— 50 —

77

В.С. ЛЬВОВ

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

50

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. С. ЛЬВОВ

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Курс лекций для студентов
физического факультета

НОВОСИБИРСК
1977

УДК 533. 951.8

Львов В.С.

Лекции по физике нелинейных явлений. Курс лекций для студентов физического факультета, НГУ, 1977, 1-47.

В курсе лекций с единой точки зрения рассмотрены нелинейные волновые явления в различных ситуациях - при распространении звука и света в сплошной среде, спиновых волн в ферромагнетиках, электромагнитных волн в плазме и т.д. В частности, описаны процессы слияния двух волн в одну, генерации второй гармоники, распадная, модуляционная и взрывная неустойчивости волн, самофокусировка света, коллапс волн, вынужденное комбинированное рассеяние света в пластине. В приближении самосогласованного поля получены уравнения, описывающие процесс индуцированного рассеяния волн на частицах, исследованы сингулярные решения этих уравнений; построена нелинейная теория параметрического возбуждения волн.

Все эти явления рассмотрены в рамках гамильтоновских уравнений движения; предварительно исходные уравнения движения среды формулируются в гамильтоновском виде. Это позволяет применять общие результаты к целому ряду конкретных ситуаций и описывать почти автоматически такие эффекты, которые в исходных переменных усматриваются с трудом.

Курс лекций рассчитан на студентов III-У курсов физических факультетов.

Введение

Целый ряд физических процессов можно описывать в л и н е й н о м приближении. Основная трудность при этом заключается в выяснении их природы и формулировке исходных уравнений движения. Необходимо было понять, например, что звук – это колебания плотности сплошной среды и написать для неё уравнения гидродинамики, свет – это электромагнитные волны и получить уравнения Максвелла. Эта программа для звука, света, волн на воде была выполнена ещё в прошлом веке, спиновые волны в ферромагнетиках открыты Блохом в 1930 г. Различные типы волновых движений в сложных конкретных ситуациях продолжают изучаться и сейчас. С увеличением амплитуды волн возникает целый мир новых удивительных явлений – самофокусировка и самоканализация света мощных лазеров, явление "девятого вала" в штормовом море, коллапс плазменных волн и т.д., обусловленных взаимодействием волн, которое описывается нелинейными членами уравнений.

Изучение нелинейных процессов началось с газо- и гидродинамики. Исследовались различные решения уравнений Эйлера или Навье-Стокса, затем активно стала развиваться физика плазмы с её огромным разнообразием различных случаев и типов уравнений (гидродинамическое приближение, кинетические явления и т.п.) Лазеры привели к возникновению нелинейной оптики, в которой исследуются нелинейные уравнения Максвелла в среде, радиолокаторы – к исследованию нелинейных свойств ферромагнетиков с помощью уравнений Ландау-Лифшица. Таким образом, число различных нелинейных уравнений, описывающих разные среды и ситуации, весьма велико. Задача физики нелинейных явлений – изучать подобные процессы с общей точки зрения, отвлекаясь по возможности от конкретных свойств среды. При этом выясняется, что "девятый вал" и самофокусировка света весьма похожие явления, имеющие общую причину. Трудности физики нелинейных явлений имеют много общего с трудностями макроскопической физики вообще. Можно написать уравнения движения – уравнения гидродинамики, Максвелла, Шредингера, но нельзя, как правило, их точно решить. Хороший пример такой ситуации - проблема гидродинамической турбулентности, уравнения движения для которой хорошо известны, но " в вопросе о сущности турбулентного движения в настоящее время всё же недостает полной ясности" (Л.Ландау).

Тем не менее в последние 10-20 лет был достигнут весьма существенный прогресс изучения нелинейных явлений (в частности в плазме, нелинейной оптике, в ферромагнетиках), а многие фундаментальные результаты были получены совсем недавно. Эти успехи частично связаны с общим продвижением в проблеме многих тел, с развитием вычислительной техники, позволяющей производить численные эксперименты с большим числом нелинейных уравнений. Необходимо отметить также возникший в последние годы эффективный математический метод анализа важного класса нелинейных уравнений, получивший название метода "обратной задачи рассеяния". В значительной мере прогресс в изучении нелинейных явлений связан также с предельно ясной формулировкой задач, очищенных от всего лишнего и малосущественного. Образцом такой формулировки проблем является классическая механика, сформулированная на языке канонических переменных. Обращение к классической механике очерчивает и рамки, внутри которых можно рассчитывать на значительный успех - это консервативные или почти консервативные системы, в которых диссипация волн мала. Наиболее общим и мощным методом классической механики является гамильтонов формализм. Поэтому первой нашей задачей будет его обобщение на случай континуального числа степеней свободы (сплошная среда) и трансляционно-инвариантного гамильтониана общего вида (§ 1,2).

Наиболее трудным и нетривиальным аспектом во всей этой процедуре является формулировка естественных уравнений среды в каноническом виде - это искусство, а не наука. В лекциях и задачах мы рассмотрим целый ряд таких примеров. Это позволит нам применять общие результаты к ряду конкретных ситуаций и описывать почти автоматически такие эффекты, которые в исходных переменных усматриваются с трудом. Мы рассмотрим серию простейших задач: слияние двух волн в одну, генерацию второй гармоники, распадную, взрывную и модуляционную неустойчивости плоской волны, вынужденное комбинационное рассеяние света в пластине, нелинейную эволюцию узких пакетов волн (коллапс), волноводное распространение света и т.д.

Общее число удовлетворительно решаемых задач в нелинейной теории существенно меньше, чем число стоящих в ней проблем. Ценность этих задач заключается в создании общей точки зрения, системы взглядов, которая помогает рассмотрению этих проблем и в ряде случаев – их удовлетворительному решению.

I. ВВЕДЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Здесь мы рассмотрим несколько примеров того, как уравнения движения, записанные в естественных переменных, можно представить в гамильтоновском виде

$$\frac{\partial q(r,t)}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta p(r,t)},\quad \frac{\partial p(r,t)}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta q(r,t)}. \tag{I.I}$$

Эти уравнения являются простым обобщением уравнений Гамильтона классической механики – среда в каждой точке $\vec{r}$ характеризуется парой канонически сопряженных переменных – обобщенной координатой $q(\vec{r},t)$ и импульсом $p(\vec{r},t)$. Гамильтониан (функция Гамильтона) зависит от q и p во всех точках $\vec{r}$, т.е. является функционалом от $q(\vec{r},t)$, $p(\vec{r},t)$ и обычно имеет смысл энергии среды. Символы $\frac{\delta}{\delta p}$, $\frac{\delta}{\delta q}$ обозначают вариационные производные, например: $\delta f(\vec{r},t)/\delta f(\vec{r}',t)=\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ дельта функция Дирака. В качестве первого примера введения канонических переменных рассмотрим

I.I. Потенциальные движения в идеальной гидродинамике (звук в сплошной среде)

Уравнения Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\,\vec{\nabla})\vec{V}=-\nabla p/\rho,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho\vec{V}=0 \tag{I.2}$$

в случае потенциальных течений могут быть записаны в виде

$$\dot{\Phi}+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Phi)^2+w(\rho)=0,\quad \dot{\rho}+\mathrm{div}\,\rho\vec{\nabla}\Phi=0, \tag{I.3}$$

где Φ – потенциал поля скорости

$$\vec{V}=\vec{\nabla}\Phi, \tag{I.4}$$

а ω – удельная энергия жидкости:

$$\omega(\rho)=\int\frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{d\rho}\,d\rho, \tag{I.5}$$

p - давление, которое предполагается однозначной функцией плотности $\rho(\vec{r},t)$.

Система уравнений (I.3) сохраняет энергию жидкости

$$H = \int\left[\frac{1}{2}\rho(\vec{\nabla}\Phi)^2 + \varepsilon(\rho)\right]d\vec{r}, \quad \varepsilon(\rho) = \int w(\rho)d\rho. \qquad (I.6)$$

Прямым вычислением можно теперь убедиться, что уравнения (I.3) можно получить, варьируя гамильтониан H (I.6) по ρ и Φ в соответствии с (I.I). Таким образом, плотность жидкости является обобщенной координатой, а потенциал скорости - обобщенным импульсом.

I.2. Вихревые и потенциальные движения идеальной жидкости

Для того чтобы учесть кроме потенциальных также вихревые движения жидкости, необходимо ввести ещё одну пару канонически сопряженных переменных - переменные Клебша $\lambda(\vec{r},t)$ и $\mu(\vec{r},t)$[1]; гамильтоновские уравнения движения для которых имеют вид

$$\dot{\lambda} = \frac{\delta H}{\delta\mu} = -\operatorname{div}\lambda\vec{V}, \quad \dot{\mu} = -\frac{\delta H}{\delta\lambda} = -(\vec{V}\vec{\nabla})\mu, \qquad (I.7)$$

$$\dot{\rho} = \frac{\delta H}{\delta\Phi} = -\operatorname{div}\rho\vec{V}, \quad \dot{\Phi} = -\frac{\delta H}{\delta\rho} = -\frac{V^2}{2} + \frac{\lambda}{\rho}(\vec{V}\vec{\nabla})\mu - \frac{\delta\varepsilon}{\delta\rho} \qquad (I.8)$$

с гамильтонианом

$$H = \int\left[\rho\frac{V^2}{2} + \varepsilon(\rho)\right]d\vec{r}, \qquad (I.9)$$

причем

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\Phi + \frac{\lambda}{\rho}\vec{\nabla}\mu. \qquad (I.10)$$

Из (I.7) видно, переменные λ и μ переносятся вместе с жидкостью. Вычисляя по (I.10)

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \left[\nabla\frac{\lambda}{\rho}\times\vec{\nabla}\mu\right],$$

видно, что вихревые линии (касательные в каждой точке $\vec{r}$ к направлению $\operatorname{rot}\vec{V}$) представляют собой линии пересечения двух семейств поверхностей λ/ρ и μ, расслаивающих пространство. Таким образом, переменные Клебша не описывают топологически более сложные типы течений, при которых вихревые линии "завязаны в узлы". В таких случаях переменные λ и μ можно ввести локально, в окрестности любой точки, но они окажутся многозначными функциями координат.

Случай $\lambda=0$ или $\mu=\mathrm{const}$ отвечает потенциальным движениям жидкости, которые, как показано в предыдущем разделе, описываются парой переменных (ρ, Φ). В случае несжимаемой жидкости $\dot{\rho} = 0$, и уравнения (I.8) сводятся к связи $div\,\vec{V} = 0$, позволяющей выразить Φ через λ и μ:

$$\Delta\Phi = -div\left(\frac{\lambda}{\rho}\,\vec{\nabla}\mu\right). \qquad (I.II)$$

Тогда из (I.IO)

$$\Delta\vec{V} = -rot\left[\vec{\nabla}\lambda \times \vec{\nabla}\mu\right], \qquad (I.I2)$$

и уравнения для λ и μ описывают непотенциальные движения несжимаемой жидкости. В общем случае нельзя утверждать, что переменные (ρ,Φ) описывают потенциальные, а (λ,μ) - вихревые движения. В работе [2] описаны другие, более сложно устроенные канонические переменные, в которых при скоростях жидкости $\vec{V}$, малых по сравнению со скоростью звука в ней, потенциальные и вихревые движения максимальным образом разделены.

I.3. Переменные Клебша (I.IO) являются образцом, по которому вводятся канонические переменные в другие уравнения гидродинамического типа. В обзоре В.Захарова [3] приведены канонические переменные для релятивистской гидродинамики, для гидродинамики заряженной жидкости (плазмы), взаимодействующей с электромагнитным полем, для магнитной гидродинамики, для волн на поверхности жидкости. В работе [4] введены четыре пары канонических переменных, описывающие течение нормальной и сверхтекучей компоненты жидкого гелия в рамках двухжидкостной гидродинамики.

I.4. Можно ввести канонические переменные для описания спиновых волн в ферромагнетиках в рамках уравнения Блоха для плотности магнитного момента

$$\dot{\vec{M}} = g\left[\vec{M} \times \frac{\delta H}{\delta\vec{M}}\right], \quad |\vec{M}| = M_0, \qquad (I.I3)$$

где $g = \frac{e}{mc} = 2\pi\cdot 2{,}8\,\frac{МГц}{Э}$ - гиромагнитное отношение, H - полная энергия ферромагнетика. Далее мы рассмотрим два способа записи (I.I3) в канонических переменных - формулы (2.I8) и (2.I9.), (2.20).

I.5. Уравнения нелинейной электродинамики в средах с дисперсией не допускают точного введения канонических переменных, т.к. не являются дифференциальными по времени. Однако, это можно сделать приближенно, вдали от резонансных линий, если напряженность поля не слишком велика. Обобщенной координатой и импульсом являются, например, векторный потенциал A и его производная по времени в кулоновской калибровке. Подробнее — см. задачу (2.I) к § 2.

Задачи. (Звёздочкой отмечены задачи повышенной сложности)

I.I. Вычислить $I=\frac{\delta}{\delta\Phi}\int\rho(\nabla\Phi)^2 d\vec{r}$

Решение. $I=\int\rho\,\frac{\delta}{\delta\Phi(\vec{r},t)}(\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t))^2 d\vec{r}\,'=2\int\rho\left(\vec{\nabla}\Phi\vec{\nabla}\frac{\delta\Phi(\vec{r},t)}{\delta\Phi(\vec{r}';t)}\right)d\vec{r}=$
$=-2\int \mathrm{div}(\rho\vec{\nabla}\Phi)\frac{\delta\Phi(\vec{r}')}{\delta\Phi(\vec{r})}\,d\vec{r}\,'=-2\,\mathrm{div}(\rho(\vec{r})\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}))$.

I.2. Показать, что для двухжидкостной модели плазмы без магнитного поля каноническими переменными являются плотности ρ_α и потенциалы скорости частиц Φ_α [5] (α = 1,2 – электроны, ионы) с гамильтонианом

$$H=\sum_\alpha\int\left[\frac{\rho_\alpha(\vec{\nabla}\Phi_\alpha)^2}{2}+\varepsilon(\rho_\alpha)\right]d\vec{r}+\frac{1}{8\pi}\int(\vec{\nabla}\varphi)^2 d\vec{r}, \qquad (I.I4)$$

где потенциал электрического поля φ является функционалом от ρ_α в соответствии с уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi=-4\pi\sum_\alpha e_\alpha\rho_\alpha/m_\alpha. \qquad (I.I5)$$

Указание. При вычислении

$$I\equiv\frac{\delta}{\delta\rho_\alpha}\frac{1}{8\pi}\int(\vec{\nabla}\varphi)^2 d\vec{r}=\frac{1}{4\pi}\int\left(\vec{\nabla}\varphi\,\frac{\delta\vec{\nabla}\varphi}{\delta\rho_\alpha}\right)d\vec{r}=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int\varphi\,\frac{\delta\Delta\varphi}{\delta\rho}\,d\vec{r}\ -$$

необходимо учесть (I.I5), и тогда получится $I=e_\alpha\varphi/m_\alpha$.

I.3. Используя уравнение Эйлера (I.2), найти спектр звука ω_k – зависимость частоты от волнового вектора.

Указание. Линеаризовать уравнение $\rho_1(\vec{r},t)=\rho-\rho_0$, $\vec{V}$, и искать его решение в виде плоской волны $\rho_1, \vec{V}\sim$ –
$\exp i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)$.

Ответ. $\omega_k^2=k^2c_s^2$, $c_s^2=(\partial p/\partial\rho)$.

I.4. В рамках двухжидкостной модели плазмы без магнитного поля (см. задачу I.2) найти закон дисперсии для ленгмюровских колебаний ω_k ионного звука Ω_k [6].

Указание: Отыскивая ω_k, можно положить, что масса ионов бесконечна (приближение неподвижных ионов). Тогда

$$\omega_k^2=\omega_p^2+3k^2V_{Te}^2, \qquad (I.I6)$$

где
$$\omega_p^2=4\pi ne^2/m,\ 3V_{Te}^2=(\partial p/\partial\rho)_s \qquad (I.I7)$$

ω_p – ленгмюровская частота и V_{Te} – тепловая скорость электронов; ленгмюровские колебания адиабатичны. Вычисляя Ω_κ необходимо учесть, что электроны успевают распределиться по Больцману. Тогда

$$\Omega_\kappa^2 = \kappa^2 c_s^2 \,(1+\kappa^2 r_D^2)^{-1}, \tag{I.19}$$

где

$$c_s^2 = T_e/M, \quad r_D^2 = T_e/4\pi e^2 n.$$

Ионный звук имеет смысл рассматривать в неизотермической плазме $(T_e \gg T_i)$, когда он слабо затухает.

I.5.* Найти спектр волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в поле тяжести [7].

Указание. Написать уравнение Бернулли (типа (I.3)) для потенциала поля скорости. На поверхности жидкости

$$\dot{\Phi} + \frac{(\vec{\nabla}\Phi)^2}{2} + g\eta = 0, \tag{I.20}$$

где g – ускорение силы тяжести, $Z=\eta(\vec{r}_\perp,t)$ – уравнение поверхности. Отсюда

$$V_z\Big|_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\eta. \tag{I.21}$$

Для замыкания системы (I.20), (I.21) необходимо найти Φ во всем объеме из уравнения $\Delta\Phi=0$ с граничным условием на дне

$$(d\Phi/dz)\Big|_{z=-h} = 0.$$

Ответ.

$$\omega_\kappa^2 = g\kappa\, th\, \kappa h. \tag{I.22}$$

I.6.* Показать [8] прямым вычислением, что каноническими переменными q и p в предыдущей задаче являются

$$q(\vec{r}_\perp,t) = \eta(\vec{r}_\perp,t); \tag{I.23}$$

$$p(\vec{r}_\perp,t) = \Phi\left[\vec{r}_\perp, \eta(\vec{r}_\perp,t); t\right]$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{\rho_0}{2}\int d\vec{r}_\perp \int_{-h}^{\eta} dz\,(\vec{\nabla}\Phi)^2 + \frac{\rho_0 g}{2}\int \eta^2 d\vec{r}_\perp. \tag{I.24}$$

2. КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ВОЛН В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

2.I. Переход к комплексным переменным. Пусть среда характеризуется набором n пар переменных $q_j(\vec{r},t), p_j(\vec{r},t)$, для которых

$$\dot{q}_j(\vec{r},t) = \frac{\delta H}{\delta p_j(\vec{r},t)}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\delta H}{\delta q_j(\vec{r},t)}; \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Формальное преимущество гамильтоновского метода – симметричная форма записи. Для реализации его введем новые переменные:

$$a_j=(q_j+ip_j)/\sqrt{2}, \quad a_j^*=(q_j-ip_j)/\sqrt{2}, \qquad (2.1)$$

для них $\dot{a}_j=\left[\frac{\delta H}{\delta p_j}-i\,\frac{\delta H}{\delta q_j}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\dot{a}_j^*=\left[\frac{\delta H}{\delta p_j}-i\,\frac{\delta H}{\delta q_j}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Подставляя сюда $H(a_j,a_j^*)$, получим $i\dot{a}_j=\frac{\delta H}{\delta a_j^*}$, $-i\dot{a}_j^*=\frac{\delta H}{\delta a_j}$, т.е. вместо двух вещественных имеем одно комплексное уравнение

$$i\dot{a}_j=\delta H/\delta a_j^*. \qquad (2.2)$$

В квантовой механике такой замене переменных соответствует переход от представления координата-импульс к представлению операторов рождения и уничтожения, а комплексные канонические переменные a_j, a_j^* являются их классическими аналогами.

Дальнейшее преимущество – широкий произвол в выборе переменных, сохраняющих каноничность (т.е. вид (2.2)) уравнений.

2.2. Условие каноничности преобразований. Рассмотрим частный вид канонических преобразований, не содержащих явно t:

$a_j=a_j(b_k,b_k^*)$, и наоборот $b_j=b_j(a_k,a_k^*)$, $b_j(\vec{r})=f(\{a_k(\vec{r})\})$.

Получим ограничения на преобразования, вытекающие из требования каноничности. Для этого вычислим:

$$\dot{b}_j(\vec{r},t)=\sum_k\int d\vec{r}'\left[-i\,\frac{\delta b_j(\vec{r},t)}{\delta a_k(\vec{r}'t)}\,\frac{\delta H}{\delta a_k^*(\vec{r},t)}+i\,\frac{\delta b_j(r,t)}{\delta a_k^*(r't)}\,\frac{\delta H}{\delta a_k(r',t)}\right],$$

$$\frac{\delta H}{\delta a_j(r',t)}=\sum_k\int d\vec{r}''\left[\frac{\delta H}{\delta b_k(r'')}\,\frac{\delta b_k(r'')}{\delta a_j(r')}+\frac{\delta H}{\delta b_k^*(r'')}\,\frac{\delta b^*(r'')}{\delta a_k(r')}\right],$$

$$+i\dot{b}_j=\sum_k\int dr'\left[\frac{\delta H}{\delta b^*(r')}\left\{b_j(r,t),\,b_k(r,t)\right\}_{a,a^*}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta H}{\delta b_k(r')}\left\{b_j(r,t),\,b_k(r',t)\right\}\right].$$

Мы ввели здесь обозначения для скобок Пуассона

$$\left\{f(\vec{r})g(r')\right\}_{a,a^*}=\sum_j\int d\vec{r}''\left[\frac{\delta f(\vec{r})}{\delta a_j^*(\vec{r}'')}\,\frac{\delta g(\vec{r}')}{\delta a_j(\vec{r}'')}-\frac{\delta f(\vec{r})}{\delta a_j(\vec{r}'')}\,\frac{\delta g(\vec{r}')}{\delta a_j^*(\vec{r}'')}\right].$$

Отсюда условия каноничности преобразований:

$$\left\{b_i(\vec{r})b_j(\vec{r}')\right\}=0, \quad \left\{b_i(\vec{r})\,b_j^*(\vec{r}')\right\}=\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \qquad (2.3)$$

Эти условия являются классическим аналогом перестановочных соотношений для бозе-операторов.

2.3. Гамильтониан при слабой нелинейности. Полагая малыми $a(\vec{r})$, разложим H в ряд

$$H = H^{(2)} + H_{int}, \quad H^{(2)} = \sum_{ij} \iint d\vec{r}\, d\vec{r}\,' \times$$
$$\times \left\{ A_{ij}(\vec{r},\vec{r}\,') a_i(\vec{r}) a_j^*(\vec{r}\,') + \frac{1}{2}\left[B_{ij}^*(\vec{r},\vec{r}\,') a_i(\vec{r}) a_j(\vec{r}\,') + к.с. \right] \right\}. \qquad (2.4)$$

Очевидно, что $A = A(\vec{r}-\vec{r}\,')$, $B = B(\vec{r}-\vec{r}\,')$ для однородной системы, а также $A_{ij} = A_{ji}^*$. Существенного упрощения гамильтониана можно добиться, совершая преобразование Фурье

$$a(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad a^*(r) = (2\pi)^{-3/2} \int a_{\vec{k}}^* e^{-ikr} dk. \quad (2.5)$$

Это преобразование является каноническим, в чем можно убедиться в частности, вычислив скобки Пуассона (2.3). Поэтому в переменных $a_j(k)$ уравнение Гамильтона (2.2) сохранит свой канонический вид

$$i \frac{\partial a_j(\vec{k})}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a_j^*(\vec{k})}. \qquad (2.6)$$

При этом квадратичная часть гамильтониана $H^{(2)}$ окажется диагональной по волновому вектору $\vec{k}$

$$H^{(2)} = \sum_{ij} \int d\vec{k} \left[A_{ij}(\vec{k}) a_i(\vec{k}) a_j^*(\vec{k}) + \frac{1}{2}\left(B_{ij}(\vec{k}) a_i(\vec{k}) a_j(-\vec{k}) + к.с. \right) \right],$$

где

$$A_{ij}(\vec{k}) = \int A_{ij}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}, \quad B_{ij}(\vec{k}) = \int B_{ij}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}.$$

Разумеется, это целиком связано с трансляционной симметрией задачи. Гамильтониан (2.7) можно диагонализовать по i, j с помощью линейного канонического преобразования

$$b_i(k) = \sum_j \left[u_{ij}(\vec{k}) a_j(\vec{k}) + v_{ij}(\vec{k}) a_j^*(-\vec{k}) \right]. \qquad (2.8)$$

При соответствующем выборе матриц U и V $H^{(2)}$ приобретает вид

$$H^{(2)} = \sum_j \int \omega_j(\vec{k})\, b_j(\vec{k}) b_j^*(\vec{k}) d\vec{k}. \qquad (2.9)$$

Частоты $\omega_j(\vec{k})$ можно определить и не находя преобразования (2.8) явно. Для этого запишем уравнение движения (2.6) для $a_j(\vec{k})$

$$\dot{a}_j(k) + i \sum_l \left[A_{lj}(\vec{k}) a_l(\vec{k}) + B_{lj}(\vec{k}) a_l^*(-\vec{k}) \right]$$
$$\dot{a}_j^*(-k) + i \sum_l \left[A_{lj}^*(-\vec{k}) a_l^*(-\vec{k}) + B_{lj}^*(-\vec{k}) a_l(\vec{k}) \right].$$

Подставляя $a, a^* \sim \exp -i\omega t$, получим алгебраическое уравнение для определения ω

$$\begin{vmatrix} A_{lj} - \omega\delta_{lj}, & B_{lj} \\ B_{lj}^*, & A_{lj}^* - \omega\delta_{lj} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.10)$$

Переменные $b_j(\vec{k})$ являются нормальными переменными линейной теории и особенно удобны для исследования нелинейных проблем. Специфические "линейные" трудности, присущие исследуемой модели среды, преодолеваются один раз: при поиске переменных $b_j(\vec{k})$. В этих переменных линеаризованные уравнения движения становятся тривиальными:

$$\dot{b}_j(\vec{k}) + i\omega_j(\vec{k}) b_j(\vec{k}) = 0, \qquad (2.11)$$

они описывают распространение свободных волн с законами дисперсии $\omega_j(\vec{k})$. Вся "линейная" информация, необходимая для изучения нелинейных проблем, заключена в функциях $\omega_j(\vec{k})$ от $\vec{k}$. Вся дополнительная информация о взаимодействии волн содержится в остальных коэффициентах разложения H в ряд по степеням $b_j(\vec{k})$:

$$H = H^{(2)} + H_{int},\ H_{int} = H^{(3)} + H^{(4)} + \ldots \qquad (2.12)$$

Физический смысл $H^{(3)}, H^{(4)}$ легко понять из аналогии с квантовой механикой. Гамильтониан $H^{(3)}$ описывает трёхволновые процессы. В простом случае одного типа волн

$$H^{(3)} = \frac{1}{2}\int (V_{1,23} b_1 b_2^* b_3^* + к.с.)\,\delta(1-2-3)\,d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 + \qquad (2.13)$$

$$+ \frac{1}{3}\int (U_{123} b_1^* b_2^* b_3^* + к.с.)\,\delta(1+2+3)\,d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 .$$

Гамильтониан $H^{(4)}$ – процессы с участием четырёх волн:

$$H^{(4)} = \int\Big\{\frac{1}{2} W_{12,34} b_1^* b_2^* b_3 b_4\,\delta(1+2-3-4) + \frac{1}{3}(G^*_{1,234} b_1^* b_2 b_3 b_4 + к.с.)\,\delta(1-2-3-4) + \frac{1}{4}(R^*_{1234} b_1 b_2 b_3 b_4 + к.с.)\,\delta(1+2+3+4)\Big\}\,d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 .$$

В следующем параграфе мы рассмотрим конкретный пример процедуры вычисления коэффициентов гамильтониана H_{int}.

Задачи

2.1. Убедиться, что электромагнитное поле в среде с постоянной дисперсией можно описать с помощью канонических переменных $a_{\vec{k}}$, $a^*_{\vec{k}}$, задающих $\vec{k}$ – фурье компоненту векторного потенциала $\vec{A}_k$ в кулоновской калибровке $(\vec{k}\vec{A}_k = 0)$, можно следующим образом:

$$\vec{A}_k = \vec{\alpha}_{\vec{k}} \sqrt{\frac{4\pi\tilde{c}}{k}}\,(a_{\vec{k}} + a^*_{-\vec{k}}), \qquad (2.15)$$

где $\vec{\alpha}_{\vec{k}}$ – единичный вектор поляризации $\vec{k}\vec{\alpha}_{\vec{k}} = 0$, $\varepsilon\tilde{c}^2 = c^2$.

Гамильтониан

$$H=\frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon E^2+H^2)d\vec{r}\,, \qquad (2.16)$$

$$E=-\frac{\partial\vec{A}}{c\partial t}\,,\quad \vec{H}=\mathrm{rot}\,\vec{A}\,. \qquad (2.17)$$

2.2. Показать, что уравнение Блоха (I.I3) приводится к каноническому виду преобразованием Гольдштейна - Примакова [9].

$$M_x+iM_y=\sqrt{2gM_0}\;a\sqrt{1-\frac{gaa^*}{M_0}}\,,\quad M_z=M-gaa^*. \qquad (2.18)$$

2.3.* Показать, что каноническими переменными для уравнения Блоха (I.I3) являются

$$\frac{M_z}{g}\,,\quad \varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{M_y}{M_x}\,.$$

Р е ш е н и е. Первое из канонических уравнений очевидно

$$\frac{1}{g}\dot{M}_z=M_x\frac{\delta H}{\delta M_y}-M_y\frac{\delta H}{\delta M_x}=\frac{\delta H}{\delta\varphi}\,, \qquad (2.19)$$

т.к. оператор $M_x\frac{\delta}{\delta M_y}-M_y\frac{\delta}{\delta M_x}$ есть аналог оператора момента $\frac{\delta}{\delta\varphi}$. Вычисляя $\delta H/\delta M_z$ с учетом связи $\vec{M}^2=M_0^2$ (т.е. представляя $\vec{M}$ в виде $\vec{M}=(\sqrt{M_0^2-M_z^2}\cos\varphi,\ \sqrt{M_0^2-M_z^2}\sin\varphi, M_z)$) и сравнивая результат с правой частью в выражении

$$\dot{\varphi}=\frac{[M,\dot{M}]_z}{M_0^2-M_z^2}\,,$$

убеждаемся в справедливости второго канонического уравнения

$$\dot{\varphi}=-g\frac{\delta H}{\delta M_z}\,. \qquad (2.20)$$

От этих переменных нетрудно построить каноническое преобразование к переменным Гольдштейна-Примакова (2.18). Во-первых, преобразование от $M_z/g,\varphi$ к $N,\psi: gN=M_0-M_z, \psi=-\varphi$ является каноническим. Во-вторых, нетрудно проверить, что преобразование $(N,\psi)\longrightarrow a,a^*$, $a=\sqrt{N}\exp i\psi$ также является каноническим, при этом уравнения (2.19), (2.20) приобретают вид (2.2). Выражая $\vec{M}$ через a,a^*, убеждаемся, что переменные a, a^* являются переменными Гольдштейна-Примакова.

2.4. Получить ограничение на коэффициенты u_{ij} , v_{ij} линейного преобразования (2.8), необходимые для того, чтобы оно было каноническим.

Ответ.
$$\sum_j \left[u_{ij}(\vec{k}) u^*_{lj}(\vec{k}) - v_{ij}(\vec{k}) v^*_{lj}(\vec{k}) \right] = \delta_{il},$$
$$\sum_j \left[u_{ij}(\vec{k}) v_{lj}(-\vec{k}) - v_{ij}(\vec{k}) u_{lj}(-\vec{k}) \right] = 0. \quad (2.21)$$

2.5. В случае одной ветви колебаний ($j=i=1$) найти явно коэффициенты $u(\vec{k})$, $v(\vec{k})$ преобразования (2.8), диагонализирующего гамильтониан (2.7).

Ответ.
$$u_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{A_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}}}, \quad v_{\vec{k}} = -\frac{B_{\vec{k}}}{|B_{\vec{k}}|} \sqrt{\frac{A_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}}},$$
$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{A^2_{\vec{k}} - |B_{\vec{k}}|^2} \quad u^2_{\vec{k}} - |v_{\vec{k}}|^2 = 1. \quad (2.22)$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГАМИЛЬТОНИАНА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

3.1. Гамильтониан для звука в сплошной среде. На этом примере мы подробно реализуем программу вычисления H_{int}, описанную в предыдущем параграфе. Разложим вначале гамильтониан (1.6) в ряд по степеням ρ_1 – отклонения плотности от равновесной:
$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2}\right)_s \rho_1^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \rho^3}\right)_s \rho_1^3 + \dots$$
Из второго начала термодинамики
$$p = \rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_s - \varepsilon,$$
откуда $(\partial p/\partial \rho)_s = \rho(\partial^2 \varepsilon/\partial \rho^2)_s$ и
$$H = \int \varepsilon_0 \, d\vec{r} + \frac{1}{2}\int d\vec{r} \left[(\rho_0 + \rho_1)(\vec{\nabla}\Phi)^2 + \frac{c_s^2}{\rho_0}\left(\rho_1^2 + g\rho_1^3/\rho_0\right) \right], \quad (3.1)$$
где g – безразмерный коэффициент порядка 1. В параграфе 1 мы показали, что канонические переменные в этой задаче есть ρ_1 и Φ. Перейдя к комплексным переменным a, a^* по формулам (2.1) и затем в $\vec{k}$-представление по (2.5), получим из (3.1) в квадратичном приближении
$$H^{(2)} = \int d\vec{k} \left[A_{\vec{k}} a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}} + \frac{B_{\vec{k}}}{2}\left(a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} + a^*_{\vec{k}} a^*_{-\vec{k}}\right) \right], \quad (3.2)$$
где
$$A_{\vec{k}} = \frac{c_s^2}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 k^2}{2}, \quad B_{\vec{k}} = \frac{c_s^2}{2\rho_0} - \frac{\rho_0 k^2}{2}. \quad (3.3)$$

Используя формулы (2.5), находим спектр волн $\omega_{\vec{k}} = kc_s$ и коэффициенты u и v диагонализирующего преобразования

$$u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} = \sqrt{c_s / k\rho_o}\,, \quad u_{\vec{k}} - v_{\vec{k}} = \sqrt{k\rho_o / c_s}\,. \qquad (3.4)$$

Отсюда имеем окончательные выражения для естественных переменных ρ_1, Φ через b, b^* – нормальные переменные линеаризованной задачи:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (2\pi)^{-3/2} \int \sqrt{k\rho_o / 2c_s}\, (b_{\vec{k}} + b^*_{-\vec{k}}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}; \\ \Phi &= -i (2\pi)^{-3/2} \int \sqrt{c_s / 2\rho_o k}\, (b_{\vec{k}} - b^*_{-\vec{k}}) e^{ikr} d\vec{k}. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Подставляя теперь ρ_1 и Φ в члены третьего порядка в (3.I), мы после элементарных преобразований приходим к гамильтониану (2.I3) с коэффициентами:

$$\begin{aligned} 2U_{123} = V_{1,23} = \frac{1}{8c_s} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\pi^3 \rho_o}} \Big[3g + \\ + (k_1 k_2 k_3)^{-1} (k_1 (\vec{k}_2 \vec{k}_3) + k_2 (\vec{k}_1 \vec{k}_3) + k_3 (\vec{k}_1 \vec{k}_2) \Big]. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Отметим, что коэффициенты U и V обращаются в нуль, если один из волновых векторов $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ или $\vec{k}_3$ равен нулю. Это связано с трансляционной симметрией задачи. Действительно, звук с $\vec{k}=0$ есть перемещение среды как целого, что не может изменить её энергии.

3.2. Взаимодействие волн высокой частоты со звуком. Природа этого взаимодействия заключается в том, что колебания плотности и скорости среды, создаваемые звуком, вызывают изменение частоты В4 волны. С низкочастотным звуком (частоты $\Omega_{\vec{q}}$) может взаимодействовоть только спектрально узкий пакет В4 волн ($\Delta\omega_k \simeq \Omega_k \ll \omega_k$). Энергия В4 волн

$$H = \int \omega_k a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}} d\vec{k} \simeq \omega_{k_o} \int a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}} d\vec{k}$$

может быть переписана в $\vec{r}$-представлении

$$H = \int \omega_{k_o} a(\vec{r}) a^*(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Наличие звука приводит к зависимости $\omega_{\vec{k}_o}$ от $\vec{r}$ и к соответствующей вариации энергии

$$\delta H = \int |a(\vec{r})|^2 (\alpha\rho_1 + \vec{\beta}\, \vec{\nabla}\Phi)\, d\vec{r}, \qquad (3.7)$$

где

$$\alpha = \partial\omega_{\vec{k}_o} / \partial\rho, \quad \vec{\beta} = \partial\omega_{\vec{k}_o} / \partial\vec{v}.$$

Подставляя сюда ρ_1 и Φ из (3.5) получим

$$H_{int} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho_o}{\pi^3 c_s}} \int \sqrt{g}\, \Big[\alpha_{k_o} (b_{\vec{q}} + b^*_{-\vec{q}}) + \qquad (3.8)$$

$$+\frac{i c_s \vec{\beta}(\vec{k}_0)\vec{q}}{|q|}(b_{\vec{q}} - b^*_{\vec{q}})\Big] a_1 a_2^* \delta(\vec{q}+\vec{k}_1-\vec{k}_2) d\vec{q}\, d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2 \, .$$

По порядку величины $\alpha \simeq \omega_{\vec{k}_0}/\rho_0 , \beta \simeq \omega_{k_0}/v_\phi$, где v_ϕ – фазовая скорость В4 волны, так что второе слагаемое в (3.8) имеет порядок величины (c_s/v_ϕ) и, как правило, им можно пренебречь. В важном случае взаимодействия света со звуком $\omega_k = kc/\sqrt{\varepsilon}$, и

$$H_{int} = \frac{1}{2}\int \Gamma_{kq}\, a_{\vec{k}}\, a^*_{\vec{k}'} (b_{\vec{q}} + b^*_{-\vec{q}})\,\delta(\vec{q}+\vec{k}-\vec{k}')\, d\vec{q}\, d\vec{k}\, d\vec{k}, \tag{3.9}$$

и

$$\Gamma_{qk} = \frac{\omega_k}{4c_s}\,\frac{\partial \ln\varepsilon}{\partial\rho}\sqrt{\frac{\rho_0 \Omega_q}{\pi^3}} \, . \tag{3.I0}$$

Легко понять, что описанный здесь подход справедлив, если $q \ll k, k'$. Впрочем, выражение (3.I0) справедливо и в общем случае, если его умножить на произведение поляризаций света $(\vec{\alpha}_k \vec{\alpha}^*_{k'})$.

З а д а ч и .

3.I. Вычислить коэффициент g в (3.I) для идеального газа с уравнением адиабаты $pV^\gamma = \mathrm{const}$.

О т в е т . $3g = \gamma - 2$.

3.2. Проверить прямой подстановкой факт диагонолизации звукового гамильтониана (3.I) в переменных $b_{\vec{k}}$(3.5)

3.3. Получить в терминах $a_{\vec{k}}, a^*_{\vec{k}}$ гамильтониан для идеальной несжимаемой гидродинамики [11]. Указание. Записать гамильтониан (I.9) в $\vec{k}$-представлении, перейти к переменным Клебша (I.I2) и воспользоваться $\vec{k}$-представлением формулы (2.I).

О т в е т .

$$H = \frac{1}{2}\int W_{12,34}\, a_1^* a_2^* a_3 a_4\, \delta(1+2-3-4)\, d1\, d2\, d3\, d4 \, ; \quad W_{12,34} = \frac{\rho_0}{2}(\vec{\varphi}_{13}\vec{\varphi}_{24} + \vec{\varphi}_{14}\vec{\varphi}_{23});$$

$$\vec{\varphi}_{\vec{k}\vec{k}'} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}\Big[\vec{k}+\vec{k}' + (\vec{k}-\vec{k}')(k^2 - k'^2)|\vec{k}-\vec{k}|^{-2}\Big]. \tag{3.II}$$

Видно, что квадратичная по a часть отсутствует и параметр величины взаимодействия $H_{int}/H^{(2)}$ бесконечен.

3.4. Получить гамильтониан взаимодействия света со спиновыми волнами в ферромагнетиках. Указание. Разложить тензор диэлектрической проницаемости ε в ряд по намагниченности $\vec{M}$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{o}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} M_{\gamma}$$

и записать энергию взаимодействия

$$H_{int} = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon^{1}_{\alpha\beta\gamma} E_{\alpha} E_{\beta} M_{\gamma}\, d\vec{r}$$

через канонические переменные для света (2.I5) и спиновых волн.

О т в е т . H_{int} имеет структуру (3.9), по порядку величины

$$\Gamma_{kq} \simeq \varepsilon^{(1)} \omega_{k} \sqrt{g M_{o}}. \qquad (3.I2)$$

3.5.* Считая $\sqrt{m/M} \ll 1$, $(k r_{D}) \ll 1$, представить гамильтониан (I.I4) для двухжидкостной модели плазмы в нормальных канонических переменных линеаризованной задачи.

Р е ш е н и е . В ленгмюровских колебаниях можно считать ионы неподвижными и в (I,I4) в квадратичном приближении учесть только члены

$$\frac{1}{2}\left[\rho_{oe}(\vec{\nabla}\Phi_{e})^{2} + \left(\frac{\partial^{2}\varepsilon_{e}}{\partial\rho_{e}^{2}}\right)_{s}\rho_{1e}^{2} + \frac{1}{4\pi}(\vec{\nabla}\varphi)^{2}\right],$$

выразив φ из (I.I5)

$$\varphi = -\frac{4\pi}{\Delta}\,\frac{e}{m}\rho_{1e}.$$

В результате получается гамильтониан типа (3.I) с заменой

$c_{s}^{2} \Rightarrow \frac{1}{\rho_{oe}}\left[\left(\frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial\rho_{e}}\right)_{s} + \frac{4\pi e^{2} n}{m k^{2}}\right]$. Отсюда по аналогии с (3.5) сразу можно написать

$$\rho_{1e} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int k \sqrt{\frac{m n}{2\omega_{p}}}\,(a_{\vec{k}} + a^{*}_{-k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}.$$
$$\Phi_{e} = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\omega_{p}}{2mn}}\,(a_{\vec{k}} - a^{*}_{-\vec{k}})\, e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}. \qquad (3.I3)$$

Движения в ионном звуке можно считать квазинейтральными, т.е. $n_{i} \simeq n_{e}$, $\rho_{1e} = \frac{m}{M}\rho_{1i}$. При $(k r_{D}) \ll 1$ энергией электрического поля можно пренебречь, собственное давление ионов при $T_{e} \gg T_{i}$ также не существенно. В гамильтониане остаются только два слагаемых: $\rho_{oi}(\vec{\nabla}\Phi_{i})^{2}/2$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial\rho_{e}}\right)_{T}\left(\frac{m}{M}\right)^{2}\rho_{1i}^{2}$.

Производная берется при постоянной температуре из-за медленности движения электронов. Этот гамильтониан совпадает со звуковым (3.I), поэтому по аналогии с (3.5):

$$\rho_{1i} = \frac{M}{m}\rho_{1e} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{k M n}{2c_{s}}}\,(b_{\vec{k}} + b^{*}_{-\vec{k}})\, e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \qquad (3.14)$$

$$\Phi_i = \Phi_e = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{c_s}{2Mn}} \, (b_{\vec{\kappa}} - b^*_{-\vec{\kappa}}) e^{i\vec{\kappa}\vec{r}} d\vec{\kappa} .$$

В этих переменных:

$$H^{(2)} = \int \left[\omega_{\vec{\kappa}} a_{\vec{\kappa}} a^*_{\vec{\kappa}} + \Omega_{\vec{\kappa}} b_{\vec{\kappa}} b^*_{\vec{\kappa}} \right] d\vec{\kappa} , \tag{3.15}$$

где (сравни с (I.I6) и (I,I9))

$$\omega_\kappa = \omega_p \left[1 + \frac{3}{2} (\kappa r_D)^2 \right], \ \Omega_\kappa = \kappa c_s, \ c_s^2 = \frac{T_e}{M} .$$

Основной вклад во взаимодействие ИЗ с ЛВ возникает из слагаемого $\rho_{1e} (\vec{\nabla} \Phi_e)^2 / 2 = \frac{m}{2M} \rho_{1i} (\vec{\nabla} \Phi_e)^2$. Подставляя ρ_{1i} и Φ_e из (3.I4) и (3.I5), получим

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int V_{123} (b_1 + b^*_{-1}) a_2 a_3^* \, \delta(\vec{\kappa}_1 + \vec{\kappa}_2 - \vec{\kappa}_3) d1 d2 d3, \tag{3.16}$$

где

$$V_{123} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\omega_p \sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{2Mnc_s}} \frac{\widehat{\vec{\kappa}_2 \vec{\kappa}_3}}{\kappa_2 \kappa_3} . \tag{3.17}$$

Основной вклад в собственную ленгмюровскую нелинейность, т.е. в

$$H^{ee}_{int} = \frac{1}{2} \int V^{ee}_{123} a_1^* a_2 a_3 \, \delta(1-2-3) \, d1 d2 d3 \tag{3.18}$$

вносит слагаемое $\rho_{1e} (\nabla \Phi_e)^2 / 2$; по порядку величины $V^{ee} \simeq \simeq \kappa \sqrt{\frac{\omega_p}{mn}}$. Матричный элемент для собственной ионной нелинейности задается по порядку величины выражением (3.6).

4. ТРЁХВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

4.I. В гамильтоновские уравнения движения мы феноменологически введем слагаемое, описывающее затухание волн:

$$\dot{b}_\kappa + \gamma_\kappa b_\kappa = -i \frac{\delta H}{\delta b^*_\kappa} . \tag{4.1}$$

Это затухание обусловлено взаимодействием волн b_κ с термостатом волн, взаимодействием волн с частицами (в плазме) и т.п. Подставляя в (4.I) $H = H^{(2)} + H^{(3)}$ (2.I3), получим

$$\dot{b}_\kappa + (\gamma_\kappa + i\omega_\kappa) b_\kappa = -i \int \left\{ \frac{1}{2} V^*_{\kappa,12} b_1 b_2 \, \delta(\kappa - 1 - 2) + \right. \tag{4.2}$$
$$\left. + V_{1,\kappa 2} b_1 b_2^* \, \delta(1 - \kappa - 2) + U_{\kappa 12} b_1^* b_2^* \, \delta(\kappa + 1 + 2) \right\} d1 d2 .$$

4.2. Слияние двух волн в одну. Генерация второй гармоники. Эти процессы описываются первым слагаемым в (4.2). Рассмотрим две монохроматические волны

$$b_k(t) = b_1 e^{-i\omega_1 t}\delta(k-k_1) + b_2 e^{-i\omega_2 t}\delta(k-k_2).$$

В силу (4.2) они приведут к возникновению третьей волны $b_3 e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\delta(k-k_1-k_2)$ с амплитудой

$$b_3 = \frac{V^*_{3,12} b_1 b_2}{\left[\omega_1+\omega_2-\omega_{\vec{k}_1+\vec{k}_2} - i\gamma_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}\right]}. \qquad (4.3)$$

Видно, что резонансная кривая имеет лоренцовскую форму; в резонансе сдвиг фазы $\Delta\varphi = \varphi_1+\varphi_2-\varphi_3 = \pi/2$. Для того чтобы оценить эффективность процесса преобразования двух волн в одну, необходимо знать величину матричного элемента $V_{3,12}$, закон дисперсии волн ω_k и её декремент затухания.

В качестве примера рассмотрим генерацию второй гармоники звуком в кристалле. Закон дисперсии звука

$$\omega_k = k c_s(1-\alpha k^2);$$

величину α оценим из выражения для ω_k в одномерном кристалле

$$\omega_k = \frac{2c_s}{a}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|,$$

где a - постоянная решетка. Таким образом, $\alpha \simeq a^2/24$. Если в кристалле распространяется звук

$$\rho = \rho_0 + \rho_1\cos(\omega_1 t - k_1 r), \qquad (4.4)$$

то в силу (3.5) каноническая переменная b_k выражается через ρ_1 так:

$$b_1 = (2\pi)^{3/2}\rho_1\sqrt{\frac{c_s}{2k_1\rho_0}}. \qquad (4.5)$$

Подставляя в (4.3) $b_1 = b_2$ из (4.5), $V_{3,12}$ из (3.6) и пренебрегая затуханием, получим

$$\rho_3 = -3\frac{(g+1)}{(ak)^2}\frac{\rho_1^2}{\rho_0}. \qquad (4.6)$$

Здесь мы уже выразили b_3 через ρ_3 по (4.5) и подставили оценку для α через a.

4.3. Распадная неустойчивость. Здесь мы рассмотрим неустойчивость плоской монохроматической волны относительно распада на две другие волны. Примерами такого процесса могут служить вынужденное рассеяние света: фотон $\Rightarrow$ фотон + фонон или магнон (спиновая волна) в ферромагнетике, распад электромагнитного СВЧ излучения на два магнона, фонон $\Rightarrow$ фонон + фонон, распад ленгмюровской волны на ленгмюровскую волну и ионный звук в неизотермической плазме и т.д. Итак, пусть в среде распространяется монохроматическая волна

$$b_\kappa(t) = b e^{-i\omega_0 t}\delta(\kappa-\kappa_0).$$

В её присутствии уравнения для волн малой амплитуды имеют вид

$$\dot{b}_1 + (\gamma_1 + i\omega_{\kappa_1})b_1 + iVbe^{-i\omega_0 t}b_2^* = 0, \qquad (4.7)$$

$$\dot{b}_2 + (\gamma_2 + i\omega_{\kappa_2})b_2 - iV^*b^*e^{i\omega_0 t}b_1 = 0, \quad V = V_{\kappa_0,12}.$$

Ищем решение этих уравнений в виде

$$b_1(t) = b_1 \exp(\nu - i\omega_1)t,$$

$$b_2^*(t) = b_2^* \exp(\nu + i\omega_2)t, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_0. \qquad (4.8)$$

Тогда для ν получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} (\gamma_1+\nu)+i(\omega_{\kappa_1}-\omega_1), & iVb \\ -iV^*b^*, & (\gamma_2+\nu)-i(\omega_{\kappa_2}-\omega_2) \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.9)$$

ω_1 и ω_2 удобно выбрать так, чтобы

$$(\gamma_1+\nu)(\omega_{\kappa_2}-\omega_2) = (\gamma_2+\nu)(\omega_{\kappa_1}-\omega_1).$$

Тогда

$$2\nu = -(\gamma_1+\gamma_2) + \sqrt{B + \sqrt{B^2 + 2(\Delta\gamma\Delta\omega)^2}}, \qquad (4.10)$$

где

$$2B \equiv 4|Vb|^2 + (\Delta\gamma)^2 - (\Delta\omega)^2,$$

$$\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2, \quad \Delta\omega = \omega_{\kappa_1} + \omega_{\kappa_2} - \omega_0.$$

При $\nu > 0$ амплитуды волн b_1, b_2 растут во времени по экспоненциальному закону (4.8); в этом случае говорят, что исходная волна b неустойчива по отношению к распаду на две волны b_1 и b_2, ν – называют инкрементом распадной неустойчивости. Часто (особенно, если $\kappa_0 = 0$) эту неустойчивость называют также параметрической.

Инкремент неустойчивости максимален в точном резонансе $\Delta\omega = 0$

$$2\nu_{max} = -(\gamma_1+\gamma_2) + \sqrt{4|Vb|^2 + (\Delta\gamma)^2}. \qquad (4.11)$$

Распадная неустойчивость имеет порог, связанный с затуханием волн

$$|Vb_{cr}|^2 = \gamma_1\gamma_2. \qquad (4.12)$$

Зная матричный элемент V и измеряя b_{cr}, можно определить затухание волн. Это – основной способ измерения затухания спиновых волн в ферромагнетиках. Граница области неустойчивости определяется из (4.10) при $\nu=0$. Если $\gamma_1=\gamma_2$, то область неустойчивости

$$(\Delta\omega)^2 < 4|Vb|^2+\gamma^2. \qquad (4.13)$$

Надо сказать, что условия резонанса в процессе распада

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k-k_1} \qquad (4.14)$$

не всегда выполняются и в соответствии с этим законы дисперсии ω_k делятся на распадные и нераспадные. Так степенные спектры $\omega_k \backsim k^{\alpha}$ являются распадными, если $\alpha \geqslant 1$, звуковой спектр $\omega_k = kc_s$ является граничным и условия (4.14) выполняются только на линии $\vec{k}_1 \parallel k$. Для спектра $\omega_k=\omega_0+\beta k^2$ распадные условия (4.14) выполняются, если $\omega_k \geqslant 3\omega_0$. В обзоре [12] приведён изящный графический метод, позволяющий выяснить является ли спектр распадным.

Вычислим в качестве примера инкремент распадной неустойчивости звука на звук. Подставляя V и b_k из (3.6) и (4.5), получим при $Vb \gg \gamma$

$$\nu = \frac{3(g+1)\rho_1 c_s}{4\rho_0}\sqrt{k_1(k-k_1)}\ . \qquad (4.15)$$

Максимальный инкремент соответствует распаду на одинаковые волны $k_1=k_2=k/2$; по порядку величины $\dfrac{\nu}{\omega_k} \simeq \dfrac{\rho_1}{\rho_0}$.

4.4. Взаимодействие трёх волн конечной амплитуды (задача Блоембергена) [13]. Рассмотрим взаимодействие трех спектрально-узких пакетов волн, характерные волновые вектора k_1, k_2, k_3 которых удовлетворяют условию резонанса $k_1=k_2+k_3$, $\omega_{k_1}=\omega_{k_2}+\omega_{k_3}$. Положим

$$b_k = \sum_{j=1}^{3} b_j(k)$$

и будем считать, что $b_j(k)$ отлично от нуля, если $\vec{\varkappa}=\vec{k}-\vec{k}_j$ мало. Внутри каждого пакета исключим быструю зависимость от r, t заменой

$$a_j(\varkappa) = b_j(k_j+\varkappa)\exp i(\omega_{k_j}t - k_j r) \qquad (4.16)$$

и упростим уравнения, считая $\omega_{k_j+\varkappa} = \omega_{k_j} + (\vec{\varkappa}\,\vec{v}_j)$.

Далее перейдем в $\vec{r}$ – представление по формулам

$$a_j(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int a_j(\vec{\varkappa}) e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}} d\vec{\varkappa}. \quad (4.17)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 + \vec{v}_1 \vec{\nabla}\right] a_1(r,t) = -iVa_2(r,t)\, a_3(r,t) \\
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2 + \vec{v}_2 \vec{\nabla}\right] a_2 = iVa_1 a_3^* \qquad (4.18) \\
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3 + \vec{v}_3 \vec{\nabla}\right] a_3 = iVa_2^* a_1 .
\end{aligned}$$

Здесь $V = (2\pi)^{3/2} V_{123}$, переменные $a_j(\vec{r},t)$ имеют смысл комплексных огибающих для волн $\exp i(\vec{k}_j\vec{r} - \omega_j t)$. Уравнение (4.18) при $\gamma_j = 0$ является гамильтоновским [т.е. вида (2.2)] с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = \sum_{j=1}^{3} \frac{iv_j}{2} \int \left[a_j^* \nabla a_j - a_j \nabla a_j^*\right] d\vec{r} + \\ + V\int \left[a_1^* a_2 a_3 + \text{к.с}\right] d\vec{r}. \end{aligned} \qquad (4.19)$$

Кроме H, уравнение (4.18) при $\gamma_j = 0$ имеет ещё два независимых интеграла движения (интегралы *Мэнли-Роу*):

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 = \text{const}, \quad N_1 + N_3 = \text{const}, \\ N_j = \int a_j(r)\, a_j^*(r)\, d\vec{r}. \end{aligned} \qquad (4.20)$$

Величины N_j имеют смысл полного числа частиц сорта j . Наличие трех интегралов движения позволяет эффективно исследовать эти уравнения (см., например, [13, 14]). Здесь же мы рассмотрим простой, но интересный пример - генерации второй гармоники $(a_2 = a_3)$ в стационарном случае. Пусть для простоты $\gamma_j = 0$, $v_j = v$ и при $z = 0$ $a_1 = 0$, $a_2 = A_2^0$ и вещественно. Подставляя в (4.18) $a_1 = iA_1$, $a_2 = A_2$, имеем

$$v\frac{\partial}{\partial z} A_1 = VA_2^2, \quad v\frac{\partial}{\partial z} A_2 = -VA_1 A_2 .$$

Решение этих уравнений с нулевым условием для на границе имеет вид

$$A_1(z) = A_2^0\, th\left[\frac{VA_2^0 z}{v}\right], A_2(z) = A_2^0\, ch^{-1}\left[\frac{VA_2^0 z}{v}\right]. \quad (4.21)$$

Характерная длина $L = v/VA_2^0$ называется длиной взаимодействия, при $z \gg L$ вся энергия исходной волны A_2 переходит во вторую гармонику A_1 . Эксперимент по генерации второй гармоники является одним из наиболее впечатляющих в нелинейной оптике - в кристалл входит красный луч, а выходит зеленый. Добиться полного преобразования не удается из-за неточного выполнения условий резонанса и т.п.; в лучших экспериментах $K_{\text{преобр.}} \simeq 90\%$.

4.5. Параметрическая неустойчивость в ограниченной среде может быть исследована с помощью уравнений (4.18). Пусть накачкой является волна с $\vec{k}_1=0$. Тогда $v_1=0, k_2=-k_3, \vec{v}_{k_2}=-\vec{v}_{k_3}=\vec{v}$ $\gamma_2=\gamma_3=\gamma$. Рассмотрим пластину толщиной L и пусть $\vec{k}$ перпендикулярно плоскости границ. Тогда вместо (4.18) имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma+v\,\frac{\partial}{\partial z}\right)a_2-iVa_1a_3^*=0; \qquad (4.22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma-v\,\frac{\partial}{\partial z}\right)a_3^*+i(Va_1)^*a_2=0.$$

Пусть волны на границах поглощаются, тогда

$$a_2(0)=a_3(L)=0. \qquad (4.23)$$

Удовлетворяя граничным условиям, ищем решение (4.22) в виде $a_2=Ae^{\nu t}\sin\varkappa z,\ a_3=iAe^{\nu t}\sin\varkappa(L-z)$.
На $\varkappa$ возникают два условия:

$$|Va_1|\,th\,\varkappa L=-(\gamma+\nu)/\varkappa v \qquad (4.24)$$

$$|Va_1|^2=(\gamma+\nu)^2+(\varkappa v)^2,$$

позволяющие найти $\varkappa$ и инкремент неустойчивости ν в зависимости от амплитуды накачки a_1 и толщины L . Пороговая амплитуда (при $\nu=0$)

$$|Va_{1cr}|^2=\gamma^2+\left(\frac{\alpha\pi v}{L}\right)^2, \qquad (4.25)$$

где численный коэффициент α изменяется от 1/2 для тонкой пластины ($L<<$, чем длина свободного пробега v/γ) до 1 в обратном случае. При $L>>v/\gamma$ выражение (4.25) переходит в соответствующее выражение для безграничной среды; при $L<<v/\gamma$ порог определяется поглощением энергии на границах.

4.6. Взрывная неустойчивость трёх волн. Если в среде могут существовать волны с отрицательной энергией (активная среда), то могут выполняться резонансные условия для процесса "рождения трёх волн из вакуума":

$$\omega_{\vec{k}_1}+\omega_{\vec{k}_2}+\omega_{\vec{k}_3}=0,\quad \vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3=0, \qquad (4.26)$$

описываемом последним слагаемым в уравнении (4.2). Удерживая вблизи резонанса (4.26) только это слагаемое, ищем решение в виде трёх волн: $b_{\vec{k}}(t)=\sum_{j=1}^{3}a_j(t)\delta(k-k_j)\exp-i\omega_{k_j}t$.
С наибольшей скоростью амплитуды волн будут расти, если ω_{kj} и k_j точно удовлетворяют условию (4.26). В этом случае из (4.2) получается

$$\dot{a}_1+\gamma_1a_1=-2iUa_2^*a_3^* \qquad (4.27)$$

$$\dot{a}_2 + \gamma_2 a_2 = -2iUa_1^* a_3^*$$

$$\dot{a}_3 + \gamma_3 a_3 = -2iUa_1^* a_2^* .$$

При $\gamma_j = \gamma$ эти уравнения имеют решение $|a_j| = a$, где

$$a(t) = a_0 \gamma e^{-\gamma t}\left[\gamma + 2Ua_0(e^{-\gamma t} - 1)\right]^{-1}. \qquad (4.28)$$

Если начальная амплитуда a_0 достаточно велика: $2Ua_0 > \gamma$, амплитуда $a(t)$ обращается в бесконечность за конечное время t_0; при малых $\gamma - 1/t_0 = 2Ua_0$. Такая неустойчивость называется взрывной.

З а д а ч и

4.1. Вычислить интенсивность света, рассеянного на монохроматической звуковой волне. Указание. Рассмотреть процессы $\omega_k = \omega_{k'} \pm \Omega_{k''}$, канонические переменные (3.5), (2.15) и матричный элемент (3.10).

4.2. Вычислить интенсивность света, рассеянного на монохроматической спиновой волне в ферромагнетике (канонические переменные (2.18), (2.15); матричный элемент – см. задачу (3.4)).

4.3. Вычислить инкремент распадной неустойчивости ленгмюровской волны (ЛВ) на ЛВ и ионный звук. Указать область волновых векторов ЛВ, где такой процесс разрешён. [17].

О т в е т . $3kr_D > \sqrt{m/M}$.

4.4. Вычислить и сравнить инкременты распадной неустойчивости света на свет и фононы, свет и магноны (вынужденное комбинационное рассеяние света).

У к а з а н и е . см. матричные элементы (3.10), (3.12); в (3.12) $\varepsilon^{(1)} M_0 \simeq G$ – угол поворота плоскости поляризации света из-за эффекта Фарадея на длине волны света. В ферродиэлектриках $G \simeq 10^{-3} \div 10^{-5}$

4.5. Используя уравнения (4.18), найти порог комбинационного рассеяния света в пластине, толщина L которой много больше длины пробега звука и меньше длины пробега света.

5. ЧЕТЫРЁХВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

5.I. Процедура итерации уравнений движения. В случае, когда трехволновые процессы запрещены законами сохранения, в уравнении движения (4.2) необходимо учитывать дополнительные слагаемые, возникающие из четырехволнового гамильтониана взаимодействия (2.I4). Трёхволновые слагаемые полностью не учитывать нельзя, ибо во втором порядке теории возмущения они приводят к разрешенным четырехволновым процессам.

Вычислим этот вклад в простейшей ситуации, когда промежуточной, "виртуальной" является низкочастотная волна. Будем исходить из трехволнового гамильтониана взаимодействия ВЧ волн a_k и НЧ волн b_k

$$H^{(3)}=\int(\Gamma_{kk'q}\,a_k a^*_{k'} b^*_q+\text{к.с})\,\delta(\vec{k}-\vec{k}'-\vec{q})\,d\vec{k}\,d\vec{k}'d\vec{q}\,. \tag{5.I}$$

Уравнения движения

$$\begin{aligned}&\dot a_k+(\gamma_k+i\omega_k)a_k=-i\int dk'dq\left[\Gamma^*_{kk'q}\,a_{k'}b_q+\Gamma_{k'k\bar q}\,a_{k'}b^*_{\bar q}\right]\delta(k-k'-q)\\ &\dot b_q+(\Gamma_q+i\Omega_q)b_q=-i\int dk\,dk'\,\Gamma_{kk'q}\,a_k a^*_{k'}\,\delta(k-k'-q)\,.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Подставляя во второе уравнение $a_k, a^*_{k'}$ из первого уравнения при $\Gamma_{123}=0$, находим b_q и подставляем этот результат в первое уравнение. В результате получаем

$$\begin{aligned}\dot a_k+(\gamma_k+i\omega_k)a_k=-i\int \tilde T_{k1,23}\,a^*_1 a_2 a_3\,*\\ \times\,\delta(k+1-2-3)\,d1d2d3,\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\tilde T_{k1,23}=-\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{\Gamma_{3,1(3-1)}\,\Gamma^*_{k,2,(k-2)}}{\omega_1+\Omega_{3-1}-\omega_3-i\left[\gamma_1+\gamma_3+\Gamma_{3-1}\right]}+\\ &+\frac{\Gamma_{2,k,(2-k)}\,\Gamma^*_{1,3,(1-3)}}{\omega_3+\Omega_{(1-3)}-\omega_1+i\,(\gamma_1+\gamma_3+\Gamma_{3-1}}+\\ &+\text{два слагаемых с заменой } k_2 \rightleftarrows k_3\Bigg]\,.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Если пренебречь затуханиями в этом выражении, то матрица $\tilde T$ становится эрмитовской:

$$\tilde T_{12,34}=\tilde T^*_{34,12}=\tilde T_{21,34}\,,$$

а уравнение (4.3) – гамильтоновским с гамильтонианом $\tilde H_{int}$

$$\tilde H_{int}=\frac{1}{2}\int\tilde T_{12,34}\,a^*_1a^*_2a_3a_4\,\delta(1+2-3-4)\,d1d2d3d4\,. \tag{5.5}$$

Таким образом, вместо трехволнового гамильтониана (5.I) возник эффективный четырехволновый гамильтониан (5.5) и, следовательно, при $\gamma=\Gamma=0$ наша процедура эквивалентна некоторому нелинейному каноническому преобразованию. Это преобразование приведено в обзоре [3]. Там же дан общий вид коэффициентов $\widetilde{T}$, когда учитывается вклад всех процессов третьего порядка, а не только процессов (5.I).

Любопытно выяснить, какой вклад в четырёхволновые матричные элементы преобладает – исходный W или возникший при итерации трёхволновых процессов $\widetilde{T} \simeq V^2/\Delta\omega$. Если разложение исходного гамильтониана происходит по одному малому параметру, то $\omega_k W \simeq V^2$. В таком случае рассматриваемые вклады одного порядка величины. Так обстоит дело, например, с дипольдипольным вкладом в H_{int} для спиновых волн в ферромагнетиках. В более сложных ситуациях (рассмотренных в задачах 5.I, 5.3) преобладающим по специальным причинам может быть любой вклад.

В заключение этого раздела отметим, что итерируя уравнения движения, или производя соответствующее нелинейное каноническое преобразование, можно исключить все слагаемые в гамильтониане взаимодействия, отвечающие процессам, которые запрещены законами сохранения энергии – импульса. С этой точки зрения особенный интерес представляет четырёхволновый процесс рассеяния

$$\omega_1+\omega_2=\omega_3+\omega_4, \quad \vec{k}_1+\vec{k}_2=\vec{k}_3+\vec{k}_4, \qquad (5.6)$$

ибо он разрешен при любом законе дисперсии, если все k_i близки друг к другу. Учитывая это, в дальнейшем мы будем рассматривать только такие процессы. Уравнение движения (2.6), (2.I4) в этом случае:

$$\dot{b}_k+i\omega_k b_k+i\int T_{k1,23}\, b_1^* b_2 b_3\, \delta(k+1-2-3)\,d1\,d2\,d3=0, \qquad (5.7)$$

где $T=W+\widetilde{T}$ – полная амплитуда процессов (5.6).
Их изучение начнем с простейшей задачи.

5.2. Модуляционная неустойчивость плоской волны. Пусть $b_k=b\,\delta(k-k_0)$ волна конечной амплитуды, распространяющаяся в среде. Уравнения движения (5.7) для b имеют вид

$$\dot{b}+i\widetilde{\omega}_{k_0} b=0,$$

где

$$\widetilde{\omega}_{k_0}=\omega_{k_0}+T_{00}\,|b|^2, \quad T_{00}\equiv T_{k_0k_0k_0k_0} \qquad (5.8)$$

частота волны b_k, зависящая от её амплитуды. В присутствии волны b запишем уравнения движения (5.7) для волн малой амплитуды, волновые вектора и частоты которых удовлетворяют резонансным условиям:

$$2\omega_{k_0} \simeq \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad 2\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \tag{5.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{b}_1 + i\tilde{\omega}_{k_1} b_1 + iT_{12} b^2 b_2^* = 0 \\ &\dot{b}_2^* - i\tilde{\omega}_{k_2} b_2^* - iT_{12} b^{*2} b_1 = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{5.10}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}_{k_1} = \omega_{k_1} + 2T_{10}|b|^2 \\ &\tilde{\omega}_{k_2} = \omega_{k_2} + 2T_{20}|b|^2 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$T_{10} = T_{k_1 k_0, k_1 k_0}, \quad T_{12} = T_{k_0 k_0, k_1 k_2}$$

$$T_{20} = T_{k_2 k_0, k_2 k_0} -$$

зависимость частоты волн b_1, b_2 от амплитуды другой волны b. Обращаем внимание на коэффициент два, отличающий (5.11) от (5.8).

Вычисление инкремента неустойчивости производится аналогично случаю трехволновых процессов. Сравнивая (5.10) с (4.7), можно по аналогии с (4.10) сразу написать ответ:

$$\nu^2 = [T_{12} b^2]^2 - (\tilde{\omega}_{k_1} + \tilde{\omega}_{k_2} - 2\tilde{\omega}_{k_0})^2/4 . \tag{5.12}$$

Если k_1 и k_2 сильно отличаются от k_0, и при этом $(\quad)^2 = 0$, инкремент неустойчивости $\nu = [T_{12} b^2]$ и по порядку величины совпадает с нелинейной добавкой к частоте волн. В диссипативной среде, когда волны $k_{1,2}$ затухают с декрементом $\gamma_{1,2}$, возникает порог неустойчивости. Пороговая амплитуда (по аналогии с (4.12))

$$|T_{12} b_{cr}^2| = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} .$$

В случае, когда k_1 и k_2 близки к k_0, в законе сохранения (5.9) следует учитывать нелинейные добавки к частоте

$$\tilde{\omega}_{k_{1,2}} = \omega_{k_0} \pm \vec{v}\vec{\varkappa} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\varkappa_\alpha \varkappa_\beta + 2T_{00}|b|^2$$

$$\vec{k}_{1,2} = \vec{k}_0 \pm \vec{\varkappa}, \quad \vec{v} = \partial\omega_k / \partial\vec{k}\,\big|_{k=k_0} .$$

Здесь мы разложили $\tilde{\omega}_{1,2}$ в ряд по $\varkappa$ и пренебрегли зависимостью от $\varkappa$ в матричных элементах $T_{12,34}$.

Теперь:

$$\nu^2(\vec{\varkappa}) = -\hat{L}\varkappa^2(L\varkappa^2 + 2T_{oo}|b|^2). \qquad (5.13)$$

$$\hat{L}\varkappa^2 \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \omega_{\vec{k}}}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \varkappa_\alpha \varkappa_\beta . \qquad (5.14)$$

Если $T_{oo}\hat{L}\varkappa^2 > 0$, то $\nu^2 < 0$ и неустойчивости нет. Этим рассматриваемая ситуация отличается от трехволнового случая, когда для возникновения неустойчивости достаточно было выполнения законов сохранения, а знак матричного элемента не играл роли. В случае, когда квадратичная форма (5.14) не является знакоопределенной, критерий неустойчивости

$$T_{oo}\hat{L}\varkappa^2 < 0 \qquad (5.15)$$

можно выполнить при любом знаке T_{oo}, изменяя направление $\vec{\varkappa}$.

Если форма $\hat{L}\varkappa^2$ – знакоопределена, то область неустойчивости ограничена по $\varkappa^2$ от 0 до $\hat{L}\varkappa^2 = -4T_{oo}|b|^2$, максимальна неустойчивость для $L\varkappa^2 = -2T_{oo}|b|^2$. В результате развития неустойчивости (5.13) волны $\vec{k}_o$ возникают новые волны с $\vec{k}$, близкими к $\vec{k}_o$, это можно интерпретировать как возникновение модуляции амплитуды и фазы исходной волны. Поэтому такую неустойчивость называют **модуляционной**.

Модуляционная неустойчивость встречается очень часто. Так, например, для ленгмюровских волн в плазме $L\varkappa^2 > 0$, $T_{oo} < 0$, и возникает модуляционная неустойчивость, приводящая к ленгмюровскому коллапсу; неустойчивы волны на воде, развитие этой неустойчивости приводит к явлению "девятого вала". В нелинейных диэлектриках, у которых $\frac{\partial n}{\partial |E|^2} > 0$ (коэффициент преломления растет с напряженностью поля $\vec{E}$) $T_{oo} < 0$, ибо $\omega_k = kc/\sqrt{n}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial |E|^2} \sim -\frac{\partial n}{\partial |E|^2}$. Т.к. для линейного закона дисперсии $\omega'' > 0$, то $T_{oo}\omega'' < 0$ и возникает модуляционная неустойчивость, развитие которой приводит к самофокусировке света.

При изучении нелинейной стадии развития модуляционной неустойчивости следует воспользоваться тем обстоятельством, что все вторичные волны сосредоточены в узкой области вблизи $\vec{k}_o$, т.е. следует изучать распространение узкого пакета волн, или, что тоже самое необходимо следить за медленными изменениями комплексной амплитуды ("о г и б а ю щ е й") монохроматической волны. Сформулируем

5.3. Уравнение для огибающих. Для этого в уравнении (5.7) разложим ω_k в ряд по $\varkappa = k - k_0$ до членов $\sim \varkappa^2$ и будем считать

$$T_{12,34} = T_{k_0 k_0 k_0 k_0} = T/(2\pi)^3. \qquad (5.16)$$

Этот переход справедлив, если в среде отсутствуют дальнодействующие силы и $T_{12,34}$ является непрерывной функцией своих аргументов. Далее, так же как и в разделе (4.3), перейдем к медленным переменным:

$$a(\varkappa) = b(k+\varkappa)\exp i(k_0 r - \omega_{k_0} t) \qquad (5.17)$$

и затем в $\vec{r}$ -представление по формулам (4.17). Для $a(r)$ в результате получится

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\right) + \hat{L} - T|\,a\,|^2 \right] a = 0$$
$$\hat{L} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \omega_k}{\partial k_\alpha\,\partial k_\beta}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}. \qquad (5.17)$$

В изотропной среде $\omega_{\vec{k}} = \omega(k)$ и

$$\hat{L} = \frac{\omega''}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{v}{2k}\Delta_\perp, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$v = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}, \qquad \omega'' = \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2}. \qquad (5.18)$$

Уравнение (5.17) описывает эволюцию узкого пакета волн: член $\vec{v}\vec{\nabla}$ - движение пакета как целого с групповой скоростью, члены $\sim \partial^2/\partial z^2$ и $\Delta_\perp$ - дисперсию и дифракцию, последнее слагаемое - нелинейное самодействие волн в пакете. На оптическом языке это слагаемое описывает зависимость коэффициента преломления среды от квадрата амплитуды электрического поля. Рассматривая (5.17) как уравнение Шредингера, нелинейный член можно трактовать как самосогласованный потенциал притяжения (при $T < 0$) или отталкивания (при $T > 0$), пропорциональный плотности частиц. Уравнения (5.17), (5.18) являются гамильтоновскими с гамильтонианом

$$H=\int d\vec{r}\left[\frac{iv}{2}(a^*\nabla a-a\nabla a^*)+\frac{\omega''}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{v}{2\kappa}|\nabla_\perp a|^2+T|a|^4\right]. \qquad (5.19)$$

Кроме того, это уравнение имеет еще один интеграл движения

$$N=\int|a|^2 d\vec{r}, \qquad (5.20)$$

имеющий смысл "полного числа частиц".

Существует две постановки задачи для уравнения (5.17): амплитуда волн задана на границе среды - например, свет падает на нелинейный диэлектрик. В этом случае членом $\sim \omega''$ можно пренебречь по сравнению с $v\frac{\partial a}{\partial z}$ (z - направление v) ; если задача стационарна, то $\dot{a}=0$. Тогда

$$\left[iv\frac{\partial}{\partial z}+\frac{v}{2\kappa}\Delta_\perp-T|a|^2\right]a=0. \qquad (5.21)$$

Рассматривая $\tau=z/v$ как новое время, можно трактовать (5.21) как двумерное ($\vec{r}=x,y$) уравнение Шредингера. Простейшая задача этого типа - линейная ($T=0$) дифракция плоской волны на полуплоскости - кратко описана ниже - см. задачу 5.6.
Вторая постановка задачи.

5.4. Эволюция пакета в безграничной среде. При этом можно перейти в систему отсчета, двигающуюся с групповой скоростью и член $(\vec{v}\,\vec{\nabla})$ исчезает. Дисперсионный член $\sim\omega''$ необходимо сохранить:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\omega''}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{v}{2\kappa_0}\Delta_\perp-T|a|^2\right]a=0. \qquad (5.22)$$

Рассмотрим качественно решение этой задачи в трехмерном ($d=3$), двумерном ($d=2$) и одномерном случае. Случай $d=3$ в рамках (5.22) соответствует эволюции трехмерного сгустка, двигающегося с групповой скоростью, случай $d=2$ - это задача об эволюции плоского пакета ($a(x,y,t)$), двигающегося с групповой скоростью, или - задача о стационарной самофокусировке пакета $a(xyz)$ в рамках уравнения (5.21) после замены $z/v\to t$. Случай $d=1$ - соответствует, например, стационарной плоской самофокусировке $a=a(x,z)$. Далее для определенности всюду мы будем считать $\omega''>0$ и рассмотрим случай "притяжения частиц" $T<0$. Пусть в некоторый момент времени пакет имеет характерный размер l и амплитуду в центре a. Число частиц в нём $N=\int|a|^2 dr \simeq |a|^2 l^d$, где d – размерность пакета. Т.к. N - интеграл движения, то

$$a(t) \simeq \sqrt{N}\, l(t)^{-d/2}. \tag{5.23}$$

Оценим с помощью (5.19), (5.23) энергию пакета.

$$H \cong \frac{\omega'' N}{l^2} - \frac{|T| N^2}{l^d}. \tag{5.24}$$

Видно, что в одномерном случае существует стационарное решение с .

$$l = l_0 \simeq \frac{\omega''}{|T| N} \simeq \omega''/|Ta|\, l_0, \tag{5.25}$$

минимизирующее энергию (5.24). В этом случае давление частиц, возникающее из-за их движения в яме, уравновешивает силу притяжения. В трехмерном случае давление при $l \to 0$ растет медленнее, чем сила притяжения и происходит коллапс – падение частиц на центр за конечное время. При этом амплитуда в центре $a(t)$ и размер $l(t)$ связаны соотношением (5.23), где N - число частиц, захваченных в коллапсе, энергия (5.24) коллапсирующих частиц убывает; полная энергия, включающая кинетическую энергию не захваченных в коллапс, разлетающихся частиц, разумеется, сохраняется. В двумерном случае судьба пакета частиц зависит от начальных условий: при $\omega'' > TN \simeq \frac{T|a|^2}{l^2}$ минимум (5.24) достигается при $l \to \infty$, т.е. частицы разлетаются; при $\omega'' < \frac{T|a|^2}{l^2}$ также как и в трехмерном случае, часть пакета захватывается в процесс коллапса.

Изучим подробнее стационарные решения (5.22) в одномерном случае. Подставляя $a(z,t)$ в виде

$$a(z,t) = \varphi(z) \exp i\lambda^2 t,$$

получим

$$\omega'' \varphi_{zz} = 2(\lambda^2 \varphi - |T| \varphi^4) = -\partial U/\partial \varphi$$
$$U = \frac{|T|\varphi^4}{2} - \lambda^2 \varphi^2. \tag{5.26}$$

После переобозначения $z \Rightarrow t$ это уравнение можно рассматривать как уравнение Ньютона для частицы с массой ω'', координатой φ, движущейся в поле $U(\varphi)$. Оно имеет интеграл движения-"энергия"

$$E = \frac{\omega^2 \varphi_z^2}{2} + \frac{|T|\varphi^4}{2} - \lambda^2\varphi^2. \qquad (5.27)$$

Простейшее решение – покоющаяся частица на дне ямы $\varphi = const$, $\lambda^2 = |T|\varphi^2$ соответствует в исходном уравнении (5.22) плоской волне с нелинейным сдвигом частоты $-|T|\varphi^2$. При $E > E_{min}$ возникают периодические колебания частицы в яме, т.е. периодическая модуляция волны $a(z)$. Большой интерес представляет решение с $E=0$. Из (5.27) при $E=0$ можно получить

$$\varphi(z,t) = \sqrt{\frac{2}{|T|}}\, \frac{\lambda \exp i\lambda^2 t}{ch\left(\sqrt{2}\,\lambda z/\sqrt{\omega''}\right)}. \qquad (5.28)$$

Характерный размер l_0 этого локализованного решения – "солитона" задается, как не трудно убедиться, выражением (5.25). Кроме покоящегося (в системе отсчета, двигающегося с групповой скоростью) солитона (5.28) существуют также движущиеся с постоянной скоростью солитоны, а также решения с двумя, тремя и т.д. солитонами. N – солитонные решения имеют большое значение. Методом "обратной задачи рассеяния" можно показать, что произвольное (достаточно гладкое) начальное распределение $a(z,0)$ при $t\to\infty$ распадается в основном на N – солитонов; число, амплитуды и скорости которых можно определить по $a(z,0)$. Солитоны являются устойчивыми образованиями: при столкновении двух солитонов сохраняются их скорости и амплитуды.

В заключении этого раздела подтвердим прямым вычислением полученный ранее качественный вывод о том, что в двумерном и трехмерном случаях за конечное время происходит разрушение начального пакета. Для упрощения расчетов запишем (5.22) в безразмерном виде. При $\omega''>0, T<0$

$$i\psi_t + \Delta\psi - |\psi|^2\psi = 0, \quad i\psi_t = \delta H/\delta\psi^*$$
$$H = \int\left(|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4\right)d\vec{r}. \qquad (5.30)$$

Вслед за авторами работы [16] вычислим

$$\frac{d^2\langle r^2\rangle}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\int r^2|\psi|^2 d\vec{r} = \frac{i\,d}{dt}\int\sum_\alpha x_\alpha^2.$$
$$\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)dr = -2i\frac{d}{dt}\int x_\alpha\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} - \psi\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)d\vec{r}.$$

Воспользовавшись еще раз уравнением движения и интегрируя по частям так чтобы не оставалось слагаемых, пропорциональных x_α, получим

$$\frac{d^2}{dt^2}<r^2> =4d\int|\nabla\psi|^2 d\vec{r} -2d\int|\psi|^4 d\vec{r} =8H+2(2-H)\int|\psi|^4 d\vec{r}, \quad (5.31)$$

где d – размерность пространства, H – гамильтониан (5.30).

Таким образом, при $d \geqslant 2$

$$\frac{d^2}{dt^2}<r^2> \leq 8H,$$

поэтому

$$<r^2> \leqslant 4Ht^2+c_1 t+c_2. \quad (5.32)$$

Если в начальный момент времени $H<0$, т.е. $\int|\nabla\psi|^2 dr < -\frac{1}{2}\int|\psi|^4 dr$, то за конечное время решение становится сингулярным, происходит коллапс, ибо $<r^2>$ обращается в нуль.

Для практики большой интерес представляло бы стационарное двумерное решение уравнений (5.22) – круглый волновод, позволяющее передавать энергию лазерного излучения на большие расстояния без потерь из-за дифракционной расходимости. Такое решение, как видно из (5.24), соответствует $H=0$. К сожалению, это решение неустойчиво. Если в начальный момент H из-за флуктуаций окажется положительной, то в силу (5.32) [напомним, что при $d=2$ в (5.32) стоит знак равенства] $<r^2>$ будет расти и волновод "расплывается". В обратном случае $<r^2>\to 0$, напряженность поля в центре станет очень большой. Как правило, в этом случае происходит необратимое разрушение нелинейного диэлектрика, сопровождающееся потерями энергии излучения. Подробнее об этом – см. в [17], [18].

З а д а ч и

5.1. Используя (3.16) и (5.4), вычислить четырехволновой матричный элемент $\widetilde{T}_{kk',kk'}$ для ленгмюровских волн в плазме. Рассмотреть случай $kr_D < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{m}{M}}$, $\gamma_s=\gamma_L=0$.

5.2. Вычислить $\widetilde{T}_{kk',kk'}$ (см. предыдущую задачу) при $\gamma_s > \gamma_l$ $(kr_D) > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{m}{M}}$. Ответ (см., например, обзор [19])

$$\widetilde{T}_{kk',kk'} = \frac{\omega_p^2}{4n_0 T_e}\,\frac{(kk')^2}{k^2 k'^2}\,G(k-k', \omega_k-\omega_{k'}), \quad (5.33)$$

где

$$G(\varkappa,\Omega) = \frac{\varkappa^2 c_s^2}{\Omega^2-\varkappa^2 c_s^2+2i\gamma_s c_s}.$$

5.3. Исследовать модуляционную неустойчивость света в нелинейном диэлектрике, коэффициент преломления в котором n зависит от E^2. Выяснить характерный размер и характерное время модуляции амплитуды поля, направление максимальной неустойчивости.

5.4. Исследовать модуляционную неустойчивость спиновых волн в ферродиэлектрике. Считать $T_{12,34}=T<0$, закон дисперсии $\omega_{\vec{k}}=\omega_0+\alpha k^2+\omega_1\frac{k_\perp^2}{k^2}$ ($\vec{k}_\perp=k_x, k_y$), ось z направлена по намагниченности M_0. Рассмотреть случаи $k_0 \parallel M$ и $k_0 \perp M$.

5.5.* Исследовать модуляционную неустойчивость гравитационных волн на воде. Закон дисперсии $\omega_k=\sqrt{gk}$ (см. формулу (I.22)).

5.6. Рассмотреть в линейном приближении дифракцию света на полуплоскости.

Решение.

Запишем (5.I7) в безмерных переменных $k_0 x \to x$, $k_0 z \to z$;

$$2ia_z+a_{xx}=0,\quad a_x=\frac{\partial a}{\partial x},\qquad a_z=\frac{\partial a}{\partial z}.$$

Граничные условия $a(x,0)=a_0\theta(-x)$, где $\theta(x)=1$ при $x>0$ и $\theta(x)=0$ при $x<0$. Как уравнение, так и граничные условия инвариантны относительно масштабного преобразования $x'=\lambda x$, $z'=\lambda^2 z$ и, следовательно, $a(x,z)$ в действительности зависит от одной - "автомодельной" переменной $\xi=x/\sqrt{z}$. Для $\psi(\xi)=a(x,z)$ получаем уравнение $\psi_{\xi\xi}=i\xi\psi_\xi$, решение которого с нашим граничным условием имеет вид

$$\psi(\xi)=\frac{a_0}{\sqrt{\pi}(i+1)}\int_\xi^\infty e^{i\eta^2/2}\,d\eta. \qquad (5.34)$$

Отсюда при $\xi\to\infty$ (область тени) $\psi(\xi)\sim\xi^{-2}$, при $\xi\to-\infty$ (область света)

$$|a|^2=|a_0|^2\left[1+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\pi}{4}\right)/\xi\right].$$

5.7. Изучить задачу о модуляционной неустойчивости плоской волны с помощью уравнения (5.I7). Сравнить полученное выражение для инкремента с формулой (5.I3)

5.8. Получить движущийся одномерный солитон уравнения (5.22). Указание. Искать решение в виде $a(z,t)=\varphi(z-vt)e^{i\lambda^2 t}$.

6. ПРИБЛИЖЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

Здесь мы продолжим изучение четырехволновых процессов, однако будем считать, что в $\vec{k}$ -пространстве возбужден широкий пакет волн. Такая ситуация встречается при возбуждении ленгмюровских волн в плазме пучком электронов или электромагнитным полем, при возбуждении спиновых волн в ферромагнетиках СВЧ-магнитным полем и в целом ряде других случаев. При этом может оказаться так, что амплитуды волн малы и их взаимодействие $H^{(4)}$ можно учитывать лишь в первом порядке теории возмущений, рассматривая в качестве нулевого приближения свободное волновое поле.

6.I. Статистические свойства свободного волнового поля

Энергия такого поля $H=\int \omega_{\vec{k}} |b_{\vec{k}}|^2 d\vec{k}$ не зависит от фаз волн $\varphi_{\vec{k}}$. Подставляя

$$b_{\vec{k}}(t) = |b_{\vec{k}}| \exp -i(\omega_{\vec{k}} t + \varphi_{\vec{k}}) \qquad (6.I)$$

в свободное уравнение (2.II), получаем $\dot{\varphi}_{\vec{k}}=0$, т.е. фазы волн находятся в состоянии безразличного равновесия и, следовательно, они характеризуются любым малым взаимодействием, например, малыми случайными неоднородностями, взаимодействием волн с "термостатом" и т.п. Таким образом, при описании свободного поля естественно проводить усреднение по ансамблю хаотических или - что тоже самое - случайных фаз. При этом

$$\langle a_{\vec{k}} \rangle = 0, \quad \langle a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'} \rangle = 0, \qquad (6.2)$$

$$\langle a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}'} \rangle = n_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{k}').$$

Все средние нечетного порядка равны нулю, средние четных порядков распадаются на произведения парных средних. Например,

$$\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle = n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2} \left[\delta(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\delta(\vec{k}_2-\vec{k}_4) + \delta(\vec{k}_1-\vec{k}_4)\delta(\vec{k}_2-\vec{k}_3) \right]. \quad (6.3)$$

Функция распределения $n_{\vec{k}}$ является классическим аналогом чисел заполнения $N_{\vec{k}}$: $n_{\vec{k}} = \hbar N_{\vec{k}}$ при $N_{\vec{k}} \gg 1$.

6.2. Самосогласованное уравнение для $n_{\vec{k}}$

Для того, чтобы получить уравнение для $\dot{n}_{\vec{k}}$, вычислим с помощью (5.7), (6.7) величину $(\dot{b}^*_{\vec{k}'} b_k + \dot{b}^*_{\vec{k}'} b_k)$ и, усредняя результат по фазам, получим:

$$\delta(\vec{k}-\vec{k}')\dot{n}_{\vec{k}} = -2\gamma_{\vec{k}} n_{\vec{k}}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}') + i\int\Big[T_{\vec{k}1,23}\langle b^*_{k'} b^*_1 b_2 b_3\rangle \delta(\vec{k}+1-2-3) - T^*_{\vec{k}'1,23}\langle b_k b_1 b^*_2 b^*_3\rangle \delta(\vec{k}'+1-2-3)\Big]\, d1\, d2\, d3 . \qquad (6.4)$$

В первом порядке теории возмущения поля b_i в правой части уравнения можно считать свободными и воспользоваться правилом (6.3):

$$\frac{1}{2}\,\frac{dn_{\vec{k}}}{dt} = \Big[-\gamma_{\vec{k}} + \int \eta_{\vec{k}\vec{k}'} n_{\vec{k}'}\, d\vec{k}'\Big] n_{\vec{k}}, \qquad (6.5)$$

где

$$\eta_{\vec{k}\vec{k}'} = -2\, Im\, T_{\vec{k}\vec{k}',\vec{k}\vec{k}'} . \qquad (6.6)$$

Это приближение, не учитывающее влияние взаимодействия на корреляционные характеристики, является по существу приближением самосогласованного поля. Уравнение (6.5) отличается от уравнения для свободного поля в неконсервативной среде только перенормировкой затухания

$$\gamma_{\vec{k}} \to \gamma_{ex}(\vec{k}) = -\gamma_{\vec{k}} + \int \eta_{\vec{k}\vec{k}'} n_{\vec{k}'}\, d\vec{k}' . \qquad (6.7)$$

В гамильтоновских уравнениях $T_{12,34} = T^*_{34,12}$ и $\eta_{\vec{k}\vec{k}'} = 0$. Однако, с помощью уравнений (5.7) можно описывать волны и в неконсервативной среде, при этом $T_{12,34}$ приобретает антиэрмитовскую добавку. Один такой пример мы получили в разделе 5.I, где вычислили коэффициенты $T_{12,34}$ для взаимодействия высокочастотных волн через низкочастотные. Если в (5.4) оставить затухание НЧ волн, то

$$\eta_{\vec{k}\vec{k}'} = -\eta_{\vec{k}'\vec{k}} = Im\left[\frac{|\Gamma_{\vec{k}\vec{k}'\vec{\varkappa}}|^2}{\Omega_{\vec{\varkappa}} + \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}} - i\Gamma_{\vec{\varkappa}}} + \frac{|\Gamma_{\vec{k}'\vec{k}-\vec{\varkappa}}|^2}{\Omega_{\vec{\varkappa}} + \omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} + i\Gamma_{\vec{\varkappa}}}\right] \qquad (6.8)$$

$\vec{\varkappa} = \vec{k} - \vec{k}'$.

Эта формула описывает ленгмюровские волны, взаимодействующие через ионный звук, электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике, взаимодействующие через звук. Другой важный пример – это индуцированное рассеяние волн на частицах: рассеяние света на свободных электронах [20], рассеяние ленгмюровских волн

[21] на ионах в изотермической плазме. Таким образом, уравнение (6.5) описывает достаточно широкий круг явлений. В следующем разделе мы кратко изучим свойства его решений.

6.3. Струи в $\vec{k}$ – пространстве [22]. Отметим прежде всего, что при $\eta_{\vec{k}\vec{k}'} = -\eta_{\vec{k}'\vec{k}}$ нелинейное слагаемое в (6.5) описывает поток частиц в $\vec{k}$ – пространстве с сохранением их общего числа. Действительно, интеграл по $\vec{k}$ от этого слагаемого равен нулю в силу антисимметрии $\eta_{\vec{k}\vec{k}'}$.

Рассмотрим теперь стационарное решение (6.5)

$$n_{\vec{k}}\left[-\gamma_{\vec{k}} + \int \eta_{\vec{k}\vec{k}'} n_{\vec{k}'} d\vec{k}'\right] = 0. \qquad (6.9)$$

На первый взгляд кажется, что это уравнение определяет n_k с большим произволом, в частности, можно положить $n_{\vec{k}} = 0$ в любой части $\vec{k}$ – пространства. Этот произвол снимается требованием устойчивости стационарного решения (6.5) относительно возбуждения волн с теми $\vec{k}$, где $n_{\vec{k}} = 0$. Это требование вместе с (6.9) дает:

$$\gamma_e\ (\vec{k}) = 0\ , \text{ если } \quad n_{\vec{k}} \neq 0; \qquad (6.10)$$

$$\gamma_e\ (\vec{k}) < 0, \text{ если } \quad n_{\vec{k}} = 0. \qquad (6.11)$$

Если $\eta_{\vec{k}\vec{k}'}$ – вырожденное ядро, решение $n_{\vec{k}}$ сингулярно: $n_{\vec{k}} \neq 0$ в точках, на линиях или поверхностях в $\vec{k}$ – пространстве, ибо в вырожденном случае при любом распределении $n_{\vec{k}}$ вид функции $\tilde{\gamma}_{\vec{k}} = \int \eta_{\vec{k}\vec{k}'} n_{\vec{k}'} d\vec{k}'$ достаточно определен и условие $(-\gamma_{\vec{k}} + \tilde{\gamma}_{\vec{k}}) = 0$ не может выполняться во всем $\vec{k}$ – пространстве. Рассмотрим для определенности рассеяние света на звуке. Подставляя (3.10) в (5.4), получим

$$\eta_{\vec{k}\vec{k}'} = A^2 \omega_{\vec{k}}^2\, \Omega_{\vec{\varkappa}} \Gamma_{\vec{\varkappa}} \left[\frac{1}{(\omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}} + \Omega_{\vec{\varkappa}})^2 + \Gamma_{\vec{\varkappa}}^2} - \frac{1}{(\omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}} - \Omega_{\vec{\varkappa}})^2 + \Gamma_{\vec{\varkappa}}^2}\right]. \qquad (6.12)$$

Учитывая, что $\omega_{\vec{k}} \gg \Omega_{\vec{\varkappa}} \gg \Gamma_{\vec{\varkappa}}$, в этой формуле можно перейти к так называемому дифференциальному приближению

$$\eta_{\vec{k}\vec{k}'} = \eta_k(\cos\alpha)\, \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(|\vec{k}| - |\vec{k}'|),\ \cos\alpha = \frac{\vec{k}\vec{k}'}{|\vec{k}||\vec{k}'|} \qquad (6.13)$$

$$\eta_k(\cos\alpha) = \eta_k(1 - \cos\alpha)^2,\ \ \eta_k = 8\pi A^2 \Omega^2 k^2.$$

В этом приближении

$$\gamma_e\ (\vec{k}) = -\gamma_{k,\Omega} + \frac{\partial}{\partial k}\int \eta_k(\cos\alpha) k^2 n_{k,\Omega'} d\Omega'. \qquad (6.14)$$

Тогда в случаях, когда $\gamma_{\vec{k}} = k^{\alpha}\varphi(\Omega)$, $n_{k\Omega} = k^{\alpha-5} f(\Omega)$, а зависимость $f(\Omega)$ определяется из уравнения

$$-\varphi(\Omega)+(\alpha+1)\int\eta(\cos\alpha)f(\Omega')d\Omega'\leq 0. \quad (6.15)$$

Если $\varphi(\Omega)=\mathrm{const}$, то $f(\Omega)=\mathrm{const}$, и распределение изотропно. Если же $\varphi(\Omega)$ имеет резкий максимум (для определенности пусть $\varphi(\Omega)=\varphi(\cos\theta)$, а максимум при $\cos^2\theta=1$), то

$$f(\cos^2\theta)=f\left[\delta(1-\cos\theta)+\delta(1+\cos\theta)\right]. \quad (6.16)$$

Подставляя (6.16) в (6.15) с учетом (6.13), получим:

$$-\varphi(\cos\alpha)+2\eta(\alpha+1)f(1+\cos^2\theta)\leq 0,$$

т.е. $f=\varphi(1)/4\eta(\alpha+1)$. Это решение существует, если φ – достаточно острая функция, а именно $2|d\varphi/d\cos^2\theta|>\varphi(1)$.

Таким образом, мы получили сингулярное решение, имеющее вид двух струй в $\vec{K}$ – пространстве

$$n_{\vec{K}}\sim K^{\alpha-5}\left[\delta(\cos\theta-1)+\delta(\cos\theta+1)\right], \quad (6.17)$$

несмотря на то, что затухание $\gamma_{\vec{K}}$ и ядро $\eta_{\vec{K}\vec{K}'}$ достаточно плавно зависят от углов.

Более подробно свойства решений уравнения (6.5) обсуждены применительно к астрофизическим проблемам в обзоре Я.Б.Зельдовича [20], применительно к задаче о ленгмюровской турбулентности изотермической плазмы в обзоре [19] и к одной задаче о динамике численности биологического вида в работе [23].

В заключение этого раздела кратко рассмотрим релаксацию распределения n_K к стационарному решению. Покажем предварительно, что уравнение (6.5) имеет интеграл движения [23, 19]

$$H=\int\left[n_{\vec{K}}+\ln n_{\vec{K}}\int R_{\vec{K}\vec{K}'}\gamma_{\vec{K}'}d\vec{K}'\right]d\vec{K}, \quad (6.18)$$

где $R_{\vec{K}\vec{K}'}$ – оператор, обратный $T_{\vec{K}\vec{K}'}$, относительно которого предполагается, что он не имеет нулей на всех функциях за исключением постоянной. Вычислим:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\int\frac{\dot{n}_{\vec{K}}}{n_{\vec{K}}}\left(n_{\vec{K}}+\int R_{\vec{K}\vec{K}'}\gamma_{\vec{K}'}d\vec{K}'\right)d\vec{K}=$$

$$=\int\left(-\gamma_{\vec{K}}+\int\eta_{\vec{K}\vec{K}''}n_{\vec{K}''}d\vec{K}''\right)\left(n_{\vec{K}}+\int R_{\vec{K}\vec{K}'}\gamma_{\vec{K}'}d\vec{K}'\right)d\vec{K}=0$$

в силу антисимметрии $\eta_{\vec{K}\vec{K}'}$ и $R_{\vec{K}\vec{K}'}$. Наличие интеграла движения означает, что релаксация начального распределения к стационарному не будет происходить, если начальное значение H не совпадает со стационарным. В реальных физических системах может происходить медленная релаксация под действием дополнительных слагаемых, не учтенных в уравнении (6.5). Заметим, что уравнение (6.5) в соответствующих переменных является гамильтоновским с гамильтонианом (6.18).

6.4. Нелинейная стадия параметрической неустойчивости волн при нераспадном спектре [24]. Для простоты мы ограничимся случаем, когда волновые вектора $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ возбуждающихся волн много больше, чем волновой вектор $\vec{k}_0$ исходной волны (именуемой далее волной "накачки" или просто накачкой). Полагая $\vec{k}_0=0$, упростим " гамильтониан взаимодействия волн с накачкой" (2.13):

$$H_p=\frac{1}{2}\int(V_{\vec{k}}\, b_0 e^{-i\omega_p t} b^*_{\vec{k}} b^*_{-\vec{k}} + \text{к.с})\,d\vec{k}, \qquad (6.19)$$

где $V_{\vec{k}}=V_{0,\vec{k},-\vec{k}}=V_{-\vec{k}}$, ω_p – частоты поля накачки. Таким образом можно описать, например, возбуждение спиновых волн в ферро- и антиферромагнетиках СВЧ магнитным полем. В этом случае $b_0 V_{\vec{k}} = h\tilde{V}_{\vec{k}}$, h – амплитуда магнитного поля, $\tilde{V}_k \simeq g$ (гиромагнитное отношение для электрона). Гамильтониан (6.19) описывает также возбуждение ленгмюровских волн в плазме электрическим полем, возбуждение волн на поверхности жидкости с помощью вибрации и т.д.

При изучении нелинейной стадии параметрической неустойчивости будем исходить из гамильтониана

$$H=\int\omega_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}} b^*_{\vec{k}}\, d\vec{k} + H_p + H_{int}, \qquad (6.20)$$

где H_p – взаимодействие с накачкой (6.19). В нераспадном спектре, когда трехволновые процессы запрещены $H_{int}=H^{(4)}$.

Уравнения движения:

$$\dot{b}_{\vec{k}} + (\gamma_{\vec{k}} + i\omega_{\vec{k}})b_{\vec{k}} + i b_0 V_{\vec{k}} b^*_{-\vec{k}} = -i\int T_{\vec{k}1,23}\, b_1^* b_2 b_3 \times$$
$$\times\,\delta(\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3)\,d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\, d\vec{k}_3. \qquad (6.21)$$

Если $|V_{\vec{k}} b_0|$ превысит декремент затухания волн $\gamma_{\vec{k}}$, возникает параметрическая неустойчивость и амплитуды $b_{\vec{k}}$, $b_{-\vec{k}}$ начинают расти во времени с инкрементом ν_k

$$b_{\vec{k}}(t)=|b^0_{\vec{k}}|\,e^{-\omega_p t/2+\nu_{\vec{k}}t-i\varphi_{\vec{k}}}$$
$$b_{-\vec{k}}(t)=|b^0_{-\vec{k}}|\,e^{-i\omega_p t/2+\nu_{\vec{k}}t-i\varphi_{-\vec{k}}} \qquad (6.22)$$

$$\nu_{\vec{k}} = -\gamma_{\vec{k}} + \sqrt{|V_{\vec{k}} b_0|^2 - (\omega_{\vec{k}} - \frac{\omega}{2}p)^2} \qquad (6.23)$$

(сравни с (4.10)); при этом сумма фаз волн ($\varphi_{\vec{k}} + \varphi_{-\vec{k}}$), как это следует из (6.21), задается выражением

$$\cos(\varphi_{\vec{k}} + \varphi_{-\vec{k}} - \varphi_o) = \frac{2\omega_{\vec{k}} - \omega_p}{2|V_{\vec{k}} b_o|} . \tag{6.24}$$

Здесь φ_o – фаза накачки b_o . Таким образом, на линейной стадии параметрической неустойчивости под действием накачки устанавливается определенное соотношение между фазами волн в парах ($b_{\vec{k}}, b_{-\vec{k}}$). Эта корреляция приводит к тому, что кроме нормальных средних $n_{\vec{k}}$, отличными от нуля оказываются и аномальные средние

$$\sigma_{\vec{k}} \equiv \langle b_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} \rangle e^{i\omega_p t}. \tag{6.25}$$

При построении нелинейной теории естественно на первом этапе ограничиться линейным по H_{int} приближением, т.е. приближением самосогласованного поля. Поступая также, как и в разделе (6.2) вычислим $\dot{n}_{\vec{k}}$ и $\dot{\sigma}_{\vec{k}}$, расщепляя средние четвертого порядка через всевозможные парные, учитывая, однако, что $\sigma_{\vec{k}} \neq 0$:

$$\langle b_1^* b_2^* b_3 b_4 \rangle = n_1 n_2 \left[\delta(1-3)\delta(2-4) + \delta(1-4)\delta(2-3)\right] + \\ + \sigma_1^* \sigma_3 \left[\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\delta(\vec{k}_3 + \vec{k}_4)\right]$$

$$\langle b_1 b_2 b_3 b_4 \rangle = e^{-2i\omega_p t}\Big\{\sigma_1 \sigma_2 \big[\delta(1+3)\delta(2+4) + \\ + \delta(1+4)\delta(2+3)\big] + \sigma_1 \sigma_3 \delta(1+2)\delta(3+4)\Big\}.$$

В результате получим

$$\dot{n}_{\vec{k}} = 2n_{\vec{k}}\left[-\gamma_{\vec{k}} + Im(P_{\vec{k}}^* \sigma_{\vec{k}})\right]; \tag{6.26}$$
$$\dot{\sigma}_{\vec{k}} = 2\sigma_{\vec{k}}\left[-i(\tilde{\omega}_{\vec{k}} - \frac{\omega_p}{2}) - \gamma_{\vec{k}}\right] - i(n_{\vec{k}} + n_{-\vec{k}} P_{\vec{k}}).$$

Эти уравнения отличаются от линейных только самосогласованной перенормировкой частоты $\omega_{\vec{k}} \to \tilde{\omega}_{\vec{k}}$ и накачки $V_{\vec{k}} b_k \to P_{\vec{k}}$:

$$\tilde{\omega}_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} + 2\int T_{\vec{k}\vec{k}'} n_{\vec{k}'} d\vec{k}'$$
$$P_{\vec{k}} = V_{\vec{k}} b_o + \int S_{\vec{k}\vec{k}'} \sigma_{\vec{k}'} d\vec{k}' \tag{6.27}$$
$$T_{\vec{k}\vec{k}'} \equiv T_{\vec{k}\vec{k}', \vec{k}\vec{k}'}, \quad S_{\vec{k}\vec{k}'} \equiv T_{\vec{k},-\vec{k}; \vec{k}', -\vec{k}'} .$$

Из (6.26) следуют соотношения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\gamma_{\vec{k}}\right)(n_{\vec{k}} n_{-\vec{k}} - |\sigma_{\vec{k}}|^2) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_{\vec{k}}\right)(n_{\vec{k}} - n_{-\vec{k}}) = 0,$$

показывающие, что за время, порядка $1/\gamma_k$ произвольные начальные условия релаксируют к состоянию (не обязательно стационарному), в котором

$$n_{\vec{k}} = n_{-\vec{k}}, \quad |\sigma_{\vec{k}}| = n_{\vec{k}}. \qquad (6.28)$$

Последнее равенство означает, что фазы волн в парах полностью коррелированы. Условия (6.28) позволяют ввести новые переменные $c_{\vec{k}} = c_{-\vec{k}}$, в которых $n_{\vec{k}} = n_{-\vec{k}} = |c_k|^2, \sigma_{\vec{k}} = c_k^2$. В этих переменных вместо четырех уравнений (6.26) для $n_{\vec{k}}$, $n_{-\vec{k}}$, σ_k и σ_k^* имеем одно комплексное уравнение

$$\dot{c}_{\vec{k}} + \left[i\left(\tilde{\omega}_{\vec{k}} - \frac{\omega_p}{2}\right) + \gamma_{\vec{k}}\right] c_{\vec{k}} + i P_{\vec{k}} c_k^* = 0. \qquad (6.29)$$

Его можно получить варьированием гамильтониана

$$H_s = \int\left[\omega_{\vec{k}} + \int T_{\vec{k}\vec{k}'} |c_{\vec{k}'}|^2 d\vec{k}' - \frac{\omega_p}{2}\right] |c_{\vec{k}}|^2 d\vec{k} + \qquad (6.30)$$
$$+ \frac{1}{2}\int\left[\left(h_0 V_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\int S_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}'}^2 d\vec{k}'\right) c_k^{*2} + \text{к.с}\right] d\vec{k}$$

по правилу

$$\dot{c}_{\vec{k}} + \gamma_{\vec{k}} c_{\vec{k}} = -i \frac{\delta H_s}{c_{\vec{k}}^*}.$$

Отсюда следует, в частности, что при $\gamma_{\vec{k}} = 0$ H_s является интегралом движения. В обзоре [24] подробно исследованы решения уравнений (6.29) применительно к спиновым волнам в ферромагнетиках и приведено подробное сравнение теории с экспериментом, демонстрирующее качественное и в ряде случаев количественное соответствие. Здесь мы рассмотрим только модельную ситуацию

$$\gamma_{\vec{k}} = \gamma, \quad V_{\vec{k}} = V, \quad S_{\vec{k}\vec{k}'} = S, \quad T_{\vec{k}\vec{k}'} = T.$$

В стационарном случае $\dot{c}_{\vec{k}} = 0$ и из (6.29) немедленно получаем

$$|c_{\vec{k}}^0|^2\left[\left(\tilde{\omega}_{\vec{k}} - \frac{\omega_p}{2}\right)^2 + \gamma^2 - |P|^2\right] = 0, \qquad (6.31)$$

т.е.

$$|P|^2 \leq \gamma \qquad (6.32)$$

и $c_{\vec{k}}^0 \neq 0$ только на двух поверхностях (сферах) в $\vec{k}$ пространстве:

$$\tilde{\omega}_{\vec{K}_I} = \frac{\omega_P}{2} \pm \sqrt{\gamma^2 - |P|^2}. \qquad (6.33)$$

Произвол в выборе поверхности (6.33) устраняется требованием устойчивости стационарного распределения $c^0_{\vec{K}}$ относительно роста волн с $\vec{K} \neq \vec{K}_{\pm}$, т.е. находящихся вне поверхностей (6.33). Из (6.29) легко получить выражения для соответствующего инкремента

$$\nu_{\vec{K}} = -\gamma + \sqrt{|P|^2 - (\tilde{\omega}_{\vec{K}} - \frac{\omega_P}{2})^2}. \qquad (6.34)$$

Максимальный инкремент соответствует волнам с $2\tilde{\omega}_{\vec{K}} = \omega_P$; $\nu_{max} = -\gamma + |P|$. Видно, что требование устойчивости $\nu_{max} \leq 0$ дает $|P| \leq \gamma$, вместе с (6.32) получаем $|P| = \gamma$. Вместе с (6.33) это означает $c^0_{\vec{K}} \neq 0$ на единственной поверхности

$$\tilde{\omega}_{\vec{K}} = \omega_{\vec{K}} + 2T \int |c_{\vec{K}'}|^2 d\vec{K}' = \frac{\omega_P}{2} . \qquad (6.35)$$

Уравнение (6.29) при этом упрощается до вида

$$\gamma c_{\vec{K}} + i\,(b_0 V + S \int c^2_{\vec{K}'} d\vec{K}')\, c^*_K = 0 ,$$

откуда

$$SN_0 = S \int |c_{\vec{K}}|^2 d\vec{K} = \sqrt{|b_0 V|^2 - \gamma^2}, \quad |b_0 V| \sin 2\psi = \gamma. \ (6.36)$$

Обсудим теперь на качественном уровне механизм ограничения амплитуды волн при параметрической неустойчивости, приводящий к стационарному состоянию (6.35), (6.36) При $|b_0 V| > \gamma$ волны нарастают с инкрементом $(|b_0 V| - \gamma)$ до тех пор пока можно не учитывать перенормировку накачки (6.27). Эта перенормировка приводит к тому, что эффективная накачка $|P_{\vec{K}}|$ уменьшается от $|V b_0|$ до γ т.е. до порогового уровня и дальнейший рост волн прекращается. При этом для всех волн, за исключением тех, которые расположены на поверхности (6.35), инкремент $\nu_{\vec{K}}$ (6.34) отрицателен и они "умирают". В результате "выживает" сингулярное распределение - $c_{\vec{K}} \neq 0$ на резонансной поверхности (6.35). В заключении этого раздела изучим устойчивость решения (6.36) относительно изменения амплитуды и фазы возбужденных волн. Для этого удобно записать (6.29) в переменных $n_{\vec{K}}, \varphi_{\vec{K}}, c_{\vec{K}} = \sqrt{n_{\vec{K}}} \exp(-i\varphi_K/2)$. В нашем случае на поверхности (6.35) $n_{\vec{K}} = n$, $\varphi_{\vec{K}} = \varphi$ и для интегральной амплитуды N и фазы φ получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial t}=N(-\gamma+|b_oV|\sin\varphi),\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\omega_{\vec{k}}+2TN-\frac{\omega_p}{2}+|b_oV|\cos\varphi+SN$$

Отсюда для $\delta N=N-N_o$ и $\delta\varphi=\varphi-\varphi_o$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\delta N}{\partial t}=|b_oV|N_o\cos\varphi_o\,\delta\varphi,\ \frac{1}{2}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t}=-|b_oV|\sin\varphi_o\,\delta\varphi+(2T+S)N_o\,\delta N.$$

Полагая $\delta N,\delta\varphi\sim\exp(-i\Omega t)$, получим

$$\Omega=-i\gamma\pm\sqrt{4S(2T+S)N_o^2-\gamma^2}\,. \tag{6.38}$$

Если $S(2T+S)<0$, то стационарное состояние (6.36) неустойчиво (ибо $Im\,\Omega>0$). В этом случае уравнение (6.29) вообще не имеет устойчивых стационарных решений и, как показывает численное решение этих уравнений [24], $N(t)$ колеблется с частотой порядка $\sqrt{|Vb_o|^2-\gamma^2}$. В обратном случае решение (6.36) устойчиво и $N(t)$ релаксирует к нему. Эта релаксация носит характер затухающих колебаний с частотой Ω (6.38). Более подробно этот вопрос рассмотрен в обзоре [24].

З а д а ч и

6.1. В приближении самосогласованного поля получить уравнение для $n_{\vec{k}}(\vec{r})$ в пространственно-неоднородном случае.

Указание. Пользуясь гамильтоновскими уравнениями (5.7), вычислить $\frac{d}{dt}n_{\vec{k}\vec{k}'}$, $n_{\vec{k}\vec{k}'}=\langle b_{\vec{k}}b^*_{\vec{k}'}\rangle$ и затем, считая пространственную неоднородность медленной, перейти в $\vec{r}$ – представление по формуле

$$n_{\vec{k}}(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int n_{\vec{k}+\frac{\vec{\varkappa}}{2},\vec{k}-\vec{\varkappa}/2}\,e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}}d\vec{\varkappa}$$

О т в е т [25].

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial t}+\left[\frac{\partial\omega_{\vec{k}}}{\partial\vec{k}}\,\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial\vec{r}}-\frac{\partial\tilde{\omega}_{\vec{k}}}{\partial\vec{r}}\,\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial\vec{k}}\right]=0 \tag{6.38}$$

$$\tilde{\omega}_{\vec{k}}(\vec{r})=\omega_{\vec{k}}+2\int T_{\vec{k}\vec{k}'}n_{\vec{k}'}(\vec{r})d\vec{k}'.$$

6.2. В рамках уравнения (6.38) изучить модуляционную неустойчивость узкого пространственно-однородного пакета:

$$n^o_{\vec{k}}=\frac{N}{\pi}\,\frac{\varkappa}{(k_z-k_o)^2+\varkappa^2}\,. \tag{6.39}$$

О т в е т [25]. Дисперсионное уравнение для "частоты" возмущений $\delta n_{\vec{k}}(\vec{r})\sim\exp{-i\,\Omega t}$ имеет вид (при $T_{\vec{k}\vec{k}'}=T$)

$$1+2T\int\frac{\vec{p}\,\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial\vec{k}}}{\Omega-\vec{p}\,\frac{\partial\tilde{\omega}_{\vec{k}}}{\partial\vec{k}}}\,d\vec{k}=0, \tag{6.40}$$

$-i\vec{p}\vec{r}-i\Omega t$

отсюда при малых $\varkappa$

$$\Omega_{\vec{p}} = p\,\frac{\partial \omega_{\vec{k}}}{\partial \vec{k}_0} \pm \sqrt{2TN\omega''}$$

6.3.* В приближении самосогласованного поля рассмотреть эволюцию узкого пакета волн при параметрическом возбуждении и малой надкритичности.

Указание. Уравнение (6.29) записать в переменных "амплитуда-фаза" и получить замкнутое интегродифференциальное уравнение на амплитуду, пренебрегая $d\psi/dt$. Решение этих уравнений искать в автомодельном виде $n(k,t) \backsim A(t)\sqrt{t}\,\exp -\left[k-k_0(t)\right]^2/d^2(t)$.

Ответ.

$$k_0(t) = k_0 - \frac{\alpha}{t},\ A(t) - A_0 \backsim t^{-2},\ d(t) \backsim t^{-1/2}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Ламб Г. Гидродинамика. ОНТИ, I947; Давыдов Б.И. ДАН СССР, 89, I65 (I949).

2. Львов В.С., Михайлов А.В. Препринт ИАиЭ № 54, I977; ЖЭТФ (в печати).

3. Захаров В.Е. "Изв. вузов. Радиофизика", ХУII, 43I (I974).

4. Покровский В.Л., Халатников И.М. ЖЭТФ, 7I, I974 (I976).

5. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 60, I7I7 (I97I).

6. Шафранов В.Д. Вопросы теории плазмы, вып.3, I963.

7. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред.

8. Захаров В.Е. ПМТФ, № 2, 86, (I968).

9. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. ФТТ., II, 2924 (I969).

I0. Захаров В.Е., Рубенчик А.М. ПМТФ, № 5, 84, (I972).

II. Захаров В.Е., Львов В.С. Изв. вузов. Радиофизика", ХУIII, I470 (I975).

I2. Веденов А.А. Вопросы теории плазмы, вып.3, I963.

I3. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М., "Мир", I966.

I4. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Вопросы теории плазмы, вып.7, I973.

I5. Захаров В.Е. гл.5 в кн. Кунина И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. "Наука", I975.

16. Власов В.И., Таланов В.И., Петрищев В.А. "Изв. вузов. Радиофизика", XIУ, 1353, 1971.

17. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. УФН, 93,19 (1967).

18. Захаров В.Е., Сынах В.С., ЖЭТФ, 68, 940 (1975).

19. Захаров В.Е., Мушер С.Л., Рубенчик А.М. Препринт ИАиЭ СОАН СССР, № 26, 1975.

20. Зельдович Я.Б. УФН, 115, 161 (1975).

21. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 62, 1745 (1972).

22. Брейзман Б.Н., Захаров В.Е., Мушер С.Л. ЖЭТФ, 64, 1297 (1973).

23. Kerner E.H. Gibbs Ensemble Biological Ensambe, NY, 1971.

24. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. УФН, 114, 609 (1974).

25. Рубенчик А.М. "Изв. вузов", ХУП, 1635 (1974).

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Виктор Сергеевич Львов

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Курс лекций для студентов физического факультета

Темплан 1977, поз.708

Редактор Л.Г.Верзакова
Корректор О.А.Каратыгина
Обложка художника Н.А.Савельевой

Подписано в печать 23.12.77г. Тираж 600 экз.
Формат 60х84, 1/16. Бумага оберточная Цена 15 коп.
Заказ № 12 Объем 3 п.л.; 2,9 уч.-изд.л.

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета;
ротапринт НГУ; 630090, Новосибирск, 90, Пирогова, 2.