

ST²-ТЕОРИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН

В настоящей главе излагается регулярная теория параметрического возбуждения волн, учитывающая не только самосогласованное взаимодействие ПСВ, линейное по их гамильтониану взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}}$, но и рассеяние СВ друг на друге, впервые возникающее в теории возмущений во втором порядке по $\mathcal{H}_{\text{int}}$. В некотором смысле вторым порядком теории возмущений можно и ограничиться — не в уравнениях для n_k и σ_k , а в выражениях для массовых операторов Σ , Π , Φ и Ψ , суммированных по Дайсону. Таким образом, по сравнению с операторами в S -теории массовые операторы приобретают добавки, пропорциональные квадрату матричных элементов $T(k, k_1, k_2, k_3)$ гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{int}}$. Поэтому теорию, учитывающую как самосогласованное "S-взаимодействие" пар ПСВ, так и "T²-рассеяние" их друг на друге, естественно назвать ST²-теорией.

Если S -теория позволила определить число ПСВ n_k и фазовые соотношения через σ_k , то ST²-теория позволит нам вычислить величины $n_{k\omega}$ и $\sigma_{k\omega}$, определяющие ширину пакета ПСВ по частотам $\Delta\omega$, ширину распределения ПСВ в k -пространстве вблизи резонансной поверхности $\Delta\omega_k$, угловые размеры пакета ПСВ, а также предел применимости S -теории.

Основой для построения такой теории служит изложенная в гл. 7 диаграммная техника Уайльда, учитывающая аномальные корреляции амплитуд ПСВ. Уравнения ST²-теории в терминах диаграммной техники возникают при пренебрежении перенормировкой вершин. Впервые эти уравнения были получены автором в 1975 г. [157]. Тогда же были оценены предел применимости S -теории и ширина пакета ПСВ в k -пространстве $\Delta\omega_k$. Спустя несколько лет, в 1977 — 1979 гг., Г.А. Мелков и И.В. Круценко [133, 177] провели серию изящных экспериментов, в которых они измерили частотную ширину пакета $\Delta\omega$ и его угловые размеры $\Delta\theta_k$, $\Delta\varphi_k$. Успехи экспериментаторов стимулировали дальнейшее развитие ST²-теории, и вскоре удалось определить форму пакета ПСВ не только в изотропном ферромагнетике, но и учесть такие принципиально важные факторы, как анизотропия, рассеяние на неоднородностях, тепловой шум. В результате ST²-теория для ФМ была доведена почти до той же степени детализации, что и S -теория.

До настоящего времени эта теория была представлена в виде разрозненных публикаций и впервые излагается последовательно в этой главе. Исходные уравнения S -теории выписаны в § 36 гл. 7. В § 50 этой главы исследованы допороговый подогрев СВ, влияние теплового шума и показано, что при пренебрежении членами $\propto T^2$ уравнения ST²-теории переходят в уравнения S -теории, § 51 посвящен изучению наиболее простого случая, когда частота упругого рассеяния на неоднородностях велика по сравнению с частотой собственных процессов релаксации. При этом распределение ПВ почти изотропно, а аномальные корреляторы и функции Грина малы по сравнению с нормальными. В результате удается относительно просто определить форму пакета ПСВ по частотам. В § 52 исследован интересный

случай изотропной однородной среды, служащий ступенью для изучения реальных задач. Здесь же сделан следующий шаг в упрощении столкновительного члена, связанный с выражением аномального коррелятора через нормальный. Определены величины $\Delta\omega$, $\Delta\omega_k$, оценен вклад высших диаграмм. В § 53 развивается ST^2 -теория для ФМ при параллельной накачке. Если пренебречь малой кристаллографической анизотропией, то задача обладает аксиальной симметрией и пакет ПСВ локализован вблизи экватора резонансной поверхности в k -пространстве. Определен угловой размер пакета ПСВ $\Delta\theta_k$, его ширина $\Delta\omega$ и $\Delta\omega_k$. Обсуждена постановка эксперимента по измерению частотной ширины $\Delta\omega$, проведено сравнение этой величины с предсказаниями теории. В § 54 исследовано угловое распределение ПСВ в кубическом ФМ, в котором из-за анизотропии кристалла порог параметрической неустойчивости достигается уже не на всем экваторе, а лишь в некоторых точках экватора резонансной поверхности. Поэтому за порогом распределение ПСВ представляет собой совокупность нескольких узких пакетов. Определена форма этих пакетов и проведено сравнение с результатами эксперимента. В последнем параграфе этой главы (§ 57) рассматривается влияние рассеяния ПСВ друг на друга на их коллективные колебания. В частности, в приближении S -теории существуют безразлично устойчивые моды колебаний, которые в рамках ST^2 -теории приобретают малую, но вполне конечную частоту и затухание.

§ 50. Влияние тепловых спиновых волн на распределение параметрических спиновых волн в k , ω -пространстве — теория и эксперимент

В гл. 8 мы уже рассматривали вопрос о взаимодействии параметрически возбужденных спиновых волн с тепловыми. В частности, было показано, что возбуждение ПСВ приводит к отклонению функции распределения ТСВ $n(k)$ от равновесной $n_0(k)$ (34.10) и, как результат этого, возникает зависимость затухания ПСВ от их чисел заполнения $n_p(k)$. В § 40 в рамках S -теории было изучено влияние нелинейного затухания на стационарное состояние ПСВ, т.е. на одновременные функции распределения $n(k)$ и $\sigma(k)$. При выходе за рамки S -теории при изучении взаимодействия ПСВ и ТСВ возникают новые эффекты, в частности допороговый подогрев пакета ПСВ, уширение функций распределения $n(k, \omega)$ и $\sigma(k, \omega)$ по ω и т.д. Описанию основных теоретических и экспериментальных результатов в этой области и посвящен настоящий параграф.

50.1. Процедура разделения волн на параметрические и тепловые. Уравнения Дайсона — Уайльда (36.2) — (36.6) описывают волны во всем k , ω -пространстве и в отсутствие накачки имеют, как показано в гл. 7, термодинамически равновесное решение (34.10) — распределение Рэля — Джинса. Накачка изменяет числа заполнения $n(q)$ не только в области параметрического резонанса, но и во всем q -пространстве. Поэтому возникает вопрос: какие волны следует считать параметрически возбужденными, а какие по-прежнему относить к тепловым? Качественно можно ответить так: ПСВ — это те пары СВ, у которых фаза скоррелирована с фазой накачки, остальные СВ можно назвать тепловыми, если $n(k)$ для них не слишком отличаются от равновесного уровня. Формула для чис-

ла ПВ может быть записана следующим образом:

$$n_p(q) = n(q) - n_t(q), \quad n_t(q) = \Phi_q [(\omega - \omega_q)^2 + \Gamma_q^2]^{-1}. \quad (50.1)$$

Здесь $n_t(q)$ определено по аналогии с (35.1). Отличие в том, что в (50.1) величины $\Sigma(q)$, $\Phi(q)$ должны выражаться не через термодинамически равновесные значения $n_k = n_k^0$ (34.10), а через величины реального спектра $n_t(q)$, $n_p(q)$, $\sigma(q)$, вычисленные в присутствии накачки. При таком определении $n_t(q)$ везде является плавной функцией k , а далеко от резонансной поверхности при $|\omega_k - \omega_p/2| \gg \Gamma$ асимптотически стремится к решению кинетического уравнения, в котором учитывается влияние пакета ПСВ (см. § 39). Величины же $n_p(k) = \int n_p(q) d\omega$ и $\sigma(k)$ быстро спадают при удалении от резонансной поверхности. Можно показать, что $n_p, \sigma \sim (\omega_k - \omega_p/2)$.

Следует отметить, что в приведенных рассуждениях мы нигде не использовали конкретный вид взаимодействия волн, поэтому определения параметрических и тепловых волн (50.1) справедливы при любом виде взаимодействия, в частности и тогда, когда существенны трехволновые процессы, взаимодействие с фононами и т.д.

50.2. Вывод исходных уравнений. Применим теперь развитый в гл. 7 аппарат для исследования пакета ПСВ при относительно малых амплитудах накачки, когда главный вклад в МО дает рассеяние ТСВ друг на друге. Для этого необходимо в выражениях для Σ , Π , Φ и Ψ (36.6) подставить $n(q) = n_t(q) + n_p(q)$, $\sigma(q)$ и исследовать полученные выражения. Результат, полученный в нулевом по n_p, σ приближении, нам известен — это формула (34.10). Формула

$$\omega_k^0 = \omega_k + 2 \int T(k, k') n_t(q') dq'$$

при $n_t(q) = n_0(q)$ описывает зависимость частоты ПВ от температуры среды. Будем считать, что эта зависимость уже включена в определение ω_k , так что

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2 \int T(k, k') n_p(q') dq'. \quad (50.2)$$

Выражения (36.6) для Σ , Π , Φ и Ψ квадратичны по коэффициентам гамильтониана взаимодействия T . Это позволяет вначале ограничиться их вычислением в нулевом приближении по амплитуде ПСВ. Вычисление предела применимости этого приближения по амплитудам n_p, σ и изучение эффектов, возникающих при больших амплитудах, будет проведено ниже.

Подставив в уравнения Уайльда (36.3) функцию Грина из (36.4), положив $\Psi(q) = 0$, получим

$$\begin{aligned} n(q) &= [(\epsilon + \tilde{\epsilon}_k)^2 + \Gamma_k^2 + |P_k|^2] \Phi(q) / |\Delta_q|^2, \\ \sigma(q) &= 2P_k \Phi(q) (i\Gamma_k + \tilde{\epsilon}_k) / |\Delta_q|^2, \\ \Delta_q &= \Gamma_k^2 - |P_k|^2 - 2i\Gamma_k \epsilon - \epsilon^2, \\ \epsilon &= \omega - \omega_p/2, \quad \tilde{\epsilon}_k = \tilde{\omega}_k - \omega_p/2. \end{aligned} \quad (50.3)$$

Отметим, что эти уравнения являются интегральными в четырехмерном q -пространстве. Однако, пользуясь узостью пакетов $n_p(q)$ и $\sigma(p)$ по ω и ω_k , можно редуцировать их до двумерных интегральных уравнений для интегральных по ω и $\tilde{\omega}_k$ величин $n_p(\Omega)$ и $\sigma(\Omega)$, аналогично тому, как это

делается в S -теории. Для этого определим $n_p(\Omega)$ и $\sigma(\Omega)$ по формулам

$$\begin{aligned} n_p(\Omega) &= k_\Omega^2 \int n_p(k, \omega) d\omega dk, \\ \sigma(\Omega) &= k_\Omega^2 \int \sigma(k, \omega) d\omega dk, \end{aligned} \quad (50.4)$$

в которых k_Ω — радиус резонансной поверхности $2\tilde{\omega}_k = \omega_p$ в точке с угловой координатой Ω , k — отклонение k от k_Ω по нормали к поверхности. Далее, пренебрегая зависимостями γ_k , P_k от k , проинтегрируем (50.4) по ω и k . В результате получим

$$\begin{aligned} n_p(\Omega) &= \pi^2 k_\Omega^2 \Phi(\Omega) |P(\Omega)|^2 / F(\Omega) \nu(\Omega) \nu(\Omega), \\ \sigma(\Omega) &= i\pi^2 k_\Omega^2 \Phi(\Omega) P(\Omega) / \nu(\Omega) \nu(\Omega), \\ \nu(\Omega) &= \partial\omega_k / \partial k \Big|_{2\tilde{\omega}_k = \omega_p}, \quad \nu^2(\Omega) = \gamma^2(\Omega) - |P(\Omega)|^2. \end{aligned} \quad (50.5)$$

Подчеркнем, что при выводе этих формул мы не предполагали, что ТСВ находятся в термодинамическом равновесии. Поэтому они годятся и для исследования ситуаций с сильным нелинейным затуханием. Это мы сделаем ниже, а сейчас будем считать, что ТСВ находятся в равновесии и, следовательно, основным механизмом ограничения параметрической неустойчивости СВ является фазовый механизм S -теории. Тогда в формулы (50.5) вместо $\Gamma(\Omega)$ и $\Phi(\Omega)$ можно подставить их термодинамически равновесные значения. В результате получим

$$\begin{aligned} n_p(\Omega) &= \pi k_\Omega^2 n_0 |P(\Omega)|^2 / \nu(\Omega) \nu(\Omega), \\ \sigma(\Omega) &= i\pi k_\Omega^2 n_0 \gamma(\Omega) P(\Omega) / \nu(\Omega) \nu(\Omega). \end{aligned} \quad (50.6)$$

Подставляя отсюда $\sigma(\Omega)$ в стандартное в S -теории выражение для самосогласованной накачки $P(\Omega)$, получаем нелинейное интегральное уравнение для $P(\Omega)$ на резонансной поверхности:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= hV(\Omega) + i\pi n_0 \int S(\Omega, \Omega') k_\Omega^2 \gamma(\Omega') P(\Omega') \times \\ &\times [\gamma^2(\Omega') - |P(\Omega')|^2]^{-1/2} d\Omega' / \nu(\Omega'). \end{aligned} \quad (50.7)$$

Решив это уравнение, можно из формулы (50.6) определить интегральные характеристики ПВ $n_p(\Omega)$ и $\sigma(\Omega)$ на резонансной поверхности, а с помощью формул (50.3) исследовать структуру распределений $n(q)$ и $\sigma(q)$ вблизи нее. В частности, интегрируя (50.3) только по ω , имеем

$$\begin{aligned} n_p(k) &= n_0(k) |P(\Omega)|^2 / [\tilde{\epsilon}_k^2 + \nu^2(\Omega)], \\ \sigma(k) &= n_0(k) P(\Omega) [\tilde{\epsilon}_k + i\gamma(\Omega)] / [\tilde{\epsilon}_k^2 + \nu^2(\Omega)]. \end{aligned} \quad (50.8)$$

Таким образом, распределение $n_p(k)$ и $\sigma(k)$ по $|k|$ имеет вид функции Лоренца с максимумом на резонансной поверхности и полушириной $\nu(\Omega)$. Уравнения (50.8) преобразовываются к виду

$$\begin{aligned} \gamma(k) n(k) + \text{Im}(P^*(k) \sigma(k)) &= \gamma(k) n_0(k), \\ [\gamma(k) + i\tilde{\epsilon}_k] \sigma(k) + iP(k) n(k) &= 0. \end{aligned} \quad (50.9)$$

Эти уравнения впервые выписаны В.Е. Захаровым и В.С. Львовым в 1971 г. [98] из интуитивных соображений и подробно исследованы там же. Уравнения (50.9) отличаются от основных уравнений S -теории (18.9) только наличием неоднородного члена $\gamma(k) n_0(k)$, описывающего влияние тепловых флуктуаций на систему ПВ.

50.3. Допороговый подогрев и влияние теплового шума при фазовом механизме ограничения. Вначале мы рассмотрим сферически-симметричный случай, в котором все характеристики задачи γ , P и т.д. не зависят от угловой координаты Ω . Тогда из (50.9) и (50.7) следует, что при $p > 1$ (когда значение p выше формального порога $p = h^2/h_{th}^2 = 1$) зависимость $N(p)$ близка к соответствующему результату S -теории:

$$SN(p) = \gamma(p-1)^{1/2} [1 + \xi^2/2(p-1)^2],$$

$$\nu = \gamma[\xi^2/(p-1)]^{1/2} \ll \gamma. \quad (50.10)$$

Здесь ξ^2 — малый параметр, характеризующий влияние тепловых флуктуаций:

$$\xi = (2\pi)^2 k^3 Sn(kv)^{-1}. \quad (50.11)$$

В кубических ФМ задача обладает аксиальной симметрией, волны возбуждаются вблизи экватора резонансной поверхности $\theta_k = \pi/2$, $\omega_k = \omega_p/2$. В этом случае при $p^{-1} > \exp(-\xi^{-1}(p-1)^{1/2})$

$$SN(p) = \gamma(p-1)^{1/2} [1 + p^2 \exp(-\xi^{-1}(p-1)^{1/2})],$$

$$\nu^2 = \nu_0^2 + \alpha\gamma^2(\theta - \pi/2)^2, \quad \nu_0 = \gamma \exp(-\xi^{-1}(p-1)^{1/2}), \quad \alpha \approx 1. \quad (50.12)$$

Видно, что в этом случае влияние теплового шума является экспоненциально слабым.

50.4. Переход к S -теории. В заключение этого параграфа обсудим, каким образом из уравнений ST^2 -теории можно получить уравнения S -теории. Ответ на этот вопрос в значительной степени уже получен. Действительно, при выводе уравнений (50.9) мы предполагали, что $\Phi = \Phi_0$, $\Psi = 0$, т.е. пренебрегали влиянием ПСВ в диаграммах второго порядка по вершине T . Если же пренебречь и тепловым шумом ($\Phi_0 \rightarrow 0$), но учитывать влияние ПСВ в первом порядке по взаимодействию, то уравнения (50.9) превратятся в уравнения S -теории. При этом, чтобы найти стационарное решение однородных уравнений (18.9), необходимо проводить исследование полученного решения на устойчивость. В уравнениях ST^2 -теории такая трудность не возникает, так как учет шума доопределяет задачу и приводит к регулярному решению.

50.5. Распределение ПСВ по частотам в S -теории с тепловым шумом. Спектральный состав ПСВ, т.е. величину

$$n_p(\Omega, \omega) = k_\Omega^2 \int n_p(k, \omega) dk, \quad (50.13)$$

в приближении S -теории с тепловым шумом вычислить довольно просто. В соответствии с (50.3) она определяется только структурой функций Грина (точнее — их знаменателем $\Delta(k, \omega)$) и может быть получена прямым интегрированием (50.3) по k :

$$n_p(\Omega, \omega) = \frac{\gamma^3(\Omega) n_0(k_p) k_\Omega^2}{\nu_\Omega [\frac{1}{2}(\nu^2 + (\nu^4 + 4\Gamma^2 \epsilon^2)^{1/2} (\nu^4 + 4\Gamma^2 \epsilon^2))^{1/2}]}. \quad (50.14)$$

Ширина этой функции по ω есть $\nu^2/2\gamma$, форма линии отличается от лоренцевой — имеет более широкие крылья. Величина ν , определяющая ширину

линии, зависит от доминирующего механизма ограничения и надкритичности. При фазовом механизме ν убывает с уменьшением надкритичности в соответствии с (50.5), при ограничении нелинейным затуханием вначале убывает и потом при $p > 9$ растет.

50.6. Электромагнитное излучение параметрическими СВ. Исследование излучения ПСВ интересно прежде всего тем, что позволяет определить спектральный состав ПСВ, т.е. величину $n(\omega)$ (50.14). Надо сказать, что прямое электромагнитное излучение ПСВ с $k \approx 10^4 \div 10^6 \text{ см}^{-1}$ является чрезвычайно слабым вследствие закона сохранения импульса $k_p \ll k$. Тем не менее применение современной СВЧ техники позволило провести такие исследования в недавнее время.

Частота СВ, возбуждаемых методом параллельной накачки. Из законов сохранения следует, что параметрически возбуждаются СВ на частоте, равной половине частоты накачки. Тем не менее остается важный вопрос о том, с какой точностью выполняются эти условия в эксперименте: действительно ли возбуждаются СВ только с частотой ω_k , равной точно $\omega_p/2$, спектральное распределение $n(\omega_k)$ имеет вид δ -функции или возбуждение происходит в некоторой полосе частот $\delta\omega_k$. С небольшой точностью установить то, что возбуждаемые СВ имеют частоту $\omega_k = \omega_p/2$, можно, исследуя область существования дополнительного поглощения, а также по наблюдению особенности в релаксации ПСВ в точке пересечения магнотонного и фононного спектров, известных из других опытов.

Наиболее прямым и точным методом определения спектрального распределения ПСВ может служить изучение спектрального состава вызванного ими излучения $I(\omega)$. Исследования в АФМ ЛП были проведены Б.Я. Котюжанским и др. [129, 131]. Использовались монокристаллы FeVO_3 (образцы имели форму цилиндра диаметром 2 мм и высотой 3 мм). Ось цилиндра совпадала с главной осью кристалла. СВЧ накачка осуществлялась магнетронным генератором непрерывного действия с частотой $\omega_p = 2\pi \cdot 35,6 \text{ ГГц}$ и мощностью 10 Вт. Образец помещался так, что одна его часть выступала внутрь резонатора в пучность магнитного СВЧ поля h , а другая — в стандартный волновод 1,5-см СВЧ диапазона. Поля h и H лежали в базисной плоскости кристалла и были параллельны. При помощи СВЧ фильтров выходные сигналы с частотами ω_p и $\omega_p/2$ отделялись друг от друга. Развязка между каналами была 40 дБ. Сигнал на частоте $\omega_p/2$ принимался супергетеродинным приемником с чувствительностью 10^{-14} Вт и анализировался с помощью анализатора спектра. В результате экспериментов было установлено, что за порогом параметрического возбуждения одновременно с поглощением СВЧ мощности накачки на частоте ω_p появляется излучение из образца на частоте $\omega_p/2$. Интенсивность излучения $I(\omega)$ зависела от времени случайным образом. Осциллограмма выходного сигнала приемника имела вид всплесков с характерной длительностью $\tau \approx 10^{-6} \text{ с}$. Принципиально важным результатом эксперимента было то, что центр полосы излучения совпадал с $\omega_p/2$ с точностью до $2\pi \cdot 20 \text{ кГц}$, т.е. с относительной точностью 10^{-6} .

§ 51. Распределение параметрических спиновых волн по частотам при сильном упругом рассеянии

51.1. Исходные диаграммные уравнения. Как отмечалось в предыдущей главе, упругое рассеяние не меняет числа и частоты ПСВ, а лишь нарушает их связь с накачкой, приводя к двум эффектам — сбою фазы в парах волн и к изотропизации распределения ПСВ. Если частота упругого рассеяния волн больше чем все остальные частоты релаксации, то распределение ПСВ является изотропным, а влияние параметрической накачки и рассеяние ПСВ друг на друге можно учитывать как малые возмущения. В этом приближении возникает простое уравнение для функции распределения ПСВ по частотам, которое удастся решить аналитически и выделить из класса его стационарных решений единственное устойчивое. Поэтому мы начинаем изложение результатов ST^2 -теории с такого, на первый взгляд усложненного случая. В массовых операторах будем учитывать вклад упругого рассеяния (члены с индексом el) (45.14), вклад взаимодействия ПСВ с тепловыми и вклад взаимодействия ПСВ между собой (члены с индексом int) (36.6):

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{el} + \Phi_{int} + \Phi_0, & \Psi &= \Psi_{el} + \Psi_{int}, \\ \Sigma &= \Sigma_0 + \Sigma_{el} + \Sigma_{int}, & \Pi &= P + \Pi_{el} + \Pi_{int}.\end{aligned}\quad (51.1)$$

Если полностью пренебречь группой членов с индексом int, то получатся уравнения (37.4), (45.13), исследованные в гл. 9, посвященной параметрическому возбуждению СВ в магнетиках со случайными неоднородностями. В таком приближении учитывается только самосогласованное взаимодействие ПСВ и их рассеяние на неоднородностях (Sg^2 -теория). В рамках Sg^2 -теории распределение ПСВ по частотам $n_p(\omega)$ сингулярно, а аномальный коррелятор σ_k меньше нормального n_k по параметру $\gamma_k/(\gamma_k + \gamma_{el})$. Поэтому при вычислении функций Грина в нулевом приближении по этому параметру можно пренебречь параметрической накачкой:

$$G_1(q) = [\omega - \omega_k - \Sigma(q)]^{-1}, \quad L_1(q) = 0. \quad (51.2)$$

В первом порядке необходимо учесть накачку:

$$\begin{aligned}G(q) &= G_1(q) + G_1(q)G_1^*(\bar{q})G_1(q) |\Pi(q)|^2, \\ L^*(q) &= G_1^*(\bar{q})\Pi^*(q)G_1(q), \quad \bar{q} = (-k, \omega_p - \omega).\end{aligned}\quad (51.3)$$

Уравнения для корреляторов в первом порядке нашей теории имеют вид

$$\begin{aligned}n(q) &= [|\Pi(q)|^2 + 2 \operatorname{Re} G_1^*(q) |\Pi(q)|^2 G_1^*(\bar{q}) G_1^2(q) + \\ &+ |\Pi(q)|^2 |G_1(q)|^2 |G_1(\bar{q})|^2] \Phi(q) + G_1(q) \Psi(q) G_1(\bar{q}) \Pi^*(q) G_1^*(q) + \\ &+ G_1(q) \Pi(q) G_1^*(\bar{q}) \Psi^*(\bar{q}) G_1(q), \\ \sigma(q) &= \sigma_1(q) \Psi(q) G_1(\bar{q}) + [G_1(q) G_1(\bar{q}) \Pi(q) G_1^*(q) + \\ &+ G_1(\bar{q}) G_1(q) G_1^*(\bar{q}) \Pi(q)] \Phi(q).\end{aligned}\quad (51.4)$$

51.2. Процедура редукции уравнений. В реальных ситуациях пространственный масштаб случайных объемных неоднородностей мал по сравнению

с длиной волны, поэтому матричный элемент $g(k, k')$ является плавной функцией своих аргументов. Это обстоятельство позволяет провести в (51.4) обычное интегрирование по нормали к резонансной поверхности в k пространстве, пренебрегая зависимостью массовых операторов от k :

$$\begin{aligned} n(\Omega, \epsilon) &= \int n(k, \epsilon) k_{\Omega}^2 d\omega_k / v(\Omega) = \\ &= [\pi k_{\Omega}^2 / v(\Omega) \Gamma(\Omega)] \{ [1 + |\Pi(\Omega)|^2 (\epsilon^2 + 3\Gamma^2(\Omega)) / 2(\epsilon^2 + \Gamma^2)^2] \Phi(\Omega, \epsilon) + \\ &+ \operatorname{Re} \Pi^*(\Omega, \epsilon) \Psi(\Omega, \epsilon) / [-\epsilon + i\Gamma(\Omega, \epsilon)] \}, \end{aligned} \quad (51.5)$$

$$\begin{aligned} [\epsilon^2 + \Gamma^2(\Omega, \epsilon)] \sigma(\Omega, \epsilon) + i\Pi(\Omega, \epsilon) \Gamma(\Omega, \epsilon) n(\Omega, \epsilon) &= 0, \\ \Gamma(\Omega, \epsilon) &= \gamma(\Omega) + \pi c \int |g(\Omega, \Omega')|^2 [k_{\Omega}^2 / v(\Omega)] \{ 1 + |\Pi(\Omega', \epsilon)|^2 \times \\ &\times [\Gamma^2(\Omega', \epsilon) - \epsilon^2] / 2[\Gamma^2(\Omega', \epsilon) - \epsilon^2]^2 \} d\Omega' + \Gamma_{\text{int}}(\Omega, \epsilon), \\ \Gamma_{\text{int}}(\Omega, \epsilon) &= 2\pi \int |T(k, k_1, k_2, k_3)|^2 [n(k_1)n(k_2)/\Gamma(k_3, \epsilon) + \\ &+ n(k_1)n(k_3)/\Gamma(k_2, \epsilon) - n(k_2)n(k_3)/\Gamma(k_1, \epsilon)] \times \\ &\times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned} \quad (51.6)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\Omega, \epsilon) &= P(\Omega) + \\ &+ \pi c \int g(\Omega, \Omega') g(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}') k_{\Omega}^2 \Pi(\Omega', \epsilon) d\Omega' / v(\Omega') [\Gamma(\Omega, \epsilon) - i\epsilon], \end{aligned} \quad (51.7)$$

$$\begin{aligned} n(k) &= \int n(k, \epsilon) d\epsilon, \\ \Phi(\Omega, \epsilon) &= c \int |g(\Omega, \Omega')|^2 n(\Omega', \epsilon) d\Omega' + \Phi_{\text{int}} + \Phi_0, \\ \Psi(\Omega, \epsilon) &= c \int g(\Omega, \Omega') g(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}') \sigma(\Omega', \epsilon) d\Omega'. \end{aligned} \quad (51.8)$$

Здесь Ω — угловые координаты, (θ, φ) , $\bar{\Omega}$ — угловые координаты $(\pi - \theta, \varphi + \pi)$. Наиболее прост для анализа случай, когда $g(\Omega, \Omega') = g$. Такая ситуация возникает, например, при случайной вариации поля анизотропии или при рассеянии ПСВ на мелких кристаллитах в поликристаллах (см. § 44). При параллельной накачке в изотропных ФМ

$$\sigma(\Omega, \epsilon) = \sigma(\theta, \epsilon) \exp(-2i\varphi),$$

$$\Pi(\Omega, \epsilon) = \Pi(\theta, \epsilon) \exp(-2i\varphi).$$

Поэтому $\Psi = 0$, $\Pi(\Omega, \epsilon) = P(\Omega)$. В процессах упругого рассеяния число ПСВ не изменяется, поэтому эти процессы не вносят вклад в общий баланс волн. Для того чтобы убедиться в этом, проинтегрируем (51.5) по углам. В случае $g = \text{const}$ получим

$$\begin{aligned} &\int [\Gamma(\Omega) + \Gamma_{\text{int}}(\Omega, \epsilon)] n(\Omega, \epsilon) d\Omega - \\ &- \pi c |g|^2 \int k_{\Omega}^2 |P(\Omega')|^2 n(\Omega, \epsilon) d\Omega d\Omega' / v(\Omega') [\Gamma^2(\Omega', \epsilon) + \epsilon^2] = \\ &= \pi \int [k_{\Omega}^2 / v(\Omega)] (\Phi_{\text{int}} + \Phi_0) d\Omega. \end{aligned} \quad (51.9)$$

Как показано в предыдущей главе, распределение при $\gamma_{e1} \gg \gamma$ изотропно:

$n(\Omega, \epsilon) = n(\epsilon) / 4\pi$. В результате из (51.9) следует уравнение для функции распределения ПСВ по частотам $n(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} n(\epsilon) \{ \langle \gamma(\Omega) + \Gamma_{\text{int}}(\Omega) \rangle - 4\pi^2 c |g|^2 \langle k_{\Omega}^2 | P(\Omega) |^2 / v(\Omega) \Gamma^2(\Omega) \rangle + \\ + 4\pi^2 c |g|^2 \langle k_{\Omega}^2 | P(\Omega) |^2 / v(\Omega) \Gamma^4(\Omega) \rangle \epsilon^2 \} = \\ = 4\pi^2 \langle k_{\Omega}^2 (\Phi_{\text{int}} + \Phi_0) / v(\Omega) \rangle, \end{aligned} \quad (51.10)$$

$$\langle f(\Omega) \rangle = \int f(\Omega) d\Omega / 4\pi.$$

Из (51.6) видно, что в выражении $\Gamma^2(\Omega, \epsilon) + \epsilon^2$ зависимостью Γ от ϵ можно пренебречь, кроме того, мы считаем, что ширина $n(\epsilon)$ по частотам $\Delta\omega$ мала по сравнению с Γ . Уравнение (51.10) можно переписать в более удобных обозначениях:

$$\begin{aligned} (\eta^2 + \epsilon^2) n(\epsilon) &= \Gamma_1 [4\pi \langle \gamma(\Omega) k_{\Omega}^2 n_0(\Omega) / v(\Omega) \rangle + \\ &+ (T^2 / kv) \int n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) n(\epsilon_3) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3, \\ \Gamma_1^{-1} &= 4\pi^2 c |g|^2 \langle k_{\Omega}^2 | P(\Omega) |^2 / \Gamma^4(\Omega) v(\Omega) \rangle, \\ T^2 / kv &= \int |T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)|^2 k_{\Omega}^2 \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) d\Omega d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 / v(\Omega), \\ \eta^2 &= \Gamma_1 [\langle \gamma(\Omega) + \Gamma_{\text{int}}(\Omega) \rangle - 4\pi^2 c |g|^2 \langle k_{\Omega}^2 | P(\Omega) |^2 / v(\Omega) \Gamma^2(\Omega) \rangle]. \end{aligned} \quad (51.11)$$

По порядку величины $\Gamma_1 \sim \gamma_{e1}^2 / \gamma$. Правая часть (51.11) — это приходный член для ПСВ с частотой ϵ . Он обусловлен суммой теплового и собственного шума ПСВ. Условие $\eta = 0$ определяет порог параметрического возбуждения волн $h_{\text{th}} V \sim \gamma \gamma_{e1}$.

52.3. Уширение по частотам при малой надкритичности — область теплового шума. При малой надкритичности, когда собственным шумом ПСВ можно пренебречь, распределение $n(\epsilon)$ является лоренцевским с шириной $\eta = \eta_T$. Ее можно определить, интегрируя (51.11) по ϵ и учитывая обычную для S -теории зависимость (19.1) полного числа ПСВ N от надкритичности p :

$$\begin{aligned} TN &\approx \gamma_{e1} (p - 1)^{1/2}, \\ \eta_T &\approx \xi \gamma_{e1} (p - 1)^{1/2}, \\ \xi &= 4\pi^2 T k^3 n_k^0 / (kv). \end{aligned} \quad (51.12)$$

Здесь ξ — параметр малости теплового шума (51.11).

51.4. Уширение по частотам под действием "собственного" шума. При большой надкритичности можно пренебречь тепловым шумом в (51.11);

$$\begin{aligned} (\eta^2 + \epsilon^2) n(\epsilon) &= \\ &= \Gamma_1 (T^2 / kv) \int n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \end{aligned} \quad (51.13)$$

Для решения этого уравнения удобно сделать преобразование Фурье $2\pi n(\tau) = \int n(\epsilon) \exp(-i\epsilon\tau) d\epsilon$ временной корреляционной функцией

$$n_k(\tau) = \langle a_k^*(0) a_k(\tau) \rangle, \quad n(\tau) = \int n_k(\tau) dk. \quad (51.14)$$

В этом представлении (51.13) имеет вид

$$\frac{\partial^2 n(\tau)}{\partial \tau^2} = (2\pi)^2 \Gamma_1 \frac{T^2}{kv} n^3(\tau) - \eta^2 n(\tau) = -\frac{\partial U}{\partial n} \quad (51.15)$$

— это уравнение Ньютона для движения частицы с координатой n в потенциале $U(n)$. Оно имеет интеграл — “энергию”

$$E = \frac{1}{2} (\partial n / \partial \tau)^2 + U(n), \quad (51.16)$$

что позволяет провести одно интегрирование. Тривиальное решение уравнения (51.15), не зависящее от τ , соответствует “одночастотному” решению уравнения (51.13) $n(\epsilon) \sim \delta(\epsilon)$. При $E > \min U$ возникает осциллирующее с частотой 2η решение $n(\tau)$, при этом в выражении $n(\epsilon)$, кроме центральной линии (интенсивность которой уменьшается), возникают сателлиты с частотами $\epsilon = 2\eta m$ (m — целое). С ростом E число гармоник растет, и при $E = 0$ решение $n(\epsilon)$ становится непрерывным:

$$\pi T n(\tau) = \frac{(kv/2\Gamma_1)^{1/2} \eta}{\operatorname{ch} \eta \tau}, \quad T n(\epsilon) = \frac{kv/2\Gamma_1}{\operatorname{ch}(\pi\epsilon/2\eta)}. \quad (51.17)$$

Таким образом, уравнение (51.13) имеет однопараметрический набор решений, соответствующих изменению E от $\min U$ до 0. Для того чтобы выяснить, какое из решений может быть реализовано в эксперименте, необходимо исследовать их устойчивость.

51.5. Исследование устойчивости решений. Доказательство неустойчивости одночастотного решения можно провести непосредственно из уравнения (51.13). Найдем для этого линейный отклик стационарного состояния на тепловой шум, который приводит к аддитивной добавке $\delta\Phi = \langle \Phi_0(\Omega) \rangle$, не зависящей от ϵ . Полагая $n(\epsilon) = N\delta(\epsilon) + \delta n(\epsilon)$, получаем из (51.13) в линейном приближении

$$\delta n(\epsilon) = \delta\Phi / (\epsilon^2 - 2\eta_0^2),$$

откуда следует, что $\delta n(\epsilon)$ при $\epsilon < \sqrt{2} \eta_0$ не мало и, следовательно, одночастотное решение неустойчиво. Более того, можно показать, что и многосателлитные решения уравнения (51.13) также неустойчивы. Действительно, линеаризованное на фоне многосателлитного решения уравнение (51.13) превращается в систему линейных алгебраических уравнений и имеет безразлично устойчивые решения, соответствующие малому изменению параметра E . В точках ϵ_i , где находятся сателлиты, детерминант линеаризованной системы обращается в нуль. Поскольку этот определитель меняет знак вблизи первого сателлита при $E = \min U$ (т.е. на фоне одночастотного решения), следует ожидать, что он будет менять знак вблизи сателлитов при любом E . Таким образом, существует область частот ϵ , в которой определитель отрицателен и возмущения нарастают. Из сказанного видно, что неустойчивость как одночастотного, так и многосателлитного состояний связана с нелинейным характером взаимодействия B : $\Phi_{\text{int}} \propto n^\alpha$, $\alpha > 1$, и несмотря на то, что неустойчивость этих состояний

доказана нами только для конкретных ситуаций, в действительности она имеет общий характер. Поэтому единственным устойчивым по отношению к уширению по частотам состоянием системы является многочастотная турбулентность ПВ с непрерывным распределением по частотам.

51.6. Анализ устойчивого решения. Вернемся теперь к единственному устойчивому решению (51.17). Для того чтобы определить его ширину η , следует проинтегрировать это выражение по ϵ и воспользоваться формулами (51.11) и (19.1) для Γ_1 и N . В результате получаем следующую оценку для η :

$$\eta = \eta_{\text{int}} \approx (\gamma_{\text{el}}^2/\gamma)(\gamma/kv)^{1/2}(p-1)^{1/2}. \quad (51.18)$$

Полная ширина складывается из тепловой (51.12) и собственной ширины (51.18). Минимальная ширина η_{min} достигается при надкритичности p_{min} :

$$\eta_{\text{min}} = \gamma_{\text{el}}(\xi\gamma_{\text{el}}/\gamma)^{1/2}(\gamma/kv)^{1/4} \approx (0,1 \div 0,01)\gamma_{\text{el}}(\gamma_{\text{el}}/\gamma)^{1/2}, \quad (51.19)$$

$$p_{\text{min}} - 1 \approx \xi kv/\gamma_{\text{el}} \approx 0,1 \gamma/\gamma_{\text{el}}. \quad (51.20)$$

Уравнение (51.11) было получено в предположении $\eta \ll \Gamma \ll \gamma_{\text{el}}$, что справедливо при

$$(p-1) \ll \gamma kv/\gamma_{\text{el}}^2. \quad (51.21)$$

Кроме этого, мы предполагали, что число ПСВ в соответствии с Sg^2 -теорией ограничивается из-за перенормировки накачки, а рассеяние ПСВ друг на друге и тепловой шум приводят лишь к размытию пакета ПСВ по частотам, не меняя интегральную амплитуду. Это предположение, как видно из (3.16), справедливо при $\eta^2 \ll \gamma_{\text{el}}^2/\gamma$ и поэтому всегда выполняется при выполнении условия (51.21).

Мы рассмотрели случай $g(\Omega, \Omega') = \text{const}$, однако этим не исчерпываются все типы упругого рассеяния СВ в магнитоупорядоченных кристаллах. Значительный интерес представляет также рассеяние СВ на неоднородностях, связанных с искажением обменного взаимодействия. В этом случае $g(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = g^a(\mathbf{k}\mathbf{k}')$ и задается формулой (44.5).

Решение системы уравнений, описывающих поведение ПСВ (51.5) — (51.8) при таком виде $g(\Omega, \Omega')$, представляет собой сложную задачу. Ее удастся точно решить, считая $k_{\Omega}^2 \propto v(\Omega)$. Это предположение является хорошей моделью для реальной зависимости величины $k_{\Omega}^2/v(\Omega) = \text{const}$, поэтому полученное решение модельной задачи близко к истинному. В рамках этой модели частота упругого рассеяния γ_{el} изотропна:

$$\gamma_{\text{el}} = (4\pi^2/3)cg^2(k^2/v), \quad (51.22)$$

а уравнение для спектральной плотности ПСВ $n(\epsilon)$ приводится к виду (51.11). Однако для Γ_1 получается другое выражение:

$$\Gamma_1^{-1} = \gamma_{\text{el}}^{-3} \left\{ \frac{383}{108} \int_0^1 P(x)(1-x^2)dx \right\}^2 + 6 \left[\int_0^1 x^2 P(x)dx \right]^2 + \\ + \frac{43}{9} \int_0^1 P(x)(1-x^2)dx \int_0^1 P(x)x^2dx - \int_0^1 P^2(x)dx \right\}. \quad (51.23)$$

Здесь $x = \cos \theta$, $P(\Omega) = P(\cos \theta) \exp(-2i\varphi)$. Таким образом, как и в (51.11), $\Gamma_1 \sim \gamma_{e1}^2/\gamma$, и все качественные выводы относительно вида распределения остаются справедливыми. Разница заключается лишь в числовом коэффициенте порядка единицы в определении Γ_1 (51.23) по сравнению с (51.11).

§ 52. Функция распределения ПСВ в однородной изотропной среде

52.1. Исходные уравнения. В отсутствие упругого рассеяния единственным фактором, регуляризующим распределение ПСВ, является их рассеяние друг на друге. В изотропной среде (накачку мы также считаем изотропной) характеристики ПСВ — корреляторы и функции Грина — зависят только от k и истинной частоты ω :

$$\begin{aligned} n(q) &= n(k, \epsilon) / 4\pi k^2, \\ \sigma(q) &= \sigma(k, \epsilon) / 4\pi k^2, \\ G(q) &= -[-i\Gamma(k, \epsilon) + \epsilon + \tilde{\epsilon}(k, \epsilon)] \Delta^{-1}(k, \epsilon), \\ L(q) &= \Pi(k, \epsilon) \Delta^{-1}(k, \epsilon), \\ \Delta(k, \epsilon) &= \Gamma^2(k, \epsilon) - |\Pi(k, \epsilon)|^2 + \tilde{\epsilon}^2(k, \epsilon) - 2i\Gamma(k, \epsilon) - \epsilon^2, \end{aligned} \quad (52.1)$$

Здесь, как обычно, ϵ — частота, отсчитываемая от $\omega_p/2$: $\epsilon = \omega - \omega_p/2$, $\tilde{\epsilon}(k, \epsilon) = \tilde{\omega}(k, \epsilon) - \omega_p/2$. Изотропия задачи позволяет вычислить массовые операторы:

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= \Phi(\epsilon) = 2k_0^{-3} \left[\int \langle |T|^2 \rangle n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) n(\epsilon_3) \delta(\epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int \langle T \bar{T}^* \rangle \sigma^*(\epsilon_1) \sigma(\epsilon_2) n(\epsilon_3) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 \right], \end{aligned} \quad (52.2)$$

$$\begin{aligned} \Psi(q) &= \Psi(\epsilon) = 2k_0^{-3} \int [\langle T^2 \rangle \sigma^*(\epsilon_1) \sigma(\epsilon_2) \sigma(\epsilon_3) + \\ &\quad + 2 \langle T \bar{T} \rangle n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) n(\epsilon_3)] \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3, \\ (4\pi)^3 \langle |T|^2 \rangle &= \int |T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)|^2 d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \delta(n + n_1 - n_2 - n_3), \\ (4\pi)^3 \langle T \bar{T}^* \rangle &= \\ &= \int T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) T^*(\Omega, \bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_1, \Omega_3) \delta(n + n_1 - n_2 - n_3) d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3, \\ (4\pi)^3 \langle T^2 \rangle &= \int T^2(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \delta(n + n_1 - n_2 - n_3) d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3, \\ (4\pi)^3 \langle T \bar{T} \rangle &= \int T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) T(\bar{\Omega}, \Omega_2, \Omega_1, \bar{\Omega}_3) \times \\ &\quad \times \delta(n + n_1 - n_2 - n_3) d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3, \end{aligned} \quad (52.3)$$

$$n(\epsilon) = \int n(q) dk = \int n(k, \epsilon) dk, \quad \sigma(\epsilon) = \int \sigma(k, \epsilon) dk,$$

n_i — единичный вектор, задаваемый углами Ω_i , k_0 — радиус резонансной поверхности $2\omega(k_0) = \omega_p$. Аналогично получаются выражения для масс

совых операторов Σ и Π :

$$\begin{aligned}
 \Sigma(q) &= \Sigma(\epsilon) = 2TN + (2\pi/kv) \int \{ -\langle |T|^2 \rangle [n_1 n_2 (i\Gamma_3 + \epsilon_3)/\mu_3 + \\
 &+ n_1 n_3 (i\Gamma_2 + \epsilon_2)/\mu_2 + n_2 n_3 (\epsilon_1 - i\Gamma_1)/\mu_1^*] + \\
 &+ 2\langle T\bar{T}^* \rangle [\sigma_1^* \sigma_2 (i\Gamma_3 + \epsilon_3)/\mu_3 + \sigma_1^* n_3 \Pi_2/\mu_2 + \sigma_2 n_3 \Pi_1^*/\mu_1] \} \times \\
 &\times \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3, \\
 \Pi(q) &= \Pi(\epsilon) = P + (2\pi/kv) \int \{ \langle T^2 \rangle [\sigma_2 \sigma_3 \Pi_1^*/\mu_1^* + \sigma_1^* (\sigma_3 \Pi_2/\mu_2 + \\
 &+ \sigma_2 \Pi_3/\mu_3)] + 2\langle T\bar{T} \rangle [n_1 n_2 \Pi_3/\mu_3 - n_1 \sigma_3 (i\Gamma_2 + \epsilon_2)/\mu_2 + \\
 &+ n_2 \sigma_3 (i\Gamma_1 - \epsilon_1)/\mu_1^*] \} \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3, \\
 TN &= \int T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') n(\mathbf{k}', \epsilon') d\mathbf{k}' d\epsilon' = \int T(\Omega, \Omega') N d\Omega' / 4\pi, \\
 N &= \int n(q) dq, \\
 P &= hV + \int S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \sigma(q') dq' = hV + S\sigma, \\
 4\pi S &= \int S(\Omega, \Omega') d\Omega', \\
 \sigma &= \int \sigma(q) dq, \quad n_i = n(\epsilon_i), \quad \Gamma_i = \Gamma(\epsilon_i), \quad \sigma_i = \sigma(\epsilon_i), \\
 \mu_i &= \mu(\epsilon_i) = [\nu^2(\epsilon) - 2i\Gamma(\epsilon)\epsilon - \epsilon^2]^{1/2}, \quad \nu^2(\epsilon) = \Gamma^2(\epsilon) - |\Pi(\epsilon)|^2.
 \end{aligned} \tag{52.4}$$

Таким образом, массовые операторы постоянны вблизи массовой поверхности в $\mathbf{k}$ -пространстве и являются лишь функциями частоты ϵ . Это обстоятельство позволяет определить форму пакета ПСВ в $\mathbf{k}$ -пространстве. Выпишем для этого исходные уравнения (36.3) в наших обозначениях:

$$\begin{aligned}
 n(\mathbf{k}, \epsilon) &= 4\pi k_0^2 [\tilde{\epsilon}^2 + \mu^2(\epsilon)]^{-2} \{ [\Gamma^2(\epsilon) + (\epsilon + \tilde{\epsilon})^2 + |\Pi(\epsilon)|^2] \Phi^*(\epsilon) + \\
 &+ 2 \operatorname{Im} [\Gamma(\epsilon) - i\epsilon] \Pi^*(\epsilon) \Psi(\epsilon) - 2\tilde{\epsilon} \operatorname{Re} \Pi^*(\epsilon) \Psi(\epsilon) \}, \quad \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\epsilon}(\mathbf{k})
 \end{aligned} \tag{52.5}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma(\mathbf{k}, \epsilon) &= 4\pi k_0^2 [\tilde{\epsilon}^2 + \mu^2(\epsilon)]^{-2} \{ -2i\Pi(\epsilon) [\Gamma(\epsilon) - i\tilde{\epsilon}] \Phi(\epsilon) - \\
 &- [(\Gamma - i\tilde{\epsilon})^2 + \epsilon^2] \Psi(\epsilon) + \Pi^2(\epsilon) \Psi^*(\epsilon) \}.
 \end{aligned} \tag{52.6}$$

Поскольку $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) + \operatorname{Re} \Sigma - \omega_p/2$, форма пакета ПСВ $n(\mathbf{k}, \epsilon)$, $\sigma(\mathbf{k}, \epsilon)$ близка к квадрату функции Лоренца. Уравнения (52.6) можно упростить, проинтегрировав их по $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}
 n(\epsilon) &= \frac{4\pi^2}{k_0 v \mu' |\mu|^2} \{ (\Gamma^2 + |\Pi|^2 + \epsilon^2 + |\mu|^2) \Phi + 2 \operatorname{Im} [(\Gamma - i\epsilon) \Pi^* \Psi] \}, \\
 \sigma(\epsilon) &= \frac{4\pi^2}{k_0 v \mu' |\mu|^2} \{ -2i\Pi\Gamma\Phi - (\Gamma^2 + \epsilon^2 - |\mu|^2) \Psi + \Pi^2 \Psi^* \},
 \end{aligned} \tag{52.7}$$

$$\mu = \mu(\epsilon), \quad \mu' = \operatorname{Re} \mu(\epsilon), \quad \Pi = \Pi(\epsilon), \quad \Gamma = \Gamma(\epsilon), \quad \Phi = \Phi(\epsilon), \quad \Psi = \Psi(\epsilon).$$

В результате возникает замкнутая система уравнений (52.2), (52.3), (52.7) для интегральных корреляторов $n(\epsilon)$, $\sigma(\epsilon)$. В дальнейшем нам встретятся еще более сложные уравнения, обобщающие полученную систему на случай более низкой симметрии.

52.2. Приближение одночастотной турбулентности ПСВ. В качестве первого шага при исследовании уравнений ST^2 -теории полезно бывает рассмотреть одночастотную модель, т.е. решение системы (52.2), (52.4), (52.7) вида

$$n(\epsilon) = N\delta(\epsilon), \quad \sigma(\epsilon) = \sigma\delta(\epsilon). \quad (52.8)$$

В предыдущем параграфе мы показали, что это решение неустойчиво относительно уширения по частотам, тем не менее одночастотное решение правильно передает форму пакета ПСВ в k -пространстве и дает правильную оценку для величины ν . В одночастотном приближении имеем

$$\Pi N = i\Gamma\sigma = 4\pi^2 k_0^2 \Gamma \Pi (\Gamma\Phi + \text{Im } \Pi^* \Psi) / \nu^3, \quad (52.9)$$

$$\Phi = 2Nk_0^{-3} (\langle |T|^2 \rangle N^2 + 2\langle T\bar{T}^* \rangle |\sigma|^2),$$

$$\Gamma = \gamma + \frac{2\pi}{k_0\nu\nu} [\langle |T|^2 \rangle \Gamma N^2 + 2\langle T\bar{T}^* \rangle (\Gamma|\sigma|^2 - 2N\text{Re } \Pi^* \sigma)], \quad (52.10)$$

$$\Psi = 2\sigma k_0^{-3} (\langle T^2 \rangle |\sigma|^2 + 2\langle T\bar{T} \rangle N^2), \quad \nu^2 = \Gamma^2 - |\Pi|^2,$$

$$\Pi = P + \frac{2\pi}{k_0\nu\nu} [\langle T^2 \rangle (2\Pi|\sigma|^2 + \Pi^* \sigma^2) + 2\langle T\bar{T} \rangle N^2 \Pi].$$

Отсюда следует

$$N = \frac{8\pi^2 \Gamma^2}{k_0\nu} \left(\frac{N}{\nu} \right)^3 \left[\langle |T|^2 \rangle - \frac{|\Pi|^4 \text{Re} \langle T^2 \rangle}{\Gamma^4} + 2 \left(\langle T\bar{T}^* \rangle - \frac{\langle T\bar{T} \rangle |\Pi|^2}{\Gamma^2} \right) \right],$$

$$\Gamma\sigma + i\Pi N = 0, \quad (52.11)$$

$$\Gamma = \gamma + \frac{2\pi\Gamma N^2}{k_0\nu\nu} \left[\langle |T|^2 \rangle + \frac{2\langle T\bar{T}^* \rangle |\Pi|^2}{\Gamma^2} \right], \quad (52.12)$$

$$\Pi = P + \frac{2\pi\Pi N^2}{k_0\nu\nu} \left[\frac{\langle T^2 \rangle |\Pi|^2}{\Gamma^2} + 2\langle T\bar{T} \rangle \right].$$

Понятно, что при не слишком большой надкритичности $\Gamma \approx \gamma$, $\Pi \approx P$, $\nu \ll \gamma$. В этом случае из (50.11) нетрудно определить ν :

$$\nu = \left(\frac{8\pi^2 \gamma^2 N^2 T_1^2 N^2}{k_0\nu} \right)^{1/3}, \quad (52.13)$$

$$T_1^2 = \langle |T|^2 \rangle - \text{Re} \langle T^2 \rangle + 2(\langle T\bar{T}^* \rangle - \text{Re} \langle T\bar{T} \rangle).$$

Если матричный элемент T является комплексным, $T_1 \neq 0$ и по порядку величины $T_1^2 \approx \langle |T|^2 \rangle$. Условием применимости S -теории для определения

интегральной амплитуды N является справедливость неравенства

$$(1 - |\sigma|/N) \approx (1 - |P|/\Gamma) \approx \nu^2/2\gamma^2 \ll 1, \quad (52.14)$$

позволяющего считать $|P| = \gamma$ и находить N из этого условия. Условие (52.14) при подстановке (52.13) дает

$$p = (h/h_{th})^2 \ll p_S = k_0 \nu / 2 \sqrt{2} \pi^2 \gamma. \quad (52.15)$$

Величина p_S в твердых телах имеет порядок $10 \div 10^3$. В случае $p > p_S$ уравнения ST^2 -теории еще справедливы, но S -теория уже неприменима. Для определения предела применимости ST^2 -теории следует оценить перенормировку вершин ΔT

$$\Delta T/T \approx \gamma TN/k_0 \nu \nu. \quad (52.16)$$

Малость этого соотношения обеспечивает применимость ST^2 -теории. При $p \approx p_S$ в системе ПСВ возникает "кинетическая" неустойчивость (см. гл. 13), в результате которой нарастают СВ, не связанные с накачкой (А.В.Лавриненко и др. [139]). Они оказывают сильное обратное влияние на ПСВ, поэтому исследование уравнений ST^2 -теории при $p > p_S$ бесполезно, несмотря на отсутствие внутренних формальных ограничений.

52.3. Форма пакета ПСВ по частотам. Перейдем к исследованию устойчивого, непрерывного по частоте ω решения уравнений ST^2 -теории (52.2) – (52.4), (52.7). Характерная частотная ширина пакета ПСВ $\eta \approx \nu^2/\gamma$, в этом легко убедиться, проанализировав частотную зависимость знаменателя $\mu'(\epsilon)|\mu(\epsilon)|^2$ в уравнении (52.7). Можно показать, что решение этого уравнения при больших значениях ϵ имеет экспоненциальную асимптотику

$$n(\epsilon) = N f(\epsilon/\eta) \exp(-|\epsilon|/\eta), \quad (52.17)$$

где $f(\epsilon/\eta)$ изменяется не быстрее, чем степенная функция. Действительно, в пределе больших $|\epsilon|$ ($|\epsilon| \gg \eta$) уравнение (52.7) принимает вид

$$n(\epsilon) \approx \left(\frac{\eta}{|\epsilon|} \right)^{3/2} N^{-2} \int n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) n(\epsilon_3) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \quad (52.18)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sigma(k, \epsilon) \approx -i P n(k, \epsilon)/\gamma$. Нетрудно убедиться, что решение уравнения (4.21) не может иметь степенную асимптотику. Можно также показать, что если $n(\epsilon) \sim \exp(-u(\epsilon))$, $u''(\epsilon) > 0$, то $u(\epsilon)$ в пределе больших ϵ должна удовлетворять уравнению $u(\epsilon) = 3u(\epsilon/3)$, что несовместимо с условием $u''(\epsilon) > 0$. Если же решение имеет вид

$$n(\epsilon) = N f(\epsilon/\eta) \exp(-u(\epsilon)),$$

где $u''(\epsilon) < 0$, то из (52.18) следует, что

$$f(\epsilon/\eta) \exp(-u(\epsilon)) \sim (|\epsilon|/\eta)^{-3/2} f(\epsilon/\eta)^2 \exp(-u(\epsilon)).$$

Это уравнение тоже не имеет решений, имеющих физический смысл. Наконец, если решение $n(\epsilon)$ имеет асимптотический вид (52.17), то при

подстановке в (52.18) получаем

$$f(\epsilon/\eta) \exp(-|\epsilon|/\eta) \sim \\ \sim (\eta/|\epsilon|)^{3/2} (\epsilon/\eta)^2 \exp(-|\epsilon|/\eta) f^3(|\epsilon|/\eta),$$

откуда следует, что

$$n(\epsilon) = N(\eta/|\epsilon|)^{1/4} \exp(-|\epsilon|/\eta). \quad (52.19)$$

Таким образом, пакет ПСВ является весьма узким, и амплитуда волн быстро спадает с расстройкой от резонанса.

Рассмотрим теперь, как ведет себя знаменатель в выражении (52.7), точнее, величина $\nu(\epsilon)$. Проще всего оценить зависимость ν от ϵ в одночастотной модели в пределе $\epsilon > \nu^2/\gamma$:

$$\nu^2(\epsilon) \approx (\nu_0^2/2\pi)[1 + (\nu_0^2/\gamma|\epsilon|)^{1/2}]. \quad (52.20)$$

Таким образом, функция $\nu(\epsilon)$ является плавной функцией частоты ϵ , поэтому зависимость ν от ϵ в (52.7) можно пренебречь. Если учесть также, что частотная ширина пакета ПСВ $\eta \sim \nu^2/\gamma \ll \nu$, членами $\propto \epsilon^2$ можно пренебречь по сравнению с ν^2 , то уравнения (52.7) можно записать в виде

$$n(\epsilon) = \frac{4\pi^2 \Gamma k_0^2}{\nu \nu_1^2 \nu_2} \left[\text{Im}(\Pi^* \Psi) + \frac{\Phi(\nu_1^2 - \nu^2)}{2\Gamma} \right], \\ \sigma(\epsilon) = -i \frac{4\pi^2 \Pi k_0^2}{\nu \nu_1^2 \nu_2} \left[\Gamma \Phi + \text{Im}(\Pi^* \Psi) + \frac{i\Psi \Pi^*(\nu_1^2 - \nu^2)}{2|\Pi|^2} \right], \quad (52.21)$$

$$\nu_1^2 = \nu_1^2(\epsilon) = (\nu^4 + 4\gamma^2 \epsilon^2)^{1/2},$$

$$\nu_2^2 = \nu_2^2(\epsilon) = \frac{1}{2}[\nu^2 + \nu_1^2(\epsilon)].$$

Отметим, что в (52.21) последние члены в скобках имеют порядок (ν/Γ^2) по отношению к остальным. Поэтому с точностью до $(\nu/\Gamma)^2$ имеет место равенство, обобщающее (52.9):

$$\Gamma \sigma(\epsilon) + i\Pi n(\epsilon) = 0. \quad (52.22)$$

Выражая σ через n , получим из (52.2) и (52.21)

$$n(\epsilon) = A \nu_1^{-2}(\epsilon) \nu_2^{-1}(\epsilon) \int n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) n(\epsilon_3) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3, \\ A = 8\pi^2 T_1^2 \gamma^2 / k_0 \nu. \quad (52.23)$$

Это уравнение является аналогом уравнения (51.13), имеющего решение $\text{ch}^{-1}(\epsilon/\eta)$. Уравнение (52.23) можно записать в виде условия экстремума функционала $\delta F / \delta n(\epsilon) = 0$:

$$F = \frac{1}{2} \int \nu_1^2(\epsilon) \nu_2(\epsilon) n^2(\epsilon) d\epsilon - \\ - \frac{1}{4} A \int n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) n(\epsilon_3) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \quad (52.24)$$

Уравнение (52.23) имеет целый класс решений от сингулярного до непрерывного по частотам в полной аналогии с решениями уравнения (52.9). Действительно, если провести в (52.13) преобразование Фурье, то полученное уравнение не будет зависеть от начала отсчета "времени" и поэтому будет обладать интегралом — аналогом энергии. Все периодические решения этого уравнения, как показано в § 51, неустойчивы, поэтому реализуется непрерывное по частотам решение.

Пробная функция $n(\epsilon) = n_0 \text{ch}^{-1}(\epsilon/\eta)$ качественно правильно описывает форму пакета ПСВ. Для наилучшего определения величин n_0 и η следует потребовать существования экстремума функционала F на нашей пробной функции по параметрам n_0 и η :

$$\eta \approx 0,97 \nu^2 / 2\gamma, \quad n_0^2 = 9/2 \nu^3 / A \pi^2 \eta^2. \quad (52.25)$$

Условие (52.25) позволяет найти ν , так как полное число ПСВ $N = \int n(\epsilon) d\epsilon$, как показано ранее, определяется из S -теории. Поэтому из (52.25) следует, что

$$\nu^3 \approx 17,6 \gamma^2 (T_1 N)^2 / k_0 \nu. \quad (52.26)$$

Коэффициент в этом выражении (4.31) в 4,5 раза меньше, чем в одночастотной модели (52.13).

Таким образом, мы определили форму пакета ПСВ и его характерные размеры в случае комплексного матричного элемента $T_{12,34}$. Если же матричный элемент действителен, то в соответствии с определением (52.13) величина T_1 обращается в нуль и этот случай требует отдельного исследования. Нетрудно убедиться, что и в этом случае выполняется соотношение (52.22). Используя его, можно получить из (52.21)

$$n(\epsilon) = \frac{4\pi^2}{k_0 \nu \mu'(\epsilon) |\mu(\epsilon)|^2} \{ [5\nu^2 - |\mu(\epsilon)|^2] \langle T^2 \rangle + 2 [|\mu(\epsilon)|^2 - \nu^2] \langle T \bar{T} \rangle \} \times \\ \times \int n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) n(\epsilon_3) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \quad (52.27)$$

Характерная частотная ширина пакета $\eta \approx \nu^2 / 2\gamma$, поэтому вместо (52.27) можно рассмотреть более простое уравнение:

$$n(\epsilon) = \frac{16\pi^2 \nu^2 \langle T^2 \rangle}{k_0 \nu \mu'(\epsilon) |\mu(\epsilon)|^2} \int n(\epsilon_1) n(\epsilon_2) n(\epsilon_3) \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3. \quad (52.28)$$

Это уравнение совпадает по виду с (52.23). Коэффициент A для него равен $16 \pi^2 \langle T^2 \rangle \nu^2 / k_0 \nu$, поэтому

$$\eta = 0,97 \nu^2 / 2\gamma, \quad \nu = 35 \langle T^2 \rangle N^2 / k_0 \nu. \quad (52.29)$$

Вследствие сокращения главных вкладов в столкновительном члене полученная ширина ν существенно меньше, чем при комплексном T (52.26). Заметим, что подстановка ν из (52.29) в оценку перенормировки вершины (52.16) показывает, что $\Delta T/T$ не мало. Однако аккуратное вычисление диаграмм $\sim T^3$ при действительном T доказывает наличие сокращений и в более высоких порядках теории возмущений. В этом случае

$$\Delta T/T \approx \nu TN / k \nu \Gamma \ll 1, \quad (52.30)$$

что дает возможность применять ST^2 -теорию в широких пределах.

В этом параграфе будет получена функция распределения ПСВ $n(\Omega, \epsilon)$ по углам Ω и частотам ϵ в однородном идеальном ФМ. Эта задача обладает аксиальной симметрией. Однако прежде всего мы выведем в п. 53.1 исходную систему уравнений ST^2 -теории для анализа $n(\Omega, \epsilon)$ без предположения об аксиальной симметрии.

53.1. Исходные уравнения. В общем случае функция распределения ПСВ $n(\mathbf{k}, \omega)$ локализована в $\mathbf{k}$ -пространстве вблизи резонансной поверхности $\tilde{\omega}_k = \omega_p/2$. Если пакет ПСВ является не слишком узким по углам (критерий узости пакета мы получим впоследствии), то массовые операторы являются плавными функциями модуля волнового вектора. Поэтому в соответствии с (36.3) зависимость $n(\mathbf{k}, \omega)$ и $\sigma(\mathbf{k}, \omega)$ от ω_k определяется зависимостью функций Грина $G(\mathbf{k}, \omega)$ и $L(\mathbf{k}, \omega)$ от расстройки $(\omega_k - \omega_p/2)$. Это позволяет проинтегрировать исходные уравнения ST^2 -теории (36.3), (36.4) и (36.6) по $\mathbf{k}$ и получить замкнутую систему уравнений для функций распределения ПСВ по частотам ϵ и углам в $\mathbf{k}$ -пространстве:

$$n(\Omega, \epsilon) = \frac{\pi k_\Omega^2}{v(\Omega) \mu'(\Omega, \epsilon) |\mu(\Omega, \epsilon)|^2} \times$$

$$\times \{ [\Gamma^2 + |\Pi|^2 + \epsilon^2 + |\mu(\Omega, \epsilon)|^2] \Phi + 2 \operatorname{Im} [(\Gamma - i\epsilon) \Pi^* \Psi] \},$$

$$\Gamma = \Gamma(\Omega, \epsilon), \quad \Pi = \Pi(\Omega, \epsilon), \quad \Phi = \Phi(\Omega, \epsilon), \quad \Psi = \Psi(\Omega, \epsilon), \quad (53.1)$$

$$\sigma(\Omega, \epsilon) = \frac{\pi k_\Omega^2}{v(\Omega) \mu'(\Omega, \epsilon) |\mu|^2} \{ -2i \Pi \Gamma \Phi - (\Gamma^2 + \epsilon^2 - |\mu|^2) \Psi + |\Pi|^2 \Psi^* \},$$

$$\Phi_{\text{int}}(\Omega, \epsilon) = 2 \int [|T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)|^2 n_1 n_2 n_3 +$$

$$+ T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) T^*(\Omega, \bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \Omega_3) \sigma_1^* \sigma_2 n_3] \times$$

$$\times \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \prod_{i=1}^3 d\Omega_i,$$

$$\Psi_{\text{int}}(\Omega, \epsilon) = 2 \int [T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) T(\Omega, \bar{\Omega}_1, \Omega_2, \bar{\Omega}_3) \sigma_1^* \sigma_2 \sigma_3 +$$

$$+ 2 T(\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) T(\bar{\Omega}, \Omega_1, \Omega_2, \bar{\Omega}_3) \times$$

$$\times n_1 n_2 \sigma_3] \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \prod_{i=1}^3 d\Omega_i d\epsilon_i,$$

$$n_i = n(\epsilon_i, \Omega_i), \quad \sigma_i = \sigma(\epsilon_i, \Omega_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Sigma_{\text{int}}(\Omega, \epsilon) = 2 \int T(\Omega, \Omega') n(\Omega', \epsilon') d\Omega' d\epsilon' -$$

$$- 2\pi f \left\{ |T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)|^2 \left[\frac{n_1 n_2 (i\Gamma_3 + \epsilon_2) k_3^2}{\mu_3 v_3} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{n_1 n_3 (i\Gamma_2 + \epsilon_2) k_2^2}{\mu_2 v_2} + \frac{n_2 n_3 (i\Gamma_1 + \epsilon_1) k_1^2}{\mu_1 v_1} \right] \} +$$

$$+ 2T(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)T^*(\Omega, \bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \Omega_3) \left[\frac{\sigma_1^* \sigma_2 (i\Gamma_3 + \epsilon_3) k_3^2}{\mu_3 \nu_3} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_1^* n_3 \Pi_2 k_2^2}{\mu_2 \nu_2} + \frac{\sigma_2 n_3 \Pi_1^* k_1^2}{\nu_1 \mu_1} \right] \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \prod_{i=1}^3 d\Omega_i d\epsilon_i, \quad (53.2)$$

$$\mu(\Omega, \epsilon) = [\nu^2(\Omega, \epsilon) - 2i\Gamma(\Omega, \epsilon) - \epsilon^2]^{1/2},$$

$$\nu^2(\Omega, \epsilon) = \Gamma^2(\Omega, \epsilon) - |\Pi(\Omega, \epsilon)|^2,$$

$$\Gamma(\Omega, \epsilon) = \gamma_0(\Omega) - \text{Im } \Sigma(\Omega, \epsilon).$$

Здесь волновые векторы k_i в аргументах δ -функций лежат на резонансной поверхности в направлении Ω_i . Полученная система уравнений (53.1) – (53.2) обобщает уравнения (52.1) – (52.5) для анизотропного случая.

53.2. Уравнения при аксиальной симметрии. В этом пункте мы определим функцию распределения ПСВ в однородном ФМ. Для простоты мы ограничимся случаем не слишком большой надкритичности, когда при параллельной накачки возбуждена группа ПСВ вблизи экватора резонансной поверхности $\theta_k = \pi/2$. В этом случае можно в выражениях для матричных элементов пренебречь зависимостью от полярного угла θ_k , считая его равным $\pi/2$. Кроме того, как показано в предыдущем параграфе, можно пренебречь зависимостью величин $\mu(\Omega, \epsilon)$, $\Gamma(\Omega, \epsilon)$ и $\Pi(\Omega, \epsilon)$ от частоты ϵ . Из формул (53.1) и (53.2) следует, что с точностью до членов $(\nu/\Gamma)^2$ выполняются соотношения

$$\Gamma(\Omega)\sigma(\Omega, \epsilon) + i\Pi(\Omega)n(\Omega, \epsilon) = 0, \quad (53.3) \\ |\Pi(\Omega)| = \Gamma(\Omega) = \gamma_0(\Omega),$$

позволяющие исключить аномальный коррелятор σ из выражений для массовых операторов. Для того чтобы получить окончательное выражение для столкновительного члена в (53.1), следует учесть еще одно обстоятельство – четыре вектора равной длины k, k_1, k_2, k_3 , лежащие на экваторе резонансной поверхности, обращают в нуль аргумент δ -функций в (53.2) только в одном из следующих случаев: 1) $k_2 = k, k_3 = k_1$; 2) $k_3 = k, k_2 = k_1$; 3) $k + k_1 = 0, k_2 + k_3 = 0$. В результате из (51.1) следует

$$n(x, \varphi, \epsilon) = 2\pi\Gamma^2 \int \frac{[\text{Im } S(\varphi, \varphi')]^2}{|\sin(\varphi - \varphi')| k_0 \nu_0 \mu'(\epsilon, \Omega) |\mu(\epsilon, \Omega)|^2} \times \\ \times n_1 n_2 n_3 \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) \delta(x + x_1 - x_2 - x_3) d\varphi' \prod_{i=1}^3 dx_i d\epsilon_i, \quad (53.4)$$

$$\Gamma = \Gamma(\varphi, \epsilon), \quad n_i = n(x_i, \varphi_i, \epsilon_i).$$

Следует отметить, что в силу эрмитовости гамильтониана $\text{Im } S(\varphi, \varphi') = 0$, поэтому интеграл в (53.4) сходится. Поскольку в кубических ФМ отличны от нуля только коэффициенты S_0 и $S_{\pm 2}$ в разложении $S(\varphi - \varphi')$ в ряд Фурье, то

$$\text{Im } S(\varphi, \varphi') = \Delta S \sin 2(\varphi - \varphi'), \quad \Delta S = S_2 - S_{\bar{2}}. \quad (53.5)$$

Для того чтобы определить функцию распределения $n(x, \varphi, \epsilon)$ из уравнения (53.4), необходимо знать поведение величины $\mu(\Omega, \epsilon) = [\nu^2(\Omega, \epsilon) -$

$-2i\Gamma\epsilon - \epsilon^2]^{1/2}$. Как видно из (53.4), ширина пакета ПСВ по частотам $\Delta\epsilon$ есть величина порядка $\Delta\epsilon \sim \nu^2/2\Gamma \ll \nu$. Поэтому мы можем пренебречь перенормировкой затухания за счет взаимодействия ПСВ и, как и в § 52, зависимостью ν от частоты ϵ . В результате возникает следующее приближение для $\mu(\Omega, \epsilon)$:

$$\mu(\Omega, \epsilon) = [\nu^2(\Omega) - 2i\gamma_0(\Omega)\epsilon]^{1/2}. \quad (53.6)$$

53.3. Анализ решений для формы пакета. Если пренебречь малой кристаллографической анизотропией, то ферромагнетик, помещенный во внешнее магнитное поле, обладает аксиальной симметрией. В этом случае функция распределения ПСВ $n(\Omega, \epsilon)$ не зависит от азимутального угла φ : $2\pi n(\Omega, \epsilon) = n(x, \epsilon)$, $x = \cos\theta$. В результате из (53.4) и (53.5) можно получить

$$n(x, \epsilon) = \frac{16(\Delta S)^2}{3\pi k_0 \nu \nu_1^2(x) \nu_2(x)} \int n_1 n_2 n_3 \delta(x + x_1 - x_2 - x_3) \times \\ \delta(\epsilon + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) \prod_{i=1}^3 dx_i d\epsilon_i. \quad (53.7)$$

Для того чтобы замкнуть уравнения (53.6), (53.7), необходимо определить зависимость $\nu(x)$. До тех пор, пока применима S -теория для вычисления интегральных характеристик ПСВ, т.е. пока $\nu \ll \Gamma$, зависимость $\nu(x)$ определяется разностью между затуханием $\gamma_0(x)$ и перенормированной накачки $|P(x)|$. В частности, если возбужден пакет вблизи экватора резонансной поверхности $\theta_k = \pi/2$ ($x = 0$), то в этой области

$$\nu^2(x) = \nu_0^2 + \beta \gamma^2 x^2, \quad (53.8)$$

где β — коэффициент порядка единицы. Например, если затухание $\gamma(\Omega)$ изотропно, а надкритичность мала, так что угловая зависимость перенормированной накачки обусловлена зависимостью коэффициента связи ПСВ с накачкой $V(\Omega) \sim 1 - x^2$, то $\beta = 2$. Из (53.7) и (53.8) следует, что угловая ширина пакета ПСВ составляет

$$\Delta\theta_k \approx \Delta x \approx \nu_0 / \sqrt{\beta} \gamma. \quad (53.9)$$

Приступая к анализу уравнения (53.7), заметим, что оно имеет сингулярное решение $n(x, \epsilon) = N\delta(x)\delta(\epsilon)$, в котором

$$\nu_0 = (16(\Delta S N)^2 \gamma^2 / 3\pi k \nu)^{1/3} = (16 d \gamma (p - 1) / 3\pi k \nu)^{1/3}, \quad (53.10) \\ d = (\Delta S / S)^2.$$

Кроме того, это уравнение имеет решения, сингулярные только по x или только по ϵ , которые, однако, неустойчивы относительно уширения по углам или по частотам. Мы (И.В. Круценко, В.С. Львов, Г.А. Мелков, [133]) не смогли получить регулярное решение, однако наиболее интересные его свойства были указаны. Эффективная ширина $\Delta\theta_k$ и $\Delta\varphi_k$ этого решения уравнения (53.7) определяется шириной ν_0 в соответствии с (53.8). Можно найти также асимптотики этого решения при

$$x \gg \nu/\gamma, \quad \epsilon \gg \nu_0^2/\gamma,$$

а именно:

$$n(x', \epsilon') = N(\gamma/\nu_0) f(x', \epsilon') \exp \{ - [(\lambda_1 x')^2 + (\lambda_2 \epsilon')^2]^{1/2} \}, \quad (53.11)$$

где λ_1 и $\lambda_2 \approx 1$, а вид функции $f(x', \epsilon')$ зависит от соотношения между x' и ϵ' :

$$\begin{aligned} f &= 1 \quad \text{при } x' \lesssim \epsilon', \\ f &\approx (\epsilon'/x')^{3/2} \quad \text{при } \epsilon'^2 > x' > \epsilon', \\ f &\approx 1/x'^{3/4} \quad \text{при } x' > \epsilon'^2 \end{aligned}$$

Приведем интерполяционную формулу, качественно описывающую поведение n во всей области изменения параметров:

$$\begin{aligned} n(x', \epsilon') &\approx N(\gamma/\nu_0)(1+x'^2 + \epsilon'^2)^{3/8}(1+x'^2 + \epsilon'^2)^{-3/4} \times \\ &\times \text{ch}^{-1}[(\lambda_1 x')^2 + (\lambda_2 \epsilon')^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (53.12)$$

В нашем эксперименте определялось только распределение $n(\epsilon)$ по частотам:

$$n(\epsilon) = 2\pi \int n(\theta, \epsilon) d \cos \theta; \quad (53.13)$$

при $\epsilon' \gg 1$ основной вклад в этот интеграл вносит область $x' \lesssim (\epsilon')^{1/2}$, поэтому

$$n(\epsilon) = N(\gamma/\nu_0)^{3/2} [(\Delta\omega)^2 + (\nu_0^2/\gamma)^2]^{1/4} \text{ch}^{-1}(\Delta\omega\gamma/\nu_0^2). \quad (53.14)$$

В вышеупомянутой работе проведен более полный анализ формы и ширины пакета ПСВ с учетом не только собственного, но и теплового шума и слабого упругого рассеяния.

53.4. Экспериментальное исследование распределения ПСВ по частотам (И.В. Круценко, В.С. Львов, Г.А. Мелков, [133]).

Для изучения этого вопроса мы регистрировали электромагнитное излучение из феррита на частотах, близких к половине частоты накачки. Это явление обусловлено двухмагннным рассеянием ПСВ на статических неоднородностях. В таком случае для комплексной амплитуды излученной из кристалла электромагнитной волны $U(t)$ можно написать

$$U(t) = \sum_n g_k \exp(ikr_n) a_k(t) dk, \quad (53.15)$$

где g_k — коэффициент преобразования ПСВ с волновым вектором k на одном рассеивающем центре, r_n — их координаты. Используя (53.15), получаем выражение для корреляционной функции излучения $K(\tau)$:

$$K(\tau) = \langle U(t)U^*(t+\tau) \rangle = n_n \int |g_k|^2 n_k(\tau) dk. \quad (53.16)$$

Здесь n_n — число рассеивающих центров. Из (53.16) видно, что с точностью до не зависящего от времени масштабного множителя функция $K(\tau)$ равна интегральной по k корреляционной функции ПСВ $N(\tau) = \int n_k(\tau) dk$, и поэтому спектральная плотность $K(\omega)$ отличается от спектральной плотности ПСВ $n(\omega)$, определенной соотношением только на постоянный множитель (53.13). Этот вывод по существу обусловлен тем, что двухмагннное рассеяние на статических неоднородностях происходит без изменения частоты колебаний. Таким образом, можно исследовать статистические свойства ПСВ, изучая электромагнитное излучение из феррита. На рис. 53.1 представлена типичная зависимость $I(\epsilon)$, полученная экспериментально для одной из исследованных сфер ЖИГ. Сплошная кривая на рис. 53.1 представляет собой сглаженную кривую, построенную по десяти реализа-

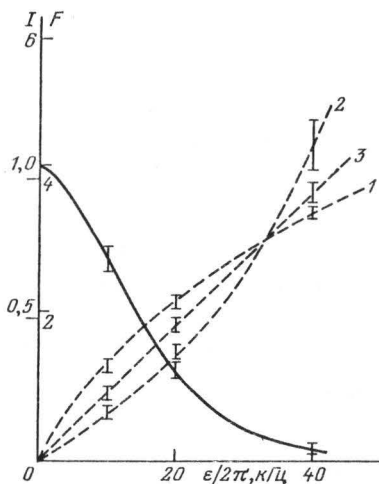


Рис. 53.1. Зависимость спектральной плотности сигнала $I(\epsilon)$, прошедшего через квадратичный детектор, от частоты $\epsilon = \omega - \omega_p/2$ для сферы ЖИГ. Пунктирные кривые — построения $I(\epsilon)$ в координатах; 1 — $F(\epsilon) = 2|\ln I(\epsilon)|^{1/2}$; 2 — $F(\epsilon) = [I^{-1}(\epsilon) - 1]^{1/2}$; 3 — $F(\epsilon) = \ln[I^{-1}(\epsilon) + (I^{-2}(\epsilon) - 1)^{1/2}]$

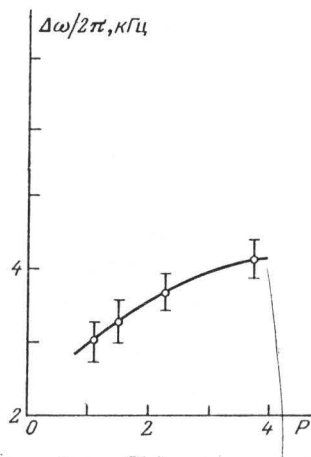


Рис. 53.2. Зависимость ширины спектральной плотности ПСВ от мощности накачки P для сферы ЖИГ

циям случайного процесса на экране спектроанализатора. Для выяснения характера экспериментальной кривой $I(\epsilon)$ она была построена в различных спрямляющих координатах. Если $I(\epsilon)$ является гауссовой кривой, то она будет представлять собой прямую линию в координатах $[\ln(1/I)]^{1/2}$, ϵ ; если $I(\epsilon)$ — лоренцева кривая, то прямая линия будет иметь место в координатах $(1/I - 1)^{1/2}$, ϵ ; если $I \sim (\epsilon/\text{sh } \epsilon)^{1/2}$, то к прямой линии приведет построение $I(\epsilon)$ в координатах $\ln[1/I + (1/I^2 - 1)^{1/2}]$. Из рис. 53.1 видно, что первые две стандартные функции совершенно не подходят для описания эксперимента, в то время как функция $(x/\text{sh } x)^{1/2}$ удовлетворительно совпадает с экспериментом. Подобное совпадение формы кривой $I(\epsilon)$ наблюдалось для всех исследованных образцов при различной надкритичности и значениях постоянного магнитного поля. Тангенс угла наклона прямой линии 3 на рис. 53.1 определяет ширину кривой $\Delta\epsilon$, которая из-за особенностей квадратичного детектора в $\sqrt{6}$ раз больше реальной ширины кривой электромагнитного излучения $\Delta\omega$, совпадающей с шириной спектральной плотности ПСВ. На рис. 53.2 приведена также зависимость ширины распределения ПСВ $\Delta\omega$ от надкритичности $p = (h/h_{th})^2$. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с результатами теории, изложенной в этом пункте.

§ 54. Угловое распределение ПСВ в анизотропной среде

Несмотря на то, что обычно используемый в экспериментах по параметрическому возбуждению СВ ЖИГ обладает очень малой кристаллографической анизотропией, эксперименты, проведенные А.С. Бакаем и др. [54], Г.А. Мелковым и И.В. Круценко [135], убедительно продемонстрировали

резкую анизотропию распределения ПСВ по азимутальному углу φ . В этом параграфе мы разовьем ST^2 -теорию на случай анизотропных распределений ПСВ и обсудим результаты этих экспериментов. В дальнейшем мы будем рассматривать параметрическое возбуждение СВ в магнетиках с кубической симметрией. Причиной анизотропии по φ распределения ПСВ в кубических ФМ может быть лишь анизотропия затухания СВ $\gamma(k)$, так как все остальные существенные величины: коэффициент связи с накачкой и матричный элемент четырехмагнонного взаимодействия не имеют выделенного направления в экваториальной плоскости $\theta_k = \pi/2$. Если намагниченность направлена вдоль осей [100] или [111], то из соображений симметрии на экваторе резонансной поверхности

$$\gamma(\varphi) = \gamma_0 + \gamma_1(1 - \cos 4\varphi), \quad \gamma(\varphi) = \gamma_0 + \gamma_2(1 - \cos 6\varphi). \quad (54.1)$$

Для произвольного направления намагниченности

$$\gamma(\varphi) = \gamma + \gamma_3(1 - \cos 2\varphi). \quad (54.2)$$

Микроскопические механизмы релаксации СВ в ЖИГ, приводящие к анизотропии затухания, исследованы И.В. Колоколовым, В.С. Львовым, В.Б. Черепановым [123]. Здесь мы, однако, будем считать γ_i ($i = 1, 2, 3$) феноменологическими константами, причем $\gamma_i \ll \gamma_0$. В соответствии с S -теорией распределение ПСВ при анизотропии затухания должно быть сингулярным:

$$n(\varphi) \sim \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^Z \delta(\varphi - 2\pi j/Z), \quad (54.3)$$

где Z — число минимумов функции $\gamma(\varphi)$. Необходимо отметить, что интегральные характеристики системы ПСВ мало чувствительны к зависимости $n(\Omega)$ от азимутального угла φ , а коэффициенты гамильтониана взаимодействия волн $S(k, k')$ таковы, что уравнения S -теории в стационарном случае определяют интегральное число ПСВ N , налагая при этом единственное ограничение на вид зависимости $n(\varphi)$:

$$\int n(\theta, \varphi) \exp(2i\varphi) d\varphi = 0. \quad (54.4)$$

Таким образом, в рамках S -теории в принципе допустимы сильно анизотропные по φ распределения вплоть до сингулярных распределений (54.3). В действительности сингулярные распределения неустойчивы, и форма пакета обусловлена конкуренцией двух слабых факторов, не учитываемых в S -теории для аксиально-симметричной ситуации. С одной стороны, это слабая кристаллографическая анизотропия в кубических ФМ, которая стремится стянуть распределение ПСВ $n(\varphi)$ до сингулярного состояния в виде креста ($Z = 4$), если намагниченность ориентирована по оси симметрии четвертого порядка $M \parallel [100]$, или до шестиконечной звезды ($Z = 6$), если M ориентирована по оси третьего порядка ($M \parallel [111]$). С другой стороны, это процессы рассеяния ПСВ друг на друге и на слабых случайных неоднородностях, дефектах, которые стремятся размазать, сделать изотропным распределение параметрических волн $n(\varphi)$. При этом полное число ПСВ N по-прежнему определяется соотношением S -теории:

$$N = \gamma(p - 1)^{1/2} / |S|. \quad (54.5)$$

54.1. Уширение распределения параметрических волн из-за их рассеяния друг на друге. При малой анизотропии распределение ПСВ на резонансной

поверхности представляет собой совокупность длинных полосок с $\Delta\varphi \gg \Delta\theta$, вытянутых вдоль экватора. Поэтому при анализе распределения по θ можно считать распределение по φ изотропным. В таком предположении распределение по θ анализировалось в § 53, где было показано, что

$$\Delta\theta \approx \nu_0/\gamma \approx [\gamma d(p-1)/kv]^{1/3}. \quad (54.6)$$

Там же было выведено уравнение (53.4), описывающее распределение $n(\theta, \varphi, \epsilon)$. В одночастотном приближении и при $\Delta\theta \ll \Delta\varphi$ из него следует уравнение для функции распределения ПСВ по азимутальным углам $n(\varphi)$:

$$\begin{aligned} n(\varphi) &= \int n(x, \varphi, \epsilon) dx d\epsilon = \\ &= \frac{4\pi\gamma^2 n(\varphi)}{kv\nu^3} \int \frac{n^2(\varphi') [\text{Im} S(\varphi, \varphi')]^2 d\varphi'}{|\sin(\varphi - \varphi')|}, \end{aligned} \quad (54.7)$$

$$\nu^2 = \nu^2(\varphi) = \nu_0^2 + \frac{1}{2} \nu_1^2 \sum_{j=1}^Z [1 - \cos(2\pi j/Z - \varphi)], \quad (54.8)$$

$$\text{Im} S(\varphi, \varphi') = \Delta S \sin 2(\varphi - \varphi'). \quad (54.9)$$

Здесь $\nu_1 = \delta\gamma$, $\delta \ll 1$, характеризует малость анизотропии по φ . В соответствии с (54.1) $\delta = Z(\gamma_1/\gamma)^{1/2}$, при $M \parallel [100]$ ищем решение уравнения (54.7) в виде размытого креста ($Z = 4$):

$$N(\varphi) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 F(\varphi - \pi j/2), \quad \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi = 1. \quad (54.10)$$

Функция $F(\varphi)$ удовлетворяет уравнению, следующему из (54.7):

$$F(\varphi) = \frac{2\pi(\gamma\Delta SN)^2 F(\varphi)}{kv\nu^3(\varphi)} \int_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi - \varphi'| F^2(\varphi') d\varphi'. \quad (54.11)$$

Она отлична от нуля в интервале $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ и нормирована в нем на единицу. В этом интервале можно сократить уравнение (54.11) на $F(\varphi)$ и продифференцировать его дважды по φ . В результате получаем

$$F^2(\varphi) = \frac{kv}{\pi(\gamma\Delta SN)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \nu^3(\varphi) = \frac{3\nu_1^2 \nu_0 kv}{\pi(\gamma\Delta SN)^2} \frac{1 + 2\nu_1^2 \varphi^2 / \nu_0^2}{(1 + \nu_1^2 \varphi^2 / \nu_0^2)^{1/2}}. \quad (54.12)$$

Подставляя эту функцию в (54.11), определяем α :

$$\alpha^2 = \nu_0^2 / 2\nu_1^2 = \nu_0^2 / 32\gamma\gamma_1. \quad (54.13)$$

Видно, что в области $|\varphi| < \alpha$ функция $F(\varphi)$ изменяется не более чем на 10%. При $|\varphi| > \alpha$ функция $F(\varphi)$ резко обрывается до нуля. Величину ν_0 , определяющую по (54.13) ширину размытия пакета ПСВ по φ , можно определить из условия нормировки (6.18):

$$(\nu_0/\gamma) = [\pi\gamma d(p-1)/6k_0v]^{1/3}. \quad (54.14)$$

С точностью до несущественного числового коэффициента это выражение совпадает с выражением (53.10), полученным для изотропной по φ ситуации. Выражения (54.6), (54.13) и (54.14) определяют ширину функции распределения по φ и по θ . По порядку величины

$$\Delta\theta \approx \nu_0/\gamma \approx [\gamma d(p-1)/k_0v]^{1/3}, \quad (54.15)$$

$$\Delta\varphi \approx \Delta\theta/\delta, \quad \delta = 4(\gamma_1/\gamma)^{1/2}.$$

Несколько иная ситуация складывается при $M \parallel [111]$, когда распределение имеет вид размытой шестиконечной звезды ($Z = 6$). Для функции $F(\varphi)$ из (54.7) и (54.3) получается в этом случае уравнение, отличное от (54.11):

$$F(\varphi) = \frac{8\pi(\gamma\Delta SN)^2 F(\varphi)}{9kv\nu^3} \int_{-\alpha}^{\alpha} (|\varphi - \varphi'| + \sqrt{3}/4) F^2(\varphi') d\varphi'. \quad (54.16)$$

Здесь основной вклад дает рассеяние на углы $|\varphi - \varphi'| \approx \pi/3$; $2\pi/3$, а рассеяние на углы $|\varphi - \varphi'| \approx 0$; π определяет вид функции $F(\varphi)$. Как и прежде, сокращая (54.16) на $F(\varphi)$ и дважды дифференцируя полученное выражение по φ , получим

$$F^2(\varphi) = \frac{27\nu_1^2 \nu_0 kv}{16\pi(\gamma\Delta SN)^2} \frac{1 + 2\nu_1^2 \varphi^2 / \nu_0^2}{(1 + \nu_1^2 \varphi^2 / \nu_0^2)^{1/2}}. \quad (54.17)$$

Однако раствор сектора α , в котором решение $F(\varphi)$ отлично от нуля, равен

$$\alpha = 4\nu_0^2 / 3\sqrt{3} \nu_1^2, \quad (54.18)$$

а вид функции $F(\varphi)$ близок к прямоугольному с высотой $1/2\alpha$. Из условия нормировки выражения (54.18) для $F(\varphi)$ имеем

$$\begin{aligned} \nu_0/\gamma &= [3\pi d\nu_1^2 (p-1)/4\gamma kv]^{1/5} \approx \Delta\theta^*, \\ \nu_1^2 &= 36\gamma\gamma_1. \end{aligned} \quad (54.19)$$

Отсюда и из (54.18) получаются выражения для угловых размеров пакета:

$$\begin{aligned} \Delta\theta^* &\approx \left[\frac{27\pi\gamma_1 d (p-1)}{kv} \right]^{1/5}, \\ \Delta\varphi^* &\approx \frac{2}{27\sqrt{3}} \left[\frac{27\pi\gamma_1 d (p-1)}{kv} \right]^{2/5} \frac{\gamma}{\gamma_1}. \end{aligned} \quad (54.20)$$

Отметим, что в рассмотренном случае $\Delta\varphi^*$ и $\Delta\theta^*$ не связаны стандартным соотношением (54.15), а именно $\Delta\varphi^* \ll \Delta\theta^*/\delta$.

В случае, когда намагниченность ориентирована вдоль оси симметрии второго порядка ($M \parallel [110]$), за порогом параметрической неустойчивости возбуждается одна размытая пара с шириной $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$, определяемой по формулам (54.15). Такое состояние не удовлетворяет условию (54.4), полученному в S -теории для изотропных ФМ, в результате оно существует в узком диапазоне надкритичности, определяемом кубической анизотропией:

$$p-1 < (\delta/d)^2 \approx p^- - 1. \quad (54.21)$$

При $p > p^-$ возбуждается вторая группа пар в плоскости экватора (т.е. $\theta = \pi/2$), ориентированная под прямым углом к первой, т.е. возбуждается крест с шириной (54.15). Надо сказать, что выражения (5.4) для Φ_{int} и Ψ_{int} были получены в пренебрежении перенормировкой вершин, т.е. при

$$\epsilon \equiv (\Delta T/T) \sim \gamma^2 (p-1)^{1/2} / kv\nu_0 \alpha^2 \sim \delta^2 / (p-1) \ll 1. \quad (54.22)$$

Этот же параметр характеризует отклонение четверного коррелятора от произведения парных. Другими словами, фазы волн в пакете почти случайны.

Таким образом, при малой анизотропии ($\delta \ll 1$) распределение ПСВ состоит из совокупности пар волновых пакетов с почти случайными фазами и резкими по аксиальному углу границами. Заметим, что слабое рассеяние на неоднородностях и малые добавки $\delta\Phi_{\text{int}}$, уточняющие аппроксимацию (54.9) $\delta\Phi_{\text{int}} \sim (\nu_0/\gamma)^2 \Phi_{\text{int}}$, приводят к размытию разрывов $N(\varphi)$.

54.2. Эксперимент по измерению угловых размеров пакета ПСВ $\Delta\theta_k$ и $\Delta\varphi_k$. Здесь мы опишем изящный эксперимент Г.А. Мелкова и И.В. Круценко [135]. Его идея, основанная на следующем свойстве спектра СВ в ФМ: при не слишком больших частотах кривизны поверхности $\omega_k = \text{const}$ вдоль экватора $\theta_k = \pi/2$ и поперек $\varphi = \text{const}$ имеют разные знаки. Если бы пакет ПСВ по углам был сингулярен: $n(\Omega) \sim \delta(\theta - \pi/2) \delta(\varphi)$, то процессы слияния двух ПСВ в третью СВ был бы разрешен при единственном значении магнитного поля $H = H_{3M}$. Если пакет уширен по углу φ , то слияния разрешены в области полей $H' < H < H_{3M}$, причем

$$\Delta\varphi \sim (H_{3M} - H')^{1/2}. \quad (54.23)$$

Если же пакет уширен по полярному углу θ , то слияния разрешены при $H_{3M} < H < H''$,

$$\Delta\theta \sim (H'' - H_{3M})^{1/2}, \quad (54.24)$$

где H'' — магнитное поле, при котором $k = 0$, $\theta_k = \pi/2$ (А.С. Бакай и др., [54]). К сожалению, образующиеся в результате слияния двух ПСВ спиновые волны имеют частоту, равную частоте накачки, и детектировать их на фоне мощного сигнала накачки невозможно. Поэтому в эксперименте измерялось излучение на частоте $2\omega_p$, обусловленное слияниями образовавшихся СВ с частотой ω_p . Характерная зависимость мощности излучения $P(2\omega_p)$ от магнитного поля для нескольких значений температуры приведена на рис. 54.1. Видно, что при комнатной температуре распределе-

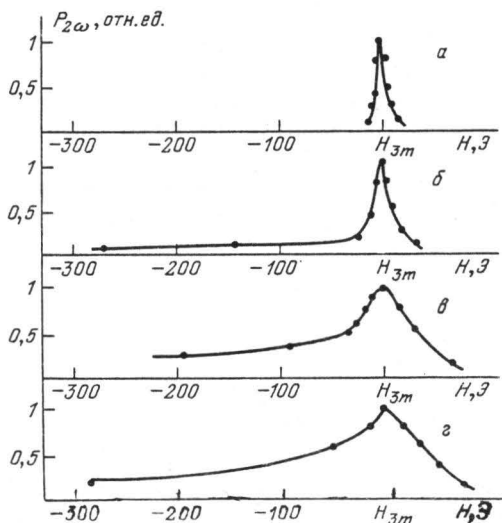


Рис. 54.1. Зависимость мощности излучения на удвоенной частоте накачки $P_{2\omega}$ от постоянного магнитного поля для образца ЖИГ при различных температурах, К: $T = 300$ К (а); $T = 210$ К (б); $T = 110$ К (в); $T = 50$ К (г)

ние ПСВ является узким по углам, причем значения и зависимость ширины $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$ от надкритичности составляют несколько градусов и согласуются с результатами изложенной в § 53 теории уширения, обусловленного рассеянием ПСВ друг на друге. С изменением температуры, помимо узкого по азимутальному углу пика, возникает изотропный по φ фон ПСВ. Ширина самого пика $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$ также увеличивается. Этот эффект находит естественное объяснение как следствие упругого рассеяния на дефектах, относительная роль которого с уменьшением температуры растет. Влияние дефектов на уширение пакета ПСВ рассматривалось в предыдущей главе. Однако сравнение теории с экспериментом при низких температурах затруднено из-за отсутствия необходимой информации о рассеянии на дефектах.

§ 55. Влияние рассеяния ПСВ друг на друге на коллективные колебания

55.1. Исходные уравнения. Общие уравнения для коллективных колебаний (КК) ПСВ с учетом их рассеяния друг на друге приведены в гл. 7 (формулы (38.4)). В этом параграфе мы рассмотрим КК ПСВ в кубических ФМ. Сначала мы пренебрежем анизотропией затухания СВ. В этом случае ПСВ локализованы в k -пространстве вблизи экватора резонансной поверхности $\tilde{\omega}_k = \omega_p/2$. КК в приближении S -теории (т.е. с учетом только самосогласованных диаграмм в Σ и Π , $|P_k| = \gamma_k$, $|Q_k| = n_k$) изучены в § 23. Для частот пространственно-однородных ($\kappa = 0$) КК $\Omega_m^\pm$ было получено простое выражение (23.6). Этот результат, так же как и исходные уравнения S -теории, не чувствителен к деталям распределения ПСВ в (k, ω) -пространстве и справедлив как при многочастотном, так и при одночастотном состоянии ПВ. Высшие диаграммы в (38.4), связанные с рассеянием ПСВ друг на друге, вносят в (23.6) малые поправки

$$\Delta\Omega \propto \gamma [(TN)^2/\gamma k v]^2/3$$

и не представляют интереса. Следует, однако, отметить, что линеаризованная система уравнений (38.4) имеет высокий порядок и в приближении S -теории имеет, помимо $\Omega_m^\pm$ (23.6), также и тривиальное собственное значение $\Omega_m = 0$. Колебания, соответствующие этому собственному значению, являются для нас наиболее интересными, так как слабое взаимодействие ПВ ($\propto T^2$) должно приводить к нарушению их безразличной устойчивости.

В области частот ω , $\omega' \ll \gamma$ рассмотрим следующие интегральные величины:

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= \int [n_q(\Omega) + n_q^*(\Omega)] k^2 dk d\omega, \quad q = (k, \omega), \\ K(\varphi) &= \frac{i}{\gamma} \int [\Pi_k^* \sigma_q(\Omega) - \Pi_k \sigma_q^*(\Omega)] k^2 dk d\omega, \\ M(\varphi) &= \frac{1}{\gamma} \int [\Pi_k^* \sigma_q(\Omega) + \Pi_k \sigma_q^*(\Omega)] k^2 dk d\omega. \end{aligned} \quad (55.1)$$

Индекс плюс означает замену $k \rightarrow -k$, $\omega \rightarrow \omega_p - \omega$ и комплексное сопряжение. Уравнения для $N(\varphi)$, $K(\varphi)$ и $M(\varphi)$ имеют следующий вид:

$$\pi N(\varphi) = \int \left\{ \frac{(\nu'_+ + \nu'_- + \nu_-) N(\omega')}{\nu_- (\nu'_+ + \nu_-) (\nu'_- + \nu_-)} + \frac{(\nu_+ + \nu_- + \nu'_+) N(\omega)}{\nu'_+ (\nu_+ + \nu'_+) (\nu_- + \nu'_+)} \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \{-i\gamma [\Sigma(\varphi) - \Sigma^*(\varphi)] + \Pi^*(\varphi) \Pi(\varphi) + \Pi(\varphi) \Pi^*(\varphi)\} d\omega + \\ & + \frac{\pi k^2}{v \nu'_+ \nu_- (\nu_- - \nu'_+)} \int \gamma [\gamma \Phi(\varphi) + \gamma \Phi^*(\varphi) + i \Pi(\varphi) \Psi(\varphi) - \\ & - i \Pi^*(\varphi) \Psi(\varphi)] d\omega, \quad K(\varphi) = N(\varphi), \end{aligned} \quad (55.2)$$

$$\begin{aligned} 2\pi M(\varphi) = & \int \left\{ \frac{(\nu'_+ + \nu'_- + \nu_-) N(\omega')}{\nu_- (\nu'_+ + \nu_-) (\nu'_- + \nu_-)} + \frac{(\nu_+ + \nu_- + \nu'_+) N(\omega)}{\nu'_+ (\nu_+ + \nu'_+) (\nu_- + \nu'_+)} \right\} \times \\ & \times \left\{ i\Omega [\Sigma(\varphi) + \Sigma^*(\varphi)] - \left[\left(\frac{\nu}{\gamma} \right)^2 - \frac{i\Omega}{\gamma} \right] [\Pi^*(\varphi) \Pi(\varphi) - \Pi(\varphi) \Pi^*(\varphi)] \right\} d\omega, \end{aligned}$$

$$\nu_{\pm} = (\nu^2 \pm 2i\gamma\omega)^{1/2}, \quad \nu'_{\pm} = (\nu^2 \pm 2i\gamma\omega')^{1/2},$$

ν — ширина распределения ПВ в k -пространстве (53.10).

Перейдя к переменным (55.1), мы тем самым ограничили исследуемый класс колебаний движениями, изменяющими интегральную амплитуду ПСВ. Помимо них, в системе ПСВ существуют колебания распределения $n(q)$, не меняющие интегральных характеристик. Такие возмущения мы здесь не рассматриваем.

При $SN \gg \nu$, как показывает анализ уравнений (55.2), можно ограничиться в Σ и Π самосогласованными диаграммами и положить $\Phi = \Psi = 0$. В этом приближении система (55.2) замыкается и, поскольку уравнение для $N(\varphi)$ содержит малый знаменатель, приводится к виду $M(\varphi) = 0$ или

$$[i\Omega 2T_m - (\nu^2/\gamma - i\Omega) S_m] N_m = 0, \quad (55.3)$$

где m — номер азимутальной гармоники. Из (55.3) получаем окончательно для Ω_m выражение

$$\Omega_m = -i(\nu^2/\gamma) S_m / (2T_m + S_m), \quad (55.4)$$

так что при $S_m (2T_m + S_m) > 0$, когда устойчивы коллективные колебания S -теория, мода (55.4) тоже устойчива. В этих низкочастотных по сравнению с (23.6) колебаниях участвуют амплитуды n_k и $|\sigma_k|$ при фиксированной фазе σ_k . Отличие Ω_m от нуля обусловлено отличием $|\Pi_k|$ от γ_k и $|\sigma_k|$ от n_k .

55.2. Устойчивость и коллективные колебания анизотропно распределенных ПСВ. Здесь мы получим частоты КК резко анизотропных состояний ПСВ, изученных выше.

Высокочастотные коллективные колебания. Спектр этих КК можно получить в рамках S -теории линеаризацией ее уравнений на фоне основного состояния в виде креста ($Z = 4$) или звезды ($Z = 6$). Ответ по форме совпадает с формулой (23.6) для аксиально-симметричного распределения:

$$\Omega_m^{\pm} = -i\gamma \pm \{4S_m [2T_m + S_m] N^2 - \gamma^2\}^{1/2}. \quad (55.5)$$

Однако величины T_m и S_m иначе выражаются через фурье-гармоники матричных элементов $T(\varphi)$ и $S(\varphi)$. Именно, для пары волн ($Z = 1$) остаются

только две моды $\Omega_0^\pm$, где

$$S(0) = S_0 + S_2 + S_{-2},$$

$$T(0) = T_0 + 2T_2.$$

Для креста ($Z = 2$) существуют две пары мод $\Omega_0^\pm$ и $\Omega_2^\pm$:

$$S(0) = S_0, \quad T(0) = T_0, \quad S(2) = S_2 + S_{-2}, \quad T(2) = 2T_2.$$

Для шестиконечной звезды ($Z = 3$) имеются три пары мод $\Omega_0^\pm$ и $\Omega_2^\pm$, $\Omega_4^\pm$, причем их частоты совпадают с аксиально-симметричным случаем (моды $\Omega_4^\pm$ переходят в $\Omega_{-2}^\pm$):

$$S(0) = S_0, \quad T(0) = T_0, \quad S(2) = S_2,$$

$$T(2) = T_2, \quad S(4) = S_{-2}, \quad T(4) = T_{-2}.$$

Здесь мы использовали конкретный вид $S(\varphi)$ и $T(\varphi)$ в ФМ:

$$S(\varphi) = (S_0 + S_2 e^{2i\varphi} + S_{-2} e^{-2i\varphi}) e^{-2i\varphi},$$

$$T(\varphi) = T_0 + T_1 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + T_2 (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}).$$

Низкочастотные коллективные колебания ПСВ. Для аксиально-симметричной системы они описаны в п. 50.1. В нашем случае в пренебрежении рассеянием на неоднородностях эти колебания описываются уравнениями

$$N(\varphi) = n(\varphi, \Omega) + n^*(\varphi, \Omega) = \frac{3N(\varphi)\gamma}{2\pi\nu^3(\varphi)} \int S(\varphi, \varphi') M(\varphi') d\varphi',$$

$$M(\varphi) = \frac{1}{\gamma} [\Pi^*(\varphi) \sigma(\varphi, \Omega) + \Pi(\varphi) \sigma^*(\varphi, \Omega)] =$$

$$= \frac{3N(\varphi)}{4\pi\nu^2(\varphi)} \left\{ \left[i\Omega - \frac{\nu^2(\varphi)}{\gamma} \right] \int S(\varphi, \varphi') N(\varphi') d\varphi' + 2i\Omega \int T(\varphi, \varphi') N(\varphi') d\varphi' \right\}. \quad (55.6)$$

Используя узость распределения, можно получить после преобразования Фурье в (55.6)

$$\Omega_m = - \frac{iN}{\langle N/\nu^2 \rangle \gamma} \frac{S(m)}{2T(m) + S(m)}, \quad (55.7)$$

$$\langle N/\nu^2 \rangle = \int N(\varphi) \nu^{-2}(\varphi) d\varphi.$$

Отсюда получаем для наиболее интересного случая — креста:

$$\pi\Omega_m = -2iv_0 \delta S(m) / [2T(m) + S(m)]. \quad (55.8)$$

Отметим, что в анизотропной системе условия устойчивости высокочастотной и низкочастотной мод (55.5), (55.8):

$$S(m) [S(m) + 2T(m)] > 0 \quad (55.9)$$

совпадают так же, как и в аксиально-симметричном случае.