ГЛАВА 8

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИНТЕНСИВНОГО УЗКОГО ПАКЕТА СПИНОВЫХ ВОЛН С ТЕПЛОВЫМИ

В настоящее время в связи с практическими задачами СВЧ-техники, нелинейной оптики, физики плазмы ведется широкое изучение явлений, связанных с возбуждением и распространением в веществе пакета волн большой амплитуды. При этом среда служит разервуаром тепловых волн (ТВ), взаимодействие с которыми во многих случаях является главной причиной затухания пакета. Если его амплитуда мала, то можно считать, что декремент затухания не зависит от амплитуды и находится линеаризацией кинетического уравнения на фоне равновесного распределения. Именно это мы имели в виду в гл. 3–6 при описании нелинейной динамики и параметрической кинетики СВ, когда декремент затухания СВ вводился феноменологически в уравнения движения. Когда число волн в пакете $N$ много меньше общего числа ТВ $N_T$, система ТВ в целом слабо отклоняется от равновесия. Однако законы сохранения энергии и импульса разрешают участвовать в релаксации узкого ($\Delta\omega_k \ll \omega_k$) пакета лишь небольшой части общего резервуара ТВ. Поэтому уже при сравнительно малой амплитуде пакета диссипируемая им энергия может существенно отклонить в этой области числа заполнения ТВ $n_k$ от равновесных значений $n_k^0$. При этом время затухания пакета начинает зависеть от его амплитуды, т.е. релаксация становится нелинейной.

Параметром, определяющим отличие процесса релаксации от линейного, таким образом, является не $N/N_T$, а отношение числа волн $N$ к числу участвующих в процессе релаксации ТВ или, иными словами, произведение линейного декремента затухания волн с характерным временем нелинейного взаимодействия ТВ с пакетом $\tau_k$.

В этой главе рассмотрен как случай слабой нелинейности $\gamma_k\tau \gg 1$, так и сильной $\gamma_k\tau \ll 1$. Мы ограничимся рассмотрением наиболее существенных трехволновых процессов. Способ описания нелинейной кинетики волн существенно зависит от ширины возбуждаемого пакета в $k$-пространстве. Если $\Delta\omega_k \gg \gamma_k$, $\tau_k^{-1}$, т.е. время хаотизации фаз $(\Delta\omega_k)^{-1}$ много меньше времени взаимодействия, то эволюция как пакета, так и взаимодействующих с ним волн описывается кинетическими уравнениями для чисел заполнения волн в $k$-пространстве. Первый параграф этой главы (§ 39) посвящен случаю слабой нелинейности $\Delta\omega_k \gg \gamma_k \gg \tau_k^{-1}$, в нем вычислен нелинейный декремент затухания СВ в ФМ. В § 40 изучается влияние нелинейного затухания на поведение СВ за порогом параметрического возбуждения и проведено сравнение с данными экспериментов. В § 41 рассмотрена нелинейная релаксация пакета волн большой амплитуды такой, что взаимодействие ТВ между собой гораздо слабее, чем их взаимодействие с нелинейным пакетом, $\Delta\omega_k \gg \tau_k^{-1} \gg \gamma_k$. И наконец, последний параграф этой главы (§ 42) посвящен релаксации в нелинейной среде монохроматических волн $\Delta\omega_k \ll \gamma_k$, $\tau_k^{-1}$, когда кинетическое уравнение неприменимо, и описание строится с помощью динамических уравнений, дополненных феноменологическим учетом влияния остальной части термостата с помощью метода случайных сил Ланжевена.

## § 39. Нелинейная релаксация пакета волн в приближении самосогласованного поля

**39.1. Схема вычисления нелинейной поправки к декременту затухания волн.** Здесь мы будем предполагать, что

$$\tau_k^{-1} \ll \gamma_k \ll \Delta\omega_k. \tag{39.1}$$

Правая часть этого неравенства обусловливает возможность использования кинетического уравнения как для вычисления $\gamma_k$, так и нелинейной поправки к этой величине (см. задачи 7.5–7.7). Левая же часть (39.1) позволяет описывать процесс нелинейной релаксации в приближении самосогласованного поля, т.е. в терминах линейных характеристик (в данном случае декремента затухания), слабо перенормированных нелинейным взаимодействием. Эта перенормировка возникает следующим образом. Вычисленный с помощью кинетического уравнения декремент затухания волн исходного пакета является функционалом от чисел заполнения тепловых волн.

Отклонение $\delta n_k = n_k - n_k^0$ чисел заполнения ТВ от равновесных следует находить из кинетического уравнения, записанного для ТВ и линеаризованного по $\delta n_k$, $N_k$. При этом возникает линейная связь $\delta n(k')$ и $N_k$. Подставляя затем $\delta n(k')$ в формулу для декремента затухания, придем

к выражению вида (10.10):

$$\gamma_k = \gamma_k^0 + \int \eta(k, k') N(k') dk'. \qquad \gamma_k^0 + |a_k|^2 \eta = \gamma_k^0 \left(1 + \frac{\eta}{\gamma_k^0} |a_k|^2\right) \tag{39.2}$$

Как мы увидим ниже, условие $\gamma_k - \gamma_k^0 \ll \gamma_k^0$ эквивалентно $\gamma_k \tau \gg 1$. Найти выражения для ядра $\eta_{kk'}$ – основная цель этого параграфа.

Мы будем исходить из кинетического уравнения для трехволновых процессов (35.7). Первое слагаемое в нем описывает изменение числа волн с волновым вектором $k$ под влиянием процессов распада на другие волны, а второе – из-за процессов слияния рассматриваемых волн с ТВ. Из (35.7) получаем выражения для декрементов затухания, обусловленных процессами распада (split – расщепление) и слияния (confluence):

$$\gamma_s = \frac{\pi}{2} \int U_{k12}(n_1 + n_2) dk_1 dk_2 = \gamma_s^0 + \pi \int U_{k1k-1} \delta n_1 dk_1 dk_2, \tag{39.3}$$

$$\begin{aligned} &U_{123} = |V(k_1, k_2, k_3)|^2 \delta(q_1 - q_2 - q_3), \; q = (k, \omega), \\ &\gamma_c = \pi \int U_{1k2}(n_2 - n_1) dk_1 dk_2 = \gamma_c^0 + \pi \int U_{1k2}(\delta n_2 - \delta n_1) dk_1 dk_2. \end{aligned} \tag{39.4}$$

Отклонения чисел заполнения ТВ $\delta n_k$ находим из кинетического уравнения для этих волн, положив в нем $\partial n(k')/\partial t = 0$ и линеаризуя по $N_k$ (ведь в силу $\gamma_k \tau \gg 1$ число волн в нелинейном пакете много меньше числа взаимодействующих с ним ТВ):

$$\begin{aligned} &\gamma(k_1)\delta n(k_1) = -\pi \int U(k + k', k, k')[n^0(k_1) - \\ &- n^0(k_1 + k')] N(k') dk' + \pi \int U(k_1, k', k_1 - k') \times \\ &\times [n^0(k_1 - k') - n^0(k_1)] N(k') dk' + \\ &+ \pi \int U(k', k_1, k' - k_1)[n^0(k' - k_1) - n^0(k_1)] N(k') dk'. \end{aligned} \tag{39.5}$$

Слияние рассматриваемых ТВ с волнами $N(k')$ из исходного пакета (первое слагаемое в (39.5)) уменьшает число ТВ, а распады с участием волн $N(k')$ (второе и третье слагаемые) увеличивают. Подставляя $\delta n(k)$ из (39.5) в выражения для $\gamma_c$ и $\gamma_s$, придем к выражению для $\eta_{kk'}$, состоящему из девяти слагаемых. Его анализ и конкретный расчет $\eta_{kk'}$ мы проведем на примере СВ в кубических ФМ (например, ЖИГ). В заключение этого отметим, что приведенная схема без изменений переносится на случай расчета нелинейной поправки к затуханию, связанной с четырехволновыми процессами.

**39.2. Нелинейное затухание СВ в кубических ФМ (В.С.Львов, Г.Е.Фалькович, [168]).** Анализ закона дисперсии СВ (6.2), проведенный в § 11, показывает, что процесс распада на две волны разрешен лишь для тех СВ, волновые векторы которых превышают величину $k_s$, задаваемую равенством (11.12). При фиксированной частоте накачки $\omega_p$ волновой вектор ПСВ можно менять, изменяя магнитное поле $H$, приложенное к образцу. Условие $k > k_s$ означает, что $H$ меньше некоторого $H_1(\theta)$. Величина $H_1(\theta)$ легко вычисляется из (6.5). Процессы слияния разрешены

для всех $k$ в интересующем нас интервале. Причиной нелинейного затухания, помимо обсуждавшихся взаимодействий, может служить процесс слияния двух нелинейных волн из возбуждаемого пакета. Для ПСВ, имеющих одинаковую частоту $\omega_p/2$, это возможно при $k > k_{3M}$ и соответственно $H < H_{3M}(\theta)$. Эти величины легко вычисляются из закона дисперсии СВ (6.2), и мы их приводить не будем.

*Отрицательное нелинейное затухание.* Сначала рассмотрим случай, когда для ПСВ, возбуждающихся вблизи экватора, распады запрещены, т.е. $H > H_1(\pi/2) \equiv H_1$. В этом случае дифференциальное нелинейное затухание оказывается отрицательным, $\partial\gamma_c/\partial N < 0$, т.е. декремент затухания ПСВ уменьшается с ростом их числа. На качественном уровне это можно понять так: декремент затухания в процессах слияния параметрических и тепловых волн $\gamma_c(k)$ пропорционален разности $n(k') - n(k+k')$, в каждом акте слияния уменьшается число СВ $n(k')$ в области $k'$ и увеличивается число СВ $n(k+k')$, что и приводит к уменьшению $\gamma_c(k)$. Подставляя получившуюся из (39.5) $\delta n_k$ в выражение для $\gamma_c(k)$, имеем в соответствии с (39.2)

$$
\begin{aligned}
\eta_c(k,k') = {} & \int dk_1 \,|\, V(k_1, k, k_1-k) \,|^2 \delta(\omega_1 - \omega_k - \omega(k_1-k)) \times \\
& \times \,|\, V(k_1+k', k_1, k') \,|^2 \delta(\omega(k_1+k') - \omega_1 - \omega(k')) \times \\
& \times [n^0(k_1) - n(k_1+k')]/\gamma_1^0 + \int dk_1 \,|\, V(k_1+k, k_1, k) \,|^2 \times \\
& \times \delta(\omega(k_1+k) - \omega_1 - \omega_k) \,|\, V(k_1, k', k_1-k') \,|^2 \times \\
& \times \delta(\omega_1 - \omega(k') - \omega(k_1-k'))[n^0(k_1-k) - \\
& - n^0(k_1)]/\gamma_1^0 - \int dk_1 \,|\, V(k_1, k, k_1-k) \,|^2 \times \\
& \times \delta(\omega_1 - \omega_k - \omega(k_1-k)) \,|\, V(k_1, k', k_1-k') \,|^2 \times \\
& \times \delta(\omega_1 - \omega(k') - \omega(k_1-k'))[n^0(k_1-k) - n^0(k_1)]/\gamma_1^0 - \\
& - \int dk_1 \,|\, V(k_1+k, k_1, k) \,|^2 \delta(\omega(k_1+k) - \omega_1 - \omega_k) \,|\, \times \\
& \times V(k_1+k', k_1, k') \,|^2 \delta(\omega(k_1+k') - \\
& - \omega_1 - \omega(k'))[n^0(k_1) - n^0(k_1+k')]/\gamma_1^0, \\
& \omega_1 \equiv \omega(k_1), \quad \gamma_1^0 = \gamma^0(k_1), \quad n_1 = n(k_1).
\end{aligned}
\tag{39.6}
$$

Третье и четвертое слагаемые в выражении для $\eta_c(k, k')$ имеют особенность при $k' \to k$, возникающую из-за совпадения аргументов у $\delta$-функций. При $|k' - k| = \kappa \ll k$, разлагая $\omega(k')$, $\omega(k_1 \pm k')$ до первого порядка по $\kappa$, видим, что $\eta_c(k, k') \backsim \kappa^{-1}$. Таким образом, для распределений ПСВ, узких хотя бы по двум направлениям в $k$-пространстве, можно ограничиться в (39.6) лишь сингулярными слагаемыми. Действительно, в этом случае, интегрируя $1/\kappa$ по $dk'$, мы получим нелинейную добавку к $\gamma_0(k)$, пропорциональную логарифму малой величины. Пакет же ПСВ имеет обычно

при небольших надкритичностях малую ширину как по модулю $k$, так и по углу $\theta_k$ (см. далее (40.6)).

Проанализируем выражение (39.6) при $\boldsymbol{k}'$, близком к $\boldsymbol{k}$ для волновых векторов, близких к экватору резонансной поверхности $x = \pi/2 - \theta_k \ll 1$, $x' = \pi/2 - \theta(\boldsymbol{k}') \ll 1$.

Ограничиваясь лишь сингулярными слагаемыми и считая, что вблизи $\theta = \pi/2$ выражение (6.2) для $\omega_k$ можно заменить на более простое: $\omega_k = \omega_0 + \omega_M/2 + \alpha k^2 \equiv \omega_1 + \alpha k^2$ (для интересующих нас экспериментов это соответствует приблизительно 10%-ной погрешности), и учитывая угловую зависимость матричного элемента трехмагнонного взаимодействия (6.22), получим

$$\eta_c(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \approx -(2T\omega_p V^4/\alpha k)[\sin^2(\varphi/2) + (x - x')^2/4 + (k-k')^2/4k^2]^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\omega_1 + \alpha k^2} \int\limits_{\tilde{k}_1}^{\infty} \frac{dk_1 \tilde{k}_1^5 [k_1^2 - \tilde{k}_1^2]^{3/2}}{k_1^7 \gamma_1^0 \omega(k_1)[\omega(k_1) - \omega_p/2]} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_1} \int\limits_{\tilde{k}_2}^{\infty} \frac{dk_1 \tilde{k}_2^5 [k_1^2 - \tilde{k}_2^2]^{3/2}}{k_1^7 \gamma_1^0 \omega(k_1)[\omega(k_1) - \omega_p/2]} \right\}. \qquad (39.7)$$

Здесь $\tilde{k}_1 = (\omega_1 + \alpha k^2)/2\alpha k \cos(\varphi/2)$, $\tilde{k}_2 = \omega_1/2\alpha k \cos(\varphi/2)$, $\varphi$ – разность азимутальных углов векторов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$.

Как известно, при переходе $\boldsymbol{k}$ из нераспадной области в распадную декремент затухания $\gamma(\boldsymbol{k})$ быстро увеличивается с ростом $k$ (открывается новый канал релаксации). Легко видеть, что $\tilde{k}_1 > k_S(\pi/2)$. Поэтому при $\tilde{k}_2 < k_S(\pi/2)$, что эквивалентно $H < H_2 \approx (8\omega_p - 3\omega_M)/18g$, основной вклад в $\eta_c(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ вносит второе слагаемое в (39.7). При полях, больших $H_2$, $\eta_c(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ быстро уменьшается с ростом поля. Это связано с тем, что с ростом $H$ уменьшается волновой вектор ПСВ и в силу законов сохранения увеличивается волновой вектор $k_1$ и затухание $\gamma(\boldsymbol{k}_1)$ взаимодействующих с ними ТВ. Увеличение же $\gamma(\boldsymbol{k}_1)$ приводит к уменьшению отклонения чисел заполнения ТВ от равновесных.

Для изучения влияния нелинейного затухания на возбуждение ПСВ в случае аксиальной симметрии нам понадобится значение $\eta_c(k, k') = \int \eta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') d\varphi/2\pi$. Вычисляя ее при $H < H_2$, получим

$$\eta_c(k, k') \approx -\frac{T\omega_p V^4 \ln[(x - x')^2 + (k - k')^2/4k^2]}{20\pi(\omega_1 + \omega_p/2)(\alpha k)^2 \gamma^0(\omega_1/2\alpha k)}. \qquad (39.8)$$

Трехмагнонный механизм слияния включается (и $\eta(k, k')$ обращается в нуль) при $\tilde{k}_2 = \omega_1/2\alpha k > 0$, что соответствует $H > H_3 = H_c - \omega_1^2 a^2/2\alpha g_1$, где $H_c$ – магнитное поле, при котором $k$ ПСВ с $\theta = \pi/2$ равны нулю.

Отметим, еще, что в сферическом случае для распределений ПСВ, заполняющих всю резонансную поверхность, несмотря на то, что в (39.6) все

четыре слагаемых одного порядка, результирующее нелинейное затухание оказывается отрицательным (в чем можно убедиться, проводя непосредственные вычисления).

*Положительное нелинейное затухание в процессах распада.* Рассмотрим теперь нелинейное затухание параметрических волн в распадной части спектра $H < H_1$:

$$\gamma_s(\boldsymbol{k}) = \gamma_0(\boldsymbol{k}) + \pi \int |V(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)|^2 \delta(\omega(\boldsymbol{k}) - \omega(\boldsymbol{k}_1) - \\ - \omega(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)) \delta n(\boldsymbol{k}_1) d\boldsymbol{k}_1 . \tag{39.9}$$

Пренебрегая в (39.5) всеми слагаемыми, кроме третьего, поскольку они дают "нерезонансный" вклад (соответствующая функция $\eta_s(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ не имеет особенности при $\boldsymbol{k}' \to \boldsymbol{k}$), получим

$$\eta_s(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \int d\boldsymbol{k}_1 \, |V(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)|^2 \delta(\omega(\boldsymbol{k}) - \omega(\boldsymbol{k}_1) - \omega(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)) \times \\ \times |V(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1)|^2 \delta(\omega(\boldsymbol{k}') - \omega(\boldsymbol{k}_1) - \omega(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1)) \times \\ \times [n^0(\boldsymbol{k}_1) + n^0(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}_1)] / \gamma_0(\boldsymbol{k}_1). \tag{39.10}$$

Анализ законов сохранения в этом интеграле показывает, что $\eta_s(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}+\vec{\kappa})$ отлично от нуля при $\sin^2\beta > \left(\frac{k_S}{k}\right)^2$, где $\beta$ – угол между $\boldsymbol{k}$ и $\vec{\kappa}$. При $k \to k_S$ $\beta \to \pi/2$. Для ПСВ вблизи экватора получим у границы распадов $k^2 = k_S^2(1+\delta)$, $\delta \ll 1$, аналогично (39.8):

$$\eta_s(k, k') \approx \frac{2^6 V^4 T(\delta + x_1^2)(\delta + x'^2)}{\pi \omega_p \gamma^0(k/2) \alpha^2 k} \ln\left[(x - x')^2 + \left(\frac{k-k'}{2k}\right)^2\right]. \tag{39.11}$$

Видно, что для ПСВ в точности на экваторе ($x = x' = 0$) $\eta \sim \delta^2$ из-за того, что матричный элемент $V(k, k', k-k')$ обращается в нуль для волн, распространяющихся в плоскости, перпендикулярной намагниченности.

Сравнение (39.8) и (39.11) показывает, что отрицательное нелинейное затухание сменится положительным уже при

$$\delta^2 > \frac{\omega_p^2 \gamma(k/2)}{\alpha k^2 (\omega_1 + \omega_p/2) \gamma(\omega_1/2\alpha k)} \frac{2^{-8}}{5} \approx \frac{1}{8}. \tag{39.12}$$

В последней формуле учтено, что при $k \approx k_S \approx 2\omega_1/\alpha$ $\omega_p \approx 2(\omega_1 + \alpha k_S^2) \approx 6\omega_1$ и что $\gamma(k_S/2) \approx 2\gamma(k_S/4)$. Таким образом, в распадной области $H < H_1$ нелинейное затухание ПСВ является положительным и описывается формулой (39.11).

*Положительное нелинейное затухание в процессах слияния.* Вычислим коэффициент нелинейного затухания, обусловленный слиянием двух ПСВ. Этот коэффициент, разумеется, не зависит от состояния системы тепловых волн. Исходя из формулы для декремента затухания в про-

цессах слияния $\gamma_c$, получим вблизи поля $H_{3M}$ для ПСВ около экватора:

$$\eta_{2c}(k, k') \approx \frac{V^2}{\pi\omega_1} \frac{(x+x')^2}{[\delta'^2 + (x^2+x'^2)/2]^{1/2}},$$

$$kk' = k_{3M}^2(1+\delta'), \quad \delta' \ll 1. \tag{39.13}$$

Видно, что этот процесс эффективен лишь вблизи $H_{3M}$ в небольшой области, определяемой шириной пакета по углу (рис.39.1). Действительно, вычислим $\tilde{\eta} = \int\limits_{-a}^{a} \eta(0, x')dx'/2a$.

Эта величина равна коэффициенту нелинейного затухания ПСВ на экваторе при модельном выборе $N(x)$ в виде прямоугольника ширины $2a$. Для $\eta_{2c}(k, k')$, определяемой формулой (39.13),

$$\tilde{\eta}_{2c} \approx \frac{8V^2}{\pi\omega_1}\frac{\delta'}{a}\left[\arcsin\frac{a}{\delta'} - \frac{a}{\delta'}\left(1-\left(\frac{a}{\delta'}\right)^2\right)^{1/2}\right],$$

$$\tilde{\eta}_{2c,\max} \approx \frac{4V^2a^2}{\omega_1}. \tag{39.14}$$

Так как $H_{3M}$ находится в нераспадной области, то следует сравнивать $\eta_{2c}$ с $\eta_c$ определяемой из (39.8): $\eta_c(k, k') = \eta_c \ln[(x-x')^2+(k-k')^2/4k']$. Для возбуждения волн в ЖИГ при комнатной температуре накачкой частоты $\omega_p/2\pi = 9{,}4$ ГГц, когда характерная угловая ширина пакета ПСВ вблизи порога $a \approx 5\cdot10^{-2}$ (А.С.Бакай и др. [54]), получим $|\eta_c|/|\eta_{2c,\max}| \approx$ $\approx 3/2$. Таким образом результирующее нелинейное затухание и при $H \approx H_{3M}$ остается отрицательным. На рис 39.1 представлена зависимость коэффициента нелинейного затухания (нормированного на коэффициент $S \approx 2\pi g^2$ – как мы увидим в следующем параграфе, именно отношение $\eta/S$ играет важную роль в определении запорогового состояния ПСВ) от постоянного поля $H$. Черными кружками на этом рисунке отмечены данные экспериментальной работы Г.А. Мелкова [172]. Видно удовлетворительное согласие теории и эксперимента.

Рис. 39.1. Зависимость коэффициента нелинейного затухания от магнитного поля: *1* – теория для процессов слияния ПСВ и ТСВ; *2* – для процессов слияния двух ПСВ; *3* – для процессов распада. Сплошная кривая *4* описывает сумму этих процессов, точки – эксперимент

## § 40. Влияние нелинейного затухания на стационарное состояние параметрически возбужденных волн

Как и любой другой механизм, изменяющий линейные характеристики возбуждаемых волн (перенормировка частоты, накачки), нелинейное затухание определяет свойства запорогового состояния системы волн. Положительное нелинейное затухание (39.8) может играть роль механизма ограничения амплитуды возбуждаемых волн, отрицательное же (39.11), наоборот, должно приводить к жесткому возбуждению волн на пороге неустойчивости. Следует также отметить важное качественное свойство коэффициента нелинейного затухания, вычисленного в рамках кинетического уравнения: при $k' = k$ кривая $\eta(k, k')$ имеет особенность. Физический смысл этого в том, что в перенормировку декремента затухания волны с данным $k$ основной вклад вносят волны с близкими волновыми векторами. Как мы сейчас увидим, это приводит к тому, что при возбуждении волны накачкой, достаточно широкой в $k$-пространстве, возбуждаются спектры волн, также заполняющие конечные области $k$-пространства. Действительно, из-за локальности нелинейного затухания в каждой точке $k$-пространства, где накачка превышает линейное затухание, должно возбудиться число волн, достаточное для установления стационарного запорогового состояния. Рассмотрим конкретный пример параметрического возбуждения СВ. Уравнение баланса энергии, описывающее стационарное состояние ПСВ, имеет вид $\gamma_k(N) = |P_k(N)|$ и справедливо в той области $k$-пространства, где возбуждаются ПСВ. В остальной части $k$-пространства для устойчивости стационарного состояния должно выполняться условие внешней устойчивости (18.17). В случае аксиальной симметрии, реализующемся при возбуждении ПСВ в кубических ФМ, условие баланса энергии с учетом зависимости (39.2) $\gamma_k(N)$ приводит к интегральному уравнению для функции распределения ПСВ $N(x)$ по полярным углам $x = \pi/2 - \theta$:

$$\gamma + \eta \int \ln|x - x'|\, N(x')\,dx' = P(x) = P\cos^2 x. \tag{40.1}$$

Здесь мы воспользовались модельной зависимостью $P(\theta) = P\cos^2 x$. Общее решение этого уравнения локализованное в некоем интервале $-a \leqslant x \leqslant a$ и равное нулю снаружи, согласно [41] имеет вид

$$N(x) = \frac{1}{\pi\eta} \fint_{-a}^{a} \left(\frac{a^2 - t^2}{a^2 - x^2}\right)^{1/2} \frac{P'(t)\,dt}{t - x} + \frac{A}{(a^2 - x^2)^{1/2}},$$

где $P'$ – производная накачки по углу, $A$ – произвольная постоянная, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Как легко показать, ограниченное на обоих концах интервала решение существует лишь при выполнении равенства

$$\int_{-a}^{a} P'(t)\,(a^2 - t^2)^{-1/2}\,dt = 0$$

(что обеспечивается четностью функции $P(t)$) и имеет вид

$$N(x) = \frac{1}{\pi\eta} \int_{-a}^{a} \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 - t^2}\right)^{1/2} \frac{P'(t)\,dt}{t - x}. \tag{40,2}$$

Вычисленная в предыдущем параграфе поправка к декременту затухания получена в предположении $\gamma(k) - \gamma_0(k) \ll \gamma_0(k)$, что эквивалентно $|\int \eta(x, x') N(x') dx'| \ll \gamma$. Последнее условие, как мы увидим ниже, обеспечивает узость возбуждаемых пакетов ($a \ll 1$), поэтому интеграл в выражении (4.20) для $N(x)$ имеет смысл вычислять, разложив $P(t)$ при малых $t$: $P'_t = -2tP$. Пакет при этом имеет форму

$$N(x) = (2P/\pi\eta)(a^2 - x^2)^{1/2}, \tag{40.3}$$

что в силу естественного условия $N(x) \geqslant 0$ возможно лишь при $\eta \geqslant 0$. Имея в виду этот случай, подставим полученное решение в уравнение (40.1) и получим ширину пакета

$$a^2 = \frac{P - \gamma}{P \ln(2/a)} . \tag{40.4}$$

Для того чтобы определить зависимость числа волн и ширины пакета $a$ от поля накачки $h$, воспользуемся интегральным соотношением $\int N(x)\, dx = N$:

$$Pa^2/\eta = N = \frac{P - \gamma}{\eta \ln(2/a)} .$$

Отсюда, пренебрегая логарифмической зависимостью, получим

$$N = \frac{\gamma}{|S|} \frac{-c + (p(c^2+1) - 1)^{1/2}}{c^2 + 1} , \tag{40.5}$$

$$a^2 = \frac{c}{c^2+1}[-c + (p(c^2+1) - 1)^{1/2}] , \tag{40.6}$$

где $c = \eta/|S|$, $p = h^2 V^2/\gamma^2$. Как мы видели в предыдущем параграфе, в распадной области, где $\eta > 0$, величина $\eta$ сильно зависит от магнитного поля, и изменением $H$ можно менять $c$ в широких пределах. При $c \gg 1$, $a^2 \approx p^{1/2} - 1$, а в обратном предельном случае $c \ll 1, p - 1 \gg c^2$, получим $a^2 = c(p-1)^{1/2}$.

Обсудим пределы применимости полученных результатов. Проведенное в § 39 вычисление нелинейной поправки к затуханию справедливо лишь, если эта поправка мала: $\eta N \ll \gamma$.

При $c \ll 1$ это условие выполняется в широком интервале значений надкритичности $p \ll c^{-1/2}$, а при $c \gg 1$ – только при малых превышениях над порогом $p - 1 \ll 1$. Условие $\eta N \ll \gamma$ обеспечивает узость пакета, так как $a^2 \approx \eta N/\gamma \ll 1$. Важно также отметить, что конечная ширина возбуждаемого пакета возникла уже в приближении самосогласованного поля. Это, как уже было сказано, связано с сингулярностью ядра $\eta(k, k')$. Действительно, в случае решения нулевой ширины по $\theta$, получающегося в рамках уравнений без нелинейного затухания, нелинейная добавка к декременту расходится. С другой стороны, в случае аксиальной симметрии, как видим, эта расходимость довольно слабая (логарифмическая), что позволяет при вычислении интегральных характеристик исходить из простого уравнения $\gamma + \eta N = P$, не учитывающего сингулярный характер нелинейного затухания.

Обратимся теперь к случаю отрицательного нелинейного затухания. При $\eta < 0$ уравнение (40.1) (соответствующее приближению самосогласованного поля) допускает лишь решения, имеющие интегрируемую особенность:

$$N(x) = A\,(a^2 - x^2)^{-1/2} + 2P(a^2 - x^2)^{1/2}/\pi\eta.$$

Подставляя это решение в уравнение баланса энергии, получим связь $P, a$ и $A$:

$$-\frac{P^2a^2}{\eta}\ln\frac{2}{a} - \pi A\ln\frac{2}{a} = -\frac{2P}{\eta}\,\frac{P-\gamma}{P}. \tag{40.7}$$

Связь другого рода между этими тремя параметрами можно получить из соотношения $\int N(x)\,dx = N$. Таким образом, у нас в наличии однопараметрический набор решений. Которое же из них реализуется в действительности? Для ответа на этот вопрос заметим, что для любого из этих решений перенормированные затухание и накачка совпадают для всех $x$, а не только для $-a \leqslant x \leqslant a$. Это означает, что любое из решений безразлично устойчиво относительно появления волн вне интервала $[-a, a]$. Следовательно, будет реализовываться решение с максимальной (при данной надкритичности) шириной $a$. Учитывая условие $N(x) \geqslant 0$, получим, что максимальная ширина соответствует выбору $A = -Pa^2/\pi\eta$ и равна

$$a^2 = -\eta N/P, \tag{40.8}$$

т.е. совпадает с выражением (40.6) для случая $\eta > 0$ (надо лишь считать $c < 0$ и сменить общий знак), как и зависимость числа волн $N$ от безразмерной амплитуды накачки $p$ по-прежнему задается формулой (40.5), но теперь уже с $c < 0$. При этом действительно число волн имеет скачок на пороге неустойчивости:

$$N(p=1) = \frac{\gamma}{S}\,\frac{2c}{c^2+1}. \tag{40.9}$$

Ширина пакета на пороге $a^2 = 2c^2/|1 - c^2|$. В случае отрицательного нелинейного затухания критерий применимости полученных результатов значительно жестче. Условие $\eta N \ll \gamma$ приводит к требованию $|c| \ll 1$. В этом случае приведенные формулы справедливы при $p \ll 1/|c|$.

Зная $N(p)$, легко вычислить восприимчивость $\chi$ системы ПСВ. Ее мнимая часть $\chi''$ пропорциональна мощности, поглощаемой волнами, $W = \omega_p\chi''h^2/2$ и связана с числом СВ при помощи следующей формулы:

$$\chi'' = (2/h^2)\int\gamma(x)\,N(x)\,dx =$$
$$= \frac{2V^2}{S}\,\frac{[p(c^2+1)-1]^{1/2} - c}{p(c^2+1)}\{p(c^2+1)^2 - [(p(c^2+1)^2-1)^{1/2} - c]^2\}^{1/2}. \tag{40.10}$$

Графики зависимости $\chi''(p)$ при различных $c$ представлены на рис. 40.1. При $c > 0$ возникает конечный наклон $\chi''(p)$ при $p = 1$, и конечное значение $\chi'(\infty) = V^2\eta/(\eta^2 + S^2)$. Интересно отметить, что при $c < 1$ $(\eta < S)$ максимальное значение $\chi''_{max} = V^2/S$, т.е. не зависит от $\eta$ и совпадает с максимальным значением $\chi''$, вычисленным в $S$-теории без нелинейного затухания (при $c = 0$). С ростом $\eta$ положение максимума сдвигается в сторону

Рис. 40.1. Зависимость мнимой части восприимчивости $\chi''$ от амплитуды накачки: *1* – $\eta/|S| = -0{,}25$; *2* – $\eta/|S| = 0$; *3* – $|\eta|/|S| = 0{,}25$; *4* – $\eta/|S| = 1$

больших $p$: $p_m = 2S^2/(S-\eta)^2$. При $\eta > S$ восприимчивость $\chi''$ монотонно возрастает с ростом $p$.

Для $\eta < 0$ происходит, как уже говорилось, жесткое возбуждение ПСВ, сопровождаемое гистерезисом зависимости $\chi''(p)$. При прохождении $p$ через пороговое значение $p = 1$ со стороны меньших полей восприимчивость испытывает скачок при $p = 1$ от нуля до величины

$$\chi_+ = -\frac{4V^2}{S}\,\frac{c\,((c^2+1)^2 - 4c^2)^{1/2}}{(c^2+1)^2}\,.$$

При уменьшении амплитуды поля до значений ниже порогового происходит обратный скачок восприимчивости при $p_- \approx 1/(c^2+1)$, в случае $|c| \ll 1$ равный половине прямого скачка:

$$\chi_- = \chi_+/2 = 2V^2|c|/S. \qquad (40.11)$$

Явление жесткого возбуждения и гистерезиса $\chi''$ было обнаружено в 1967 г. Х. Ле-Галем, Б. Лемайром и Д. Сере в монокристаллах ЖИГ при $\omega_p/2\pi = 9{,}8$ Ггц [142]. Явление, как и было предсказано, наблюдалось в интервале магнитных полей $H_1 < H < H_2$, где нелинейное затухание является отрицательным. При $H > H_2$ эффект исчезал из-за малости $H > H_2$. Отрицательное нелинейное затухание приводит также к обнаруженной экс-

Рис. 40.2. Экспериментальная зависимость $\chi''$ от внешнего магнитного поля $M \parallel$ [100]. Кривые *1–5* соответствуют надкритичностям 0,5; 1; 2; 5; 10 дБ

периментально Г.А. Мелковым [172] характерной зависимости $|\eta|$ от постоянного магнитного поля (рис. 40.2). При небольшой надкритичности (когда справедлива изложенная выше теория) видно резкое увеличение $\chi''$ при $H = H_1$ и $H = H_2$. Действительно, как ясно из рис. 40.1, при малой надкритичности и при $c < 0$ увеличение $|c|$ приводит к увеличению восприимчивости. Функция $\chi''(H)$ обнаруживает аномалию также вблизи значений поля $H = H_{3M}$: узкий резонансный минимум, переходящий в резонансный максимум с ростом надкритичности. Это согласуется как с рис. 39.1, показывающим, что положительный вклад в нелинейное затухание, связанный со слиянием двух ПСВ, существен лишь в малой окрестности $H_{3M}$, так и с рис. 40.1, откуда видно, что положительная добавка к нелинейному затуханию уменьшает $\chi''$ при малых надкритичностях и увеличивает при больших. Возникновение скачка вблизи поля $H_{3M}$ при надкритичности, большей 8 дБ, связано с рождением второй группы пар с $\theta = \pi/2$, для которой матричный элемент процесса слияния не имеет малости, связанной с угловой шириной пакета.

## § 41. Релаксация нелинейного пакета волн в холодном термостате

В этом параграфе, написанном по результатам Г.Е. Фальковича [219] рассмотрен случай, когда число волн в нелинейном пакете много больше числа взаимодействующих с ним ТВ. В этом случае характерное время затухания малых отклонений распределения волн от равновесия, равное обратному декременту затухания $\gamma_k^{-1} \approx \Delta\omega_k / V_{n_0}^2(k) k^3$, намного превышает время трехволнового взаимодействия $\tau \approx \Delta\omega_k / V^2 N$:

$$\gamma_k \ll \tau^{-1} \ll \Delta\omega_k \ll \omega_k. \tag{41.1}$$

При этом, разумеется, искажения равновесного распределения нельзя считать небольшими, понятие декремента затухания теряет смысл, так как релаксация пакета происходит, как мы увидим, отнюдь не по экспоненциальному закону.

Мы опять начнем рассмотрение со случая, когда процессы распада волн из нелинейного пакета запрещены и его релаксация определяется исключительно слияниями ПСВ. Поставим вопрос: за какое время затухает пакет волн, удовлетворяющий условиям (41.1) после отключения накачки? Ясно, что в силу $\Delta\omega_k \gg \gamma_k, \tau^{-1}$ аномальные корреляторы $\langle A_k A_{-k} \rangle$ быстро затухнут (за время $1/\Delta\omega_k$), что и наблюдалось в экспериментах В.С. Житнюка и Г.А. Мелкова [79] а, также А.И. Смирнова и С.В. Петрова [197].

В результате для описания эволюции как пакета, так и взаимодействующих с ним тепловых волн применимы кинетические уравнения для нормальных корреляторов:

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = -N(k) \int U(k+k', k, k') [n_2(k') - n_3(k'+k)]\, dk' + \int U(k+k', k, k')\, n_2(k')\, n_3(k+k')\, dk', \tag{41.2}$$

$$\frac{\partial n_2(k')}{\partial t} = -\int U(k_1+k_1', k_1, k_1') \{[n_2(k') - n_3(k'+k_1)] N(k_1) + n_2(k')\, n_3(k'+k_1)\}\, dk_1 + \Phi(k'),$$

$$\partial n_3(k'')/\partial t = \int U(k'', k_1, k'' - k_1)\{[n_2(k'' - k_1) - $$
$$- n_3(k'')] N(k_1) - n_2(k'' - k_1) n_3(k'')\} dk_1 + \Phi(k'').$$

Нелинейная волна с волновым вектором $k$ сливается с волнами, волновые векторы которых $k'$ лежат на поверхности $\omega(k) + \omega(k') = \omega(k + k')$ (их числа заполнения обозначены $n_2(k')$). В результате слияния образуются волны с волновыми векторами $k''$ на поверхности $\omega(k) + \omega(k'' - k) = \omega(k'')$ (числа заполнения $n_3(k'')$). Слагаемые $\Phi(k')$, $\Phi(k'')$ описывают взаимодействие волн $n_2(k')$, $n_3(k'')$ с остальным термостатом. В равновесии $\Phi(k') = \Phi(k'') = 0$, при малых отклонениях $\Phi(k) = \gamma_k[n(k) - n^0(k)]$, а при отклонениях порядка $n^0(k)$ $\Phi(k) \approx \gamma_k n^0(k)$. Как видно из (41.2), взаимодействие волн устроено таким образом, что при $\Phi = 0$ разность $n_2(k') - n_3(k + k')$ уменьшается при постоянстве суммы $n_2(k') + n_3(k + k')$. Это означает, что величины $n_0(k')$, $n_3(k' + k)$ меняются на величины порядка $n_0(k')$, при этом $\Phi(k') \approx \gamma(k') n^0(k')$, и пока амплитуда нелинейного пакета удовлетворяет условию (41.1) как квадратичные по $n_2$, $n_3$ члены, так и $\Phi$ меньше слагаемых, содержащих амплитуду нелинейного пакета, в $\gamma_k \tau$ раз. Эти малые члены описывают влияние теплового шума, и в нулевом порядке по $\gamma_k \tau$ их можно не учитывать, а в первом считать не зависящими от времени. В пренебрежении тепловым шумом система (41.2) приобретает вид

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = -N(k) \int U(k + k', k, k') n(k') dk',$$
$$\frac{\partial n(k')}{\partial t} = -2n(k') \int U(k_1 + k', k_1, k') N(k_1) dk_1. \tag{41.3}$$

Здесь мы, пользуясь узостью пакета ($\Delta\omega_k \ll \omega_k$), положили $n_2(k') - n_3(k' + k_1) \approx n(k')$. Решение этой системы нелинейных интегральных уравнений – трудная задача, однако, как мы сейчас покажем, для того, чтобы сделать содержательные выводы о релаксации пакета, в этом нет необходимости. Дело в том, что система (41.3) обладает гамильтоновой структурой. В этом можно убедиться, введя обозначения $z(k) = \ln 2N(k)$, $y(k') = \ln n(k')$,

$$\frac{\partial z(k)}{\partial t} = \int U(k + k', k, k') \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta y(k')} dk',$$
$$\frac{\partial y(k')}{\partial t} = -\int U(k + k', k, k') \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z(k)} dk, \tag{41.4}$$
$$\mathcal{H} = \int \exp[z(k)] dk - \int \exp[y(k')] dk' = 2\int N(k) dk - \int n(k') dk'.$$

Гамильтонианом $\mathcal{H}$ является интеграл Мэнли – Роу. Хорошо известно, что гамильтонова система не может иметь асимптотически устойчивых стационарных состояний с конечным временем релаксации. Поэтому затухание исходного пакета, т.е. приход к равновесному состоянию, обусловлен нарушающим гамильтоновость тепловым шумом, т.е. малым взаимодействием волн $n(k')$ с термостатом:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\Delta\omega_k \int [\Phi(k') - \Phi(k' + k)] \delta(\omega(k + k')) - \omega(k) - \omega(k')) dk.$$

Отсюда можно оценить время затухания пакета $t \approx \gamma^{-1}(k')(\gamma(k')\tau)^{-1}$, где $k'$ – волновой вектор ТВ, эффективно взаимодействующий с нелинейным пакетом. Это время превышает характерное время нелинейного взаимодействия $\tau$ в $(\gamma_k \tau)^2$ раз. Добавим еще, что при эволюции в рамках уравнений (41.3) сохраняется разность $2N - \int n(k')\,dk'$, т.е. условие (41.1) остается справедливым.

Для иллюстрации сказанного решим систему уравнений (41.4) в модельном случае $U(k_1, k_2, k_3) = \text{const}$. При этом мы, естественно, отвлекаемся от деталей распределения волн $n(k')$, $N(k)$, а интересуемся только интегральными величинами. Вводя обозначения

$$N = 2\int N(k)\,dk,\ n = \Delta\omega_k \int n(k')\,\delta(\omega(k+k') - \omega(k) - \omega(k'))\,dk',$$

$$\Phi = \Delta\omega_k \int [\Phi(k') - \Phi(k+k')]\,\delta(\omega(k+k') - \omega(k) - \omega(k'))\,dk',$$

запишем

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{V^2 N n}{\Delta\omega_k},\quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{V^2 N n}{\Delta\omega_k} + \Phi.$$

При $t \approx \tau = \Delta\omega_k / V^2 \mathcal{H} \ll \mathcal{H}/\Phi$ решение имеет вид

$$N(t) = \frac{N_0 \mathcal{H} \exp(t/\tau)}{N_0 \exp(t/\tau) - n_0},\quad n(t) = N(t) - \mathcal{H} = \frac{n_0 \mathcal{H}}{N_0 \exp(t/\tau) - n_0}$$

при

$$\mathcal{H}/\Phi \gg t \gg \tau,\ N(t) = \mathcal{H} - \Phi t + \mathcal{H}(n_0/N_0)\exp(-t/\tau).$$

Видно, что за время нелинейного взаимодействия $\tau$ величина $n(t)$ падает до малого значения $\Phi/\mathcal{H}$, определяемого тепловым шумом. За это время амплитуда пакета $N$ меняется незначительно: $N_0 \to N_0 - n_0$. Далее происходит медленное затухание пакета по линейному (а не экспоненциальному) закону за счет конечности $n(t)$. Характерное время затухания $t_d \approx \mathcal{H}/\Phi$. Итак, время затухания нелинейного пакета в среде со слияниями растет с ростом амплитуды по линейному закону $t_d \backsim N$.

Обратимся теперь к случаю, когда исходная нелинейная волна может распадаться на вторичные волны, волновые векторы которых лежат на поверхности $\omega(k) = \omega(k') + \omega(k - k')$.

Обозначим их числа заполнения $n_1(k') = n(k') + n(k - k')$. В предположении справедливости условия (41.1) кинетические уравнения примут вид (переобозначим $N(k) \to 2N(k)$)

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = -N(k)\,[\int U(k, k', k - k')\,n_1(k')\,dk' +$$

$$+ \int U(k + k'', k, k'')\,n(k'')\,dk'' - \Gamma],$$

$$\frac{\partial n(k'')}{\partial t} = -n(k'')\,[\int U(k + k', k, k')\,N(k)\,dk + \gamma] + \Phi(k''), \tag{41.5}$$

$$\frac{\partial n_1(k')}{\partial t} = n_1(k')\,[\int U(k, k', k - k')\,N(k)\,dk - \gamma] + \Phi_1(k').$$

Здесь мы ввели линейный инкремент нарастания $\Gamma$, моделирующий источ-

ник и линейные декременты затухания вторичных волн $\gamma$, $\gamma_1$, которые мы для простоты приняли не зависящими от $k$, что не окажет качественного влияния на последующие результаты. Эти декременты могут быть обусловлены несобственными процессами релаксации: рассеянием на дефектах, взаимодействием с квазичастицами других сортов и т.д. Как мы увидим ниже, введение этих слагаемых не нарушает гамильтоновости системы (41.5) в отсутствие малых шумовых членов $\Phi$ и $\Phi_1$. Необходимо, однако, заметить следующее. В отличие от системы (41.2), применимой при временах, меньших $t_d$ (но много больших $\tau$), уравнения (41.5) в отсутствие $\Gamma$, $\gamma_1$ перестают быть справедливыми уже через время порядка $\tau$. За это время исходный пакет уменьшится в несколько раз, а вторичные волны $n$, $n_1$ вырастут до его уровня. Это связано с тем, что в процессах распада идет прямая перекачка энергии из нелинейного пакета в тепловые волны (сохраняется сумма $2N$ и $\int n_1(k')\,dk'$ при уменьшении разности этих величин). Однако при наличии подкачки исходного пакета $\Gamma$ и затухания вторичных волн $\gamma_1$ возможно стационарное состояние системы, не совпадающее с термодинамическим равновесием. Стационарные значения чисел волн $\bar{N}(k)$, $\bar{n}_1(k')$, $\bar{n}(k'')$ должны подчиняться уравнениям

$$\begin{aligned}
&\int U(k,k',k-k')\,\bar{n}_1(k')\,dk' + \int U(k+k'',k,k'')\,\bar{n}(k'')\,dk'' = \Gamma,\\
&\int U(k+k'',k,k'')\,\bar{N}(k)\,dk = -\gamma + \Phi(k'')/\bar{n}(k''),\\
&\int U(k,k',k-k')\,\bar{N}(k)\,dk = \gamma_1 - \Phi_1(k')/\bar{n}_1(k').
\end{aligned} \tag{41.6}$$

При $\gamma_1 \gg \Gamma$ для состояний системы, близких к стационарному, выполняется условие (41.1), и в уравнениях (41.6) $\Phi$, $\Phi_1$ – малые члены, которые в нулевом порядке можно не учитывать, а в первом считать не зависящими от $N(k)$, $n_1(k')$, $n(k'')$.

Покажем теперь, что любое начальное условие, удовлетворяющее (41.1), релаксирует к стационарным значениям (41.6). За время порядка $\tau$ разность чисел заполнения вторичных волн, участвующих в слияниях $n(k'')$, уменьшается до малого значения, определяемого тепловым шумом. Поэтому мы в дальнейшем пренебрежем влиянием процессов слияния на эволюцию пакета, так как оно приводит лишь к перенормировке $\Gamma$ на малую величину. Выражая $\Gamma$ и $\gamma$ из (41.6), перепишем систему (41.5) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial n_1(k')}{\partial t} = -n_1(k')\int U(k,k',k-k')\,[N(k)-\bar{N}(k)]\,dk +\\
&+\Phi_1(k')\,[1-n_1(k')/\bar{n}_1(k')],\\
&\frac{\partial N(k)}{\partial t} = -N(k)\int U(k,k',k-k')\,[n_1(k')-\bar{n}_1(k')]\,dk'.
\end{aligned} \tag{41.7}$$

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\{N(k),n_1(k')\} = \int [N(k)-\bar{N}(k)\ln N(k)]\,dk +\\
&+\int [n_1(k')-\bar{n}_1(k')\ln n_1(k')]\,dk'.
\end{aligned}$$

Как видно, $\mathcal{H}$ ограничен снизу, причем минимум достигается в стационарном состоянии

$$\mathcal{H}\{N(k),n_1(k')\} \geqslant \mathcal{H}\{\bar{N}(k),n_1(k')\} = \bar{\mathcal{H}}.$$

Вычисляя его производную по времени, получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\int \Phi_1(k') \{[n_1(k') - \bar{n}_1(k')]^2 / n_1(k') \bar{n}_1(k')\} dk' \leqslant 0.$$

Таким образом, в отсутствие шума $\mathcal{H}$ сохраняется (переписав (41.7) в переменных $z = \ln N(k)$, $x = \ln n_1(k)$, можно убедиться, что $\mathcal{H}$ является гамильтонианом системы (41.7) при $\Phi = \Phi_1 = 0$). Наличие же теплового шума приводит к тому, что произвольное начальное распределение, удовлетворяющее критерию (41.1), за конечное время эволюционирует к стационарному (41.6). Это время $t_d$ можно оценить так:

$$\frac{1}{t_d} \approx \frac{1}{\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}} \int \Phi(k') \frac{n_1(k') - \bar{n}_1(k')}{n_1(k') \bar{n}_1(k')} dk'. \tag{41.8}$$

Отыскивая минимум этого выражения, легко установить, что дольше всего протекает заключительная стадия эволюции, когда $\mathcal{H}$ близко к $\bar{\mathcal{H}}$. При этом

$$\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}} = \int \frac{[N(k) - \bar{N}(k)]}{\bar{N}(k)} dk + \int \frac{[n_1(k') - \bar{n}_1(k')]^2}{\bar{n}_1(k')} dk'.$$

(Напомним, что во всех интегралах, содержащих $n_1(k')$, интегрирование идет по поверхности $\omega(k') + \omega(k - k') = \omega(k)$.)

Линеаризуя (3.7) вблизи стационара, для интегральных величин $\delta N$ и $\delta n$ получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{\partial^2 \delta N}{\partial t^2} = -\omega^2 \delta N, \ \omega^2 = (\bar{N}/\Delta\omega_k) \int |V(k, k', k - k')|^4 \delta(\omega(k) -$$

$$- \omega(k') - \omega(k - k')) n_1(k') dk' \approx \gamma_1 \Gamma.$$

Такое же уравнение получается для интегральной величины:

$$\delta n = \Delta\omega_k \int [n_1(k') - \bar{n}_1(k')] \delta(\omega(k) - \omega(k') - \omega(k - k')) dk'.$$

Усредняя по периоду колебаний $T \approx 2\pi/(\gamma_1 \Gamma)^{1/2}$, получим соотношение $\langle \delta N^2 \rangle / \bar{N} = \langle \delta n^2 \rangle / \bar{n}$ — аналог теоремы вириала. Возвращаясь к оценке времени релаксации, находим, что

$$t_d \approx \max_{k'} [\bar{n}_1(k') / \Phi_1(k')] \approx \gamma^{-1}(k') [\Gamma / \gamma(k')]. \tag{41.9}$$

Итак, обусловленная распадами эволюция нелинейного пакета со слабой подкачкой в среде с сильным затуханием вторичных волн представляет собой осцилляции с частотой $(\gamma_1 \Gamma)^{1/2}$, затухающие к стационарному решению (41.6). Время релаксации превышает период колебаний, если $\gamma_k \ll \Gamma \ll \gamma_1$, т.е. когда ведущий вклад в затухание тепловых волн вносят несобственные процессы релаксации. Для наблюдения этих осцилляций следует включить достаточно мощный ($\Gamma \gg \tau^{-1}$) источник (например, параметрическую накачку) на время, меньшее $\tau$, а затем выключить его, оставив слабую ($\Gamma \ll \gamma_1$) подкачку и регистрируя поглощаемую мощность. Измеряя частоту осцилляций, мы получим способ определения времени релаксации волн, не связанных непосредственно с накачкой.

В заключение этого параграфа следует сказать, что описанные здесь результаты (рост времени релаксации $t_d \sim N$ с увеличением амплитуды

пакета в среде со слияниями и возможность осцилляций в среде с распадами) являются достаточно универсальными, т.е. не зависят от конкретного вида матричных элементов и законов дисперсии (лишь бы выполнялись условия (41.1) и соответствующие процессы были разрешены законами сохранения).

## § 42. Релаксация монохроматической волны в нелинейной среде

В случае пакета малой ширины по частотам $\Delta\omega_k \ll \gamma_k$ кинетическое уравнение неприменимо ни для описания эволюции самого пакета, ни для описания эволюции взаимодействующих с ним тепловых волн из узкого слоя вблизи "резонансных" поверхностей $\omega(k+k') = \omega(k) + \omega(k')$, $\omega(k-k') + \omega(k') = \omega(k)$. Необходимо развить другой метод, явно учитывающий возможность сильной фазовой корреляции в каждой паре волн с волновыми векторами $k'$ и $k-k'$ (или $k+k'$), участвующих в процессах релаксации. Мы сделаем это наиболее простым и наглядным образом. А именно, будем исходить из динамических уравнений движения для амплитуд волн около резонансной поверхности, а их взаимодействие со всеми остальными волнами опишем феноменологически – методом случайных сил Ланжевена (В.С. Львов, [156]).

Рассмотрим для определенности процесс слияния и запишем динамические уравнения движения для канонических амплитуд волн $a(k')$, $a(k'')$ вблизи резонансной поверхности:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k') + \gamma(k')\right] a(k') + \\
&+ iV(k, k', k'') \exp(i\omega(k)t) A^* a(k'') = f(k', t), \\
&\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k'') + \gamma(k'')\right] a(k'') + \\
&+ iV^*(k, k', k'') \exp(-i\omega(k)t) A a(k') = f(k'', t).
\end{aligned} \tag{42.1}$$

Здесь $A$ – амплитуда монохроматической волны, $f(k, t)$ – ланжевеновская случайная сила с коррелятором

$$(f^2)_{k\omega} = \gamma_k n_0(k)/\pi.$$

При записи уравнений (42.1) мы учли, что интересующая нас система волн $a(k')$, $a(k'')$ сосредоточена в узком слое и запасенная в ней энергия существенно меньше общей энергии остальных волн. Поэтому волны вне этого слоя (их естественно назвать термостатом) можно считать находящимися в термодинамическом равновесии, а их фазы – почти случайными. Это позволило в уравнениях (42.1) эффективно описать взаимодействие выделенной системы $a(k)$, $a(k'')$ с термостатом: слагаемые $\gamma(k')\,a(k')$, $\gamma(k'')\,a(k'')$ описывают "трение волн о термостат". Случайные силы $f(k', t)$, $f(k'', t)$ имитируют беспорядочные толчки со стороны термостата, приводящие в среднем к увеличению энергии волн $a(k')$, $a(k'')$. В результате при $A = 0$ корреляторы $n(k')$, $n(k'')$ релаксируют, как и должно быть, не до нуля, а к термодинамически равновесным значениям $n_0(k')$, $n_0(k'')$.

С одной стороны, поток энергии от исходной нелинейной волны в среду равен $2\omega_k \gamma_k |A|^2$, а с другой стороны, он равен скорости изменения энергии волновой системы $\partial \langle \mathcal{H}_{\text{int}} \rangle / \partial t$, где

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \tfrac{1}{2} \int dk\, dk'\, dk''\, [V^*(k, k', k'')\, a_k a_{k'} a^*_{k''} + \text{к.с.}]\, \delta(k + k' - k''). \quad (42.2)$$

Приравнивая два выражения для потока энергии, получим формулу для декремента затухания нелинейной волны в процессах слияния:

$$\gamma_k = \operatorname{Im} \int dk' \int d\omega'\, d\omega''\, V(k + k', k, k') \times$$
$$\times \exp i(\omega_k + \omega' - \omega'') \langle a(k', \omega')\, a(k + k', \omega'') \rangle. \quad (42.3)$$

Разложив в (42.1) $a(k', t)$ и $a(k'', t)$ в интеграл Фурье, выразим $a(k', \omega')$ и $a(k'', \omega'')$ через фурье-компоненты случайных сил $f(k', \omega')$ и $f(k'', \omega'')$ и подставим результаты в (42.3). Учитывая, что $\langle f(k, \omega)\, f^*(k', \omega') \rangle = (f^2)_{k\omega}\, \delta(k - k')\, \delta(\omega - \omega')$, и используя выражение для $(f^2)_{k\omega}$ и интегрируя по $\omega'$ и $\omega''$, получим

$$\gamma_k = \int dk' \,|\, V(k + k', k, k') |^2 \times$$
$$\times [n_0(k') - n_0(k - k')][\gamma(k') + \gamma(k + k')] / \{[\omega(k) + \omega(k') - \omega(k + k')]^2 +$$
$$+ [\gamma(k') + \gamma(k + k')]^2 [1 + |\, V(k + k', k, k') A |^2 / \gamma(k')\gamma(k + k')]\}^{-1}. \quad (42.4)$$

При $A = 0$ этот результат отличается от полученного из кинетического уравнения конечной шириной резонанса, определяемой суммой затуханий $\gamma(k') + \gamma(k + k')$. В случае, когда процессы слияния разрешены законами сохранения, последняя формула упрощается до

$$\gamma_k = \int dk' \,|\, V(k + k', k, k') |^2 [n_0(k') - n_0(k + k')]\, \delta(\omega(k + k') -$$
$$- \omega(k) - \omega(k'))[1 + |\, V(k + k', k, k') |^2 A^2 / \gamma(k')\gamma(k + k')]^{-1/2}. \quad (42.5)$$

Эта формула отличается от (39.3) только присутствием радикала в знаменателе. Как видим, и в случае монохроматической волны декремент затухания убывает с ростом ее амплитуды (так называемый "эффект просветления среды"). При больших значениях $A$ время затухания монохроматической волны возрастает с ростом интенсивности по корневому закону $t_d \sim A \sim N^{1/2}$, в отличие от полученного в § 40 для широкого пакета линейного закона.

При изучении затухания монохроматической волны в процессах распада следует исходить из уравнений движения для амплитуд волн $b(k', t)$ и $b(k'', t)$, лежащих вблизи поверхности $\omega(k') + \omega(k - k') = \omega(k)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k') + \gamma(k')\right] b(k') + iV(k', k'', k) \times$$
$$\times A \exp(-i\omega(k)\, t)\, b^*(k'') = f(k', t),$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - i\omega(k'') + \gamma(k'')\right] b^*(k'') - iV(k', k'', k)\, A^* \times \quad (42.6)$$
$$\times \exp(i\omega(k)\, t)\, b(k') = f^*(k'', t),$$

и аналогичным образом получить из них выражение для декремента затухания:

$$\gamma_k = \tfrac{1}{2} \int dk' \, | V(k, k', k - k') |^2 \, [n_0(k') + n_0(k - k')] \delta(\omega(k) -$$

$$- \omega(k') - \omega(k - k'))[1 - | V(k, k', k - k') |^2 A^2 / \gamma(k') \gamma(k - k')]^{-1/2}. \quad (42.7)$$

Для процессов распада, таким образом, $\partial\gamma_k / \partial A > 0$. Амплитуда волны

$$A_1 = \min \{ [\gamma(k') \gamma(k - k')]^{1/2} / | V(k, k', k - k') | \}, \quad (42.8)$$

при которой радикал обращается в нуль, а $\gamma_k$ – в бесконечность, соответствует порогу распадной неустойчивости монохроматической волны. При $A > A_1$ амплитуды $b(k')$, $b(k - k')$ растут во времени экспоненциально и формулы (42.5), (42.7), полученные в линейном по этим амплитудам приближении, несправедливы.

Следует отметить, что формулы (42.5), (42.7) описывают асимптотические по времени значения $\gamma_k$. Действительно, в момент включения монохроматической волны при $t = 0$ волны в среде еще не успели отклониться от равновесия, и затухание будет определяться обычными формулами (39.3) и (39.4). И лишь через время $t > \gamma^{-1}(k), \gamma^{-1}(k')$ волны вблизи резонансной поверхности отрелаксируют к новому стационарному состоянию, в котором затухание определяется формулами (42.5) и (42.7).

## Задачи

**Задача 8.1.** Найти изменения химического потенциала и температуры СВ, вызванные пакетом ПСВ в ФМ (В.Б. Черепанов, [229]).

*Указание.* Помимо главного обменного взаимодействия ТСВ, необходимо учесть относительно более слабое магнитодипольное взаимодействие и взаимодействие с фононным термостатом.