

ГЛАВА 2

КЛАССИЧЕСКИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ
И СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В МАГНЕТИКАХ

Спиновые волны в магнитоупорядоченных диэлектриках обладают определенной спецификой, и традиционная программа обучения на физических факультетах обычно не предполагает ее изучения. Поэтому при описании нелинейных свойств системы взаимодействующих спиновых волн желательно использовать метод, не требующий знания спин-волновой специфики до тех пор, пока это действительно не будет необходимо для дальнейшего продвижения в изучении проблемы. С другой стороны, этот метод должен быть достаточно известным и удобным. Всеми этими качествами обладает классический гамильтонов формализм, описанный в этой главе применительно к спиновым волнам в магнитодиэлектриках. Для чтения этой главы не обязательно знакомство с физикой магнитоупорядоченных диэлектриков или хотя бы с одной из многочисленных монографий по магнетизму [1–31]. Почти достаточно будет сведений, изложенных в первой главе. В остальных случаях я пытался ограничиться ссылками на классическую монографию А.И. Ахиезера, В.Г. Барьяхтара, С.В. Пелетминского "Спиновые волны" [3].

Гамильтонов метод применим к широкому классу слабо взаимодействующих и слабо диссипативных волновых систем, он предельно четко проясняет их общие свойства. Действительно, уравнения движения для волн, записанные в естественных переменных среды, могут сильно отличаться друг от друга. Так, уравнения Блоха, описывающие движения магнитного момента, совершенно не похожи на уравнения Максвелла в нелинейном диэлектрике. Последние кардинально отличаются от уравнений Эйлера для сжимаемой жидкости. Между тем спиновые электромагнитные и звуковые волны — это прежде всего волны, т.е. колебания среды, передающиеся из одной точки в другую. Если мы интересуемся только особенностями распространения волны малой амплитуды, например, явлением дифракции, то совершенно не обязательно знать, что именно колеблется — магнитный момент, электрическое поле или плотность среды. Вся информация о свойствах среды, необходимая и достаточная для изучения распространения в ней невзаимодействующих волн, содержится в их законе дисперсии $\omega(k)$. Точно так же в остальных коэффициентах разложения

гамильтониана ее содержится ровно столько, сколько необходимо для изучения нелинейных свойств волновой системы, и ничего лишнего. Поэтому ясно, что две системы волн с близким законом дисперсии и похожими k -зависимостями "существенных" коэффициентов гамильтониана взаимодействия будут характеризоваться одинаковым нелинейным поведением. При этом их уравнения движения в естественных переменных могут выглядеть совершенно различно.

Таковыми же качествами, позволяющими выявить общность различных волновых систем, обладает и метод вторичного квантования, в котором операторы, характеризующие естественные переменные среды, представляются через бозе-операторы рождения и уничтожения. Этот квантовомеханический метод довольно часто используется в физике нелинейных волн, несмотря на то, что числа заполнения, при которых становятся существенными нелинейные эффекты, как правило, велики, и система волн является классической. Таким образом, при использовании мощного метода вторичного квантования на этапе формулировки задачи возникает постоянная Планка, которая затем благополучно сокращается в окончательных выражениях. Такая непоследовательность связана, видимо, с тем, что образование физика в наше время предполагает гораздо более подробное изучение квантовой механики, чем классической.

В задачах нелинейной волновой динамики нам представляется более логичным использовать классический гамильтонов метод, который позволяет избежать специфических, не адекватных задаче трудностей, связанных с некоммутативностью операторов a и a^* . Что касается простоты интерпретации и наглядности метода вторичного квантования, то гамильтонов метод обладает ими в равной мере, ибо комплексные канонические переменные a и a^* являются классическими аналогами (c -числами) бозе-операторов.

В § 5 будет развит классический гамильтонов формализм для волн в сплошной среде безотносительно к ее специфике: обобщены гамильтоновы уравнения движения на случай сплошной среды, изучена общая структура функции Гамильтона при малой нелинейности и сформулирована динамическая теория возмущений, позволяющая исключить нерезонансные члены в гамильтониане взаимодействия. При изложении этого параграфа я в значительной мере буду опираться на классический обзор В.Е.Захарова [106], обзор В.Е.Захарова, Е.А.Кузнецова [110] и курс лекций автора [159].

В следующих параграфах мы дадим гамильтонову формулировку задачи о нелинейной динамике спиновых волн — СВ — в магнетодиэлектриках. С прагматической точки зрения результатом этих параграфов будет вычисление коэффициентов гамильтониана СВ в ФМ и АФМ: закона дисперсии и матричных элементов гамильтониана взаимодействия. Сводка этих результатов с краткими комментариями содержится для ФМ в шестом, для АФМ в седьмом параграфах. При первом чтении ими и можно ограничиться, не вдаваясь в детали "внутреннего устройства" магнетодиэлектриков, необходимые для вычисления коэффициентов гамильтониана. Это и есть достоинство гамильтонова метода — возможность отделить изучение динамики волн в рамках стандартного гамильтониана (5.22) — (5.24) от всего остального, связанного с конкретной спецификой среды.

Все остальное в нашем случае — это вторая половина главы: §§ 8–10. Она будет интересна в первую очередь тем, для кого нелинейная динамика СВ — это метод изучения магнетодиэлектриков. В § 8, во-первых, приводится и комментируется словесный "вывод" уравнений движения для намагниченности, во-вторых, эти уравнения записываются в каноническом гамильтоновом виде. В § 9, исходя из спинового гамильтониана в ФМ, мы получаем выражение для его энергии в приближении сплошной среды, входящее в уравнения движения для намагниченности, и только после этого в § 10 оказывается возможным непосредственно приступить к вычислению коэффициентов спин-волнового гамильтониана по формальной схеме, описанной в § 5, и с помощью канонических переменных, полученных в § 8.

Читатель, который захочет пройти и пройдет через все нагромождение фактов и формул этой главы, осилив ее до конца, безусловно, должен быть вознагражден. Прежде всего чувством собственного удовлетворения. Потом, возможно, приобретенной точкой зрения на спиновые волны в магнетодиэлектриках, как на интересный и относительно простой объект исследования в физике нелинейных волновых явлений. И наконец, пониманием того, что в действительности все обстоит значительно сложнее, чем это может показаться. Например, неясны сейчас границы применимости описанного подхода при конечных температурах. Неясно, на сколько процентов мы ошибаемся в матричных элементах гамильтониана взаимодействия при $T = \frac{1}{2} T_c$, даже если подставить в соответствующие выражения измеренные при данной температуре значения намагниченности и других характеристик магнетодиэлектрика. Неясно и многое другое. Детальное изучение этих тонких и сложных проблем еще предстоит. Сейчас же можно только выразить уверенность в том, что описанный в этой главе простой гамильтонов метод описания динамики магнетодиэлектриков, безусловно, содержит значительную часть правды о спиновых волнах.

§ 5. Гамильтонов формализм для волн в сплошной среде

5.1. Гамильтоновы уравнения движения. Как хорошо известно, уравнения Гамильтона для системы с одной степенью свободы имеют вид [40]

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \quad (5.1)$$

Здесь функция Гамильтона \mathcal{H} (именуемая в дальнейшем гамильтонианом) зависит от канонических переменных — обобщенной координаты q и обобщенного импульса p . Обычно \mathcal{H} — это энергия системы, выраженная через канонические переменные. Системы с n степенями свободы характеризуются парами канонически сопряженных переменных q_1, q_2, \dots, q_n и p_1, p_2, \dots, p_n . Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad (5.2)$$

где \mathcal{H} — функция q_i, p_i . Сплошную среду в простейшем случае можно

характеризовать парой канонических переменных $q(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$ в каждой точке \mathbf{r} . Уравнения движения для $q(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$ получаются обобщением (5.2):

$$\frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p(\mathbf{r}, t)}, \quad \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.3)$$

Гамильтониан \mathcal{H} зависит от p и q во всех точках \mathbf{r} , т.е. является функционалом от $q(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$. Символы $\delta/\delta p$ и $\delta/\delta q$ обозначают вариационные производные, обобщающие понятия частных производных для случая континуального числа переменных. Правила обращения с ними кратко приведены в приложении 1.

Надо сказать, что уравнения (5.3) описывают динамику только одного типа волн, например звука. Для того чтобы учесть несколько типов волн или несколько поляризаций, необходимо характеризовать среду в каждой точке \mathbf{r} несколькими парами переменных $q_j(\mathbf{r}, t)$, $p_j(\mathbf{r}, t)$, $j = 1, \dots$ Соответственно уравнения движения (5.3) обобщаются до вида

$$\frac{\partial q_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_j(\mathbf{r}, t)}, \quad \frac{\partial p_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_j(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.4)$$

5.2. Переход к комплексным переменным. Формальное преимущество гамильтонова метода — это симметричная форма записи уравнения для координаты q и для импульса p . Для того чтобы реализовать его, совершим вначале переход к новым каноническим переменным $Q(\mathbf{r}) = \lambda q(\mathbf{r})$, $P(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r})/\lambda$, причем размерный множитель λ выберем так, чтобы P и Q имели одинаковую размерность. Затем введем комплексные переменные

$$a_j = (Q_j + iP_j)/\sqrt{2}, \quad a_j^* = (Q_j - iP_j)/\sqrt{2}. \quad (5.5)$$

Для них

$$\sqrt{2} \frac{\partial a_j}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P_j} - i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q_j},$$

$$\sqrt{2} \frac{\partial a_j^*}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P_j} + i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q_j}.$$

Подставляя сюда $\mathcal{H}\{a, a^*\}$, получим

$$i \frac{\partial a_j}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_j^*}, \quad -i \frac{\partial a_j^*}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_j}. \quad (5.6)$$

Второе из этих уравнений можно получить из первого комплексным сопряжением, и, следовательно, вместо двух вещественных уравнений (5.4) мы получим одно комплексное. В квантовой механике такой замене переменных соответствует переход от представления координата-импульс к представлению бозе-операторов рождения и уничтожения. Комплексные канонические переменные являются их классическими аналогами.

Разумеется, канонические переменные (5.5) являются далеко не единственными. Существует широкий произвол в выборе преобразований от канонических переменных (a, a^*) к другим переменным (b, b^*) , в которых уравнения движения сохраняют канонический вид

$$i \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b^*}, \quad -i \frac{\partial b^*}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b}. \quad (5.7)$$

Такие преобразования называются каноническими [32]. Условия каноничности для частного вида преобразований $b(\mathbf{r}, t) = b(a, a^*)$, $b^*(\mathbf{r}, t) = b^*(a, a^*)$, не содержащих явно времени, получены в приложении 2. Нужно сказать, что указанная возможность выбора различных канонических переменных является важным достоинством гамильтонова метода. Она позволяет каждый раз выбирать переменные, наилучшим образом приспособленные для решения данной конкретной задачи. И этой возможностью мы будем широко пользоваться.

5.3. Структура гамильтониана при малой нелинейности. В самых различных задачах нелинейной волновой динамики амплитуду волн можно характеризовать некоторым естественным безразмерным параметром ξ . Для звуковых волн этим параметром является отношение вариации плотности в звуковой волне к средней плотности среды, для волн на поверхности жидкости — отношение высоты поднятия к длине волны. Для СВ соответствующим безразмерным параметром ξ является угол прецессии магнитного момента. Когда параметр ξ порядка единицы, возникают явления, специфические для каждой задачи: звук "переходит" в ударные волны, на поверхностных волнах в жидкости образуются барашки, в ФМ происходит переворот намагниченности — возникает доменная стенка, которая, вообще говоря, может двигаться. Понятно, что рассматривать все эти явления с общей точки зрения неконструктивно. Однако, если параметр нелинейности волн ξ мал, специфика среды в значительной степени оказывается несущественной, и независимо от ее свойств динамику волн можно описывать в общих терминах: терминах закона дисперсии $\omega(\mathbf{k})$, групповой и фазовой скорости, вероятностей элементарных процессов взаимодействия с участием трех, четырех волн и т.д. В этом пункте мы продемонстрируем, как возникают эти понятия в рамках гамильтонова формализма при малом уровне нелинейности ξ .

Канонические переменные a_j , a_j^* мы выберем так, что они будут характеризовать амплитуду волн и обращаться в нуль в их отсутствие. Индекс $j = 1, \dots, n$ характеризует поляризацию волн или их тип, ведь, вообще говоря, в средах могут одновременно возбуждаться различные волны: звук, свет и т.п. полагая a_j , a_j^* малыми. Разложим функционал $\mathcal{H}\{a_j(\mathbf{r}, t), a_j^*(\mathbf{r}, t)\}$ в ряд по степеням a_j , нулевой член $\mathcal{H}\{0, 0\}$ нас не интересует, так как он не входит в уравнения движения: $\delta \mathcal{H}\{0, 0\} / \delta a = 0$. Члены первого порядка \mathcal{H}_1 равны нулю, так как мы считаем, что в отсутствие волн среда находится в равновесии и, следовательно, гамильтониан минимален при $a_j = a_j^* = 0$. Таким образом, разложение \mathcal{H} начинается с членов второго порядка:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_{\text{int}}. \quad (5.8)$$

Наиболее общая форма \mathcal{H}_2 такова:

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{i, j=1}^n \int dr dr' \{ A_{ij}(r, r') a_i(r) a_j^*(r') + \\ + \frac{1}{2} [B_{ij}^*(r, r') a_i(r) a_j(r') + \text{к.с.}] \}. \quad (5.9)$$

Величина \mathcal{H}_2 вещественна (гамильтониан эрмитов), поэтому

$$A_{ij}(r, r') = A_{ji}^*(r', r), \quad B_{ij}(r, r') = B_{ji}(r', r). \quad (5.10)$$

Кроме того, в пространственно-однородной среде A и B зависят только от разности координат и, если среди элементов симметрии среды есть инверсия, являются четной функцией этой разности. Тогда из (5.10) следует, что

$$A_{ij}(R) = A_{ji}^*(R), \quad B_{ij}(R) = B_{ji}(R). \quad (5.11)$$

Существенного упрощения гамильтониана можно добиться, совершая преобразование Фурье

$$a(k) \equiv a_k = \left(\frac{1}{V} \right) \int dr a(r) e^{-ikr}, \quad a(r) = \sum_k a_k e^{ikr}, \quad (5.12)$$

где V — объем образца (среды, в которой распространяются волны). Мы считаем, что волновой вектор k является дискретной переменной. При необходимости можно обычным образом перейти от суммирования по k к интегрированию:

$$(2\pi)^3 \sum_k = V \int dk. \quad (5.13)$$

Преобразование Фурье (5.12) является каноническим, но не унимодальным. Это означает, что уравнение Гамильтона (5.6) сохраняет свой канонический вид, однако новый гамильтониан отличается от старого множителем — делится на объем образца:

$$i \frac{\partial a_k}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}(a_k, a_k^*)}{\delta a_k^*}, \quad \mathcal{H}(a_k, a_k^*) = \mathcal{H}\{a(r), a^*(r)\} / V. \quad (5.14)$$

Существенно то, что квадратичная часть гамильтониана оказывается диагональной по волновым векторам. Именно:

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{i,j} \sum_k [A_{ij}(k) a_i(k) a_j^*(k) + \frac{1}{2} (B_{ij}^*(k) a_i(k) a_j(-k) + \text{к.с.})], \quad (5.15)$$

$$A_k \equiv A(k) = \int dR A(R) \exp ikR, \quad B_k = \int dR B(R) \exp ikR. \quad (5.16)$$

Разумеется, это целиком связано с пространственной однородностью среды.

Гамильтониан (5.15) можно диагонализировать по "типам волн" i, j с помощью линейного преобразования

$$b_i(k) = \sum_j [u_{ij}(k) a_j(k) + v_{ij}(k) a_j^*(-k)], \quad (5.17)$$

матрицы \hat{u} и \hat{v} которого удовлетворяют условиям каноничности (П2.8). При соответствующем выборе этих матриц гамильтониан \mathcal{H}_2 приобретает вид

$$\mathcal{H}_2 = \sum_j \sum_k \omega_j(\mathbf{k}) b_j(\mathbf{k}) b_j^*(\mathbf{k}). \quad (5.18)$$

В простейшем случае одной ветви колебаний $i = j = 1$ коэффициенты преобразования (5.17) легко записать в явном виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{k}) &= [(A_k + \omega_k)/2\omega_k]^{1/2}, \quad \omega_k \equiv \omega(\mathbf{k}) = \text{sign } A_k (A_k^2 - |B_k|^2)^{1/2}, \\ v(\mathbf{k}) &= -(B_k/|B_k|) [(A_k - \omega_k)/2\omega_k]^{1/2}, \quad u_k^2 - |v_k|^2 = 1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Подчеркнем, что знак ω_k совпадает со знаком A_k (В.Е. Захаров, [106]). Отрицательные значения ω_k означают, что энергия среды уменьшается при возбуждении волн. Это возможно в отсутствие термодинамического равновесия. При существовании нескольких ветвей это сделать не так просто, хотя частоты $\omega_j(\mathbf{k})$ можно определить и не находя преобразования (5.17). Для этого нужно записать уравнения движения (5.14) для $a_j(\mathbf{k})$:

$$\frac{\partial a_j(\mathbf{k})}{\partial t} + i \sum_l [A_{lj}(\mathbf{k}) a_l(\mathbf{k}) + B_{lj}(\mathbf{k}) a_l^*(-\mathbf{k})] = 0,$$

$$\frac{\partial a_j^*(-\mathbf{k})}{\partial t} - i \sum_l [A_{lj}^*(\mathbf{k}) a_l^*(-\mathbf{k}) + B_{lj}^*(-\mathbf{k}) a_l(\mathbf{k})] = 0$$

и, подставляя $a, a^* \sim e^{-i\omega t}$, получить алгебраическое "секулярное" уравнение для определения частот ω :

$$\begin{vmatrix} A_{lj} - \omega \delta_{lj} & B_{lj} \\ B_{lj}^* & A_{lj}^* + \omega \delta_{lj} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.20)$$

Здесь уместно подчеркнуть, что канонические переменные b, b^* , в отличие от квантовомеханических бозе-операторов, являются размерными величинами. Их размерность легко определить из (5.18), зная, что \mathcal{H} имеет размерность плотности энергии, а ω_k — частоты:

$$[\mathcal{H}] = \text{г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^2, \quad [\omega] = \text{с}^{-1}, \quad [b_k^2] = \text{см}^{-1} \cdot 2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Как и следовало ожидать, размерность Vb^2 совпадает с размерностью постоянной Планка. Естественно также, что наш классический подход справедлив, когда $V|b|^2 \gg \hbar$, и квантовомеханические числа заполнения $V|b|^2/\hbar$ велики по сравнению с единицей.

Переменные $b_j(\mathbf{k})$ являются нормальными переменными линейной теории и поэтому особенно удобны для исследования нелинейных проблем. Специфические "линейные" трудности, присущие исследуемой модели среды, преодолеваются один раз: при поиске переменных b_j . В этих переменных линеаризованные уравнения движения становятся тривиальными:

$$\frac{\partial b_j(\mathbf{k})}{\partial t} + i\omega_j(\mathbf{k}) b_j(\mathbf{k}) = 0, \quad (5.21)$$

они описывают распространение свободных волн с законами дисперсии $\omega_j(\mathbf{k})$. Вся "линейная" информация, необходимая для изучения нелиней-

ных проблем, заключена в функциях $\omega_j(k)$. Вся информация о взаимодействии волн содержится в остальных коэффициентах разложения \mathcal{H} в ряд по степеням b_j :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad \mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \dots \quad (5.22)$$

Физический смысл \mathcal{H}_3 , \mathcal{H}_4 легко понять из аналогии с квантовой механикой. Гамильтониан \mathcal{H}_3 описывает трехволновые процессы. В простом случае одного типа волн

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = & \frac{1}{2} \sum_{123} (V_q b_1 b_2 b_3^* + \text{к.с.}) \delta(1 - 2 - 3) + \\ & + \frac{1}{3} \sum_{123} (U_q b_1^* b_2^* b_3^* + \text{к.с.}) \delta(1 + 2 + 3). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь и далее мы будем использовать целый ряд сокращенных обозначений: b_1, b_2, \dots есть $b(k_1), b(k_2), \delta(\dots)$ — символ Кронекера, $\delta(1 + 2 + 3)$ есть $\delta(k_1 + k_2 + k_3)$, что выражает закон сохранения импульса. Далее, мультииндекс $q = (k_1, k_2, k_3)$, так что $V_q = V_{123} = V(k_1, k_2, k_3)$. Наконец,

$$\sum_{123} \equiv \sum_{k_1, k_2, k_3}, \quad \sum_{1+2=3} \equiv \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3), \quad \sum_{1234} = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4}.$$

Гамильтониан \mathcal{H}_4 описывает процессы с участием четырех волн:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4 = & \frac{1}{2} \sum_{1+2=3+4} W_p b_1^* b_2^* b_3 b_4 + \frac{1}{4} \sum_{1=2+3+4} (G_p b_1 b_2^* b_3^* b_4^* + \text{к.с.}) + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{1+2+3+4=0} (R_p^* b_1 b_2 b_3 b_4 + \text{к.с.}), \quad p \equiv (k_1, k_2, k_3, k_4), \\ \sum_{1+2=3+4} \equiv & \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Может возникнуть вопрос — до какого порядка по b, b^* следует разлагать гамильтониан \mathcal{H} ? На такой общий вопрос можно дать столь же общий ответ: " \mathcal{H}_5 и члены более высокого порядка, вообще говоря, учитывать не следует". Аргументируется он так: поскольку разложение в ряд происходит по малому параметру, каждый последующий член меньше предыдущего и динамика системы волн будет определяться самым первым членом разложения в \mathcal{H}_{int} , т.е. \mathcal{H}_3 . Однако трехволновые процессы могут оказаться запрещенными законами сохранения энергии-импульса. Действительно, если закон дисперсии волн ω_k — квадратичный со щелью:

$$\omega_k = \omega_0 + \alpha k^2, \quad (5.25)$$

то для малых k трехволновые процессы распада

$$\omega(k) = \omega(k') + \omega(k - k') \quad (5.26)$$

запрещены, ибо волна с минимальной энергией не может далее распадаться. В этом случае говорят, что спектр волн является нераспадным. Более детальный анализ (5.25) и (5.26) показывает, что трехволновые процессы (5.26) запрещены при $\alpha k^2 < 2\omega_0$. Можно показать, что нераспадными являются также степенные законы дисперсии без щели: $\omega_k \propto k^\beta$, когда $\beta < 1$. Во всех этих случаях нужно учесть следующий член разложения \mathcal{H}_{int} , т.е. \mathcal{H}_4 .

Важно, что процессы с участием четырех волн, описываемые этим гамильтонианом, разрешены всегда. Это видно из законов сохранения для процессов рассеяния:

$$\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}') = \omega(\mathbf{k} + \mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}' + \mathbf{k}), \quad (5.27)$$

которые разрешены при $k \rightarrow 0$ при любом законе дисперсии. Следовательно, \mathcal{H}_4 и будет определять динамику системы волн с нераспадным спектром, а следующие члены разложения $\mathcal{H}_5, \mathcal{H}_6, \dots$ будут описывать малые и, как правило, несущественные поправки.

Разумеется, реальная действительность и на сей раз богаче этой формальной схемы. Например, для СВ в ФМ даже в распадной части спектра необходимо учитывать не только \mathcal{H}_3 , но и \mathcal{H}_4 . Дело в том, что гамильтониан \mathcal{H}_3 возникает только из-за магнитного диполь-дипольного взаимодействия и имеет релятивистскую малость в сравнении с гамильтонианом \mathcal{H}_4 , обусловленным обменным взаимодействием. В задачах о динамике волн на поверхности жидкости известны случаи, когда необходимо учитывать \mathcal{H}_5 . Тем не менее, если нет специальных обстоятельств, в распадной части спектра достаточно учитывать только трехволновые процессы \mathcal{H}_3 , а в нераспадной — четырехволновые \mathcal{H}_4 .

5.4. Динамическая теория возмущений — исключение "нерезонансных" членов в гамильтониане. Интуитивно ясно, что при нераспадном законе дисперсии, когда трехволновые процессы запрещены законами сохранения, гамильтониан взаимодействия \mathcal{H}_3 , описывающий эти процессы, в каком-то смысле оказывается несущественным. Сейчас мы покажем, что в этом случае можно перейти к новым каноническим переменным c_k, c_k^* таким, что $\mathcal{H}_3\{c_k, c_k^*\} = 0$. При этом квадратичная часть гамильтониана сохраняет прежний вид

$$\mathcal{H}_2 = \sum_k \omega_k c_k^* c_k, \quad (5.28)$$

а в четырехволновом гамильтониане взаимодействия возникнут дополнительные слагаемые, квадратичные по матричным элементам $\mathcal{H}_3\{b_k, b_k^*\}$ в старых переменных. Эта цель достигается квазилинейным преобразованием

$$b_k = c_k - \sum_{12} \{U_{k12} c_1^* c_2^* \delta(k+1+2) (\omega_k + \omega_1 + \omega_2)^{-1} + (V_{k,12} c_1 c_2 - 2V_{2,k1} c_1^* c_2) \delta(k-1-2) (\omega_k - \omega_1 - \omega_2)^{-1}\}. \quad (5.29)$$

Здесь $\bar{k} \equiv -k$. Преобразование (5.29) является каноническим приближенно, с необходимой точностью. В этом можно убедиться с помощью соотношений (П2.6) и (П2.7).

Подставляя (5.29) в гамильтониан (5.22), легко убедиться, что действительно $\mathcal{H}_2\{c_k, c_k^*\}$ сохраняет вид (5.28), $\mathcal{H}_3 = 0$, а матричные элементы \mathcal{H}_4 приобретают дополнительные слагаемые. Мы выпишем их только для наиболее существенных для нас в дальнейшем процессов рассеяния $2 \rightarrow 2$:

$$\mathcal{H}_4 = \frac{1}{2} \sum_{1+2=3+4} T_{12,34} c_1^* c_2^* c_3 c_4,$$

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv p,$$

$$\begin{aligned}
T_p = W_p - 2 \frac{U_{(1+2)12} U_{(3+4)34}^*}{\omega_{(3+4)} + \omega_3 + \omega_4} - 2 \frac{V_{1+2,12}^* V_{3+4,34}}{\omega_{(1+2)} - \omega_1 - \omega_2} - \\
- 2 \frac{V_{1,3(1-3)} V_{4,2(4-2)}}{\omega_{(4-2)} + \omega_2 - \omega_4} - 2 \frac{V_{2,4(2-4)}^* V_{3,1(3-1)}}{\omega_{(3-1)} + \omega_1 - \omega_3} - \\
- 2 \frac{V_{2,3(3-2)}^* V_{4,1(4-1)}}{\omega_{(4-1)} + \omega_1 - \omega_4} - 2 \frac{V_{1,4(1-4)}^* V_{3,2(3-2)}}{\omega_{(3-2)} + \omega_2 - \omega_3}. \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Здесь $(j \pm i) \equiv k_j + k_i$. Дополнительные слагаемые в T_p описывают процессы рассеяния, возникающие во втором порядке теории возмущений по трехволновым процессам. При этом на промежуточном этапе возникает "виртуальная" вынужденная волна, для которой не выполняется условие резонанса. В этой интерпретации каждому слагаемому в (5.30) можно сопоставить картинку:

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc}
\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 4 \end{array} & = & \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 4 \end{array} & + 2 & \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 4 \end{array} & + 2 & \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 4 \end{array} \\
& \begin{array}{cccc}
\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 4 \end{array} & + 2 & \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 4 \end{array} & + 2 & \begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 3 \end{array} & + 2 & \begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 3 \end{array}
\end{array} \quad (5.31)
\end{aligned}$$

В заключение необходимо напомнить, что вся описанная процедура принципиально основана на том, что преобразование (5.29) близко к линейному, что возможно, если частотные знаменатели не обращаются в нуль. А для этого необходимо, чтобы спектр волн был нераспадным. Другими словами, каноническими преобразованиями можно исключить только нерезонансные члены гамильтониана взаимодействия, для которых законы сохранения энергии-импульса не выполняются. Можно также сказать, что наилучшими в квазилинейном смысле каноническими переменными являются такие, для которых гамильтониан не содержит слагаемых, соответствующих запрещенным процессам.

§ 6. Гамильтониан спиновых волн в ферромагнетиках

Мы уже отмечали в первой главе, что классическим объектом для изучения нелинейной динамики СВ является кубический ферромагнетик — железо-иттриевый гранат — ЖИГ. При низких температурах относительные движения магнитных подрешеток (оптические магноны) не возбуждены, поэтому можно считать, что ЖИГ является ферромагнетиком. Именно поэтому мы начнем с гамильтониана СВ в ФМ с кубической симметрией. Ориентируясь на эксперимент, будем считать, во-первых, что внешнее магнитное поле H является пространственно-однородным. Во-вторых, что

образец имеет форму эллипсоида. Тогда магнитное поле внутри него также будет пространственно-однородным [3]:

$$H_{i, \alpha} = H_{\alpha} - 4\pi N_{\alpha\beta} M_{\beta}, \quad (6.1)$$

где M — намагниченность, а $N_{\alpha\beta}$ — тензор размагничивающих коэффициентов, сумма диагональных элементов которого равна единице. Наиболее технологичны в изготовлении образцы в форме сферы, длинного цилиндра и плоского диска. Для сферы, длинного (вдоль оси z) цилиндра и для плоского (поперек оси z) диска имеем соответственно

$$N_{\alpha\beta} = 1/3 \delta_{\alpha\beta}, \quad (6.2)$$

$$N_z \equiv N_{zz} = 0, \quad N_{\alpha\beta} = 1/2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, \quad (6.3)$$

$$N_z \equiv N_{zz} = 1, \quad N_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = x, y. \quad (6.4)$$

И наконец, ограничимся случаем, когда поле H ориентировано по одной из главных осей эллипсоида, которая в свою очередь совпадает с одной из осей симметрии кристалла: осью четвертого (100), третьего (111) или второго порядка (110). Этого достаточно для того, чтобы намагниченность M в невозбужденном ФМ была параллельна H .

6.1. Спектр спиновых волн. Приведем здесь результат вычисления частот СВ, проделанного в последующих параграфах:

$$\omega_k^2 = A_k^2 - |B_k|^2, \quad B_k = 1/2 \omega_M \sin^2 \theta e^{2i\varphi} + \beta \omega_a, \quad (6.5)$$

$$A_k = \omega_H - \omega_M N_z + \alpha \omega_a + \omega_{ex} (ak)^2 + 1/2 \omega_M \sin^2 \theta. \quad (6.6)$$

Здесь θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора k в сферической системе координат, ось которой ориентирована вдоль M , угол φ отсчитывается от направления (100) в плоскости, перпендикулярной M , ω_H — круговая частота прецессии магнитного момента во внешнем поле:

$$\omega_H = gH, \quad (6.7)$$

где $g = \mu_0/\hbar$ — магнетомеханическое отношение для электрона, μ_0 — магнетон Бора, $g = 2\pi \cdot 2,8$ МГц/Э — величина размерная, ее не следует путать с безразмерным g -фактором, примерно равным двойке у электрона.

Частоты ω_M и ω_a характеризуют магнитное диполь-дипольное взаимодействие и кристаллографическую анизотропию:

$$\omega_M = 4\pi gM, \quad (6.7)$$

$$\omega_a = gH_a. \quad (6.8)$$

Связь поля анизотропии H_a с общепринятой константой кубической анизотропии четвертого порядка K определена в § 10 формулой (10.3). Коэффициенты α и β зависят от ориентации магнитного поля H (и совпадающего с ней направления намагниченности) относительно кристаллографических осей (табл. 6.1).

Частота ω_{ex} характеризует обменное взаимодействие, по порядку величины $\hbar\omega_{ex} \sim T_c$, где T_c — температура магнитного упорядочения, обычно называемая температурой Кюри, a — постоянная решетки. Величину $\omega_{ex} a^2/2gM$ иногда называют константой неоднородного обмена и обозначают буквой α .

Таблица 6.1

Коэффициенты, характеризующие вклад энергии анизотропии в спектр СВ (6.5) и (6.25)

Ориентация намагниченности	α	β	γ
[100]	1	0	-9
[111]	-2/3	0	6
[110]	-1/2	-3/2	9/2

Обозначения в формуле (6.5) специально выбраны так, чтобы было удобно сравнивать вклады различных взаимодействий в частоту СВ ω_k (а впоследствии и в коэффициенты \mathcal{H}_{int}). В качестве характерного масштаба удобно выбрать частоту ω_M и соответствующее ей магнитное поле $4\pi M$. Для ЖИГ при комнатной температуре $4\pi M = 1,75$ кЭ, $H_{ex} = \omega_{ex}/g = 390$ кЭ, $H_a = 0,084$ кЭ. При анализе экспериментальных данных полезно помнить, что полю $H = 1$ кЭ соответствует линейная частота $\nu = \omega/2\pi$, равная $2,8 \cdot 10^9$ Гц, круговая частота $1,76 \cdot 10^{10}$ с⁻¹ и температура 0,13 К. Видно, что в выбранном масштабе кубическая анизотропия ЖИГ является малой: $\omega_a/\omega_M = 0,05$. Мала она также и в ряде других кубических ФМ.

В первом приближении такие кристаллы можно считать изотропными. Это, однако, не означает, что кристаллографической анизотропией можно полностью пренебречь. Впоследствии мы увидим, что некоторые яркие проявления нелинейной динамики СВ принципиально связаны с наличием анизотропии.

Обменная частота ω_{ex} существенно превышает ω_M . Так для ЖИГ $\omega_{ex}/\omega_M \approx 220$. Из формулы (6.5) видно, что можно определить характерное значение волнового вектора k_M , при котором сравниваются вклады диполь-дипольного и обменного взаимодействий

$$\omega_{ex}(ak_M)^2 = \omega_M. \quad (6.9)$$

Для ЖИГ $ak_M = 0,07$ и соответственно $k_M = 7 \cdot 10^5$ см⁻¹. В характерных экспериментах по параметрическому возбуждению СВ частота накачки лежит в диапазоне 10 или 36 ГГц (1 ГГц = 10^9 Гц), при этом в зависимости от величины H волновой вектор СВ может изменяться от $5 \cdot 10^3$ до $5 \cdot 10^6$ см⁻¹, следовательно, для нас оказываются существенными как диполь-дипольное, так и обменное взаимодействия. Зависимость (6.5) частоты СВ от k является довольно сложной. Ее можно изобразить (рис. 6.1) в виде семейства поверхностей постоянной частоты. При $\omega_k \gg \omega_M$ их форма близка к сферической:

$$\omega_k = \omega_H - \omega_M N_z + \omega_{ex}(ak)^2 + \frac{1}{2}\omega_M \sin^2 \theta. \quad (6.10)$$

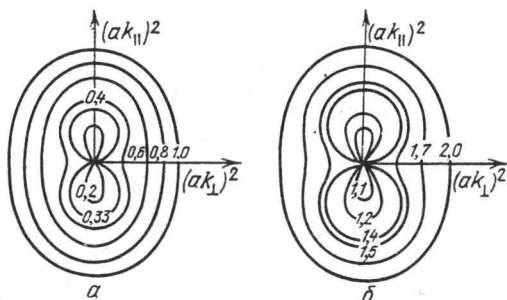
При $\omega_k \sim \omega_M$ возникает перетяжка на экваторе поверхности $\omega_k = \text{const}$, и она напоминает гантель. При еще меньших k эта поверхность напоминает два скругленных конуса, соприкасающихся остриями. Как видно, при

$k \ll k_M$ важную роль играет зависимость ω_k от направления k при $k \rightarrow 0$. Эта неаналитичность обусловлена дальнедействующим характером диполь-дипольного взаимодействия. Заканчивая анализ закона дисперсии СВ (6.5), мы хотим сделать еще два замечания. Во-первых, спектр СВ имеет щель. Минимальную частоту имеют СВ с $k \rightarrow 0$, $\theta = 0$. В пренебрежении анизотропией

$$\omega_{\min} = \omega_H - \omega_M N_z = g(H - 4\pi N_z M). \quad (6.11)$$

Как видно из (6.1), эта частота соответствует прецессии магнитного момента во внутреннем поле H_i : $\omega_M = gH_i$.

При $H < 4\pi N_z M$ формула (6.11) уже не справедлива. Из (6.5) при этом следует, что ω_k^2 становится отрицательной при $k \rightarrow 0$, $\theta = 0$ и, следовательно,



Р и с. 6.1. Семейство поверхностей постоянной частоты для изотропного ферромагнетика: внутреннее поле $H_i = H - 4\pi N_z M$ выбрано равным 0,1 от $H_M = 4\pi M$ (а); $H_i = H_M$ (б). По вертикали отложена величина $(ak_{\parallel})^2$, по горизонтали — $(ak_{\perp})^2$. Цифры у кривых — отношение ω_k/ω_M

частота СВ становится чисто мнимой. В свою очередь это означает экспоненциальный рост амплитуд СВ, ибо $a_k(t) \propto \exp(-i\omega_k t)$. Таким образом, при $H < 4\pi N_z M$ однородно намагниченное состояние ФМ оказывается неустойчивым, и образец разбивается на домены. Второе замечание касается области применимости формулы (6.5). Она справедлива только при $kL \gg 1$, где L — характерный размер образца. При меньших k само понятие волнового вектора теряет смысл, так как собственные колебательные моды образца уже не являются плоскими бегущими волнами. В ФМ такие моды принято называть *уокеровскими модами* (колебаний намагниченности). Они являются решением магнитостатического уравнения

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0 \quad (6.12)$$

с соответствующими граничными условиями на поверхности образца [3, 7, 34]. Простейшей уокеровской модой является однородная прецессия намагниченности — ОП. Можно сказать, что ОП — это СВ с $k = 0$. Ее собственная частота ω_0 в пренебрежении кристаллографической анизотропией равна

$$\omega_0^2 = [\omega_H - \omega_M N_z + \frac{1}{2}\omega_M(N_x + N_y)]^2 - [\frac{1}{2}\omega_M(N_x - N_y)]^2. \quad (6.13)$$

Особенно простое выражение получается для сферы: $\omega_0 = gH$. Выражения для частот других уокеровских мод можно найти в [3, 7].

6.2. Оценка величины матричных элементов гамильтониана взаимодействия. Прежде всего рассмотрим вклад магнитного диполь-дипольного взаимодействия. Как хорошо известно [3], плотность его энергии W_M есть

$$8\pi W_M = H_M^2, \quad (6.14)$$

где H_M — это магнитное поле, создаваемое намагниченностью M . Из уравнений магнитостатики (6.12) следует, что

$$H_M = -4\pi M. \quad (6.15)$$

Эта оценка отличается от точного результата (6.1), приведенного без вывода, только фактором $N_{\alpha\beta} \approx 1$, учитывающим форму образца. Из (6.14), (6.15) следует

$$W_M \approx 2\pi M^2. \quad (6.16)$$

Предположим теперь, что в ФМ распространяется СВ, амплитуда которой характеризуется углом прецессии магнитного момента ξ_k . Разлагая W_M в ряд по ξ_k , получим

$$W_M = W_0 + W_2 + W_3 + \dots \approx W_0 + 2\pi M^2 (A\xi_k^2 + B\xi_k^3 + C\xi_k^4 + \dots). \quad (6.17)$$

Здесь безразмерные числовые коэффициенты A, B, C порядка единицы, ибо при $\xi \sim 1$ все члены ряда должны быть одного порядка величины. С другой стороны, квадратичное по ξ_k слагаемое должно иметь вид $\mathcal{H}_2 = \omega |a_k|^2$. Здесь характерная частота ω не может быть ни чем иным, кроме как частотой прецессии магнитного момента в поле H_M , т.е. $\omega = \omega_M$. Сравнивая W_2 и \mathcal{H}_2 , имеем

$$\xi_k \approx a_k (2g/M)^{1/2}. \quad (6.18)$$

Подставляя ξ_k в разложение (6.17) для W_M и опуская несущественные числовые коэффициенты B и C , получаем оценки для диполь-дипольного вклада в матричные элементы трех- и четырехволнового гамильтониана взаимодействия:

$$V_M \approx \omega_M (2g/M)^{1/2} \rightarrow \omega_M (g/2M)^{1/2}, \quad (6.19)$$

$$W_M \approx \omega_M 2g/M \rightarrow \omega_M g/2M. \quad (6.20)$$

Справа от стрелки приведены точные выражения для матричных элементов. Отметим, что оценки (6.19), (6.20) (с точностью до чисел) можно получить просто из соображений размерности. Для этого из величин, характеризующих задачу, — намагниченности M и магнитомеханического отношения g — необходимо построить комбинации $M^\alpha g^\beta$, имеющие размерности матричных элементов V и W .

Можно показать, что остальные взаимодействия — обменное и кристаллографической анизотропии — не приводят к трехволновым процессам. Оценку для их вклада в \mathcal{H}_4 можно получить из (6.20), заменяя ω_M на соответствующие характерные частоты

$$W_{\text{ex}} \approx \omega_{\text{ex}} (ak)^2 g/2M, \quad W_a \approx g\omega_a/2M. \quad (6.21)$$

Полученных здесь оценок матричных элементов гамильтониана взаимодействия бывает достаточно для вычисления грубых характеристик СВ, интегрально зависящих от матричных элементов \mathcal{H}_{int} , например, темпера-

турной зависимости намагниченности, частоты и затухания СВ. Однако другие нелинейные характеристики спиновой динамики, о которых будет идти речь в последующих параграфах, могут кардинально зависеть от тонких свойств матричных элементов \mathcal{H}_{int} — деталей их угловых зависимостей и т.п. Поэтому остается единственный, хотя и не очень приятный путь — аккуратно вычислить \mathcal{H}_{int} , учитывая все сколько-нибудь заметные взаимодействия: обменное, дипольное, анизотропию и т.д. Все это будет проделано в §§ 8, 9. Здесь мы приведем только результаты вычислений.

6.3. Трехмагнетонный гамильтониан. Вычисления показывают, что коэффициенты гамильтониана \mathcal{H}_3 , задаваемого формулой (5.23), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{1,23} &= \frac{1}{2}[(V_3 + V_2)u_1 u_2 u_3 + (V_2^* + V_3^*)v_1^* v_2^* v_3 + (V_1 v_1^* + V_1^* u_1) * \\ &* (u_2 v_3 + v_2 u_3) + v_1^* (V_2 u_2 v_3 + V_3 v_2 u_3) + u_1 (V_2^* v_2 u_3 + V_3^* u_2 v_3)], \\ \tilde{U}_{123} &= \frac{1}{2}[V_1 u_1 (v_2 u_3 + u_2 v_3) + V_2 u_2 (u_1 v_3 + v_1 u_3) + \\ &+ V_3 u_3 (v_1 u_2 + u_1 v_2) + V_1^* v_1 (v_2 u_3 + u_2 v_3) + \\ &+ V_2^* v_2 (u_1 v_3 + v_1 u_3) + V_3^* v_3 (u_1 v_2 + v_1 u_2)], \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv V(k_1), \dots, V(k) = -V k_z (k_x + i k_y) / k^2 = \\ &= -V \sin \theta_k \cos \theta_k \exp(i\varphi_k), \quad V = \omega_M (g/2M)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

u_k и v_k — коэффициенты линейного канонического диагонализующего преобразования (5.19), в котором частота СВ ω_k и коэффициенты A_k и B_k задаются формулами (6.5). Видно, что по порядку величины $V_{1,23}$ определяется простой оценкой (6.19). Для дальнейшего, однако, будут существенны угловые зависимости $V_{1,23}$, в частности то, что $V_{1,23}$ обращается в нуль, если все волновые векторы k_1, k_2, k_3 ориентированы вдоль или поперек M , т.е. $\theta_k = 0$ или $\theta_k = \pi/2$.

6.4. Четырехмагнетонный гамильтониан взаимодействия. Общее выражение для матричных элементов \mathcal{H}_4 (5.24) слишком сложно, чтобы его здесь приводить. Поэтому мы рассмотрим несколько предельных случаев. Именно тех, которые понадобятся в дальнейшем. Начнем с ситуации, когда ω_M мало в сравнении с ω_H или $\omega_{\text{ex}}(ak)^2$. При этом $A_k \gg |B_k|$, и в \mathcal{H}_4 можно не делать $u - v$ -преобразования, считая, что $a_k \approx b_k$. Тогда

$$\begin{aligned} W_{12,34} &= E_{12} + E_{34} + \frac{1}{4}(C_{13} + C_{14} + C_{23} + C_{24}) - \\ &- \frac{1}{4}(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) + W_a, \\ E_{kk'} &= -\omega_{\text{ex}} a^2 k \cdot k' g/2M, \quad C_{kk'} = C(k - k'), \\ C(k) &= (g/M) \omega_M (k_z/k)^2, \quad C(0) = \omega_M N_z g/M, \\ D_k &= |B_k| g/M = (g/M) \omega_M (k_+/k)^2, \quad k_+ = k_x + i k_y, \\ W_a &= \beta \omega_a g/2M. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Значения β приведены в табл. 6.1,

$$G_{1,234} = -\frac{1}{3} (g/M) (B_2 + B_3 + B_4). \quad (6.25)$$

Отказавшись от предположения $A_k \gg |B_k|$, мы запишем выражения для $W_{12,34}$ в случае, когда волновые векторы k_1, k_2, k_3 и k_4 удовлетворяют специальным соотношениям

$$S_W(k, k') = W(k, -k; k', -k') = W_1(u_k^2 u_{k'}^2 + v_k^2 v_{k'}^2) + 4W_2 u_k u_{k'} v_k v_{k'} - \\ - \frac{1}{2}(g/M) \{v_k u_{k'} [u_k u_{k'} (B_k^* + 2B_{k'}^*) + v_k v_{k'}^* (B_{k'}^* + 2B_k^*)] + \\ + v_k^* u_k [u_k u_{k'} (2B_k + B_{k'}) + v_k v_{k'}^* (2B_{k'} + B_k)]\}, \quad (6.26)$$

$$T_W(k, k') = \frac{1}{2} [W(k, k'; k, k') + W(k, -k'; k, -k')] = \\ = 2W_1 \operatorname{Re} u_k u_{k'} v_k v_{k'} + W_2 (u_k^2 + |v_k|^2) (u_{k'}^2 + |v_{k'}|^2) - \\ - \frac{1}{2}(g/M) [(u_k^2 + |v_k|^2) \operatorname{Re}(B_k + 2B_{k'}) v_k^* u_{k'} + \\ + (u_{k'}^2 + |v_{k'}|^2) \operatorname{Re}(2B_k + B_{k'}) v_{k'}^* u_k], \quad (6.27)$$

$$W_1 = [\omega_{\text{ex}}(ak)^2 - \omega_M] g/2M + W_a, \quad (6.28)$$

$$W_2 = \omega_M (N_z - 1) g/2M + W_a.$$

Кроме того, в четырехволновое взаимодействие существенный вклад вносят члены трехволнового гамильтониана во втором порядке теории возмущения. Общая формула для этого вклада приведена в § 5. Здесь нас интересует ее частный случай при $k_2 = k_3, k_1 = k_4; k_2 = -k_1, k_4 = -k_3$:

$$S_{12} = S_W(k_1, k_2) - 2\tilde{U}_{011}^* \tilde{U}_{022} (\omega_0 + 2\omega_k)^{-1} - \\ - 2\operatorname{Re} \tilde{V}_{011}^* \tilde{V}_{022} (\omega_0 - 2\omega_k)^{-1} - 4\tilde{V}_{1,25} \tilde{V}_{2,15}^* / \omega_5 - 4\tilde{V}_{1,26} \tilde{V}_{2,15}^* / \omega_6, \quad (6.29)$$

$$T_{12} = T_W(k_1, k_2) - |\tilde{U}_{216}|^2 (\omega_6 + 2\omega_1)^{-1} - |\tilde{U}_{125}|^2 (\omega_5 + 2\omega_k)^{-1} - \\ - |V_{6,12}|^2 (\omega_6 - 2\omega_k)^{-1} - |V_{5,12}|^2 (\omega_5 - 2\omega_k)^{-1} - \\ - 4\operatorname{Re}(\tilde{V}_{1,10} \tilde{V}_{2,20}) / \omega_0 - 2(|V_{1,25}|^2 + |V_{2,15}|^2) / \omega_5 - \\ - 2(|V_{1,26}|^2 + |V_{2,16}|^2) / \omega_6. \quad (6.30)$$

Здесь $k_5 = k_1 - k_2, k_6 = k_1 + k_2, \omega_0$ — частота ОП, и предполагается, что $\omega(k_1) = \omega(k_2) = \omega(k)$. Второе и третье слагаемые в (6.30) обусловлены взаимодействием пар СВ с $\pm k_1$ и $\pm k_2$ через "виртуальную" ОП, последние два слагаемых — взаимодействием через "виртуальные" СВ с $k = k_1 \pm k_2$. По порядку величины слагаемые (6.29), (6.30) такие же, как и непосредственный вклад диполь-дипольного взаимодействия в W , т.е. порядка πg^2 в полном соответствии с оценкой (6.20). Однако в важном частном случае, когда $k_1 \perp M$ и $k_2 \perp M$ (т.е. $\theta(k_1) = \theta(k_2) = \pi/2$), члены третьего порядка вообще не вносят вклад в $S(k, k')$ и $T(k, k')$.

Важно отметить, что в формулах (6.24)–(6.28) частота анизотропии ω_a умножается на числовой коэффициент $9 \div 11$, в то время как ω_M делится пополам. Таким образом, относительный вклад ω_a в сравнении с ω_M увеличивается в 20 раз, что приводит к сильной кристаллографической анизотропии четырехволнового взаимодействия в "почти изотропных" ФМ с малым отношением ω_a/ω_M . Напомним, что в классическом ФМ — ЖИГ — $\omega_a/\omega_M \approx 1/20$.

В выражения для W_p входит размагничивающий фактор N_z (z — направление намагниченности). Это приводит к зависимости W от формы образца и направления намагниченности. Так, для нормально намагниченного диска $N_z = 1$, для касательно намагниченного диска $N_z = 0$. Все перечисленное дает экспериментатору редкую возможность изменять по своему желанию коэффициенты гамильтониана взаимодействия СВ. Для удобства работающих с экспериментаторами теоретиков можно даже написать на ручках установки, какие именно коэффициенты гамильтониана они изменяют.

§ 7. Гамильтониан спиновых волн в антиферромагнетиках

7.1. Спектр СВ в АФМ. Простейшие АФМ имеют две магнитные подрешетки и соответственно две ветви СВ. Квадратичная часть гамильтониана имеет стандартный вид (5.18):

$$\mathcal{H}_2 = \sum_k (\omega_k a_k^* a_k + \Omega_k b_k^* b_k). \quad (7.1)$$

Мы привели ее для того, чтобы договориться об обозначениях частот СВ в двух ветвях ω_k и Ω_k и нормальных канонических переменных a_k, b_k , в которых квадратичная часть гамильтониана диагональна. В одноосных АФМ с анизотропией типа "легкая ось" (АФМ ЛО) поле кристаллографической анизотропии H_a стремится удержать намагниченности параллельно этой оси (ее обычно называют осью z).

По аналогии с ФМ можно было бы предположить, что частоты СВ с $k \rightarrow 0$ должны соответствовать прецессии намагниченности подрешеток в поле H_a , т.е. $\omega_0 = \Omega_0 = \omega_a$, где

$$\omega_a = gH_a. \quad (7.2)$$

Это, однако, неверно. Дело в том, что на намагниченность одной подрешетки M_1 , ориентированной вверх, действует поле анизотропии H_{a1} , ориентированное также вверх: $H_{a1} = H_a$. На вторую подрешетку ($M_2 = -M_1$) действует другое поле $H_{a2} = -H_{a1}$. В результате подрешетки "хотят" прецессировать в разные стороны. При этом неизбежно должна нарушаться антипараллельность M_1 и M_2 , чему препятствует сильное обменное взаимодействие между подрешетками. В результате оказывается, что [3]

$$\omega_0^2 = \Omega_0^2 = (\omega_a + \omega_{ex})^2 - \omega_{ex}^2 \approx 2\omega_a\omega_{ex}, \quad \omega_{ex} = gH_{ex}. \quad (7.3)$$

Здесь $\omega_{ex} = gH_{ex}$ характеризует величину антиферромагнитного обмена между подрешетками. Иногда для такой характеристики используется безразмерная "обменная константа" B : $H_{ex} = BM$.

Если к АФМ ЛО приложить внешнее магнитное поле вдоль оси c , то эквивалентность подрешеток, приводящая к совпадению частот ω_0 и Ω_0 , нарушается. При этом

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 &= 2\omega_a\omega_{ex} + \omega_H^2, & \omega_0 &= 2\omega_a\omega_{ex} - \omega_H^2, \\ \omega_H &= gH. \end{aligned} \quad (7.4)$$

В критическом поле $H = (2H_a H_{ex})^{1/2}$ частота ω_0 обращается в нуль и развивается неустойчивость СВ, приводящая к смене основного состояния — опрокидыванию подрешеток [3].

В одноосных АФМ с анизотропией типа "легкая плоскость" (АФМ ЛП) поле анизотропии разворачивает моменты M_1, M_2 в плоскость, перпендикулярную оси c . Возможность почти беспрепятственных колебаний моментов в этой плоскости приводит к тому, что одна из частот СВ при $k \rightarrow 0$ оказывается малой — порядка gH . Вычисления, которые мы проделаем в следующем параграфе, показывают, что

$$\begin{aligned}\omega_k^2 &= \omega_H(\omega_H + \omega_D) + 2\omega_{ex}(\omega_n + \omega_{ph}) + v_1^2 k_z^2 + v_2^2 k_{\perp}^2, \\ \Omega_k^2 &= 2\omega_a \omega_{ex} + \omega_k^2.\end{aligned}\quad (7.5)$$

Здесь $H \perp c$, v_1 и v_2 — продольная и поперечная скорости СВ, по порядку величины $v_{1,2} \approx v_{ex} a$, где a — постоянная решетки, $\omega_D = gH_D$, где H_D — поле Дзялошинского, возникающее из-за специфического релятивистского взаимодействия между подрешетками. Величина H_D обычно порядка нескольких килоэрстед. В ряде АМФ из-за симметрии $H_D = 0$. Оставшиеся два слагаемых в (7.5) ω_n и ω_{ph} обусловлены очень малым взаимодействием электронов с ядерными спинами и с кристаллической решеткой соответственно. Однако в формуле (7.5) эти частоты умножаются на самую большую частоту ω_{ex} , так что вклад этих малых взаимодействий в частоту ω_k может оказаться вполне заметным. В АФМ этот феномен принято называть *обменным усилением малых взаимодействий*. Частота ω_n соответствует прецессии магнитного момента электрона в эффективном магнитном поле H_n , обусловленном сверхтонким взаимодействием электронов с ядром:

$$\omega_n = gH_n = A \langle I_z \rangle / \hbar. \quad (7.6)$$

Здесь A — константа сверхтонкого взаимодействия, $\langle I_z \rangle$ — среднее значение ядерного спина, обратно пропорциональное температуре. Например, для ядер марганца $H_n \approx (10/T)$ Э и "ядерная щель" $H_{\Delta}^2 = 2H_{ex} H_n$ оказывается порядка нескольких килоэрстед при $T = 4$ К (табл. 7.1).

Может возникнуть вопрос — откуда при $H = 0$ берется щель в спектре СВ, равная $gH_{\Delta} = (2\omega_{ex} \omega_n)^{1/2}$, если в этой ситуации задача обладает аксиальной симметрией относительно поворота моментов подрешеток в легкой плоскости? Ответ в том, что частота прецессии ядерных спинов Ω_n значительно меньше, чем частоты прецессии электронной подсистемы gH_{Δ} , gH_D, \dots . Поэтому ядерные спины из-зи сильной инерционности почти не принимают участия в электронных движениях, выстраиваясь вдоль среднего значения намагниченности подрешеток. Таким образом, возникает нарушение аксиальной симметрии кристалла, приводящее к появлению

Т а б л и ц а 7.1

Феноменологические константы, определяющие спектр СВ в АФМ ЛП

Кристалл	T, К	M_0 , кЭ	H_{ex} , кЭ	H_a , кЭ	H_{Δ} , кЭ	a , Å	$H_{\Delta}^2 T$, кЭ · К
MnCO ₃	32,4	0,39	320	3,07	4,4	2,5	5,8
CsMnF ₃	53,6	0,28	350	2,4	0	—	6,4

эффективных магнитных полей $H_{n1} = H_n$, $H_{n2} = -H_n$, действующих на подрешетки M_1 , M_2 соответственно. А эти поля в соответствии с формулой (7.3) для АФМ ЛО приводят к прецессии электронных спинов с частотой $(2\omega_{ex}\omega_n)^{1/2}$. То же самое происходит и с магнитострикцией, приводящей к одноосной деформации кристалла, которая не успевает следить за прецессией моментов подрешеток. Эта деформация в свою очередь приводит к появлению эффективных полей $H_{ph1} = -H_{ph2} = H_{ph}$ в легкой плоскости. Поле H_{ph} мало — оно пропорционально квадрату константы магнитострикции. Однако в результате обменного усиления магнитострикция может привести к заметному вкладу в частоту СВ. В кубических АФМ (например, в $RbMnF_3$) выражения для частот СВ имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_k^2 &= 3\omega_a\omega_{ex} + \omega_\Delta^2 + v^2k^2, \\ \Omega_k^2 &= \omega_k^2 - \frac{3}{2}\omega_a\omega_{ex} + \omega_\Delta^2 + v^2k^2.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Здесь предполагается, что $H \parallel [100]$ и его значение больше, чем поле опрокидывания $(\frac{3}{2}H_aH_{ex})^{1/2}$.

Во всех выражениях для частоты СВ в АФМ мы не учитывали диполь-дипольное взаимодействие. Дело в том, что магнитный момент $M = M_1 - M_2$ в АФМ, возникающий под действием внешнего магнитного поля и релятивистских взаимодействий, является малым. $M/M_0 \approx H_0/H_{ex}$. В соответствии с этим относительный вклад диполь-дипольного взаимодействия в частоту СВ оказывается, как правило, малым по параметру H_0/H_{ex} , что для большинства АФМ составляет $10^{-3} \div 10^{-4}$. Тем не менее, это взаимодействие может оказаться существенным при изучении тонких нелинейных свойств СВ в АФМ.

7.2. Гамильтониан взаимодействия СВ в АФМ ЛП. Наибольший интерес для экспериментов по нелинейным свойствам СВ представляют АФМ ЛП и кубические АФМ, имеющие низколежащие ветви СВ, частота которых попадает в удобный диапазон ниже 50 ГГц. Наиболее простая ситуация возникает в АФМ ЛП, у которых вторая ветвь СВ лежит значительно выше первой: $\Omega_k \gg \omega_k$. Именно для АФМ ЛП мы и выпишем результаты вычислений для интересующей нас части \mathcal{H}_{int} :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3 &= \sum_{1=2+3} [\frac{1}{2}V_q^{(1)}b_1a_2^*a_3^* + V_q^{(2)}a_1b_2^*a_3^* + \text{к.с.}] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1+2+3=0} [U_q b_1^* a_2^* a_3^* + \text{к.с.}] + \dots, \quad q = (k_1, k_2, k_3),\end{aligned}\quad (7.8)$$

$$\mathcal{H}_4 = \frac{1}{2} \sum_{1+2=3+4} W_p a_1^* a_2^* a_3 a_4, \quad p = (k_1, k_2, k_3, k_4),\quad (7.9)$$

$$\begin{aligned}V_q^{(1)} &= -\frac{1}{4}[(2g\omega_{ex})/(M\omega_2\omega_3\Omega_1)]^{1/2}\omega_H(\Omega_1 + \omega_2 + \omega_3), \\ V_q^{(2)} &= -\frac{1}{4}[(2g\omega_{ex})/(M\omega_1\omega_3\Omega_2)]^{1/2}\omega_H(\omega_1 - \Omega_2 + \omega_3),\end{aligned}\quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}U_q &= -\frac{1}{4}[(2g\omega_{ex})/(M\omega_2\omega_3\Omega_1)]^{1/2}\omega_H(\Omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \\ W_p &= (9\omega_{ex}/8M)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 - \omega_{(1-3)}^2 - \omega_{(2-3)}^2 - \omega_{(1+2)}^2) \times \\ &\times (\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (7.11)$$

Так же, как и раньше, мы использовали сокращенную запись

$$\Omega_1 \equiv \Omega(k_1), \quad \omega_i = \omega(k_i), \quad \omega_{(1-3)} = \omega(k_1 - k_3).$$

Напомним, что при описании процессов рассеяния типа $2 \rightarrow 2$ нужно учитывать не только гамильтониан \mathcal{H}_4 , но и гамильтониан \mathcal{H}_3 во втором порядке теории возмущений. Можно показать, что по параметру ω_k/ω_{ex} наиболее существенным будет вклад процессов с участием виртуальной волны из верхней ветви, гамильтониан которых явно выписан в (7.8). Используя формулу (5.30), получаем выражение для эффективного матричного элемента четырехволновых процессов:

$$T_p = W_p - \frac{1}{2} \{ V_{5,12}^{(1)} V_{5,34}^{(1)*} [\omega(k_5) - 2\omega(k)]^{-1} + u_{521} u_{534}^* [\omega(k_5) + 2\omega(k)]^{-1} + [V_{1,63}^{(2)} V_{4,62}^{(2)*} + V_{3,61}^{(2)*} V_{2,64}^{(2)}] \omega^{-1}(k_6) + [V_{2,73}^{(2)} V_{4,71}^{(2)*} + V_{3,72}^{(2)*} V_{1,74}^{(2)}] \omega^{-1}(2k) \}. \quad (7.12)$$

Здесь $\bar{1}$ соответствует $-k_1$, $k_5 = k_1 + k_2$, $k_6 = k_1 - k_3$, $k_7 = k_2 - k_3$. Из формул (7.10)–(7.12) можно увидеть, что диагональный вклад в T_p , возникающий из-за \mathcal{H}_3 , того же порядка величины, что и W_p . Общее выражение для T_p довольно громоздко. Мы выпишем его в наиболее интересном для нас случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_k$ и $k_1 = k_3$, $k_2 = k_4$ или $k_1 + k_2 = 0$:

$$S(kk') \equiv T(k\bar{k}, k'\bar{k}'), \quad T(kk') \equiv T(kk', kk'),$$

$$S(kk') = T(kk') = -g^2 \frac{\omega_{ex}}{8\omega^2(k)} \left[\omega_0^2 + \omega_H^2 \frac{3\Omega_0^2 - 4\omega^2(k)}{\Omega_0^2 - 4\omega^2(k)} \right]. \quad (7.13)$$

В заключение этого параграфа укажем на одно обстоятельство, которое внимательный читатель должен был давно заметить: СВ в АФМ ЛП гораздо более нелинейны, чем в ФМ. Действительно, частоты СВ в АФМ ЛП и ФМ одного порядка величины $\omega_k \approx 2\pi \cdot (10 \div 30)$ ГГц при полях H порядка нескольких килоэрстед. В то же время в ФМ T_p порядка $g\omega_k/2M \approx \pi g^2$, а в АФМ ЛП T_p порядка $g\omega_{ex}/2M \approx g^2 B/2$. В $MnCO_3$ константа $B = \omega_{ex}/M = 800$ (см. табл. 7.1), в $CsMnF_3$ $B \approx 10^3$. Следовательно, четырехмагннное взаимодействие СВ в АФМ ЛП на два порядка сильнее, чем в ФМ.

Итак, в §§ 5–7 этой главы мы записали гамильтоновы уравнения движения для слабо нелинейных волн и предъявили в готовом виде гамильтониан СВ в ферро- и антиферромагнетиках. Читатели, не интересующиеся рецептами магнитной кухни, могут пропустить вторую половину этой главы (§§ 8, 9) и перейти к третьей. С остальными мы рассмотрим в следующем параграфе уравнения движения для СВ и изучим простейший способ вычисления коэффициентов спин-волнового гамильтониана.

§ 8. Уравнения движения и канонические переменные

8.1. Уравнения движения магнитного момента.

Последовательный вывод уравнений движений магнитного момента $M(r)$ при конечных температурах — это чрезвычайно сложная задача даже для длинноволновых колебаний. Решение этой проблемы означало бы, в частности, что мы определили температурные зависимости матричных элементов взаимодей-

ствия, частоты СВ, нашли их затухание и еще массу полезных вещей. При попытке получить все это строго и последовательно мы бы застряли в самом начале пути и забыли бы о нашей конечной цели — получить простой и понятный метод описания нелинейной динамики СВ при низких и промежуточных температурах. Поэтому мы сделаем несколько плохо контролируемых, но зато простых, в высшей степени "естественных" и столь же традиционных допущений. Протицируем для этого монографию [3], с. 44: "Благодаря сильному обменному взаимодействию между спинами отдельных атомов ферромагнетика его магнитный момент с большой степенью точности является "жестким", если только температура ферромагнетика достаточно низка". Иными словами, модуль вектора плотности магнитного момента лишь в очень слабой степени может зависеть от времени. Поэтому изменение со временем плотности магнитного момента должно в первом приближении носить характер прецессии, т.е. происходить по закону

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g[\mathbf{H}_{\text{ef}}(\mathbf{r}, t), \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)], \quad (8.1)$$

где $\mathbf{H}_{\text{ef}}(\mathbf{r}, t)$ — некоторый вектор, который мы будем называть *эффективным магнитным полем*. Точно так же, рассуждая на принятом нами уровне строгости, можно утверждать, что уравнения движения (8.1) должны быть консервативными, т.е. сохранять полную энергию ФМ W . Действительно, если ничего, кроме СВ, описываемых уравнением (8.1), в нашей модели нет, то их полная энергия должна сохраняться. Поскольку W является функционалом от намагниченности,

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \int \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{r}.$$

Подставляя сюда $\partial \mathbf{M} / \partial t$ из уравнений движения (8.1), имеем

$$\frac{dW}{dt} = g \int \left(\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} [\mathbf{M}, \mathbf{H}_{\text{ef}}] \right) d\mathbf{r}.$$

Для того чтобы этот интеграл равнялся нулю при любом виде зависимости $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, необходимо, чтобы вектор \mathbf{H}_{ef} был параллелен вектору $\delta W / \delta \mathbf{M}$. Коэффициент пропорциональности можно установить, рассматривая какую-нибудь простую ситуацию с заранее известным уравнением движения, например однородную прецессию магнитного момента в однородном поле \mathbf{H} . Тогда W — это энергия взаимодействия с внешним полем:

$$W = -H \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (8.2)$$

Вычисляя функциональную производную по правилу (П1.2), получим

$$\delta W / \delta \mathbf{M}_\alpha = -H_\alpha. \quad (8.3)$$

Это означает, что искомый коэффициент пропорциональности есть минус единица:

$$\mathbf{H}_{\text{ef}} = -\delta W / \delta \mathbf{M}. \quad (8.4)$$

Таким образом, мы приходим к уравнениям движения

$$\frac{\partial M(r, t)}{\partial t} = g \left[\frac{\delta W}{\delta M}, M \right]. \quad (8.5)$$

Разумеется, та непринужденная легкость, с которой я совместно с авторами монографии [3] производил манипуляции, приведшие к уравнению (8.5), отнюдь не гарантирует их правильности. Совместными усилиями мы упрятали под ковер много тонких и сложных вопросов. Некоторые из них будут обсуждаться значительно позже. Сейчас же мы будем исходить из уравнений (8.5), будучи твердо уверенными в том, что они дают хорошее первое приближение для описания СВ.

8.2. Канонические переменные для спиновых волн в ферромагнетиках. В уравнении (8.5) перейдем к круговым переменным

$$M_{\pm} = M_x \pm iM_y, \quad \frac{\partial M_{\pm}}{\partial t} = \pm 2igM_z, \quad M_z^2 = M_0^2 - M_+M_-. \quad (8.6)$$

Направление оси z разумно выбрать вдоль равновесного значения намагниченности. Тогда при малых амплитудах колебаний магнитного момента величины M_{\pm} будут малы, а M_z будет близко к длине вектора M , т.е. M_0 . Сравнивая (5.7) и (8.6), видим, что эти уравнения в линейном по M_{\pm} приближении имеют гамильтонов вид, если в качестве канонических переменных a и a^* взять следующие величины:

$$M_-(2gM_0)^{-1/2}, \quad M_+(2gM_0)^{-1/2}.$$

Поэтому канонические переменные разумно искать в виде

$$M_+ = af(a^*a)(2gM_0)^{1/2}, \quad M_- = a^*f(a^*a)(2gM_0)^{1/2}, \quad f(0) = 1. \quad (8.7)$$

Подставляя (8.7) в (8.6), получим уравнение для \dot{a} , которое должно совпадать с каноническим (5.7). В результате получается дифференциальное уравнение для $f(|a|^2)$, единственным решением которого, удовлетворяющим условию $f(0) = 1$, является

$$f(x) = [1 - gx/2M_0]^{1/2}.$$

Таким образом, мы выразили "естественные переменные" ФМ M_z, M_{\pm} через канонические:

$$M_+ = a[2gM_0(1 - ga^*a/2M_0)]^{1/2} = a\sqrt{2gM_0}\left(1 - \frac{ga^*a}{2M_0}\right) = a\sqrt{2gM_0} - a^*aa\sqrt{\frac{2gM_0}{16M_0^2}} \quad (8.8)$$

$$M_- = M_+^*, \quad M_z = M_0 - ga^*a.$$

Энергия ФМ W , выраженная через канонические переменные, становится функцией Гамильтона (гамильтонианом) $\mathcal{H}(a^*, a)$. Нетрудно видеть, что преобразование (8.8) является классическим аналогом преобразования Гольштейна - Примакова [2,7]. Впервые для анализа нелинейных процессов в ФМ они использовались Е. Шлеманном и др. (1960 [234]).

Разумеется, этот выбор канонических переменных не является единственным. Так можно показать (см. задачу 2.1), что для уравнения (8.5) существуют другие канонические переменные, через которые вектор M выражается следующим образом:

$$M_z + iM_x = M_0[1 + g|b^* - b|^2/2M_0]^{1/2} \exp\{i(b^* + b)(g/2M_0)^{1/2}\}, \quad (8.9)$$

$$M_y = i(\frac{1}{2}gM_0)^{1/2}(b^* - b).$$

Эти формулы являются классическим аналогом представления спиновых операторов через бозе-операторы, предложенного в работе В.Г. Барьяхтара, Д.А. Яблонского (1975 [55]).

Сравнивая формулы (8.8) и (8.9), можно увидеть, что переменные Гольштейна — Примакова a^* , a и Барьяхтара — Яблонского b , b^* совпадают в линейном приближении. Вопрос о преимуществе того или иного представления намагниченности через канонические переменные при решении конкретных задач мы обсудим ниже. Здесь же мы еще раз подчеркнем саму возможность широкого произвола при выборе переменных, в которых уравнения движения имеют канонический вид.

§ 9. Спин-волновой гамильтониан в ферромагнетиках и его энергия в приближении сплошной среды

9.1. Оператор Гамильтона. Как хорошо известно, в спиновой системе магнитодиэлектриков наиболее сильным является обменное взаимодействие, обеспечивающее само существование магнитного порядка. Основная часть этого взаимодействия описывается гейзенберговским гамильтонианом \mathcal{H}_{ex} (2.13). В динамике длинных СВ важную роль играет также диполь-дипольное взаимодействие \mathcal{H}_{dd} (3.1). Необходимо учитывать также взаимодействие магнитных моментов электронов с однородным внешним магнитным полем H :

$$\mathcal{H}_m = -2\mu_0 \sum_a (HS_a). \quad (9.1)$$

В § 3 мы показали, что спин-орбитальное взаимодействие приводит к появлению эффективной энергии магнитной анизотропии. В одноосных кристаллах (см. (3.3))

$$\mathcal{H}_a^{(2)} = \lambda^{(2)} \sum_a (S_{ax})_z^2. \quad (9.2)$$

В ФМ с кубической симметрией (см. (3.4))

$$\mathcal{H}_a^{(4)} = \lambda^{(4)} \sum_a ((S_{ax})^4 + (S_{ay})^4 + (S_{az})^4). \quad (9.3)$$

В эти выражения включены только члены второго и четвертого порядков по спин-орбитальному взаимодействию. Иногда учитывают еще более слабые члены шестого порядка. В одноосных гексагональных кристаллах они приводят к анизотропии в "базисной плоскости", перпендикулярной главной оси симметрии шестого порядка.

Полный гамильтониан спиновой системы ФМ включает в себя, вообще говоря, все перечисленные слагаемые:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ex} + \mathcal{H}_{dd} + \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_a. \quad (9.4)$$

В этом выражении не учитывается взаимодействие спиновой подсистемы кристалла с его другими подсистемами — фононами, экситонами и т.д.

9.2. Энергия ферромагнетика в приближении сплошной среды. В этом пункте мы обсудим классическое приближение для энергии ФМ в предположении, что магнитные моменты электронов на соседних узлах почти параллельны. Формально мы должны поступить следующим образом:

во-первых, запишите классическое выражение для энергии ФМ, соответствующее гамильтониану (9.4). Во-вторых, внести понятие усредненной плотности магнитного момента, "размазывая" магнитный момент электрона по элементарной ячейке. В-третьих, перейти от суммирования по узлам к интегрированию по пространству. Проще всего это проделать для той части гамильтониана, которая содержит однократное суммирование по узлам. Именно из (9.1)–(9.3) легко получаем известные выражения для W_m и W_a :

$$\begin{aligned} W_m &= -\int \mathbf{H} \mathbf{M}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, & W_a^{(2)} &= \frac{1}{4} (\lambda^{(2)} v_0 / \mu_0^2) \int M_z^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ W_a^{(4)} &= (\lambda^{(4)} v_0^3 / 16 \mu_0^4) \int [M_x^4(\mathbf{r}) + M_y^4(\mathbf{r}) + M_z^4(\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Здесь $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ – плотность магнитного момента, v_0 – объем элементарной ячейки. Несколько более сложно выглядит преобразование выражения (5.1) для обменной энергии (см. задачу 2.2):

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \int \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \frac{\partial M_j}{\partial x_k} d\mathbf{r}, \quad (9.6)$$

$$\alpha_{ik} = (1/8 \mu_0^2) \sum_n J(r_n) r_i(n) r_k(n). \quad (9.7)$$

Здесь $r_i(n)$ – i -я проекция ($i = x, y, z$) координаты r_n магнитных атомов в решетке. При выводе выражений (9.6), (9.7) предпологалось, что расстояние l , на котором существенно изменяется обменный интеграл, мало в сравнении с расстоянием, на котором существенно меняется $\mathbf{M}(\mathbf{r})$.

Отметим, что выражение (9.6) для обменной энергии обладает большой общностью. В значительной мере оно не зависит от модельных предположений: величины спина, зависимости обменного интеграла от расстояния между атомами и т.п. Его можно рассматривать как феноменологическое выражение для энергии магнитной неоднородности. Действительно, если предположить, что, во-первых, эта энергия не зависит от ориентации намагниченности относительно кристаллографических осей, во-вторых, среди элементов симметрии кристалла есть инверсия, в-третьих, зависимость энергии от намагниченности квадратичная, то, пользуясь соображениями симметрии, можно получить выражение (9.6). Доказательство этого простого утверждения содержится, например, в монографиях [3,39], и мы его приводить не будем. Отметим только, что первое из сделанных предположений достаточно общее и следует из природы обменного взаимодействия, инвариантного относительно вращений всех спинов. Второе предположение мы сделали потому, что большинство магнитоупорядоченных диэлектриков именно таково. Что касается последнего предположения, то, строго говоря, оно справедливо только для случая $S = 1/2$, когда оператор обменного взаимодействия имеет гейзенберговский вид (2.13). При $S > 1/2$ приближение (2.13) иногда оказывается недостаточным, и необходимо учитывать дополнительное слагаемое, так называемый "биквадратный обмен", оператор которого выписан в п. 2.2. Ему соответствует дополнительное слагаемое в энергии магнитной неоднородности:

$$W_{ex}^4 = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{ik} \int M_\alpha \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_i} M_\beta \frac{\partial M_\beta}{\partial x_k} d\mathbf{r}, \quad (9.8)$$

$$\tilde{\alpha}_{ik} = 1/(8\mu_0^4) \sum_a J(a) a_i a_k. \quad (9.9)$$

Выражение (9.9) получено в предположении, что существуют взаимодействия только ближайших соседей. В общем случае выражение (9.8) можно получить из соображений симметрии: инвариантности относительно вращений M и наличия инверсии.

9.3. Энергия диполь-дипольного взаимодействия. Гамильтониану \mathcal{H}_{dd} (3.1) соответствует макроскопическая энергия

$$W_{dd} = \frac{1}{2} v_0^2 \sum_{a \neq b} R_{ab}^{-5} [(M_a M_b) R_{ab}^2 - 3(M_a R_{ab})(M_b R_{ab})]. \quad (9.10)$$

Переход к интегрированию в (9.10) не столь тривиален, хотя окончательное выражение для W_{dd} является простым:

$$W_{dd} = -\frac{1}{2} \int dr [M H_m + 4\pi M^2/3 + \beta_{ik} M_i M_k], \quad (9.11)$$

$$\beta_{ik} = v_0 \sum_b \frac{\partial^2}{\partial R_{ab}^i \partial R_{ab}^k} \left(\frac{1}{R_{ab}} \right). \quad (9.12)$$

Здесь H_m — статическое магнитное поле, создаваемое непрерывным распределением магнитного момента $M(r)$. Ясный и подробный вывод этих выражений содержится в монографии [3]. Поэтому мы его приводить не будем, ограничившись только обсуждением физического смысла этих выражений. Первое слагаемое в (9.11) — это хорошо известное выражение для магнитной энергии при непрерывном распределении магнитных диполей в пространстве, остальные учитывают дискретную структуру вещества. Они возникают из-за разницы между истинным значением магнитного поля в местах расположения диполей и усредненной величиной H_m . Второе слагаемое в (9.11) учитывает это обстоятельство приближенно, аналогично тому, как это делается при вычислении поправки Лоренц — Лоренца к диэлектрической проницаемости кристалла. Именно, при вычислении магнитного поля H , действующего на диполь, считается, что он находится внутри сферической полости (сферы Лоренца) в сплошной среде с непрерывным распределением намагниченности M . Можно показать (см. ниже раздел о размагничивающих факторах), что

$$H = H_m + \frac{4\pi}{3} M. \quad (9.13)$$

С учетом этого понятно, что два первых слагаемых в (9.11) есть просто энергия взаимодействия диполей $-\frac{1}{2} (MH)$. Наконец, последнее слагаемое в (9.11) учитывает отличие реальной дискретности кристалла от приближенной модели со сферой Лоренца. В кубических кристаллах из соображений симметрии $\beta_{ik} = \beta \delta_{ik}$. С другой стороны, из (9.12) следует, что $\text{Sp} \beta_{ik} = 0$ и, следовательно, $\beta = 0$. Это означает, что в кубических кристаллах приближенная модель со сферой Лоренца дает точный результат. В одноосных же кристаллах

$$\beta_{ik} = \beta_i \delta_{ik}, \quad \beta_z \neq \beta_x = \beta_y, \quad (9.14)$$

и последнее слагаемое в (9.11) не обращается в нуль. Его можно представить в виде

$$-\frac{\beta_z - \beta_x}{2} \int M_z^2(r) dr - \frac{\beta_x}{2} \int M^2(r) dr. \quad (9.15)$$

Первое слагаемое здесь совпадает по форме с выражением (9.5) для $W_a^{(2)}$ и представляет, таким образом, диполь-дипольный вклад в энергию кристаллографической анизотропии. Впредь мы будем считать, что оно уже учтено в (9.5) соответствующей перенормировкой коэффициента $\lambda^{(2)}$. Оставшиеся слагаемые в (9.11) и (9.15), пропорциональные $M^2(\mathbf{r})$, представляют собой не интересующий нас постоянный вклад в энергию W , не зависящий от ориентации M . Таким образом, в (9.11) можно оставить только первое слагаемое. Для того чтобы выразить его только через намагниченность, необходимо решать уравнения магнитостатики

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (9.16)$$

с соответствующими граничными условиями. В дальнейшем нас будут интересовать два случая:

Плоская волна:

$$M(\mathbf{r}) = \langle M \rangle + [m_k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \text{к.с.}],$$

причем длина СВ $2\pi/k$ много меньше, чем размер образца.

Образец имеет форму эллипсоида, а $M(\mathbf{r}) = M = \text{const}$. Как хорошо известно, уравнения (9.16) решаются точно в обоих случаях. В первом случае

$$H_m(\mathbf{r}) = [H_m(k) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \text{к.с.}], \quad H_m(k) = -4\pi k(km_k)/k^2. \quad (9.17)$$

Во втором случае

$$H_{m,i} = -4\pi N_{ik} M_k, \quad \text{Sp } N_{ik} = 1, \quad (9.18)$$

где N_{ik} — тензор "размагничивающих факторов", зависящий от формы эллипсоида. Теперь можно выразить энергию диполь-дипольного взаимодействия (9.11) через M . Представим для этого $M(\mathbf{r})$ в виде разложения по плоским волнам:

$$M(\mathbf{r}) = \langle M \rangle + \sum_k m_k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (9.19)$$

Здесь мы считаем, что $m_k = 0$ при $k = 0$, а среднее значение намагниченности по образцу определено формулой

$$V \langle M \rangle = \int M(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (9.20)$$

в которой V — объем образца. Подставляя разложение (9.19) в формулы (9.17), (9.18) и затем в (9.11), получим

$$W_{dd} = 2\pi V N_{ik} \langle M_i \rangle \langle M_k \rangle + 2\pi V \sum_k (km_k)(km_{-k})/k^2. \quad (9.21)$$

Напомним, что при выводе этого выражения предполагалось, что минимальный линейный размер образца много больше, чем $2\pi/k$. Это означает, что мы не учитываем уокеровские моды — собственные магнитостатические типы колебаний намагниченности с характерным размером порядка размера образца (см., например, § 11 в [3]). Единственная уокеровская мода, которая учитывается первым слагаемым в (9.21), — это однородная прецессия намагниченности — ОП. Впрочем, этот дефект выражения (9.21) не слишком существен, ибо в большинстве экспериментов, которые нас будут интересовать в дальнейшем, уокеровские моды (за исключением ОП) не возбуждаются.

Резюмируя результаты этого параграфа, можно сказать, что энергия ферромагнетика W — это сумма

$$W = W_m + W_a + W_{ex} + W_{dd}, \quad (9.22)$$

в которой энергия взаимодействия с внешним полем W_m , энергия кристаллографической анизотропии W_a , обменная энергия W_{ex} и энергия диполь-дипольного взаимодействия W_{dd} определяются выражениями (9.5), (9.6) и (9.21) соответственно. Теперь у нас уже все готово для того, чтобы определить закон дисперсии СВ и матричные элементы гамильтониана взаимодействия. Эти вычисления не содержат никаких принципиальных затруднений, и их предлагается сделать самостоятельно, решив задачи 2.3, 2.4.

Задачи

Задача 2.1. Показать, что для уравнения Блоха (8.5) каноническими переменными координата — импульс являются

$$q = M_x/g, \quad p = \varphi = \arctg(M_x/M_z). \quad (9.23)$$

Указание. Прямым дифференцированием с учетом связи $M^2(p, q) = M_0^2$ убедиться, что (8.5) в переменных (9.23) приводятся к виду (5.3). Далее, по описанной в § 5 схеме можно перейти от p, q к комплексным переменным b, b^* , через которые вектор M будет выражаться по формулам (8.9).

Задача 2.2. Используя гейзенберговский гамильтониан \mathcal{H}_{ex} (2.13), получить выражения (9.6), (9.7) для обменной энергии в континуальном приближении.

Указание. Действовать по схеме, изложенной в § 9.2, и затем, разложив M в ряд по $(r - r')$, проинтегрировать по частям, предполагая, что кристалл имеет центр инверсии.

Задача 2.3. Вычислить коэффициенты спин-волнового гамильтониана в ферромагнетиках.

Указание. Удобно действовать в следующей последовательности: представить намагниченность в виде разложения по плоским волнам, далее выразить энергию ФМ (9.22) в виде ряда по степеням $M_k(t)$, затем в полученном выражении перейти к переменным Гольштейна — Примакова a_k, a_k^* (8.11), наконец, совершить $u - v$ -преобразование (5.17) к каноническим переменным b_k, b_k^* , диагонализующим его квадратичную часть.

Задача 2.4. Вычислить закон дисперсии и коэффициенты гамильтониана взаимодействия СВ в АФМ с анизотропией типа "легкая плоскость". Исходить из феноменологического выражения для энергии АФМ ЛП в двухподрешеточной модели:

$$W = \frac{1}{2} \int dr \{ [BM^2 + \alpha_1 (\partial L/\partial r)^2 + \alpha_2 (\partial M/\partial r)^2] + bM_2^2 + aL_2^2 - 2\beta (n[ML]) - 2MH \}, \quad (9.24)$$

$$n = r/r.$$

Здесь M_1, M_2 — намагниченности подрешеток, $M_1 = M_2 = M_0, M = M_1 + M_2, L = M_1 - M_2, \beta > 0, \alpha_{1,2} > 0$ — обменные константы, β — константа Дзялошинского [78], $a > 0, b$ — константы анизотропии.

Указание. Удобно действовать в следующей последовательности: сначала из условия минимума энергии (9.23) найти конфигурацию моментов M_1^0, M_2^0 в основном состоянии, затем в двух вспомогательных системах координат, каждая из которых ориентирована по соответствующей намагниченности M_i^0 ($i = 1, 2$), перейти к каноническим переменным (8.8) $C_i(r), C_i^*(r)$ ($i = 1, 2$) в каждой подрешетке так же, как и в ФМ, далее перейти к представлению Фурье $C(r) \rightarrow C_k$, и перейти к симметризованному переменным $\sqrt{2}d_{\pm} = C_1 \pm C_2$, при этом квадратичная часть гамильтониана окажется квазидиагональной, переменные d_+, d_+ будут описывать одну ветвь СВ, а d_-, d_-^* — другую, потом с помощью преобразования (5.17) в каждой ветви диагонализировать квадратичные части гамильтониана, наконец, получить выражения для ω_k, Ω_k и \mathcal{H}_{int} в этих переменных.

Замечание. Существенным моментом при $u - v$ -преобразовании будет то, что $u \gg 1, v \gg 1$, в то время как $|u|^2 - |v|^2 = 1$. Это приводит к сокращению в \mathcal{H}_{int} са-

мых больших слагаемых, пропорциональных Bu^4 , Bu^2v^2 и заставляет проводить громоздкие вычисления очень аккуратно, удерживая в исходном выражении для энергии малые члены, вклад которых после умножения на степени u и v может стать существенным. Высказывалось мнение, что магнитное дипольное взаимодействие может таким образом привести к аномально большому вкладу в \mathcal{H}_{int} . Однако вычисления В.С. Лутовинова, В.Л. Сафонова [146] показали, что этого не происходит.

Приложение 1. Вариационные производные

Мы не хотим здесь приводить сколько-нибудь строгое определение этого понятия, которое удовлетворило бы математиков или хотя бы физиков-теоретиков. Для простых пешеходов мы собираемся пояснить несколько правил вычисления вариационных производных $\delta/\delta f(r)$. Они следуют из того, что $\delta/\delta f(r)$ обобщает понятие частной производной $\partial/\partial f(r_n)$ (r_n – дискретный набор точек) на случай непрерывного числа переменных.

1. Пусть I – следующий функционал от функции $f(r)$:

$$I = \int f(r) \varphi(r) dr, \quad (\text{П1.1})$$

где $\varphi(r)$ – весовая функция. Для вычисления $\delta I/\delta f(r')$ можно мысленно заменить ее на частную производную, одновременно заменив интегрирование суммированием и получив окончательный результат, перейти обратно от дискретной к непрерывной форме записи. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(r)} \int \varphi(r') f(r') dr' &= \frac{\partial}{\partial f(r_n)} \sum_m \varphi(r_m) f(r_m) = \\ &= \sum_m \varphi(r_m) \frac{\partial f(r_m)}{\partial f(r_n)} = \sum_m \varphi(r_m) \delta(r_m, r_n) = \varphi(r_n) = \varphi(r). \end{aligned}$$

Этот результат можно представить символической формулой

$$\delta f(r')/\delta f(r) = \delta(r - r'). \quad (\text{П1.2})$$

2. Если в функционале на функцию f действуют дифференциальные операторы, то для того, чтобы воспользоваться правилом (П1.2), необходимо предварительно "перебросить их налево", выполняя интегрирование по частям. Например,

$$\frac{\delta}{\delta f(r)} \int \varphi \nabla f dr' = \frac{\delta}{\delta f(r)} \int f \nabla \varphi dr' = -\nabla \varphi(r). \quad (\text{П1.3})$$

3. Остальные правила вычисления функциональной производной, которые нам могут понадобиться, совпадают с правилами для частных производных. Например,

$$\frac{\delta}{\delta f(r)} f^2(r') = 2f(r) \frac{\delta f(r)}{\delta f(r')}. \quad (\text{П1.4})$$

Приложение 2. Условия каноничности преобразований

1. Пусть $a_j(r, t)$, $a_j^*(r, t)$ – канонические переменные, так что их уравнения движения имеют канонический вид (5.6). Введем новые переменные $b_i(r, t)$, $b_i^*(r, t)$ с помощью преобразований, не содержащих явно время:

$$b_i = f_i \{a_j, a_j^*\}, \quad b_i^* = f_i^* \{a_j, a_j^*\}, \quad (\text{П2.1})$$

Здесь f_i – некоторый функционал. Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_i}{\partial t} &= \sum_j \int dr' \left[-i \frac{\delta b_i}{\delta a_j(r')} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_j^*(r')} + i \frac{\delta b_i}{\delta a_j^*(r')} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_j(r')} \right], \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_j(r')} &= \sum_l \int dr'' \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_l(r'')} \frac{\delta b_l(r'')}{\delta a_j(r')} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_l^*(r'')} \frac{\delta b_l^*(r'')}{\delta a_j(r')} \right], \\ i \frac{\partial b_i}{\partial t} &= \sum_j \int dr' \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_j^*(r')} \{b_i(r) b_j(r')\}_{aa^*} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta b_j(r)} \{b_i(r) b_j(r')\}_{aa^*} \right]. \quad (\text{П2.2}) \end{aligned}$$

Мы ввели здесь обозначения для скобок Пуассона:

$$\{f(r)g(r')\}_{aa^*} = \sum_j \int dr'' \left[\frac{\delta f(r)}{\delta a_j^*(r'')} \frac{\delta g(r')}{\delta_j a(r'')} - \frac{\delta f(r)}{\delta a_j(r'')} \frac{\delta g(r')}{\delta a_j^*(r'')} \right]. \quad (\text{П2.3})$$

Потребовав, чтобы уравнения движения переменных b, b^* (П2.2) совпадали с каноническими уравнениями (5.6), получаем условие каноничности преобразований (П2.1):

$$\{b_i b_j\} = 0, \quad \{b_i(r) b_j^*(r')\} = \delta_{ij} \delta(r - r'). \quad (\text{П2.4})$$

Эти условия являются классическим аналогом перестановочных соотношений для бозе-операторов.

2. Пусть $a_j(k), a_j^*(k)$ – канонические переменные, заданные в k -представлении. Нетрудно убедиться, что условие каноничности преобразования

$$b_j(k) = b_{jk} \{a_j(k), a_j^*(k)\} \quad (\text{П2.5})$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \{a_j(k), a_i^*(k')\} b b^* &= \delta_{ij} \delta(k - k'), \\ \{a_j(k), a_i(k')\} b b^* &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П2.6})$$

Здесь $\{\dots\}$ – скобки Пуассона

$$\{f_i(k), g_j(k')\}_{bb^*} = \sum_l \sum_{k''} \left[\frac{\delta f_i(k)}{\delta b_l(k'')} \frac{\delta g_j(k')}{\delta b_l^*(k'')} - \frac{\delta f_i(k)}{\delta b_l^*(k'')} \frac{\delta g_j(k')}{\delta b_l(k'')} \right]. \quad (\text{П2.7})$$

Некоторое отличие формул (П2.6) и (П2.7) от (П2.3) и (П2.4) возникло из-за того, что волновой вектор k является у нас дискретной величиной.

3. Рассмотрим линейную замену переменных вида (5.17). Вычисляя скобки Пуассона (П2.6), (П2.7), получим условие каноничности этого преобразования:

$$\begin{aligned} \sum_j [u_{ij}(k) v_{ij}(k) - v_{ij}(k) v_{ij}^*(k)] &= \delta_{il}, \\ \sum_j [u_{ij}(k) v_{ij}(-k) - v_{ij}(k) u_{ij}(-k)] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П2.8})$$