

- 50 -

В.С. ЛЬВОВ

77

**ЛЕКЦИИ
ПО ФИЗИКЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ
ЯВЛЕНИЙ**

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. С. ЛЬВОВ

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Курс лекций для студентов
физического факультета

НОВОСИБИРСК
1977

Львов В.С.

Лекции по физике нелинейных явлений. Курс лекций для студентов физического факультета, НГУ, 1977, I-47.

В курсе лекций с единой точки зрения рассмотрены нелинейные волновые явления в различных ситуациях – при распространении звука и света в сплошной среде, спиновых волн в ферромагнетиках, электромагнитных волн в плазме и т.д. В частности, описаны процессы слияния двух волн в одну, генерации второй гармоники, распадная, модуляционная и взрывная неустойчивости волн, самофокусировка света, коллапс волн, вынужденное комбинированное рассеяние света в пластине. В приближении самосогласованного поля получены уравнения, описывающие процесс индуцированного рассеяния волн на частицах, исследованы сингулярные решения этих уравнений; построена нелинейная теория параметрического возбуждения волн.

Все эти явления рассмотрены в рамках гамильтоновских уравнений движения; предварительно исходные уравнения движения среды формулируются в гамильтоновском виде. Это позволяет применять общие результаты к целому ряду конкретных ситуаций и описывать почти автоматически такие эффекты, которые в исходных переменных усматриваются с трудом.

Курс лекций рассчитан на студентов III-У курсов физических факультетов.

Введение

Целый ряд физических процессов можно описывать в линейном приближении. Основная трудность при этом заключается в выяснении их природы и формулировке исходных уравнений движения. Необходимо было понять, например, что звук — это колебания плотности сплошной среды и написать для неё уравнения гидродинамики, свет — это электромагнитные волны и получить уравнения Максвелла. Эта программа для звука, света, волн на воде была выполнена ещё в прошлом веке, спиновые волны в ферромагнетиках открыты Блохом в 1930 г. Различные типы волновых движений в сложных конкретных ситуациях продолжают изучаться и сейчас. С увеличением амплитуды волн возникает целый мир новых удивительных явлений — самофокусировка и самоканализация света мощных лазеров, явление "девятого вала" в штормовом море, коллапс плазменных волн и т.д., обусловленных взаимодействием волн, которое описывается нелинейными членами уравнений.

Изучение нелинейных процессов началось с газо- и гидродинамики. Исследовались различные решения уравнений Эйлера или Навье-Стокса, затем активно стала развиваться физика плазмы с её огромным разнообразием различных случаев и типов уравнений (гидродинамическое приближение, кинетические явления и т.д.) Лазеры привели к возникновению нелинейной оптики, в которой исследуются нелинейные уравнения Максвелла в среде, радиолокаторы — к исследованию нелинейных свойств ферромагнетиков с помощью уравнений Ландау-Лифшица. Таким образом, число различных нелинейных уравнений, описывающих разные среды и ситуации, весьма велико. Задача физики нелинейных явлений — изучать подобные процессы с общей точки зрения, отвлекаясь по возможности от конкретных свойств среды. При этом выясняется, что "девятый вал" и самофокусировка света весьма похожие явления, имеющие общую причину. Трудности физики нелинейных явлений имеют много общего с трудностями макроскопической физики вообще. Можно написать уравнения движения — уравнения гидродинамики, Максвелл-

да, Шредингера, но нельзя, как правило, их точно решить. Хороший пример такой ситуации – проблема гидродинамической турбулентности, уравнения движения для которой хорошо известны, но " в вопросе о сущности турбулентного движения в настоящее время всё же недостает полной ясности" (Л.Ландау).

Тем не менее в последние 10–20 лет был достигнут весьма существенный прогресс изучения нелинейных явлений (в частности в плазме, нелинейной оптике, в ферромагнетиках), а многие фундаментальные результаты были получены совсем недавно. Эти успехи частично связаны с общим продвижением в проблеме многих тел, с развитием вычислительной техники, позволяющей производить численные эксперименты с большим числом нелинейных уравнений. Необходимо отметить также возникший в последние годы эффективный математический метод анализа важного класса нелинейных уравнений, получивший название метода "обратной задачи рассеяния". В значительной мере прогресс в изучении нелинейных явлений связан также с предельно ясной формулировкой задач, очищенных от всего лишнего и малосущественного. Образцом такой формулировки проблем является классическая механика, сформулированная на языке канонических переменных. Обращение к классической механике очерчивает и рамки, внутри которых можно рассчитывать на значительный успех – это консервативные или почти консервативные системы, в которых диссипация волн мала. Наиболее общим и мощным методом классической механики является гамильтонов формализм. Поэтому первой нашей задачей будет его обобщение на случай континуального числа степеней свободы (сплошная среда) и трансляционно-инвариантного гамильтониана общего вида (§ 1,2).

Наиболее трудным и нетривиальным аспектом во всей этой процедуре является формулировка естественных уравнений среды в каноническом виде – это искусство, а не наука. В лекциях и задачах мы рассмотрим целый ряд таких примеров. Это позволит нам применять общие результаты к ряду конкретных ситуаций и описывать почти автоматически такие эффекты, которые в исходных переменных усматриваются с трудом. Мы рассмотрим серию простейших задач: слияние двух волн в одну, генерацию второй гармоники, распадную, взрывную и модуляционную неустойчивости плоской волны, вынужденное комбинационное рассеяние света в пластине, нелиней-

ную эволюцию узких пакетов волн (коллапс), волноводное распространение света и т.д.

Общее число удовлетворительно решаемых задач в нелинейной теории существенно меньше, чем число стоящих в ней проблем. Ценность этих задач заключается в создании общей точки зрения, системы взглядов, которая помогает рассмотрению этих проблем и в ряде случаев - их удовлетворительному решению.

I. ВВЕДЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Здесь мы рассмотрим несколько примеров того, как уравнения движения, записанные в естественных переменных, можно представить в гамильтоновском виде

$$\frac{\partial q(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p(\vec{r}, t)}, \quad \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta q(\vec{r}, t)} \quad (\text{I.1})$$

Эти уравнения являются простым обобщением уравнений Гамильтона классической механики - среда в каждой точке \vec{r} характеризуется парой канонически сопряженных переменных - обобщенной координатой $q(\vec{r}, t)$ и импульсом $p(\vec{r}, t)$. Гамильтониан (функция Гамильтона) зависит от q и p во всех точках \vec{r} , т.е. является функционалом от $q(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$ и обычно имеет смысл энергии среды. Символы $\frac{\delta}{\delta p}$, $\frac{\delta}{\delta q}$ обозначают вариационные производные, например: $\delta f(\vec{r}, t) / \delta f(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r})$ дельта функция Дирака. В качестве первого примера введения канонических переменных рассмотрим

I.1. Потенциальные движения в идеальной гидродинамике (звук в сплошной среде)

Уравнения Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla p / \rho, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0 \quad (\text{I.2})$$

в случае потенциальных течений могут быть записаны в виде:

$$\dot{\phi} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \omega(\rho) = 0, \quad \dot{\rho} + \text{div} \rho \nabla \phi = 0, \quad (\text{I.3})$$

где ϕ - потенциал поля скорости

$$\vec{V} = \nabla \phi, \quad (\text{I.4})$$

а ω - удельная энергия жидкости:

$$\omega(\rho) = \int \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} d\rho, \quad (\text{I.5})$$

