мы рассмотрим рассеяние СВ на неоднородностях в отсутствие параметрической накачки. Далее, в § 45, используя диаграммную технику, мы сформулируем исходные уравнения для статистического описания ПСВ в случайно-неоднородной среде, в § 46 изучается общая структура этих уравнений и находится функция распределения ПВ, в § 47 найден порог параметрического возбуждения в различных предельных случаях. В § 48 описано запороговое поведение ПВ, и, наконец, в § 49 мы исследуем устойчивость этого стационарного состояния и получим спектр коллективных колебаний.

Теоретическая часть результатов, описанная в этой главе, получена в основном в работах В.Е. Захарова, В.С. Львова, М.И. Широкова и В.Б. Черепанова [103, 155, 160, 161]. Некоторая часть результатов публикуется впервые.

§ 44. Рассеяние волн на статических неоднородностях

44.1. Гамильтониан. Для выяснения структуры и порядка величины гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{el}}$, описывающего хаотические неоднородности, мы вычислим его, задаваясь простыми моделями неоднородного ФМ.

Вариация обменной константы. Будем считать, что в гайзенберговский ФМ с простой кубической решеткой и взаимодействием ближайших соседей $\mathcal{J}$ введены атомы примеси замещения, отличающиеся от атомов матрицы только значением обменного интеграла $\mathcal{J}'$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -(\mathcal{J}/z_0) \sum_{n,z} \mu_n \mu_{n+z} - H_0 \sum_n \mu_n, \\ \mathcal{H}_{\text{el}} &= (\mathcal{J} - \mathcal{J}') \sum_{m,z} \mu_m \mu_{m+z}. \end{aligned} \tag{44.1}$$

Здесь μ_m – магнитный момент на узле, n нумерует все узлы решетки, m – узлы, занятые примесями, z – номера атомов первой координационной сферы, z_0 – число этих атомов. Поступая далее стандартным образом, а именно переходя от μ_n к плотности магнитного момента – намагниченности $M(r_n) = \mu_n/v_0$ ($v_0 = a$ – объем элементарной ячейки), затем от $M(r)$

к фурье-компонентам M_k, затем от M_k к каноническим переменным b_k, по формулам (8.8) получим

$$\mathcal{H} = \int \omega_k b_k^* b_k \, dk + \mathcal{H}_{el}, \quad \omega_k = gH_0 + \omega_{ex}(ak)^2, \tag{44.2}$$

$$\mathcal{H}_{el} = \int \eta(k,k') g(k,k') b^*(k') b(k) \, dk \, dk', \tag{44.3}$$

$$\eta(k,k') = \eta(k-k'), \quad \eta(k) = v_0 \sum_m \exp(ikr_m)/(2\pi)^3, \tag{44.4}$$

$$g(k,k') = (\mathcal{J} - \mathcal{J}')\omega_{ex} a^2 (kk')/\mathcal{J} = g \cos(\widehat{kk'}). \tag{44.5}$$

Здесь $\eta(k,k')$ характеризует распределение примесей, а матрица $g(k, k')$ представляет амплитуду рассеяния из k в k' на одном примесном центре.

Вариация поля анизотропии. Более важным с точки зрения эксперимента представляется случай, когда характеристикой, отличающей атомы примеси от матрицы, является внутриионное спино-орбитальное взаимодействие, приводящее к вариации энергии анизотропии $\omega_a' \neq \omega_a$. Рассматривая для простоты гайзенберговский одноосный ФМ с одноионной анизотропией типа "легкая ось", аналогично получим: во-первых, квадратичный гамильтониан (44.2) и, во-вторых, гамильтониан взаимодействия СВ с дефектами вида (44.3), (44.4), в которых

$$\omega_k = \omega_a + gH_a + \omega_{ex}(ak)^2, \tag{44.6}$$

$$g(k,k') = \omega_a' - \omega_a = \Delta\omega_a. \tag{44.7}$$

Сравнивая (44.7) с (44.5), убеждаемся, что для длинных СВ более существенным является последний механизм нарушения однородности ФМ, его изучению, преимущественно теоретическому, в различных конкретных ситуациях посвящено много работ, см., например, А.Г. Гуревич [7].

Вариация поля анизотропии в поликристаллах. Рассмотрим теперь неоднородности в поликристаллах (и в блочных монокристаллах), возникающие из-за того, что кристаллографические оси в зернах (или блоках) повернуты относительно друг друга. Гамильтониан $\mathcal{H}_{el}$ возникает из-за вариации энергии кристаллографической анизотропии. В одноосном ФМ

$$\mathcal{H}_{el} = -\frac{\omega_a}{gM} \int (\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}))^2 d\boldsymbol{r}, \tag{44.8}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ – направление легкой оси. Переходя к каноническим переменным b_k, получим гамильтониан $\mathcal{H}_{el}$ в виде (43.1), где амплитуда $\Psi(k, k')$ есть

$$\Psi(k,k') = \frac{\omega_a}{2V} \int [3n_z^2 - 1] \exp[i(k-k')r] \, dr, \tag{44.9}$$

V – объем кристалла. Учитывая, что в пределах каждого кристаллита направление поля анизотропии неизменно, и пренебрегая для простоты различиями в размерах и форме кристаллитов, можно записать $\mathcal{H}_{el}$ в более привычном виде (44.3). В этом случае

$$\eta(k,k') = \eta(k-k'), \quad \eta_k = v_c \sum_m f_m \exp[ikr_m)/(2\pi)^3], \tag{44.10}$$

$$2f_m = 3n_z^2(r_m) - 1, \quad g(k,k') = \frac{\omega_a}{v_c} \int dr' \exp[i(k-k')r'], \tag{44.11}$$

где r_m – координаты центров кристаллитов, $r' = r - r_m$. Интегрирование

в (44.11) проводится по объему одного кристаллита v_c. Конкретный вид матрицы $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ зависит от размеров и формы кристаллитов. Если характерный размер кристаллитов l меньше длины волны, то $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \omega_a$. В обратном предельном случае $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \approx \omega_a / v_c \, |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'|^3$. В конкретных расчетах можно принять модельную зависимость

$$\begin{aligned} &g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \omega_a, \quad |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'| < k_m, \\ &g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = 0, \quad |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'| > k_m. \end{aligned} \tag{44.12}$$

Здесь k_m определяется из условия нормировки $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$:

$$\int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \, d\boldsymbol{k}' = (2\pi)^3 \omega_a / v_c, \quad k_m^3 v_c = 6\pi^2. \tag{44.13}$$

Если учесть диполь-дипольное взаимодействие, то круговые переменные $b_{\boldsymbol{k}}$ уже не будут диагонализировать квадратичную часть гамильтониана. В новых, нормальных переменных $a_{\boldsymbol{k}}$ выражение для η станет более сложным, чем (44.10):

$$\begin{aligned} &\eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \frac{v_c}{(2\pi)^3} \sum_m f_m(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \exp[i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}_m], \\ &2f_m(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = (3n_z^2 - 1)(u_{\boldsymbol{k}} u_{\boldsymbol{k}'} + v_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}'}^*) + \\ &+ \tfrac{1}{2}[u_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}'} (n_x - i n_y)^2 + u_{\boldsymbol{k}'} v_{\boldsymbol{k}}^* (n_x + i n_y)^2], \end{aligned} \tag{44.14}$$

где $u_{\boldsymbol{k}}$, $v_{\boldsymbol{k}}$ — коэффициенты диагонализующего преобразования (5.19). Случай кубического поликристалла с диполь-дипольным взаимодействием подробно изучен в 1958 г. в пионерской работе Е. Шлеманна [230].

44.2. Декремент затухания волн. Для вычисления декремента затухания плоской волны, обусловленного ее рассеянием на статических неоднородностях, можно воспользоваться обычной теорией возмущений по $\mathcal{H}_{\mathrm{el}}$:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\mathrm{el}} = \pi \int |g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')|^2 \eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \delta(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{k}'}) \, d\boldsymbol{k}', \\ &\overline{\eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \eta^*(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}'')} = \eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'). \end{aligned} \tag{44.15}$$

Здесь черта означает усреднение по статистике неоднородностей. Для точечных дефектов из (44.4) и для поликристаллов со случайной ориентацией осей из (44.10) можно получить соответственно

$$\eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = v_0 c (1 - c)/(2\pi)^3, \tag{44.16}$$

$$\eta^2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = v_c/(2\pi)^3. \tag{44.17}$$

Здесь c — концентрация дефектов. Из (44.15), (44.16) и (44.5) получаем выражение для декремента рассеяния СВ на дефектах с вариацией обменной постоянной:

$$\gamma_{\mathrm{el}}(\boldsymbol{k}) = \frac{c}{48\pi} \frac{\Delta J}{J} (ak)^5 \omega_{\mathrm{ex}}. \tag{44.18}$$

В случаях, когда в дефектах варьируется константа анизотропии, вместо (44.18) получается

$$\gamma_{\mathrm{el}}(\boldsymbol{k}) = \frac{c}{4\pi} \frac{(\Delta \omega_a)^2 ak}{\omega_{\mathrm{ex}}}. \tag{44.19}$$

Выражение для $\gamma_{el}(k)$ в поликристаллах мы приведем в двух предельных случаях. Если длина волны $2\pi/k$ превышает размер кристаллита l, то $g(k,k')$ в соответствии с (44.12) равно ω_a. Тогда

$$4\pi\gamma_{el}(k) = \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{\omega_a^2\, kl}{\omega_{ex}}, \qquad kl \lesssim 2\pi. \tag{44.20}$$

В случае коротких волн ($kl \gtrsim 2\pi$) становится существенной форма кристаллов. По порядку величины

$$\gamma_{el} \approx \omega_a^2\, l/(2\pi\omega_{ex}\, a^2 k). \tag{44.21}$$

Как и следовало ожидать, рассеяние максимально, когда длина волны порядка размеров кристаллитов, $kl \approx 1$. Очевидно также, что формула (44.21) не верна, когда длина пробега волн меньше чем размер кристаллитов, ибо тогда само понятие рассеяния волн на поликристаллической структуре становится бессмысленным.

§ 45. Основные уравнения

В предыдущем параграфе при вычислении γ_{el} – декремента затухания плоской волны на случайных неоднородностях – мы воспользовались теорией возмущений по $\mathcal{H}_{el}$. Однако в присутствии параметрической накачки, компенсирующей затухание волн, теория возмущений становится неприменимой, так как в каждом ее порядке найдутся большие слагаемые, интегралы в которых будут расходиться из-за совпадения полюсов. Поэтому для построения теории параметрического возбуждения волн в средах со случайными неоднородностями необходимо воспользоваться диаграммной техникой, развитой в гл. 7 и позволяющей суммировать эти слагаемые.

45.1. Диаграммная техника. Включение $\mathcal{H}_{el}$ в гамильтоновы уравнения движения (34.2) приведет к дополнительному слагаемому, пропорциональному $g(k,k')$, в уравнениях (34.5) для b_q:

$$b_q = G_q^0\,[hV_k b_q^+ + \int g(k,k')\eta(k,k')\delta(\omega-\omega')\, a_{q'}\, dq' +$$
$$+ \int T_{k\,1,23}\, b_1^* b_2 b_3 \delta(q+q_1-q_2-q_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3 + f_q]. \tag{45.1}$$

В результате в диаграммных рядах для b_q, возникающих при итерации этого уравнения, окажутся вершины, пропорциональные $g(k,k')$, а соответствующие им аналитические выражения будут представлять собой ряды по степеням η и f. При вычислении функций Грина G_q, L_q и корреляторов n_q, σ_q будет необходимо вычислять средние по статистике неоднородностей от степеней η_k: $\overline{\eta_k}$, $\overline{\eta_k\eta_{k'}}$, $\overline{\eta_k\eta_{k'}\eta_{k''}}$, ... Для хаотически расположенных примесей, когда η_k определяется выражением (44.4), непосредственное выполнение процедуры усреднения дает

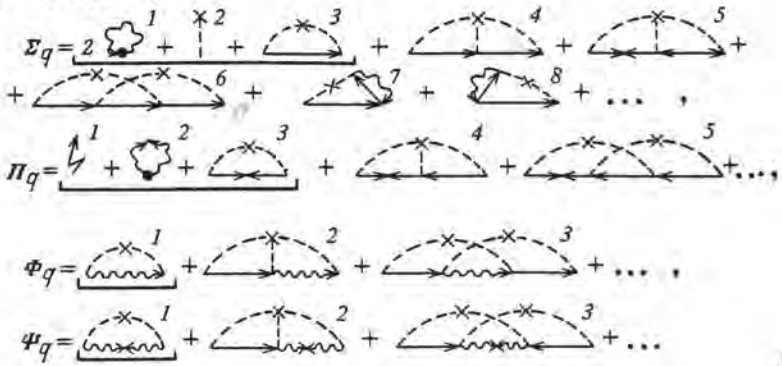
$$\overline{\Delta\eta_k\,\Delta\eta_{k'}} = \Delta\eta^2(k,k'), \quad \Delta\eta_k = \eta_k - \overline{\eta}_k,$$
$$\overline{\Delta\eta_k\,\Delta\eta_{k'}\,\Delta\eta_{k''}} = \Delta\eta^3_{k,k',k''},$$
$$\overline{\Delta\eta_1\,\Delta\eta_2\,\Delta\eta_3\,\Delta\eta_4} = \Delta\eta^2_{12}\,\Delta\eta^2_{34} + \Delta\eta^2_{13}\,\Delta\eta^2_{24} + \Delta\eta^2_{14}\,\Delta\eta^2_{23} + \Delta\eta^2_{1234},$$
$$\overline{\eta}(k) = \eta_1\delta(k), \quad \eta_1 = c, \quad \Delta\eta_2(k,k') = \eta_2\delta(k+k'),$$
$$\eta_2 = c(1-c)v_0/(2\pi)^3, \quad \Delta\eta_3(k,k',k'') = \eta_3\delta(k+k'+k''), \tag{45.2}$$
$$\eta_3 = c(1-c)(1-2c)(v_0/(2\pi)^3)^2,$$

где c и v_0, как уже отмечалось, есть концентрация примесей и объем элементарной ячейки. В случае поликристаллов с хаотически ориентированными кристаллитами из (44.10), (44.11) можно вновь получить формулы (45.2), в которых, в отличие от (45.2),

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = \overline{f_m^2} v_c/(2\pi)^3, \quad \overline{f_m^2} = 1/5,$$
$$\eta_3 = \overline{f_m^3}\,[v_c^2/(2\pi)^3], \quad \overline{f_m^3} = 18/35. \tag{45.3}$$

Для величин $\overline{\eta}_k$, $\Delta\eta^2_{12}$, $\Delta\eta^3_{123}$ и т.д. введем обычные графические обозначения:

Тогда процедура усреднения некоторой диаграммы в соответствии с (45.2) будет сводиться к соединению всевозможным образом пунктирных линий η_k, $\eta_{k'}$, $\eta_{k''}$ в пучки из одной, двух, трех и более штук. Включение этих диаграмм в ряды для функций Грина приводит к появлению дополнительных компактных (неприводимых) диаграмм в рядах (36.9) для Σ_q, Π_q, Φ_q и Ψ_q:



(45.4)

45.2. Основные приближения теории. В рядах (45.4) не учтены диаграммы, содержащие две и более вершин T. Тем самым при рассмотрении четырехволнового взаимодействия мы ограничились приближением самосогласованного поля, т.е. сделали основное допущение S-теории.

Приступим теперь к оценке диаграмм, описывающих рассеяние волн на неоднородностях. Диаграмма (2) в ряду для Σ_q равна $cg(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ (для ситуации с точечными дефектами). В силу эрмитовости гамильтониана $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ вещественно, и поэтому эта диаграмма описывает вклад в частоту волн ω_k, возникающий из-за изменения средних характеристик среды. В рассмотренных выше примерах с вариацией обменной константы (см. (44.5)) и константы анизотропии (см. (44.7))получим соответственно

$$\Delta\omega_k = c(J' - J)\,\omega_{ex}\,(ak)^2/J, \quad \Delta\omega_k = c\,\Delta\omega_a. \tag{45.5}$$

Для поликристаллов $\Delta\omega_k = 0$. Рассмотрим теперь более сложную диаграмму (3) в ряду (45.4). Наибольший интерес представляет ее мнимая

часть:

$$\operatorname{Im}\Sigma_3(k,\omega)=\eta_2\int|g(k,k')|^2\ \operatorname{Im}G(k',\omega)\,dk'. \tag{45.6}$$

Оценка этого выражения зависит от конкретного вида функции Грина. В отсутствие накачки

$$G(k,\omega)=(\omega-\omega_k+i\Gamma_k)^{-1} \tag{45.7}$$

и для $\gamma_{el}=\operatorname{Im}\Sigma$ получается выражение, совпадающее с (44.15). Впоследствии мы покажем, что функция Грина G_q имеет простой вид (45.7) и в присутствии накачки, если $\gamma_{el}>\gamma$. В этом же приближении получаем для диаграммы (4) в ряду (45.4):

$$\operatorname{Im}\Sigma_4(k,\omega)=\eta_3\int g(k,k')g(k',k'')\,g(k'',k)\times$$
$$\times\operatorname{Im}\{(\omega_k-\omega_{k'}+i\Gamma_{k'})^{-1}\,(\omega_k-\omega_{k''}+i\Gamma_{k''})^{-1}\}\,dk'dk''. \tag{45.8}$$

По порядку величины

$$\alpha=\operatorname{Im}\ \Sigma_4/\operatorname{Im}\Sigma_3\approx$$
$$\approx(\eta_3/\eta_2 g_{kk})\int[\,|g(k,k')\,|^2/(\omega_k-\omega_{k'}+i\Gamma_{k'})]\,dk'. \tag{45.9}$$

Выбирая закон дисперсии в стандартном виде (44.2) и пользуясь формулами (44.5), (44.7), (45.3) и (45.4), получим следующие оценки: для вариации обменной константы $\alpha=\alpha_1$, для вариации поля анизотропии $\alpha=\alpha_2$, для вариации поля анизотропии в поликристаллах $\alpha=\alpha_3$, где

$$\alpha_1=(J'-J)/J,$$
$$\alpha_2=\Delta\omega_a/\omega_{ex}, \tag{45.10}$$
$$\alpha_3\approx\omega_a l^2/\omega_{ex}\,a^2.$$

Здесь l – размер кристаллитов, a – постоянная решетки. Впредь мы будем считать, что параметр α мал, и на этом основании не будем учитывать диаграммы с пучками из трех и более линий. Это означает, что статистические свойства поля неоднородностей η являются гауссовыми. Физический смысл этого в том, что мы рассматриваем рассеяние волн в борновском приближении. При $\alpha\gtrsim 1$ суммирование диаграмм с пучками из трех и более линий приводит к возникновению полюсов в полной амплитуде рассеяния $\tilde{g}(k,k')$, описывающих локальные или квазилокальные колебания. Вдали от резонанса они не оказывают влияния на поведение ПСВ и учет локальных колебаний сводится к замене в формулах борновской амплитуды рассеяния $g(k,k')$ на полную $\tilde{g}(k,k')$. Специальный случай резонанса исследован В.Б. Черепановым в 1979 г. [226].

Оценим теперь диаграмму (6) в ряду (45.4) с пересечением примесных линий:

$$\operatorname{Im}\Sigma_6(k,\omega)=\eta_2^2\int g(k,k')\,g(k',k'')g(k'',k''')\,g(k''',k)\times$$
$$\times\operatorname{Im}[G(k',\omega)G(k'',\omega)G(k''',\omega)\delta(k+k''-k'-k''')]\ dk'dk''\,dk''' \tag{45.11}$$

По порядку величины $\beta=\operatorname{Im}\Sigma_6/\operatorname{Im}\Sigma_3\approx\gamma_{el}/\omega_k$. В рассмотренных нами случаях (см. формулы (44.18) – (44.21)) с большим запасом выполняется условие $\beta\ll 1$, и диаграммами с пересечением примесных линий можно пренебречь. В заключение оценим "комбинированные" диаграммы вида

(7), (8) в ряду (45.4):

$$\Sigma_7 = \eta_2 \int g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\, g(\boldsymbol{k}'',\boldsymbol{k}''')\, G(\omega_{\boldsymbol{k}''},\boldsymbol{k}''')\, n(\boldsymbol{k}'') \times$$
$$\times\, \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}''-\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}''')\, d\boldsymbol{k}'\, d\boldsymbol{k}''\, d\boldsymbol{k}''' \approx \dot{\gamma}_{e1}\, TN/kv. \qquad (45.12)$$

Видно, что при не слишком большой надкритичности в пределах применимости S-теории $\Sigma_7/\mathrm{Im}\,\Sigma \ll 1$ и "комбинированные" диаграммы вида (7) также несущественны. Комбинированные диаграммы также несущественны для нашей теории.

Таким образом, в рядах для Σ, Π, Φ и Ψ мы оставляем только подчеркнутые в (45.4) диаграммы. Приведем соответствующие им аналитические выражения

$$\Sigma = 2\int T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\, n(\boldsymbol{k}')\, d\boldsymbol{k}' + \Sigma_{e1},$$
$$\Sigma_{e1} = \eta_1 g_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}} + \eta_2 \int |g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2 G(\boldsymbol{k}',\omega)\, d\boldsymbol{k}',$$
$$\Pi(\boldsymbol{k},\omega) = P_{\boldsymbol{k}} + \Pi_{e1}(\boldsymbol{k},\omega),$$
$$\Pi_{e1}(\boldsymbol{k},\omega) = \eta_2 \int g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\, g(\bar{\boldsymbol{k}},\bar{\boldsymbol{k}}')\, L(\boldsymbol{k}',\omega)\, d\boldsymbol{k}', \qquad (45.13)$$
$$\Phi(\boldsymbol{k},\omega) = \Phi_{e1}(\boldsymbol{k},\omega) = \eta_2 \int |g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')|^2\, n(\boldsymbol{k}')\, d\boldsymbol{k}',$$
$$\Psi(\boldsymbol{k},\omega) = \Psi_{e1}(\boldsymbol{k},\omega) = \eta_2 \int g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\, g(\bar{\boldsymbol{k}},\bar{\boldsymbol{k}}')\, \sigma(\boldsymbol{k}',\omega)\, d\boldsymbol{k}'.$$

Легко заметить, что если $n(\boldsymbol{k},\omega)$ и $\sigma(\boldsymbol{k},\omega) \sim \delta(\omega - \omega_p/2)$, то и $\Phi(\boldsymbol{k},\omega)$, $\Psi(\boldsymbol{k},\omega) \sim \delta(\omega - \omega_p/2)$ так же. Это означает, что рассеяние ПВ на статических неоднородностях не нарушает одночастотность параметрической турбулентности волн, характерную для S-теории. Таким образом, при построении теории мы можем пользоваться "одночастотными" уравнениями (37.4) и преобразовать (45.13) с помощью (37.5) и (37.3):

$$\Gamma(\Omega) = \gamma(\Omega) + \pi\eta_2 \int |g(\Omega,\Omega')|^2\, \Gamma(\Omega')\, [k^2(\Omega')/\nu(\Omega')\, v(\Omega')]\, d\Omega',$$
$$\Pi(\Omega) = P(\Omega) + \pi\eta_2 \int g(\Omega,\Omega')\, g(\bar{\Omega},\bar{\Omega}')\, \Pi(\Omega')\, [k^2(\Omega')/\nu(\Omega')\, v(\Omega')]\, d\Omega',$$
$$P(\Omega) = hV(\Omega) + \int S(\Omega,\Omega')\, \Sigma(\Omega')\, d\Omega', \qquad (45.14)$$
$$\Phi(\Omega) = \eta_2 \int |g(\Omega,\Omega')|^2\, N(\Omega')\, d\Omega',$$
$$\Psi(\Omega) = \eta_2 \int g(\Omega,\Omega')\, g(\bar{\Omega},\bar{\Omega}')\, \Sigma(\Omega')\, d\Omega'.$$

Дополнительно к (45.13) в выражении для $\Gamma(\Omega)$ здесь мы учли слагаемое $\gamma(\Omega)$, описывающее затухание ПСВ, возникающее из-за их взаимодействия с тепловыми волнами. Соотношения (45.14) вместе с уравнениями (37.14) представляют замкнутую систему интегральных уравнений, позволяющих описывать систему взаимодействующих параметрически возбужденных волн в среде со случайными неоднородностями.

§ 46. Функция распределения параметрических спиновых волн

Перепишем уравнение (37.4) для функций распределения с помощью соотношений (45.14) в виде

$$N(\Omega) = \pi k^2(\Omega)\, \Gamma(\Omega)\, [\Gamma(\Omega)\Phi(\Omega) + \mathrm{Im}\,\Pi^*(\Omega)\Psi(\Omega)],$$
$$\Gamma(\Omega)\Sigma(\Omega) + i\,\Pi(\Omega)\, N(\Omega) = 0, \qquad (46.1)$$
$$\nu^2(\Omega) = \Gamma^2(\Omega) - |\Pi(\Omega)|^2.$$

Это уравнение имеет смысл баланса энергии в системе ПСВ: первое слагае-

мое описывает диссипацию энергии за счет собственных механизмов затухания, второе – поступление энергии от накачки. Правая часть уравнения, в приближении S-теории равная нулю, описывает перераспределение энергии на резонансной поверхности за счет рассеяния волн на неоднородностях. Из (46.1) следует интегральное соотношение

$$\int \gamma(\Omega) N(\Omega) d\Omega + \mathrm{Im} \int h V^*(\Omega) \Sigma(\Omega) d\Omega = 0, \tag{46.2}$$

в которое двухмагнонное рассеяние не входит, так как оно происходит с сохранением частоты и не выводит, следовательно, энергию из системы ПСВ.

Влияние неоднородностей, как мы сейчас покажем, приводит к двум эффектам: очевидному – изотропизации распределения $N(\Omega)$ и менее очевидному – разрушению фазовых корреляций в парах, приводящему к уменьшению $|\Sigma(\Omega)|$ по сравнению с $N(\Omega)$. Изучим вначале это явление в наиболее интересном предельном случае, когда концентрация неоднородностей велика.

46.1. Случай большой интенсивности рассеяния: $\gamma_{el} \gg \gamma$. В этом пределе исходные интегральные уравнения значительно упрощаются. За одним исключением, о котором будет идти речь ниже, они имеют решение, при котором $N(\Omega) \gg |\Sigma(\Omega)|$, $\Gamma(\Omega) \gg \Pi(\Omega)$. Используя эти неравенства, получим из (45.14), (37.4) уравнение, определяющее распределение $N(\Omega)$:

$$\int |g(\Omega, \Omega')|^2 [N(\Omega) - N(\Omega')] \, d\Omega' = 0.$$

Единственное разумное решение этого уравнения – изотропное распределение: $N(\Omega) = N/4\pi$. Для вычисления $\Sigma(\Omega)$, как это видно из (37.4), необходимо знать $\Gamma(\Omega)$ и $\Pi(\Omega)$:

$$\Sigma(\Omega) = -i\,\Pi(\Omega) N(\Omega)/\Gamma(\Omega). \tag{46.3}$$

Учитывая, что мы ищем решение, при котором $\Gamma(\Omega) \approx \nu(\Omega)$, получим из (37.4) выражение для $\Gamma(\Omega)$ и интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определения $\Pi(\Omega)$:

$$\Gamma(\Omega) = 4\pi^2 \eta_2 \langle |g(\Omega, \Omega')|^2 k^2(\Omega')/v(\Omega') \rangle_{\Omega'}, \quad 4\pi \langle f_\Omega \rangle = \int f_\Omega \, d\Omega, \tag{46.4}$$

$$\Pi(\Omega) = P(\Omega) + \langle K(\Omega, \Omega') \Pi(\Omega') \rangle_{\Omega'}, \tag{46.5}$$

$$K(\Omega, \Omega') = [k^2(\Omega')/v(\Omega')] \times$$
$$\times g(\Omega, \Omega') g(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}')/\langle |g(\Omega', \Omega'')|^2 k^2(\Omega) v^2(\Omega'') \rangle_{\Omega''}. \tag{46.6}$$

В ряде случаев, например, при $V(\Omega) = V$, $g(\Omega, \Omega') = g$ это уравнение не имеет решения. Это означает, что наше допущение $\Gamma(\Omega) \gg \Pi(\Omega)$ несправедливо. Можно показать, что при этом исходные уравнения имеют другое решение, в котором

$$\Gamma \approx |\Pi| \approx \gamma_{el}(\gamma_{el}/\gamma)^{1/3} \gg \nu \approx \gamma_{el}.$$

Этот вырожденный случай нас интересовать не будет, и мы будем считать, что уравнение (46.5) для $\Pi(\Omega)$ имеет единственное решение, в котором Π порядка P. Используя уравнение (46.3), преобразуем равенство (46.1) к виду

$$\langle \gamma(\Omega) \rangle = \mathrm{Re} \langle P^*(\Omega) \Pi(\Omega)/\Gamma(\Omega) \rangle. \tag{46.7}$$

Отсюда и из (46.3) немедленно следует, что

$$|P|^2 \approx \gamma_{el}\gamma,$$
$$|\Sigma(\Omega)| \approx N(\Omega)(\gamma/\gamma_{el})^{1/2} \ll N(\Omega). \tag{46.8}$$

Это обстоятельство – разрушение фазовых корреляций – приводит, как уже отмечалось, к увеличению порога. Вместо оценки М. Спаркса (43.4) $h_{th}V \approx \langle \gamma \rangle$, которая получалась бы в случае $|\Sigma| = N$ из (46.7) следует выражение, близкое к (43.9):

$$h_{th}^2 \langle |V(\Omega)|^2 \rangle \approx \langle \gamma(\Omega) \rangle \gamma_{el}. \tag{46.9}$$

Рассмотрим также другой предельный случай, представляющий интерес.

46.2. Случай почти однородной среды: $\gamma_{el} \ll \gamma$. Разумеется, под влиянием таких неоднородностей порог параметрического возбуждения и поведение волн за порогом изменятся мало, принципиальным моментом здесь будет выяснение ширины функции распределения, которая в пределе $\gamma_{el} \to 0$ в соответствии с S-теорией равна нулю. Характер ее уширения оказывается различным в ситуациях, когда волны сосредоточены на линиях или в точках резонансной поверхности. Мы не будем их изучать в общем случае, хотя это и нетрудно. Достаточно полное представление об этих ситуациях можно получить, рассматривая два конкретных случая, реализующиеся при параллельной накачке СВ в кубических ФМ.

Если пренебречь кубической анизотропией (а она, как правило, мала), то ПВ в S-теории сосредоточены на экваторе резонансной поверхности и

$$V(\boldsymbol{k}) = V(x)\exp 2i\varphi, \qquad V(x) = V(1-x^2),$$
$$S(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = S(x,x',\varphi-\varphi'), \quad g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = g(x,x',\varphi-\varphi'), \quad x = \cos\theta. \tag{46.10}$$

При $\gamma_{el} \ll \gamma$ ПВ локализованы вблизи $x = 0$ и зависимость $N(x)$ в (37.4) определяется множителем $\nu^{-3}(x)$, остальные коэффициенты этого уравнения с достаточной точностью могут быть взяты в точке $x = 0$. Тогда

$$N(\Omega) = 2\pi N(x), \qquad 2N(x) = A/\nu^3(x),$$
$$A = 4\pi^2\gamma_0(\gamma_0\Phi_0 + \operatorname{Im} P_0^*\Psi_0)/v_0. \tag{46.11}$$

В выражении для A мы оставили лишь члены первого порядка по γ_{el}, полагая $\Gamma = \gamma$ и $\Pi = P$. Зависимость $\nu(x)$ при малых x можно выбрать в виде

$$\nu^2(x) = \nu_0^2 + \gamma^2(\alpha^2x^2 - \beta^2x^4), \tag{46.12}$$

где коэффициенты α и β порядка единицы и зависят, вообще говоря, от надкритичности. При малой надкритичности, когда $P(x) \approx hV(x)$ в силу (46.10) $\alpha^2 = 2$, $\beta^2 = 1$. Интегрируя (46.11) по x и используя (45.14), имеем

$$N = A\int_0^1 \nu^{-3}(x)dx = A/\alpha\gamma\nu_0^2, \qquad A = N\gamma_{el}\gamma(1-K),$$
$$\gamma_{el} = 2\pi\eta_2k_0^2v_0^{-1}\int|g(0,0,\varphi)|^2d\varphi,$$
$$K = \int g^2(0,0,\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi/\int|g(0,0,\varphi)|^2d\varphi. \tag{46.13}$$

В случаях вариации обменного взаимодействия, когда $g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ задается выражением (44.5), $K = 1/2$. Для двух других случаев – вариации поля анизотропии и для поликристаллов при $(kl) \ll 1$, когда $g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ определяется формулами (44.7) и (44.12), легко убедиться, что $K = 0$. Если же $(kl) \gg 1$,

то K близко к единице:

$$1 - K = 6^{1/3}\pi^{4/3}(kl)^{-2}. \tag{46.14}$$

Из (46.13) следует выражение для ν_0^2:

$$\nu_0^2 = \gamma\gamma_{el}(1-K)/\alpha, \tag{46.15}$$

определяющее в соответствии с равенствами (46.11) и (46.12) зависимость $N(\theta)$. В частности, полуширина распределения $N(\theta)$ равна

$$\Delta\theta \approx 2\nu_0/\alpha\gamma = [\gamma_{el}(1-K)/\gamma\alpha^3]^{1/2} \approx (\gamma_{el}/\gamma)^{1/2}. \tag{46.16}$$

При вычислении порогового поля необходимо учитывать перенормировку (45.14) накачки и затухания ПВ:

$$\Gamma(x) = \gamma + 2\pi\eta_2 \int_0^1 dx' \int_0^{2\pi} d\varphi |g(x,x',\varphi)|^2 k^2(x)/\nu(x)v(x),$$
$$\Pi(x) = P(x) + 2\pi\eta_2 \int_0^1 dx' \int_0^{2\pi} d\varphi g^2(x,x',\varphi) \times \tag{46.17}$$
$$\times \exp(2i\varphi)\, k^2(x)/\nu(x)v(x).$$

Как видно из (46.12), в этих интегралах существенна вся область изменения x, и поэтому их вычисление требует конкретизации зависимостей $g(x,x')$, $S(x,x')$ и т.п. Соответствующие модельные расчеты будут сделаны в следующем параграфе.

При $\gamma_{el} \ll \gamma$ может оказаться существенной даже слабая кубическая анизотропия, нарушающая аксиальную симметрию задачи и приводящая к тому, что в приближении S-теории на экваторе ($\theta = \pi/2$) возбуждены при $\boldsymbol{M} \parallel [110]$ только одна пара $\varphi_1 = (0,\pi)$, при $\boldsymbol{M} \parallel [100]$ две пары $\varphi_1 = (0,\pi)$, $\varphi_2 = (\pi/2, 3\pi/2)$, при $\boldsymbol{M} \parallel [111]$ три пары $\varphi_1 = (0,\pi)$, $\varphi_2 = (\pi/3, 4\pi/3)$, $\varphi_3 = (2\pi/3, 5\pi/3)$. Учет кубической анизотропии приводит к зависимости ν от φ, причем ν минимальна в тех точках резонансной поверхности, в которых в приближении S-теории расположены пары. Вблизи минимума с $x = 0$, $\varphi = \varphi_j$ вместо (46.12) имеем

$$\nu^2(\Omega) = \nu_0^2 + \gamma^2[\alpha^2x^2 + \delta^2(\varphi - \varphi_j)^2], \tag{46.18}$$

где безразмерный параметр $\delta \ll 1$ характеризует малость кубической анизотропии. Например, при $\boldsymbol{M} \parallel [110]$ $\delta^2 = \omega_a/\omega_M$, что для ЖИГ при комнатной температуре составляет 0,05%. Рассматривая узкие распределения мы так же, как и в предыдущем случае, в уравнениях (37.4) будем учитывать зависимость от Ω только в величине $\nu(\Omega)$, все остальные коэффициенты можно взять в точках $x = 0$, $\varphi = \varphi_j$. Тогда после интегрирования (37.4) по x и φ получим вместо (46.13)

$$N = A\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi/(2\pi\nu^3(x,\varphi)) = 2zA/\alpha\delta\nu_0\gamma^2,$$
$$A = N\gamma_{el}\gamma^2(1-K), \tag{46.19}$$
$$\gamma_{el} = 4\pi^2k_0^2(\eta_2/v_0z)\sum_{j=1}^{z}|g(\varphi_j)|^2,$$
$$K = \sum_{j=1}^{z} g^2(\varphi_j)\exp(2i\varphi_j)/\sum_{j=1}^{z}|g(\varphi_j)|^2,$$

где $z = 1, 2, 3$ — число пар в приближении S-теории. Из (46.19) следует выражение для ν_0:

$$\nu_0 = 2z\gamma_{e1}(1-K)/\alpha\delta \tag{46.20}$$

и в соответствии с (46.18) выражения для полуширины функции распределения по θ и φ:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \nu_0/\alpha\gamma = 4z\,\gamma_{e1}(1-K)/\alpha^2\delta\gamma, \\ \Delta\varphi &= \nu_0/\delta\gamma = 4z\gamma_{e1}(1-K)/\alpha\delta^2\gamma. \end{aligned} \tag{46.21}$$

Полученные результаты (46.20) и (46.21) справедливы, если $z\,\Delta\varphi \ll 2\pi$. При $\delta \ll 1$ это налагает ограничение на величину двухмагнонного рассеяния

$$\gamma_{e1} < \gamma\alpha\delta^2\pi/2z^2(1-K) \approx \delta^2\gamma.$$

При выполнении обратного неравенства, функцию распределения $N(x,\varphi)$ можно считать не зависящей от φ. Это означает, что кубической анизотропией, нарушающей аксиальную симметрию, можно пренебречь, как это сделано в предыдущем пункте. Отметим еще, что при $z = 1$ в соответствии с (46.19), (46.20) $K = 1$ и $\nu_0 = 0$. Это означает, что случай одной пары необходимо рассматривать отдельно, оставляя в (37.4) зависимость от φ не только в $\nu(\varphi)$, но и в подынтегральных выражениях (45.14) для Φ и Ψ. Учитывая это обстоятельство, получим вместо (46.19) более точные уравнения:

$$N(\varphi) = \frac{\gamma_{e1}\gamma}{\alpha\,[\nu_0^2 + \gamma^2\delta^2\sin^2\varphi]} \times$$
$$\times \int \frac{|g(\varphi-\varphi')|^2}{|g(0)|^2}\,[1 - \exp(2i(\varphi-\varphi'))]\,N(\varphi')\,d\varphi.$$

Здесь γ_{e1} определяется выражением (46.19) при $z = 1$ и использовано выражение для $\nu(\Omega)$ и $N(\varphi)$:

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= \int_{-1}^{1} N(\varphi, x)\,dx, \\ \nu^2(\Omega) &= \nu_0^2 + \gamma^2(\alpha^2x^2 + \delta^2\sin^2\varphi). \end{aligned} \tag{46.22}$$

Последнее переходит в (46.18) при малых φ. В (46.22) оказывается существенной вся область интегрирования по φ, поэтому необходимо задать явный вид $g(0,0,\varphi)$. Предполагая для простоты $g = \mathrm{const}$, получаем интегральное уравнение для $N(\varphi)$ с вырожденным ядром:

$$\begin{aligned} &N(\varphi) = (\gamma_{e1}\gamma/\alpha)\,[N - N_1\exp(2i\varphi)]\,[\nu_0^2 + \gamma^2\delta^2\sin^2\varphi]^{-1}, \\ &N = \int N(\varphi)d\varphi, \qquad N_1 = \int \exp(-2i\varphi)\,N(\varphi)\,d\varphi. \end{aligned} \tag{46.23}$$

Дважды интегрируя (46.23) по φ с весом 1 и $\exp(-2i\varphi)$, получаем систему линейных уравнений для N и N_1, условие разрешимости которой дает

$$\begin{aligned} \alpha^2 = (\gamma_{e1}\gamma)^2\,\{&[\int(\nu_0^2 + \gamma^2\delta^2\sin^2\varphi)^{-1}d\varphi]^2 - \\ &- |\int(\nu_0^2 + \gamma^2\delta^2\sin^2\varphi)^{-1}\exp(2i\varphi)\,d\varphi|^2\} \end{aligned} \tag{46.24}$$

Отсюда при $\nu_0 < \gamma$ получаем

$$\nu_0 = 4\pi^2\gamma_{e1}^2/\alpha^2\delta\gamma. \tag{46.25}$$

С этой же точностью можно, выразив N_1 через N с помощью (46.24), получить из (46.23),

$$\pi N(\varphi) = N(0)\frac{\Delta\varphi\cos 2\varphi + (\Delta\varphi)^{1/2}\delta^{-1}\sin^2\varphi}{(\Delta\varphi)^2 + \sin^2\varphi},$$
$$\Delta\varphi = \nu_0/\gamma\delta = (2\pi\gamma_{el}/\alpha\delta\gamma)^2. \tag{46.26}$$

Это выражение для $N(\varphi)$ представляет собой функцию Лоренца с полушириной $\Delta\varphi$ при $\varphi < \varphi_0$, где

$$\varphi_0 \approx \delta^{1/2}(\Delta\varphi)^{1/4} \approx (2\pi\gamma_{el}/\alpha\gamma)^{1/2}, \tag{46.27}$$

и константу, равную $(\Delta\varphi)^{1/2}/\delta$ при $\varphi > \varphi_0$. Сравнивая (46.26) с (46.21), убуждаемся в том, что уширение функции распределения $N(\varphi)$ по φ, вызванное двухмагнонными рассеянием, в случае одной пары (46.26) оказывается существенно меньше, чем в случае двух или трех пар (46.21).

46.3. Малоугловое рассеяние. Ситуация, требующая отдельного рассмотрения, возникает в случае плавных неоднородностей среды, когда углы рассеяния малы и функция $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ отлична от нуля лишь для $|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'| \ll k$. Предполагая для простоты закон дисперсии волн изотропным, а $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ зависящим от модулей $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ и угла между ними, перейдем в уравнениях (46.21) к дифференциальному приближению:

$$\Gamma(\Omega) = \gamma(\Omega) + \gamma_{el}\Gamma(\Omega)/\nu(\Omega) + \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta,\varphi)[\Gamma(\Omega)/\nu(\Omega)],$$
$$\Pi(\Omega) = P(\Omega) + \gamma_{el}\Pi(\Omega)/\nu(\Omega) + \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta,\varphi)[\Pi(\Omega)/\nu(\Omega)],$$
$$\nu^2(\Omega) = \Gamma^2(\Omega) - |\Pi(\Omega)|^2, \tag{46.28}$$
$$\gamma_{el} = \pi\eta_2 k^2 v^{-1}\int |g(\Omega,\Omega')|^2\, d\Omega',$$
$$\gamma_{el}\Delta^2 = \pi\eta_2 k^2 v^{-1}\int |g(\Omega,\Omega')|^2\, d\Omega' \sin^2(\widehat{\Omega\ \Omega'}),$$

где $\Delta(\theta,\varphi)$ — угловая часть оператора Лапласа. Аналогично, переходя к дифференциальному приближению в уравнении баланса энергии (46.1), получим после ряда тождественных преобразований простое уравнение

$$\gamma(\Omega)N(\Omega) + \mathrm{Re}\,[\Pi^*(\Omega)P(\Omega)N(\Omega)/\Gamma(\Omega)] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta,\varphi)[\nu(\Omega)N(\Omega)/\Gamma(\Omega)]. \tag{46.29}$$

Его правая часть описывает диффузию энергии ПСВ по резонансной поверхности за счет малоуглового рассеяния на плавных неоднородностях. Исследуем систему уравнений (46.28)–(46.29) для кубических ФМ (см. (46.10)) в двух предельных случаях – при $\gamma_{el}\Delta^2 \ll \gamma$ и $\gamma_{el}\Delta^2 \gg \gamma$. Тогда $\Pi(\Omega) = \Pi(\theta)\exp(2i\varphi)$ и в формулах (46.28) остается только зависимость от полярного угла θ:

$$\Gamma(\theta) = \gamma(\theta) + \gamma_{el}\Gamma(\theta)/\nu(\theta) + \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta)[\Gamma(\theta)/\nu(\theta)],$$
$$\Pi(\theta) = P(\theta) + [\Pi(\theta)\gamma_{el}/\nu(\theta)](1 - 2\Delta^2/\sin^2\theta) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta)[\Pi(\theta)/\nu(\theta)], \tag{46.30}$$
$$\nu^2(\theta) = \Gamma^2(\theta) - |\Pi(\theta)|^2,$$
$$F^2(\theta) = [\Gamma(\theta) - |\Pi(\theta)|]/[\Gamma(\theta) + |\Pi(\theta)|].$$

Отсюда получается замкнутое уравнение для функции $F(\theta)$:

$$\epsilon F^4 + F^3(\gamma - |P(\theta)|)/2\gamma + F(\gamma + |P(\theta)|)/2\gamma - \epsilon = 2\epsilon F^3 \Delta(\theta) \ln F,$$
$$\epsilon = \gamma_{el}\Delta^2/2\gamma. \tag{46.31}$$

Зная выражение для F, можно найти Γ, Π и ν прямым вычислением:

$$\Gamma(\theta) = \gamma + 1/2\gamma_{el}(F + F^{-1}) + \gamma\epsilon\,\Delta(\theta)[F + F^{-1}]. \tag{46.32}$$

Малая интенсивность рассеяния $\epsilon \ll 1$. В этом приближении параметрические волны, как мы покажем ниже, сосредоточены в узкой области $\Delta\theta \leqslant \epsilon^{1/3}$ вблизи максимума $P(\theta)$. Считая для определенности, что $P(\theta)$ максимально при $\theta = \pi/2$, положим при малых $x = \cos\theta$ $P(x) = P_0 - \alpha\gamma x^2$, где α порядка единицы, и определим x_0 равенством $P(x_0) = \gamma$. При $x_0^3 \leqslant \epsilon$, $x^3 \leqslant \epsilon$ уравнение (46.31) имеет решение $F = \sqrt{2}/|x|$. При $x_0^3 \lesssim \epsilon$ и $x^3 \gg \epsilon$ вид решения (46.31) изменяется незначительно: $F = (2/\alpha)^{1/2}|x|$. Подставляя эти соотношения в (46.32), получим при $x^3 > \epsilon$:

$$\Gamma(x) = \gamma + \gamma_{el}(2/\alpha)^{1/2}|x|^{-1} + 2\gamma\epsilon(2/\alpha)^{1/2}|x|^{-3},$$
$$\nu/\Gamma = (2\alpha)^{1/2}|x||\Pi|/\Gamma = 1 - \alpha x^2. \tag{46.33}$$

При $x^3 < \epsilon$ в этих соотношениях следует положить $\alpha = 1$. Подставляя соотношения (46.33) в уравнения (46.29), получим в области $x^3 > \epsilon$:

$$(2x^2 - x_0^2)N - \epsilon\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(|x|N) = 0.$$

При $x^3 < \epsilon$ здесь следует положить $\alpha = 1$. Для функции $\Psi(x) = N(x)$ это уравнение является уравнением Шредингера с "потенциальной энергией" U:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U\right)\Psi = E\Psi, \quad U = (2/\alpha)^{1/2}(2x^2 - x_0^2)/|x|\epsilon, \tag{46.34}$$

и собственным значением "энергии" $E = 0$. По физическому смыслу задачи $\Psi \geqslant 0$, и поэтому нас интересует решение (46.34), не содержащее узлов, т.е. соответствующее "основному"состоянию. Величина x_0, входящая в выражение для "потенциала", и должна определяться из условия равенства нулю энергии основного состояния. Точно эта задача не решается, однако приближенно ее можно решить, используя вариационный принцип для уравнения Шредингера. В результате

$$x_0 \approx \epsilon^{2/3}\ln(\epsilon^{1/3}/\delta), \quad \delta \approx \epsilon^{1/3}, \tag{46.35}$$

где δ – характерный размер "пробных функций". При $x \gg x_0$ уравнение (46.35) переходит в уравнение для функций Эйри и

$$N(x) \approx x^{-5/4}\exp[-2x^{3/2}/3\sqrt{\epsilon}] \to 1/|x| \text{ при } x^3 < \epsilon. \tag{46.36}$$

Необходимо отметить, что эта асимптотика справедлива, если x больше чем характерный угол рассеяния Δ: при $x < \Delta$ нарушается исходное дифференциальное приближение и функция $N(x)$ выходит на плато. Таким образом, значение функции $N(x)$ становится вдвое меньше, чем ее максимальное значение при изменении угла θ от $\pi/2$ на величину порядка Δ, однако половина энергии пакета сосредоточена в области углов $|\theta - \pi/2| \approx \delta \approx \epsilon^{1/3}$, которую естественно считать характерной шириной пакета. Использованное

нами дифференциальное приближение справедливо, если $\epsilon > \Delta^3$, что дает $\gamma_{el} > \Delta\gamma$. При выполнении обратного неравенства справедливы вычисления, проведенные в начале этого параграфа и в соответствии с (46.18), (46.14):

$$\Delta(\theta) \approx (\gamma_{el}\Delta/\gamma). \tag{46.37}$$

Здесь, как и всюду в этом пункте, γ_{el} определяется выражением (46.28) и отличается от γ_{el} в (46.16), определенной по (46.13), множителем порядка Δ.

Большая интенсивность рассеяния $\gamma_{el}\Delta^2 \gg \gamma$. В этом случае уравнения для перенормировки затухания и накачки (46.30) имеют решение, в котором $\Gamma(\theta) \gg \Pi(\theta)$. Отсюда

$$\Gamma(\theta) = \gamma_{el} + \gamma + |\Pi(\theta)|^2/2\gamma_{el}, \quad \nu(\theta) = \Gamma(\theta) - |\Pi(\theta)|^2/2\Gamma(\theta),$$

$$[4/\sin^2\theta + \Delta(\theta)]\Pi(\theta) = 2P(\theta)/\Delta^2, \qquad \nu(\theta) = \gamma + \gamma_{el}. \tag{46.38}$$

Из последнего уравнения следует, что $\Pi \approx P/\Delta^2$. В частности, при $P(\theta) = P\sin^2\theta$ $\Pi(\theta) = 2P(\theta)/3\Delta^2$ и уравнение (46.38) принимает вид

$$(\gamma - 2|P|^2\sin^4\theta/3\Delta^2\gamma_{el})N(\theta) = ½\,\gamma_{el}\Delta^2\Delta(\theta)N(\theta). \tag{46.39}$$

Левая часть этого уравнения порядка γN, и поэтому с точностью до членов порядка $(\gamma/\gamma_{el}\Delta^2)$ $\Delta(\theta)N(\theta) = 0$ и распределение $N(\theta)$ является изотропным: $N(\theta) = N/4\pi$. Этот вывод, разумеется, не зависит от конкретного вида зависимости $P(\theta)$. Интегрируя (46.39) по телесному углу, получим

$$(45/16)\ \gamma\gamma_{el}\Delta^2 = |P|^2. \tag{46.40}$$

Отсюда и из (46.38), (46.36) и (46.3) можно найти угловую зависимость аномального коррелятора

$$\Sigma(\theta) = (N/4\pi)(5\gamma/4\gamma_{el}\Delta^2)^{1/2}\sin^2\theta. \tag{46.41}$$

Конкретный вид зависимости $\Sigma(\theta)$ возник из решения уравнения (46.38), в котором $P(\theta) \sim \sin^2\theta$, вывод же о степени разрешения фазовых корреляций является общим:

$$\Sigma(\theta)/N \approx (\gamma/\gamma_{el}\Delta^2)^{1/2} < 1. \tag{46.42}$$

§ 47. Порог параметрического возбуждения в неоднородной среде

На качественном уровне мы уже обсуждали во введении к настоящей главе вопрос о влиянии двухмагнонного рассеяния на порог параметрического возбуждения. Здесь же мы получим количественные результаты для наиболее интересных предельных случаев.

47.1. Большая интенсивность рассеяния $\gamma_{el} \gg \gamma$. Для определения порога необходимо прежде всего решить уравнение (46.5), связывающее перенормированную накачку с неперенормированной. Для определенности будем считать справедливой модель (46.10): $P(\Omega) = P(\theta)\exp(2i\varphi), \ldots$

Рассеяние на точечных дефектах в случае вариации обменной константы. В этом случае уравнение (46.5) после интегрирования по φ приобретает вид

$$\Pi(x) = P(x) + ¾(1 - x^2)\int_0^1 (1 - x'^2)\Pi(x')\,dx' =$$

$$= 5P(x)/3 = 5hV(1 - x^2)/3. \tag{47.1}$$

Далее, для определения порога необходимо вычислить $\Gamma(\Omega)$. В соответствии с (46.4), (44.5), (47.1) и (46.7) имеем

$$\Gamma(\Omega) = 4\pi^2 g^2 k^2/3v \equiv \gamma_{el},$$
$$h_{th} V = (g\gamma\gamma_{el}/8)^{1/2}. \tag{47.2}$$

Рассеяние на точечных дефектах при вариации поля анизотропии и рассеяние в поликристаллах при $kl < 1$, когда $g(k, k') = g$ (см. формулы (44.7) и (44.12)). В этих случаях соотношения (46.4)–(46.6) дают

$$\Gamma(x) = 4\pi^2 g^2 k^2/v \equiv \gamma_{el}, \quad \Pi(x) = P(x) = hV(1 - x^2).$$

Подставляя эти формулы в (46.7), получаем результат, близкий к (47.2):

$$h_{th} V = (15\,\gamma\gamma_{el}/8)^{1/2}. \tag{47.3}$$

47.2. Случай большой интенсивности рассеяния на плавных неоднородностях $\gamma_{el}\Delta^2 \gg \gamma$. Выражение для порога параметрического возбуждения следует из формулы (46.40), в которой следует положить $P = h_{th} V$:

$$(h_{th} V)^2 = 45\gamma\gamma_{el}\Delta^2/16. \tag{47.4}$$

Здесь γ_{el} и Δ^2 определяются из соотношений (46.28), в которых $g(\Omega, \Omega')$ следует взять из (44.12). При этом для γ_{el} в (47.4) получается выражение (44.21), а

$$\Delta^2 \approx 7{,}6(kl)^{-2}. \tag{47.5}$$

Как видно из сравнения формул (47.4) и (47.2), в выражение для порога при малоугловом рассеянии входит дополнительный малый параметр $\Delta \approx (kl)^{-1}$, имеющий смысл характерного угла рассеяния. Эти формулы позволяют определить зависимость порогового поля h_{th} в поликристаллах от размера кристаллитов l и длины волны $2\pi/k$. При $kl < 1$ из (47.2) и (44.20) следует

$$h_{th} V \approx \omega_a(\gamma_k/\omega_{ex})^{1/2}(l/a)(kl)^{1/2}. \tag{47.6}$$

При $kl > 1$ из (47.4), (47.5) и (44.21) получим

$$h_{th} V \approx \omega_a(\gamma_k/\omega_{ex})^{1/2}(l/a)(kl)^{-3/2}. \tag{47.7}$$

Как и следовало ожидать, пороговое поле h_{th} максимально, когда длина волны порядка размеров кристаллитов.

47.3. Малая интенсивность рассеяния $\gamma_{el} \ll \gamma$. С точки зрения эксперимента наибольший интерес здесь представляет аксиально-симметричный случай, когда $V(\Omega)$ определяется формулой (46.10), а $g(k, k') = \text{const}$. Как видно из (46.17), в этом случае не происходит перенормировки накачки: $\Pi(x) = hV(x)$ и пороговую амплитуду h_{th} можно определить из соотношения

$$(h_{th} V_0)^2 = \Gamma_0^2 - \nu_0^2. \tag{47.8}$$

Величину $\nu_0 = \nu(x)$ при $x = 0$ мы вычислили раньше (см. формулу (46.15)), перенормировка затухания задается формулой (46.17), в которой $\nu(x)$ следует взять из (46.12):

$$\Gamma = \gamma + \gamma\gamma_{el}\int_0^1 [\nu_0^2 + \gamma^2(2x^2 - x^4)]^{-1/2}dx,$$
$$\nu_0 = \gamma\gamma_{el}/\sqrt{2}. \tag{47.9}$$

Приближенное вычисление этого интеграла при $\gamma_{el} \ll \gamma$ дает

$$\Gamma = \gamma + (\gamma_{el}/2\sqrt{2}) \ln(1{,}14\gamma/\gamma_{el}). \tag{47.10}$$

Подставляя выражения для Γ и ν_0 в (47.8), получаем

$$h_{th} V = \gamma + (\gamma_{el}/2\sqrt{2}) \ln(0{,}42\gamma/\gamma_{el}). \tag{47.11}$$

На первый взгляд кажется удивительным, что увеличение порогового поля h_{th} оказалось даже большим, чем это следует из простой (и неверной) формулы (43.3), в которой учитывается только перенормировка затухания $\gamma \to \gamma + \gamma_{el}$ и не учитывается нарушение фазовых корреляций, приводящее к слагаемому ν_0 в (47.8). Дело в том, что накачка почти полностью компенсирует затухание параметрических волн, в результате усиливается процесс двухмагнонного рассеяния и полное затухание параметрических волн Γ, как это видно из (47.10), оказывается больше, чем $\gamma + \gamma_{el}$.

47.4 Малая интенсивность рассеяния на плавных неоднородностях: $\gamma\Delta^3 < \gamma_{el}\Delta^2 < \gamma$. Пороговая амплитуда h_{th} в этом случае определяется из формул (46.3) и $P(x_0) = \gamma$. По порядку величины

$$h_{th} V_0 - \gamma = \gamma(\gamma_{el}\Delta^2/\gamma)^{3/2} \ln(\gamma_{el}/\Delta\gamma). \tag{47.12}$$

На верхнем пределе применимости при $\gamma_{el}\Delta^2 \approx \gamma$ пороговое поле совпадает с тем, которое дает формула (47.4), полученная при $\gamma_{el}\Delta^2 > \gamma$. На нижнем пределе при $\gamma_{el} \approx \gamma$ $h_{th} V_0 \approx \gamma + \gamma\Delta^2$. При $\gamma_{el} < \gamma\Delta$ ширина пакета (46.37) меньше чем Δ и диффузионное приближение неприменимо. Вычисления, аналогичные тем, которые мы провели в п. 47.3, и учитывающие перенормировку накачки, дают

$$h_{th} V - \gamma \approx \gamma_{el}\Delta \ln(\gamma\Delta/\gamma_{el}). \tag{47.13}$$

§ 48. Запороговое поведение параметрически возбужденных волн

При изучении поведения параметрически возбужденных волн наибольший интерес представляет случай большой интенсивности рассеяния, когда можно ожидать наиболее сильного влияния двухмагнонного рассеяния. Вычисления в этом случае упрощаются из-за того, что распределение $N(\Omega)$ является изотропным: $N(\Omega) = N/4\pi$, и для $P(x)$ из (45.14) и (46.3) следует простая формула

$$P(x) = hV(x) - i(N/\gamma_{el}) \int_0^1 S(x, x')\Pi(x')\, dx',$$
$$x = \cos\theta. \tag{48.1}$$

Для определения зависимости $N(h)$ необходимо совместно решить уравнения (48.1) и (46.5), выразив $P(x)$ и $\Pi(x)$ через hV и N, и подставить результат в уравнение баланса (46.2). Для кубических ФМ хорошей модельной зависимостью $S(x, x')$ является формула

$$S(x, x') = S(1 - x^2)(1 - x'^2). \tag{48.2}$$

Учитывая, что $V(x) \sim 1 - x^2$, получаем решение уравнения (48.1):

$$P(x) = P(1 - x^2),$$
$$P = hV - (iSN/\gamma_{el}) \int_0^1 (1 - x'^2)\Pi(x')\, dx' \tag{48.3}$$

Если $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \text{const}$ и $P(x) = \Pi(x)$, то

$$\Pi(x) = P(x) = P(1 - x^2),$$
$$P = hV\,[1 + i8SN/15\,\gamma_{\text{el}}]^{-1}. \tag{48.4}$$

Подставляя это выражение в (46.2), получаем

$$SN = (15\gamma_{\text{el}}/8)\,[(h/h_{\text{th}})^2 - 1]^{1/2}, \tag{48.5}$$

где h_{th} определяется выражением (47.3).

Рассмотрим еще один случай – рассеяние на точечных дефектах при вариации обменной константы, когда $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ пропорционально $\cos\widehat{(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')}$. Тогда

$$P(x) = 3\Pi(x)/5 = P(1 - x^2),$$
$$P = hV\,[1 + i8SN/9\gamma_{\text{el}}]^{-1}. \tag{48.6}$$

Отсюда и из уравнения баланса (46.2) следует выражение, близкое к (48.5):

$$SN = (9\gamma_{\text{el}}/8)\,[(h/h_{\text{th}})^2 - 1]^{1/2}. \tag{48.7}$$

При интенсивном малоугловом рассеянии ($\gamma_{\text{el}}\Delta^2 > \gamma$), когда связь между Π и P задается выражением (46.38), из (48.3) и (46.40) можно получить

$$P(1 + i16SN/45\,\gamma_{\text{el}}\Delta^2) = hV,$$
$$SN = (45\,\gamma_{\text{el}}\Delta^2/16)[(h/h_{\text{th}})^2 - 1]^{1/2}. \tag{48.8}$$

Во всех рассмотренных случаях уровень возбуждения ПВ при сильном рассеянии на неоднородностях оказывает (при той же надкритичности) в $\gamma_{\text{el}}\Delta^2/\gamma$ раз больше (Δ – характерный угол рассеяния), чем в однородной среде. Причиной этого является частичное разрушение фазовых корреляций, приводящее к ослаблению фазового механизма ограничения. Конкретный же вид зависимости N от надкритичности в формулах (48.5), (48.7) и (48.8) не является универсальным, он связан с конкретным видом зависимости $S(x, x')$ в (48.2), по случайным обстоятельствам удовлетворяющей соотношению $S(x, x') \sim V(x)V(x')$. В других случаях (см., например, работу В.С. Львова, М.И. Широкова [155]) зависимость N от h является более сложной, она повторяет эти зависимости только качественно.

Для вычисления обобщенной восприимчивости воспользуемся формулами (21.1), (21.2), в которых выразим $\Sigma(\Omega)$ через $N(\Omega)$ с помощью (46.3):

$$\chi = -(2iN/h\Gamma)\int_0^1 V(x)\Pi^*(x)\,dx. \tag{48.9}$$

Во всех рассмотренных нами случаях $\Pi(x) \sim (1 - x^2)$ и $V(x) \sim (1 - x^2)$. Используя соответствущие выражения для N и Π, получим для трех рассмотренных случаев одно и то же выражение для χ:

$$\chi = -i16NV\Pi^*/15\,h\Gamma = (2V^2/S)(1 - p^{-1} + ip^{-1/2}(1 - p^{-1})^{1/2}),$$
$$p = (h/h_{\text{th}})^2. \tag{48.10}$$

Этот результат совпадает с известным выражением (21.6) для χ, получен-

ным в S-теории для однородной среды. Это означает, что рассеяние волн на неоднородностях не изменяет существенно зависимость нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' от величины h/h_{th}. Само же значение порогового поля в неоднородной среде, разумеется, больше чем в однородной. Не следует придавать большого значения буквальному совпадению формул для χ. В более сложных ситуациях зависимость $\chi(p)$ похожа на (21.6) только качественно.

§ 49. Коллективные колебания в среде со случайными неоднородностями

Здесь мы изучим влияние неоднородностей на коллективные колебания системы ПВ. Ранее, в гл. 5, мы рассмотрели спектр коллективных колебаний $\Omega(\kappa)$ одночастотного состояния в приближении S-теории. Для кубических ФМ при $\kappa = 0$

$$\Omega_m = -i\gamma \pm [4S_m(2T_m + S_m)N^2 - \gamma^2]^{1/2}. \tag{49.1}$$

Можно отметить две особенности этого спектра. Во-первых, при некотором соотношении между коэффициентами гамильтониана взаимодействия S_m и T_m (именно, при $S_m(2T_m + S_m) > 0$) КК моды с номером m устойчивы, причем их декремент затухания равен декременту затухания ПСВ γ, определяемому по порогу параметрического возбуждения: $h_{\text{th}} V = \gamma$. Во-вторых, при $S_m(2T_m + S_m) < 0$ возникает неустойчивость КК (автоколебания ПВ) при $h > h_{\text{th}}$, т.е. сразу в точке порога параметрического возбуждения. Как покажут наши результаты по вычислению спектра Ω_m в неоднородной среде, рассеяние ПСВ на неоднородностях существенно изменяет поведение КК, прежде всего увеличивая их устойчивость. Так, даже слабое рассеяние на неоднородностях (т.е. при $\gamma_{\text{el}} \ll \gamma$) подавляет автоколебания в области надкритичностей $h < h_{\text{cr}}$,

$$\begin{aligned} &h_{\text{cr}}/h_{\text{th}} - 1 = \tfrac{1}{4}(\gamma_{\text{el}}/2\gamma)^{1/2}\,|S_0/(2T_0 + S_0)|, \quad m = 0, \\ &h_{\text{cr}}/h_{\text{th}} - 1 \lesssim \gamma_{\text{el}}/\gamma, \quad m \neq 0. \end{aligned} \tag{49.2}$$

При сильном рассеянии ($\gamma_{\text{el}} \gg \gamma$) мы покажем, что автоколебания вообще не могут возникнуть, а затухание КК оказывается порядка γ_{el}, что превышает величину $\overline{\gamma\gamma_{\text{el}}}$, определяющую порог параметрического возбуждения волн.

49.1. Основные уравнения. Диаграммная техника, приспособленная для вычисления спектра КК, была развита в гл. 7. В общие уравнения (38.4) необходимо только подставить конкретные выражения для $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Pi}$, $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ – отклонений массовых операторов от их значений в основном состоянии. Как и всюду, в этой главе мы будем учитывать самосогласованные диаграммы, линейные по вершине $T(k_1, k_2, k_3, k_4)$ взаимодействия волн, и гауссовы диаграммы без пересечения линий (линейные по η_2) для описания рассеяния на дефектах. А именно, учтем подчеркнутые диаграммы в (45.4). Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(q, q') &= 2\int T(k, k_1, k', k_2)\,\tilde{n}^*(q_1, q_2)\,\delta(q + q_1 - q' - q_2)\,dq_1\,dq_2 + \\ &+ \eta_2 \int g(k', k_1)\,g(k_2, k)\,\tilde{G}(k_1, \omega, k_2, \omega')\,\delta(k + k_1 - k' - k_2)\,dk_1\,dk_2, \\ \tilde{\Pi}(q, q') &= 2\int T(k, k_1, k', k_2)\,\tilde{\sigma}(q_1, q_2)\,\delta(q + q_1 - q' - q_2)\,dq_1\,dq_2 + \end{aligned}$$

$$+\eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1) g^*(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}') \tilde{L}(\boldsymbol{k}_1, \omega, \boldsymbol{k}_2, \omega') \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2) d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2,$$

$$\tilde{\Phi}(q, q') =$$

$$= \eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1) g^*(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}_2) \tilde{n}(\boldsymbol{k}_1, \omega, \boldsymbol{k}_2, \omega') \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}_2) d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2,$$

$$\tilde{\Psi}(q, q') =$$

$$= \eta_2 \int g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1) g^*(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}') \tilde{\sigma}(\boldsymbol{k}_1, \omega, \boldsymbol{k}_2, \omega') \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2) d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2. \tag{49.3}$$

Кроме того, мы ограничимся изучением колебаний не очень малой частоты, для которых многочастотный характер параметрической турбулентности несуществен. Это ограничение позволяет считать распределение ПВ по частотам сингулярным и представить в соответствии с (38.3) величины $\tilde{n}(q, q')$, $\tilde{\sigma}(q, q')$ в виде двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \tilde{n}(q, q') &= \tilde{n}(\boldsymbol{k}, q') \delta(\omega - \omega_p/2) + \tilde{n}(q, \boldsymbol{k}') \delta(\omega' - \omega_p/2), \\ \tilde{\sigma}(q, q') &= \tilde{\sigma}(\boldsymbol{k}, q') \delta(\omega - \omega_p/2) + \tilde{\sigma}(q, \boldsymbol{k}') \delta(\omega' - \omega_p/2), \end{aligned} \tag{49.4}$$

причем уравнения (38.4) для слагаемых первого и второго типов отщепляются друг от друга.

При изучении качественной картины явлений можно ограничиться исследованием аксиально-симметричного случая и сделать обычные модельные предположения:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\boldsymbol{k}} = \gamma, \ g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = g, \ V_{\boldsymbol{k}} = V f(\cos\theta) \exp(2i\varphi), \\ &S(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = S(\varphi - \varphi') f(\cos\theta) f(\cos\theta'), \\ &T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = T(\varphi - \varphi') f(\cos\theta) f(\cos\theta'), \\ &\int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx = 1. \end{aligned} \tag{49.5}$$

Это позволяет редуцировать исходные интегральные уравнения до системы шести алгебраических уравнений на интегральные величины

$$\begin{aligned} X_m &= \frac{1}{2N} \int k^2\, dk\, d\cos\theta\, d\varphi \exp(-im\varphi)(\tilde{n}_{\boldsymbol{k}} + \tilde{n}_{\boldsymbol{k}}^+) \equiv \\ &\equiv \langle\langle (\tilde{n}_{\boldsymbol{k}} + \tilde{n}_{\boldsymbol{k}}^+)/2N \rangle\rangle_m, \\ Y_m &= \langle\langle (\tilde{n}_{\boldsymbol{k}} - \tilde{n}_{\boldsymbol{k}}^+)/2iN \rangle\rangle_m, \\ U_m &= \langle\langle (\Pi_{\boldsymbol{k}}^* \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}} - \Pi_{\boldsymbol{k}} \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^+)/2i\Gamma N \rangle\rangle_m, \\ Z_m &= \langle\langle (\Pi_{\boldsymbol{k}}^* \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}} + \Pi_{\boldsymbol{k}} \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^+)/2\Gamma N \rangle\rangle_m, \\ F_m &= \langle\langle (\tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}} - \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^+)\, v/2\pi i k^2 \rangle\rangle_m, \\ Q_m &= \langle\langle (\tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}} + \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^+)\, v/2\pi k^2 \rangle\rangle_m, \end{aligned} \tag{49.6}$$

для каждого номера аксиальной гармоники $m = 0$, $m = \pm 1$ и т.д.

$$\begin{aligned} X_m &= \mu^{-1} (\nu + \mu)^{-2} \{[(\Gamma - i\Omega)(2\nu + \mu - \nu^3/\Gamma^2) + \\ &+ |\Pi|^2 (2\nu + \mu)/\Gamma] \gamma_{el} \Delta(m) F_m + \\ &+ [(2\Gamma - i\Omega)(2\nu + \mu) + (\mu - \nu)\nu^2/\Gamma]\, 2S_m N Z_m\} + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ [\Gamma(\Gamma - i\Omega) + \nu\mu + |\Pi|^2]\, \nu^2 \Delta(m)\, X_m/\mu(\nu+\mu)\Gamma^2,\\
&Y_m = \mu^{-1}(\nu+\mu)^{-2}\{[(\Gamma - i\Omega)(2\nu + \mu - \nu^3/\Gamma^2) -\\
&- |\Pi|^2 (2\nu+\mu)/\Gamma]\,[\gamma_{el}\Delta(m)\, Q_m + 4T_m N X_m] -\\
&- [\nu^2(\nu+\mu)/\Gamma - i\Omega(2\nu+\mu)]\, 2S_m N U_m\} +\\
&+ [\Gamma(\Gamma - i\Omega) + \nu\mu - |\Pi|^2]\, \nu^2 \Delta(m)\, Y_m/\mu(\nu+\mu)\Gamma^2,\\
&U_m = (\Gamma\mu)^{-1}(\nu+\mu)^{-2} \times\\
&\times \{ -|\Pi|^2 [i\Omega(2\nu+\mu)/\Gamma + \nu^2(\mu-\nu)/\Gamma]\, \gamma_{el}\Delta(m)\, F_m -\\
&- [(\Gamma - i\Omega)(2\nu+\mu-\nu^3/\Gamma^2) + |\Pi|^2(2\nu+\mu)/\Gamma]\, 2S_m N\Gamma Z_m -\\
&- |\Pi|^2 (2\Gamma - i\Omega)\, \nu^2\Delta(m)\, X_m/\mu(\nu+\mu)\Gamma^3,\\
&Z_m = (\Gamma\mu)^{-1}(\nu+\mu)^{-2}\ \{|\Pi|^2 [i(2\nu+\mu)\Omega/\Gamma +\\
&+ (\mu-\nu)\nu^2/\Gamma]\,[\gamma_{el}\Delta(m)\, Q_m + 4T_m N X_m] +\\
&+ [(\Gamma - i\Omega)(2\nu+\mu-\nu^3/\Gamma^2) - |\Pi|^2(2\nu+\mu)/\Gamma]\, 2S_m N\Gamma U_m\} +\\
&+ i\Omega\, |\Pi|^2 \nu^2 \Delta(m)\, Y_m/\Gamma^3\mu(\nu+\mu),\\
&F_m = -[\nu\mu(\nu+\mu)]^{-1}\ \{[\Gamma(\Gamma - i\Omega) - \nu\mu + |\Pi|^2]\, \gamma_{el}\Delta(m)\, F_m +\\
&+ (2\Gamma - i\Omega)\, 2\Gamma S_m N Z_m\},\\
&Q_m = -[\nu\mu(\nu+\mu)]^{-1}\{[\Gamma(\Gamma - i\Omega) - \nu\mu - |\Pi|^2]\, \gamma_{el}\Delta(m)\, Q_m +\\
&+ 4T_m N X_m + i\Omega\, 2S_m N\Gamma U_m\},
\end{aligned}
\tag{49.7}
$$

где $\Delta(0) = 1$, $\Delta(m) = 0$ при $m \neq 0$, величина ν определяется рассеянием на неоднородностях и по порядку величины

$$\nu^2 = \Gamma^2 - |\Pi|^2 \approx \gamma_{el}(\gamma_{el} + 2\gamma), \quad \mu^2 = \nu^2 - 2i\Gamma\Omega - \Omega^2.$$

Система уравнений (49.7) имеет различный вид для изотропных ($m = 0$) и анизотропных ($m \neq 0$) типов КК. Рассеяние ПВ на неоднородностях приводит к изотропизации функции распределения n_k, и поэтому оно оказывает наибольшее влияние на анизотропные моды, внося в них дополнительное затухание.

49.2. Высокочастотные коллективные колебания при малой интенсивности рассеяния ($\gamma_{el} \ll \gamma$). В этом случае высокочастотные ветви коллективных колебаний изменяются мало, и $\Omega_m^{\pm}$ будет определяться выражением (49.1) с точностью до γ_{el}. При малых надкритичностях $\Omega_m^{\pm}$ в соответствии с (49.1) равно

$$\Omega_m^{+} = -2iS_m(2T_m + S_m)N^2/\gamma, \quad \Omega_m^{-} = -2i\gamma. \tag{49.8}$$

Влияние неоднородностей на анизотропные моды становится существенным при $(h - h_{th})\,\gamma \approx \gamma_{el} h_{th}$, когда Ω_m^{+} сравнивается с γ_{el}. При меньшей надкритичности из системы (49.7) вместо (49.8) можно получить $\Omega_m^{+} = -i\gamma_{el}$, $\Omega_m^{-} = -2i\gamma_{el}$. При промежуточной надкритичности можно предложить простую интерполяционную формулу ($m \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
&\Omega_m^{\pm} = -i\gamma \pm (-\gamma^2 + \nu^2 + \Delta_m^2)^{1/2}, \quad \nu^2 = 2\gamma\gamma_{el},\\
&\Delta_m^2 = 4S_m(2T_m + S_m)N^2.
\end{aligned}
\tag{49.9}
$$

Видно, что при $S_m(2T_m + S_m) < 0$ возникает неустойчивость КК, причем неоднородности подавляют эту неустойчивость в области (49.2). В высоко-

частотных движениях ($\Omega_m \gg \gamma_{el}$) основное участие принимают корреляторы $\tilde{n}_k$, $\tilde{\sigma}_k$, причем собственные векторы этих мод с точностью до $\gamma_{el}/\gamma \ll 1$ совпадают с вычисленными по S-теории. В области низких частот (т.е. при $\Omega_m \approx \gamma_{el}$) в колебаниях принимают участие также и функции Грина $\tilde{G}$, $\tilde{L}$. В частности, их демпфирующее влияние приводит к упомянутому выше подавлению неустойчивости.

Для изотропной моды ($m = 0$) из уравнений (49.7) при $\gamma_{el} \ll \gamma$ можно получить выражение, обобщающее формулу (49.1):

$$\Omega_0 = -i\gamma \pm (-\gamma^2 + \nu\gamma + \Delta_0^2)^{1/2}. \tag{49.10}$$

Здесь ν^2 и Δ_0^2 определяются по (49.9). Из (4.10) видно, что при $S_0(2T_0 + S_0) < 0$ возникает неустойчивость коллективных колебаний с порогом (49.2). При сильном рассеянии на неоднородностях ($\gamma_{el} \gg \gamma$) картина КК заметно перестраивается. Изучая высокочастотные моды ($\Omega \gtrsim \gamma_{el}$), можно воспользоваться неравенствами $\mu^2 \gg \nu^2 \gg |\Pi|^2$ и упростить уравнения (49.7) до вида

$$(\nu + \mu)U_m + 2S_m NZ_m = 0, \quad (\nu + \mu)Z_m - 2S_m NU_m = 0. \tag{49.11}$$

Отсюда для частоты $\Omega_m^{\pm}$ получаем

$$\Omega_m^{\pm} = -2i\gamma_{el} \pm 2S_m N. \tag{49.12}$$

Как видно из (49.11), в колебаниях с такими частотами участвуют только аномальные корреляторы $\tilde{\sigma}_k$, $\tilde{\sigma}_k^+$; величины n_k не колеблются.

49.3. Низкочастотные коллективные колебания. Рассмотрим типы колебаний, частоты которых в приближении S-теории равны нулю. Здесь мы покажем, что учет рассеяния ПВ на неоднородностях приводит к конечности частоты колебаний этих мод. Для низкочастотных мод характерна большая амплитуда колебаний величины $\tilde{n}_m + \tilde{n}_m^+$ при относительно малой амплитуде $\Pi^*\tilde{\sigma}_m + \Pi\tilde{\sigma}_m^+$. В приближении (49.5) условие $\Pi^*\tilde{\sigma}_m + \Pi\tilde{\sigma}_m^+$ дает при $m \neq 0$ в различных предельных случаях следующие дисперсионные уравнения:

$$\mu(\tilde{n}_m + \tilde{n}_m^+) = 0 \tag{49.13}$$

при $p - 1 < \gamma_{el}/\gamma$, $\gamma_{el} \ll \gamma$,

$$\mu^2 + 2\nu\mu + \nu^2 4S_m/(2T_m + S_m) - 3\nu^2 = 0 \tag{49.14}$$

при $p - 1 > \gamma_{el}/\gamma$, $\gamma_{el} \ll \gamma$,

$$\mu(\tilde{n}_m + \tilde{n}_m^+) = 0 \tag{49.15}$$

при $\gamma_{el} \gg \gamma$, $p = (h/h_{th})^2$. Соответствующие им частоты КК приведены ниже. Для изотропных колебаний ($m = 0$) при слабом рассеянии ($\gamma_{el} \ll \gamma$) можно получить

$$\Omega_0 = -8iV(p^{1/2} - 1), \quad (S_0N)^2 < \nu\gamma, \tag{49.16}$$

$$\Omega_0 = -4i\gamma_{el}(K_0^{1/2} - K_0), \quad (S_0N)^2 > \gamma\nu. \tag{49.17}$$

Здесь ν определяется выражением (49.9). Для изотропных КК при сильном рассеянии

$$K_m = 2T_m/(2T_m + S_m). \tag{49.18}$$

Для анизотропных КК при слабом рассеянии

$$\Omega_m = -i\gamma_{el} \text{ при } S_0 N < \nu$$

и

$$\Omega_m = -4i\gamma_{el}(K_m^{1/2} - K_m) \text{ при } S_0 N > \nu.$$

Здесь K_m задается по (49.17). В области сильного рассеяния $\Omega_m = -i\gamma_{el}$.

Отметим, что для того, чтобы эти КК были неустойчивы, необходимо выполнение двух неравенств:

$$S_m(2T_m + S_m) < 0,$$

$$h/h_{th} - 1 > \gamma_{el}/\gamma, \tag{49.19}$$

что совпадает с условием неустойчивости высокочастотной моды (49.2). Таким образом, за время γ_{el}^{-1} происходит изотропизация распределения n_k (если, конечно, выполнены условия устойчивости (49.19)).

При $m = 0$, во-первых, выключается механизм изотропизации распределения n_k и, во-вторых, в коллективных колебаниях, помимо $\tilde{n}_0 + \tilde{n}_0^+$, участвуют функции Грина $\tilde{G}_0$. Вычисления с учетом этих обстоятельств приводят к частотам изотропных колебаний, указанным в формулах (49.16), (49.17). Область неустойчивости этой моды

$$S_0(2T_0 + S_0) < 0,$$

$$h/h_{th} - 1 > (\gamma_{el}/\gamma)^{1/2} \tag{49.20}$$

снова совпадает с областью неустойчивости соответствующей высокочастотной моды. Совпадение первого из неравенств (49.20) как условия неустойчивости низкочастотных колебаний в случайно-неоднородных ФМ с соответствующим условием для однородных ФМ обусловлено одинаковым характером колебаний в соответствующих областях параметров.

Задачи

Задача 9.1. Получить и проанализировать уравнение для инкремента параметрической неустойчивости в среде со случайными неоднородностями.

Указание. Для описания нестационарного процесса нарастания параметрических волн использовать систему уравнений Дайсона – Уайльда (38.2) для величины (38.1) и убедиться, что в этой задаче уравнения для $n(q, q')$, $\sigma(q, q')$, $G(q, q')$ и $L(q, q')$ расцепляются.

Ответ. В простом случае, когда $g_{kk'} = \text{const}$ и $\Psi_{el} = 0$, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\gamma_{el}\int_0^1 \frac{\Gamma_x^2 - i\Gamma_x\Omega - \Omega^2/4}{\nu_x^2 - i\Gamma_x\Omega - \Omega^2/4}\,dx = 1.$$

При $\gamma_{el} \gg \gamma$ отсюда следует

$$\operatorname{Im}\Omega = -\gamma(1 + 2p) + [\gamma^2(1 + 2p)^2 + 4\gamma\gamma_{el}(p - 1)]^{1/2}.$$

Здесь $p = h^2/h_{th}^2$, $n(t) \propto \exp(-i\Omega t)$.

ГЛАВА 10

ST^2-ТЕОРИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН

В настоящей главе излагается регулярная теория параметрического возбуждения волн, учитывающая не только самосогласованное взаимодействие ПСВ, линейное по их гамильтониану взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}}$, но и рассеяние СВ друг на друге, впервые возникающее в теории возмущений во втором порядке по $\mathcal{H}_{\text{int}}$. В некотором смысле вторым порядком теории возмущений можно и ограничиться – не в уравнениях для n_k и σ_k, а в выражениях для массовых операторов Σ, Π, Φ и Ψ, суммированных по Дайсону. Таким образом, по сравнению с операторами в S-теории массовые операторы приобретают добавки, пропорциональные квадрату матричных элементов $T(k, k_1, k_2, k_3)$ гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{int}}$. Поэтому теорию, учитывающую как самосогласованное "S-взаимодействие" пар ПСВ, так и "T^2-рассеяние" их друг на друге, естественно назвать ST^2-теорией.

Если S-теория позволила определить число ПСВ n_k и фазовые соотношения через σ_k, то ST^2-теория позволит нам вычислить величины $n_{k\omega}$ и $\sigma_{k\omega}$, определяющие ширину пакета ПСВ по частотам $\Delta\omega$, ширину распределения ПСВ в k-пространстве вблизи резонансной поверхности $\Delta\omega_k$, угловые размеры пакета ПСВ, а также предел применимости S-теории.

Основой для построения такой теории служит изложенная в гл. 7 диаграммная техника Уайльда, учитывающая аномальные корреляции амплитуд ПСВ. Уравнения ST^2-теории в терминах диаграммной техники возникают при пренебрежении перенормировкой вершин. Впервые эти уравнения были получены автором в 1975 г. [157]. Тогда же были оценены предел применимости S-теории и ширина пакета ПСВ в k-пространстве $\Delta\omega_k$. Спустя несколько лет, в 1977 – 1979 гг., Г.А. Мелков и И.В. Круценко [133, 177] провели серию изящных экспериментов, в которых они измерили частотную ширину пакета $\Delta\omega$ и его угловые размеры $\Delta\theta_k$, $\Delta\varphi_k$. Успехи экспериментаторов стимулировали дальнейшее развитие ST^2-теории, и вскоре удалось определить форму пакета ПСВ не только в изотропном ферромагнетике, но и учесть такие принципиально важные факторы, как анизотропия, рассеяние на неоднородностях, тепловой шум. В результате ST^2-теория для ФМ была доведена почти до той же степени детализации, что и S-теория.

До настоящего времени эта теория была представлена в виде разрозненных публикаций и впервые излагается последовательно в этой главе. Исходные уравнения S-теории выписаны в § 36 гл. 7. В § 50 этой главы исследованы допороговый подогрев СВ, влияние теплового шума и показано, что при пренебрежении членами $\sim T^2$ уравнения ST^2-теории переходят в уравнения S-теории, § 51 посвящен изучению наиболее простого случая, когда частота упругого рассеяния на неоднородностях велика по сравнению с частотой собственных процессов релаксации. При этом распределение ПВ почти изотропно, а аномальные корреляторы и функции Грина малы по сравнению с нормальными. В результате удается относительно просто определить форму пакета ПСВ по частотам. В § 52 исследован интересный

случай изотропной однородной среды, служащий ступенью для изучения реальных задач. Здесь же сделан следующий шаг в упрощении столкновительного члена, связанный с выражением аномального коррелятора через нормальный. Определены величины $\Delta\omega$, $\Delta\omega_{\boldsymbol{k}}$, оценен вклад высших диаграмм. В § 53 развивается ST^2-теория для ФМ при параллельной накачке. Если пренебречь малой кристаллографической анизотропией, то задача обладает аксиальной симметрией и пакет ПСВ локализован вблизи экватора резонансной поверхности в $\boldsymbol{k}$-пространстве. Определен угловой размер пакета ПСВ $\Delta\theta_{\boldsymbol{k}}$, его ширина $\Delta\omega$ и $\Delta\omega_{\boldsymbol{k}}$. Обсуждена постановка эксперимента по измерению частотной ширины $\Delta\omega$, проведено сравнение этой величины с предсказаниями теории. В § 54 исследовано угловое распределение ПСВ в кубическом ФМ, в котором из-за анизотропии кристалла порог параметрической неустойчивости достигается уже не на всем экваторе, а лишь в некоторых точках экватора резонансной поверхности. Поэтому за порогом распределение ПСВ представляет собой совокупность нескольких узких пакетов. Определена форма этих пакетов и проведено сравнение с результатами эксперимента. В последнем параграфе этой главы (§ 57) рассматривается влияние рассеяния ПСВ друг на друге на их коллективные колебания. В частности, в приближении S-теории существуют безразлично устойчивые моды колебаний, которые в рамках ST^2-теории приобретают малую, но вполне конечную частоту и затухание.

§ 50. Влияние тепловых спиновых волн на распределение параметрических спиновых волн в $\boldsymbol{k}, \omega$-пространстве – теория и эксперимент

В гл. 8 мы уже рассматривали вопрос о взаимодействии параметрически возбужденных спиновых волн с тепловыми. В частности, было показано, что возбуждение ПСВ приводит к отклонению функции распределения ТСВ $n(\boldsymbol{k})$ от равновесной $n_0(\boldsymbol{k})$ (34.10) и, как результат этого, возникает зависимость затухания ПСВ от их чисел заполнения $n_p(\boldsymbol{k})$. В § 40 в рамках S-теории было изучено влияние нелинейного затухания на стационарное состояние ПСВ, т.е. на одновременные функции распределения $n(\boldsymbol{k})$ и $\sigma(\boldsymbol{k})$. При выходе за рамки S-теории при изучении взаимодействия ПСВ и ТСВ возникают новые эффекты, в частности допороговый подогрев пакета ПСВ, уширение функций распределения $n(\boldsymbol{k}, \omega)$ и $\sigma(\boldsymbol{k}, \omega)$ по ω и т.д. Описанию основных теоретических и экспериментальных результатов в этой области и посвящен настоящий параграф.

50.1. Процедура разделения волн на параметрические и тепловые. Уравнения Дайсона – Уайльда (36.2)–(36.6) описывают волны во всем $\boldsymbol{k}, \omega$-пространстве и в отсутствие накачки имеют, как показано в гл. 7, термодинамически равновесное решение (34.10) – распределение Рэлея – Джинса. Накачка изменяет числа заполнения $n(q)$ не только в области параметрического резонанса, но и во всем q-пространстве. Поэтому возникает вопрос: какие волны следует считать параметрически возбужденными, а какие по-прежнему относить к тепловым? Качественно можно ответить так: ПСВ – это те пары СВ, у которых фаза скоррелирована с фазой накачки, остальные СВ можно назвать тепловыми, если $n(\boldsymbol{k})$ для них не слишком отличаются от равновесного уровня. Формула для чис-

ла ПВ может быть записана следующим образом:

$$n_p(q) = n(q) - n_t(q),\ n_t(q) = \Phi_q\,[(\omega - \omega_q)^2 + \Gamma_q^2]^{-1}. \tag{50.1}$$

Здесь $n_t(q)$ определено по аналогии с (35.1). Отличие в том, что в (50.1) величины $\Sigma(q)$, $\Phi(q)$ должны выражаться не через термодинамически равновесные значения $n_k = n_k^0$ (34.10), а через величины реального спектра $n_t(q)$, $n_p(q), \sigma(q)$, вычисленные в присутствии накачки. При таком определении $n_t(q)$ везде является плавной функцией k, а далеко от резонансной поверхности при $|\omega_k - \omega_p/2| \gg \Gamma$ асимптотически стремится к решению кинетического уравнения, в котором учитывается влияние пакета ПСВ (см. § 39). Величины же $n_p(k) = \int n_p(q)\,d\omega$ и $\sigma(k)$ быстро спадают при удалении от резонансной поверхности. Можно показать, что $n_p, \sigma \sim (\omega_k - \omega_p/2)$.

Следует отметить, что в приведенных рассуждениях мы нигде не использовали конкретный вид взаимодействия волн, поэтому определения параметрических и тепловых волн (50.1) справедливы при любом виде взаимодействия, в частности и тогда, когда существенны трехволновые процессы, взаимодействие с фононами и т.д.

50.2. Вывод исходных уравнений. Применим теперь развитый в гл. 7 аппарат для исследования пакета ПСВ при относительно малых амплитудах накачки, когда главный вклад в МО дает рассеяние ТСВ друг на друге. Для этого необходимо в выражениях для Σ, Π, Φ и Ψ (36.6) подставить $n(q) = n_t(q) + n_p(q), \sigma(q)$ и исследовать полученные выражения. Результат, полученный в нулевом по n_p, σ приближении, нам известен – это формула (34.10). Формула

$$\omega_k^0 = \omega_k + 2\int T(k, k')\,n_t(q')\,dq'$$

при $n_t(q) = n_0(q)$ описывает зависимость частоты ПВ от температуры среды. Будем считать, что эта зависимость уже включена в определение ω_k, так что

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\int T(k, k')\,n_p(q')\,dq'. \tag{50.2}$$

Выражения (36.6) для Σ, Π, Φ и Ψ квадратичны по коэффициентам гамильтониана взаимодействия T. Это позволяет вначале ограничиться их вычислением в нулевом приближении по амплитуде ПСВ. Вычисление предела применимости этого приближения по амплитудам n_p, σ и изучение эффектов, возникающих при больших амплитудах, будет проведено ниже.

Подставив в уравнения Уайльда (36.3) функцию Грина из (36.4), положив $\Psi(q) = 0$, получим

$$\begin{aligned} &n(q) = [(\epsilon + \tilde{\epsilon}_k)^2 + \Gamma_k^2 + |P_k|^2]\Phi(q)/|\Delta_q|^2, \\ &\sigma(q) = 2P_k\Phi(q)\,(i\Gamma_k + \tilde{\epsilon}_k)/|\Delta_q|^2, \\ &\Delta_q = \Gamma_k^2 - |P_k|^2 - 2i\Gamma_k\epsilon - \epsilon^2, \\ &\epsilon = \omega - \omega_p/2,\ \ \tilde{\epsilon}_k = \tilde{\omega}_k - \omega_p/2. \end{aligned} \tag{50.3}$$

Отметим, что эти уравнения являются интегральными в четырехмерном q-пространстве. Однако, пользуясь узостью пакетов $n_p(q)$ и $\sigma(p)$ по ω и ω_k, можно редуцировать их до двумерных интегральных уравнений для интегральных по ω и $\tilde{\omega}_k$ величин $n_p(\Omega)$ и $\sigma(\Omega)$, аналогично тому, как это

делается в S-теории. Для этого определим $n_p(\Omega)$ и $\sigma(\Omega)$ по формулам

$$n_p(\Omega) = k_\Omega^2 \int n_p(k, \omega)\, d\omega\, d\kappa,$$
$$\sigma(\Omega) = k_\Omega^2 \int \sigma(k, \omega)\, d\omega d\kappa, \tag{50.4}$$

в которых k_Ω – радиус резонансной поверхности $2\tilde{\omega}_k = \omega_p$ в точке с угловой координатой Ω, κ – отклонение k от k_Ω по нормали к поверхности. Далее, пренебрегая зависимостями γ_k, P_k от κ, проинтегрируем (50.4) по ω и κ. В результате получим

$$n_p(\Omega) = \pi^2 k_\Omega^2 \Phi(\Omega)\, |P(\Omega)|^2 / \Gamma(\Omega)\, \nu(\Omega)\, \upsilon(\Omega),$$
$$\sigma(\Omega) = i\pi^2 k_\Omega^2 \Phi(\Omega) P(\Omega) / \upsilon(\Omega)\, \nu(\Omega), \tag{50.5}$$
$$\upsilon(\Omega) = \partial\omega_k / \partial k \big|_{2\tilde{\omega}_k = \omega_p}, \qquad \nu^2(\Omega) = \gamma^2(\Omega) - |P(\Omega)|^2.$$

Подчеркнем, что при выводе этих формул мы не предполагали, что ТСВ находятся в термодинамическом равновесии. Поэтому они годятся и для исследования ситуаций с сильным нелинейным затуханием. Это мы сделаем ниже, а сейчас будем считать, что ТСВ находятся в равновесии и, следовательно, основным механизмом ограничения параметрической неустойчивости СВ является фазовый механизм S-теории. Тогда в формулы (50.5) вместо $\Gamma(\Omega)$ и $\Phi(\Omega)$ можно подставить их термодинамически равновесные значения. В результате получим

$$n_p(\Omega) = \pi k_\Omega^2 n_0\, |P(\Omega)|^2 / \upsilon(\Omega)\, \nu(\Omega),$$
$$\sigma(\Omega) = i\pi k_\Omega^2 n_0 \gamma(\Omega) P(\Omega) / \upsilon(\Omega)\, \nu(\Omega). \tag{50.6}$$

Подставляя отсюда $\sigma(\Omega)$ в стандартное в S-теории выражение для самосогласованной накачки $P(\Omega)$, получаем нелинейное интегральное уравнение для $P(\Omega)$ на резонансной поверхности:

$$P(\Omega) = hV(\Omega) + i\pi n_0 \int S(\Omega, \Omega')\, k_{\Omega'}^2 \gamma(\Omega') P(\Omega') \times$$
$$\times [\gamma^2(\Omega') - |P(\Omega')|^2]^{-1/2} d\Omega' / \upsilon(\Omega'). \tag{50.7}$$

Решив это уравнение, можно из формулы (50.6) определить интегральные характеристики ПВ $n_p(\Omega)$ и $\sigma(\Omega)$ на резонансной поверхности, а с помощью формул (50.3) исследовать структуру распределений $n(q)$ и $\sigma(q)$ вблизи нее. В частности, интегрируя (50.3) только по ω, имеем

$$n_p(k) = n_0(k)\, |P(\Omega)|^2 / [\tilde{\epsilon}_k^2 + \nu^2(\Omega)],$$
$$\sigma(k) = n_0(k) P(\Omega) [\tilde{\epsilon}_k + i\gamma(\Omega)] / [\tilde{\epsilon}_k^2 + \nu^2(\Omega)]. \tag{50.8}$$

Таким образом, распределение $n_p(k)$ и $\sigma(k)$ по $|k|$ имеет вид функции Лоренца с максимумом на резонансной поверхности и полушириной $\nu(\Omega)$. Уравнения (50.8) преобразовываются к виду

$$\gamma(k) n(k) + \mathrm{Im}(P^*(k)\, \sigma(k)) = \gamma(k) n_0(k),$$
$$[\gamma(k) + i\tilde{\epsilon}_k]\, \sigma(k) + iP(k)\, n(k) = 0. \tag{50.9}$$

Эти уравнения впервые выписаны В.Е. Захаровым и В.С. Львовым в 1971 г. [98] из интуитивных соображений и подробно исследованы там же. Уравнения (50.9) отличаются от основных уравнений S-теории (18.9) только наличием неоднородного члена $\gamma(k) n_0(k)$, описывающего влияние тепловых флуктуаций на систему ПВ.

50.3. Допороговый подогрев и влияние теплового шума при фазовом механизме ограничения. Вначале мы рассмотрим сферически-симметричный случай, в котором все характеристики задачи γ, P и т.д. не зависят от угловой координаты Ω. Тогда из (50.9) и (50.7) следует, что при $p > 1$ (когда значение p выше формального порога $p = h^2/h_{\text{th}}^2 = 1$) зависимость $N(p)$ близка к соответствующему результату S-теории:

$$SN(p) = \gamma(p-1)^{1/2}[1 + \xi^2/2(p-1)^2],$$
$$\nu = \gamma[\xi^2/(p-1)]^{1/2} \ll \gamma. \tag{50.10}$$

Здесь ξ^2 – малый параметр, характеризующий влияние тепловых флуктуаций:

$$\xi = (2\pi)^2 k^3 Sn(kv)^{-1}. \tag{50.11}$$

В кубических ФМ задача обладает аксиальной симметрией, волны возбуждаются вблизи экватора резонансной поверхности $\theta_k = \pi/2$, $\omega_k = \omega_p/2$. В этом случае при $p^{-1} > \exp(-\xi^{-1}(p-1)^{1/2})$

$$SN(p) = \gamma(p-1)^{1/2}[1 + p^2\exp(-\xi^{-1}(p-1)^{1/2})],$$
$$\nu^2 = \nu_0^2 + \alpha\gamma^2(\theta - \pi/2)^2, \quad \nu_0 = \gamma\exp(-\xi^{-1}(p-1)^{1/2}), \quad \alpha \approx 1. \tag{50.12}$$

Видно, что в этом случае влияние теплового шума является экспоненциально слабым.

50.4. Переход к S-теории. В заключение этого параграфа обсудим, каким образом из уравнений ST^2-теории можно получить уравнения S-теории. Ответ на этот вопрос в значительной степени уже получен. Действительно, при выводе уравнений (50.9) мы предполагали, что $\Phi = \Phi_0$, $\Psi = 0$, т.е. пренебрегали влиянием ПСВ в диаграммах второго порядка по вершине T. Если же пренебречь и тепловым шумом ($\Phi_0 \to 0$), но учитывать влияние ПСВ в первом порядке по взаимодействию, то уравнения (50.9) превратятся в уравнения S-теории. При этом, чтобы найти стационарное решение однородных уравнений (18.9), необходимо проводить исследование полученного решения на устойчивость. В уравнениях ST^2-теории такая трудность не возникает, так как учет шума доопределяет задачу и приводит к регулярному решению.

50.5. Распределение ПСВ по частотам в S-теории с тепловым шумом. Спектральный состав ПСВ, т.е. величину

$$n_p(\Omega, \omega) = k_\Omega^2 \int n_p(k, \omega)\, dk, \tag{50.13}$$

в приближении S-теории с тепловым шумом вычислить довольно просто. В соответствии с (50.3) она определяется только структурой функций Грина (точнее – их знаменателем $\Delta(k, \omega)$) и может быть получена прямым интегрированием (50.3) по k:

$$n_p(\Omega, \omega) = \frac{\gamma^3(\Omega)\, n_0(k_p)\, k_\Omega^2}{v_\Omega\,[\tfrac{1}{2}(\nu^2 + (\nu^4 + 4\Gamma^2\epsilon^2)^{1/2}(\nu^4 + 4\Gamma^2\epsilon^2)]^{1/2}}. \tag{50.14}$$

Ширина этой функции по ω есть $\nu^2/2\gamma$, форма линии отличается от лоренцевой – имеет более широкие крылья. Величина ν, определяющая ширину

линии, зависит от доминирующего механизма ограничения и надкритичности. При фазовом механизме ν убывает с уменьшением надкритичности в соответствии с (50.5), при ограничении нелинейным затуханием вначале убывает и потом при $p > 9$ растет.

50.6. Электромагнитное излучение параметрическими СВ. Исследование излучения ПСВ интересно прежде всего тем, что позволяет определить спектральный состав ПСВ, т.е. величину $n(\omega)$ (50.14). Надо сказать, что прямое электромагнитное излучение ПСВ с $k \approx 10^4 \div 10^6\,\text{см}^{-1}$ является чрезвычайно слабым вследствие закона сохранения импульса $k_p \ll k$. Тем не менее применение современной СВЧ техники позволило провести такие исследования в недавнее время.

Частота СВ, возбуждаемых методом параллельной накачки. Из законов сохранения следует, что параметрически возбуждаются СВ на частоте, равной половине частоты накачки. Тем не менее остается важный вопрос о том, с какой точностью выполняются эти условия в эксперименте: действительно ли возбуждаются СВ только с частотой ω_k, равной точно $\omega_p/2$; спектральное распределение $n(\omega_k)$ имеет вид δ-функции или возбуждение происходит в некоторой полосе частот $\delta\omega_k$. С небольшой точностью установить то, что возбуждаемые СВ имеют частоту $\omega_k = \omega_p/2$, можно, исследуя область существования дополнительного поглощения, а также по наблюдению особенности в релаксации ПСВ в точке пересечения магнонного и фононного спектров, известных из других опытов.

Наиболее прямым и точным методом определения спектрального распределения ПСВ может служить изучение спектрального состава вызванного ими излучения $I(\omega)$. Исследования в АФМ ЛП были проведены Б.Я. Котюжанским и др. [129, 131]. Использовались монокристаллы $FeBO_3$ (образцы имели форму цилиндра диаметром 2 мм и высотой 3 мм). Ось цилиндра совпадала с главной осью кристалла. СВЧ накачка осуществлялась магнетронным генератором непрерывного действия с частотой $\omega_p = 2\pi \cdot 35{,}6$ ГГц и мощностью 10 Вт. Образец помещался так, что одна его часть выступала внутрь резонатора в пучность магнитного СВЧ поля h, а другая – в стандартный волновод 1,5-см СВЧ диапазона. Поля h и H лежали в базисной плоскости кристалла и были параллельны. При помощи СВЧ фильтров выходные сигналы с частотами ω_p и $\omega_p/2$ отделялись друг от друга. Развязка между каналами была 40 дБ. Сигнал на частоте $\omega_p/2$ принимался супергетеродинным приемником с чувствительностью 10^{-14} Вт и анализировался с помощью анализатора спектра. В результате экспериментов было установлено, что за порогом параметрического возбуждения одновременно с поглощением СВЧ мощности накачки на частоте ω_p появляется излучение из образца на частоте $\omega_p/2$. Интенсивность излучения $I(\omega)$ зависела от времени случайным образом. Осциллограмма выходного сигнала приемника имела вид всплесков с характерной длительностью $\tau \approx 10^{-6}$ с. Принципиально важным результатом эксперимента было то, что центр полосы излучения совпадал с $\omega_p/2$ с точностью до $2\pi \cdot 20$ кГц, т.е. с относительной точностью 10^{-6}.

§ 51. Распределение параметрических спиновых волн по частотам при сильном упругом рассеянии

51.1. Исходные диаграммные уравнения. Как отмечалось в предыдущей главе, упругое рассеяние не меняет числа и частоты ПСВ, а лишь нарушает их связь с накачкой, приводя к двум эффектам – сбою фазы в парах волн и к изотропизации распределения ПСВ. Если частота упругого рассеяния волн больше чем все остальные частоты релаксации, то распределение ПСВ является изотропным, а влияние параметрической накачки и рассеяние ПСВ друг на друге можно учитывать как малые возмущения. В этом приближении возникает простое уравнение для функции распределения ПСВ по частотам, которое удается решить аналитически и выделить из класса его стационарных решений единственное устойчивое. Поэтому мы начинаем изложение результатов ST^2-теории с такого, на первый взгляд усложненного случая. В массовых операторах будем учитывать вклад упругого рассеяния (члены с индексом el) (45.14), вклад взаимодействия ПСВ с тепловыми и вклад взаимодействия ПСВ между собой (члены с индексом int) (36.6):

$$\Phi = \Phi_{\rm el} + \Phi_{\rm int} + \Phi_0, \quad \Psi = \Psi_{\rm el} + \Psi_{\rm int},$$
$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_{\rm el} + \Sigma_{\rm int}, \qquad \Pi = P + \Pi_{\rm el} + \Pi_{\rm int}. \tag{51.1}$$

Если полностью пренебречь группой членов с индексом int, то получатся уравнения (37.4), (45.13), исследованные в гл. 9, посвященной параметрическому возбуждению СВ в магнетиках со случайными неоднородностями. В таком приближении учитывается только самосогласованное взаимодействие ПСВ и их рассеяние на неоднородностях (Sg^2-теория). В рамках Sg^2-теории распределение ПСВ по частотам $n_p(\omega)$ сингулярно, а аномальный коррелятор σ_k меньше нормального n_k по параметру $\gamma_k/(\gamma_k + \gamma_{\rm el})$. Поэтому при вычислении функций Грина в нулевом приближении по этому параметру можно пренебречь параметрической накачкой:

$$G_1(q) = [\omega - \omega_k - \Sigma(q)]^{-1}, \quad L_1(q) = 0. \tag{51.2}$$

В первом порядке необходимо учесть накачку:

$$G(q) = G_1(q) + G_1(q)G_1^*(\bar q)G_1(q)\,|\,\Pi(q)\,|^2,$$
$$L^*(q) = G_1^*(\bar q)\,\Pi^*(q)G_1(q), \quad \bar q = (-\boldsymbol{k}, \omega_p - \omega). \tag{51.3}$$

Уравнения для корреляторов в первом порядке нашей теории имеют вид

$$n(q) = [\,|\,G_1(q)\,|^2 + 2\,{\rm Re}\,G_1^*(q)\,|\,\Pi(q)\,|^2 G_1^*(\bar q)G_1^2(q) +$$
$$+ |\,\Pi(q)\,|^2\,|\,G_1(q)\,|^2\,|\,G_1(\bar q)\,|^2]\Phi(q) + G_1(q)\Psi(q)G_1(\bar q)\Pi^*(q)G_1^*(q) +$$
$$+ G_1(q)\Pi(q)G_1^*(\bar q)\Psi^*(\bar q)G_1(q),$$
$$\sigma(q) = \sigma_1(q)\Psi(q)G_1(\bar q) + [G_1(q)G_1(\bar q)\Pi(q)G_1^*(q) +$$
$$+ G_1(\bar q)G_1(q)G_1^*(\bar q)\Pi(q)]\Phi(q). \tag{51.4}$$

51.2. Процедура редукции уравнений. В реальных ситуациях пространственный масштаб случайных объемных неоднородностей мал по сравнению

с длиной волны, поэтому матричный элемент $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ является плавной функцией своих аргументов. Это обстоятельство позволяет провести в (51.4) обычное интегрирование по нормали к резонансной поверхности в $\boldsymbol{k}$ пространстве, пренебрегая зависимостью массовых операторов от $\boldsymbol{k}$:

$$n(\Omega, \epsilon) = \int n(k, \epsilon) k_\Omega^2 d\omega_k / v(\Omega) =$$

$$= [\pi k_\Omega^2 / v(\Omega)\Gamma(\Omega)]\{[1 + |\Pi(\Omega)|^2(\epsilon^2 + 3\Gamma^2(\Omega))/2(\epsilon^2 + \Gamma^2)^2]\Phi(\Omega, \epsilon) +$$

$$+ \operatorname{Re} \Pi^*(\Omega, \epsilon)\Psi(\Omega, \epsilon)/[-\epsilon + i\Gamma(\Omega, \epsilon)]\}, \tag{51.5}$$

$$[\epsilon^2 + \Gamma^2(\Omega, \epsilon)]\sigma(\Omega, \epsilon) + i\Pi(\Omega, \epsilon)\Gamma(\Omega, \epsilon)n(\Omega, \epsilon) = 0,$$

$$\Gamma(\Omega, \epsilon) = \gamma(\Omega) + \pi c \int |g(\Omega, \Omega')|^2 [k_\Omega^2 / v(\Omega)]\{1 + |\Pi(\Omega', \epsilon)|^2 \times$$

$$\times [\Gamma^2(\Omega', \epsilon) - \epsilon^2]/2[\Gamma^2(\Omega', \epsilon) - \epsilon^2]^2\} d\Omega' + \Gamma_{\text{int}}(\Omega, \epsilon),$$

$$\Gamma_{\text{int}}(\Omega, \epsilon) = 2\pi \int |T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3)|^2 [n(\boldsymbol{k}_1)n(\boldsymbol{k}_2)/\Gamma(\boldsymbol{k}_3, \epsilon) +$$

$$+ n(\boldsymbol{k}_1)n(\boldsymbol{k}_3)/\Gamma(\boldsymbol{k}_2, \epsilon) - n(\boldsymbol{k}_2)n(\boldsymbol{k}_3)/\Gamma(\boldsymbol{k}_1, \epsilon)] \times$$

$$\times \delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3) d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 d\boldsymbol{k}_3, \tag{51.6}$$

$$\Pi(\Omega, \epsilon) = P(\Omega) +$$

$$+ \pi c \int g(\Omega, \Omega') g(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}') k_\Omega^2 \Pi(\Omega', \epsilon) d\Omega' / v(\Omega')[\Gamma(\Omega, \epsilon) - i\epsilon], \tag{51.7}$$

$$n(\boldsymbol{k}) = \int n(\boldsymbol{k}, \epsilon) d\epsilon,$$

$$\Phi(\Omega, \epsilon) = c \int |g(\Omega, \Omega')|^2 n(\Omega', \epsilon) d\Omega' + \Phi_{\text{int}} + \Phi_0,$$

$$\Psi(\Omega, \epsilon) = c \int g(\Omega, \Omega') g(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}') \sigma(\Omega', \epsilon) d\Omega'. \tag{51.8}$$

Здесь Ω – угловые координаты, (θ, φ), $\bar{\Omega}$ – угловые координаты $(\pi - \theta, \varphi + \pi)$. Наиболее прост для анализа случай, когда $g(\Omega, \Omega') = g$. Такая ситуация возникает, например, при случайной вариации поля анизотропии или при рассеянии ПСВ на мелких кристаллитах в поликристаллах (см. § 44). При параллельной накачке в изотропных ФМ

$$\sigma(\Omega, \epsilon) = \sigma(\theta, \epsilon) \exp(-2i\varphi),$$

$$\Pi(\Omega, \epsilon) = \Pi(\theta, \epsilon) \exp(-2i\varphi).$$

Поэтому $\Psi = 0$, $\Pi(\Omega, \epsilon) = P(\Omega)$. В процессах упругого рассеяния число ПСВ не изменяется, поэтому эти процессы не вносят вклад в общий баланс волн. Для того чтобы убедиться в этом, проинтегрируем (51.5) по углам. В случае $g = \text{const}$ получим

$$\int [\Gamma(\Omega) + \Gamma_{\text{int}}(\Omega, \epsilon)] n(\Omega, \epsilon) d\Omega -$$

$$- \pi c |g|^2 \int k_{\Omega'}^2 |P(\Omega')|^2 n(\Omega, \epsilon) d\Omega d\Omega' / v(\Omega')[\Gamma^2(\Omega', \epsilon) + \epsilon^2] =$$

$$= \pi \int [k_\Omega^2 / v(\Omega)](\Phi_{\text{int}} + \Phi_0) d\Omega. \tag{51.9}$$

Как показано в предыдущей главе, распределение при $\gamma_{el} \gg \gamma$ изотропно:

$n(\Omega, \epsilon) = n(\epsilon)/4\pi$. В результате из (51.9) следует уравнение для функции распределения ПСВ по частотам $n(\epsilon)$:

$$
\begin{aligned}
& n(\epsilon)\{\langle \gamma(\Omega)+\Gamma_{\text{int}}(\Omega)\rangle - 4\pi^2 c\,|g|^2\langle k_\Omega^2\,|P(\Omega)|/v(\Omega)\Gamma^2(\Omega)\rangle + \\
& + 4\pi^2 c\,|g|^2\langle k_\Omega^2\,|P(\Omega)|^2/v(\Omega)\Gamma^4(\Omega)\rangle\epsilon^2\} = \\
& = 4\pi^2\langle k_\Omega^2(\Phi_{\text{int}}+\Phi_0)/v(\Omega)\rangle, \\
& \langle f(\Omega)\rangle = \int f(\Omega)d\Omega/4\pi.
\end{aligned}
\tag{51.10}
$$

Из (51.6) видно, что в выражении $\Gamma^2(\Omega, \epsilon) + \epsilon^2$ зависимостью Γ от ϵ можно пренебречь, кроме того, мы считаем, что ширина $n(\epsilon)$ по частотам $\Delta\omega$ мала по сравнению с Γ. Уравнение (51.10) можно переписать в более удобных обозначениях:

$$
\begin{aligned}
& (\eta^2+\epsilon^2)n(\epsilon) = \Gamma_1[4\pi\langle\gamma(\Omega)k_\Omega^2 n_0(\Omega)/v(\Omega)\rangle + \\
& + (T^2/kv)\int n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)n(\epsilon_3)\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3, \\
& \Gamma_1^{-1} = 4\pi^2 c\,|g|^2\langle k_\Omega^2\,|P(\Omega)|^2/\Gamma^4(\Omega)v(\Omega)\rangle, \\
& T^2/kv = \int |T(\Omega,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)|^2 k_\Omega^2\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)d\Omega d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3/v(\Omega), \\
& \eta^2 = \Gamma_1[\langle\gamma(\Omega)+\Gamma_{\text{int}}(\Omega)\rangle - 4\pi^2 c|g|^2\langle k_\Omega^2|P(\Omega)|^2/v(\Omega)\Gamma^2(\Omega)\rangle.
\end{aligned}
\tag{51.11}
$$

По порядку величины $\Gamma_1 \sim \gamma_{e1}^2/\gamma$. Правая часть (51.11) – это приходный член для ПСВ с частотой ϵ. Он обусловлен суммой теплового и собственного шума ПСВ. Условие $\eta = 0$ определяет порог параметрического возбуждения волн $h_{\text{th}}V \sim \gamma\gamma_{e1}$.

52.3. Уширение по частотам при малой надкритичности – область теплового шума. При малой надкритичности, когда собственным шумом ПСВ можно пренебречь, распределение $n(\epsilon)$ является лоренцевским с шириной $\eta = \eta_T$. Ее можно определить, интегрируя (51.11) по ϵ и учитывая обычную для S-теории зависимость (19.1) полного числа ПСВ N от надкритичности p:

$$
\begin{aligned}
& TN \approx \gamma_{e1}(p-1)^{1/2}, \\
& \eta_T \approx \xi\gamma_{e1}(p-1)^{1/2}, \\
& \xi = 4\pi^2 Tk^3 n_k^0/(kv).
\end{aligned}
\tag{51.12}
$$

Здесь ξ – параметр малости теплового шума (51.11).

51.4. Уширение по частотам под действием "собственного" шума. При большой надкритичности можно пренебречь тепловым шумом в (51.11):

$$
\begin{aligned}
& (\eta^2+\epsilon^2)n(\epsilon) = \\
& = \Gamma_1(T^2/kv)\int n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3.
\end{aligned}
\tag{51.13}
$$

Для решения этого уравнения удобно сделать преобразование Фурье $2\pi n(\tau) = \int n(\epsilon)\exp(-i\epsilon\tau)d\epsilon$ временной корреляционной функцией

амплитуд ПСВ:

$$n_k(\tau) = \langle a_k^*(0) a_k(\tau) \rangle, \quad n(\tau) = \int n_k(\tau) d\boldsymbol{k}. \tag{51.14}$$

В этом представлении (51.13) имеет вид

$$\frac{\partial^2 n(\tau)}{\partial \tau^2} = (2\pi)^2 \Gamma_1 \frac{T^2}{kv} n^3(\tau) - \eta^2 n(\tau) = -\frac{\partial U}{\partial n} \tag{51.15}$$

– это уравнение Ньютона для движения частицы с координатой n в потенциале $U(n)$. Оно имеет интеграл – "энергию"

$$E = \tfrac{1}{2} (\partial n / \partial \tau)^2 + U(n), \tag{51.16}$$

что позволяет провести одно интегрирование. Тривиальное решение уравнения (51.15), не зависящее от τ, соответствует "одночастотному" решению уравнения (51.13) $n(\epsilon) \sim \delta(\epsilon)$. При $E > \min U$ возникает осциллирующее с частотой 2η решение $n(\tau)$, при этом в выражении $n(\epsilon)$, кроме центральной линии (интенсивность которой уменьшается), возникают сателлиты с частотами $\epsilon = 2\eta m$ (m – целое). С ростом E число гармоник растет, и при $E = 0$ решение $n(\epsilon)$ становится непрерывным:

$$\pi T n(\tau) = \frac{(kv/2\Gamma_1)^{1/2} \eta}{\operatorname{ch} \eta \tau}, \quad T n(\epsilon) = \frac{kv/2\Gamma_1}{\operatorname{ch}(\pi \epsilon / 2\eta)}. \tag{51.17}$$

Таким образом, уравнение (51.13) имеет однопараметрический набор решений, соответствующих изменению E от $\min U$ до 0. Для того чтобы выяснить, какое из решений может быть реализовано в эксперименте, необходимо исследовать их устойчивость.

51.5. Исследование устойчивости решений. Доказательство неустойчивости одночастотного решения можно провести непосредственно из уравнения (51.13) Найдем для этого линейный отклик стационарного состояния на тепловой шум, который приводит к аддитивной добавке $\delta\Phi = \langle \Phi_0(\Omega) \rangle$, не зависящей от ϵ. Полагая $n(\epsilon) = N\delta(\epsilon) + \delta n(\epsilon)$, получаем из (51.13) в линейном приближении

$$\delta n(\epsilon) = \delta\Phi / (\epsilon^2 - 2\eta_0^2),$$

откуда следует, что $\delta n(\epsilon)$ при $\epsilon < \sqrt{2}\,\eta_0$ не мало́ и, следовательно, одночастотное решение неустойчиво. Более того, можно показать, что и многосателлитные решения уравнения (51.13) также неустойчивы. Действительно, линеаризованное на фоне многосателлитного решения уравнение (51.13) превращается в систему линейных алгебраических уравнений и имеет безразлично устойчивые решения, соответствующие малому изменению параметра E. В точках ϵ_i, где находятся сателлиты, детерминант линеаризованной системы обращается в нуль. Поскольку этот определитель меняет знак вблизи первого сателлита при $E = \min U$ (т.е. на фоне одночастотного решения), следует ожидать, что он будет менять знак вблизи сателлитов при любом E. Таким образом, существует область частот ϵ, в которой определитель отрицателен и возмущения нарастают. Из сказанного видно, что неустойчивость как одночастотного, так и многосателлитного состояний связана с нелинейным характером взаимодействия B: $\Phi_{\text{int}} \propto n^\alpha$, $\alpha > 1$, и несмотря на то, что неустойчивость этих состояний

доказана нами только для конкретных ситуаций, в действительности она имеет общий характер. Поэтому единственным устойчивым по отношению к уширению по частотам состоянием системы является многочастотная турбулентность ПВ с непрерывным распределением по частотам.

51.6. Анализ устойчивого решения. Вернемся теперь к единственному устойчивому решению (51.17). Для того чтобы определить его ширину η, следует проинтегрировать это выражение по ϵ и воспользоваться формулами (51.11) и (19.1) для Γ_1 и N. В результате получаем следующую оценку для η:

$$\eta = \eta_{\text{int}} \approx (\gamma_{\text{el}}^2/\gamma)(\gamma/kv)^{1/2}(p-1)^{1/2}. \tag{51.18}$$

Полная ширина складывается из тепловой (51.12) и собственной ширины (51.18). Минимальная ширина $\eta_{\min}$ достигается при надкритичности $p_{\min}$:

$$\eta_{\min} = \gamma_{\text{el}}(\xi\gamma_{\text{el}}/\gamma)^{1/2}\ (\gamma/kv)^{1/4} \approx (0{,}1 \div 0{,}01)\gamma_{\text{el}}(\gamma_{\text{el}}/\gamma)^{1/2}, \tag{51.19}$$

$$p_{\min} - 1 \approx \xi kv/\gamma_{\text{el}} \approx 0{,}1\,\gamma/\gamma_{\text{el}}. \tag{51.20}$$

Уравнение (51.11) было получено в предположении $\eta \ll \Gamma \ll \gamma_{\text{el}}$, что справедливо при

$$(p-1) \ll \gamma kv/\gamma_{\text{el}}^2. \tag{51.21}$$

Кроме этого, мы предполагали, что число ПСВ в соответствии с Sg^2-теорией ограничивается из-за перенормировки накачки, а рассеяние ПСВ друг на друге и тепловой шум приводят лишь к размытию пакета ПСВ по частотам, не меняя интегральную амплитуду. Это предположение, как видно из (3.16), справедливо при $\eta^2 \ll \gamma_{\text{el}}^2/\gamma$ и поэтому всегда выполняется при выполнении условия (51.21).

Мы рассмотрели случай $g(\Omega, \Omega') = \text{const}$, однако этим не исчерпываются все типы упругого рассеяния СВ в магнитоупорядоченных кристаллах. Значительный интерес представляет также рассеяние СВ на неоднородностях, связанных с искажением обменного взаимодействия. В этом случае $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = ga^2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')$ и задается формулой (44.5).

Решение системы уравнений, описывающих поведение ПСВ (51.5) – (51.8) при таком виде $g(\Omega, \Omega')$, представляет собой сложную задачу. Ее удается точно решить, считая $k_\Omega^2 \sim v(\Omega)$. Это предположение является хорошей моделью для реальной зависимости величины $k_\Omega^2/v(\Omega) = \text{const}$, поэтому полученное решение модельной задачи близко к истинному. В рамках этой модели частота упругого рассеяния γ_{el} изотропна:

$$\gamma_{\text{el}} = (4\pi^2/3)cg^2(k^2/v), \tag{51.22}$$

а уравнение для спектральной плотности ПСВ $n(\epsilon)$ приводится к виду (51.11). Однако для Γ_1 получается другое выражение:

$$\Gamma_1^{-1} = \gamma_{\text{el}}^{-3}\left\{\frac{383}{108}\left[\int_0^1 P(x)(1-x^2)\,dx\right]^2 + 6\left[\int_0^1 x^2P(x)\,dx\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{43}{9}\int_0^1 P(x)(1-x^2)\,dx\int_0^1 P(x)x^2\,dx - \int_0^1 P^2(x)\,dx\right\}. \tag{51.23}$$

Здесь $x = \cos\theta$, $P(\Omega) = P(\cos\theta)\exp(-2i\varphi)$. Таким образом, как и в (51.11), $\Gamma_1 \sim \gamma_{el}^2/\gamma$, и все качественные выводы относительно вида распределения остаются справедливыми. Разница заключается лишь в числовом коэффициенте порядка единицы в определении Γ_1 (51.23) по сравнению с (51.11).

§ 52. Функция распределения ПСВ в однородной изотропной среде

52.1. Исходные уравнения. В отсутствие упругого рассеяния единственным фактором, регуляризующим распределение ПСВ, является их рассеяние друг на друге. В изотропной среде (накачку мы также считаем изотропной) характеристики ПСВ – корреляторы и функции Грина – зависят только от k и истинной частоты ω:

$$
\begin{aligned}
&n(q) = n(k,\epsilon)/4\pi k^2,\\
&\sigma(q) = \sigma(k,\epsilon)/4\pi k^2,\\
&G(q) = -[-i\Gamma(k,\epsilon) + \epsilon + \tilde{\epsilon}(k,\epsilon)]\Delta^{-1}(k,\epsilon),\\
&L(q) = \Pi(k,\epsilon)\Delta^{-1}(k,\epsilon),\\
&\Delta(k,\epsilon) = \Gamma^2(k,\epsilon) - |\Pi(k,\epsilon)|^2 + \tilde{\epsilon}^2(k,\epsilon) - 2i\Gamma(k,\epsilon) - \epsilon^2,
\end{aligned}
\tag{52.1}
$$

Здесь, как обычно, ϵ – частота, отсчитываемая от $\omega_p/2$: $\epsilon = \omega - \omega_p/2$, $\tilde{\epsilon}(k,\epsilon) = \tilde{\omega}(k,,\epsilon) - \omega_p/2$. Изотропия задачи позволяет вычислить массовые операторы:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(q) = \Phi(\epsilon) = 2k_0^{-3}[\int\langle|T|^2\rangle n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)n(\epsilon_3)\delta(\epsilon+\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3)d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 +\\
&+2\int\langle T\bar{T}^*\rangle\sigma^*(\epsilon_1)\sigma(\epsilon_2)n(\epsilon_3)\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3],\\
&\Psi(q) = \Psi(\epsilon) = 2k_0^{-3}\int[\langle T^2\rangle\sigma^*(\epsilon_1)\sigma(\epsilon_2)\sigma(\epsilon_3) +\\
&+2\langle T\bar{T}\rangle n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)n(\epsilon_3)]\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3,
\end{aligned}
\tag{52.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&(4\pi)^3\langle|T|^2\rangle = \int|T(\Omega,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)|^2 d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3\delta(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2-\boldsymbol{n}_3),\\
&(4\pi)^3\langle T\bar{T}^*\rangle =\\
&= \int T(\Omega,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)T^*(\Omega,\bar{\Omega}_2,\bar{\Omega}_1,\Omega_3)\delta(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2-\boldsymbol{n}_3)d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3,\\
&(4\pi)^3\langle T^2\rangle = \int T^2(\Omega,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)\delta(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2-\boldsymbol{n}_3)d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3,\\
&(4\pi)^3\langle T\bar{T}\rangle = \int T(\Omega,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)T(\bar{\Omega},\Omega_2,\Omega_1,\bar{\Omega}_3)\times\\
&\times\delta(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2-\boldsymbol{n}_3)d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3,\\
&n(\epsilon) = \int n(q)d\boldsymbol{k} = \int n(\boldsymbol{k},\epsilon)d\boldsymbol{k},\quad \sigma(\epsilon) = \int\sigma(\boldsymbol{k},\epsilon)d\boldsymbol{k},
\end{aligned}
\tag{52.3}
$$

$\boldsymbol{n}_i$ – единичный вектор, задаваемый углами Ω_i, k_0 – радиус резонансной поверхности $2\omega(k_0) = \omega_p$. Аналогично получаются выражения для мас-

совых операторов Σ и Π:

$$\Sigma(q)=\Sigma(\epsilon)=2TN+(2\pi/kv)\int\{-\langle|T|^2\rangle[n_1n_2(i\Gamma_3+\epsilon_3)/\mu_3+$$
$$+n_1n_3(i\Gamma_2+\epsilon_2)/\mu_2+n_2n_3(\epsilon_1-i\Gamma_1)/\mu_1^*]+$$
$$+2\langle T\overline{T}^*\rangle[\sigma_1^*\sigma_2(i\Gamma_3+\epsilon_3)/\mu_3+\sigma_1^*n_3\Pi_2/\mu_2+\sigma_2n_3\Pi_1^*/\mu_1]\}\times$$
$$\times\ \delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)d\epsilon_1d\epsilon_2d\epsilon_3,$$
$$\Pi(q)=\Pi(\epsilon)=P+(2\pi/kv)\int\{\langle T^2\rangle[\sigma_2\sigma_3\Pi_1^*/\mu_1^*+\sigma_1^*(\sigma_3\Pi_2/\mu_2+ \tag{52.4}$$
$$+\sigma_2\Pi_3/\mu_3)]+2\langle T\overline{T}\rangle[n_1n_2\Pi_3/\mu_3-n_1\sigma_3(i\Gamma_2+\epsilon_2)/\mu_2+$$
$$+n_2\sigma_3(i\Gamma_1-\epsilon_1)/\mu_1^*]\}\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)d\epsilon_1d\epsilon_2d\epsilon_3,$$
$$TN=\int T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')n(\boldsymbol{k}',\epsilon')d\boldsymbol{k}'d\epsilon'=\int T(\Omega,\Omega')Nd\Omega'/4\pi,$$
$$N=\int n(q)dq,$$
$$P=hV+\int S(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\sigma(q')dq'=hV+S\sigma,$$
$$4\pi S=\int S(\Omega,\Omega')d\Omega',$$
$$\sigma=\int\sigma(q)dq,\quad n_i=n(\epsilon_i),\quad \Gamma_i=\Gamma(\epsilon_i),\quad \sigma_i=\sigma(\epsilon_i),$$
$$\mu_i=\mu(\epsilon_i)=[\nu^2(\epsilon)-2i\Gamma(\epsilon)\epsilon-\epsilon^2]^{1/2},\quad \nu^2(\epsilon)=\Gamma^2(\epsilon)-|\Pi(\epsilon)|^2.$$

Таким образом, массовые операторы постоянны вблизи массовой поверхности в $\boldsymbol{k}$-пространстве и являются лишь функциями частоты ϵ. Это обстоятельство позволяет определить форму пакета ПСВ в $\boldsymbol{k}$-пространстве. Выпишем для этого исходные уравнения (36.3) в наших обозначениях:

$$n(\boldsymbol{k},\epsilon)=4\pi k_0^2[\widetilde{\epsilon}^2+\mu^2(\epsilon)]^{-2}\{[\Gamma^2(\epsilon)+(\epsilon+\widetilde{\epsilon})^2+|\Pi(\epsilon)|^2]\Phi^*(\epsilon)+$$
$$+2\,\mathrm{Im}[\Gamma(\epsilon)-i\epsilon]\Pi^*(\epsilon)\Psi(\epsilon)-2\widetilde{\epsilon}\,\mathrm{Re}\,\Pi^*(\epsilon)\Psi(\epsilon)\},\quad \widetilde{\epsilon}=\widetilde{\epsilon}(\boldsymbol{k},\omega)\,\widetilde{\epsilon}(\boldsymbol{k}) \tag{52.5}$$

$$\sigma(\boldsymbol{k},\epsilon)=4\pi k_0^2[\widetilde{\epsilon}^2+\mu^2(\epsilon)]^{-2}\{-2i\,\Pi(\epsilon)[\Gamma(\epsilon)-i\widetilde{\epsilon}]\Phi(\epsilon)-$$
$$-[(\Gamma-i\widetilde{\epsilon})^2+\epsilon^2]\Psi(\epsilon)+\Pi^2(\epsilon)\Psi^*(\epsilon)\}. \tag{52.6}$$

Поскольку $\widetilde{\epsilon}(\boldsymbol{k})=\omega(\boldsymbol{k})+\mathrm{Re}\,\Sigma-\omega_p/2$, форма пакета ПСВ $n(\boldsymbol{k},\epsilon)$, $\sigma(\boldsymbol{k},\epsilon)$ близка к квадрату функции Лоренца. Уравнения (52.6) можно упростить, проинтегрировав их по $\boldsymbol{k}$:

$$n(\epsilon)=\frac{4\pi^2}{k_0v\mu'|\mu|^2}\{(\Gamma^2+|\Pi|^2+\epsilon^2+|\mu|^2)\Phi+2\,\mathrm{Im}[(\Gamma-i\epsilon)\Pi^*\Psi]\},$$

$$\sigma(\epsilon)=\frac{4\pi^2}{k_0v\mu'|\mu|^2}\{-2i\,\Pi\Gamma\Phi-(\Gamma^2+\epsilon^2-|\mu|^2)\Psi+\Pi^2\Psi^*\}, \tag{52.7}$$

$$\mu=\mu(\epsilon),\ \mu'=\mathrm{Re}\,\mu(\epsilon),\ \Pi=\Pi(\epsilon),\ \Gamma=\Gamma(\epsilon),\ \Phi=\Phi(\epsilon),\ \Psi=\Psi(\epsilon).$$

В результате возникает замкнутая система уравнений (52.2), (52.3), (52.7) для интегральных корреляторов $n(\epsilon)$, $\sigma(\epsilon)$. В дальнейшем нам встретятся еще более сложные уравнения, обобщающие полученную систему на случай более низкой симметрии.

52.2. Приближение одночастотной турбулентности ПСВ. В качестве первого шара при исследовании уравнений ST^2-теории полезно бывает рассмотреть одночастотную модель, т.е. решение системы (52.2), (52.4), (52.7) вида

$$n(\epsilon) = N\delta(\epsilon), \qquad \sigma(\epsilon) = \sigma\delta(\epsilon). \tag{52.8}$$

В предыдущем параграфе мы показали, что это решение неустойчиво относительно уширения по частотам, тем не менее одночастотное решение правильно передает форму пакета ПСВ в k-пространстве и дает правильную оценку для величины ν. В одночастотном приближении имеем

$$\Pi N = i\Gamma\sigma = 4\pi^2 k_0^2 \Gamma\Pi(\Gamma\Phi + \operatorname{Im}\Pi^*\Psi)/\nu^3, \tag{52.9}$$

$$\begin{gathered}
\Phi = 2Nk_0^{-3}(\langle|T|^2\rangle N^2 + 2\langle T\bar{T}^*\rangle|\sigma|^2),\\
\Gamma = \gamma + \frac{2\pi}{k_0 v\nu}[\langle|T|^2\rangle\Gamma N^2 + 2\langle T\bar{T}^*\rangle(\Gamma|\sigma|^2 - 2N\operatorname{Re}\Pi^*\sigma)],\\
\Psi = 2\sigma k_0^{-3}(\langle T^2\rangle|\sigma|^2 + 2\langle T\bar{T}\rangle N^2), \quad \nu^2 = \Gamma^2 - |\Pi|^2,\\
\Pi = P + \frac{2\pi}{k_0 v\nu}[\langle T^2\rangle(2\Pi|\sigma|^2 + \Pi^*\sigma^2) + 2\langle T\bar{T}\rangle N^2\Pi].
\end{gathered} \tag{52.10}$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered}
N = \frac{8\pi^2\Gamma^2}{k_0 v}\left(\frac{N}{\nu}\right)^3\left[\langle|T|^2\rangle - \frac{|\Pi|^4\operatorname{Re}\langle T^2\rangle}{\Gamma^4} + 2\left(\langle T\bar{T}^*\rangle - \frac{\langle T\bar{T}\rangle|\Pi|^2}{\Gamma^2}\right)\right],\\
\Gamma\sigma + i\Pi N = 0,
\end{gathered} \tag{52.11}$$

$$\begin{gathered}
\Gamma = \gamma + \frac{2\pi\Gamma N^2}{k_0 v\nu}\left[\langle|T|^2\rangle + \frac{2\langle T\bar{T}^*\rangle|\Pi|^2}{\Gamma^2}\right],\\
\Pi = P + \frac{2\pi\Pi N^2}{k_0 v\nu}\left[\frac{\langle T^2\rangle|\Pi|^2}{\Gamma^2} + 2\langle T\bar{T}\rangle\right].
\end{gathered} \tag{52.12}$$

Понятно, что при не слишком большой надкритичности $\Gamma \approx \gamma$, $\Pi \approx P$, $\nu \ll \gamma$. В этом случае из (50.11) нетрудно определить ν:

$$\begin{gathered}
\nu = \left(\frac{8\pi^2\gamma^2 N^2 T_1^2 N^2}{k_0 v}\right)^{1/3}.\\
T_1^2 = \langle|T|^2\rangle - \operatorname{Re}\langle T^2\rangle + 2(\langle T\bar{T}^*\rangle - \operatorname{Re}\langle T\bar{T}\rangle).
\end{gathered} \tag{52.13}$$

Если матричный элемент T является комплексным, $T_1 \neq 0$ и по порядку величины $T_1^2 \approx \langle|T|^2\rangle$. Условием применимости S-теории для определения

интегральной амплитуды N является справедливость неравенства

$$(1-|\sigma|/N)\approx(1-|\Pi|/\Gamma)\approx\nu^2/2\gamma^2\ll 1, \tag{52.14}$$

позволяющего считать $|P|=\gamma$ и находить N из этого условия. Условие (52.14) при подстановке (52.13) дает

$$p=(h/h_{\text{th}})^2\ll p_S=k_0 v/2\sqrt{2}\,\pi^2\gamma. \tag{52.15}$$

Величина p_S в твердых телах имеет порядок $10\div10^3$. В случае $p>p_S$ уравнения ST^2-теории еще справедливы, но S-теория уже неприменима. Для определения предела применимости ST^2-теории следует оценить перенормировку вершин ΔT

$$\Delta T/T\approx\gamma TN/k_0 v\nu. \tag{52.16}$$

Малость этого соотношения обеспечивает применимость ST^2-теории. При $p\approx p_S$ в системе ПСВ возникает "кинетическая" неустойчивость (см. гл. 13), в результате которой нарастают СВ, не связанные с накачкой (А.В.Лавриненко и др. [139]). Они оказывают сильное обратное влияние на ПСВ, поэтому исследование уравнений ST^2-теории при $p>p_S$ бесполезно, несмотря на отсутствие внутренних формальных ограничений.

52.3. Форма пакета ПСВ по частотам. Перейдем к исследованию устойчивого, непрерывного по частоте ω решения уравнений ST^2-теории (52.2) – (52.4), (52.7). Характерная частотная ширина пакета ПСВ $\eta\approx\nu^2/\gamma$, в этом легко убедиться, проанализировав частотную зависимость знаменателя $\mu'(\epsilon)|\mu(\epsilon)|^2$ в уравнении (52.7). Можно показать, что решение этого уравнения при больших значения ϵ имеет экспоненциальную асимптотику

$$n(\epsilon)=Nf(\epsilon/\eta)\exp(-|\epsilon|/\eta), \tag{52.17}$$

где $f(\epsilon/\eta)$ изменяется не быстрее, чем степенная функция. Действительно, в пределе больших $|\epsilon|$ $(|\epsilon|\gg\eta)$ уравнение (52.7) принимает вид

$$n(\epsilon)\approx\left(\frac{\eta}{|\epsilon|}\right)^{3/2}N^{-2}\int n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)n(\epsilon_3)\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)\,d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \tag{52.18}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sigma(\boldsymbol{k},\epsilon)\approx-iPn(\boldsymbol{k},\epsilon)/\gamma$. Нетрудно убедиться, что решение уравнения (4.21) не может иметь степенную асимптотику. Можно также показать, что если $n(\epsilon)\sim\exp(-u(\epsilon))$, $u''(\epsilon)>0$, то $u(\epsilon)$ в пределе больших ϵ должна удовлетворять уравнению $u(\epsilon)=3u(\epsilon/3)$, что несовместимо с условием $u''(\epsilon)>0$. Если же решение имеет вид

$$n(\epsilon)=Nf(\epsilon/\eta)\exp(-u(\epsilon)),$$

где $u''(\epsilon)<0$, то из (52.18) следует, что

$$f(\epsilon/\eta)\exp(-u(\epsilon))\sim(|\epsilon|/\eta)^{-3/2}f(\epsilon/\eta)^2\exp(-u(\epsilon)).$$

Это уравнение тоже не имеет решений, имеющих физический смысл. Наконец, если решение $n(\epsilon)$ имеет асимптотический вид (52.17), то при

подстановке в (52.18) получаем

$$f(\epsilon/\eta)\exp(-|\epsilon|/\eta) \sim$$
$$\sim (\eta/|\epsilon|)^{3/2}(\epsilon/\eta)^2\exp(-|\epsilon|/\eta)f^3(|\epsilon|/\eta),$$

откуда следует, что

$$n(\epsilon) = N(\eta/|\epsilon|)^{1/4}\exp(-|\epsilon|/\eta). \tag{52.19}$$

Таким образом, пакет ПСВ является весьма узким, и амплитуда волн быстро спадает с расстройкой от резонанса.

Рассмотрим теперь, как ведет себя знаменатель в выражении (52.7), точнее, величина $\nu(\epsilon)$. Проще всего оценить зависимость ν от ϵ в одночастотной модели в пределе $\epsilon > \nu^2/\gamma$:

$$\nu^2(\epsilon) \approx (\nu_0^2/2\pi)[1 + (\nu_0^2/\gamma|\epsilon|)^{1/2}]. \tag{52.20}$$

Таким образом, функция $\nu(\epsilon)$ является плавной функцией частоты ϵ, поэтому зависимостью ν от ϵ в (52.7) можно пренебречь. Если учесть также, что частотная ширина пакета ПСВ $\eta \sim \nu^2/\gamma \ll \nu$, членами $\propto \epsilon^2$ можно пренебречь по сравнению с ν^2, то уравнения (52.7) можно записать в виде

$$n(\epsilon) = \frac{4\pi^2\Gamma k_0^2}{\upsilon\nu_1^2\nu_2}\left[\operatorname{Im}(\Pi^*\Psi) + \frac{\Phi(\nu_1^2-\nu^2)}{2\Gamma}\right],$$
$$\sigma(\epsilon) = -i\frac{4\pi^2\Pi k_0^2}{\upsilon\nu_1^2\nu_2}\left[\Gamma\Phi + \operatorname{Im}(\Pi^*\Psi) + \frac{i\Psi\Pi^*(\nu_1^2-\nu^2)}{2|\Pi|^2}\right],$$
$$\nu_1^2 = \nu_1^2(\epsilon) = (\nu^4 + 4\gamma^2\epsilon^2)^{1/2},$$
$$\nu_2^2 = \nu_2^2(\epsilon) = \tfrac{1}{2}[\nu^2 + \nu_1^2(\epsilon)]. \tag{52.21}$$

Отметим, что в (52.21) последние члены в скобках имеют порядок (ν/Γ^2) по отношению к остальным. Поэтому с точностью до $(\nu/\Gamma)^2$ имеет место равенство, обобщающее (52.9):

$$\Gamma\sigma(\epsilon) + i\Pi n(\epsilon) = 0. \tag{52.22}$$

Выражая σ через n, получим из (52.2) и (52.21)

$$n(\epsilon) = A\nu_1^{-2}(\epsilon)\nu_2^{-1}(\epsilon)\int n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)n(\epsilon_3)\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)\,d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3,$$
$$A = 8\pi^2T_1^2\gamma^2/k_0\upsilon. \tag{52.23}$$

Это уравнение является аналогом уравнения (51.13), имеющего решение $\operatorname{ch}^{-1}(\epsilon/\eta)$. Уравнение (52.23) можно записать в виде условия экстремума функционала $\delta F/\delta n(\epsilon) = 0$:

$$F = \tfrac{1}{2}\int\nu_1^2(\epsilon)\nu_2(\epsilon)n^2(\epsilon)d\epsilon -$$
$$-\tfrac{1}{4}A\int n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)n(\epsilon_3)\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \tag{52.24}$$

Уравнение (52.23) имеет целый класс решений от сингулярного до непрерывного по частотам в полной аналогии с решениями уравнения (52.9). Действительно, если провести в (52.13) преобразование Фурье, то полученное уравнение не будет зависеть от начала отсчета "времени" и поэтому будет обладать интегралом – аналогом энергии. Все периодические решения этого уравнения, как показано в § 51, неустойчивы, поэтому реализуется непрерывное по частотам решение.

Пробная функция $n(\epsilon) = n_0 \operatorname{ch}^{-1}(\epsilon/\eta)$ качественно правильно описывает форму пакета ПСВ. Для наилучшего определения величин n_0 и η следует потребовать существования экстремума функционала F на нашей пробной функции по параметрам n_0 и η:

$$\eta \approx 0{,}97\, \nu^2/2\gamma, \quad n_0^2 = {}^9/_2\, \nu^3/A\pi^2\eta^2. \tag{52.25}$$

Условие (52.25) позволяет найти ν, так как полное число ПСВ $N = \int n(\epsilon)d\epsilon$, как показано ранее, определяется из S-теории. Поэтому из (52.25) следует, что

$$\nu^3 \approx 17{,}6\, \gamma^2 (T_1 N)^2/k_0 v. \tag{52.26}$$

Коэффициент в этом выражении (4.31) в 4,5 раза меньше, чем в одночастотной модели (52.13).

Таким образом, мы определили форму пакета ПСВ и его характерные размеры в случае комплексного матричного элемента $T_{12,34}$. Если же матричный элемент действителен, то в соответствии с определением (52.13) величина T_1 обращается в нуль и этот случай требует отдельного исследования. Нетрудно убедиться, что и в этом случае выполняется соотношение (52.22). Используя его, можно получить из (52.21)

$$n(\epsilon) = \frac{4\pi^2}{k_0 v \mu'(\epsilon)|\mu(\epsilon)|^2} \{[5\nu^2 - |\mu(\epsilon)|^2]\langle T^2\rangle + 2[|\mu(\epsilon)|^2 - \nu^2]\langle T\overline{T}\rangle\} \times$$
$$\times \int n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)n(\epsilon_3)\delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \tag{52.27}$$

Характерная частотная ширина пакета $\eta \approx \nu^2/2\gamma$, поэтому вместо (52.27) можно рассмотреть более простое уравнение:

$$n(\epsilon) = \frac{16\pi^2\nu^2\langle T^2\rangle}{k_0 v \mu'(\epsilon)|\mu(\epsilon)|^2} \int n(\epsilon_1)n(\epsilon_2)n(\epsilon_3)\delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \tag{52.28}$$

Это уравнение совпадает по виду с (52.23). Коэффициент A для него равен $16\pi^2\langle T^2\rangle\nu^2/k_0 v$, поэтому

$$\eta = 0{,}97\, \nu^2/2\gamma, \quad \nu = 35\langle T^2\rangle N^2/k_0 v. \tag{52.29}$$

Вследствие сокращения главных вкладов в столкновительном члене полученная ширина ν существенно меньше, чем при комплексном T (52.26). Заметим, что подстановка ν из (52.29) в оценку перенормировки вершины (52.16) показывает, что $\Delta T/T$ не мало. Однако аккуратное вычисление диаграмм $\sim T^3$ при действительном T доказывает наличие сокращений и в более высоких порядках теории возмущений. В этом случае

$$\Delta T/T \approx \nu TN/k v \Gamma \ll 1, \tag{52.30}$$

что дает возможность применять ST^2-теорию в широких пределах.

§ 53. Распределение ПСВ по частотам в ферромагнетике

В этом параграфе будет получена функция распределения ПСВ $n(\Omega, \epsilon)$ по углам Ω и частотам ϵ в однородном идеальном ФМ. Эта задача обладает аксиальной симметрией. Однако прежде всего мы выведем в п. 53.1 исходную систему уравнений ST^2-теории для анализа $n(\Omega, \epsilon)$ без предположения об аксиальной симметрии.

53.1. Исходные уравнения. В общем случае функция распределения ПСВ $n(\boldsymbol{k}, \omega)$ локализована в $\boldsymbol{k}$-пространстве вблизи резонансной поверхности $\tilde{\omega}_{\boldsymbol{k}} = \omega_p/2$. Если пакет ПСВ является не слишком узким по углам (критерий узости пакета мы получим впоследствии), то массовые операторы являются плавными функциями модуля волнового вектора. Поэтому в соответствии с (36.3) зависимость $n(\boldsymbol{k}, \omega)$ и $\sigma(\boldsymbol{k}, \omega)$ от $\omega_{\boldsymbol{k}}$ определяется зависимостью функций Грина $G(\boldsymbol{k}, \omega)$ и $L(\boldsymbol{k}, \omega)$ от расстройки $(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_p/2)$. Это позволяет проинтегрировать исходные уравнения ST^2-теории (36.3), (36.4) и (36.6) по $\boldsymbol{k}$ и получить замкнутую систему уравнений для функций распределения ПСВ по частотам ϵ и углам в $\boldsymbol{k}$-пространстве:

$$n(\Omega, \epsilon) = \frac{\pi k_\Omega^2}{v(\Omega)\mu'(\Omega, \epsilon)\,|\,\mu(\Omega, \epsilon)\,|^2} \times$$

$$\times \{ [\Gamma^2 + |\,\Pi\,|^2 + \epsilon^2 + |\,\mu(\Omega, \epsilon)\,|^2]\Phi + 2\,\mathrm{Im}\,[(\Gamma - i\epsilon)\Pi^*\Psi] \},$$

$$\Gamma = \Gamma(\Omega, \epsilon), \quad \Pi = \Pi(\Omega, \epsilon), \quad \Phi = \Phi(\Omega, \epsilon), \quad \Psi = \Psi(\Omega, \epsilon), \tag{53.1}$$

$$\sigma(\Omega, \epsilon) = \frac{\pi k_\Omega^2}{v(\Omega)\,\mu'(\Omega, \epsilon)\,|\,\mu\,|^2} \{ -2i\Pi\Gamma\Phi - (\Gamma^2 + \epsilon^2 - |\,\mu\,|^2)\Psi + |\,\Pi\,|^2\Psi^* \},$$

$$\Phi_{\mathrm{int}}(\Omega, \epsilon) = 2\int [\,|\,T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)\,|^2 n_1 n_2 n_3 +$$

$$+ T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)T^*(\Omega, \overline{\Omega}, \overline{\Omega}_2, \Omega_3)\sigma_1^* \sigma_2 n_3] \times$$

$$\times \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3) \prod_{i=1}^{3} d\Omega_i,$$

$$\Psi_{\mathrm{int}}(\Omega, \epsilon) = 2\int [T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)T(\Omega, \overline{\Omega}_1, \Omega_2, \overline{\Omega}_3)\sigma_1^* \sigma_2 \sigma_3 +$$

$$+ 2T(\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)\, T(\overline{\Omega}, \Omega_1, \Omega_2, \overline{\Omega}_3) \times$$

$$\times n_1 n_2 \sigma_3] \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3) \prod_{i=1}^{3} d\Omega_i d\epsilon_i,$$

$$n_i = n(\epsilon_i, \Omega_i), \quad \sigma_i = \sigma(\epsilon_i, \Omega_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Sigma_{\mathrm{int}}(\Omega, \epsilon) = 2\int T(\Omega, \Omega')n(\Omega', \epsilon')d\Omega' d\epsilon' -$$

$$- 2\pi\int \left\{ |\,T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)\,|^2 \left[\frac{n_1 n_2 (i\Gamma_3 + \epsilon_2)k_3^2}{\mu_3 v_3} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{n_1 n_3 (i\Gamma_2 + \epsilon_2)k_2^2}{\mu_2 v_2} + \frac{n_2 n_3 (i\Gamma_1 + \epsilon_1)k_1^2}{\mu_1 v_1} \right] +$$

$$+ 2T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)T^*(\Omega, \overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2, \Omega_3)\left[\frac{\sigma_1^* \sigma_2 (i\Gamma_3 + \epsilon_3)k_3^2}{\mu_3 v_3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_1^* n_3 \Pi_2 k_2^2}{\mu_2 v_2} + \frac{\sigma_2 n_3 \Pi_1^* k_1^2}{v_1 \mu_1}\right]\delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3) \prod_{i=1}^{3} d\Omega_i \, d\epsilon_i, \tag{53.2}$$

$$\mu(\Omega, \epsilon) = [\nu^2(\Omega, \epsilon) - 2i\Gamma(\Omega, \epsilon) - \epsilon^2]^{1/2},$$

$$\nu^2(\Omega, \epsilon) = \Gamma^2(\Omega, \epsilon) - |\Pi(\Omega, \epsilon)|^2,$$

$$\Gamma(\Omega, \epsilon) = \gamma_0(\Omega) - \operatorname{Im} \Sigma(\Omega, \epsilon).$$

Здесь волновые векторы $\boldsymbol{k}_i$ в аргументах δ-функций лежат на резонансной поверхности в направлении Ω_i. Полученная система уравнений (53.1) – (53.2) обобщает уравнения (52.1) – (52.5) для анизотропного случая.

53.2. Уравнения при аксиальной симметрии. В этом пункте мы определим функцию распределения ПСВ в однородном ФМ. Для простоты мы ограничимся случаем не слишком большой надкритичности, когда при параллельной накачки возбуждена группа ПСВ вблизи экватора резонансной поверхности $\theta_{\boldsymbol{k}} = \pi/2$. В этом случае можно в выражениях для матричных элементов пренебречь зависимостью от полярного угла $\theta_{\boldsymbol{k}}$, считая его равным $\pi/2$. Кроме того, как показано в предыдущем параграфе, можно пренебречь зависимостью величин $\mu(\Omega, \epsilon)$, $\Gamma(\Omega, \epsilon)$ и $\Pi(\Omega, \epsilon)$ от частоты ϵ. Из формул (53.1) и (53.2) следует, что с точностью до членов $(\nu/\Gamma)^2$ выполняются соотношения

$$\Gamma(\Omega)\sigma(\Omega, \epsilon) + i\Pi(\Omega)n(\Omega, \epsilon) = 0,$$
$$|\Pi(\Omega)| = \Gamma(\Omega) = \gamma_0(\Omega), \tag{53.3}$$

позволяющие исключить аномальный коррелятор σ из выражений для массовых операторов. Для того чтобы получить окончательное выражение для столкновительного члена в (53.1), следует учесть еще одно обстоятельство – четыре вектора равной длины $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3$, лежащие на экваторе резонансной поверхности, обращают в нуль аргумент δ-функций в (53.2) только в одном из следующих случаев: 1) $\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{k}_1$; 2) $\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_1$; 3) $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 = 0, \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = 0$. В результате из (51.1) следует

$$n(x, \varphi, \epsilon) = 2\pi\Gamma^2 \int \frac{[\operatorname{Im} S(\varphi, \varphi')]^2}{|\sin(\varphi - \varphi')| \, k_0 v_0 \mu'(\epsilon, \Omega) \, |\mu(\epsilon, \Omega)|^2} \times$$

$$\times n_1 n_2 n_3 \, \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)\delta(x + x_1 - x_2 - x_3) \, d\varphi' \prod_{i=1}^{3} dx_i \, d\epsilon_i, \tag{53.4}$$

$$\Gamma = \Gamma(\varphi, \epsilon), \quad n_i = n(x_i, \varphi_i, \epsilon_i).$$

Следует отметить, что в силу эрмитовости гамильтониана $\operatorname{Im} S(\varphi, \varphi) = 0$, поэтому интеграл в (53.4) сходится. Поскольку в кубических ФМ отличны от нуля только коэффициенты S_0 и $S_{\pm 2}$ в разложении $S(\varphi - \varphi')$ в ряд Фурье, то

$$\operatorname{Im} S(\varphi, \varphi') = \Delta S \sin 2(\varphi - \varphi'), \quad \Delta S = S_2 - S_{\bar{2}}. \tag{53.5}$$

Для того чтобы определить функцию распределения $n(x, \varphi, \epsilon)$ из уравнения (53.4), необходимо знать поведение величины $\mu(\Omega, \epsilon) = [\nu^2(\Omega, \epsilon) -$

$-2i\Gamma\epsilon-\epsilon^2]^{1/2}$. Как видно из (53.4), ширина пакета ПСВ по частотам $\Delta\epsilon$ есть величина порядка $\Delta\epsilon\sim\nu^2/2\Gamma\ll\nu$. Поэтому мы можем пренебречь перенормировкой затухания за счет взаимодействия ПСВ и, как и в § 52, зависимостью ν от частоты ϵ. В результате возникает следующее приближение для $\mu(\Omega,\epsilon)$:

$$\mu(\Omega,\epsilon)=[\nu^2(\Omega)-2i\gamma_0(\Omega)\epsilon]^{1/2}. \tag{53.6}$$

53.3. Анализ решений для формы пакета. Если пренебречь малой кристаллографической анизотропией, то ферромагнетик, помещенный во внешнее магнитное поле, обладает аксиальной симметрией. В этом случае функция распределения ПСВ $n(\Omega,\epsilon)$ не зависит от азимутального угла φ: $2\pi n(\Omega,\epsilon)=n(x,\epsilon)$, $x=\cos\theta$. В результате из (53.4) и (53.5) можно получить

$$n(x,\epsilon)=\frac{16(\Delta S)^2}{3\pi k_0 v\nu_1^2(x)\nu_2(x)}\int n_1n_2n_3\,\delta(x+x_1-x_2-x_3)\times$$

$$\delta(\epsilon+\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3)\prod_{i=1}^{3}dx_i\,d\epsilon_i. \tag{53.7}$$

Для того чтобы замкнуть уравнения (53.6), (53.7), необходимо определить зависимость $\nu(x)$. До тех пор, пока применима S-теория для вычисления интегральных характеристик ПСВ, т.е. пока $\nu\ll\Gamma$, зависимость $\nu(x)$ определяется разностью между затуханием $\gamma_0(x)$ и перенормированной накачки $|P(x)|$. В частности, если возбужден пакет вблизи экватора резонансной поверхности $\theta_k=\pi/2$ $(x=0)$, то в этой области

$$\nu^2(x)=\nu_0^2+\beta\gamma^2x^2, \tag{53.8}$$

где β – коэффициент порядка единицы. Например, если затухание $\gamma(\Omega)$ изотропно, а надкритичность мала, так что угловая зависимость перенормированной накачки обусловлена зависимостью коэффициента связи ПСВ с накачкой $V(\Omega)\sim1-x^2$, то $\beta=2$. Из (53.7) и (53.8) следует, что угловая ширина пакета ПСВ составляет

$$\Delta\theta_k\approx\Delta x\approx\nu_0/\sqrt{\beta}\gamma. \tag{53.9}$$

Приступая к анализу уравнения (53.7), заметим, что оно имеет сингулярное решение $n(x,\epsilon)=N\delta(x)\delta(\epsilon)$, в котором

$$\nu_0=(16(\Delta SN)^2\gamma^2/3\pi kv)^{1/3}=(16\,d\gamma(p-1)/3\pi kv)^{1/3},$$
$$d=(\Delta S/S)^2. \tag{53.10}$$

Кроме того, это уравнение имеет решения, сингулярные только по x или только по ϵ, которые, однако, неустойчивы относительно уширения по углам или по частотам. Мы (И.В. Круценко, В.С. Львов, Г.А. Мелков, [133]) не смогли получить регулярное решение, однако наиболее интересные его свойства были указаны. Эффективная ширина $\Delta\theta_k$ и $\Delta\varphi_k$ этого решения уравнения (53.7) определяется шириной ν_0 в соответствии с (53.8). Можно найти также асимптотики этого решения при

$$x\gg\nu/\gamma,\quad \epsilon\gg\nu_0^2/\gamma,$$

а именно:

$$n(x',\epsilon')=N(\gamma/\nu_0)f(x',\epsilon')\exp\{-[(\lambda_1x')^2+(\lambda_2\epsilon')^2]^{1/2}\}, \tag{53.11}$$

где λ_1 и $\lambda_2 \approx 1$, а вид функции $f(x', \epsilon')$ зависит от соотношения между x' и ϵ':

$$f = 1 \quad \text{при} \quad x' \lesssim \epsilon',$$
$$f \approx (\epsilon'/x')^{3/2} \quad \text{при} \quad \epsilon'^2 > x' > \epsilon',$$
$$f \approx 1/x'^{3/4} \quad \text{при} \quad x' > \epsilon'^2$$

Приведем интерполяционную формулу, качественно описывающую поведение n во всей области изменения параметров:

$$n(x', \epsilon') \approx N(\gamma/\nu_0)(1 + x'^2 + \epsilon'^2)^{3/8}(1 + x'^2 + \epsilon'^2)^{-3/4} \times$$
$$\times \operatorname{ch}^{-1}[(\lambda_1 x')^2 + (\lambda_2 \epsilon')^2]^{1/2}. \tag{53.12}$$

В нашем эксперименте определялось только распределение $n(\epsilon)$ по частотам:

$$n(\epsilon) = 2\pi \int n(\theta, \epsilon)\, d\cos\theta; \tag{53.13}$$

при $\epsilon' \gg 1$ основной вклад в этот интеграл вносит область $x' \lesssim (\epsilon')^{1/2}$, поэтому

$$n(\epsilon) = N(\gamma/\nu_0^2)^{3/2}[(\Delta\omega)^2 + (\nu_0^2/\gamma)^2]^{1/4} \operatorname{ch}^{-1}(\Delta\omega\gamma/\nu_0^2). \tag{53.14}$$

В вышеупомянутой работе проведен более полный анализ формы и ширины пакета ПСВ с учетом не только собственного, но и теплового шума и слабого упругого рассеяния.

53.4. Экспериментальное исследование распределения ПСВ по частотам (И.В. Круценко, В.С. Львов, Г.А. Мелков, [133]).

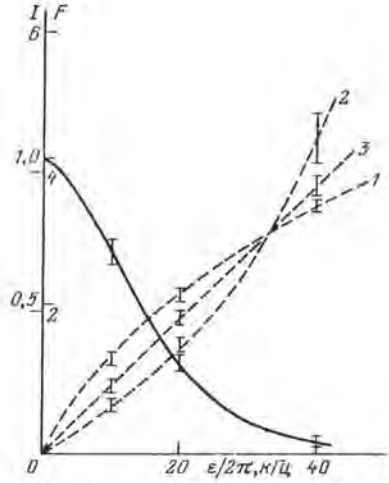
Для изучения этого вопроса мы регистрировали электромагнитное излучение из феррита на частотах, близких к половине частоты накачки. Это явление обусловлено двухмагнонным рассеянием ПСВ на статических неоднородностях. В таком случае для комплексной амплитуды излученной из кристалла электромагнитной волны $U(t)$ можно написать

$$U(t) = \sum_n g_k \exp(ikr_n)\, a_k(t)\, dk, \tag{53.15}$$

где g_k – коэффициент преобразования ПСВ с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ на одном рассеивающем центре, r_n – их координаты. Используя (53.15), получаем выражение для корреляционной функции излучения $K(\tau)$:

$$K(\tau) = \langle U(t)U^*(t+\tau)\rangle = n_n \int |g_k|^2 n_k(\tau)\, dk. \tag{53.16}$$

Здесь n_n – число рассеивающих центров. Из (53.16) видно, что с точностью до не зависящего от времени масштабного множителя функция $K(\tau)$ равна интегральной по $\boldsymbol{k}$ корреляционной функции ПСВ $N(\tau) = \int n_k(\tau)\, dk$, и поэтому спектральная плотность $K(\omega)$ отличается от спектральной плотности ПСВ $n(\omega)$, определенной соотношением только на постоянный множитель (53.13). Этот вывод по существу обусловлен тем, что двухмагнонное рассеяние на статических неоднородностях происходит без изменения частоты колебаний. Таким образом, можно исследовать статистические свойства ПСВ, изучая электромагнитное излучение из феррита. На рис. 53.1 представлена типичная зависимость $I(\epsilon)$, полученная экспериментально для одной из исследованных сфер ЖИГ. Сплошная кривая на рис. 53.1 представляет собой сглаженную кривую, построенную по десяти реализа-



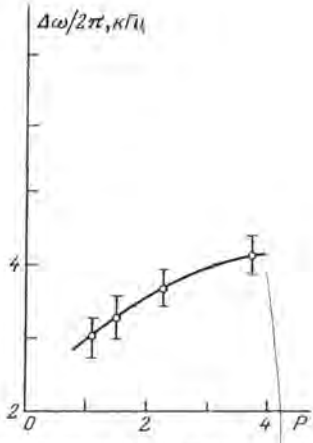


Рис. 53.1. Зависимость спектральной плотности сигнала $I(\epsilon)$, прошедшего через квадратичный детектор, от частоты $\epsilon = \omega - \omega_p/2$ для сферы ЖИГ. Пунктирные кривые – построения $I(\epsilon)$ в координатах; 1 – $F(\epsilon) = 2|\ln I(\epsilon)|^{1/2}$; 2 – $F(\epsilon) = [I^{-1}(\epsilon) - 1]^{1/2}$; 3 – $F(\epsilon) = \ln[I^{-1}(\epsilon) + (I^{-2}(\epsilon) - 1)^{1/2}]$

Рис. 53.2. Зависимость ширины спектральной плотности ПСВ от мощности накачки P для сферы ЖИГ

циям случайного процесса на экране спектроанализатора. Для выяснения характера экспериментальной кривой $I(\epsilon)$ она была построена в различных спрямляющих координатах. Если $I(\epsilon)$ является гауссовой кривой, то она будет представлять собой прямую линию в координатах $[\ln(1/I)]^{1/2}$, ϵ; если $I(\epsilon)$ – лоренцева кривая, то прямая линия будет иметь место в координатах $(1/I - 1)^{1/2}$, ϵ, если $I \sim (\epsilon/\mathrm{sh}\,\epsilon)^{1/2}$, то к прямой линии приведет построение $I(\epsilon)$ в координатах $\ln[1/I + (1/I^2 - 1)^{1/2}]$. Из рис. 53.1 видно, что первые две стандартные функции совершенно не подходят для описания эксперимента, в то время как функция $(x/\mathrm{sh}\,x)^{1/2}$ удовлетворительно совпадает с экспериментом. Подобное совпадение формы кривой $I(\epsilon)$ наблюдалось для всех исследованных образцов при различной надкритичности и значениях постоянного магнитного поля. Тангенс угла наклона прямой линии 3 на рис. 53.1 определяет ширину кривой $\Delta\epsilon$, которая из-за особенностей квадратичного детектора в $\sqrt{6}$ раз больше реальной ширины кривой электромагнитного излучения $\Delta\omega$, совпадающей с шириной спектральной плотности ПСВ. На рис. 53.2 приведена также зависимость ширины распределения ПСВ $\Delta\omega$ от надкритичности $p = (h/h_{\mathrm{th}})^2$. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с результатами теории, изложенной в этом пункте.

§ 54. Угловое распределение ПСВ в анизотропной среде

Несмотря на то, что обычно используемый в экспериментах по параметрическому возбуждению СВ ЖИГ обладает очень малой кристаллографической анизотропией, эксперименты, проведенные А.С. Бакаем и др. [54], Г.А. Мелковым и И.В. Круценко [135], убедительно продемонстрировали

резкую анизотропию распределения ПСВ по азимутальному углу φ. В этом параграфе мы разовьем ST^2-теорию на случай анизотропных распределений ПСВ и обсудим результаты этих экспериментов. В дальнейшем мы будем рассматривать параметрическое возбуждение СВ в магнетиках с кубической симметрией. Причиной анизотропии по φ распределения ПСВ в кубических ФМ может быть лишь анизотропия затухания СВ $\gamma(k)$, так как все остальные существенные величины: коэффициент связи с накачкой и матричный элемент четырехмагнонного взаимодействия не имеют выделенного направления в экваториальной плоскости $\theta_k = \pi/2$. Если намагниченность направлена вдоль осей [100] или [111], то из соображений симметрии на экваторе резонансной поверхности

$$\gamma(\varphi) = \gamma_0 + \gamma_1(1 - \cos 4\varphi), \quad \gamma(\varphi) = \gamma_0 + \gamma_2(1 - \cos 6\varphi). \tag{54.1}$$

Для произвольного направления намагниченности

$$\gamma(\varphi) = \gamma + \gamma_3(1 - \cos 2\varphi). \tag{54.2}$$

Микроскопические механизмы релаксации СВ в ЖИГ, приводящие к анизотропии затухания, исследованы И.В. Колоколовым, В.С. Львовым, В.Б. Черепановым [123]. Здесь мы, однако, будем считать γ_i $(i = 1, 2, 3)$ феноменологическими константами, причем $\gamma_i \ll \gamma_0$. В соответствии с S-теорией распределение ПСВ при анизотропии затухания должно быть сингулярным:

$$n(\varphi) \sim \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^{Z} \delta(\varphi - 2\pi j/Z), \tag{54.3}$$

где Z – число минимумов функции $\gamma(\varphi)$. Необходимо отметить, что интегральные характеристики системы ПСВ мало чувствительны к зависимости $n(\Omega)$ от азимутального угла φ, а коэффициенты гамильтониана взаимодействия волн $S(k, k')$ таковы, что уравнения S-теории в стационарном случае определяют интегральное число ПСВ N, налагая при этом единственное ограничение на вид зависимости $n(\varphi)$:

$$\int n(\theta, \varphi) \exp(2i\varphi)\, d\varphi = 0. \tag{54.4}$$

Таким образом, в рамках S-теории в принципе допустимы сильно анизотропные по φ распределения вплоть до сингулярных распределений (54.3). В действительности сингулярные распределения неустойчивы, и форма пакета обусловлена конкуренцией двух слабых факторов, не учитываемых в S-теории для аксиально-симметричной ситуации. С одной стороны, это слабая кристаллографическая анизотропия в кубических ФМ, которая стремится стянуть распределение ПСВ $n(\varphi)$ до сингулярного состояния в виде креста $(Z = 4)$, если намагниченность ориентирована по оси симметрии четвертого порядка $\boldsymbol{M} \parallel [100]$, или до шестиконечной звезды $(Z = 6)$, если $\boldsymbol{M}$ ориентирована по оси третьего порядка $(\boldsymbol{M} \parallel [111])$. С другой стороны, это процессы рассеяния ПСВ друг на друге и на слабых случайных неоднородностях, дефектах, которые стремятся размазать, сделать изотропным распределение параметрических волн $n(\varphi)$. При этом полное число ПСВ N по-прежнему определяется соотношением S-теории:

$$N = \gamma(p - 1)^{1/2} / |S|. \tag{54.5}$$

54.1. Уширение распределения параметрических волн из-за их рассеяния друг на друге. При малой анизотропии распределение ПСВ на резонансной

поверхности представляет собой совокупность длинных полосок с $\Delta\varphi \gg \Delta\theta$, вытянутых вдоль экватора. Поэтому при анализе распределения по θ можно считать распределение по φ изотропным. В таком предположении распределение по θ анализировалось в § 53, где было показано, что

$$\Delta\theta \approx \nu_0/\gamma \approx [\gamma d(p-1)/kv]^{1/3}. \tag{54.6}$$

Там же было выведено уравнение (53.4), описывающее распределение $n(\theta, \varphi, \epsilon)$. В одночастотном приближении и при $\Delta\theta \ll \Delta\varphi$ из него следует уравнение для функции распределения ПСВ по азимутальным углам $n(\varphi)$:

$$n(\varphi) = \int n(x, \varphi, \epsilon)\, dx\, d\epsilon =$$

$$= \frac{4\pi\gamma^2 n(\varphi)}{kv\nu^3} \int \frac{n^2(\varphi')[\operatorname{Im} S(\varphi, \varphi')]^2 d\varphi'}{|\sin(\varphi - \varphi')|}, \tag{54.7}$$

$$\nu^2 = \nu^2(\varphi) = \nu_0^2 + \tfrac{1}{2}\nu_1^2 \sum_{j=1}^{Z} [1 - \cos(2\pi j/Z - \varphi)], \tag{54.8}$$

$$\operatorname{Im} S(\varphi, \varphi') = \Delta S \sin 2(\varphi - \varphi'). \tag{54.9}$$

Здесь $\nu_1 = \delta\gamma$, $\delta \ll 1$, характеризует малость анизотропии по φ В соответствии с (54.1) $\delta = Z(\gamma_1/\gamma)^{1/2}$, при $M \parallel [100]$ ищем решение уравнения (54.7) в виде размытого креста $(Z = 4)$:

$$N(\varphi) = \tfrac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} F(\varphi - \pi j/2), \quad \int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi = 1. \tag{54.10}$$

Функция $F(\varphi)$ удовлетворяет уравнению, следующему из (54.7):

$$F(\varphi) = \frac{2\pi(\gamma\Delta SN)^2 F(\varphi)}{kv\nu^3(\varphi)} \int_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi - \varphi'| F^2(\varphi')\, d\varphi'. \tag{54.11}$$

Она отлична от нуля в интервале $-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ и нормирована в нем на единицу. В этом интервале можно сократить уравнение (54.11) на $F(\varphi)$ и продифференцировать его дважды по φ. В результате получаем

$$F^2(\varphi) = \frac{kv}{\pi(\gamma\Delta SN)^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \nu^3(\varphi) = \frac{3\nu_1^2\nu_0 kv}{\pi(\gamma\Delta SN)^2} \frac{1 + 2\nu_1^2\varphi^2/\nu_0^2}{(1 + \nu_1^2\varphi^2/\nu_0^2)^{1/2}}. \tag{54.12}$$

Подставляя эту функцию в (54.11), определяем α:

$$\alpha^2 = \nu_0^2/2\nu_1^2 = \nu_0^2/32\gamma\gamma_1. \tag{54.13}$$

Видно, что в области $|\varphi| < \alpha$ функция $F(\varphi)$ изменяется не более чем на 10%. При $|\varphi| > \alpha$ функция $F(\varphi)$ резко обрывается до нуля. Величину ν_0, определяющую по (54.13) ширину размытия пакета ПСВ по φ, можно определить из условия нормировки (6.18):

$$(\nu_0/\gamma) = [\pi\gamma d(p-1)/6k_0 v]^{1/3}. \tag{54.14}$$

С точностью до несущественного числового коэффициента это выражение совпадает с выражением (53.10), полученным для изотропной по φ ситуации. Выражения (54.6), (54.13) и (54.14) определяют ширину функции распределения по φ и по θ. По порядку величины

$$\Delta\theta \approx \nu_0/\gamma \approx [\gamma d(p-1)/k_0 v]^{1/3}, \qquad \Delta\varphi \approx \Delta\theta/\delta, \quad \delta = 4(\gamma_1/\gamma)^{1/2}. \tag{54.15}$$

Несколько иная ситуация складывается при $M \parallel [111]$, когда распределение имеет вид размытой шестиконечной звезды ($Z = 6$). Для функции $F(\varphi)$ из (54.7) и (54.3) получается в этом случае уравнение, отличное от (54.11):

$$F(\varphi) = \frac{8\pi(\gamma\Delta SN)^2 F(\varphi)}{9kv\nu^3} \int_{-\alpha}^{\alpha} (|\varphi - \varphi'| + \sqrt{3}/4) F^2(\varphi')\, d\varphi'. \tag{54.16}$$

Здесь основной вклад дает рассеяние на углы $|\varphi - \varphi'| \approx \pi/3;\ 2\pi/3$, а рассеяние на углы $|\varphi - \varphi'| \approx 0;\ \pi$ определяет вид функции $F(\varphi)$. Как и прежде, сокращая (54.16) на $F(\varphi)$ и дважды дифференцируя полученное выражение по φ, получим

$$F^2(\varphi) = \frac{27\nu_1^2\nu_0 kv}{16\pi(\gamma\Delta SN)^2} \frac{1 + 2\nu_1^2\varphi^2/\nu_0^2}{(1 + \nu_1^2\varphi^2/\nu_0^2)^{1/2}}. \tag{54.17}$$

Однако раствор сектора α, в котором решение $F(\varphi)$ отлично от нуля, равен

$$\alpha = 4\nu_0^2/3\sqrt{3}\,\nu_1^2, \tag{54.18}$$

а вид функции $F(\varphi)$ близок к прямоугольному с высотой $1/2\alpha$. Из условия нормировки выражения (54.18) для $F(\varphi)$ имеем

$$\begin{aligned} &\nu_0/\gamma = [3\pi d\nu_1^2 (p-1)/4\gamma kv]^{1/5} \approx \Delta\theta^*, \\ &\nu_1^2 = 36\gamma\gamma_1. \end{aligned} \tag{54.19}$$

Отсюда и из (54.18) получаются выражения для угловых размеров пакета:

$$\begin{aligned} &\Delta\theta^* \approx \left[\frac{27\pi\gamma_1 d(p-1)}{kv}\right]^{1/5}, \\ &\Delta\varphi^* \approx \frac{2}{27\sqrt{3}} \left[\frac{27\pi\gamma_1 d(p-1)}{kv}\right]^{2/5} \frac{\gamma}{\gamma_1}. \end{aligned} \tag{54.20}$$

Отметим, что в рассмотренном случае $\Delta\varphi^*$ и $\Delta\theta^*$ не связаны стандартным соотношением (54.15), а именно $\Delta\varphi^* \ll \Delta\theta^*/\delta$.

В случае, когда намагниченность ориентирована вдоль оси симметрии второго порядка ($M \parallel [110]$), за порогом параметрической неустойчивости возбуждается одна размытая пара с шириной $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$, определяемой по формулам (54.15). Такое состояние не удовлетворяет условию (54.4), полученному в S-теории для изотропных ФМ, в результате оно существует в узком диапазоне надкритичности, определяемом кубической анизотропией:

$$p - 1 < (\delta/d)^2 \approx p^- - 1. \tag{54.21}$$

При $p > p^-$ возбуждается вторая группа пар в плоскости экватора (т.е. $\theta = \pi/2$), ориентированная под прямым углом к первой, т.е. возбуждается крест с шириной (54.15). Надо сказать, что выражения (5.4) для Φ_{int} и Ψ_{int} были получены в пренебрежении перенормировкой вершин, т.е. при

$$\epsilon \equiv (\Delta T/T) \sim \gamma^2 (p-1)^{1/2}/kv\nu_0\alpha^2 \sim \delta^2/(p-1) \ll 1. \tag{54.22}$$

Этот же параметр характеризует отклонение четверного коррелятора от произведения парных. Другими словами, фазы волн в пакете почти случайны.

Таким образом, при малой анизотропии ($\delta \ll 1$) распределение ПСВ состоит из совокупности пар волновых пакетов с почти случайными фазами и резкими по аксиальному углу границами. Заметим, что слабое рассеяние на неоднородностях и малые добавки $\delta\Phi_{\text{int}}$, уточняющие аппроксимацию (54.9) $\delta\Phi_{\text{int}} \sim (\nu_0/\gamma)^2\Phi_{\text{int}}$, приводят к размытию разрывов $N(\varphi)$.

54.2. Эксперимент по измерению угловых размеров пакета ПСВ $\Delta\theta_k$ и $\Delta\varphi_k$. Здесь мы опишем изящный эксперимент Г.А. Мелкова и И.В. Круценко [135]. Его идея, основанная на следующем свойстве спектра СВ в ФМ: при не слишком больших частотах кривизны поверхности $\omega_k = \text{const}$ вдоль экватора $\theta_k = \pi/2$ и поперек $\varphi = \text{const}$ имеют разные знаки. Если бы пакет ПСВ по углам был сингулярен: $n(\Omega) \sim \delta(\theta - \pi/2)\,\delta(\varphi)$, то процессы слияния двух ПСВ в третью СВ был бы разрешен при единственном значении магнитного поля $H = H_{3M}$. Если пакет уширен по углу φ, то слияния разрешены в области полей $H' < H < H_{3M}$, причем

$$\Delta\varphi \sim (H_{3M} - H')^{1/2}, \tag{54.23}$$

Если же пакет уширен по полярному углу θ, то слияния разрешены при $H_{3M} < H < H''$,

$$\Delta\theta \sim (H'' - H_{3M})^{1/2}, \tag{54.24}$$

где H'' – магнитное поле, при котором $k = 0$, $\theta_k = \pi/2$ (А.С. Бакай и др., [54]). К сожалению, образующиеся в результате слияния двух ПСВ спиновые волны имеют частоту, равную частоте накачки, и детектировать их на фоне мощного сигнала накачки невозможно. Поэтому в эксперименте измерялось излучение на частоте $2\omega_p$, обусловленное слияниями образовавшихся СВ с частотой ω_p. Характерная зависимость мощности излучения $P(2\omega_p)$ от магнитного поля для нескольких значений температуры приведена на рис. 54.1. Видно, что при комнатной температуре распределе-

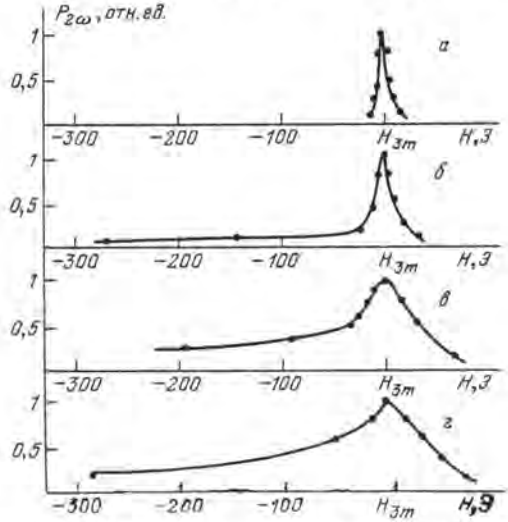


Рис. 54.1. Зависимость мощности излучения на удвоенной частоте накачки $P_{2\omega}$ от постоянного магнитного поля для образца ЖИГ при различных температурах, К: $T = 300$ К (*а*); $T = 210$ (*б*); $T = 110$ К (*в*); $T = 50$ (*г*)

ние ПСВ является узким по углам, причем значения и зависимость ширины $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$ от надкритичности составляют несколько градусов и согласуются с результатами изложенной в § 53 теории уширения, обусловленного рассеянием ПСВ друг на друге. С изменением температуры, помимо узкого по азимутальному углу пика, возникает изотропный по φ фон ПСВ. Ширина самого пика $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$ также увеличивается. Этот эффект находит естественное объяснение как следствие упругого рассеяния на дефектах, относительная роль которого с уменьшением температуры растет. Влияние дефектов на уширение пакета ПСВ рассматривалось в предыдущей главе. Однако сравнение теории с экспериментом при низких температурах затруднено из-за отсутствия необходимой информации о рассеянии на дефектах.

§ 55. Влияние рассеяния ПСВ друг на друге на коллективные колебания

55.1. Исходные уравнения. Общие уравнения для коллективных колебаний (КК) ПСВ с учетом их рассеяния друг на друге приведены в гл. 7 (формулы (38.4)). В этом параграфе мы рассмотрим КК ПСВ в кубических ФМ. Сначала мы пренебрежем анизотропией затухания СВ. В этом случае ПСВ локализованы в $\boldsymbol{k}$-пространстве вблизи экватора резонансной поверхности $\tilde{\omega}_{\boldsymbol{k}} = \omega_p/2$. КК в приближении S-теории (т.е. с учетом только самосогласованных диаграмм в Σ и Π, $|\Pi_{\boldsymbol{k}}| = \gamma_{\boldsymbol{k}}$, $|\sigma_{\boldsymbol{k}}| = n_{\boldsymbol{k}}$) изучены в § 23. Для частот пространственно-однородных ($\kappa = 0$) КК $\Omega_m^{\pm}$ было получено простое выражение (23.6). Этот результат, так же как и исходные уравнения S-теории, не чувствителен к деталям распределения ПСВ в $(\boldsymbol{k}, \omega)$-пространстве и справедлив как при многочастотном, так и при одночастотном состояниях ПВ. Высшие диаграммы в (38.4), связанные с рассеянием ПСВ друг на друге, вносят в (23.6) малые поправки

$$\Delta\Omega \sim \gamma\,[(TN)^2/\gamma k v]^{2/3}$$

и не представляют интереса. Следует, однако, отметить, что линеаризованная система уравнений (38.4) имеет высокий порядок и в приближении S-теории имеет, помимо $\Omega_m^{\pm}$ (23.6), также и тривиальное собственное значение $\Omega_m = 0$. Колебания, соответствующие этому собственному значению, являются для нас наиболее интересными, так как слабое взаимодействие ПВ ($\sim T^2$) должно приводить к нарушению их безразличной устойчивости.

В области частот ω, $\omega' \ll \gamma$ рассмотрим следующие интегральные величины:

$$N(\varphi) = \int [n_q(\Omega) + n_q^+(\Omega)]\, k^2\, dk\, d\omega, \quad q = (\boldsymbol{k}, \omega),$$

$$K(\varphi) = \frac{i}{\gamma} \int [\Pi_{\boldsymbol{k}}^* \sigma_q(\Omega) - \Pi_{\boldsymbol{k}} \sigma_q^+(\Omega)]\, k^2\, dk\, d\omega, \tag{55.1}$$

$$M(\varphi) = \frac{1}{\gamma} \int [\Pi_{\boldsymbol{k}}^* \sigma_q(\Omega) + \Pi_{\boldsymbol{k}} \sigma_q^*(\Omega)]\, k^2\, dk\, d\omega.$$

Индекс плюс означает замену $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$, $\omega \to \omega_p - \omega$ и комплексное сопряжение. Уравнения для $N(\varphi)$, $K(\varphi)$ и $M(\varphi)$ имеют следующий вид:

$$\pi N(\varphi) = \int \left\{ \frac{(\nu'_+ + \nu'_- + \nu_-)\, N(\omega')}{\nu_-(\nu'_+ + \nu_-)(\nu'_- + \nu_-)} + \frac{(\nu_+ + \nu_- + \nu'_+)\, N(\omega)}{\nu'_+(\nu_+ + \nu'_+)(\nu_- + \nu'_+)} \right\} \times$$

$$\times \{-i\gamma[\Sigma(\varphi)-\Sigma^{+}(\varphi)]+\Pi^{*}(\varphi)\Pi(\varphi)+\Pi(\varphi)\Pi^{+}(\varphi)\}\,d\omega+$$

$$+\frac{\pi k^2}{v\nu'_{+}\nu_{-}(\nu_{-}-\nu'_{+})}\int\gamma[\gamma\Phi(\varphi)+\gamma\Phi^{+}(\varphi)+i\Pi(\varphi)\Psi(\varphi)-$$

$$-i\Pi^{*}(\varphi)\Psi(\varphi)]\,d\omega,\quad K(\varphi)=N(\varphi), \tag{55.2}$$

$$2\pi M(\varphi)=\int\left\{\frac{(\nu'_{+}+\nu'_{-}+\nu_{-})N(\omega')}{\nu_{-}(\nu'_{+}+\nu_{-})(\nu'_{-}+\nu_{-})}+\frac{(\nu_{+}+\nu_{-}+\nu'_{+})N(\omega)}{\nu'_{+}(\nu_{+}+\nu'_{+})(\nu_{-}+\nu'_{+})}\right\}\times$$

$$\times\left\{i\Omega[\Sigma(\varphi)+\Sigma^{+}(\varphi)]-\left[\left(\frac{v}{\gamma}\right)^2-\frac{i\Omega}{\gamma}\right][\Pi^{*}(\varphi)\Pi(\varphi)-\Pi(\varphi)\Pi^{+}(\varphi)]\right\}d\omega,$$

$$\nu_{\pm}=(v^2\pm 2i\gamma\omega)^{1/2},\quad \nu'_{\pm}=(v^2\pm 2i\gamma\omega')^{1/2},$$

v — ширина распределения ПВ в $\boldsymbol{k}$-пространстве (53.10).

Перейдя к переменным (55.1), мы тем самым ограничили исследуемый класс колебаний движениями, изменяющими интегральную амплитуду ПСВ. Помимо них, в системе ПСВ существуют колебания распределения $n(q)$, не меняющие интегральных характеристик. Такие возмущения мы здесь не рассматриваем.

При $SN \gg v$, как показывает анализ уравнений (55.2), можно ограничиться в Σ и Π самосогласованными диаграммами и положить $\Phi = \Psi = 0$. В этом приближении система (55.2) замыкается и, поскольку уравнение для $N(\varphi)$ содержит малый знаменатель, приводится к виду $M(\varphi) = 0$ или

$$[i\Omega 2T_m-(v^2/\gamma-i\Omega)S_m]\,N_m=0, \tag{55.3}$$

где m — номер азимутальной гармоники. Из (55.3) получаем окончательно для Ω_m выражение

$$\Omega_m=-i(v^2/\gamma)S_m/(2T_m+S_m), \tag{55.4}$$

так что при $S_m(2T_m+S_m)>0$, когда устойчивы коллективные колебания S-теория, мода (55.4) тоже устойчива. В этих низкочастотных по сравнению с (23.6) колебаниях участвуют амплитуды n_k и $|\sigma_k|$ при фиксированной фазе σ_k. Отличие Ω_m от нуля обусловлено отличием $|\Pi_k|$ от γ_k и $|\sigma_k|$ от n_k.

55.2. Устойчивость и коллективные колебания анизотропно распределенных ПСВ. Здесь мы получим частоты КК резко анизотропных состояний ПСВ, изученных выше.

Высокочастотные коллективные колебания. Спектр этих КК можно получить в рамках S-теории линеаризацией ее уравнений на фоне основного состояния в виде креста ($Z = 4$) или звезды ($Z = 6$). Ответ по форме совпадает с формулой (23.6) для аксиально-симметричного распределения:

$$\Omega_m^{\pm}=-i\gamma\pm\{4S_m[2T_m+S_m]N^2-\gamma^2\}^{1/2}. \tag{55.5}$$

Однако величины T_m и S_m иначе выражаются через фурье-гармоники матричных элементов $T(\varphi)$ и $S(\varphi)$. Именно, для пары волн ($Z = 1$) остаются

только две моды $\Omega_0^{\pm}$, где

$$S(0) = S_0 + S_2 + S_{-2},$$

$$T(0) = T_0 + 2T_2.$$

Для креста ($Z = 2$) существуют две пары мод $\Omega_0^{\pm}$ и $\Omega_2^{\pm}$:

$$S(0) = S_0, \quad T(0) = T_0, \quad S(2) = S_2 + S_{-2}, \quad T(2) = 2T_2.$$

Для шестиконечной звезды ($Z = 3$) имеются три пары мод $\Omega_0^{\pm}$ и $\Omega_2^{\pm}$, $\Omega_4^{\pm}$, причем их частоты совпадают с аксиально-симметричным случаем (моды $\Omega_4^{\pm}$ переходят в $\Omega_{-2}^{\pm}$):

$$S(0) = S_0, \quad T(0) = T_0, \quad S(2) = S_2,$$

$$T(2) = T_2, \quad S(4) = S_{-2}, \quad T(4) = T_{-2}.$$

Здесь мы использовали конкретный вид $S(\varphi)$ и $T(\varphi)$ в ФМ:

$$S(\varphi) = (S_0 + S_2 e^{2i\varphi} + S_{-2} e^{-2i\varphi})\, e^{-2i\varphi},$$

$$T(\varphi) = T_0 + T_1 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + T_2 (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}).$$

Низкочастотные коллективные колебания ПСВ. Для аксиально-симметричной системы они описаны в п. 50.1. В нашем случае в пренебрежении рассеянием на неоднородностях эти колебания описываются уравнениями

$$N(\varphi) = n(\varphi, \Omega) + n^*(\varphi, \Omega) = \frac{3N(\varphi)\gamma}{2\pi\nu^3(\varphi)} \int S(\varphi, \varphi') M(\varphi')\, d\varphi',$$

$$M(\varphi) = \frac{1}{\gamma} [\Pi^*(\varphi)\, \sigma(\varphi, \Omega) + \Pi(\varphi)\, \sigma^*(\varphi, \Omega)] =$$

$$= \frac{3N(\varphi)}{4\pi\nu^2(\varphi)} \left\{ \left[i\Omega - \frac{\nu^2(\varphi)}{\gamma} \right] \int S(\varphi, \varphi') N(\varphi')\, d\varphi' + 2i\Omega \int T(\varphi, \varphi') N(\varphi')\, d\varphi' \right\}. \tag{55.6}$$

Используя узость распределения, можно получить после преобразования Фурье в (55.6)

$$\Omega_m = -\frac{iN}{\langle N/\nu^2 \rangle \gamma} \frac{S(m)}{2T(m) + S(m)},$$

$$\langle N/\nu^2 \rangle = \int N(\varphi)\, \nu^{-2}(\varphi)\, d\varphi. \tag{55.7}$$

Отсюда получаем для наиболее интересного случая – креста:

$$\pi\Omega_m = -2i\nu_0 \delta S(m) / [2T(m) + S(m)]. \tag{55.8}$$

Отметим, что в анизотропной системе условия устойчивости высокочастотной и низкочастотной мод (55.5), (55.8):

$$S(m)\, [S(m) + 2T(m)] > 0 \tag{55.9}$$

совпадают так же, как и в аксиально-симметричном случае.

ГЛАВА 11

КИНЕТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИЛЬНО НЕРАВНОВЕСНОЙ СИСТЕМЫ СПИНОВЫХ ВОЛН

§ 56. Линейная теория кинетической неустойчивости

До сих пор при исследовании параметрического возбуждения СВ основное внимание мы уделяли изучению свойств узкого пакета ПСВ с частотами в области параметрической неустойчивости. При этом обычно предполагалось, что остальные СВ находятся в состоянии, близком к термодинамическому равновесию (см. гл. 8). Однако с ростом надкритичности возникает значительное искажение равновесного распределения СВ с частотами вдали от параметрического резонанса, вызванное влиянием ПСВ. Таким образом, при значительных надкритичностях должен возникнуть ряд новых эффектов, экспериментальное и теоретическое изучение которых только начинается. Среди явлений такого рода особый интерес представляют неустойчивости в сильно неравновесной системе СВ и вызванные ими кардинальные перестройки спектра СВ.

56.1. Кинетическая неустойчивость первого порядка. Вне области параметрического резонанса функция распределения СВ n_k удовлетворяет кинетическому уравнению (см. § 39). Если число ПСВ мало́, то функция распределения СВ близка к термодинамически равновесной, а величина неравновесных поправок пропорциональна числу ПСВ. Эти поправки были найдены в гл. 8. Линейное приближение для вычисления возмущений функции распределения применимо до тех пор, пока затухание ТСВ можно считать равновесным. Понятно, что с ростом числа ПСВ растет и вклад в затухание ТСВ, обусловленный ими. В ряде случаев этот вклад бывает отрицательным, что приводит к уменьшению затухания СВ и качественной перестройке спектра по отношению к результатам линейного приближения.

Рассмотрим вклад в затухание ТСВ из-за распадов ПСВ:

$$\gamma(\boldsymbol{k}) = \gamma_0(\boldsymbol{k}) - \pi \int |V(\boldsymbol{k}_p \boldsymbol{k} \boldsymbol{k}_1)|^2 \; n_p(\boldsymbol{k}_p)\, \delta[\omega(\boldsymbol{k}_p) - \omega(\boldsymbol{k}) - \omega(\boldsymbol{k}_1)]\, \delta(\boldsymbol{k}_p - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1)\, d\boldsymbol{k}_p\, d\boldsymbol{k}_1. \tag{56.1}$$

Здесь $\gamma_0(\boldsymbol{k})$ – равновесное затухание ТСВ. Видно, что в области $\boldsymbol{k}$-пространства, в которую попадают продукты распада ПСВ, затухание СВ уменьшается, и при достаточно большом числе ПСВ оно может стать отрицательным. Понятно, что при $\gamma < 0$ число волн нарастает – развивается неустойчивость, которую мы назовем *кинетической*. Для более точного анализа *кинетической неустойчивости* (КН) следует линеаризовать кинетическое уравнение на фоне стационарного распределения, представляющего собой совокупность термодинамически равновесного распределения и пакета ПСВ. В результате оказываются связанными интенсивности пакетов вторичных СВ (ВСВ) с частотами ω_1 и ω_2. Теория КН, обусловленная трехволновыми процессами, наиболее подробно развита для АФМ, в которых разрешены распады ПСВ на вторичные фононы (ВФ) и вторичные СВ (ВСВ) (В.С. Лутовинов, Г.Е. Фалькович, В.Б. Черепанов, [147]). Косвенные проявления этой неустойчивости были обнаружены ранее в $FeBO_3$ Б.Я. Котюжанским, Л.А. Прозоровой и Л.Е. Свистовым [131].

Для анализа КН выпишем систему линеаризованных КУ для возмущений функций распределения ВСВ δn_k и ВФ δN_k в сферической нормировке:

$$\delta n_k = 2\pi^2 \frac{\theta_N^3 \delta n(\epsilon_n)}{\epsilon_k (\epsilon_k^2 - \epsilon_0^2)^{1/2}}, \quad \delta N_k = 2\pi^2 \frac{\theta_N^3}{\alpha^3 \Omega_{k'}^2} \delta N(\Omega_{k'}), \tag{56.2}$$

$$(\gamma_k^0 - \Delta\gamma_k)\,\delta n(\epsilon_k)\,\delta n(\epsilon_k) = \alpha^{-3} D \delta N(\epsilon_p - \epsilon_N) + r(\omega_k), \tag{56.3}$$

$$(\Gamma_{k'}^0 - \Delta\Gamma_{k'})\,\delta N(\epsilon_p - \epsilon_k) = D \frac{(\epsilon_p - \epsilon_k)^2}{\epsilon_k sk} \delta n(\epsilon_k) + R(\omega_p/2 - \omega_k),$$

где

$$\Delta\gamma_k = \pi\zeta\alpha^2 \frac{J_0^2 \epsilon_0^2 \Omega^2 n^p}{\epsilon_p sk_p \epsilon_k sk}, \quad \Delta\Gamma_{k'} = \Delta\gamma_k \frac{\epsilon_k sk}{\alpha^3 \Omega^2},$$

$$\Omega = ck' = \epsilon_p - \epsilon_k, \quad D = \pi\zeta\alpha^2 J_0 \epsilon_0^2 n^p / \epsilon_p sk_p.$$

Здесь γ_k^0 и $\Gamma_{k'}^0$ – равновесные затухания магнонов и фононов, θ_N – температура Нееля, ω_0 – щель в спектре магнонов, S – их скорость (см. (7.5)), c – скорость звука, $\alpha = s/c$, k_p – волновой вектор ПСВ, N_p – их количество, ζ – параметр магнитострикции, входящий в матричный элемент взаимодействия магнонов и фононов (25.6), S – значение спина магнитного иона.

При

$$n^p = n_{\text{cr}}^p = \frac{\epsilon_p sk_p}{\pi\alpha^2 \zeta J_0 \epsilon_0^2} \frac{\gamma_k^0 \Gamma_q^0}{\gamma_k^0 \alpha^{-3} + \Gamma_q^0 (\epsilon_p - \epsilon_k)^2 / \epsilon_k sk} \tag{56.4}$$

определитель системы (56.3) обращается в нуль и развивается КН. В $FeBO_3$ частоты релаксации магнонов и фононов одного порядка, $\alpha^{-3} \ll 1$, поэтому

$$n_{\text{cr}} \approx \frac{\epsilon_p \epsilon_k sk_p sk\, \gamma_k^0}{\pi\alpha^2 \zeta J_0 \epsilon_0^2 (\epsilon_p - \epsilon_k)^2}, \tag{56.5}$$

что соответствует обращению в нуль суммарного затухания магнонов $(\gamma_k^0 - \Delta\gamma_k)$. Из (56.5) видно, что порог кинетической неустойчивости минимален при меньшем k вторичных магнонов, разрешенном законами сохранения. Нетрудно определить, что для распадов ПСВ на магнон и фонон

$$sk_{\min} = |sk_p - 2(\alpha^2 - 1)^{-1} (\alpha\epsilon_p - sk_p)|.$$

В условиях упомянутого выше эксперимента

$$n_{\text{cr}}^p \approx 2 \cdot 10^{-8} \frac{sk_p\, sk_{\min}}{(\epsilon_p - \epsilon_{k\,\min})^2},$$

Множитель $k_p k_{\min} (\epsilon_p - \epsilon_{k\,\min})^{-2}$ зависит от магнитного поля и изменяется от $(\alpha^2 - 1)\,4 \approx 2$ при $H = H_c$ $(k_p = 0)$ до 0 при $H = 240$ Э. Если для оценки воспользоваться экспериментальным значением коэффициента нелинейного затухания, то порог кинетической неустойчивости $n_{\text{cr}} \approx 2 \cdot 10^{-8}$ достигается уже при $h/h_c - 1 \approx 0{,}1$:

$$(h_{\text{cr}}/h_{\text{th}}) - 1 \approx (2\omega_0/\omega_p)^2\, \gamma_{01}/\gamma_{0p}. \tag{56.6}$$

По аналогии с суловскими процессами первого порядка (распада ОП на две СВ) кинетическую неустойчивость, обусловленную трехволновыми про-

цессами, мы назовем *кинетической неустойчивостью первого порядка*. Подчеркнем, что в отличие от параметрической неустойчивости в результате развития КН растет лишь число волн, а средняя амплитуда волн в пакете $\langle a_k \rangle$ равна нулю. Следует также отметить, что инкремент КН определяется лишь общим числом неравновесных СВ и не зависит от фазовых соотношений между ними.

56.2. Кинетическая неустойчивость второго порядка [139]. Если ПСВ находятся в нераспадной области спектра, КН первого порядка невозможна. Однако при больших надкритичностях возникает неустойчивость системы ПСВ по отношению к рождению вторичных СВ в результате четырехмагнонного процесса: две ПСВ, сливаясь, дают две ВСВ. При этом выполняются законы сохранения энергии и импульса

$$\begin{aligned} &\omega(k_p) + \omega(k_p') = \omega(k_1) + \omega(k_2), \\ &k_p + k_p' = k_1 + k_2. \end{aligned} \tag{56.7}$$

В нераспадной области спектра эта неустойчивость представляет наибольший интерес, поскольку все остальные мыслимые неустойчивости системы ПСВ связаны с процессами более высоких порядков и поэтому имеют более высокий порог. В столкновительный член кинетического уравнения вносят вклад всевозможные процессы рассеяния СВ, однако нас интересует случай, когда ПСВ находятся в нераспадной области спектра и длинные СВ могут взаимодействовать с параметрическими только в процессах четырехмагнонного рассеяния. Во всех остальных процессах числа заполнения квазичастиц изменяются мало и их влияние приводит лишь к линейной релаксации СВ, если число последних не слишком велико. Таким образом, столкновительный член следует записать в виде (см. § 35)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n(k)}{\partial t} = -2\gamma_0(k)\,[n(k) - n_0(k)] + 4\pi \int \{|T(kk_1, k_2k_3)| \times \\ &\times [n(k)\,n_1(n_2 + n_3) - n_2 n_3 n(k) - n_1 n_2 n_3] + \\ &+ \operatorname{Re} T(kk_1, k_2k_3)\, T^*(k\bar{k}_2, \bar{k}_1 k_3) \times \\ &\times \sigma_1^* [\sigma_2 n(k) - \sigma_2 n_3 + \sigma_3 n(k) - \sigma_3 n_2]\} \times \\ &\times \delta[\omega(k) + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3]\,\delta(k + k_1 - k_2 - k_3)\,dk_1\,dk_2\,dk_3, \\ &\sigma_i = \sigma(k_i),\ n_i = n(k_i),\ \omega_i = \omega(k_i),\ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{56.8}$$

Здесь $\gamma_0(k)$ – частота релаксации СВ за счет всех процессов, кроме (56.7): $\gamma_0(k) = \gamma_k - \gamma_4(k)$, где γ_4 – частота релаксации СВ, обусловленная четырехмагнонным рассеянием, γ_k – полная частота релаксации. Уравнение (56.8) отличается от стандартного наличием аномальных корреляторов параметрических волн $\langle a_k a_{-k} \rangle$.

Для вычисления порога и инкремента этой неустойчивости линеаризуем кинетическое уравнение (56.8). Общее решение линеаризованного кинетического уравнения представимо в виде суммы частных решений вида

$$\begin{aligned} &n(k) = n_1(k) + n_2(k),\quad n_i(k) \propto \delta(\omega_k - \omega_i),\quad i = 1, 2, \\ &\omega_1 + \omega_2 = \omega_p. \end{aligned}$$

Из (56.8) следует уравнение, похожее на (56.2):

$$[\nu+\gamma_{0i}(\Omega)]\,n_i(\Omega)+2\pi k_i^2 v_i^{-1}\int\{|T_{i123}|^2\,[2n_p(\Omega_1)\,n_p(\Omega_2)\,n_i(\Omega)-$$
$$-2n_p(\Omega_1)\,n_p(\Omega_2)\,n_i(\Omega_3)-n_p(\Omega_2)\,n_p(\Omega_3)\,(n_i(\Omega)+n_j(\Omega_1))]+$$
$$+2\,\mathrm{Re}\,T_{i123}T^*_{i\bar{2}\bar{1}3}\,\sigma^*(\Omega_1)\,\sigma(\Omega_2)\,[n_i(\Omega)-n_i(\Omega_3)]\}\times \tag{56.9}$$
$$\times\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)\,d\Omega_1\,d\Omega_2\,d\Omega_3,$$
$$\boldsymbol{k}_i=\boldsymbol{k}_i(\Omega),\quad v_i=v_i(\Omega),\quad \bar{\boldsymbol{k}}=-\boldsymbol{k}.$$

В изотропном случае для n_i, n_j отсюда получается уравнение (56.3), в котором

$$\Delta\gamma_i=B_{ij}=\pi\,(TN)^2/k_p\,v_p. \tag{56.10}$$

Порог неустойчивости достигается при числе ПСВ N_{cr}:

$$\pi\,(TN_{\mathrm{cr}})^2/k_p\,v_p=\gamma_{01}\gamma_{02}/(\gamma_{01}+\gamma_{02}). \tag{56.11}$$

Обычно правая часть минимальна, если одно из затуханий, например γ_{01}, минимально, т.е. при $\boldsymbol{k}_1\to 0$. При этом $\gamma_2\gg\gamma_1$ и

$$\pi\,(TN_{\mathrm{cr}})^2/k_p\,v_p=\gamma_{01}=\gamma_0, \tag{56.12}$$

где γ_0 — минимальное затухание СВ. Определяя число ПСВ из S-теории, получим оценку для пороговой надкритичности, т.е. превышения мощности накачки p_{cr} над порогом параметрической неустойчивости h_{th}, при которой возникает обсуждаемая здесь неустойчивость:

$$p_{\mathrm{cr}}=(h_{\mathrm{cr}}/h_{\mathrm{th}})^2=\pi^{-1}(S/T)^2\,(\gamma_0 k_p\,v_p/\gamma_p^2). \tag{56.13}$$

Дальнейшее исследование исходных уравнений (56.9) имеет смысл проводить при $\gamma_{01}\ll\gamma_{02}$, когда число вторичных СВ с большим затуханием мало, и поэтому в линеаризованном кинетическом уравнении для $n_1(\Omega)$ им можно пренебречь. Тогда вместо (56.9) получим

$$[\nu+\gamma_{01}(\Omega_1)-2\pi k_p^2(\Omega_1)\,v_p^{-1}(\Omega_1)\int|T_{12,34}|^2\,n_p(\Omega_3)\,n_p(\Omega_4)\times$$
$$\times\,\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_4)\,d\Omega_2\,d\Omega_3\,d\Omega_4]\,n_1(\Omega_1)=$$
$$=4\pi k_p^{2*}(\Omega_1)\,v_p^{-1}(\Omega_1)\int\{|T_{12,34}|^2\,n_p(\Omega_2)\,n_p(\Omega_3)+$$
$$+\mathrm{Re}\,T_{12,34}T^*_{1\bar{3},\bar{2}4}\,\sigma^*(\Omega_2)\,\sigma(\Omega_3)\}\,[n_1(\Omega_3)-n_1(\Omega_1)]\times$$
$$\times\,\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_4)\,d\Omega_2\,d\Omega_3\,d\Omega_4. \tag{56.14}$$

Обратим внимание на то, что интеграл по Ω_1 правой части этого выражения равен нулю. Это является следствием того, что в четырехмагнонных процессах рассеяния ВСВ на ПСВ, в результате которых появляется ПСВ и вторичная СВ, сохраняется число ВСВ. В результате из (56.14) следует важное интегральное соотношение

$$\int[\nu+\gamma_{01}(\Omega_1)-2\pi k_p^2(\Omega_1)\,v_p^{-1}(\Omega_1)\int|T_{12,34}|^2\,n_p(\Omega_3)\,n_p(\Omega)\times$$
$$\times\,\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_4)\,d\Omega_2\,d\Omega_3\,d\Omega_4]\,n_1(\Omega_1)\,d\Omega_1=0. \tag{56.15}$$

В интересующем нас случае (кубическом ФМ) минимум затухания достигается при $\theta=0$ и малом волновом векторе k_1. Спектр СВ имеет вид (6.5), поэтому на поверхности постоянной частоты допустимые значения угла θ малы: $\theta^2\leqslant 2\omega_{\mathrm{ex}}(ak_{10})^2$. Выражение в квадратных скобках в (56.15)

слабо зависит от угла θ в узком диапазоне углов, где $n_1(\theta) \neq 0$, и тождество (56.15) принимает вид

$$\{\nu + \gamma_{01} + 2\pi \int |T(0, k_1 + k_2; k_1, k_2)|^2 n_p(\Omega_1) n_p(\Omega_2) \times$$
$$\times \delta[\omega_0 + \omega(k_1 + k_2) - \omega_p]\, dk_1\, dk_2\}\, n_1 = 0, \tag{56.16}$$
$$n_1 = \int n_1(\Omega)\, d\Omega.$$

Для вычисления порога КН необходимо знать распределения ПСВ по углам. Воспользуемся вначале простым выражением для $n_p(\Omega)$, полученным в S-теории при надкритичности, меньшей порога рождения второй группы пар

$$n_p(\Omega) = \frac{N\delta(\theta - \pi/2)}{2\pi}, \quad |S|N = \gamma(p-1)^{1/2}. \tag{56.17}$$

Тогда в соответствии с (56.16) получим

$$(TN_{\text{cr}})^2 = 2\pi\gamma_0\omega_M\, [(H_c - H)A/2\pi M]^{1/2}, \quad A \geqslant 0, \tag{56.18}$$
$$A = 4(\Omega_p^2 + 1)^{1/2} - 3 - 6\Omega_0 - [(\Omega_p - \Omega_0)^2 + 1/4]^{1/2}, \tag{56.19}$$
$$\Omega_p = \omega_p/\omega_M, \quad \Omega_0 = \omega_0/\omega_M.$$

Нетрудно убедиться, что величина A и вместе с ней пороговое число N_{cr} (56.18) обращаются в нуль при некотором поле H_2:

$$H_2 = 4\pi M\, \{N_z + [12(\Omega_p^2 + 1)]^{1/2} - 2\Omega_p - 9 -$$
$$- \frac{1}{16}\, [(2 + 4\Omega_p - 6(\Omega_p^2 + 1)^{1/2})^2 + 20\Omega_p - 7]^{1/2}. \tag{56.20}$$

При полях, больших H_2, процессы (56.7) с участием ПСВ на экваторе запрещены и порог (56.18) обращается в бесконечность. Обращение в нуль порога на границе разрешения процессов (56.7) связано с бесконечно большой плотностью состояний, возникшей из-за сингулярности в распределении ПСВ по θ в (56.17). В действительности распределение ПСВ имеет конечную ширину, увеличивающуюся с надкритичностью $\Delta\theta \approx [(p-1)\gamma_p/k_p v_p]^{1/3}$.

Учет этого приводит к исчезновению особенности при $H = H_2$: порог в этом поле хотя и уменьшается, но остается конечным, а при $H > H_2$ резко растет.

56.3. Экспериментальное исследование кинетической неустойчивости. В настоящее время наиболее подробно исследована кинетическая неустойчивость второго порядка в ферритах. Самым ярким ее проявлением являются электромагнитное излучение от ВСВ, возникающее пороговым образом с ростом амплитуды накачки, и возникающие одновременно особенности восприимчивости. Изучение этих явлений проведено А.В. Лавриненко и др. [139]. На рис. 56.1 изображена зависимость порога рождения ВСВ (и излучения) в зависимости от величины магнитного поля H, направленного вдоль легкой оси [111] феррита. Видно, что экспериментально доступная область возбуждения ВСВ заключена в пределах $H_1 \leqslant H \leqslant H_2$, где $H_1 = 0{,}9$ кЭ, $H_2 = 1{,}27$ кЭ. Вне этой области порог резко растет.

Существование верхней границы поля H_2, т.е. минимального волнового вектора ПСВ, находит естественное объяснение в рамках предложенной вы-

ше модели неустойчивости и связано просто с законами сохранения энергии и импульса. Подставляя в формулу (56.21) числовые значения $\Omega_p = 1{,}92$, $4\pi M = 1750$ Гс, $N_z = 1/3$ (для $\boldsymbol{H} \parallel [111]$), получим $H_2 = 1250$ Э, что прекрасно согласуется с экспериментальным значением этой величины.

Рост порога неустойчивости в полях, меньших H_1, связан с тем, что для достаточно коротких ПСВ оказываются разрешенными трехмагнонные процессы взаимодействия – слияния и распады ПСВ. В результате возникает сильное нелинейное затухание ПСВ, и для достижения порогового уровня ПСВ необходима большая мощность накачки. В условиях эксперимента поле H^*, для которого оказываются разрешенными процессы слияния

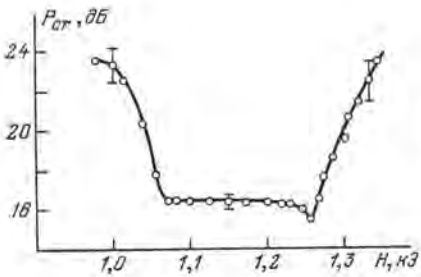


Рис. 56.1. Зависимость порога кинетической неустойчивости $P_{ст}$ от магнитного поля для образца ЖИГ при $\boldsymbol{M} \parallel [111]$, $T = 300$ К

двух ПСВ с $\theta = \pi/2$, есть 1,0 кЭ. Распады ПСВ с $\theta = \pi/2$ разрешены для $H < 0{,}7$ кЭ, с $\theta = 0$ для $H < 1{,}14$ кЭ. Экспериментальное значение поля H_1, как видно из рис. 56.1, находится в этом интервале.

Решающим доказательством существования кинетической неустойчивости ПСВ явилось экспериментальное обнаружение электромагнитного излучения из феррита, частота которого соответствует дну спин-волнового спектра:

$$\omega_0 = \omega\,(k \to 0,\ \theta \to 0) = g\,(H - 4\pi N_z M). \tag{56.21}$$

Мощность излучения была весьма малой, так как оно обусловлено магнитодипольным излучением СВ с $k \approx 10^3 \div 10^4$ см$^{-1}$, существенно превышающим значение волнового вектора электромагнитных волн соответствующей частоты $k_r \approx \omega_0/c \approx 10^{-1}$ см. Потеря импульса СВ происходила на случайных неоднородностях образца или на регулярной неоднородности внутреннего магнитного поля. В последнем случае мощность излучения значительно возрастала.

Было также обнаружено и исследовано излучение на удвоенной частоте $2\omega_0$, возникающее в результате слияния двух ВСВ в фотон. Мощность излучения, обусловленная процессами (56.23), может быть вычислена обычным образом:

$$I = 2\dot{M}^2/3c^3 = (16\omega_0 k_r^3/3) \sum_{\boldsymbol{k}} |\,V_{\boldsymbol{k}}\,|^2\, n_1\,(\boldsymbol{k}). \tag{56.22}$$

Сделанные на основе (56.24) оценки показывают, что суммарное число вторичных СВ в области дна спектра должно быть сравнимо или превышать число ПСВ. Отметим, что для волн, лежащих точно на дне спектра, $\theta_{\boldsymbol{k}}$, а значит и $V_{\boldsymbol{k}}$, обращается в нуль. Поэтому мощность излучения (56.22)

имеет дополнительную малость, связанную с угловым размером пакета вторичных СВ по полярным углам.

В отличие от излучения на частоте ω_0, связанного с наличием неоднородностей, излучение на частоте $2\omega_0$ разрешено законами сохранения и поэтому является более мощным. Дополнительное усиление излучения на двойной частоте достигается при совпадении частоты ω_0 с частотой магнитостатической моды колебаний. При этом мощность I увеличивалась из-за высокой добротности магнитостатических колебаний и достигала 10^{-4} Вт при поглощенной ферритом мощности ~ 10 Вт (в условиях ферромагнитного резонанса на частоте $2\omega_0 = gH$). Такое излучение наблюдалось на сферических образцах в полях от 0,95 до 1,35 кЭ, соответственно диапазон излучаемых частот $\omega_r = 2\pi(2{,}5 \div 4{,}5) \cdot 10^9$ с$^{-1}$, причем частота этого излучения не зависела от частоты накачки, изменявшейся в пределах $\omega_p = 2\pi(9{,}2 \div 9{,}5) \cdot 10^9$ с$^{-1}$.

Оценки, проведенные на основе формулы (56.22), и исследования поведения восприимчивости, показывают, что уже при небольших (3 дБ) превышениях над порогом кинетической неустойчивости число ПСВ сравнивается с числом ПСВ и может превышать число последних.

Поскольку кинетическая неустойчивость обусловлена уменьшением до нуля затухания СВ, интересно параметрически возбудить ВСВ с помощью дополнительной, *второй накачки*. Можно думать, что по мере приближения к порогу КН будет уменьшаться пропорциональный затуханию ВСВ порог параметрической неустойчивости. Однако Лавриненко, Мелков и Фалькович в 1984 г. показали, что с увеличением числа ПСВ происходит увеличение, а не уменьшение порога параметрического возбуждения СВ близи дна спектра. Причина этого заключается в сильном упругом рассеянии волн, возбуждаемых второй накачкой, на ПСВ (см. (56.14)) и в особенностях матричных элементов взаимодействия СВ при $k \to 0$, $\theta \to 0$ с электромагнитным полем.

§ 57. Нелинейная теория кинетической неустойчивости [162]

Механизмы ограничения КН могут быть весьма разнообразными, существенно различаться в том или ином случае. Однако все это разнообразие возникает в результате последовательных актов трех- и четырехволновых взаимодействий, поэтому удается выделить основные элементы мозаики, из которой складывается та или иная картина.

57.1. Ограничение кинетической неустойчивости нелинейным затуханием. Так же, как и при параметрической неустойчивости, одной из возможных причин ограничения числа волн является рост их затухания. Механизмы, приводящие к нелинейному затуханию ВСВ, точно те же, что и для ПСВ. Нелинейное затухание, обусловленное трехволновыми процессами, рассмотрено в гл. 8. Коэффициент нелинейного затухания для ВСВ совпадает с коэффициентом нелинейного затухания для ПСВ, если в нем заменить волновой вектор, частоту и число ПСВ на соответствующие параметры ВСВ. В случае, когда ВСВ находятся вблизи дна спектра, трехволновые процессы дают малый вклад или могут быть запрещены. Тогда следует рассмотреть относительно малые вклады в кинетическое уравнение, обусловленные четырехволновым взаимодействием. Они обусловлены

процессами слияния двух ВСВ с образованием двух тепловых волн:

$$\widetilde{\gamma}_{NL,4S}(k) = 2\pi \int |T_{k1,23}|^2 n_1(k_1)[n_0(k_2) + n_0(k_3)] \times$$
$$\times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3)\delta[\omega(k) + \omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_3)]\, dk_1\, dk_2\, dk_3 \quad (57.1)$$

и процессами, в которых участвуют по крайней мере три ВСВ:

$$\gamma_{NL,4S}(k) = 2\pi \int |T_{k1,23}|^2 \{ n_1(k_1)[n_1(k_2) + n_1(k_3)] - n_1(k_2) n_1(k_3)] \} \times$$
$$\times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3)\delta[\omega(k) + \omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_3)] dk_1\, dk_2\, dk_3. \quad (57.2)$$

Здесь, как и раньше, индекс 0 характеризует равновесные СВ ($n_0 = T/\omega(k)$), индекс 1 — вторичные СВ вблизи поверхности $\omega_k = \omega_1$. Анализ относительной роли различных процессов нелинейного затухания в ограничении КН ВСВ проведен В.С. Львовым и В.Б. Черепановым [162]. Результаты этой работы отражены в пп. 57.1 и 57.2. Далее мы ограничимся случаем $\gamma_{01} \ll \gamma_{02}$, когда СВ во втором пакете близки к равновесию.

В кинетическое уравнение для СВ подставим $n(k)$ в виде $n = n_0 + n_1$ и учтем, что n_0 является его решением при $n_1 = 0$. В результате для $n_1(k)$ получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial n_1(k)}{2\partial t} = \Delta\gamma_k [n_0(k) + n_1(k)] - \gamma(k) n_1(k) +$$
$$+ J_{el}\{n_1(k)\} + \pi\Phi_{NL}\{n_1(k)\}. \quad (57.3)$$

Здесь J_{el} описывает упругое рассеяние ВСВ, Φ_{NL} — зависящая от n_1 часть приходных членов Φ_3 и Φ_4.

На первом этапе исследования уравнения (57.3) мы будем учитывать только нелинейную зависимость $\gamma(k)$:

$$\gamma(k) = \gamma_0(k) + \gamma_{NL}(k). \quad (57.4)$$

Роль нелинейности в приходных членах Φ_{NL} будет рассмотрена ниже. Для простоты мы не будем учитывать также упругое рассеяние. Его роль в основном сводится к изотропизации распределения $n_1(k)$ и некоторому увеличению порога КН (см. задачу 11.3).

Рассмотрим вначале случай, когда процессы слияния ВСВ разрешены и нелинейное затухание является сильным. В этом приближении мы имеем интегральное уравнение, следующее из (57.3):

$$n_1(k) = \Delta\gamma_k n_0(k)[\gamma_0(k) + \gamma_{NL}\{n_1(k)\} - \Delta\gamma]^{-1}. \quad (57.5)$$

Здесь γ_{NL} обусловлено трехволновыми процессами распада: $\gamma_{NL} = \gamma_{3S}$. Для выяснения качественного характера решения (57.5) пренебрежем зависимостью γ_{3S} и $\Delta\gamma_k$ от k в области, где $n_1 \neq 0$, и проинтегрируем (57.5) по k. Получим приближенно

$$N_1(\gamma_0 + \eta_3 N_1 - \Delta\gamma) = \Delta\gamma n_0 k_1^3,$$
$$N_1 = \int n_1(k)\, dk, \quad \gamma_{3S} = \eta_3 N_1. \quad (57.6)$$

Здесь k_1^3 — объем области, где $\Delta\gamma \neq 0$:

$$\Delta\gamma n_0 k_1^3 = \int \Delta\gamma(k) n_0(k)\, dk, \quad (57.7)$$

$\Delta\gamma$ и n_0 — характерные значения $\Delta\gamma(k)$ и $n_0(k)$ в этой области. Переходя в

(57.6) к безразмерной переменной

$$x = \eta_3 N_1/\gamma_0, \tag{57.8}$$

получим

$$x(1 + x - \Delta\gamma/\gamma_0) = A\,\Delta\gamma/\gamma_0 \tag{57.9}$$

Характер решения этого уравнения определяется величиной безразмерного параметра A, который имеет простой смысл:

$$A = \eta_3 n_0 k^3/\gamma_0. \tag{57.10}$$

Если $A \ll 1$ (например, из-за того, что область, где $\Delta\gamma \neq 0$, аномально мала, как это бывает вблизи порога разрешения процесса), то тепловыми флуктуациями можно пренебречь, положив $A = 0$. Тогда $x = (\Delta\gamma - \gamma_0)/\gamma_0$, или, в исходных переменных,

$$\gamma_0 + \eta_3 N_1 = \Delta\gamma. \tag{57.11}$$

Учитывая отличие A от нуля, получим из (57.9)

$$\eta_3 N_1 = \Delta\gamma - \gamma_0 + \Delta\gamma\eta_3 n_0 k_1^3/(\Delta\gamma - \gamma_0). \tag{57.12}$$

Оценки показывают, что величина A легко может достигать единицы и даже превышать ее. Например, для СВ в ФМ

$$A = (\omega_M T/\gamma_0 T_C)(\omega_0/\omega_{ex})^{1/2} \approx 10^2.$$

При $A \gg 1$ решение (57.9) имеет вид $x = (A\,\Delta\gamma/\gamma_0)^{1/2}$ или

$$\eta_3 N = (\Delta\gamma\eta_3 k_1^3 n_0)^{1/2}. \tag{57.13}$$

Как видно, зависимость N_1 от $\Delta\gamma$ не носит критического порогового характера. Ограничение по существу происходит на допороговой стадии из-за нелинейного затухания "подогретых" ВСВ.

Если нелинейное затухание является слабым, то ограничение числа ВСВ происходит на более высоком уровне и тепловые флуктуации значительно менее существенны. В частности, пакет $n_1(k)$ будет сосредоточен вблизи поверхности, где $(\gamma_k - \Delta\gamma_k)$ минимально. В случае сферической симметрии из (57.6) следует

$$n_1(k) = \Delta\gamma n_0 [(\gamma_0 - \Delta\gamma - \eta N)^2 + \gamma''(\Delta k)^2/2]^{-1}, \tag{57.14}$$

где $\gamma'' = \partial^2\gamma/\partial k^2$. Интегрируя (57.14) по модулю k, имеем кубическое уравнение для определения зависимости N_1 от $\Delta\gamma$:

$$N_1 = 4\sqrt{2}\,\pi^2 \Delta\gamma n_0 k_1^2 [(\gamma_0 + \eta N - \Delta\gamma)\gamma'']^{-1/2} \tag{57.15}$$

За порогом КН при $\Delta\gamma > \gamma_0$

$$\begin{gathered} \gamma_0 + \eta N - \Delta\gamma = 2A_1^3 \Delta\gamma^2 \gamma_0^2/(\Delta\gamma - \gamma_0)^2 \gamma'' k_1^2, \\ A_1 = 4\pi^2 \eta n_0 k_1^3/\gamma_0. \end{gathered} \tag{57.16}$$

Для длинных СВ в ФМ с квадратичным законом дисперсии

$$A_1 = T\omega_{ex}(ak_1)^4/(2\pi)^2 T_c \gamma_0 \ll 1.$$

При $A_1 \ll 1$ ширина пакета ВСВ является малой. Из (57.14) следует

$$\Delta k/k_1 \approx A_1 \Delta\gamma\gamma_0/\gamma'' k_1^2 (\Delta\gamma - \gamma_0). \tag{57.17}$$

В узкой области вблизи порога (при $\Delta\gamma - \gamma_0 \ll A_1\gamma_0$) ширина пакета ВСВ не мала, и разложение (57.14) формулы (57.6) уже не справедливо.

При аксиальной симметрии роль тепловых флуктуаций будет еще меньше, в частности, поправка к общему числу N_1 имеет не степенную, а экспоненциальную малость по параметру A_1. Вместо (57.16) из (57.6) можно получить

$$\gamma_0 + \eta N - \Delta\gamma \approx \left[k_1^2 \frac{\partial^2\gamma}{\partial k^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial \cos^2\theta} \right] \exp\left[\frac{\gamma - \Delta\gamma}{A_1 \Delta\gamma} \right]. \tag{57.18}$$

Следует отметить, что существенной особенностью механизма ограничения КН нелинейным затуханием волн является сингулярность функции распределения ВСВ $n_1(k)$: если пренебречь тепловыми флуктуациями, то n_1 будет отлична от нуля только в некоторых точках k-пространства, линиях или поверхностях (в зависимости от симметрии задачи), положение которых определяется из условия внешней устойчивости

$$\frac{\partial}{\partial k}\left[-\Delta\gamma_k + \gamma_k(n_1)\right] = 0. \tag{57.19}$$

При этом стационарное распределение ВСВ определяется из условия баланса

$$\Delta\gamma_k = \gamma_k(n_1). \tag{57.20}$$

Нетривиальный момент в теории возникает, если необходимо учитывать тепловые флуктуации. Тогда при слабом нелинейном затухании возникают поправки к формуле (57.20), зависящие от симметрии задачи (см. (57.16) и (57.18)). Если же нелинейное затухание велико, то распределение ВСВ перестраивается кардинально и формула (57.20) несправедлива даже приблизительно. Вместо нее см. (57.13), где $N_1 \sim (\Delta\gamma)^{1/2}$.

57.2. Столкновительный механизм ограничения КН. С увеличением надкритичности числа количество ВСВ n_1 растет, так что становятся существенными не только взаимодействие ВСВ с тепловыми волнами, но и их столкновения между собой. Четырехволновые процессы

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) = \omega(k_3) + \omega(k_4), \tag{57.21}$$

в которых участвуют только ВСВ, не выводят энергию из системы ВСВ и поэтому, казалось бы, не могут ограничить кинетическую неустойчивость. Однако процессы рассеяния ВСВ (57.21) приводят к уширению функции распределения ВСВ за границы области неустойчивости, причем с увеличением надкритичности ширина функции распределения растет так, что результирующий баланс энергии соблюдается:

$$\int \left[\Delta\gamma_k - \gamma_k(n_1)\right] dk = 0. \tag{57.22}$$

Это условие определяет зависимость ширины функции $n_1(k)$ от надкритичности: общее число N_1 должно быть таким, чтобы процессы (57.21) обеспечили требуемую ширину НК.

При большой надкритичности тепловыми флуктуациями можно пренебречь и учитывать из приходных членов только $\Phi_{NL,4S}$. Из механизмов нелинейного затухания мы явно будем учитывать только $\gamma_{NL,4S}$. Остальные слагаемые, если они существенны в сравнении с $\gamma_{NL,4S}$, будут считаться включенными в $\gamma_k = \gamma_0(k) + \gamma_{NL,4S} + \ldots$ В результате уравнение (57.3)

переписывается в виде

$$\frac{\partial n_1(\boldsymbol{k})}{2\partial t} = (\Delta\gamma_{\boldsymbol{k}} - \gamma_{\boldsymbol{k}})n_1(\boldsymbol{k}) + J_{\mathrm{el}}\{n_1(\boldsymbol{k})\} - \gamma_{NL,4S}n_1(\boldsymbol{k}) + \pi\Phi_{NL,4S}, \quad (57.23)$$

где J_{el}, $\gamma_{NL,4S}$ и $\Phi_{NL,4S}$ задаются выражениями (56.14), (57.2). Случай сферической симметрии наиболее прост для анализа. Поскольку n_1 не зависит от ориентации $\boldsymbol{k}$, $J_{\mathrm{el}} = 0$. Выбирая n_1 в виде

$$n_1(\boldsymbol{k}) = N_1(\kappa)/4\pi k_1^2, \quad \kappa = |\,k\,| - k_1, \quad N_1 = \int N_1(\kappa)d\kappa, \quad (57.24)$$

и выполняя в (57.2) интегрирование по углам, получим вместо (57.23)

$$N_1(\kappa) = \frac{2F^2}{2\gamma_{\mathrm{ef}} + \gamma''\kappa^2}\int N_1(\kappa_1)N_1(\kappa_2)N_1(\kappa_3)\delta(\kappa + \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3)d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (57.25)$$

$$\gamma_{\mathrm{ef}} = \gamma_0 + F^2N_1^2 - \Delta\gamma, \quad (57.26)$$

$$F^2 = 2\pi\,|\,T\,|^2/k_1v_1. \quad (57.27)$$

Уравнение (57.25) совпадает по виду с уравнением для формы пакета ПСВ по частотам (51.13). Его единственным устойчивым решением является

$$N_1(\kappa) = \frac{N_1}{2\kappa_0\,\mathrm{ch}(\pi\kappa/2\kappa_0)}, \quad (57.28)$$

где эффективная ширина пакета κ_0 и его интегральная величина определяются из условий

$$\gamma_{\mathrm{ef}} = \gamma''\kappa_0^2/2, \qquad F^2N_1^2 = \gamma''\kappa_0^2/2 + \gamma_{\mathrm{ef}}. \quad (57.29)$$

Здесь происходит компенсация слагаемого с нелинейным затуханием $\gamma_{NL,4S}$, соответствующим приходным слагаемым $\Phi_{NL,4S}$, так что (57.29) (с учетом (57.26), (57.27)) переписывается в виде

$$\Delta\gamma = \gamma_0 + \gamma''\kappa_0^2/2. \quad (57.30)$$

Таким образом, эффективное увеличение затухания ВСВ на величину $\gamma''\kappa_0^2/2$ происходит из-за уширения пакета ВСВ в результате четырехволновых процессов рассеяния ВСВ друг на друге. Используя (57.29) и (57.27), представим (57.30) в виде

$$\Delta\gamma = \gamma_0 + \tfrac{1}{2}\gamma_{NL,4S}, \qquad \pi(TN_1)^2/k_1v_1 = \Delta\gamma - \gamma_0. \quad (57.31)$$

Это означает, что эффективность столкновительного механизма ограничения кинетической неустойчивости совпадает с точностью до числа (равного 1/2 в сферически-симметричном случае) с эффективностью механизма нелинейного затухания при "выключенном" приходном члене $\Phi_{NL,4S}$. В слу-

чае более низкой симметрии эффективность столкновительного механизма несколько выше.

57.3. Кинетическая неустойчивость при большой надкритичности. С ростом надкритичности растет амплитуда ВСВ и развивается новая кинетическая неустойчивость, приводящая к нарастанию волн третьего поколения. Если число ПСВ порядка или превосходит число ТСВ, участвующих в процессах релаксации волн следующих поколений, то может развиться целая иерархия кинетических неустойчивостей, возникающих в результате последовательных распадов волн. Полная картина возникающих при этом явлений отсутствует. В настоящее время достаточно подробно исследована иерархия неустойчивостей, возникающих при параметрическом возбуждении СВ в АФМ в случае, когда разрешены распады СВ на СВ и звук [147]. При этом возникает целый ряд кинетических неустойчивостей первого порядка, которые, однако, не могут привести к значительному поглощению энергии, поступающей от накачки. Ограничение амплитуд волн в этом случае связано с процессами слияния волн высших поколений с образованием относительно высокочастотных быстро релаксирующих СВ.

При дальнейшем росте мощности накачки, по-видимому, происходит переход от слабо неравновесного к сильно неравновесному (турбулентному) состоянию волновой системы, когда возбуждены все степени свободы и реализуются плавные спектры колмогоровского типа.

Задачи

Задача 11.1. Определить порог кинетической неустойчивости первого порядка для спиновых волн в АФМ ЛП в процессах распада магнона на два фонона [147].

Указание. В качестве амплитуды этого процесса можно взять следующее модельное выражение:

$$|U(kqq')|^2 = 2\xi^2\omega_{ex}\Omega_q\Omega_{q'}\left[\frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_q^2-\Omega_q^2}+\frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_{q'}^2-\Omega_{q'}^2}\right]^2/\epsilon(k),$$

где $\epsilon^2(k) = \epsilon_0^2 + s^2k^2$ – частота магнона, $\Omega_q = cq$ – частота фонона, $s > c$, ξ – малый параметр магнитострикции, $\omega_{ex} \gg \Omega_q, \epsilon(k)$.

Задача 11.2. Рассмотреть КН первого порядка относительно распада ПСВ на СВ и фононы (см. п. 56) в пределе $\alpha = s/c \gg 1$ [219].

Задача 11.3. Получить условие для порога кинетической неустойчивости в анизотропной среде при сильном упругом рассеянии.

Задача 11.4. Определить ширину и интенсивность пакета ВСВ в изотропной среде, обусловленные четырехмагнонным рассеянием, если отрицательная добавка в затухание СВ имеет вид

$$-\Delta\gamma = \begin{cases} 0 \text{ при } k < k_0, \\ \Delta - \gamma'(k-k_0) \text{ при } k > k_0, \end{cases}$$

а амплитуда четырехволнового взаимодействия постоянна (В.С. Лутовинов, Г.Е. Фалькович, В.Б. Черепанов [147]).

Указание. Удобно воспользоваться вариационным принципом, рассмотренным в § 52.

Задача 11.5. Определить условия баланса трех пакетов волн в изотропной среде, из которых один является узким пакетом ПСВ с частотой ω_1 и волновым вектором $\boldsymbol{k}_1$, другой – с частотой ω_2 и волновым вектором $\boldsymbol{k}_2$, находится в области кинетической неустойчивости, а третий образован в результате слияний ВСВ и ПСВ $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ [147].

Задача 11.6. Определить порог КН первого порядка в изотропном ФМ с законом дисперсии СВ:

$$\omega_k = \omega_0 + \omega_{ex}(ak)^2$$

и не зависящим от волновых векторов матричным элементом трехмагнонного взаимодействия $V_{123} = V = \text{const}$.

Указание Кроме процессов распада ПСВ на две ВСВ, необходимо учесть также процессы слияния ВСВ и ПСВ.

Ответ:

$$|V|^2 N_{cr} = \left[\frac{8\gamma_1\gamma_2(\omega_p - 2\omega_0)}{(\omega_1 - \omega_0)^{1/2}(\omega_2 - \omega_0)^{1/2}} \right]^{1/2},$$

где N_{cr} – пороговое количество ПСВ, $\omega_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ – частоты и затухания пакетов ВСВ, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Монографии и сборники по магнетизму

1. *Альтшулер С.А., Козырев В.М.* Электронный парамагнитный резонанс. – М.: Наука, 1972.
2. Антиферромагнетизм/Под ред. С.В. Вонсовского. – М.: ИЛ, 1975.
3. *Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.* Спиновые волны. – М.: Наука, 1967.
4. *Белов К.П., Белянчикова М.А., Левитин Р.З., Никитин С.А.*/Редкоземельные ферро- и антиферромагнетики. – М.: Наука, 1965.
5. *Боровик Е.С., Мильнер А.С., Еременко В.В.*/Лекции по магнетизму. – Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1972.
6. *Вонсовский С.В.*/Магнетизм. – М.: Наука, 1971.
7. *Гуревич А.Г.*/Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. – М.: Наука, 1973.
8. Handbuch der Physik. Bd. XVIII/1: Magnetismus. – Springer Verlag, 1968.
9. Handbuch der Physik. Bd. XVIII/2: Ferromagnetismus. – Springer Verlag, 1966.
10. Handbook of Microwave Ferrite Materials/Ed. W.H. Von Aulock. – Acad. Press, 1965.
11. *Изюмов Ю.А., Озеров Р.П.* Магнитная нейтронография. – М.: Наука, 1966.
12. *Изюмов Ю.А., Кассан-Оглы Ф.А., Скрябин Б.Н.* Полевые методы в теории магнетизма. – М.: Наука, 1974.
13. *Лакс Б., Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики/Пер. с англ.; Под ред. А.Г. Гуревича. – М.: Мир, 1965.
14. Magnetism. A Tretise on Modern Theory and Materials/Ed. G.T. Rado, H. Suhl. – Acad. Press, 1963 – 1966. – V. I – IV.
15. *Маттис Д.* Теория магнетизма/Пер. с англ.; Под ред. И.М. Лифшица, М.И. Каганова. – М.: Мир, 1972.
16. *Метфессель З., Маттис Д.* Магнитные полупроводники/Пер. с англ.; Под ред. А.Г. Гуревича. – М.: Мир, 1972.
17. *Моносов Я.А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс. – М.: Наука, 1971.
18. Нелинейные свойства ферритов в полях СВЧ/Пер. с англ.; Под ред. А.Л. Микаэляна. – М.: ИЛ, 1963.
19. *Поливанов К.М.* Ферромагнетики. – М.: Госэнергоиздат, 1967.
20. *Смарт Дж.* Эффективное поле в теории магнетизма/Пер. с англ.; Под ред. С.В. Тябликова. – М.: Мир, 1968.
21. *Смит Я., Вейн Х.* Ферриты/Пер. с англ.; Под ред. А.Г. Гуревича. – М.: ИЛ, 1962.
22. *Sparks M.*, Ferromagnetic Relaxation Theory. – McGraw Hill, 1964.
23. *Туров Е.А.* Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
24. *Туров Е.А., Петров М.П.* Ядерный магнитный резонанс в ферро- и антиферромагнетиках. – М.: Наука, 1969.
25. *Тябликов С.В.* Методы квантовой теории магнетизма. – М.: Наука, 1975.
26. *Уайт Р.М.* Квантовая теория магнетизма/Пер. с англ.; Под ред. А.С. Боровика-Романова и Л.П. Питаевского. – М.: Мир, 1985.
27. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах/Пер. с англ.; Под ред. А.Г. Гуревича. – М.: ИЛ, 1961.

28. Ферромагнитный резонанс/Под ред. С.В. Вонсовского. – М.: Физматгиз, 1961.
29. Ферромагнитный резонанс и поведение ферромагнетиков в переменных магнитных полях/Пер. с англ.; Под ред. С.В. Вонсовского. – М.: ИЛ, 1952.
30. Физика магнитных диэлектриков/Под ред. Г.А. Смоленского. – М.: Наука, 1974.
31. *Яковлев Ю.М., Генделев С.Ш.* Монокристаллы ферритов в радиоэлектронике. – М.: Сов. Радио, 1975.

II. Монографии, сборники, учебники, обзоры

32. *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела/Пер. с англ.; Под ред. В.Л. Бонч-Бруевича. – М.: Мир, 1966.
33. *Киттель Ч.* Квантовая теория твердых тел/Пер. с англ.; Под ред. А.А. Гусева. – М.: Наука, 1967.
34. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика // Теоретическая физика. Т. V. – М.: Наука, 1976.
35. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред //Теоретическая физика. Т. VIII. – М.: Наука, 1982.
36. *Фейнман Р.* Статистическая физика/Пер. с англ.; Под ред. Д.Н. Зубарева. – М.: Мир, 1975.
37. *Гортер В.В.*/УФН. – 1975. – Т. 7. – С. 279.
38. *Ландау Л.Д.* Собрание трудов. – М.: Наука, 1969. – Т. I. – С. 197.
39. *Anderson P.W.* Solid State Physics. – N.Y.: Acad. Press, 1963. – V. 14.
40. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М* Механика//Теоретическая физика. Т.I. – М.: Наука, 1973.
41. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 4, ч. I.
42. Теория солитонов: метод обратной задачи//В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – С. 319.
43. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.* Н. Курс современного анализа/Пер. с англ.; Под ред. Ф.В. Широкова. – М.: ГИФ МЛ, 1963. – Т. 2.
44. *Блоемберген Н.* Нелинейная оптика/Пер. с англ.; Под ред. С.А. Ахманова, Р.В. Хохлова. – М.: Мир, 1966.
45. *Ламб Г.* Гидродинамика/Пер. с англ.; Под ред. Н.А. Слезкина. – М.: ОНТИ, 1947.

III. Оригинальные работы (расположены по алфавиту, иностранные авторы в русском переводе)

46. *Андриенко А.В., Ожогин В.И., Сафонов В.Л., Якубовский В.Л.* Модуляционный метод исследования спиновых волн за порогом параметрического возбуждения// ЖЭТФ. – 1983. – Т. 84. – С. 1474 – 1480.
47. *Андриенко А.В., Ожогин В.И., Якубовский А.Ю.* Неустойчивости параметрически возбужденных ядерных спиновых волн в антиферромагнитном $CsMnF_3$ //ЖЭТФ.– 1985. – Т. 89. – С. 1839 –1845.
48. *Андриенко А.В., Прозорова Л.А.* Исследование релаксации спиновых волн в антиферромагнетиках с сильным сверхтонким взаимодействием //ЖЭТФ.– 1985. – Т. 88, вып. 1. – С. 213–220.
49. *Анисимов А.Н., Гуревич А.Г.* Собственные процессы релаксации спиновых волн в иттрий-железном гранате //ЖЭТФ. – 1975. – Т. 68, № 2. – С. 674–688.
50. *Анисимов А.Н., Гуревич А.Г.* Затухание спиновых волн, обусловленное четырехмагнонным рассеянием //ФТТ. – 1976. – Т. 18, № 1. – С. 38–43.
51. *Асташкина Е.В., Михайлов А.С.* Стохастические колебания при параметрическом возбуждении спиновых волн //ЖЭТФ. – 1980. – Т. 78. – С. 1636–1646.
52. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Ф.В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде //УФН. – 1967. – Т. 93. – С. 19–70.
53. *Бакай А.С.* О несимметричных распределениях параметрически возбуждаемых волн //ЖЭТФ. – 1978. – Т. 74, № 3. – С. 933–1004.
54. *Бакай А.С., Круценко И.В., Мелков Г.А., Сергеева Г.Г.* Исследование распределений параметрически возбужденных спиновых волн при параллельной накачке спин-волновой нестабильности в ферритах //ЖЭТФ. – 1979. – Т. 76. – С. 231–237.
55. *Барьяхтар В.Г., Яблонский Д.А.* Об одном представлении для спиновых операторов и использование его в теории магнетизма //ТМФ. – 1975. – Т. 25. – С. 250.

56. *Белиничер В.И., Львов В.С.* Спиновая диаграммная техника для неравновесных процессов в теории магнетизма //ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86, вып. 3. – С. 967–980.
57. *Боровик–Романов А.С.* Изучение слабого ферромагнетизма на монокристалле $MnCO_3$ //ЖЭТФ. – 1959. – Т. 36, вып. 3. – С. 766–782.
58. *Брейзман Б.Н., Захаров В.Е., Мушер С.Л.* О кинетике индуцированного рассеяния ленгмюровских волн на ионах плазмы //ЖЭТФ. – 1973. – Т. 64. – С. 1297–1306.
59. *Ван-Флек Дж.* (*Van Vleck J.H.*). The theory of electric and magnetic susceptibilities.– Oxford, 1932. – 235 p.
60. *Ванг С. и др.* (Wang S., Thomas G., Ta–Lin Hsuy). Standing–Spin–Wave Modulation of the Microwave Power in YIG//J. Appl. Phys. – 1968. – V. 39. – P. 2819.
61. *Ванг С. и др.* (*Wang S., Ta–Lin Hsu*). Observation of spinwave spectrum in an unstability and mode–locking experiment//Appl. Phys. Lett. – 1970. – V. 16. – P. 534–536.
62. *Веницкий В.Н., Бременко В.В., Матюшкин Э.В.* Рассеяние света на параметрических спиновых волнах в ЖИГе при продольной накачке//Письма в ЖЭТФ. – 1978. – Т. 27, вып. 4, – С. 239–241.
63. *Виниковецкий И.А., Фришман А.М., Цукерник В.М.* Кинетические уравнения для системы спиновых волн при параметрическом возбуждении//ЖЭТФ. – 1979.– Т. 76. – С. 2110–2125.
64. *Власов В.И., Таланов В.И., Петрищев В.А.* Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов). – Изв. ВУЗов, Радиофизика. – 1971. – Т. 14. – С. 1353–1364.
65. *Вулси Р.В. и др.* (*Woolsey R.B., White P.M.*) Theory of spin-wave relaxation in antiferromagnets//Phys. Rev. – 1969. – V. 188. – P. 812–820.
66. *Гарднер и др.* (*Gardner C.S., Green I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.*). Method for solving the Korteweg–de Vries equation//Phys. Rev. Lett. – 1967. – V. 19. – P. 1095.
67. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика//Теоретическая физика. т. III. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1974, гл. 9.
68. *Гибсон и др.* (*Gibson G., Jeffries C.*) Observation of period doubling and chaos in spin-wave instabilities in yttrium iron garnet//Phys. Rev. A., – 1984. – V. 29. – P. 811–818.
69. *Готтлиб П. и др.* (*Gottlib P., Suhl H.*). Saturation of Ferrimagnetic Resonance with Parallel Pumping//J. Appl. Phys. – 1962. – V. 33, № 4. – P. 1508.
70. *Гранкин В.Л., Львов В.С., Могорин В.И., Мушер С.Л.* Вторичная турбулентность параметрически возбужденных спиновых волн //ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81, вып. 2 (8) – С. 757–768.
71. *Грин Дж. Дж. и др.* (*Green J.J., Healy B.J.*), Parallel Pumping in Planar Zn_2Y//J. Appl. Phys. – 1963. – V. 34, № 4. – P. 1285–1286.
72. *Грин Дж.Дж. и др.* (*Green J.J., Schlomann E.*). On Parallel pumping in IYG//Appl. Phys. Lett., 1968. – V. 33. – P. 1358.
73. *Гуревич А.Г, Старобинец С.С.* Пороги нестабильности при ферромагнитном резонансе в монокристаллах иттриевого граната //ФТТ.–1961. – Т. 3, № 7. – С. 1995–1998.
74. *Гуревич А.Г.* Параметрическое усиление магнитных волн в феррите упругой волной //ФТТ. – 1964. – Т. 6, № 8. – С. 2376 – 2388.
75. *Даймон Р.В.* (*Damon R.W.*) Magnetism/Ed. Rado G.T. and Suhl H. – 1963. – V. 1. – CH. 11.
76. *Дайсон Ф.* (*F. Dyson*) General Theory of Spin–Wave Interactions//Phys. Rev. – 1956.– V. 102. – P. 1217.
77. *Де-Женн П.Ж. и др.* (*De Gennes P.G., Pincus P.A., Hartmann–Bountron F., Winter J.M.*) Nuclear Magnetic Resonance Modesin Magnetic Material, 1. Theory//Phys. Rev. – 1963. – V. 129. – P. 1105–1115.
78. *Дзялошинский И.Е.* Термодинамическая теория "слабого" ферромагнетизма антиферромагнетиков //ЖЭТФ. – 1957. – Т. 32, вып. 6. – С. 1547–1563.
79. *Житнюк В.С., Мелков Г.А.* Релаксация продольной сверхвысокочастотной намагниченности при параметрическом возбуждении спиновых волн в ферритах// ЖЭТФ. – 1978. – Т. 75, № 5 (II). – С. 1755 – 1762.
80. *Житнюк В.С., Мелков Г.А.* Параметрическое возбуждение спиновых волн при переключении частоты накачки//Письма в ЖЭТФ. – 1980. – Т. 32. – С. 149–152.

81. *Житнюк В.С., Мелков Г.А., Черепанов В.Б.* Кинетика параметрической неустойчивости спиновых волн в ферритах. – Препринт/ИАиЭ СО АН СССР, Новосибирск, 1980. – № 138. – 24 с.
82. *Житнюк В.С., Мелков Г.А.* Параметрическое возбуждение спиновых волн при переключении частоты накачки//Письма в ЖЭТФ. – 1980. – Т. 32. – С. 149–152.
83. *Жотиков В.Б., Крейнес Н.М.* Рассеяние света на параметрических магнонах и фононах в $CoCO_3$//ЖЭТФ. – 1979. – Т. 77, вып. 6 (12). – С. 2486–2498.
84. *Зауткин В.В., Львов В.С., Мушер С.Л., Старобинец С.С.* Доказательство поэтапного возбуждения параметрических спиновых волн//Письма в ЖЭТФ. – 1971. – Т. 14. – С. 310–314.
85. *Зауткин В.В., Львов В.С., Старобинец С.С.* О резонансных явлениях в системе параметрических спиновых волн//ЖЭТФ. – 1972. – Т. 63. – С. 182–190.
86. *Зауткин В.В., Захаров В.Е., Львов В.С., Мушер С.Л., Старобинец С.С.* Параллельная накачка спиновых волн в монокристаллах иттриевого граната // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 62. – С. 1782–1797.
87. *Зауткин В.В., Старобинец С.С.* Автоколебания намагниченности при параллельной накачке спиновых волн // ФТТ. – 1974. – Т. 16, вып. 3. – С. 678–686.
88. *Зауткин В.В., Львов В.С., Орел Б.И., Старобинец С.С.* Коллективные колебания большой амплитуды и двойной параметрический резонанс магнонов // ЖЭТФ. – 1977. – Т. 72. – С. 272–284.
89. *Зауткин В.В., Орел Б.И.* Неоднородные коллективные колебания магнонов // ЖЭТФ. – 1980. – Т. 79, вып. 1 (7). – С. 281–287.
90. *Зауткин В.В., Орел Б.И., Черепанов В.Б.* Параметрическое возбуждение спиновых волн при шумовой модуляции их частот // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 85. – С. 708–720.
91. *Захаров В.Е., Филоненко Н.Н.* Канонические переменные для волн на поверхности жидкости // ДАН СССР. – 1966. – Т. 170. – С. 1292.
92. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. – 1968. – № 2. – С. 86.
93. *Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С.* Неустойчивость волн конечной амплитуды в диссипативных средах. Неустойчивость в системе спиновых волн. – Новосибирск, 1968. – Препринт / ИЯФ СО АН СССР. – № 227. – 67 с.
94. *Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С.* Новый механизм ограничения амплитуды СВ при параллельной накачке // ФТТ. – 1969. – Т. 11. – С. 2047–2055.
95. *Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С.* Неустойчивость монохроматических спиновых волн // ФТТ. – 1969. – Т. 11. – С. 2923–2932.
96. *Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С.* Стационарная нелинейная теория параметрического возбуждения волн // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 59. – С. 1200–1214.
97. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Вариационный принцип и канонические переменные в магнитной гидродинамике // ДАН СССР. – 1970. – Т. 194. – С. 1288.
98. *Захаров В.Е., Львов В.С.* Зарождение турбулентности при параметрическом возбуждении волн // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 60, – С. 2066–2079.
99. *Захаров В.Е.* Гамильтоновский формализм для гидродинамических моделей плазмы // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 60. – С. 1714.
100. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – С. 118.
101. *Захаров В.Е.* Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 62, вып. 6. – С. 1745–1760.
102. *Захаров В.Е., Львов В.С., Мушер С.Л.* О нестационарном поведении системы параметрически возбужденных спиновых волн // ФТТ. – 1972. – Т. 14. – С. 832–840.
103. *Захаров В.Е., Львов В.С.* Параметрическое возбуждение спиновых волн в ферромагнетиках со случайными неоднородностями // ФТТ. – 1972. – Т. 14. – С. 2913–2924.
104. *Захаров В.Е., Манаков С.В.* Резонансное взаимодействие в нелинейной среде // Письма в ЖЭТФ. – 1973. – Т. 18. – С. 243.
105. *Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С.* Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. – 1974. – Т. 114, № 4. – С. 609–654.
106. *Захаров В.Е.* Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией / Изв. вузов. – 1974. – Т. 13. – С. 431.

107. *Захаров В.Е., Львов В.С.* О статистическом описании нелинейных волновых полей // Изв. вузов. – Радиофизика. – 1975. – Т. 18. – С. 1470–1484.
108. *Захаров В.Е., Сынах В.С.* О характере особенности при самофокусировке // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 68, вып. 3. – С. 940–948.
109. *Захаров В.Е., Манаков С.В.* Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейной среде // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 69. – С. 1654.
110. *Zakharov V.E., Kuznetsov E.A.* Hamiltonian formatism for systems of hydrodynamic type // Soviet Scientific Reviews. – Section C. – Mathematical Physics Reviews / Ed. by S.P. Novikov. – Amsterdam: OPA, 1984.
111. *Захаров В.Е.* Метод обратной задачи рассеяния // Солитоны / Пер. с англ.; Под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983, 25 с.
112. *Захаров В.Е.* Коллапс и самофокусировка ленгмюровских волн // Физика плазмы; – Под ред. Р.З. Сагдеева и М.Н. Розенблюта. – М.: Энергоиздат, 1984. – С. 79–117.
113. *Зильберман П.Е., Никитов С.А., Темирязев А.Г.* Четырехмагнонный распад и кинетическая неустойчивость магнитостатической волны в пленках железо-иттриевого граната // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 42. – С. 92–94.
114. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // ДАН СССР. – 1970. – Т. 192. – С. 753.
115. *Каллен Х.Б. и др.* (*Callen H.B., Pittelli E.*), Anisotropic Ferromagnetic Resonance Line Width in Ferrites// Phys. Rev. – 1960. – V. 119, № 5. – P. 1523–1531.
116 *Кведер В.В., Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А.* Изучение процесса параметрического возбуждения спиновых волн в антиферромагнитном $MnCO_3$ // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 63, № 6. – С. 2205–2212.
117 *Кведер В.В., Прозорова Л.А.* Исследование запороговой восприимчивости в антиферромагнитных $MnCO_3$ и $CsMnF_3$ при параметрическом возбуждении спиновых волн // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19. – С. 683–686.
118. *Келдыш Л.В.* Диаграммная техника для неравновесных процессов // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 47. – С. 1515.
119. *Кирюзин И.И., Моносов Я.А.* Электромагнитное излучение параметрически возбужденного феррита // ФТТ. – 1971. – Т. 13, № 7. – С. 1944–1948.
120. *Клогстон А.М. и др.* (*Clogston A.M., Sunhl H., Walker L.R., Anderson P.W.*) Possible Source of Line Width in Ferromagnetic Resonance // Phys. Rev. – 1956. – V. 101, № 2. – P. 903–905.
121. *Колганов В.А., Львов В.С., Широков М.И.* О нелинейной теории параметрического возбуждения спиновых волн в антиферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19. – С. 680–682
122. *Колоколов И.В., Львов В.С., Черепанов В.Б.* Спектры спиновых волн и термодинамика железо-иттриевого граната – двадцатиподрешеточного ферримагнетика // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 84. – С. 1043–1063.
123. *Колоколов И.В., Львов В.С., Черепанов В.Б.* Взаимодействие и релаксация магнонов в железо-иттриевом гранате – двадцатиподрешеточном ферримагнетике // ЖЭТФ – 1984. – Т. 86. – С. 1946–1961.
124 *Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А.* Наблюдение магнон-фононного взаимодействия в антиферромагнитном $MnCO_3$ // Письма в ЖЭТФ. – 1971. – Т. 13, вып. 8. – С. 430–432.
125. *Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А.* Параметрическое возбуждение спиновых волн в антиферромагнитном $MnCO_3$ // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 62, вып. 6. – С. 1199–1209.
126. *Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А.* Изучение релаксации спиновых волн в антиферромагнитном $CsMnF_3$ // ЖЭТФ. – 1973. – Т. 65, № 6 (12). – С. 2470–2478.
127. *Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А.* Наблюдение размерного эффекта при параметрическом возбуждении спиновых волн в $FeBO_3$ // Письма в ЖЭТФ. – 1980. – Т. 62. – С. 254–257.
128. *Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А.* Параметрическое возбуждение спиновых волн в антиферромагнитном $FeBO_3$ // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81, вып. 5. – С. 1931.
129. *Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А., Свистов Л.Е.* Излучение электромагнитных волн магнонами // Письма в ЖЭТФ. – 1983. – Т. 37, вып. 12. – С. 586–588.

130. *Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А.* Исследование запороговой восприимчивости при параметрическом возбуждении магнонов в антиферромагнитном $FeBO_3$ // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86. – С. 658–664.
131. *Котюжанский Б.Я., Прозорова Л.А., Свистов Л.Е.* Изучение электромагнитного излучения параметрически возбужденными в антиферромагнетике магнонами // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86. – С. 1101–1116.
132. *Кохане Т.И. и др.* (*Kohane T., Schlomann E.*). DC Magnetic Moment Induced by a Strong RF Magnetic Field Applied Parallel to the DC Field // J. Appl. Phys. – 1963. – V. 34, № 5. – P. 1544–1547.
133. *Круценко И.В., Львов В.С., Мелков Г.А.* Спектральная плотность параметрически возбужденных волн // ЖЭТФ. – 1978 – Т. 75. – С. 1114–1131.
134. *Круценко И.В., Мелков Г.А.* Параметрическое возбуждение в ферритах второй группы спиновых волн // ФТТ. – 1979. – С. 271–274.
135. *Круценко И.В., Мелков Г.А.* Параметрическое возбуждение спиновых волн в ферритах при низких температурах // ФНТ. – 1981. – Т. 7. – С. 770–776.
136. *Кутовой Н.Г., Мелков Г.А.* Спектр параметрически возбужденных спиновых волн в ферритах // ФТТ. – 1975. – Т. 17, вып. 3. – С. 958–960.
137. *Куртни В.Е. и др.* (*Gourtney W.E., C. Arricoat P. J.*). Experimental Stadies of Spinwaves Excited by Parallel Pumping // Electronics and Control. – 1964. – V. 16, № 1. – P. 1–20.
138. *Кутовой Н.Г., Мелков Г.А.* Спектр параметрически возбужденных спиновых волн в ферритах // ФТТ. – 1975. – Т. 17, вып. 3. – С. 958–960.
139. *Лавриненко А.В., Львов В.С., Мелков Г.А., Черепанов В.Б.* "Кинетическая неустойчивость" сильно неравновесной системы спиновых волн и перестраиваемое излучение феррита // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81. – С. 1022–1036.
140. *Ландау Л.Д., Румер Ю.Б.* О поглощении звука в твердых телах // Ландау Л.Д. Собрание трудов. Т. 1. – М.: Наука, 1969. – С. 227.
141. *Левинсон И.Б.* Распределение горячих фононов, генерируемых лазерным излучением // ЖЭТФ. – 1973. – Т. 65, вып. 1. – С. 331–342.
142. *Ле-Галл Х. и др.* (*Le Gall H., Lemair B., Sere D.*). Spliting of parametric magnons in ferromagnetic cristalls // Solid State Com. – 1967. – V. 5, № 12. – P. 919.
143. *Ле-Галл Х. и др.* (*Le Gall H., Jamet J.P.*). В кн. Труды международной конференции по магнетизму МКМ-73. – Т. 1) 2). – М.: Наука, с. 20–35. Spin-waves investigation by means of Faraday rotation.
144. *Лутовинов В.С.* Влияние магнитоупругого взаимодействия на затухание магнонов в антиферромагнетиках // ФТТ. – 1978. – Т. 20. – С. 1807–1815.
145. *Лутовинов В.С., Савченко М.А.* Механизм "жесткого" возбуждения спиновых волн в антиферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ. – 1977. – Т. 26, № 10. – С. 683–686.
146. *Лутовинов В.С., Сафонов В.Л.* Влияние диполь-дипольного взаимодействия на параметрическое возбуждение магнонов в антиферромагнетиках типа "легкая плоскость" // ФТТ. – 1980. – Т. 22. – С. 2640–2650.
147. *Лутовинов В.С., Фалькович Г.Е., Черепанов В.Б.* Неравновесные распределения квазичастиц при параметрическом возбуждении магнонов в антиферромагнетике с распадным спектром // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 90. – С. 1781–1794.
148. *Львов В.С., Старобинец С.С.* О нелинейной теории ферромагнитного резонанса// ФТТ. – 1971. – Т. 13. – С. 523–533.
149. *Львов В.С., Старобинец С.С.* Неустойчивость монохроматической стоячей спиновой волны при параллельной накачке // ФТТ. – 1971. – Т. 13. – С. 3488–3495.
150. *Львов В.С.* О взаимодействии параметрически возбужденных спиновых волн с тепловыми. – Препринт/ИЯФ СО АН СССР. – Новосибирск, 1972. – № 68–72. – 30 с.
151. *Львов В.С., Рубенчик А.М.* Динамические домены при параметрическом возбуждении волн, их неустойчивость и разрушение. – Препринт/ИЯФ СО АН СССР. – Новосибирск, 1972. – № 1–72. – 7 с.
152. *Львов В.С., Мушер С.Л., Старобинец С.С.* Теория автоколебаний намагниченности при параметрическом возбуждении спиновых волн//ЖЭТФ. – 1973. – Т. 64. – С. 1084–1097.

153. *Львов В.С., Рубенчик А.М., Соболев В.С.* Сильная турбулентность и самофокусировка параметрически возбужденных спиновых волн//ФТТ. – 1973. – Т. 15, № 3. – С. 793–800.
154. *Львов В.С., Рубенчик А.М.* О нелинейной теории параметрической неустойчивости волн в плазме//ЖЭТФ. – 1973. – Т. 64. – С. 515.
155. *Львов В.С., Широков М.И.* Нелинейная теория параметрического возбуждения спиновых волн в антиферромагнетиках//ЖЭТФ. – 1974. – Т. 67, вып. 5. – С. 1932–1947.
156. *Львов В.С.* О затухании монохроматических волн в нелинейной среде//ЖЭТФ. – 1975. – Т. 68, № 1. – С. 308–316.
157. *Львов В.С.* Теория одночастотной турбулентности параметрически возбужденных волн//ЖЭТФ. – 1975. – Т. 69. – С. 2079.
158. *Львов В.С., Рубенчик А.М.* Пространственно-неоднородные сингулярные спектры слабой турбулентности//ЖЭТФ. – 1977. – Т. 72. – С. 127–140.
159. *Львов В.С.* Лекции по физике нелинейных явлений. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977.
160. *Львов В.С., Черепанов В.Б.* О коллективных колебаниях и неустойчивости одночастотного состояния параметрически возбужденных волн//ЖЭТФ. – 1978. – Т. 75, вып. 5. – С. 1631–1645.
161. *Львов В.С., Черепанов В.Б.* О сильно анизотропных распределениях параметрически возбужденных волн в почти изотропных средах//ЖЭТФ. – 1979. – Т. 76. – С. 2266–2278.
162. *Львов В.С., Черепанов В.Б.* Нелинейная теория "кинетического" возбуждения волн//ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81. – С. 1406–1422.
163. *Львов В.С., Черепанов В.Б.* ST^2-теория параметрического возбуждения волн. – Препринт/ИА и Э СО АН СССР. – Новосибирск, 1986. – № 314. – 54 с.
164. *Львов В.С.* Магнитоупорядоченные диэлектрики. – Препринт/ИАиЭ СО АН СССР.– Новосибирск. 1981. – № 162. – 26 с.
165. *Львов В.С.* Классический гамильтоновский формализм и спиновые волны в магнетиках. – Препринт/ИАиЭ СО АН СССР. – Новосибирск, 1981. – № 157. – 46 с.
166. *Львов В.С.* Уравнения движения и гамильтониан спиновых волн в магнетиках. – Препринт/ИАиЭ СО АН СССР. – Новосибирск, 1981. – № 158. – 25 с.
167. *Белинцчер В.И., Львов В.С.* Масштабно-инвариантная теория развитой гидродинамической турбулентности // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 91, вып. 2 (8).
168. *Львов В.С., Фалькович Г.Е.* О взаимодействии параметрически возбужденных спиновых волн с тепловыми//ЖЭТФ. – 1982. – Т. 82, № 5. – С. 1562–1577.
169. *Львов В.С.* Статистическое описание нелинейных волновых полей. – Препринт /ИАиЭ СО АН СССР. – Новосибирск, 1982. – № 190. – 33 с; Параметрическое возбуждение волн в среде со случайными неоднородностями. – Препринт/ИАиЭ СО АН СССР. – Новосибирск, 1982. – № 192. – 49 с.
170. *Львов В.С., Фалькович Г.Е.* Форма пакета параметрически возбужденных волн при наличии нелинейного затухания. – Препринт/ИАиЭ СО АН СССР. – Новосибирск, 1983. – № 220. – 8 с.
171. *Львов В.С., Подивилов Е.В.* Перестройки функции распределения параметрических спиновых волн. – Препринт/ИАиЭ СО АН СССР. – Новосибирск, 1986. – № 323. – 28 с.
172. *Мелков Г.А.* Нелинейная релаксация спиновых волн в ферритах//ЖЭТФ. – 1971.– Т. 61, № 1 (7). – С. 373–381.
173. *Мелков Г.А.* Влияние параметрически возбужденных спиновых волн на процессы релаксации в ферритах//ФТТ. – 1975. – Т. 17, вып. 6. – С. 1728–1732.
174. *Гранкин В.Л., Мелков Г.А., Рубан В.А.* Параллельная накачка спин-волновой нестабильности в ферритах различной намагниченности//ФТТ. – 1973. – Т. 15.– С. 632–634.
175. *Мелков Г.А., Гранкин В.Л.* Свойства параметрически возбужденных спиновых волн в ферритах//ЖЭТФ. – 1975. – Т. 69. – С. 1415–1421.
176. *Мелков Г.А.* Размерные эффекты при параметрическом возбуждении спиновых волн в ферритах//ЖЭТФ. – 1976. – Т. 70. – С. 1324–1329.
177. *Мелков Г.А., Круценко И.В.* Механизмы ограничения амплитуды параметрически возбужденных спиновых волн // ЖЭТФ. – 1977. – Т. 72, вып. 2. – С. 564–534.

178. *Михайлов А.С.* О флуктуациях в системе параметрически возбужденных магнонов//ЖЭТФ. – 1975. – Т. 69, № 2 (8). – С. 523–534.
179. *Михайлов А.С.* Статистические свойства стационарного состояния системы параметрически возбужденных спиновых волн//ФТТ. – 1976. – Т. 18, вып. 2. – С. 494–502.
180. *Михайлов А.С., Фарзетдинова Р.М.* Квантовая теория релаксации спиновых волн на двухуровневых примесях//ЖЭТФ. – 1981. – Т. 80. – С. 1524–1539.
181. *Михайлов А.С., Фарзетдинова Р.М.* Процессы релаксации спиновых волн на парамагнитных примесях в антиферромагнетиках//ЖЭТФ. – 1983. – Т. 84, вып. 1. – С. 190–205.
182. *Михайлов А.С., Чубуков А.В.* Излучение электромагнитных волн при параметрическом возбуждении магнонов в антиферромагнетиках//ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86. – С. 1401–1410.
183. *Моносов Я.А., Сурин В.В., Шахунов В.А.* О восприимчивости спиновой системы феррита за порогом параметрического возбуждения//ЖЭТФ. – 1973. – Т. 65, вып. 5 (11). – С. 1905–1910.
184. *Моргенталлер Ф.Р.* (*Morgenthaler F.R.*). Parallel–Pumped Magnon Instabilities in a two–sublattice Ferromagnetic Crystal//J. Appl. Phys. – 1960. – V. 31, Suppl. – P. 95S–97S.
185. *Морозов В.Г., Мухай А.И.* Кинетическое описание коллективных колебаний в системе параметрических спиновых волн. I. Кинетические уравнения. Однородные коллективные моды//ТМФ. – 1982. – Т. 51. – С. 234.
186. *Накамура Т.* (*Nakamura T.*). Indirect Coupling of Nuclear Spins in Antiferromagnet with Particular Reference to MnF_2 at very Low Temperature // Progr. Theor. Phys. – 1958. – V. 20. – P. 524–552.
187. *Недлин Г.М.* Прямое обменное взаимодействие между многоэлектронными атомами и гайзенберговский гамильтониан // ФТТ. – 1974. – Т. 66. – С. 1822.
188. *Ожогин В.И.* Релаксация магнитного момента в антиферромагнетике с анизотропией типа "легкая плоскость" // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 46. – С. 531–536.
189. *Ожогин В.И.* Косвенная параллельная накачка и бирезонансное удвоение частоты в антиферромагнетиках // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 58, вып. 6. – С. 2079–2089.
190. *Ожогин В.И., Якубовский А.Ю.* Жесткое возбуждение магнонов при параллельной накачке в антиферромагнетике // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 63. – С. 2205.
191. *Ожогин В.И., Якубовский А.Ю.* "Параметрические" пары в антиферромагнетике с анизотропией типа "легкая плоскость" // ЖЭТФ. – 1974. – Т. 67, № 1 (7). – С. 287–308.
192. *Ожогин В.И., Сулейманов С.М., Якубовский А.Ю.* Особенности параметрического возбуждения ядерных магнонов в антиферромагнетиках при модуляции магнитного поля // Письма в ЖЭТФ. – 1980. – Т. 32. – С. 308–311.
193. *Ожогин В.И., Сулейманов С.М., Якубовский А.Ю.* Гигантские осцилляции порога параллельной накачки в магнетиках при бигармонической модуляции поля // Письма в ЖЭТФ. – 1981. – Т. 34, вып. 11. – С. 606–608.
194. *Орел Б.И., Старобинец С.С.* Радиочастотная магнитная восприимчивость и коллективный резонанс магнонов при параллельной накачке // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 68, № 1. – С. 317–325.
195. *Пересини Е.Р. и др.* (*Peressini E.R., Hartwick T.S., Weiss M.T.*). An Experimental Study of the Parallel Pumped Ferromagnetic Amplifier // J. Appl. Phys. – 1962. – V. 33, № 11. – P. 3292–3295.
196. *Петраковский Г.А., Бержанский В.Н.* Пороговые явления в параметрически возбужденной спиновой системе ферритов // Письма в ЖЭТФ. – 1970. – Т. 12, вып. 9. – С. 429–430.
197. *Петров С.В., Смирнов А.И.* Излучение сложного характера релаксации спиновых волн при низких температурах // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 80, № 4. – С. 1628–1638.
198. *Подивилов Е.В., Черепанов В.Б.* Дрейф частоты параметрически возбужденных спиновых волн // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 90. – С. 767–780.
199. *Прозорова Л.А., Боровик–Романов А.С.* Параметрическое возбуждение спиновых волн в антиферромагнитном $CsMnF_3$ // Письма в ЖЭТФ. – Т. 10. – С. 316–320.
200. *Прозорова Л.А., Смирнов А.И.* Нелинейные высокочастотные свойства железо–иттриевого граната при низких температурах // ЖЭТФ. – 1974. – Т. 69, № 2 (8). – С. 758–763.

201. *Прозорова Л.А., Смирнов А.И.* Изменение спектра спиновых волн при взаимодействии магнонов // ЖЭТФ. – 1978. – Т. 74. – С. 1554–1561.
202. *Свистов Л.Е., Смирнов А.И.* Исследование взаимодействия спиновых волн с ядерной спиновой подсистемой в антиферромагнетике // ЖЭТФ. – 1982. – Т. 82. – С. 941–950.
203. *Сиви М.Х.* (*Seavey M.H.*). Nuclear and Electronic Spinwave Relaxation Rates in the Hexagonal Antiferromagnet $CsMnF_3$ // J. Appl. Phys. – 1969. – V. 40. – P. 1597–1598.
204. *Смирнов А.И.* Наблюдение взаимодействия магнонов в антиферромагнетике // ЖЭТФ. – 1977. – Т. 73. – С. 2255–2263.
205. *Смирнов А.И.* Кинетика параметрической неустойчивости спиновых волн в антиферромагнетике // Письма в ЖЭТФ. – 1977. – Т. 27. – С. 177–181.
206. *Смирнов А.И.* Изучение генерации упругих колебаний антиферромагнетика при параметрическом возбуждении спиновых волн // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 84. – С. 2290–2305.
207. *Смирнов А.И.* Периодическое перераспределение плотности параметрически возбуждаемых спиновых волн в антиферромагнетике // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 88. – С. 1369–1381.
208. *Смирнов А.И.* Изучение хаотического режима перераспределения плотности параметрически возбуждаемых магнонов // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 80. – С. 385–397.
209. *Старобинец С.С., Гуревич А.Г., Зауткин В.В.* Параллельная накачка в $RbNiF_3$ // ФТТ. – 1969. – Т. 11. – С. 1239–1241.
210. *Сул Х.* (*Suhl H.*). Theory of Ferromagnetic Resonance at High Signal Powers // Phys. Chem. Sol. – 1957. – V. 1. – P. 209–227.
211. *Сул Х.* (*Suhl H.*). Effective Nuclear Spin Interactions in Ferromagnets // Phys. Rev. – 1958. – V. 109, № 2. – P. 606.
212. *Сул Х.* (*Suhl H.*). Note on the Saturation of the Main Resonance in Ferromagnetic // J. Appl. Phys. – 1959. – V. 30, № 12. – P. 1961–1964.
213. *Сул Х.* (*Syhl H.*). Restoration of Stability in Ferromagnetic Resonance // Phys. Rev. Lett. – 1961. – V. 6. – P. 174–176.
214. *Тернер Е.М.* (*Turner E.M.*). Interection of Phonons and Spin Waves in Yttrium Garnet // Phys. Rev. Lett. – 1960. – V. 5, № 3. – P. 100–101.
215. *Тулин В.А.* Ядерные спиновые волны в магнитоупорядоченных веществах // ФНТ. – 1979. – Т. 5. – С. 965–993.
216. *Турицын С.К., Фалькович Г.Е.* Устойчивость магнитоупругих солитонов и самофокусировка звука в антиферромагнетиках // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 87, № 7. – С. 1061–1065.
217. *Туров Е.А.* К теории слабого ферромагнетизма // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 36. – С. 1254–1258.
218. *Уайльд Х.В.* (*Wyld H.W.*). Formulation of the Theory of Turbulence in an Incompressible Fluid // Ann. of Phys. – 1961. – V. 14. – P. 143.
219. *Фалькович Г.Е.* О нетривиальной релаксации узкого нелинейного пакета при трехволновом взаимодействии // Изв. вузов. – Радиофизика. – 1984. – Т. 27, № 2. – С. 189–195.
220. *Фришман А.М.* Влияние модулирующих полей на порог параметрического возбуждения спиновых волн / ФНТ. – 1982. – Т. 8, № 5. – с. 554–556.
221. *Хартвик Т.С. и др.* (*Hartwick T.S., Peressini E.R., Weiss M.T.*). Subsidiary Resonance in YIG // J. Appl. Phys. – 1961. – V. 32, № 3. – P. 223–224.
222. *Хартвик Т.С. и др.* (*Hartwick T.S., Peressini E.R., Weiss M.T.*). Suppression of Subsidiary Absorption in Ferrites by Modulation Techniques // Phys. Rev. Lett. – 1961. – V. 6. – P. 176–177.
223. *Хас Ч.В. и др.* (*Haas C.W., Callen H.B.*). Ferromagnetic Resonance Linewidth in Cobalt–Substitute Ferrites // Phys. Rev. – 1961. – V. 122. – P. 59–68.
224. *Холстейн Т. и др.* (*Holstein T., Primakoff H.*). Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet // Phys. Rev. – 1940. – V. 58. – P. 1040–1088.
225. *Цукерник В.М., Янкелевич П.М.* Установившееся распределение магнонов при параметрическом возбуждении в ферромагнетике // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 68, № 6. – С. 2116–2124.

226. *Черепанов В.Б.* О взаимодействии параметрически возбужденных волн с дефектами, обладающими внутренней структурой//ФТТ. – 1979. – Т. 21, вып. 3. – С. 641–647.
227. *Черепанов В.Б.* О нелинейной теории параметрического возбуждения волн некогерентной накачкой//ФТТ. – 1980. – Т. 22. – С. 43.
228. *Черепанов В.Б.* Взаимодействие коллективных колебаний параметрически возбужденных спиновых волн с акустическими и их неустойчивость//ЖЭТФ. – 1985. – Т. 90. – С. 153–157.
229. *Черепанов В.Б.* Накопление продуктов релаксации стационарного пакета магнонов//ЖЭТФ. – 1986. – Т. 91. – С. 235–244.
230. *Шлеманн Е.* (*Schlömann E.*). Spin-Wave Analysis of Ferromagnetic Resonance in Polycristalline Ferrites//J. Phys. Chem. Solids. – 1958. – V. 6, №2/3. – P. 242–256.
231. *Шлеманн Е.* (*Schlömann E.*). Fine Structure in the Decine of the Ferromagnetic Resonance Absorption with Increasing Power Level//Phys. Rev. – 1959. – V. 16, № 4. – P. 828–837.
232. *Шлеман Е. и др.* (*Schlömann E., Joseph R.J.*). Ferromagnetic Resonance in Polycrustalline Ferrites with Hexagonal Crystal Structure//J. Appl. Phys. – 1959. – V. 30, Suppl. – P. 177S–178S.
233. *Шлеманн Е. и др.* (*Schlömann E., Green J., Milano V.*). Recent Development in Ferromagnetic Resonance at High Power Levels//J. Appl. Phys. – 1960. – V. 31, Suppl. – P. 386S–395S.
234. *Шлеман Е. и др.* (*Schlömann E., Saunder J.H., Sirvetz M.H.*–). L–Band Ferromagnetic Resonance Experiments at High Peak Power Levels//Trans. IRE, MTT–8. – 1960.– №1. – P. 96–100.
235. *Шлеманн Е.* (*Schlömann E.*). Longitudinal Susceptibility of Ferromagnets in Strong RF Fields//J. Appl. Phys. – 1962. – V. 33, №2. – P. 527–534.
236. *Шлеманн Е.* (*Schlömann E.*). Inhomogeneous Broadening of Ferromagnetic Resonance Liner//Phys. Rev. – 1969. – V. 182, №2. – P. 632–645.
237. *Якубовский А.Ю.* Параметрическое возбуждение релаксации ядерных спиновых волн в антиферромагнитном $MnCO_3$// ЖЭТФ. – 1974. – Т. 67, № 4 (10). – С. 1529–1543.
238. *Ямазаки Х.* (*Yamazaki H.*). Oscillations and Perioddoubling of Magnon Amplitude under parallel Pumping in Antiferromagnetic $CuCl_2 . 2H_2O$//J. Phys. Soc. Japan. – 1984.– V. 53. – P. 1155–1159.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ 5
СПИСОК НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ С КОММЕНТАРИЯМИ 5

РАЗДЕЛ 1. **ОБЩИЕ СВОЙСТВА МАГНЕТИКОВ**

Глава 1. **Магнитоупорядоченные диэлектрики** 7

§ 1. Типы магнитного упорядочения 7
§ 2. Обменное взаимодействие и модель Гейзенберга 9
§ 3. Релятивистские взаимодействия 13
§ 4. Структура конкретных кристаллов 14

РАЗДЕЛ 2. **ДИНАМИКА СПИНОВЫХ ВОЛН**

Глава 2. **Классический гамильтонов формализм и спиновые волны в магнетиках** 18

§ 5. Гамильтонов формализм для волн в сплошной среде 20
§ 6. Гамильтониан спиновых волн в ферромагнетиках 27
§ 7. Гамильтониан спиновых волн в антиферромагнетиках 34
§ 8. Уравнения движения и канонические переменные 37
§ 9. Спин-волновой гамильтониан в ферромагнетиках и его энергия в приближении сплошной среды 40
Задачи 44
Приложение 1. Вариационные производные 45
Приложение 2. Условия каноничности преобразований 45

Глава 3. **Динамические процессы взаимодействия спиновых волн** 46

§ 10. Уравнения движения в слабо неконсервативной среде 47
§ 11. Трехволновые процессы 50
§ 12. Четырехволновые процессы 56
§ 13. Самофокусировка магнитоупругих волн в антиферромагнетиках . . 64
§ 14. Методы параметрического возбуждения спиновых волн в магнетиках 68

РАЗДЕЛ 3. **ПРИБЛИЖЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ**

Глава 4. **Спиновые волны за порогом параметрического возбуждения. *S*-теория и эксперимент** 75

§ 15. Введение 75
§ 16. Постановка задачи о нелинейном поведении параметрически возбужденных волн 77
§ 17. Фазовые соотношения при параметрическом возбуждении волн и механизмы ограничения амплитуды 79
§ 18. Диагональный гамильтониан, уравнения движения и основное состояние в *S*-теории 81

§ 19. Простейшие решения основных уравнений S-теории 87
§ 20. Основное состояние системы параметрических волн при большой надкритичности 94
§ 21. Нелинейные восприимчивости: методы измерения и сравнение теории с экспериментом 96
§ 22. Нелинейная теория ферромагнитного резонанса 101
Задачи 108

Глава 5. **Коллективные колебания системы параметрически возбужденных волн** 110

§ 23. Спектр пространственно-однородных коллективных колебаний – элементарная теория 110
§ 24. Пространственно-неоднородная S-теория 112
§ 25. Резонансное возбуждение коллективных колебаний малой амплитуды – теория и эксперимент 117
§ 26. Порог параметрического возбуждения в условиях периодической модуляции магнитного поля: теория и эксперимент 122
§ 27. Коллективные колебания большой амплитуды и двойной параметрический резонанс 126
Задачи 130

Глава 6. **Нестационарные процессы при параметрическом возбуждении волн** 131

§ 28. Переходные процессы в системе параметрических волн при включении накачки 131
§ 29. Параметрическое возбуждение волн в условиях дрейфа частоты . . . 134
§ 30. Параметрическое возбуждение спиновых волн некогерентной накачкой при шумовой модуляции их частот 142
§ 31. Неустойчивые коллективные колебания – автоколебания намагниченности 146
§ 32. Автоколебания и коллапс при параметрическом возбуждении узкого пакета волн 150
Задачи 157

РАЗДЕЛ 4. **КИНЕТИКА СПИНОВЫХ ВОЛН**

Глава 7. **Статистическое описание нелинейных спиновых волн** 158

§ 33. Необходимость диаграммного подхода для описания кинетики волн 158
§ 34. Диаграммная техника 159
§ 35. Кинетические уравнения для волн 165
§ 36. Диаграммные уравнения с аномальными корреляторами 166
§ 37. Уравнения для одночастотной параметрической турбулентности волн 169
§ 38. Диаграммные уравнения для коллективных колебаний 170
Задачи 172

Глава 8. **Взаимодействие интенсивного узкого пакета спиновых волн с тепловыми** 173

§ 39. Нелинейная релаксация пакета волн в приближении самосогласованного поля 174
§ 40. Влияние нелинейного затухания на стационарное состояние параметрически возбужденных волн 180
§ 41. Релаксация нелинейного пакета волн в холодном термостате 184
§ 42. Релаксация монохроматической волны в нелинейной среде 189
Задачи 191

Глава 9. **Параметрическое возбуждение спиновых волн в магнетодиэлектриках со случайными неоднородностями. Sg^2-теория** 191

§ 43. Качественные особенности задачи 191
§ 44. Рассеяние волн на статических неоднородностях 194
§ 45. Основные уравнения 197

§ 46. Функция распределения параметрических спиновых волн 200
§ 47. Порог параметрического возбуждения в неоднородной среде 207
§ 48. Запороговое поведение параметрически возбужденных волн 209
§ 49. Коллективные колебания в среде со случайными неоднородностями 211
Задачи 215

Глава 10. **ST^2-теория параметрического возбуждения спиновых волн** 216

§ 50. Влияние тепловых спиновых волн на распределение параметрических спиновых волн в $\boldsymbol{k}$, ω-пространстве – теория и эксперимент 217
§ 51. Распределение параметрических спиновых волн по частотам при сильном упругом рассеянии 222
§ 52. Функция распределения ПСВ в однородной изотропной среде 227
§ 53. Распределение ПСВ по частотам в ферромагнетике 233
§ 54. Угловое распределение ПСВ в анизотропной среде 237
§ 55. Влияние рассеяния ПСВ друг на друге на коллективные колебания . 242

Глава 11. **Кинетическая неустойчивость сильно неравновесной системы спиновых волн** 245

§ 56. Линейная теория кинетической неустойчивости 245
§ 57. Нелинейная теория кинетической неустойчивости 251
Задачи 256

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 258

Виктор Сергеевич Львов

НЕЛИНЕЙНЫЕ СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

Редактор *Т.Г. Борисова*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *С.В. Геворкян, В.Н. Никитина*
Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 32432

Сдано в набор 10.03.87. Подписано к печати 24.06.87. Т-10394
Формат 60 X 90 1/16. Бумага офсетная № 1
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 17,0. Усл.кр.-отт. 17,125. Уч.-изд.л. 19,37
Тираж 2500 экз. Тип. зак. 815 . Цена 4 р. 00 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25