



Fluid Mechanics

SECOND EDITION

GREGORY FALKOVICH

Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel



CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Г. Фалькович

Современная гидродинамика

Краткий курс

Издание второе, исправленное и дополненное



Москва ♦ Ижевск

2019

УДК 532
ББК 22.253.31
Ф 196

Интернет-магазин
MAFFESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - нефтегазовые технологии
-

Фалькович Г.

Ф 196 Современная гидродинамика. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований ; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2019. — xii, 240 с.

ISBN 978-5-4344-0635-2

Учебник представляет минимум того, что каждый физик и инженер должен знать о механике жидкости и газа, и предназначен как для тех, кто незнаком с предметом, так и для тех, кто думает, что знаком. Материал проиллюстрирован многочисленными картинками и 41 задачей с подробными решениями. Во втором издании исправлены опечатки, переписаны неясные места и добавлены новые разделы и задачи. Для студентов и аспирантов, научных работников и инженеров, а также для всех, интересующихся, почему дует ветер, не падают птицы и вода выливается из перевернутого стакана.

Книга имеет свою страницу в Интернете, где можно найти дополнительные объяснения, рисунки и видео, задать вопрос и получить ответ:

<http://www.weizmann.ac.il/complex/falkovich/fluid-mechanics>

ББК 22.253.31
УДК 532

ISBN 978-5-4344-0835-2

- © Г. Фалькович, 2014, 2019
- © Ижевский институт компьютерных исследований, 2019

Оглавление

Предисловие	vii
Пролог	xi
ГЛАВА 1. Основные уравнения и стационарные течения	1
1.1. Определения и основные уравнения	1
1.1.1. Определения	1
1.1.2. Уравнения движения идеальной жидкости	3
1.1.3. Гидростатика	7
1.1.4. Изэнтропическое течение	9
1.2. Законы сохранения и потенциальные течения	14
1.2.1. Поток энергии и импульса	15
1.2.2. Кинематика	17
1.2.3. Теорема Кельвина	18
1.2.4. Безвихревые и несжимаемые течения	21
1.3. Движение сквозь жидкость	28
1.3.1. Движущийся шар	30
1.3.2. Движущееся тело произвольной формы	31
1.3.3. Квазиимпульс и присоединенная масса	35
1.4. Вязкость	41
1.4.1. Парадокс обратимости	42
1.4.2. Вязкие силы	43
1.4.3. Уравнение Навье–Стокса	46
1.4.4. Закон подобия	49
1.5. Течение Стокса и след за телом	51
1.5.1. Медленное движение	52
1.5.2. Пограничный слой и явление отрыва	56
1.5.3. Превращения картины течения	60
1.5.4. Сила сопротивления и подъемная сила	61
ГЛАВА 2. Нестационарные течения	73
2.1. Неустойчивости	73
2.1.1. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца	73
2.1.2. Энергетическая оценка порога устойчивости	76
2.1.3. Закон Ландау	78

2.2.	Турбулентность	80
2.2.1.	Переход к турбулентности	81
2.2.2.	Каскад	82
2.2.3.	Турбулентные течения	88
2.2.4.	Перемешивание	94
2.3.	Акустика	101
2.3.1.	Звук	101
2.3.2.	Волна Римана	105
2.3.3.	Уравнение Бюргерса	108
2.3.4.	Акустическая турбулентность	112
2.3.5.	Число Маха	114
ГЛАВА 3.	Диспергирующие волны	123
3.1.	Линейные волны	124
3.1.1.	Поверхностные гравитационные волны	125
3.1.2.	Вязкое затухание	128
3.1.3.	Капиллярные волны	131
3.1.4.	Фазовая и групповая скорости волны	132
3.1.5.	Возбуждение волн	135
3.2.	Нелинейные волны	140
3.2.1.	Гамильтоновское описание	141
3.2.2.	Нормальные формы гамильтонианов	145
3.2.3.	Неустойчивости волн	146
3.3.	Нелинейное уравнение Шрёдингера	148
3.3.1.	Вывод уравнения	148
3.3.2.	Модуляционная неустойчивость	151
3.3.3.	Солитон, коллапс и турбулентность	155
3.4.	Уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ)	162
3.4.1.	Волны на мелкой воде	162
3.4.2.	Уравнение КдВ и солитон	165
3.4.3.	Метод обратной задачи рассеяния	167
ГЛАВА 4.	Решения задач	174
4.1.	Глава 1	174
4.2.	Глава 2	196
4.3.	Глава 3	210
Эпилог		224
Примечания		227
Литература		234
Предметный указатель		236

Предисловие

Зачем нужна гидродинамика? Во-первых, чтобы понимать устройство материального мира вокруг нас. Цель книги — научить читателя понимать, как течет вода и дует ветер, что происходит, когда мы плывем или летим. Во-вторых, физик и инженер должны владеть искусством гидродинамических оценок, равно необходимых как экспериментатору в биофизике или наноматериалах, так и теоретику-астрофизику. Помимо культурной и прагматической необходимости, существует куда более важная причина знать гидродинамику, и она концептуальная: механика — основа всей физики и техники как источник физической интуиции и математических методов. Понятия, введенные в механике частиц, были затем применены в оптике, электромагнетизме, квантовой механике. Читатель этой книги увидит, как идеи и методы механики сплошных сред используются для анализа других систем с бесконечным числом степеней свободы. И последнее по порядку, но не по важности: механика жидкости и газа сейчас одна из наиболее активно развиваемых областей физики, математики и техники, так что читатель может захотеть принять участие в этом захватывающем предприятии.

В эпоху все возрастающей специализации универсальный язык гидродинамики является одним из последних средств коммуникации специалистов разных дисциплин. Используя этот простой и наглядный язык, биофизики и астрофизики могут рассказать друг другу о своих последних достижениях; метеорологи понять, что происходит внутри ускорителя, а физики высоких энергий — что происходит в облаке над их головой; физики и математики способны понять и помочь решить проблемы, стоящие перед инженерами. При написании книги я видел свою задачу в том, чтобы привести этот язык в 21 век, введя в него современные понятия (такие, например, как нарушенная симметрия и перенормировка), которые, собственно, и появились внутри гидродинамики.

Эта книга представляет минимум того, что каждый физик и инженер должен знать о механике сплошной среды. Она не предполагает предварительного знакомства с предметом и требует только элементарного владения анализом и векторами. С другой стороны, прикладные математики и инженеры, занимающиеся гидро- и газодинамикой, найдут в этой книге новый

взгляд на некоторые вопросы, представленный с точки зрения физика. При отборе материала из огромного богатства, накопленного за четыре столетия все ускоряющегося развития, я выбрал то, что мне представляется наиболее интересным и актуальным для науки в целом. При этом различные темы соединились в одну связную историю, так что перед вами повесть, а не сборник рассказов.

Книга написана так, как обычно физики подходят к любой проблеме: начинают с качественных соображений размерности, симметрий и законов сохранения, потом пытаются получить примерные оценки и уж затем увенчивают это краткими, но последовательными вычислениями. Механика сплошных сред (объединяющая гидро- и газодинамику, а также значительную часть физики плазмы) — наука экспериментальная, как любой раздел физики. Результаты экспериментов ведут нас на каждом шагу, который зачастую оказывается весьма неочевидным. Например, энергия не сохраняется даже в пределе исчезающего трения, симметрии также часто оказываются нарушенными, что радикально меняет оценки и выводы.

Преподаватели и студенты, использующие книгу для курса, обнаружат, что 13 параграфов соответствуют 13 лекциям. Для семинаров в книге приготовлено 41 задача с подробными решениями. Вдобавок разделы 2.3 и 3.1 содержат по параграфу, который не вмещался в лекцию и разбирался на семинаре (а именно, параграфы 2.3.4, 2.3.5, 3.1.2 и 3.1.5, но выбор может быть и другим). В полном виде курс читался для студентов 4-го года обучения. Упрощенная версия курса для студентов 2-го года обучения исключает разделы 1.3.4, 3.2–3.4 и два отрывка, напечатанные мелким шрифтом в параграфах 2.2.1 и 2.3.4. Текст лекций самодостаточен и не содержит ссылок. Эпилог и заметки в конце книги дают ссылки для дальнейшего чтения; книги и статьи, процитированные более раза, собраны в списке литературы.

Использующие книгу для самообразования обнаружат, что основы гидродинамики можно освоить за пару недель, если потратить некоторое усилие. Те, кто будут читать для удовольствия, могут пропустить все вычисления и половину конечных формул и тем не менее узнать уйму интересного о жидкостях, газах и окружающем мире с помощью многочисленных картинок.

Несколько поколений студентов Института Вейцмана училась по этому курсу, они учили меня не прекращать усилий по поиску более ясных объяснений и более глубоких связей между разными разделами физики. Разные версии курса читались также в Московском физтехе, Сколтехе, университетах в Стокгольме и Нью-Йорке, и Высшей школе в Лионе. Я благодарен

тем, у кого я выучился многому из того, что написано в этой книге: В. Арнольд, Г. Аинку, Е. Балковскому, Г. Боффета, Д. Будкеру, Г. Векштейну, М. Вергассола, П. Вигману, К. Гаведскому, В. Гешкенбейну, В. Захарову, А. Замолодчикову, Я. Зельдовичу, Л. Каданову, И. Колоколову, Г. Коткину, Р. Крейчнану, Е. Кузнецову, В. Лебедеву, Л. Левитову, В. Львову, Б. Луговцову, С. Лукашуку, К. Моффату, А. Ньюэллу, А. Полякову, И. Прокачча, А. Пумиру, А. Рубенчику, Д. Рютову, В. Сербо, Э. Сиджиа, Я. Синаю, М. Спектору, К. Сринивасану, А. Шафаренко, Б. Шрайману, В. Штейнбергу, К. Турицыну, С. Турицыну, У. Фришу, К. Ханину, Б. Хесину, Д. Хмельницкому, А. Челани, М. Черткову, Б. Чирикову, А. Шитову. Особая благодарность Саше Фуксону, Маше Вуцеля и Ане Фришман, которые вели семинары и приготовили решения некоторых задач. Я также благодарен читателям первого российского и кембриджских изданий за указание опечаток и неясных мест, которые я постарался исправить в этом издании, где также добавлены новые разделы и задачи. За оставшиеся ошибки и неясности, разумеется, отвечаю я один. Книга посвящается моей семье.

Пролог

И вправду чуден был язык воды,
Рассказ какой-то про одно и то же...
А. Тарковский

В этой повести два героя: инерция и трение. Мы встречали их раньше в механике частиц и твердых тел, где их взаимоотношения были просты: инерция стремилась поддерживать, а трение — останавливать движение. При переходе от частиц и тел к сплошной среде число степеней свободы из конечного становится бесконечным, что всегда радикально меняет характер физических явлений. Мы увидим в этой книге, как даже исчезающе малое трение приводит к бесконечному разнообразию течений, которые инерция сама по себе никогда бы не смогла создать. В отсутствие трения большинство течений несжимаемой жидкости оставались бы потенциальными, т. е., в сущности, тривиальными. На границах между жидкостью и твердым телом трение создает завихренность, которая переносится вглубь течения, меняя его природу. Неустойчивости затем приводят к возникновению турбулентности, и статистика возникает из динамики. Вихри, проникающие с границы, делают жизнь интересной как в идеальной классической жидкости, так и в квантовых сверхтекучих жидкостях и сверхпроводниках, хотя и по-разному.

С другой стороны, сжимаемость делает нетривиальными даже потенциальные течения, позволяя инерции за конечное время превратить гладкое поле скорости в разрывное, создав ударную волну. Трение сглаживает разрывы. Только при наличии неоднородности или анизотропии, которые приводят к дисперсии волн, инерция способна вести интересную жизнь в отсутствие трения. Уединенная волна, называемая солитоном, — счастливый плод взаимодействия инерции и дисперсии. Но даже в волновых системах модуляционная неустойчивость может создать за конечное время сингулярность в виде коллапса или самофокусировки. В конце мы обсудим, как инерция, трение и дисперсия действуют одновременно.

На формальном уровне мы увидим, что в сплошной среде инерция определяется произведением скорости на ее градиент, и поэтому является источником нелинейности. Трение и дисперсия — фундаментально линейные механизмы. Однако соответствующие линейные члены в уравнениях движения имеют пространственные производные высших порядков, так что пределы нулевого трения и нулевой дисперсии являются сингулярными. Вдобавок трение — возмущение не только сингулярное, но также нарушающее симметрию (обратимость времени). Совместно с нелинейностью это приводит к так называемой аномалии, когда эффект нарушения симметрии остается конечным даже в пределе исчезающего трения.

Первая глава вводит базисные понятия, уравнения движения и их фундаментальные симметрии и описывает вязкие и невязкие стационарные течения. Течение времени появляется во второй главе, где обсуждаются неустойчивости, турбулентность и звук. Третья глава описывает диспергирующие волны, от линейных до нелинейных волн, солитонов, коллапсов и волновой турбулентности. В эпилоге даются рекомендации для более детального изучения предмета и краткое описание направлений современного развития механики сплошных сред. В четвертой главе читатель найдет подробные решения всех задач.

ГЛАВА 1

Основные уравнения и стационарные течения

В этой главе мы определим предмет изучения, выведем уравнения движения и опишем их фундаментальные симметрии. Мы начнем с гидростатики, где все силы перпендикулярны поверхностям и нет трения. Мы затем попробуем пренебречь трением и при рассмотрении движения. Это позволит нам понять некоторые свойства инерции, в частности эффект присоединенной массы. Однако описание обтекания тела жидкостью в целом окажется совершенно неправильным. Это вынудит нас ввести трение и разобраться, как вместе с инерцией они определяют реальные течения. Мы кратко опишем аристотелев мир, где трение доминирует. В противоположном пределе мы обнаружим, что мир даже с исчезающе малым трением радикально отличается от мира без трения вообще.

1.1. Определения и основные уравнения

В этой главе мы определим понятия текучести и непрерывного движения. Эти определения следуют из эмпирически установленных фактов, а не из набора аксиом.

1.1.1. Определения

Мы рассматриваем сплошную среду, т. е. предполагаем свойства однородными вплоть до мельчайших порций. Главное для нас свойство среды (общее для жидкостей и газов) — это текучесть. Это значит, что, хотя среда и сопротивляется деформациям, это сопротивление не может остановить деформацию. Причина в том, что сила сопротивления стремится к нулю вместе со скоростью деформации. Вообще-то, имея достаточное терпение, можно деформировать что угодно, так что определение данного объекта

жидким или твердым зависит от времени наблюдения. Как утверждала библейская пророчица Дебора, «перед лицом Господа и горы текут», поэтому отношение времени релаксации ко времени наблюдения называется числом Деборы.¹ Чем меньше это число, тем более текуча среда. Мы будем называть любую текучую среду жидкостью, имея в виду также и газы.

Чтобы жидкость была неподвижна, стало быть, необходимо, чтобы сдвиговых напряжений не было вообще. Иными словами, все взаимные силы между любыми граничащими частями должны быть перпендикулярны к общей границе. Это *экспериментальное* наблюдение составляет базис гидростатики. Если приложена сила, параллельная (тангенциальная) к разделяющей поверхности, то слои жидкости начинают скользить друг относительно друга, что приводит к трению между слоями. Например, если перестать размешивать чай в стакане, то через некоторое время жидкость перестанет вращаться, и это произойдет только вследствие трения. Действительно, если бы взаимные силы между элементами вдоль радиуса были чисто нормальными (т. е. радиальными), то сохранение момента импульса заставило бы жидкость вращаться вечно.

Поскольку тангенциальные силы отсутствуют для состояний покоя и равномерного прямолинейного движения, представляется естественным рассмотреть сначала такие течения, где эти силы пренебрежимо малы. Таким образом, мы совершим первый шаг из гидростатики в гидродинамику, ограничиваясь чисто нормальными силами, полагая градиенты скорости малыми. Насколько далеко мы так шагнем и как долго такое приближение будет работать, заранее не очевидно.

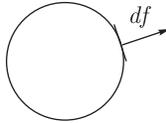
Имея дело только с нормальными силами, нетрудно установить, что сила, действующая на единицу площади, не зависит от направления — так называемый закон Паскаля (задача 1.1). Таким образом, можно характеризовать внутренние силы в жидкости одной скалярной величиной $p(\mathbf{r}, t)$, называемой давлением, что есть сила на единицу площади. С точки зрения внутреннего устройства среды давление является термодинамическим параметром. Чтобы полностью характеризовать внутреннее состояние среды, необходимо вдобавок к давлению задать второй термодинамический параметр, например плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Какие свойства аналитичности поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ имеет смысл предполагать? Естественно предположить скорость конечной и непрерывной функцией координаты \mathbf{r} . Вдобавок мы потребуем, чтобы первые производные всех компонент скорости по координатам были везде конечными. В этом случае течение называется непрерывным, т. е. траектории частиц

жидкости не пересекаются. Расстояние δr между двумя близкими частицами удовлетворяет уравнению движения $d\delta r/dt = \delta v$. С математической точки зрения конечность ∇v — это условие Липшица, обеспечивающее единственность решения для уравнения движения. Простой пример не липшицевого уравнения это $dx/dt = |x|^{1-\alpha}$, которое при $\alpha > 0$ имеет два решения, $x(t) = (\alpha t)^{1/\alpha}$ и $x(t) = 0$, оба стартующие с нуля. Любая поверхность, переносимая непрерывным течением, всегда разделяет частицы по ее разным сторонам. Науке пока неизвестно, когда в точности предположение о непрерывности совместимо с уравнениями механики сплошной среды. Могут ли изначально конечные производные поля скорости обратиться в бесконечность за конечное время? Тот, кто ответит на этот вопрос для несжимаемых вязких течений, получит премию в миллион долларов (т. н. премия тысячелетия). Мы увидим ниже, что сжимаемое невязкое течение в общем случае обязательно создает разрывы, называемые ударными волнами.

1.1.2. Уравнения движения идеальной жидкости

Уравнение Эйлера. В отсутствие трения сила, действующая на любой объем, равна интегралу от давления по поверхности: $-\oint p df$. Элемент поверхности df — это вектор, направленный по нормали наружу.



Используя формулу Стокса, преобразуем поверхностный интеграл в объемный: $-\oint p df = -\int \nabla p dV$. Таким образом, сила, действующая на единицу объема, равна $-\nabla p$. Было бы ошибкой, однако, приравнять эту силу к производной по времени от импульса жидкости в этом объеме. Чтобы написать второй закон Ньютона, мы должны выделить жидкую частицу, т. е. малую часть жидкости с фиксированной массой (которую будем полагать равной единице). Тогда сила, действующая на единичную массу, $\nabla p/\rho$, должна быть равна ускорению частицы dv/dt :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

Ускорение движущейся частицы жидкости, разумеется, не равно частной производной скорости по времени в данной точке пространства, а задается

полной производной (называемой также материальной). Используя правило дифференцирования сложной функции, эту производную выражаем через величины, заданные в фиксированных пространственных координатах. За время dt скорость частицы изменится на $d\mathbf{v}$, которая состоит из двух частей, временной и пространственной:

$$d\mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (1.1)$$

Это изменение в данной точке плюс разница между двумя точками, раздвинутыми на расстояние $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, на которое сдвинулась частица за время dt . Разделив (1.1) на dt , получим так называемую материальную производную как локальную производную плюс перенос:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Как видно, ускорение жидких частиц может быть не равно нулю даже для стационарного течения с $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$, если $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \neq 0$, т.е. если скорость меняется вдоль направления, ею же задаваемого. И любая функция $F(\mathbf{r}(t), t)$ (например, температура жидкости) меняется для жидкой частицы в соответствии с тем же правилом:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F.$$

Второй закон Ньютона, записанный для единичной массы, является уравнением, выведенным Эйлером (Берлин, 1757; Петербург, 1759) и носящим его имя:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (1.2)$$

До Эйлера ускорение жидкости или газа рассматривалось только как результат давлений, создаваемых твердыми телами на границе. Эйлер ввел в рассмотрение распределение давления *внутри* жидкости. Например, для вращающейся жидкости, изображенной на рисунке 1.1, вектор ускорения $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ имеет ненулевую радиальную компоненту v^2/r , которая, будучи умноженной на плотность, дает радиальный градиент давления: $dp/dr = \rho v^2/r$.

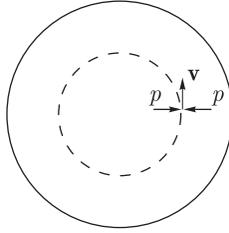


Рис. 1.1. Радиальный градиент давления перпендикулярен круговым поверхностям и не может изменить момент импульса внутри или снаружи такой поверхности; он меняет только направление скорости, но не ее величину.

Можно также добавить внешнюю силу, действующую на единичную массу (для силы тяжести $\mathbf{f} = \mathbf{g}$):

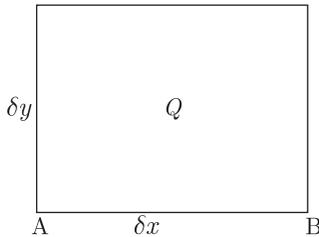
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}. \quad (1.3)$$

Произведение скорости на ее градиент $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ описывает инерцию и делает уравнение Эйлера (1.3) нелинейным.

Уравнение непрерывности. Напишем уравнение, выражающее сохранение массы. Если Q — объем любой части движущейся жидкости, то $d\rho Q/dt = 0$, что может быть записано так:

$$Q \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dQ}{dt} = 0. \quad (1.4)$$

Изменение объема может быть выражено через скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.



Горизонтальная скорость точки В относительно точки А — это $\delta x \partial v_x / \partial x$. Через интервал времени dt длина стороны АВ станет $\delta x(1 +$

+ $dt\partial v_x/\partial x$). Изменение объема после dt равно

$$dQ = dt\delta x\delta y\delta z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = dt Q \operatorname{div} \mathbf{v} = dt \frac{dQ}{dt}.$$

Подставляя это в (1.4) и сокращая (произвольное) Q , получим уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.5)$$

Это уравнение почти очевидно, поскольку для любого *фиксированного объема пространства* уменьшение полной массы внутри $-\int (\partial\rho/\partial t) dV$ равняется потоку наружу $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$.

Идеальная жидкость. Мы пока что имеем четыре уравнения (1.3), (1.5) на пять величин p, ρ, v_x, v_y, v_z , так что необходимо где-то взять еще одно уравнение. При выводе (1.3), (1.5) мы не учитывали диссипацию энергии, пренебрегая тем самым внутренним (вязким) трением и теплообменом. Жидкость без вязкости и теплопроводности называется *идеальной*. Течение идеальной жидкости адиабатично, т.е. энтропия любой жидкой частицы остается постоянной: $ds/dt = 0$, где s есть энтропия на единицу массы. Можно обратить это уравнение в уравнение непрерывности для плотности энтропии в пространстве:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0. \quad (1.6)$$

Поскольку энтропия может быть представлена как функция давления и плотности, то (1.6) и есть необходимое дополнительное уравнение, связывающее скорость, давление и плотность. Различные среды описываются разными функциями $s(P, \rho)$.

Граничные условия. На границах уравнение непрерывности (1.5) заменяется граничными условиями:

- 1) на неподвижной границе с твердым телом $v_n = 0$;
- 2) на движущейся границе между двумя несмешивающимися жидкостями $p_1 = p_2$ и $v_{n1} = v_{n2}$.

Это два частных случая общего граничного условия. Обозначим $F(\mathbf{r}, t) = 0$ уравнение ограничивающей поверхности. Отсутствие потока жидкости через поверхность может быть записано как

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F = 0,$$

что выражает, как мы теперь знаем, постоянство F для частиц жидкости. На неподвижной границе $\partial F/\partial t = 0$ и $\mathbf{v} \perp \nabla F \Rightarrow v_n = 0$.

1.1.3. Гидростатика

Необходимое и достаточное условие механического равновесия жидкости следует из (1.3):

$$\nabla p = \rho \mathbf{f}. \quad (1.7)$$

Только такое распределение плотности $\rho(\mathbf{r})$ может быть в равновесии, для которого $\rho(\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r})$ является градиентом скаляра. В случае потенциальной силы $\mathbf{f} = -\nabla\phi$, взяв ротор от (1.7), мы получим

$$\nabla\rho \times \nabla\phi = 0.$$

Это простое соотношение означает, что градиенты ρ и ϕ параллельны и их поверхности постоянного уровня совпадают в равновесии. Для поля тяжести имеем $\phi = gz$ и $\partial p/\partial z = -\rho g$. Для несжимаемой жидкости в поле тяжести получим

$$p(z) = p(0) - \rho gz.$$

Для идеального газа с однородной в пространстве температурой и давлением $p = \rho T/m$ получаем

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p g m}{T} \quad \Rightarrow \quad p(z) = p(0) \exp(-mgz/T).$$

В частности, для воздуха при 0°C получаем масштаб $T/mg \simeq 8$ км. Изменение давления с высотой в атмосфере Земли не описывается ни линейным, ни экспоненциальным законами из-за неоднородности температуры по высоте.

Аппроксимируя падение температуры с высотой линейной функцией $T(z) = T_0 - \alpha z$, получим более аккуратное приближение:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p m g}{T_0 - \alpha z},$$

$$p(z) = p(0)(1 - \alpha z/T_0)^{mg/\alpha},$$

которое хорошо работает недалеко от поверхности, если выбрать $\alpha \simeq 6.5^\circ/\text{км}$.

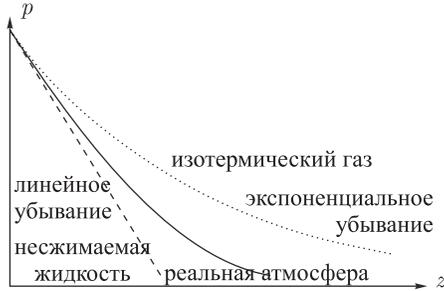


Рис. 1.2. Зависимость давления от высоты для атмосферы Земли (сплошная линия), несжимаемой жидкости (пунктир) и газа с однородной температурой (точки).

При равновесии в поле тяжести плотность может зависеть только от расстояния до центра Земли (или локально от высоты z). Согласно $dp/dz = -\rho g$, давление тоже зависит только от z . Давление и плотность вместе определяют температуру, которая, стало быть, тоже должна быть независимой от горизонтальных координат в равновесии. Разные температуры на одинаковом расстоянии от центра, в частности разные температуры поверхности, обязательно приведут к движению. По этой причине ветры дуют в атмосфере и течения текут в океанах. Другим источником движения в поле тяжести может служить конвекция вследствие падения плотности с высотой, например из-за падения температуры. Выведем условие механической устойчивости жидкости с вертикальным профилем $T(z)$. Если небольшой объем жидкости сдвинется быстро (без обмена тепла) с высоты z на dz , его энтропия останется $s(z)$, но давление сравняется с окружающим $p' = p(z + dz)$, так что плотность станет $\rho(s, p')$. Для устойчивости новая плотность должна быть выше, чем плотность вытесненной жидкости, имеющей то же давление p' , но другую энтропию $s' = s(z + dz)$. Следовательно, условие устойчивой стратификации может быть записано следующим образом:

$$\rho(p', s) > \rho(p', s') \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} < 0.$$

Энтропия обычно растет при расширении, $(\partial \rho / \partial s)_p < 0$, так что для устойчивости следует потребовать $ds/dz > 0$. Энтропия зависит от высоты через давление и температуру, которые оба убывают с высотой. Убывание температуры уменьшает энтропию, а убывание давления увеличивает. Чтобы

установить, который из эффектов побеждает, напишем

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{g}{V} > 0. \quad (1.8)$$

Мы ввели удельный объем $V = 1/\rho$. Полагая воздух идеальным газом с коэффициентом теплового расширения $(\partial V/\partial T)_p = V/T$, получим простой критерий

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}. \quad (1.9)$$

Действительно, приращение потенциальной энергии gdz должно превышать уменьшение внутренней энергии за счет ухода тепла $c_p dT$. Для атмосферы Земли $c_p \sim 10^3$ Дж/кг·К, так что порог $10^\circ/\text{км}$ близок к среднему градиенту $6.5^\circ/\text{км}$. Вследствие этого отдельные части атмосферы часто неустойчивы по отношению к тепловой конвекции. Человеческое тело всегда возбуждает конвекцию при комнатной температуре.²

Температура убывает с высотой только в тропосфере, достигая -50° на высоте 10–12 км. Далее температура не меняется примерно до 35 км, так что давление падает экспоненциально. Еще выше, в стратосфере, температура растет примерно до 0° на 50 км. Глядя вниз с самолета, летящего выше 10 км, можно часто видеть довольно плоскую поверхность облаков как раз на высоте, где неустойчивая стратификация внизу переходит в устойчивую вверх.

Прямым аналогом критерия устойчивости относительно конвекции является критерий Рэлея устойчивости несжимаемой жидкости, вращающейся с угловой скоростью $\Omega(r)$: вращение устойчиво, если момент импульса $L = r^2|\Omega|$ возрастает при увеличении расстояния r от оси вращения, т.е. $d(r^2\Omega)^2/dr > 0$.³ Действительно, если частица жидкости сдвинется с r в r' , она сохранит момент импульса $L(r)$, так что локальный градиент давления $dp/dr = \rho r'\Omega^2(r')$ должен победить центробежную силу $\rho r'(L^2 r^4/r'^4)$.

1.1.4. Изэнтропическое течение

Простейшие течения соответствуют постоянной s и описываются существенно упрощенным уравнением Эйлера вследствие возможности представить $\nabla p/\rho$ как градиент. Для такого представления нам нужен термодинамический потенциал, который зависит от p, s , так что при постоянном s

его дифференциал выражается только через dp . Такой потенциал называется *энтальпией* и выражается через внутреннюю энергию единичной массы жидкости E по формуле $W = E + pV$. Из всей термодинамики для нас достаточно одного соотношения $dE = Tds - pdV$, так что $dW = Tds + Vdp$ и $W = \partial(E\rho)/\partial\rho$. Поскольку энтропия не меняется ни в пространстве, ни во времени для изэнтропического течения и $V = \rho^{-1}$ для единичной массы, то $dW = dp/\rho$ и мы получаем в отсутствие внешних сил

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla W. \quad (1.10)$$

Такая градиентная форма уравнения Эйлера будет нами использоваться для получения законов сохранения и интегральных соотношений. Например, используя векторное тождество $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$, можно представить

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla v^2/2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

и получить

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla(W + v^2/2). \quad (1.11)$$

Здесь первый член справа — вектор, перпендикулярный скорости. Чтобы спроектировать (1.11) на направление скорости и избавиться от этого слагаемого, мы определим линии тока как всюду параллельные мгновенному полю скорости. Такие линии определяются соотношениями

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Для нестационарных течений линии тока отличаются от траекторий частиц: касательные к линиям тока дают скорости в данный момент времени, тогда как касательные к траекториям дают скорости в последовательные моменты времени. Линии тока можно зарегистрировать экспериментально, поместив в течение частички, рассеивающие свет. Каждая такая частичка оставит короткий след на фотографии, снятой с короткой выдержкой; длина и ориентация такого следа задают величину и направление скорости. Линии тока могут пересекаться только в точке нулевой скорости, называемой точкой остановки.

Рассмотрим теперь стационарное течение $\partial v/\partial t = 0$ и спроектируем (1.11) на направление скорости в данной точке:

$$\frac{\partial}{\partial l}(W + v^2/2) = 0. \quad (1.12)$$

Видно, что величина $W + v^2/2 = E + p/\rho + v^2/2$ не меняется вдоль любой линии тока, но может иметь разные значения для разных линий тока. Это теорема Бернулли (1738), являющаяся не чем иным, как частным случаем закона сохранения энергии. Вдоль линии тока изменение плотности полной энергии $E_1 + v_1^2/2 - E_2 - v_2^2/2$ равно не нулю, а совершенной работе $P_2/\rho_2 - P_1/\rho_1$. Именно поэтому W , а не E фигурирует в законе сохранения, что также обсуждается после (1.17). Можно также сказать, что W служит потенциальной энергией частиц жидкости, см. ниже (1.38). В поле тяжести

$$W + gz + v^2/2 = \text{const}. \quad (1.13)$$

Можно сказать без преувеличения, что большинство гидродинамических оценок используют (1.12) или (1.13). Рассмотрим несколько приложений этого полезного соотношения.

Предположим, что наш космический корабль подвергся метеоритной атаке, проделавшей отверстия в стенах кабины и бака с жидким топливом. Надо быстро оценить, с какой скоростью уходят воздух из кабины и топливо из бака. Полагая, что вокруг корабля вакуум, пренебрежем теплообменом и будем считать, что оба процесса истечения являются изэнтропическими. Топливо можно полагать несжимаемой жидкостью. При постоянной плотности и при отсутствии теплообмена и внешних сил энергия E постоянна. Теорема Бернулли дает скорость, с которой такая жидкость вытекает в вакуум:

$$v = \sqrt{2p_0/\rho}.$$

Например, для воды ($\rho = 10^3 \text{ кг м}^{-3}$) при атмосферном давлении ($p_0 = 10^5 \text{ Н м}^{-2}$) получим $v = \sqrt{200} \approx 14 \text{ м с}^{-1}$.

Рассмотрим теперь утечку воздуха из кабины. В случае газа падение давления должно сопровождаться изменением плотности. Из закона адиабаты $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$ получим энтальпию

$$W = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

Скорость истечения в вакуум опять находится из теоремы Бернулли:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{(\gamma - 1)\rho}}.$$

Эта скорость в $\sqrt{\gamma/(\gamma - 1)}$ раз больше, чем у несжимаемой жидкости, поскольку внутренняя энергия газа уменьшается, увеличивая кинетическую энергию. Так что воздух из кабины уходит быстрее, чем топливо из бака, со всеми вытекающими последствиями. Мы увидим далее, что $(\partial P/\partial \rho)_s = \gamma P/\rho$ — это квадрат скорости звука c^2 , так что $v = c\sqrt{2/(\gamma - 1)}$. Для идеального газа с n степенями свободы имеем $W = E + p/\rho = nT/2m + +T/m$, так что $\gamma = (2+n)/n$. Для двухатомных газов при не очень высокой температуре, когда колебания атомов в молекуле не возбуждены, имеем три поступательных и две вращательных степени свободы, так что $n = 5$.

Другая часто встречающаяся в жизни ситуация — течение из небольшого отверстия под действием силы тяжести. Предполагая давление снаружи равным давлению на верхней горизонтальной поверхности жидкости, применим теорему Бернулли к линии тока, которая начинается на верхней поверхности с почти нулевой скоростью и выходит через отверстие со скоростью $v = \sqrt{2gh}$ (Торричелли, 1643). Если мы умножим эту скорость на площадь отверстия, чтобы определить расход жидкости, то получим сильно завышенную оценку — факт, ставший известным виноторговцам задолго до физиков. Дело в том, что линии тока сходятся со всех сторон к отверстию, так что скорость не перпендикулярна плоскости отверстия. Вдобавок наличие радиальной компоненты скорости означает также наличие радиального градиента давления, так что давление внутри струи несколько больше, чем снаружи, а скорость несколько меньше, чем $\sqrt{2gh}$.

Сходимость линий тока к отверстию приводит к тому, что струя продолжает сжиматься и после выхода. Наблюдения показывают, что сжатие прекращается и струя становится цилиндрической недалеко от отверстия. Вот в этой точке (называемой по латыни *vena contracta*) скорость струи и равняется $\sqrt{2gh}$. Отношение сечения струи в этой точке к площади отверстия называется коэффициентом истечения, и скорость расхода есть $\sqrt{2gh}$, умноженная на площадь отверстия и на коэффициент истечения. Для круглого отверстия в тонкой стене коэффициент истечения 0.62 был найден экспериментально. Задача 1.3 представляет частный случай, в котором коэффициент истечения может быть найден точно.

Имеются различные приборы, принципы измерения которых основаны на теореме Бернулли. Вероятно, простейшим таким устройством является

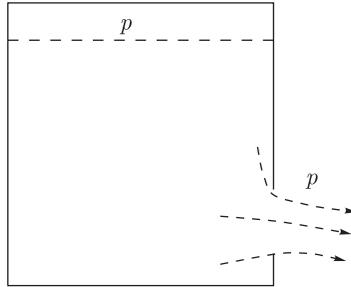
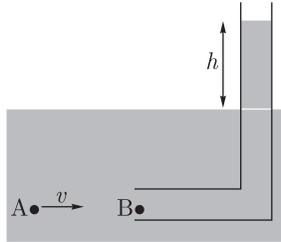


Рис. 1.3. Сжатие вытекающей струи.

трубка Пито, показанная на рисунке 1.4. Трубка открыта с обеих сторон, горизонтальная часть направлена навстречу течению. Поскольку жидкость неподвижна внутри трубки, скорость в точке В равна нулю. С одной стороны, разность давлений между двумя точками на одной линии тока можно выразить через скорость в точке А: $P_B - P_A = \rho v^2/2$. С другой стороны, эта разность выражается через высоту h подъема жидкости в вертикальном колене: $P_B - P_A = \rho gh$. Это дает $v^2 = 2gh$.

Рис. 1.4. Трубка Пито, которая определяет скорость v в точке А путем измерения высоты h .

Здесь уместно спросить: почему тропосфера Земли не изэнтропична, что соответствовало бы вертикальному градиенту температуры $10^\circ/\text{км}$, как было отмечено в предыдущем разделе. Дело во влажности: водяной пар конденсируется в восходящем потоке, выделяя тепло и уменьшая средний вертикальный градиент температуры до $6.5^\circ/\text{км}$.

1.2. Законы сохранения и потенциальные течения

В этой главе мы получим из уравнений движения законы сохранения и их непосредственные следствия.

Симметрии и законы сохранения. Уравнения (1.3), (1.5), (1.6) выражают законы сохранения импульса, массы и энтропии. Они инвариантны относительно сдвигов в пространстве (что приводит к сохранению импульса) и во времени (что приводит к сохранению энергии, описанному в следующем разделе). Сохранение энтропии означает обратимость во времени, то есть уравнения инвариантны относительно преобразования $t \rightarrow -t$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ — мы увидим позже, как нарушение этой симметрии делает реальные течения столь интересными. Дополнительной симметрией является галилеевская инвариантность⁴ по отношению к переходу в систему отсчета, движущуюся со скоростью \mathbf{V} : $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{V}$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{V}t$. Уравнения идеальной гидродинамики являются также масштабно инвариантными, сохраняя свою форму при преобразовании $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}/a$, $t \rightarrow t/b$, $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}b/a$.

Эйлеров и лагранжев способы описания течения. Оглянувшись назад, нетрудно увидеть, что мы применяли два альтернативных способа описания. Уравнения (1.3), (1.6) используют систему координат, фиксированную в пространстве, как теории электромагнитного, гравитационного и других полей. Этот тип описания в гидродинамике принято называть эйлеровым. Другой подход называется лагранжевым и является обобщением на континуум формализма механики частиц и тел. В рамках этого подхода мы движемся вместе с частицами жидкости;⁵ текущие координаты частиц $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ являются функциями времени и начальных позиций $\mathbf{R} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, 0)$. Материальная производная является лагранжевой, поскольку она привязана к данной частице и, стало быть, вычисляется при фиксированном \mathbf{R} : $d/dt = (\partial/\partial t)_{\mathbf{R}}$. Законы сохранения, записанные для любой величины \mathcal{A} для единичной (или любой фиксированной) массы, имеют лагранжеву форму:

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathcal{A} = 0.$$

Всякий лагранжев закон сохранения вместе с сохранением массы производит эйлеров закон сохранения для пространственной плотности $\rho\mathcal{A}$:

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{A})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathcal{A}\mathbf{v}) = \mathcal{A} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) \right] + \rho \left[\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathcal{A} \right] = 0.$$

Напротив, если эйлеров закон сохранения

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{B})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$$

содержит поток, не равный произведению плотности на скорость, $\mathbf{F} \neq \rho\mathcal{B}\mathbf{v}$, тогда соответствующего лагранжева закона сохранения не существует. Это означает, что частицы жидкости могут обмениваться величиной \mathcal{B} , сохраняя полный интеграл по пространству — мы сейчас увидим, что законы сохранения энергии и импульса имеют такую форму.

1.2.1. Потоки энергии и импульса

Поскольку частицы жидкости могут обмениваться энергией и импульсом, соответствующие потоки должны отличаться от «скорости умноженной на плотность энергии/импульса». Каково же отличие?

Уравнение Эйлера и есть закон сохранения импульса и может быть представлено в виде уравнения непрерывности, записанного для вектора пространственной плотности импульса $\rho\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Найдем плотность потока импульса Π_{ik} , представляющего собой поток i -той компоненты импульса через поверхность с нормалью вдоль оси k . Подставим уравнение непрерывности для массы

$$\partial\rho/\partial t = -\partial(\rho v_k)/\partial x_k$$

и уравнение Эйлера $\partial v_i/\partial t = -v_k\partial v_i/\partial x_k - \rho^{-1}\partial p/\partial x_i$ в

$$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_i v_k,$$

что дает

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (1.14)$$

Попросту говоря, вдоль \mathbf{v} имеется только поток параллельного импульса $p + \rho v^2$, тогда как перпендикулярная \mathbf{v} компонента импульса отсутствует, и поток равен p . Например, направив ось x вдоль скорости в данной точке,

получим $\Pi_{xx} = p + v^2$, $\Pi_{yy} = \Pi_{zz} = p$, а все недиагональные компоненты потока равны нулю. Мы видим, что дополнительный поток импульса есть давление, описывающее обмен импульсом между частями жидкости вдобавок к переносу.

Выведем теперь уравнение, выражающее закон сохранения энергии. Пространственная плотность энергии течения — это $\rho(E + v^2/2)$. Для изэнтропических течений, используя $\partial\rho E/\partial\rho = E + \rho\partial E/\partial\rho = E - \rho^{-1}\partial E/\partial V = E + P/\rho = W$, вычислим производную по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho E + \frac{\rho v^2}{2} \right) = (W + v^2/2) \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{v} \cdot \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{div} [\rho\mathbf{v}(W + v^2/2)].$$

Поскольку правая часть является полной производной, интеграл от плотности энергии по пространству (т.е. полная энергия) сохраняется. Такой же эйлеров закон сохранения в форме уравнения непрерывности может быть получен и в общем случае неоднородной энтропии. Вычислим сначала производную по времени от кинетической энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} &= -\frac{v^2}{2} \operatorname{div} \rho\mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \\ &= -\frac{v^2}{2} \operatorname{div} \rho\mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\rho\nabla W - \rho T\nabla s) - \rho\mathbf{v} \cdot \nabla v^2/2 = \\ &= -\operatorname{div} \rho\mathbf{v}v^2/2 - \mathbf{v} \cdot (\rho\nabla W - \rho T\nabla s). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для вычисления $\partial(\rho E)/\partial t$ используем $dE = Tds - pdV = Tds + p\rho^{-2}d\rho$, так что $d(\rho E) = Ed\rho + \rho dE = Wd\rho + \rho Tds$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} &= W \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} = -W \operatorname{div} \rho\mathbf{v} - \rho T\mathbf{v} \cdot \nabla s = \\ &= -\operatorname{div} \rho\mathbf{v}W + \mathbf{v} \cdot (\rho\nabla W - \rho T\nabla s). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Правые части (1.15) и (1.16) содержат дивергенции соответствующих потоков и обменный член (последняя скобка), входящий с противоположными знаками. При сложении обменные члены сокращаются:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho E + \frac{\rho v^2}{2} \right) = -\operatorname{div} [\rho\mathbf{v}(W + v^2/2)]. \quad (1.17)$$

Как и следует, правая часть является дивергенцией потока:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\rho E + \frac{\rho v^2}{2} \right) dV = - \oint \rho(W + v^2/2)\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}.$$

Как и ожидалось, поток энергии

$$\rho \mathbf{v}(W + v^2/2) = \rho \mathbf{v}(E + v^2/2) + p \mathbf{v}$$

вовсе не равен плотности энергии, умноженной на скорость \mathbf{v} , а содержит еще и член, который описывает работу, совершенную давлением, то есть одними частями жидкости над другими. Иными словами, единичная масса жидкости несет с собой энергию $W + v^2/2$, а не $E + v^2/2$. Это означает, в частности, что для энергии нет лагранжева закона сохранения для единичной массы $d(\cdot)/dt = 0$ типа того, что имеет место для пассивно переносимых величин, таких как энтропия. Это естественно, поскольку частицы жидкости обмениваются энергией, совершая работу.

1.2.2. Кинематика

В этом параграфе мы опишем кинематику малого объема жидкости, что нам понадобится, в частности, для понимания нового закона сохранения, который будет описан в следующем параграфе. Относительное движение частиц жидкости определяется разностью скоростей в соседних точках:

$$\delta v_i = r_j \partial v_i / \partial x_j.$$

Для удобства анализа тензора производных скорости разделим его на симметричную и антисимметричную части: $\partial v_i / \partial x_j = S_{ij} + A_{ij}$. Симметричный тензор $S_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$ называется тензором деформации. Вектор, изначально параллельный оси j , поворачивается в сторону оси i со скоростью $\partial v_i / \partial x_j$, так что $2S_{ij}$ есть скорость изменения угла между изначально перпендикулярными малыми векторами вдоль осей i и j . Иными словами, $2S_{ij}$ есть скорость деформации прямоугольника в параллелограмм. Конечно, симметричный тензор всегда может быть приведен к диагональной форме (главным осям) с помощью ортогонального преобразования (вращения осей). Диагональные компоненты задают темпы растяжения или сжатия вдоль главных осей. Действительно, расстояние между двумя точками вдоль одной из осей удовлетворяет уравнению $\dot{r}_i = \delta v_i = r_i S_{ii}$ (без суммирования по i), решение которого имеет вид

$$r_i(t) = r_i(0) \exp \left[\int_0^t S_{ii}(t') dt' \right].$$

Если S_{ii} не зависит от времени, то расстояния растут или убывают экспоненциально. Рассмотрим круг радиуса R при $t = 0$. Частица, стартовавшая

из точки с координатами x_0 и $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$, за время t переместится в точку

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{S_{11}t}x_0, \\ y(t) &= e^{S_{22}t}y_0 = e^{S_{22}t}\sqrt{R^2 - x_0^2} = e^{S_{22}t}\sqrt{R^2 - x^2(t)e^{-2S_{11}t}}, \\ x^2(t)e^{-2S_{11}t} + y^2(t)e^{-2S_{22}t} &= R^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Уравнение (1.18) описывает превращение исходного круга жидкости в эллипс, эксцентриситет которого увеличивается экспоненциально с темпом $|S_{11} - S_{22}|$ (рис. 1.5). Таким образом, если поле скорости локально имеет только симметричную часть тензора производных, то всякий прямоугольник превращается в параллелограмм, а круг — в эллипс.

Сумма диагональных компонент тензора деформации $\operatorname{div} \mathbf{v} = S_{ii}$ определяет темп изменения объема:

$$Q^{-1}dQ/dt = -\rho^{-1}d\rho/dt = \operatorname{div} \mathbf{v} = S_{ii}.$$

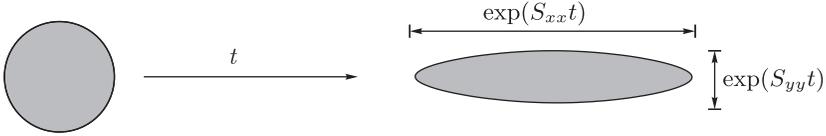


Рис. 1.5. Деформация жидкого элемента постоянным тензором деформации.

Антисимметричная часть $A_{ij} = (\partial v_i/\partial x_j - \partial v_j/\partial x_i)/2$ имеет только три независимых компонента в трехмерном пространстве и может быть представлена как вектор ω : $A_{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega_k/2$. Коэффициент $-1/2$ введен, чтобы упростить соотношение между \mathbf{v} и ω :

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v}.$$

Вектор ω называется *завихренностью*, поскольку он описывает вращение элемента жидкости: $\delta \mathbf{v} = [\omega \times \mathbf{r}]/2$. Завихренность есть удвоенная локальная угловая частота вращения. Плоское сдвиговое течение $v_x(y)$ соответствует деформации и завихренности, равным по величине (рис. 1.6).

1.2.3. Теорема Кельвина

Эта теорема описывает сохранение циркуляции скорости для изэнтропических течений. Для вращающегося цилиндра жидкости угловой момент



Рис. 1.6. Деформация и вращение жидкого элемента в сдвиговом течении, состоящем из деформации и завихренности.

импульса пропорционален циркуляции скорости вокруг окружности цилиндра. Как угловой момент, так и циркуляция сохраняются, когда действуют только нормальные силы, как уже упоминалось в начале параграфа 1.1.1. Покажем, что это справедливо для любого «жидкого» контура, т. е. движущегося вместе с жидкостью. При движении жидкости меняются как скорость, так и форма контура:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v}(d\mathbf{l}/dt) + \oint (d\mathbf{v}/dt) \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Первый член равен нулю как контурный интеграл от полного дифференциала: поскольку $d\mathbf{l}/dt = \delta\mathbf{v}$, постольку $\oint \mathbf{v}(d\mathbf{l}/dt) = \oint \delta(v^2/2) = 0$. Во второй член мы подставим уравнение Эйлера для изэнтропического течения $d\mathbf{v}/dt = -\nabla W$ и используем формулу Стокса, утверждающую, что циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора через поверхность, натянутую на этот контур: $\oint \nabla W \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \nabla W \, d\mathbf{f} = 0$.

Из формулы Стокса также следует, что $\oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = \int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{f}$. Таким образом, сохранение циркуляции скорости эквивалентно сохранению потока завихренности. Чтобы лучше освоиться с этим, рассмотрим альтернативный вывод. Взяв ротор от (1.11), получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (1.19)$$

Простейший урок, который можно извлечь из (1.19): если $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$, то $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t \equiv 0$, т. е. безвихревое течение всегда остается таковым в идеальной жидкости. Не только нулевое, но и любое значение завихренности сохраняется для частиц жидкости. Действительно, такое же уравнение (1.19) описывает магнитное поле в идеальном проводнике. Подставляя условие отсутствия электрического поля в системе отсчета, движущейся со скоростью \mathbf{v} , $c\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} = 0$, в уравнение Максвелла $\partial \mathbf{H} / \partial t = -c\nabla \times \mathbf{E}$, получим

$\partial H/\partial t = \nabla \times (\mathbf{v} \times H)$. Магнитный поток сохраняется в идеальном проводнике, как и завихренность в изэнтропическом течении. Векторное поле можно зрительно представить линиями, которые задают направление поля в каждой точке, а плотность линий задает величину поля. Теорема Кельвина означает, что вихревые линии, задающие векторное поле завихренности, движутся вместе с частицами идеальной жидкости в точности так, как линии магнитного поля вморожены в идеальный проводник. Чтобы непосредственно убедиться в этом, покажем, что ω/ρ (и H/ρ) удовлетворяет тому же уравнению, что и вектор \mathbf{r} , соединяющий две частицы жидкости: $d\mathbf{r}/dt = (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. Используем $d\rho/dt = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ и применим общее соотношение

$$\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$$

к $\nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega - \omega \operatorname{div} \mathbf{v}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\omega}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega \right] + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\rho} = \\ &= \frac{1}{\rho} [(\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega - \omega \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega] + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\rho} = \\ &= \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Поскольку \mathbf{r} и ω/ρ эволюционируют одинаково, то две близкие частицы, оказавшиеся на одной вихревой линии, остаются на ней всегда. Поскольку любая частица жидкости остается на своей вихревой линии, то никакой жидкий контур не может пересечь эти линии, так что поток завихренности сохраняется. Поперечное сжатие линий уменьшает площадь контура, увеличивая завихренность; похожий эффект приводит к магнитогидродинамическому динамо.

Важно подчеркнуть, что теорема Кельвина является нелокальным законом сохранения и неэквивалентна сохранению углового момента, у которого существует локальная плотность $\rho \mathbf{v} \times \mathbf{r}$. Симметрия, отвечающая за сохранение потока завихренности, соответствует переобозначению лагранжевых координат.

На этом мы заканчиваем формулирование уравнений движения и их общих свойств. Теперь перейдем к рассмотрению простейших течений, допускающих аналитическое описание. Это потребует дополнительных предположений.

1.2.4. Безвихревые и несжимаемые течения

Безвихревые течения по определению имеют нулевую завихренность: $\omega = \nabla \times \mathbf{v} \equiv 0$. В таких течениях $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$ по любому замкнутому контуру, что означает, в частности, отсутствие замкнутых линий тока в любой односвязной области. Заметим, что течение должно быть изэнтропическим, чтобы оставаться безвихревым, т. е. неоднородный нагрев способен создавать вихри. Безвихревое векторное поле является потенциальным, $\mathbf{v} = \nabla\phi$, так что уравнение Эйлера (1.11) принимает форму,

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W \right) = 0,$$

которую можно проинтегрировать:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W = C(t).$$

Функция $C(t)$, не зависящая от пространственных координат, может быть включена в потенциал $\phi(r, t) \rightarrow \phi(r, t) + \int^t C(t') dt'$, не меняя скорости, что дает окончательно

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W = 0. \quad (1.21)$$

Для стационарного потенциального течения мы, таким образом, получили существенно более сильную версию теоремы Бернулли, утверждающую, что $v^2/2 + W$ является одной и той же постоянной для всех линий тока в отличие от общего (вихревого) случая, когда постоянная, вообще говоря, имеет разные значения для разных линий тока.

Отсутствие завихренности обеспечивает радикальное упрощение описания, которое будет приведено в этом и следующем параграфах. К сожалению для инженеров и к счастью для птиц, безвихревые течения встречаются намного реже, чем можно было бы предположить исходя из теоремы Кельвина. Главная причина этого в том, что завихренность порождается (даже для изэнтропических течений) внутри вязких пограничных слоев вблизи твердых поверхностей, как мы увидим ниже в главе 1.5. При этом мы увидим, что большие области течения могут тем не менее оставаться незатронутыми производством завихренности и быть эффективно описаны как безвихревые. Другой класс потенциальных течений соответствует ма-

лым колебаниям жидкости типа, например, порожденных волнами или осцилляциями погруженных тел. Если амплитуда колебаний a мала по сравнению с масштабом изменения скорости l , то $\partial v/\partial t \simeq v^2/a$, в то время как $(v\nabla)v \simeq v^2/l$, так что можно пренебречь нелинейным членом и $\partial v/\partial t = -\nabla W$. Взяв ротор от этого соотношения, получим сохранение ω , среднее от которого должно отсутствовать для осцилляторного движения, так что окончательно заключаем, что $\omega = 0$.

Уравнение Эйлера упрощено максимально, от (1.2) до (1.21). Проделаем теперь то же с уравнением непрерывности.

Несжимаемая жидкость может полагаться таковой, если плотность может считаться неизменной. Как видно из (1.5), темп изменения плотности при движении любого элемента жидкости задается как $\text{div } v = -d \ln \rho/dt$. Таким образом, для несжимаемой жидкости от уравнения непрерывности остается

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1.22)$$

Подчеркнем, что при этом плотность, строго говоря, не обязана быть постоянной в пространстве и во времени, важно только, что она не меняется при движении. Иными словами, $\partial \rho/\partial t$ и $(v\nabla)\rho$ могут быть по отдельности и не равны нулю, достаточно, что их сумма исчезает. Мы, однако, будем рассматривать только простейший случай, когда плотность может считаться постоянной в пространстве и неизменной во времени. Это означает, что в полном уравнении непрерывности $\partial \rho/\partial t + (v\nabla)\rho + \rho \text{div } v = 0$ и первое и второе слагаемые много меньше последнего. Пусть скорость v меняется на масштабе l за характерное время τ . Оценим изменение плотности

$$\delta \rho \simeq (\partial \rho/\partial p)_s \delta p \simeq (\partial \rho/\partial p)_s \rho v^2 \simeq \rho v^2/c^2, \quad (1.23)$$

где мы оценили изменение давления из теоремы Бернулли. Потребовав

$$(v\nabla)\rho \simeq v \delta \rho/l \ll \rho \text{div } v \simeq \rho v/l,$$

получим $\delta \rho \ll \rho$, что, согласно (1.23), справедливо, если скорость намного меньше скорости звука.

Для зависящих от времени течений, следует также потребовать достаточно медленного изменения плотности: $\partial \rho/\partial t \ll \rho \text{div } v$. Сравнивая $\partial v/\partial t \simeq v/\tau$ и $\nabla p/\rho \simeq c^2 \delta \rho/\rho l$, оценим вариацию плотности из-за нестационарности как $\delta \rho \simeq \rho v l/\tau c^2$, так что

$$\partial \rho/\partial t \simeq \delta \rho/\tau \simeq \rho v l/\tau^2 c^2 \ll \rho \text{div } v \simeq \rho v/l.$$

Таким образом, второе условие несжимаемости означает, что характерное время τ должно превышать характерный масштаб l , деленный на скорость звука c :

$$\tau \gg l/c. \quad (1.24)$$

Дело в том, что звук должен успеть пробежать по всей длине, выравнивая плотность.

Для изэнтропического течения несжимаемой жидкости внутренняя энергия не меняется, $dE = Tds + p\rho^{-2}d\rho = 0$, так что можно всюду полагать $W = p/\rho$. Поскольку плотность не является более независимой переменной, можно выбрать только уравнения, содержащие скорость, например (1.19) и (1.22).

В двух измерениях несжимаемое течение может быть описано одной скалярной функцией. Поскольку $\partial v_x/\partial x = -\partial v_y/\partial y$, можно ввести *функцию тока* ψ , определенную согласно $v_x = \partial\psi/\partial y$ и $v_y = -\partial\psi/\partial x$. Напомним, что линии тока определены соотношением $v_x dy - v_y dx = 0$, которое может быть записано как $d\psi = 0$, т. е. линии уровня функции тока $\psi(x, y) = \text{const}$ задают линии тока. Другое важное свойство функции тока: поток жидкости через любую линию равен разности значений ψ на ее концах. Как очевидное следствие несжимаемости, поток не зависит от формы линии, а только от положения ее концов:

$$\int_1^2 v_n dl = \int_1^2 (v_x dy - v_y dx) = \int d\psi = \psi_2 - \psi_1. \quad (1.25)$$

Здесь v_n — нормальная компонента скорости, так что поток равен модулю векторного произведения $\int |\mathbf{v} \times d\mathbf{l}|$, см. рисунок 1.7. неподвижная твердая поверхность должна совпадать с одной из линий тока.

Потенциальное течение несжимаемой жидкости описывается линейным уравнением, поскольку из (1.22) следует, что потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа⁶

$$\Delta\phi = 0$$

с граничным условием $\partial\phi/\partial n = 0$ на неподвижной твердой поверхности.

Прежде чем приступить к вычислениям, сформулируем несколько общих утверждений, следующих из того, что потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа. Во-первых, это уравнение является линейным, так что поля скоростей несжимаемых потенциальных течений удовлетворяют принципу суперпозиции. Можно складывать поля скоростей, но не дав-

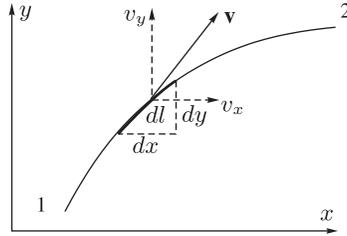


Рис. 1.7. Поток через элемент dl равен потоку вправо $v_x dy$ минус поток вверх $v_y dx$ в согласии с (1.25).

ления. Во-вторых, уравнение Лапласа является эллиптическим, что означает, что решения являются гладкими внутри областей, особенности могут существовать только на границах в отличие от гиперболических (скажем, волновых) уравнений. Дифференциальный оператор второго порядка $\sum a_i \partial_i^2$ называется эллиптическим, если все a_i одного знака, гиперболическим — если знаки разные и параболическим — если по крайней мере один из коэффициентов равен нулю. Эти названия обязаны своим происхождением тому, что вещественная квадратичная кривая $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ является гиперболой, эллипсом или параболой в зависимости от того, является ли величина $ac - b^2$ отрицательной, положительной или равной нулю. У гиперболических уравнений существуют характеристики, на которых решение постоянно; при пересечении характеристик особенности могут возникнуть внутри области. Решения эллиптических уравнений гладкие, их стационарные точки — седла, а не максимумы и минимумы; см. также параграфы 2.3.2 и 2.3.5.

В-третьих, интегрируя уравнение Лапласа (1.27) по любому объему, получим

$$\int \Delta \phi dV = \int \operatorname{div} \nabla \phi dV = \oint \nabla \phi \cdot d\mathbf{f} = 0,$$

что значит, что поток через любую замкнутую поверхность равен нулю, как и должно быть в несжимаемой жидкости. Это означает, в частности, что $\mathbf{v} = \nabla \phi$ меняет знак на любой замкнутой поверхности, так что экстремумы ϕ могут быть только на границах. Это же справедливо для компонент самой скорости (например, $\partial \phi / \partial x$), поскольку они тоже удовлетворяют уравнению Лапласа. Это значит, что для любой точки P внутри области течения можно найти точку P' , в которой $|v_x|$ больше. Если выбрать направление x совпадающим с $\nabla \phi$ в точке P , придем к заключению, что для

любой внутренней точки можно найти точку в ее непосредственной окрестности, где $|v|$ больше. Иными словами, v^2 не может иметь максимум внутри (но может иметь минимум). Аналогично для давления, взяв лапласиан от теоремы Бернулли (1.28),

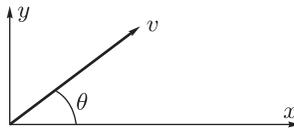
$$\Delta p = -\rho \Delta v^2 / 2 = -\rho (\nabla v)^2,$$

и проинтегрировав его по объему, получим

$$\oint \nabla p \cdot d\mathbf{f} = -\rho \int (\nabla v)^2 dV < 0.$$

Это означает, что локальные минимумы давления могут достигаться только на границе (а максимумы могут быть и внутри области течения). Для стационарных течений имеем $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$, так что максимумы v^2 совпадают с минимумами p и все они находятся на границе.⁷ Знание положения минимумов давления важно из-за явления кавитации. Дело в том, что там, где давление жидкости падает ниже давления пара, происходит генерация пузырьков газа. Когда затем пузырьки попадают в область более высокого давления, они могут схлопнуться, производя ударные волны, постепенно разрушающие движущиеся поверхности, например турбины. Максимумы скорости важны для прямого механизма генерации ударных волн — как мы увидим ниже в параграфе 2.3.2, ударная волна возникает, когда локальная скорость жидкости или газа превышает скорость звука; как видим, это может происходить только на границах потенциального течения.

Несмотря на высокую степень идеализации, теория несжимаемых потенциальных течений имеет немалую практическую ценность. Она описывает не только большие области течений вне следов обтекаемых тел, как описано в параграфе 1.5.4, но также взрывы большой мощности, как описано в задаче 1.18.



Плоские течения. Особенно элегантно можно описать двумерные (2d) потенциальные течения несжимаемой жидкости. В этом случае можно определить как потенциал, так и функцию тока. Уравнения

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.26)$$

имеют вид условий Коши – Римана для того, чтобы комплексный потенциал $w = \phi + i\psi$ был аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Это означает, что w меняется одинаково в любом направлении в x, y -плоскости, так что во всей плоскости можно ввести комплексную производную dw/dz . Например, оба выбора $dz = dx$ и $dz = i dy$ дают тот же ответ в силу (1.26):

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{i\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x - i v_y = v e^{-i\theta}, \quad \mathbf{v} = v_x + i v_y = \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}.$$

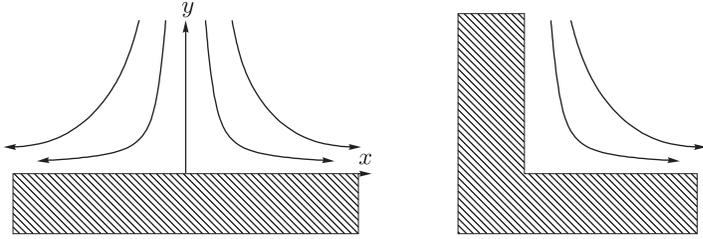
Запись в комплексных переменных позволяет компактное описание множества течений и нахождение течения в сложной геометрии путем отображения области течения в стандартную область. Такое отображение должно быть конформным, т. е. осуществляться аналитической функцией, так что уравнения (1.26) сохраняют свой вид в новых координатах. Конформные преобразования растягивают равномерно во всех направлениях в каждой точке, но степень растяжения, вообще говоря, разная в разных точках. В результате конформные отображения сохраняют углы, но не расстояния. Эти свойства впервые нашли приложение в морской картографии (Меркатор, 1569) задолго до создания комплексного анализа. И правда, чтобы открыть новый континент, направление знать обязательно, а расстояние до цели так даже и нежелательно.

Таким образом, мы получили первое (и сразу бесконечное) семейство решений — любая функция, аналитическая в области и имеющая постоянную мнимую часть на границе, описывает потенциальное течение несжимаемой жидкости в этой области. Однородное течение задается линейной функцией $w = (v_x - i v_y)z$. Вот еще несколько простых примеров.

- 1) Потенциальное течение вблизи точки остановки $\mathbf{v} = 0$, находящейся внутри области или на гладкой границе, выражается через тензор деформации S_{ij} : $\phi = S_{ij}x_i x_j / 2$, где $\text{div } \mathbf{v} = S_{ii} = 0$. В главных осях тензора $v_x = kx$, $v_y = -ky$, что соответствует

$$\phi = k(x^2 - y^2)/2, \quad \psi = kxy, \quad w = kz^2/2.$$

Линии тока $x = \psi/ky$ и траектории $x(t) = x(0)y(0)/y(t)$ — гиперболы. В частности, такое течение реализуется вблизи границы, которая должна совпадать с одной из осей x , y или обеими, как показано на рисунке.



- 2) Рассмотрим потенциал вида $w = Az^n$, имеющий $\phi = Ar^n \cos n\theta$ и $\psi = Ar^n \sin n\theta$. Прямые линии тока $\theta = 0$ и $\theta = \pi/n$ могут быть выбраны как границы. Разные интересные частные случаи соответствуют разным n . Абсолютное значение скорости

$$v = \left| \frac{dw}{dz} \right| = n|A|r^{n-1}$$

при $r \rightarrow 0$ обращается или в ноль ($n > 1$), или в бесконечность ($n < 1$), см. рисунок 1.8.

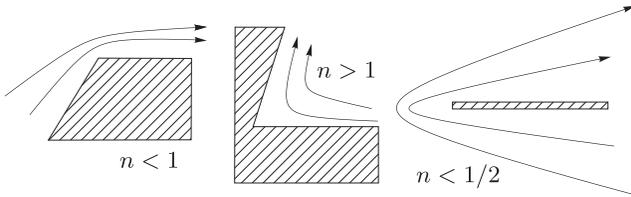


Рис. 1.8. Течения, описываемые комплексным потенциалом $w = Az^n$.

Эти решения могут рассматриваться как полученные конформным преобразованием $\zeta = z^n$, которое отображает область z в полную плоскость ζ . Потенциал $w = Az^n = A\zeta$ описывает однородное течение в плоскости ζ . Значение потенциала одинаково в точках z и ζ , связанных преобразованием, которое, таким образом, переводит линии тока в линии тока. Скорость в образе области есть $dw/d\zeta = (dw/dz)(dz/d\zeta)$, т. е. модуль скорости обратно пропорционален фактору растяжения. Это имеет два важных следствия. Во-первых, энергия потенциального течения инвариантна относительно конформных преобразований, т. е. энергия внутри любой замкнутой кривой в плоскости прообраза z та же, что энергия внутри образа кривой в плоскости ζ . Во-вторых, динамика течения не является конформно

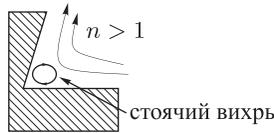
инвариантной, хотя линии тока инвариантны (и совпадают с траекториями частиц для стационарного течения); действительно, течение переносит частицу из точки z в новую точку $z + vdt = z + dt(d\bar{w}/d\bar{z})$, образ которой,

$$\zeta(z + vdt) = \zeta(z) + dtv \frac{d\zeta}{dz} = \zeta(z) + dt \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \frac{d\zeta}{dz},$$

не совпадает с новым положением старого образа

$$\zeta(z) + dt \frac{d\bar{w}}{d\zeta} = \zeta(z) + dt \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\zeta}.$$

Несмотря на эстетическую привлекательность течений, задаваемых аналитическими функциями комплексного переменного, их применения весьма ограничены. Причина в том, что реальные течения отрываются в точках сингулярности: не поворачивают за угол при $n < 1$ и не достигают внутренности угла при $n > 1$, как показано на рисунке.



Явление отрыва происходит из совместного действия вязкости и инерции и детально обсуждается в параграфе 1.5.2. Отрыв производит завихренность, что делает невозможным введение потенциала ϕ и использование комплексного потенциала w (линии тока вихревых течений не являются конформно инвариантными).

1.3. Движение сквозь жидкость

Зададимся вопросом, какую силу требуется приложить, чтобы привести в движение тело, находящееся в жидкости. Представим на минуту пузырьки в шампанском. Масса газа внутри в тысячу раз меньше, чем масса вытесненной жидкости, определяющая архимедову силу. Значит ли это, что пузырьки устремятся вверх с ускорением $1000g$, выплеснув драгоценную жидкость? Понятно ведь, что движение тела приводит в движение также и часть жидкости. Естественно тогда предположить, что при оценке силы мы должны учесть изменение импульса как тела, так и окружающей жидкости. Однако что-то не так и с этим естественным предположением. Действительно, если жидкость заключена в неподвижный сосуд, то ее полный

импульс всегда равен нулю! В этом случае не менее естественно полагать, что далекие стенки не должны влиять на силу, прилагаемую к телу вдали от них. Ясно, что тело приведет в движение часть жидкости в своей непосредственной окрестности и это определит силу, а компенсирующий противоток будет распределен по всему объему и не должен влиять на силу. В этой главе мы решим задачу о движении тела (сначала сферической, а потом и произвольной формы) в идеальной несжимаемой жидкости в простейшем предположении потенциальности течения. Это позволит нам вычислить вклад жидкости в силу, необходимую, чтобы привести тело в движение. Этот вклад эквивалентен появлению добавочной (так называемой присоединенной) массы. Мы обнаружим, что вовсе не импульс, а квазиимпульс жидкости определяет присоединенную массу. Мы обсудим различие между законами сохранения импульса (обязанного своим существованием однородности пространства) и сохранения квазиимпульса (обязанного своим существованием однородности среды).

Жидкость действует на движущееся в ней тело с силой, направленной не только против движения, но и поперек, если тело несимметрично. Такая поперечная сила обычно называется подъемной, поскольку она поддерживает птиц и самолеты, летящие в воздухе. Мы обнаружим в этой главе, что в идеальной жидкости нет подъемной силы, что вынудит нас ввести трение в следующей главе.

Мы будем полагать, что течение возникло из состояния покоя, так что завихренность тождественно равна нулю, согласно теореме Кельвина. Взамен можно перейти в систему отсчета тела, где однородное течение приходит из бесконечности также с нулевой завихренностью. Предполагаем жидкость идеальной и несжимаемой, все, что надо, — это решить уравнение Лапласа

$$\Delta\phi = 0. \quad (1.27)$$

Граничное условие на поверхности тела — чтобы жидкость не проникала внутрь, что должно обеспечиваться совпадением нормальных компонент скорости тела \mathbf{u} и скорости жидкости: $\partial\phi/\partial n = u_n$. Найдя потенциал, можно вычислить скорость $\mathbf{v} = \nabla\phi$ и затем найти давление из теоремы Бернулли:

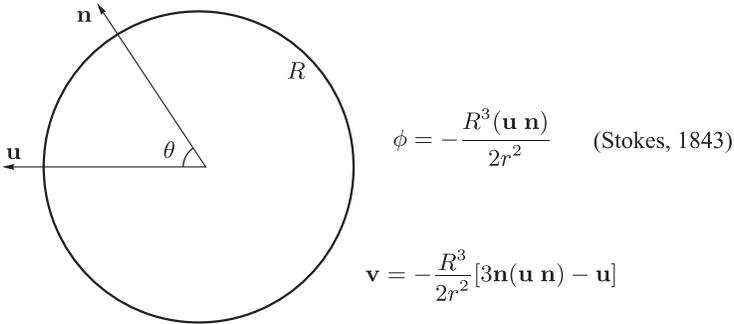
$$p = -\rho(\partial\phi/\partial t + v^2/2). \quad (1.28)$$

1.3.1. Движущийся шар

В трехмерном пространстве решения уравнения $\Delta\phi = 0$, исчезающие на бесконечности, — это $1/r$ и производные $\partial^n(1/r)/\partial x^n$. Вследствие симметрии шара — его движение полностью характеризуется единственным вектором его скорости \mathbf{u} . Линейность требует $\phi \propto \mathbf{u}$, так что потенциал течения не может быть ничем иным, кроме скалярного произведения \mathbf{u} и градиента, что дает поле диполя

$$\phi = a \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) = -a \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r^2},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. На поверхности тела $r = R$ и $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u \cos \theta$. Используя $\phi = -ua \cos \theta / r^2$ и $v_R = 2auR^{-3} \cos \theta$, граничное условие дает $a = R^3/2$.



Теперь можно вычислить давление:

$$p = p_0 - \rho v^2/2 - \rho \partial\phi/\partial t,$$

учитывая, что наше решение движется вместе с шаром, так что $\phi(\mathbf{r} - \mathbf{u}t, \mathbf{u})$ и

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{u} \cdot \nabla\phi,$$

что дает

$$p = p_0 + \rho u^2 \frac{9 \cos^2 \theta - 5}{8} + \frac{\rho R}{2} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}.$$

Сила, действующая на тело, есть минус интеграл давления по поверхности тела $-\oint p d\mathbf{f}$. Например, предполагая, что скорость тела не меняет направления, $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \dot{u} \cos \theta$, получим

$$F_x = -\oint p \cos \theta d\mathbf{f} = -\rho R^3 \dot{u} \pi \int \cos^2 \theta d \cos \theta = -2\pi \rho R^3 \dot{u} / 3. \quad (1.29)$$

Как видно, масса жидкости, которую приходится ускорять, равна половине массы вытесненной жидкости. Это исторически первый и простейший пример перенормировки в физике: тело, движущееся сквозь жидкость, приобретает дополнительную массу, которую принято называть присоединенной. Можно с облегчением заключить, что пузырек в шампанском начнет подниматься с ускорением, близким к $2g$, что есть действующая на него сила Архимеда (масса вытесненной жидкости, умноженная g), деленная на присоединенную массу (половина массы вытесненной жидкости). По мере ускорения пузырька относительно жидкости действующая на него сила сопротивления будет расти (как описано ниже в разделе 1.5), уменьшая ускорение.

Если радиус шара также зависит от времени, то $F_x \propto \partial\phi/\partial t \propto -\partial(R^3 u)/\partial t$. Удивительно, но факт: если движущееся тело сжимается, то силы, действующие со стороны жидкости, ускоряют его; мы обсудим это ниже, после (1.41).

Согласно нашим формулам, на шар, движущийся с постоянной скоростью без изменения объема, $\dot{R} = \dot{\mathbf{u}} = 0$, не действует со стороны жидкости никакая сила: $\oint p d\mathbf{f} = 0$. Так же и для двумерного случая (скажем, течения вокруг цилиндра с радиусом R), где потенциал $\phi = -R^2(\mathbf{u} \cdot \nabla) \log r$ и давление на поверхности тела $p = -2\rho \sin^2 \theta + \rho R \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ таковы, что после интегрирования по углам только последний член дает вклад в полную силу, которая исчезает для стационарного движения, в точности как в (1.29). Причина исчезновения силы, как видим, в симметрии левой и правой частей стационарного течения (набегающей на тело и уходящей от него). Это очевидно противоречит нашему повседневному опыту, все мы испытывали сопротивление, оказываемое жидкостями движущимся телам. Может быть, сила у нас получилась нулевой из-за симметричности формы шара?

1.3.2. Движущееся тело произвольной формы

Для потенциального обтекания тела произвольной формы в двумерном случае ответ может быть получен конформным отображением тела на круг;

так что если стационарное движение круга не встречает сопротивления, то это же справедливо и для тела произвольной формы. Действительно, давление в стационарном течении с точностью до константы есть $p = -\rho v^2/2 = -\rho|dw/dz|^2$. Скомбинируем компоненты сил в интеграл по поверхности тела, где $dw = d\bar{w}$:

$$F_x - iF_y = -i \oint p d\bar{z} = \frac{i\rho}{2} \oint \frac{dw}{dz} d\bar{w} = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Это интеграл от аналитической функции, не имеющей никаких особенностей, так что контур можно растянуть до бесконечности, где интеграл исчезает, поскольку скорость убывает быстрее $1/|z|$ вследствие сохранения массы (Блазиус, 1910). Заметим, что это рассуждение не исключает ненулевого вращательного момента, действующего на тело.

В трехмерном пространстве задача обтекания тела произвольной формы, вообще говоря, не решается аналитически. Однако прелесть теории потенциала заключается в том, что она позволяет сделать выводы о том, что «здесь», рассматривая поле «там». В нашем случае нас интересует распределение сил, действующих на тело, а рассмотрим мы течение вдали, которое должно слабо зависеть от формы тела. Действительно, далеко от тела решение уравнения $\Delta\phi = 0$ должно задаваться первым неисчезающим членом мультипольного разложения. Первый (зарядовый) вклад $\phi = a/r$ следует опустить, поскольку соответствующая скорость $\mathbf{v} = -a\mathbf{r}/r^3$ имеет радиальную компоненту $v_R = a/R^2$ с неисчезающим потоком $4\pi\rho a$ через поверхность сферы радиуса R ; существование такого потока противоречит несжимаемости. Так что первый неисчезающий вклад опять дипольный:

$$\begin{aligned}\phi &= \mathbf{A} \cdot \nabla(1/r) = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})r^{-2}, \\ \mathbf{v} &= [3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{A}]r^{-3}.\end{aligned}$$

Для шара радиуса R_0 , согласно результатам предыдущего параграфа, $\mathbf{A} = \mathbf{u}R_0^3/2$, тогда как для несимметричных тел векторы \mathbf{A} и \mathbf{u} , вообще говоря, неколлинеарны, а линейно связаны: $A_i = \alpha_{ik}u_k$, причем тензор α_{ik} имеет размерность объема и зависит от формы тела.

Чтобы определить силу, действующую на тело, зная течение вдали от тела, найдем энергию $E = \rho \int v^2 dV/2$ жидкости, движущейся вне тела и внутри сферы радиуса R , много большего, чем R_0 . Представим $v^2 = u^2 + (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} + \mathbf{u})$ и перепишем $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \nabla(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$. Используя

$\operatorname{div} v = \operatorname{div} u = 0$, можно записать

$$\begin{aligned} \int_{r < R} v^2 dV &= u^2(V - V_0) + \int_{r < R} \operatorname{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] dV = \\ &= u^2(V - V_0) + \oint_{S+S_0} (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{f} = \\ &= u^2(V - V_0) + \oint_S (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{f}. \end{aligned}$$

Подставив

$$\phi = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})R^{-2}, \quad \mathbf{v} = [3\mathbf{n}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{A}]R^{-3}$$

и проинтегрировав по углам,

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Omega &= A_i u_k \int n_i n_k d\Omega = A_i u_k \delta_{ik} \int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= (4\pi/3)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}), \end{aligned}$$

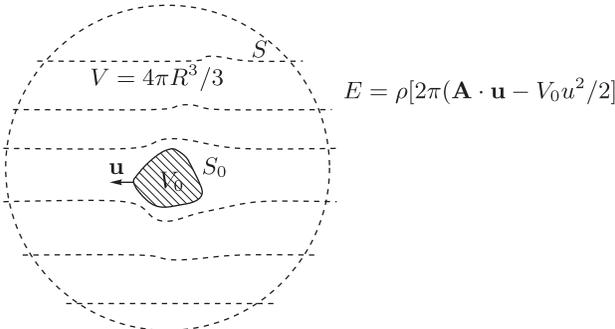
мы получим энергию в виде

$$E = \rho[4\pi(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) - V_0 u^2]/2 = m_{ik} u_i u_k / 2. \quad (1.30)$$

Здесь мы ввели тензор присоединенных масс:

$$m_{ik} = 4\pi\rho\alpha_{ik} - \rho V_0 \delta_{ik}.$$

Для сферы $m_{ik} = \rho V_0 \delta_{ik}/2$, т. е. половина вытесненной жидкости. Присоединенная масса может быть как намного больше массы вытесненной жидкости (например, для тонкого диска, движущегося перпендикулярно своей плоскости), так и намного меньше (например, для иглы, движущееся вперед острием).



Чтобы перейти от энергии к силе, действующей на тело, представим изменение энергии тела dE (равное с обратным знаком изменению энергии жидкости) как работу силы F на пути $u dt$: $dE = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dt$. Соответствующее изменение импульса тела $d\mathbf{P} = -\mathbf{F} dt$, так что $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$. Это соотношение справедливо только для изменений, произведенных силой (а не изменением формы тела), так что изменение импульса тела равно $dP_i = m_{ik} du_k$, а сила равна

$$F_i = -m_{ik} \dot{u}_k. \quad (1.31)$$

И в случае тела произвольной формы мы приходим к выводу, что потенциальное течение добавляет только массу, но не сопротивление. Причина в том, что стационарное потенциальное обтекание несжимаемой жидкости на больших расстояниях симметрично относительно замены направления движения, так что полный импульс в объеме, заключающем тело, не меняется.

Как обобщить (1.31) для случая, когда и m_{ik} и \mathbf{u} изменяются со временем? Наше рассмотрение шара подсказывает, что, поскольку соответствующий вклад в давление есть $-\rho \partial \phi / \partial t \propto \partial(m_{ik} u_i n_k) / \partial t$, то правильное обобщение (для плотности неизменной во времени) есть

$$F_i = -\frac{d}{dt} m_{ik} u_k. \quad (1.32)$$

Отсюда возникает соблазн заключить, что $m_{ik} u_k$ — это импульс жидкости, однако это не так. На самом деле это квазиимпульс жидкости, как объясняется в следующем параграфе.⁸

Уравнение движения для тела, на которое действует внешняя сила \mathbf{f} , имеет вид

$$\frac{d}{dt} M u_i = f_i + F_i = f_i - \frac{d}{dt} m_{ik} u_k,$$

который можно переписать в форме, делающей явной смысл термина «присоединенная масса»:

$$\frac{d}{dt} (M \delta_{ik} + m_{ik}) u_k = f_i. \quad (1.33)$$

Самое время разобраться со случаем переменной массы тела $M(t)$. Правильно ли мы поместили ее внутри производной по времени в (1.33)? Ведь это уравнение означает, в частности, что для поддержания постоянной скорости при переменной массе надо прикладывать силу. Так ли это, зависит того растет ли масса вследствие конденсации (как в задаче 1.14) или

убывает вследствие испарения (как в задаче 2.5). В первом случае, если мы полагаем пар неподвижным до поглощения, то конденсация не изменяет импульса, так что производная импульса по времени есть сила, действующая на тело, как в (1.33). В этом случае, действительно, следует прикладывать силу, чтобы поддерживать скорость при растущей массе. Во втором случае, пары покидают тело, имея его же скорость, так что процесс испарения сам по себе не меняет скорости. Производная скорости по времени в этом случае должна равняться силе деленной на массу:

$$M \frac{d}{dt} u_i + \frac{d}{dt} m_{ik} u_k = f_i. \quad (1.34)$$

Тело в потоке. Обсудим теперь противоположную ситуацию, когда небольшое тело находится внутри крупномасштабного течения, вызванного какими-то внешними причинами. В частности, мы рассмотрим колебательное движение жидкости, например вызванное распространением звука с длиной волны, превышающей размер тела. Оставляя внешние силы за рамками нашего рассмотрения, выразим скорость тела \mathbf{u} через локальную скорость жидкости \mathbf{v} , которая предполагается однородной на размерах тела. Если бы тело двигалось с той же скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, оно бы находилось под действием силы $\rho V_0 \dot{\mathbf{v}}$, которая бы действовала на жидкость, занимающую это место. Относительное движение добавляет силу реакции жидкости $dm_{ik}(v_k - u_k)/dt$. Сумма сил дает ускорение тела:

$$\frac{d}{dt} M u_i = \rho V_0 \dot{v}_i + \frac{d}{dt} m_{ik} (v_k - u_k).$$

Проинтегрировав по времени с нулевой постоянной интегрирования (поскольку $u = 0$, когда $v = 0$), получим соотношение между скоростями тела и жидкости:

$$(M \delta_{ik} + m_{ik}) u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik}) v_k.$$

Для шара $\mathbf{u} = \mathbf{v} 3\rho / (\rho + 2\rho_0)$, где ρ_0 плотность тела. Для сферического пузырька воздуха в жидкости $\rho_0 \ll \rho$ и $u \approx 3v$. Движение более тяжелых/легких тел является запаздывающим/опережающим по отношению к движению жидкости.

1.3.3. Квазиимпульс и присоединенная масса

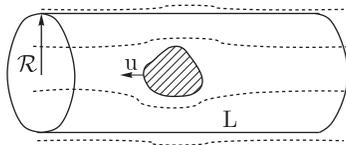
В предыдущем параграфе мы получили силу, действующую на уско-ряющееся тело, рассматривая энергию жидкости и импульс тела. Мы не

использовали импульс жидкости $\mathbf{M} = \rho \int \mathbf{v} dV$, поскольку он не определен однозначно для потенциального обтекания. Например, интеграл от $v_x = D(3 \cos^2 \theta - 1)r^{-3}$ зависит от формы выбранного объема интегрирования. Действительно, этот интеграл равен нулю для сферического объема и отличен от нуля для цилиндра длины L и радиуса \mathcal{R} , заключающего в себе обтекаемое тело:

$$\int_{-1}^1 (3 \cos^2 \theta - 1) d \cos \theta = 0,$$

$$M_x = 4\pi\rho D \int_{-L}^L dz \int_0^{\mathcal{R}} r dr \frac{2z^2 - r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}} = \frac{4\pi\rho DL}{(L^2 + \mathcal{R}^2)^{1/2}}. \quad (1.35)$$

Неужели импульс, запасенный в жидкости, зависит от граничных условий на бесконечности? Как ни странно, ответ утвердительный. Например, движение шара в жидкости, заключенной внутри неподвижных стен, должно сопровождаться перемещением соответствующего количества жидкости в противоположном направлении, так что импульс жидкости будет $-\rho V_0 u = -4\pi\rho R^3 u/3$, а вовсе не $\rho V_0 u/2$. Действие стен производит отрицательный импульс $-3\rho V_0 u/2$, который распределен по всему объему в виде малого противотока, тогда как действие шара производит положительный импульс $\rho V_0 u/2$, переносимый течением, локализованным вблизи тела. Из (1.35) получается ответ $4\pi\rho D$, не зависящий от формы, только в пределе $L/\mathcal{R} \rightarrow \infty$. Чтобы получить правильный ответ $4\pi\rho D/3$ ($=\rho V_0 u/2 = 2\pi R^3 \rho u/3$ для шара), который следует из (1.32), необходимо еще вычесть противоток $8\pi\rho D/3 = 4\pi R^3 \rho u/3$, компенсирующий движение тела.⁹



Величина, которая не зависит от граничных условий на бесконечности и чья производная по времени дает инерциальную силу (1.32), действующую на тело, — это квазиимпульс жидкости. Законы сохранения импульса и квазиимпульса следуют из разных симметрий. Закон сохранения импульса следует из инвариантности гамильтониана \mathcal{H} по отношению к сдвигу координатной системы. Если же пространство заполнено средой, жидкой

или твердой, то закон сохранения квазиимпульса следует из инвариантности гамильтониана по отношению к сдвигу в пространстве, *оставляя среду неподвижной* — это предполагает идентичность разных точек среды. В кристалле такие сдвиги позволяют только на постоянную решетки. В непрерывной среде сдвиги произвольны и гамильтониан должен быть независимым от координат:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} = 0. \quad (1.36)$$

Здесь векторы $q(\mathbf{x}, t)$, $\pi(\mathbf{x}, t)$ являются соответственно канонической координатой и импульсом (в каждой точке пространства). Нам нужно определить квазиимпульс \mathbf{K} , обязанный своим сохранением инвариантности гамильтониана: $\partial K_i / \partial t = \partial \mathcal{H} / \partial x_i = 0$. Напомним, что производная по времени от любой функции канонических переменных дается скобкой Пуассона этой функции с гамильтонианом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_i}{\partial t} &= \{K_i, \mathcal{H}\} = \frac{\partial K_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j} - \frac{\partial K_i}{\partial \pi_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Это дает для квазиимпульса уравнения в частных производных

$$\frac{\partial K_i}{\partial \pi_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial K_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i},$$

решение которых имеет вид

$$K_i = - \int dx \pi_j \frac{\partial q_j}{\partial x_i}. \quad (1.37)$$

Гамильтоново описание изэнтропического (вообще говоря, сжимаемого) течения идеальной жидкости может быть дано в лагранжевых координатах, которые описывают положение частицы жидкости \mathbf{r} как функцию времени и начального положения \mathbf{R} . Поскольку мы хотим, чтобы для локализованного течения наша переменная менялась в конечных пределах, мы выберем в качестве канонической координаты смещение $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ (используемое также в теории упругости и являющееся непрерывным пределом переменной, описывающей колебания кристаллической решетки в физике твердого

тела). Канонический импульс — это $\pi(\mathbf{R}, t) = \rho_0(\mathbf{R})\mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$, ну а скорость, естественно, $\mathbf{v} = (\partial\mathbf{r}/\partial t)_{\mathbf{R}} \equiv \dot{\mathbf{r}}$. Здесь ρ_0 — это плотность в исходном состоянии, которая всегда может быть выбрана однородной. Как было замечено в параграфе 1.1.2 при выводе уравнения Эйлера, частицы жидкости сохраняют свою массу, которую можно полагать единичной.

Гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \int \rho_0 [W(\mathbf{q}) + v^2/2] d\mathbf{R}, \quad (1.38)$$

где энтальпия $W = E + p/\rho$ играет роль потенциальной энергии. Заметим, что гамильтониан для частиц жидкости, $W + v^2/2$, вообще говоря, зависим от времени.¹⁰ Текущая плотность выражается через исходную:

$$\rho(\mathbf{R}, t) = \rho_0 \det[\partial r_i / \partial R_j].$$

Канонические уравнения движения $\dot{q}_i = \partial\mathcal{H}/\partial\pi_i$ и $\dot{\pi}_i = -\partial\mathcal{H}/\partial q_i$ дают соответственно $\dot{r}_i = v_i$ и $\dot{v}_i = -\partial W/\partial r_i = -\rho^{-1}\partial p/\partial r_i$. Скорость \mathbf{v} является теперь независимой переменной, а вовсе не функцией от координат \mathbf{r} . Все производные по времени вычисляются для фиксированного \mathbf{R} , т. е. являются материальными производными. Квазиимпульс (1.37) имеет вид

$$K_i = -\rho_0 \int v_j \frac{\partial q_j}{\partial R_i} d\mathbf{R} = \rho_0 \int v_j \left(\delta_{ij} - \frac{\partial r_j}{\partial R_i} \right) d\mathbf{R}. \quad (1.39)$$

Отсюда ясно, что ненулевой квазиимпульс имеется только у частиц, движение которых подвержено воздействию обтекаемого тела, так что для них $\partial r_j / \partial R_i \neq \delta_{ij}$. Интеграл (1.39) сходится для пространственно локализованных течений, поскольку $\partial r_j / \partial R_i \rightarrow \delta_{ij}$, когда $R \rightarrow \infty$. В отличие от импульса (1.35) квазиимпульс (1.39) независим от формы далекой поверхности. Используя $\rho_0 d\mathbf{R} = \rho d\mathbf{r}$, можно также представить

$$\begin{aligned} K_i &= \rho_0 \int v_j \left(\delta_{ij} - \frac{\partial r_j}{\partial R_i} \right) d\mathbf{R} = \\ &= \int \rho v_i d\mathbf{r} - \rho_0 \int v_j \frac{\partial r_j}{\partial R_i} d\mathbf{R}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

т. е. и вправду квазиимпульс равен импульсу минус противоток.

Теперь можно проверить сохранение, подставляя уравнение движения $\rho \dot{\mathbf{v}} = -\partial p / \partial \mathbf{r}$ в

$$\begin{aligned}
 \dot{K}_i &= -\rho_0 \int \left(\dot{v}_j \frac{\partial q_j}{\partial R_i} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial R_i} \right) \partial \mathbf{R} = \\
 &= -\rho_0 \int \left[\dot{v}_j \left(\frac{\partial r_j}{\partial R_i} - \delta_{ij} \right) + v_j \frac{\partial v_j}{\partial R_i} \right] \partial \mathbf{R} = \\
 &= -\rho_0 \int \left(\frac{\delta_{ij}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_j} - \frac{\partial W}{\partial r_j} \frac{\partial r_j}{\partial R_i} + \frac{\partial v^2}{2 \partial R_i} \right) \partial \mathbf{R} = \\
 &= - \int \frac{\partial p}{\partial r_i} \partial \mathbf{r} + \int \frac{\partial}{\partial R_i} \left(W - \frac{\rho_0 v^2}{2} \right) \partial \mathbf{R} = \\
 &= - \int \frac{\partial p}{\partial r_i} \partial \mathbf{r} = \oint p \partial f_i. \tag{1.41}
 \end{aligned}$$

В четвертой строке второй член равен нулю как интеграл по пространству начальных координат \mathbf{R} от полной производной, тогда как интеграл по текущим координатам \mathbf{r} в первом члене исключает объем тела, оставляя граничный член, который как раз и дает (со знаком минус) силу, действующую на тело. Таким образом, в идеальной жидкости сохраняется сумма импульса тела и квазиимпульса жидкости. Это объясняет уже упоминавшийся удивительный эффект ускорения сжимающегося тела. Действительно, уменьшение присоединенной массы и квазиимпульса жидкости должно сопровождаться увеличением импульса тела. Быстро уменьшив площадь сечения, пловец может добиться дополнительного ускорения, пропорционального производной по времени от присоединенной массы. Например, при плавании брассом переход в фазу скольжения должен быть быстрым. Стремительная смена формы при ускорении особенно хорошо удается осьминогу.

Формула (1.39) определяет квазиимпульс для любого течения. Для потенциального течения достаточно просто проинтегрировать потенциал по поверхности тела: $\mathbf{K} = \int \rho \phi d\mathbf{f}$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим очень короткий, но сильный импульс давления, необходимый, чтобы привести тело в движение, формально $p \propto \delta(t)$. В течение короткого времени действия импульса тело не успевает сдвинуться, так что его положение и поверхность хорошо определены. В соотношении Бернулли (1.21) можно пренебречь членом с v^2 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} \approx -\frac{p}{\rho}.$$

Интегрируя равенство $\rho\phi = -\int p(t) dt$ по поверхности тела, получим минус изменение импульса тела, т. е. квазиимпульс жидкости. Например, интегрируя $\phi = R^3 u \cos \theta / 2r^2$ по сфере, содержащей тело внутри, получим

$$K_x = \int \rho\phi \cos \theta d\mathbf{f} = \pi\rho R^3 u \int_{-1}^1 \cos^2 \theta d \cos \theta = 2\pi\rho R^3 u / 3,$$

как ожидалось. Разница между импульсом и квазиимпульсом сводится к потоку импульса, обусловленного давлением, которое убывает как r^{-2} для потенциального течения, так что поток не зависит от радиуса сферы.

Квазиимпульс жидкости и скорость тела связаны присоединенной массой, $K_i = m_{ik} u_k$, которую, таким образом, можно находить, используя (1.39). Для этого необходимо решить лагранжевы уравнения движения $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$; таким образом, можно показать, что присоединенная масса выражается через смещение жидкости после прохождения тела. При движении тело расталкивает жидкость перед собой, оставляя свободное пространство сзади, так что довольно долго полагали, что результирующее смещение является противотоком. То, что сдвиг всегда происходит в направлении движения, как показано на рисунке 1.9, доказал Дарвин-внук (1953). Продемонстрируем это для произвольного потенциального течения, смещающегося пространстве с постоянной скоростью и задаваемого потенциалом $\phi(x - ut, y, z)$. Такое течение порождается или движущимся телом или распространяющейся волной. Чтобы выразить смещение частиц жидкости через лагранжев интеграл, запишем

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{1}{u} \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{u} \left(|\nabla\phi|^2 - \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)$$

и подставим

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_x(x(t'), y, z) dt' = \frac{1}{u} \int_0^t |\nabla\phi|^2 dt - \frac{1}{u} \phi|_0^t. \quad (1.42)$$

Теперь выберем t такое, чтобы последний член обратился в ноль (период для волны или бесконечность для проплывающего тела) и увидим, что смещение всегда положительно.

Тело толкает жидкость перед собой и тянет за собой, а жидкость по бокам движется в противоположном направлении. Действительно, потенциал скорости $\phi \propto -x/r^d$ (где $d = 3$ для шара, $d = 2$ для цилиндра), так что горизонтальная компонента скорости жидкости $v_x \propto d \cos^2 \theta - 1$ меняет знак

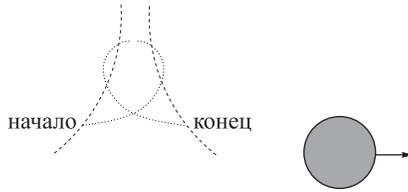


Рис. 1.9. Смещение жидкости проходящим телом. Точками обозначена траектория частицы. Две пунктирные линии (выбранные симметрично) показывают положения частиц соответственно до и после прохождения тела.

при $\cos^2 \theta = 1/d$. В результате, каждая частица описывает петлю, как показано на рисунке 1.9. Стоит осознать, насколько траектории частиц отличаются от мгновенных линий тока (см. также задачу 1.6).¹¹ Масса сдвинутой жидкости, заключенная между пунктирными линиями, и есть присоединенная масса.

1.4. Вязкость

Подведем итоги предыдущего раздела. Пренебрегая внутренним трением, мы смогли описать инерционную реакцию жидкости на ускорение тела, количественно задаваемую присоединенной массой. Для движения с постоянной скоростью нам не удалось найти никаких сил. Если бы подъемная сила (поперек \mathbf{u}) и вправду отсутствовала, ни птицы, ни самолеты не летали бы. Что касается силы сопротивления, противоположной \mathbf{u} , то интуитивно ясно, что она должна определяться количеством движения, передаваемого жидкости телом в единицу времени (Ньютон, 1687). Перемножив плотность импульса ρu и объем, равный площади R^2 , умноженной на скорость u , получим:

$$F = CR^2 \rho u^2, \quad (1.43)$$

где C — это безразмерная константа, называемая коэффициентом сопротивления и зависящая от формы тела. Это и есть правильная оценка силы сопротивления в пределе исчезающего вязкого трения. Чтобы почувствовать, как она описывает реальность, оценим, что при езде на велосипеде со скоростью $4 \text{ м/с} = 14.4 \text{ км/ч}$ тело с лобовой площадью 0.75 м^2 испытывает силу сопротивления примерно 12 Н . Бублик без масла содержит 200 килокалорий, для сжигания которых придется проехать 7 км .¹²

Хотя (1.43) и не содержит вязкости, я не знаю другого способа обосновать эту оценку, кроме как ввести вязкость и затем устремить ее к нулю. Мы увидим, что переход к пределу весьма нетривиален, поскольку сколь угодно малая вязкость приводит к возникновению бесконечной области, называемой следом, в которой течение отличается существенно от описанного выше потенциального течения. Введение вязкости и описание следа займет этот и следующий разделы, где мы и выберемся из зарослей парадоксов идеальной жидкости на дорогу, ведущую в реальный мир.

1.4.1. Парадокс обратимости

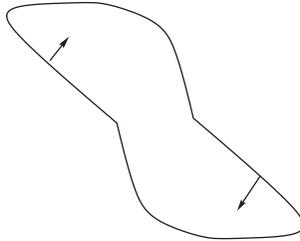
Посмотрим на отсутствие сопротивления с более общей точки зрения. Мы сделали пять предположений: идеальность, безграничность, несжимаемость, потенциальность и стационарность. Начнем с конца: всегда можно подождать достаточно долго (на практике — когда тело сместится на несколько собственных длин), чтобы достичь желаемой степени стационарности. Потенциальное течение несжимаемой жидкости полностью определяется скоростью и мгновенным положением тела. Когда тело движется с постоянной скоростью, течение смещается вместе с ним, не меняя формы; поскольку ни квазиимпульс, ни энергия течения при этом не меняются по величине, нет сил, совершающих работу. Если жидкость имеет свободную границу, то движение тела будет возбуждать поверхностные волны, уносящие энергию; однако, если тело достаточно далеко от границы, возбуждение волн и создаваемое ими сопротивление пренебрежимо малы.

Может быть, учет сжимаемости позволит нам получить конечную силу сопротивления, например, за счет уноса энергии звуковыми волнами? Увы, это невозможно для стационарного течения вследствие *обратимости* уравнений Эйлера и непрерывности: обращение течения (определенное как $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{v}(\mathbf{r}, -t)$) также является решением уравнений с заменой скорости на бесконечности $-\mathbf{u}$ на \mathbf{u} , но в точности с теми же распределениями давления и плотности. Действительно, безвихревое стационарное течение идеальной жидкости задается граничной задачей, состоящей из уравнения непрерывности и теоремы Бернулли:

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad v_n = 0 \text{ (на поверхности тела)}, \quad \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{u} \text{ на бесконечности,}$$

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \text{const.}$$

Обращенное вспять течение $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = -\mathbf{v}(\mathbf{r})$ имеет то же распределение давления, а значит, дает ту же силу, действующую на тело. Но ведь сила сопротивления противоположна скорости тела и должна была бы менять знак при обращении. Приходится признать, что сила сопротивления равна нулю для любого стационарного безвихревого течения идеальной жидкости. Для частного случая симметричного тела парадокс обратимости дает так называемый парадокс Даламбера: давление на симметричные элементы поверхности одинаково и соответствующие компоненты силы сокращаются. Например, тело с центром симметрии может только вращаться течением.¹³



Парадокс обратимости подсказывает, что сопротивление должно быть связано своим существованием с силой, нечетной по отношению к скорости (тогда как давление в идеальной жидкости $p \propto v^2$ является четным). Такая сила может появиться только благодаря трению. Ниже мы покажем, что вязкое трение обеспечивает возможность и сопротивления, и подъемной силы, действующих на тело, движущееся сквозь жидкость.

1.4.2. Вязкие силы

Чтобы описать как нормальные, так и тангенциальные силы, надо задать как направление силы, так и ориентацию поверхности, на которую сила действует. Это требует тензора второго ранга. Мы определим тензор напряжений σ_{ij} так, что элемент ij равен i -ой компоненте силы, действующей на единичную площадку, перпендикулярную направлению j . В отсутствие течения, имеется только давление, обеспечивающее диагональные компоненты, которые отвечают за нормальные силы, равные друг другу по закону Паскаля, см. рисунок 1.10. Неоднородное течение порождает внутреннее трение, меняющее тензор напряжений: $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ (поскольку силы считаются приложенными к рассматриваемому элементу жидко-

сти, давление отрицательно). Соответственно меняются также поток $\Pi_{ik} = \rho \delta_{ik} - \sigma'_{ik} + \rho v_i v_k$ и закон сохранения импульса: $\partial \rho v_i / \partial t = -\partial \Pi_{ik} / \partial x_k$.

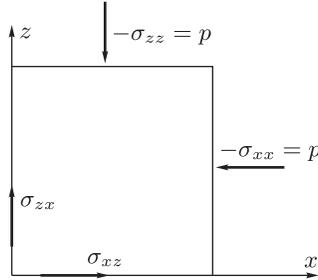
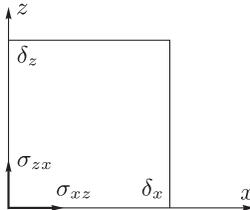


Рис. 1.10. Компоненты тензора напряжений.

Чтобы избежать бесконечных угловых ускорений, тензор напряжений должен быть симметричным: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Это следует из рассмотрения момента сил, действующих на инфинитезимальный элемент с размерами $\delta x, \delta y, \delta z$, по отношению к оси в верхнем правом углу.



Несимметричный тензор напряжений привел бы к ненулевому моменту сил $(\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) \delta x \delta y \delta z$, равному производной по времени от момента импульса, который, в свою очередь, равен произведению момента инерции $\rho \delta x \delta y \delta z [(\delta x)^2 + (\delta z)^2]$ и угловой скорости Ω :

$$(\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) \delta x \delta y \delta z = \rho \delta x \delta y \delta z [(\delta x)^2 + (\delta z)^2] \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Как видно, чтобы избежать $\partial \Omega / \partial t \rightarrow \infty$ при $(\delta x)^2 + (\delta z)^2 \rightarrow 0$, следует полагать $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$.

Чтобы связать силу трения σ' со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, заметим, что $\sigma' = 0$ для однородного течения. Следовательно, σ' должен определяться пространственными производными поля скорости и должен исчезать вместе

с тензором производных скорости $\partial v_i / \partial x_k$. Это утверждение не столь очевидно, как может показаться. Действительно, если имеется градиент какой-нибудь величины (тепла, концентрации растворенного вещества типа солености и т. д.), молекулярное движение должно приводить к потоку этой величины, пропорциональному ее градиенту. Мы однако же утверждаем, что обусловленный молекулярным движением поток импульса пропорционален градиенту не самого импульса, а скорости. Это значит, в частности, что однородно движущаяся жидкость с неоднородной плотностью не должна испытывать внутреннего трения. Иными словами, мы полагаем, что, каковы бы ни были неоднородности, покоящаяся жидкость находилась в термодинамическом равновесии, так что потоки возникают только за счет неоднородности течения.

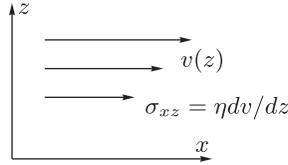
Предполагая эту неоднородность малой по сравнению с изменениями скорости на молекулярном уровне, можно *предположить*, что тензор напряжений линейно связан с тензором производных скорости (Ньютон, 1687). Жидкости, обладающие этим свойством, называются ньютоновскими. Неньютоновские жидкости обычно обладают сложной молекулярной структурой, например, содержат длинные молекулярные цепи, делающие связь тензоров нелинейной даже для небольших деформаций, или резиноподобные жидкости, где силы зависят от истории течения. Для ньютоновских жидкостей, чтобы связать два тензора второго ранга σ'_{ij} и $\partial v_i / \partial x_j$, вообще говоря, нужен тензор четвертого ранга. Заметим, однако, что завихренность (т. е. антисимметричная часть $\partial v_i / \partial x_j$) не должна давать никакого вклада, поскольку она соответствует вращению элемента жидкости как целого без проскальзывания слоев. Остается связать симметричные тензоры напряжений σ'_{ij} и деформаций $S_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$. В изотропной среде тензор содержит только дельта-функции¹⁴: $\eta_{ijkl} = \eta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \mu\delta_{ij}\delta_{kl}$. Иными словами, изотропия требует, чтобы главные оси тензоров σ'_{ij} и S_{ij} совпали, так что от пугающего тензора четвертого ранга остаются только две константы η и μ :

$$\sigma'_{ij} = \eta(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) + \mu\delta_{ij}\partial v_l / \partial x_l. \quad (1.44)$$

Заметим, что в неоднородном течении вязкость не только обеспечивает сдвиговые напряжения, но и нарушает равенство нормальных компонент.

По размерности $[\eta] = [\mu] = \text{г см}^{-1} \text{с}^{-1}$. Знак η нетрудно установить, рассмотрев простое сдвиговое течение, показанное на рисунке, помня, что силы прилагаются к рассматриваемому элементу жидкости: $\sigma_{xz} = \eta dv_x / dz$ — это x -компонента силы, с которой верхний слой жидкости

действует на нижний и которая должна быть положительна, что требует $\eta > 0$.



1.4.3. Уравнение Навье–Стокса

Поставим σ' в уравнение сохранения импульса:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[p \delta_{ik} - \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \mu \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right]. \quad (1.45)$$

Вязкость определяется термодинамическим состоянием среды, задаваемым p, ρ . Когда p, ρ неоднородны в пространстве, то же должно иметь место для $\eta(p, \rho)$ и $\mu(p, \rho)$. Мы, однако, последовательно полагаем вариации p, ρ малыми и будем считать η, μ постоянными, поскольку они и так уже стоят в качестве коэффициентов при членах с производными, учитывающими пространственные вариации. Таким образом, мы получаем уравнение Навье–Стокса¹⁵:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (1.46)$$

За исключением случая разреженных газов не удается вывести это уравнение из кинетического описания среды. Впрочем, это всего лишь означает невозможность количественно выразить η и μ через свойства материала, общий вид уравнения сомнений не вызывает. Можно *оценить* вязкость газа, заметив, что молекулы с тепловой скоростью v_T дают поток nv_T ; молекулы массы m , приходящие из слоя толщины порядка длины свободного пробега l_m , имеют разброс скоростей $l \nabla u$, что дает поток импульса $mnv_T l_m \nabla u \simeq \eta \nabla u$ через плоскость, перпендикулярную градиенту скорости (напомним, что даже если имеется градиент концентрации, он не принимается во внимание). Следовательно, $\eta \simeq mnv_T l_m = \rho v_T l_m$. Очевидно, что эта оценка имеет смысл, только если скорость меняется на масштабах намного превосходящих длину свободного пробега.¹⁶ Эту длину можно выразить через сечение рассеяния σ : $l_m = 1/n\sigma$. Вязкость газов $\eta \simeq mv_T/\sigma$

оказывается независимой от плотности и давления при заданной температуре. Тепловая скорость молекул растет с ростом температуры, так что вязкость газа увеличивается с температурой при постоянной плотности. Сечение рассеяния определяется силой взаимодействия: чем оно сильнее, тем больше σ , короче l_m и меньше вязкость. Сильно взаимодействующая кварк-глюонная плазма (в ускорителях и сразу после Большого Взрыва) является почти идеальной жидкостью.

Определим также кинематическую вязкость $\nu = \eta/\rho$, оценка которой для газа соответственно $\nu \simeq v_T l_m$. Эта оценка не имеет смысла для жидкостей, поскольку в них сдвиговые напряжения обеспечиваются межмолекулярными силами, а не молекулами, перелетающими с места на место. Чем сильнее взаимодействие, тем выше вязкость жидкости. При увеличении температуры, молекулы движутся быстрее и взаимодействуют слабее, уменьшая напряжения, так что ν обычно убывает с температурой, что заметно по маслу на сковородке. Охлаждая жидкость до точки замерзания, мы обращаем вязкость в бесконечность (на наших временах наблюдения).

Сравним наиболее знакомые нам жидкость и газ. При комнатной температуре воздух имеет значение $\nu = 0.15 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ и является в 15 раз более вязким (кинематически), чем вода, у которой $\nu = 0.01 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$. Это значит, например, что локализованный вихрь расплывается в воздухе в 15 раз быстрее, чем в воде (см. также задачи 1.9 и 1.15).

Уравнение Навье–Стокса содержит пространственные производные второго порядка, т. е. степени выше, чем уравнение Эйлера, так что нам нужно сформулировать дополнительные граничные условия. Раз уж мы учли (в первом исчезающем приближении) силы между слоями жидкости, следует также учесть силы молекулярного притяжения между вязкой жидкостью и поверхностью твердого тела. Это притяжение приведет к тому, что слой жидкости прилипнет к поверхности, где следует положить $\mathbf{v} = 0$ (а не только $v_n = 0$, как для уравнения Эйлера).¹⁷ Граница жидкости с вакуумом или очень разреженным газом не способна поддерживать вязкие напряжения, что означает гранусловие свободной границы $\partial v_l / \partial x_n = 0$. Решения уравнения Эйлера, вообще говоря, не удовлетворяют ни условию прилипания, ни условию свободной границы. Это означает, что даже очень маленькая вязкость должна играть роль вблизи поверхности.

Вязкость добавляет слагаемое к потоку импульса, но (1.45) и (1.46) по-прежнему имеют форму уравнения непрерывности и сохраняют полный импульс. Однако вязкое трение между слоями жидкости неизбежно ведет к потерям энергии. Рассмотрим, например, вязкую несжимаемую жидкость

с $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и вычислим скорость изменения энергии в точке:

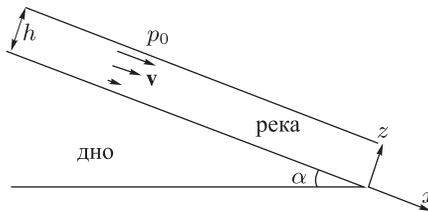
$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} &= -\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - (\mathbf{v} \cdot \sigma') \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Наличие вязкости привело к потоку импульса σ' , сопровождаемого переносом энергии $\mathbf{v} \cdot \sigma'$ и потерями энергии, которые описываются последним членом. Из-за этого члена уравнение не имеет вида уравнения непрерывности и полная энергия не сохраняется, что ясно после интегрирования по объему:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = - \frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dV \\ &= -\eta \int \omega^2 dV < 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Последнее равенство следует из $\omega^2 = (\epsilon_{ijk} \partial_j v_k)^2 = (\partial_j v_k)^2 - \partial_k (v_j \partial_j v_k)$, что, в свою очередь, обусловлено $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ и $\partial_i v_i = 0$. Поскольку $\eta > 0$, вязкость действительно отвечает за потери энергии. Как видно, диссипация энергии в объеме связана с завихренностью, поскольку Лапласиан скорости потенциального течения равен нулю, а с ним и вязкая сила (об этом подробнее будет в параграфе 3.1.2).

Уравнение Навье–Стокса является нелинейным уравнением в частных производных второго порядка. Стационарных его решений известно немного. Проще всего найти решения для таких геометрий течения, где $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$, так что уравнение становится эффективно линейным.



Например, симметрия может предписывать скорости не меняться вдоль себя, как для течения вдоль плоскости, которое мы сейчас и рассмотрим как

модель реки. Вследствие симметрии течение может зависеть только от z . Стационарное уравнение Навье–Стокса при наличии силы тяжести имеет вид

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} = 0,$$

а проекции на оси z и x соответственно —

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} + \rho g \cos \alpha &= 0, \\ \eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho g \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Граничное условие на дне — $v(0) = 0$. Граничное условие на свободной поверхности заключается в требовании, чтобы силы были нормальны и уравновешены давлением: $\sigma_{xz}(h) = \eta dv(h)/dz = 0$ и $\sigma_{zz}(h) = -p(h) = -p_0$. Решение имеет вид

$$p(z) = p_0 + \rho g(h - z) \cos \alpha, \quad v(z) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z(2h - z). \quad (1.49)$$

Посмотрим, насколько оно соответствует реальности. Возьмем воду с кинематической вязкостью $\nu = \eta/\rho = 10^{-2}$ см²/с. Для дождевой лужи с толщиной $h = 1$ мм на склоне $\alpha \sim 10^{-2}$ получаем разумный ответ: $v \sim 5$ см/с. Для медленной равнинной реки типа Волги,¹⁸ $h \simeq 10$ м и $\alpha \simeq \simeq 0.3$ км/3000 км $\simeq 10^{-4}$, получим абсурдную величину $v(h) \simeq 100$ км/с (причина того, что мы промахнулись на много порядков, в том, что реальные реки все турбулентны, как обсуждается ниже в параграфе 2.2.3). В чем же причина такого различия реки и лужи? Чтобы ответить на этот вопрос, надо научиться характеризовать течения безразмерным параметром.

1.4.4. Закон подобия

Важные заключения о свойствах течений можно получить из соображений размерности. Стационарное обтекание тела несжимаемой жидкостью, описывается уравнением

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(p/\rho) + \nu \Delta \mathbf{v}$$

и граничными условиями $\mathbf{v}(\infty) = \mathbf{u}$ и $\mathbf{v} = 0$ на поверхности тела. Для данной формы тела как \mathbf{v} , так и p/ρ являются функциями координат \mathbf{r} и трех

величин: u, ν и размера тела L . Из этих трех величин можно составить один безразмерный параметр, называемый числом Рейнольдса:

$$\text{Re} = uL/\nu. \quad (1.50)$$

Это самый важный параметр в этой книге, поскольку он определяет отношение нелинейного инерционного члена $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ к вязкому члену $\nu\Delta\mathbf{v}$ в уравнении Навье–Стокса. Вследствие того, что кинематическая вязкость газа есть произведение тепловой скорости на длину свободного пробега, число Рейнольдса может быть записано как

$$\text{Re} = uL/v_T l_m.$$

В рамках подхода сплошной среды $L \gg l_m$, который мы только и рассматриваем здесь, Re может быть как большим, так и маленьким в зависимости от отношения $u/v_T \simeq u/c$.

Обезразмеренная скорость может быть функцией только безразмерных переменных: $\mathbf{v} = u\mathbf{f}(\mathbf{r}/L, \text{Re})$ — это соотношение выглядит одинаково в любой системе единиц. Течения, соответствующие одному и тому же Re могут быть получены одно из другого просто сменой единицы измерения \mathbf{v} и r ; такие течения называются подобными (Рейнольдс, 1883). Таким образом, $p/\rho = u^2\varphi(\mathbf{r}/L, \text{Re})$. Для безразмерных величин, независимых от координат, определить следует только функцию от Re ; например, силы (подъемная и сопротивления) должны иметь вид $F = \rho u^2 L^2 f(\text{Re})$. Закон подобия широко используется в моделировании: чтобы измерить силу сопротивления для проектируемого корабля или самолета, строят маленькую модель, но обтекают или обдувают ее с большей скоростью или менее вязкой жидкостью.

Число Рейнольдса, характеризующее относительную роль инерции и трения, можно определить для всех типов течения, полагая, что u есть характерная скорость и L — масштаб ее изменения. Для течения по наклонной плоскости (1.49) как нелинейный член, так и число Рейнольдса тождественно равны нулю, поскольку $\mathbf{v} \perp \nabla\mathbf{v}$. Это вовсе не значит, что относительная роль инерции и трения одинакова для лужи и реки. Выясним, насколько нужно нарушить перпендикулярность скорости и направления ее изменения, чтобы стало $\text{Re} \simeq 1$. Такие нарушения всегда присутствуют в реальности, где дно не является идеально плоским. Можно было бы предположить, что для мелкой лужи неровности дна важнее, чем для глубокой реки. На самом деле наоборот. Обозначим $\pi/2 - \beta$ угол между \mathbf{v} и $\nabla\mathbf{v}$ и получим $\text{Re}(\beta) = v(h)h\beta/\nu \simeq g\alpha\beta h^3/\nu^2$. Для лужи $\text{Re}(\beta) \simeq 50\beta$, тогда как

для реки $\text{Re}(\beta) \simeq 10^{12}\beta$. Понятно, что решение (1.49), называемое ламинарным, может иметь смысл для лужи, но для реки оно будет существенно искажено даже очень маленькими неровностями дна, см. рисунок 1.11.

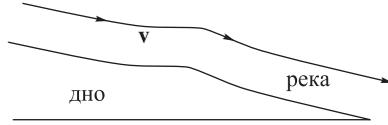


Рис. 1.11. Неровное дно реки приводит к изменению скорости вдоль движения, что ведет к ненулевому инерционному члену $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ в уравнении Навье–Стокса.

Наличие силы тяжести позволяет ввести другой безразмерный параметр, называемый числом Фруда: $Fr = u^2/Lg$; течения одинаковы для равных Re и Fr . Эти числа относятся к классу так называемых контрольных параметров, изменение которых приводит к качественным изменениям режима даже для фиксированных геометрии и граничных условий.¹⁹

Закон подобия является частным случаем так называемой π -теоремы. Предположим, что среди всех m переменных $\{b_1, \dots, b_m\}$ имеется только $k \leq m$ размерно независимых величин; это означает, что размерности $[b_{k+1}], \dots, [b_m]$ можно выразить через $[b_1], \dots, [b_k]$ выражениями типа $[b_{k+j}] = \prod_{l=1}^{l=k} [b_l]^{\beta_{jl}}$. Тогда все безразмерные величины должны выражаться через $m - k$ безразмерных переменных $\pi_1 = b_{k+1} / \prod_{l=1}^{l=k} b_l^{\beta_{1l}}, \dots, \pi_{m-k} = b_m / \prod_{l=1}^{l=k} b_l^{\beta_{m-k,l}}$. Например, рассматривавшиеся выше три величины u, ν, L имеют только две независимых размерности, сантиметры и секунды, что позволяет ввести один безразмерный параметр, число Рейнольдса.

1.5. Течение Стокса и след за телом

Вернемся к задаче об обтекании тела вооруженными новым знанием о внутреннем трении. Уравнение Навье–Стокса является нелинейным уравнением в частных производных, которое не удается решить аналитически даже в простейшем случае обтекания шара. Поступим так, как физики поступают в подобных случаях: сначала решим задачу в предельном случае очень маленького числа Рейнольдса и оттуда двинемся в сторону течений с большими Re . Напомним, что в разделе 1.3 мы потерпели сокрушительное поражение, пытаясь описать предел большого Re как идеальную жидкость. На этот раз, используя качественные соображения и данные на-

блюдений, мы поймем, что, когда вязкость становится исчезающе малой, ее эффект остается конечным. Для этого нам придется освоить новые понятия пограничного слоя и явления отрыва. Наградой нам будут разрешение парадоксов и формулы для силы сопротивления и подъемной силы.

1.5.1. Медленное движение

Пусть тело движется сквозь жидкость так, что число Рейнольдса $Re = uR/\nu$ очень мало. Покажем, что в этом случае действительно можно пренебречь инерцией. Если мы прекратим тянуть тело, то вязкое трение остановит его за время диффузии импульса R^2/ν , так что оно успеет сдвинуться по инерции на расстояние порядка $uR^2/\nu = R \cdot Re$, намного меньшее размера тела R . С формальной точки зрения пренебрежение инерцией означает отсутствие нелинейного члена $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ в уравнении Навье–Стокса. Это делает задачу линейной, так что скорость жидкости должна быть пропорциональна скорости на границе, т. е. скорости тела: $v \propto u$. Как вязкий тензор напряжений (1.44), так и давление также линейно связаны с u , так что это же должно быть справедливо для силы сопротивления:

$$F = \int \sigma d\mathbf{f} \simeq \int d\mathbf{f} \eta u/R \simeq 4\pi R^2 \eta u/R = 4\pi \eta u R.$$

Несмотря на простоту этой оценки, она совпадает с приведенным ниже точным ответом (1.54) с точностью до безразмерного множителя $3/2$. Как в мире Аристотеля, сила пропорциональна скорости для течений с малым числом Рейнольдса.

Чтобы двигать тело с $Re \simeq 1$ (или $1/6\pi$ для шара), нужна сила $F \sim \eta \nu = \eta^2/\rho$, которая замечательным образом не зависит ни от размера, ни от массы тела, т. е. одинакова для бактерии и корабля. Для воды $\eta^2/\rho \simeq 10^{-4}$ дин (10^{-9} Н).

Если мы вдобавок предположим, что никакие быстро-меняющиеся силы не приложены к жидкости, то весь инерционный член $\rho dv/dt = \rho[\partial v/\partial t + (v\nabla)v]$ пренебрежимо мал по сравнению с вязким членом:

$$\partial v/\partial t \simeq (v\nabla)v \simeq u^2/L \ll \nu \Delta v \simeq \nu u/L^2.$$

В этом пределе уравнение Навье–Стокса (1.46) превращается в уравнение Стокса:

$$\eta \Delta \mathbf{v} = \nabla p. \quad (1.51)$$

Можно также сказать, что это уравнение описывает течение без инерции, т. е. жидкости лишенной массы. В частности, оно описывает течения на масштабах от микрона и до нанометра, обычно соответствующие очень маленьким Re . Плавание тел с такими размерами весьма отличается от быстрого отталкивания воды назад, что мы делаем при конечных Re . Плавание можно определить как периодическое изменение формы с целью движения в жидкости. Во-первых, при малых Re нет инерции, так что диффузия импульса в жидкости мгновенна, и неважно, быстро или медленно меняется форма. Важно, *как* она меняется, т. е. плавание при малых Re является чисто геометрическим занятием. Во-вторых, линейная связь силы и скорости означает, что, обращая изменения формы (обращая силы, т. е. градиенты давления), мы вернемся в то же место, откуда начали. Следовательно, нужно менять форму периодически, но необратимо по времени, иными словами, двигаться по циклу в пространстве конфигураций. Именно это делают микроорганизмы, гоня волну вдоль своей поверхности. Каждая точка поверхности при этом может совершать колебание, форма которого обратима во времени; направление времени закодировано в фазовых сдвигах колебаний в разных точках. Например, сперматозоид движется, посылая волну вдоль хвоста.²⁰ Задачи 1.10 и 3.11 представляют другие примеры.

Видимо, простейший способ решения уравнения (1.51) — свести опять к уравнению Лапласа. Поскольку медленные вязкие течения практически всегда можно полагать несжимаемыми, мы можем использовать $div \mathbf{v} = 0$, подействовать оператором div на (1.51) и получить $\Delta p = 0$. Найдем решение этого уравнения для обтекания сферы, когда единственный вектор в задаче — это скорость \mathbf{u} . Соответствующее решение уравнения Лапласа для скалярной величины (на этот раз давления в отличие от потенциала в прошлой главе) — это опять диполь:

$$p = p_0 + \frac{c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r^2}.$$

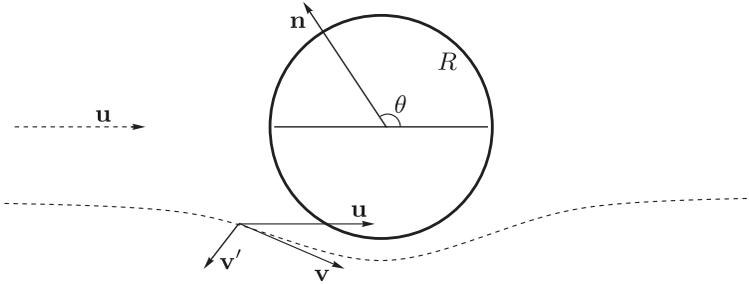
Действительно, равные по величине положительные и отрицательные изменения давления должны производиться течением на поверхности сферы. Дифференцируя и подставляя в (1.51), получим неоднородное уравнение на скорость, которая соответственно должна убывать как первая степень расстояния. Такое решение, удовлетворяющее также несжимаемости, имеет вид $\mathbf{v} - \mathbf{u} = c[\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})]/2\eta r$. Однако ни при каком c такое решение не удовлетворяет граничному условию на поверхности сферы. Следовательно, необходимо добавить однородное решение уравнения Лапласа, т. е. потен-

циальную часть:

$$\mathbf{v} = c \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{2\eta r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3}. \quad (1.52)$$

Граничное условие $\mathbf{v}(R) = \mathbf{u}$ дает \mathbf{u} -компоненту $1 + c/2\eta R - b/R^3 = 0$ и \mathbf{n} -компоненту $c/2\eta R + 3b/R^3 = 0$, так что $c = -3\eta R/2$ и $b = R^3/4$. Как и ожидалось, $c < 0$, т. е. жидкость течет в сторону убывания давления. В сферических координатах в системе отсчета сферы имеем

$$\begin{aligned} v_r &= u \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right), \\ v_\theta &= -u \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right). \end{aligned} \quad (1.53)$$



Альтернативный способ сведения уравнения (1.51) к уравнению Лапласа — взять от него ротор. Вычисляя ротор скорости, получим завихренность тоже как поле диполя:

$$\Delta \operatorname{curl} \mathbf{v} = \Delta \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = c' \frac{[\mathbf{u} \times \mathbf{n}]}{r^2}.$$

Можно найти $c' = -3R/2$, используя $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{v} = (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{div} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v}$, чтобы связать давление и завихренность очень вязких течений: $\nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} = -\eta \operatorname{curl} \omega$. В двух измерениях, это векторное уравнение дает два условия Коши–Римана: $\partial_x p = \eta \partial_y \omega$, $\partial_y p = -\eta \partial_x \omega$, показывая интимную связь давления и завихренности, которые являются вещественной и мнимой частью аналитической функции.

Формула Стокса для силы сопротивления. Сила, действующая на единицу поверхности, — это поток импульса через нее. На твердой поверхности $\mathbf{v} = 0$ и $F_i = -\sigma_{ik}n_k = pn_i - \sigma'_{ik}n_k$. В случае сферы единственная отличная от нуля компонента направлена вдоль \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} F_x &= \int (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df = \\ &= (3\eta u/2R) \int df = 6\pi R\eta u. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Здесь мы подставили $\sigma'_{rr} = 2\eta \partial v_r / \partial r = 0$ at $r = R$ и

$$\begin{aligned} p(R) &= -\frac{3\eta u}{2R} \cos \theta, \\ \sigma'_{r\theta}(R) &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{3\eta u}{2R} \sin \theta. \end{aligned}$$

Вязкая сила трения направлена по касательной, а сила давления — по нормали к поверхности. Вертикальные компоненты этих двух сил сокращаются в каждой точке, поскольку сфера толкает жидкость строго вперед и результирующая сила горизонтальна. Интересно, что силы трения и давления складываются в горизонтальную силу $3\eta u/2R$, которая не зависит от угла θ , т. е. одинакова для всех точек на сфере. Стоксова сила определяется динамической вязкостью и не зависит от плотности жидкости. При данной η плотность задает число Рейнольдса $Re = \rho u R / \eta$, оценивающее роль инерции; формула (1.54) применима примерно до $Re \simeq 0.5$.

Мы теперь можем обобщить уравнение движения частицы в потоке (1.33), добавив вязкую силу. Рассматривая для простоты тяжелую сферическую частицу радиуса a and пренебрегая инерцией окружающего газа, свяжем скорость частицы \mathbf{u} и скорость газа \mathbf{v} :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{\tau}, \quad \tau = \frac{2\rho_0 a^2}{9\rho\nu}. \quad (1.55)$$

Формальное решение этого уравнения

$$\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t'-t)/\tau} \mathbf{v}(t') dt', \quad (1.56)$$

выражается через скорость газа в системе отсчета частицы. Решение показывает, что движение частицы запаздывает на время τ , называемое Стоксовским. Для каплей дождя миллиметрового размера $\tau \simeq 10 \text{ sec}$, а для размером в микрон в миллион раз меньше.

Решение граничной задачи для уравнения Лапласа является единственным. Так что, если градиент давления зануляется на бесконечности, то источник, создающий постоянное давление на своей поверхности, порождает течение с давлением постоянным во всем пространстве. Аналогично, если завихренность стремится к нулю на бесконечности, то она должна порождаться источником, чтобы быть отличной от нуля. В частности, точечный источник производит радиальное потенциальное течение с постоянным давлением (см. задачу 1.16). Это также справедливо для произвольной комбинации точечных источников и стоков в силу линейности уравнения Стокса. В двух измерениях, комплексный анализ гарантирует, что течения с нулевым градиентом давления имеют нулевую завихренность и наоборот.

1.5.2. Пограничный слой и явление отрыва

Стокс оставил нам также парадокс: уравнение (1.51) не имеет конечных решения для обтекания тела в двух измерениях, где дипольное решение уравнения Лапласа должно убывать как $1/r$. Если давление и завихренность убывают как $1/r$, то скорость логарифмически *растет* с расстоянием (а не выходит на постоянное значение как в 3d). Сам Стокс верил, что длинный цилиндр, движущийся сквозь вязкую жидкость, «постоянно увеличивает количество жидкости, вовлекаемой в движение». Рэлея позже заметил, что для течений Стокса вязкий член убывает с расстоянием быстрее, чем инерционный член, который должен быть учтен достаточно далеко от обтекаемого тела. Иными словами, решения уравнения (1.51), не могут простираются до сколь угодно больших расстояний, поскольку наше предположение о малости числа Рейнольдса требует в любой размерности

$$v\nabla v \simeq u^2 R/r^2 \ll \nu \Delta v \simeq \nu u R^2/r^3, \quad (1.57)$$

так что уравнение Стокса справедливо при $r \ll \nu/u$. Это позволяет назвать ν/u толщиной вязкого пограничного слоя.

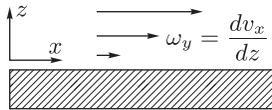
Существование пограничного слоя разрешает парадокс Стокса: инерция останавливает рост возмущения скорости с расстоянием при $r \simeq \nu/u$. Если однородное течение на бесконечности имеет скорость u , то таков же

должен быть порядок скорости на границе пограничного слоя вокруг обтекаемого цилиндра: $v(r = \nu/u) \simeq u$. Внутри пограничного слоя, при $R \leq r < \nu/u$, решение Стокса имеет вид

$$v(r) \simeq u \frac{\log(r/R)}{\log(\nu/uR)}. \quad (1.58)$$

Это позволяет понять еще одну особенность двумерного случая, в котором сила сопротивления на единицу длины цилиндра f должна быть пропорциональна вязкости и скорости. Единственная возможная комбинация с правильной размерностью есть $\rho u \nu$, абсурдно независимая от размера R . Естественно ожидать, что сила сопротивления увеличивается с R (и стремится к нулю при $R \rightarrow 0$), так что безразмерная сила $f/\rho u \nu$ должна стремиться к нулю при $\text{Re} = uR/\nu \rightarrow 0$. Действительно, вязкая сила определяется градиентом скорости жидкости на поверхности цилиндра и согласно (1.58) зависит логарифмически от размера: $f \simeq \rho u \nu / \log \text{Re}^{-1}$, то есть сила сопротивления мала при малых Re . Нелинейная зависимость силы от вязкости в двух измерениях показывает, что как бы ни было мало Re , невозможно пренебречь инерцией и полагать жидкость безмассовой, когда каждый элемент жидкости бесконечен в третьем измерении.

Как в двух, так и в трех измерениях течение Стокса имеет место внутри пограничного слоя при условии, что толщина слоя много больше размера тела. Каково же течение снаружи, т. е. при $r > \nu/u$? Является ли оно близким к потенциальному? Ответ утвердительный только для очень маленьких Re . Для конечных Re позади тела возникает бесконечная область, называемая *следом*, где невозможно пренебречь вязкостью ни на каком расстоянии от тела. Причина в том, что вязкость приводит к генерации завихренности внутри пограничного слоя.



При малых Re завихренность диффузионно расплывается во все стороны от тела благодаря доминирующей вязкости. Приближение Стокса $\omega \propto [\mathbf{u} \times \mathbf{n}]/r^2$ как раз и соответствует расплыванию завихренности, симметричному по и против движения. Для конечных Re производство завихренности трением сопровождается инерционным переносом; интуитивно понятно, что течение перед телом должно отличаться от течением за телом,

поскольку тело оставляет завихренность за собой. Должна существовать область позади тела, называемая следом, которую достигают линии тока, прошедшие непосредственно рядом с обтекаемым телом. Течение внутри следа должно быть существенно вихревым. А те линии тока, что проходят вдали от тела, соответствуют почти потенциальному течению.

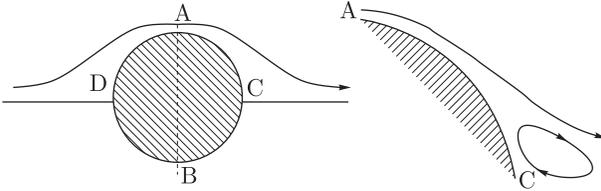
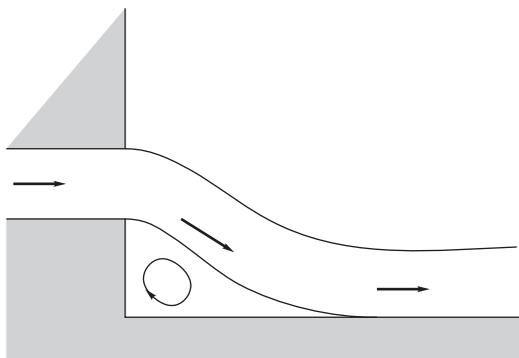


Рис. 1.12. Симметричные линии тока для течения идеальной жидкости (слева), возникновение отрыва и вихря рециркуляции в вязкой жидкости (справа).

Разберемся в механизме возникновения следа, который обусловлен так называемым явлением отрыва (Прандтль, 1905). Рассмотрим, к примеру, обтекание цилиндра, изображенное на рисунке 1.12. Течение идеальной жидкости симметрично относительно плоскости АВ. D является точкой остановки, так что на участке DA частицы жидкости ускоряются и давление падает, согласно теореме Бернулли. Наоборот, на участке AC каждая частица жидкости движется против градиента давления. Покажем, что малая вязкость мало изменит распределение давления в пограничном слое. Действительно, при малой вязкости слой узок и может рассматриваться как локально плоский. Обозначим u скорость непосредственно снаружи от пограничного слоя. Внутри слоя, при $z < \nu/u$, граничные условия прилипания предписывает $v_x \simeq u^2 z / \nu$ и $\partial v_x / \partial x \simeq u^2 z / \nu R \simeq \partial v_z / \partial z$. Нормальная компонента скорости тогда $v_z \simeq u^2 z^2 / \nu R$, что дает оценку градиента давления $\partial p / \partial z = -\rho(v\nabla)v - \eta\Delta v_z \simeq \rho u^2 / R$. Умножая градиент на толщину пограничного слоя ν/u , получим перепад давления поперек слоя $\rho u^2 / Re$, малый при большом Re . Иными словами, давление внутри узкого пограничного слоя практически равно давлению вне его в области потенциального течения. Однако, скорости частиц жидкости, достигших точек А и В, будут в вязкой жидкости ниже, чем в идеальной, из-за вязкого трения в пограничном слое. Вследствие этого этим частицам не хватит энергии преодолеть градиент давления далее по течению и достигнуть точки С, двигаясь внутри пограничного слоя. На интервале между новой точкой остановки и точкой С градиент давления ускоряет частицы от С вверх, что приво-

дит к отрыву пограничного слоя²¹ и возникновению вихря рециркуляции. Похожий механизм отвечает за появление вихрей в углах,²² как показано в конце параграфа 1.2.4.

Обратив отрывное течение, получим присоединение: струи имеют тенденцию притягиваться к стенам и сливаться друг с другом. Рассмотрим сначала струю в безграничной жидкости и обозначим ее скорость u . Поток импульса через любое сечение одинаков: $\int u^2 df = \text{const}$. А вот поток энергии $\int u^3 df$ убывает вдоль струи из-за вязкого трения. Это означает, что поток массы жидкости $\int u df$ должен возрасти, т. е. жидкость захватывается струей.²³ Когда струя имеет стену (или другую струю) с одной стороны, то с этой стороны захватывает меньше жидкости, вследствие чего отклоняется в эту сторону вплоть до присоединения, как показано на рисунке. Струя затем может оставаться присоединенной, следуя изгибам поверхности.



прилипающая к стене струя

В частности, слияние струй объясняет бронебойное действие кумулятивных зарядов, которые имеют коническую выемку, ограниченную слоем металла и окруженную взрывчаткой. Взрыв превращает металл в жидкость, причем почти идеальную, поскольку давление так велико, что тангенциальными силами можно пренебречь (см. задачу 1.18). Жидкий металл движется в направлении оси, где создает кумулятивную струю с большой плотностью импульса (Лаврентьев, 1947; Тэйлор, 1948), см. рисунок 1.13 и задачу 1.15. Подобным же образом, когда дождевая капля падает на воду и создает ямку, вертикальное течение, стремящееся скорее заполнить пустоту, порождает струю, выстреливающую вверх, как показано на рисунке 1.14.



Рис. 1.13. Схема течения в кумулятивной струе в системе отсчета, движущейся вместе с конусом.

1.5.3. Превращения картины течения

На примере обтекания цилиндра, опишем вкратце, как меняется картина течения с ростом числа Рейнольдса. Поток максимально симметричен при $Re \ll 1$, когда он стационарен, обладает точной симметрией верха и низа и приближенной (с точностью порядка Re) симметрией левой и правой (набегающей и уходящей) частей потока. Отрыв пограничного слоя и возникновение вихрей приводят к изменению топологии потока примерно при $Re \simeq 5$. Первая потеря точной симметрии происходит при $Re \simeq 40$, когда течение становится периодическим по времени. Это происходит из-за того, что вихри рециркуляции не успевают достаточно расплыться, прежде чем оторваться от тела и унести с потоком, а новые вихри возникают на их месте. Симметрии относительно отражения верх-низ и непрерывного сдвига по времени нарушены для периодического течения с отрывом вихрей и заменены комбинированной симметрией отражения и сдвига по времени на пол периода. Отрыв вихрей объясняет многие удивительные явления нарушения симметрии, такие как, например, всплывание пузырька колы или шампанского не по прямой, а по спирали или зигзагом.²⁴ При обтекании тела это приводит к двойной дорожке вихрей, носящей имя Кармана²⁵ позади тела, как показано на рисунке 1.15.

При еще бóльших числах Рейнольдса вихри становятся неустойчивыми, что приводит к нерегулярному (турбулентному) потоку вниз по течению, как показано на рисунке 1.16.²⁶ Турбулентность трехмерна, так что трансляционная инвариантность вдоль цилиндра также нарушена. Чем вы-



Рис. 1.14. Струя, выстреливающая вверх после падения капли. Вверху — начало формирования струи; внизу — сформировавшаяся струя.

ше Re , тем ближе подбирается начало турбулентной области к телу. При $Re \simeq 10^5$ турбулентность наконец достигает тела, что приводит к так называемому кризису сопротивления: турбулентный пограничный слой захватывает больше жидкости снаружи и обладает большим импульсом, вследствие чего отрывается ниже по течению, что уменьшает площадь следа и силу сопротивления.²⁷

1.5.4. Сила сопротивления и подъемная сила

Мы готовы наконец описать, как Природа разрешает парадоксы обратимости и Даламбера. Вернемся к рассмотренному в разделе 1.3 стационарному течению вдали от тела и свяжем его с силами, действующими на тело, используя новое знание о существовании следа (wake), см. рисунок 1.17. Вне следа и пограничного слоя течение является безвихревым. Для стацио-



Рис. 1.15. Вихревая дорожка Кармана позади цилиндра при $Re = 105$. Фотография взята из *J. Phys. Soc. Japan*, **20**, 1714 (1965).

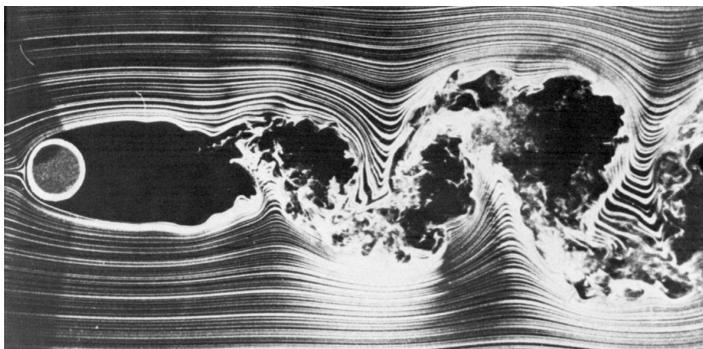


Рис. 1.16. Обтекание цилиндра при $Re = 10^4$. Фотография из [27].

нарного течения удобно связать силу с потоком импульса через замкнутую поверхность. Для дипольного потенциального течения $v \propto r^{-3}$ из раздела 1.3 поток импульса обращался в нуль при удалении от поверхности. Теперь след даст конечный вклад. Полный поток импульса, переносимого жидкостью через любую замкнутую поверхность, равен скорости изменения импульса внутри, который, в свою очередь, равен силе, действующей на тело:

$$F_i = \oint \Pi_{ik} df_k = \oint (p_0 + p') \delta_{ik} + \rho(u_i + v_i)(u_k + v_k) df_k. \quad (1.59)$$

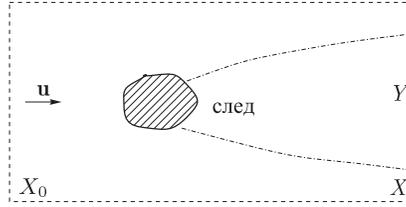


Рис. 1.17. Схема следа.

Сохранение массы дает $\rho \oint v_k df_k = 0$. Вдали от тела $v \ll u$ и можно пренебречь членами квадратичными по v :

$$F_i = \left(\iint_{X_0} - \iint_X \right) (p' \delta_{ix} + \rho v v_i) dy dz. \quad (1.60)$$

Сила сопротивления при наличии следа. Рассмотрим x -компоненту силы (1.60):

$$F_x = \left(\iint_{X_0} - \iint_X \right) (p' + \rho v v_x) dy dz.$$

В потенциальном течении вне следа выполняется теорема Бернулли $p + \rho |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2/2 = p_0 + \rho u^2/2$, что дает $p' \approx -\rho v v_x$, так что интеграл вне следа исчезает, как и должно быть. Внутри же следа давление приблизительно такое же (поскольку оно не меняется поперек почти прямых линий тока, как мы выяснили в § 1.5.2), однако v_x , как мы увидим, намного больше, чем снаружи, так что

$$F_x = -\rho u \iint_{\text{wake}} v_x dy dz. \quad (1.61)$$

Сила направлена вправо, т. е. положительна, поскольку v_x отрицательна. Заметим, что интеграл в (1.61) равен дефициту потока жидкости Q через сечение следа, т. е. разнице в потоках при наличии и отсутствии тела. Этот дефицит не зависит от x , что радикально меняет также потенциальное течение вне следа, которое теперь обязано скомпенсировать дефицит. Это значит, что интеграл $\int \mathbf{v} d\mathbf{f}$ вне следа должен быть независимым от r , что требует $v \propto r^{-2}$. Это соответствует потенциальному течению с источником, равным дефициту: $\phi = Q/r$ — аналог поля заряда в терминах электростатики. Мы выбросили такое решение в § 1.3, а сейчас видим, что достаточно

далеко от тела оно превышает дипольный вклад $\phi = \mathbf{A} \cdot \nabla(1/r)$, который мы получали в отсутствие следа.

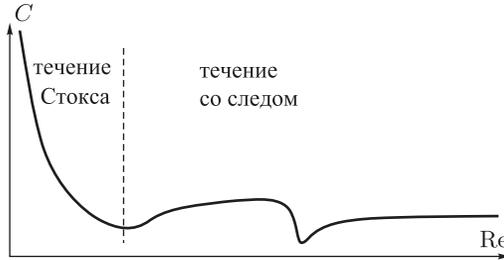


Рис. 1.18. Зависимость силы сопротивления от числа Рейнольдса.

След нарушает симметрию набегающей и уходящей частей потока, что разрешает парадоксы и приводит к ненулевой силе сопротивления в пределе исчезающей вязкости. Важно, что след бесконечен для стационарного обтекания, иначе тело с конечным следом можно было бы рассматривать как единое тело, что вернуло бы нас к парадоксам. Поведение безразмерного коэффициента сопротивления $C(\text{Re}) = F/\rho u^2 R^2$ показано на рисунке 1.18. Обратите внимание на кризис сопротивления, дающий минимум C . Чтобы понять, почему $C \rightarrow \text{const}$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$, и доказать (1.43), надо немало потрудиться и понять турбулентность, что описано в следующей главе.

Сопротивление связано с производством завихренности, поскольку след — это место её концентрации. Теперь мы можем оценить как плывет рыбка (понявшая это раньше нас), гоня волну вдоль тела: как замечено в § 1.2.4, малые колебания не производят завихренность, так что рыбка поддерживает амплитуду осцилляций малой вдоль тела, увеличивая ее к хвосту, колебания которого и толкают ее вперед за счет перпендикулярной движению хвоста силы, каковую мы сейчас и рассмотрим.

Подъемная сила — это компонента (1.60), перпендикулярная \mathbf{u} :

$$F_y = \rho u \left(\int_{X_0} - \int_X \right) v_y dy dz. \quad (1.62)$$

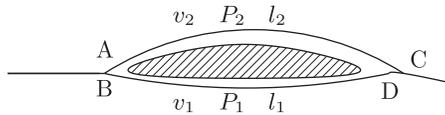
Она также определяется следом, без которого течение было бы потенциальным с $v_y = \partial\phi/\partial y$ и $v_z = \partial\phi/\partial z$, так что $\int v_y dy dz = \int v_z dy dz = 0$,

поскольку потенциал равен нулю на бесконечности. Формула (1.32) также показывает, что потенциальное течение не создает подъемной силы. Ни птицы, ни самолеты не смогли бы летать без трения и отрыва пограничного слоя. Рассмотрим подъемную силу крыла длинного в направлении z . Подъемная сила на единицу длины может быть выражена через циркуляцию скорости вокруг крыла. Действительно, добавляя и вычитая (исчезающие) интегралы от v_x вдоль линий $y = \pm \text{const}$, мы превратим (1.62) в

$$F_y = \rho u \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.63)$$

Циркуляция скорости по контуру равна потоку завихренности сквозь контур, что опять же обусловлено следом.

Для эффективного полета, крылья должны минимизировать сопротивление, пропорциональное площади следа, и максимизировать подъемную силу, пропорциональную циркуляции. Для этого крылья делаются тонкими, с толщиной h много меньше ширины l ; вдобавок передняя кромка делается закругленной, а задняя острой. Часто можно встретить простое описание подъемной силы крыла как результат неравенства $v_2 > v_1 \Rightarrow P_2 < P_1$. Это, по сути, верно и не противоречит вышеприведенному аргументу.



Дело в том, что циркуляция по замкнутому контуру ACDB не равна нулю: $v_2 l_2 > v_1 l_1$. Действительно, теорема Бернулли $P_2 - P_1 = \rho(v_1^2 - v_2^2)/2 = \rho(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)/2 \approx \rho(v_1 - v_2)u$ дает альтернативный вывод подъемной силы через циркуляцию: $\int (P_2 - P_1) dx \approx \rho u \int (v_1 - v_2) dx$. Однако, было бы неверно полагать, что $v_2 > v_1$ из-за $l_2 > l_1$ — на самом деле частицы жидкости A, B не встречаются на задней кромке, C сдвинуто по отношению к D. Это нетрудно понять, заметив, что поток ускоряется при поперечном сжатии, так что разность скоростей имеет горизонтальную компоненту пропорциональную толщине крыла h , т. е. малому параметру h/l . Разность же длин путей пропорциональна квадрату толщины, $l_2 - l_1 \simeq h^2/l$, так что верхняя часть потока достигает задней кромки раньше нижней для тонкого крыла. Ненулевая циркуляция вокруг поступательно движущегося тела требует наличия следа. Для тонкого крыла и след тонкий, как разрез, так

что ненулевая циркуляция означает скачок потенциала ϕ через след. Можно обобщить метод конформного потенциала из параграфа 1.2.4 для описания течений с циркуляцией, что требует использования логарифмических членов.²⁸

Заметим, что для наличия подъемной силы необходимо нарушение симметрии между противоположными направлениями, перпендикулярными движению. Сохранение импульса подсказывает также, что подъемная сила может быть выражена через отклонение телом уходящего потока по отношению к набегающему. Посмотрим на искривление потока с точки зрения распределения давления, которое должно убывать в сторону центра кривизны линий тока. Для крыла, паруса или киля, отклоняющего поток, давление должно убывать при удалении от его внутренней части в сторону центра кривизны и возрастать при удалении от его наружной части; поскольку давление вдали от тела везде одинаково, то оно меньше на внешней стороне и сила направлена наружу от центра кривизны.

Иметь ненулевую циркуляцию можно и без следа, просто за счет вращения. На вращающееся тело действует отклоняющая сила (Магнуса), также пропорциональная циркуляции, см. рисунок 1.19. Эта сила знакома всем бросавшим летающую тарелку или игравшим в мяч, от футболистов до теннисистов. Воздух движется быстрее относительно центра тела с той стороны, где поверхность движется в ту же сторону. Где скорость воздуха выше, там давление ниже, и наоборот на другой стороне. Результат — сила, перпендикулярная движению (как заметил Дж. Дж. Томсон, «шар следует за своим носом».) Можно грубо оценить величину силы Магнуса, взяв разность давлений по обе стороны,²⁹ что пропорционально скорости смещения u умноженной на частоту вращения Ω :

$$\Delta p \simeq \rho[(u + \Omega R)^2 - (u - \Omega R)^2]/2 = 2\rho u\Omega R. \quad (1.64)$$

Сила Магнуса используется крылатыми семенами для удаления от родительского дерева с помощью наложения вращения на падение; она также действует на квантовые вихри, движущиеся в сверхпроводниках и сверхтекучих жидкостях, см. задачу 1.11.

Заметим, что сила сопротивления меняет знак при обращении времени и течения, когда $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$, а подъемная и сила Магнуса — нет.

Мораль: существование следа учит нас, что малая вязкость меняет течение не только в пограничном слое, но и во всем пространстве, как внутри, так и снаружи следа. Физически завихренность производится в пограничном слое и переносится наружу. Завихренность расплывается при малых Re

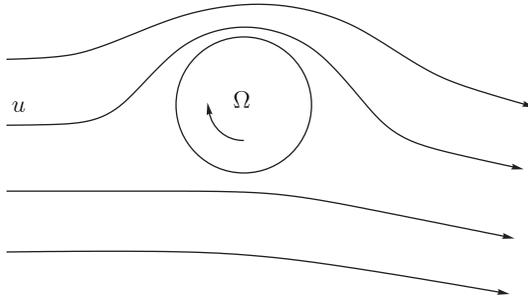


Рис. 1.19. Линии тока вокруг вращающегося тела.

и концентрируется в следе при больших Re . С другой стороны, даже для очень большой вязкости инерция доминирует достаточно далеко от тела.³⁰

Любопытно сравнить идеальную жидкость и сверхпроводник с точки зрения завихренности, проникающей в объем и делающей жизнь интересной. Одна очевидная разница в том, что завихренность непрерывна в классической и дискретна в квантовых жидкостях. Квант циркуляции \hbar/m имеет размерность кинематической вязкости. Интересно также сравнить уравнение Навье–Стокса $\mathbf{v}_t = \nu \Delta \mathbf{v} + \dots$ с уравнением Шредингера $\psi_t = i(\hbar/m)\Delta\psi + \dots$, где i делает член с Лапласианом бездиссипативным. Похожесть в том, что как $\nu\Delta$, так и $\hbar\Delta/m$ являются сингулярными возмущениями, поскольку вводят пространственные производные более высокого порядка и меняют граничные условия, оставляя аномалии, когда они стремятся к $+0$.

Задачи

- 1.1 Исходя из того, что сила, действующая на любую плоскость, строго перпендикулярна, докажите, что ее величина на единицу площади не зависит от направления (закон Паскаля).
- 1.2 Рассмотрите жидкость под действием собственного гравитационного потенциала ϕ , связанного с плотностью уравнением

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho,$$

где G — гравитационная постоянная. Опишите радиальное распределение давления для сферически симметричного статического равновесия

несжимаемой жидкости и идеального газа при постоянной температуре.

- 1.3 Найдите поток жидкости из маленького отверстия с вставленной в него цилиндрической трубкой (насадка Борда), как показано на рисунке 1.20, полагая известными h , S и ускорение силы тяжести g . Не соответствует ли такое отверстие предельному (минимальному или максимальному) значению коэффициента истечения S'/S ? Здесь S — площадь отверстия, а S' — площадь сечения струи в том месте, где сжатие прекращается.

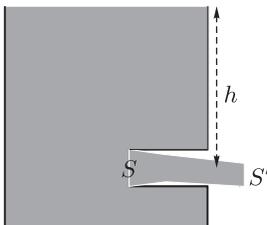


Рис. 1.20. Насадка Борда.

- 1.4 Докажите, что маленькая твердая частица (не инфинитезимальная точка) вращается с угловой частотой Ω , равной половине локальной завихренности $\omega = \text{curl } \vec{v}$ в той точке течения, где находится частица.
- 1.5 Имеется постоянно действующий источник на дне большого резервуара. Полагая течение потенциальным, найдите высоту максимального подъема поверхности жидкости для двух случаев:
- прямая узкая щель с потоком q (г/см с) на единицу длины;
 - точечный источник с потоком Q (г/с).
- Плотность жидкости ρ , глубина вдали от источника h . Ускорение свободного падения g .
- 1.6 Изобразите линии тока для потенциального невязкого обтекания сферы и для вязкого течения Стокса в двух системах координат: 1) в системе, где жидкость на бесконечности покоится; 2) в системе, движущейся вместе со сферой. Подсказка: поскольку обтекание сферы может рассматриваться как набор плоских течений, можно ввести функцию тока, как для двумерного течения. Если определить вектор, единственная компонента которого перпендикулярна плоскости течения и равна функции тока, то скорость есть ротор этого вектора, а линии тока являются линиями уровня функции тока.

- 1.7 Шар с плотностью ρ_0 на пружине колеблется с частотой ω_a . Этот же шар, подвешенный на нитке, качается с частотой ω_b . Как изменятся эти частоты, если осциллятор и маятник поместить в идеальную жидкость плотности ρ ? Какой будет эффект малой вязкости $\nu \ll \omega_{a,b} a^2$, где a — радиус шара, а ν — кинематическая вязкость?
- 1.8 Подводный взрыв высвободил энергию E и произвел воздушный пузырь, осциллирующий с периодом T , который полностью определяется E , статическим давлением p внутри жидкости и плотностью жидкости ρ . Найдите форму зависимости $T(E, p, \rho)$ с точностью до безразмерного численного множителя. Если вместо E известен начальный радиус пузыря a , можно ли определить зависимость $T(a, p, \rho)$?
- 1.9 При $t = 0$ прямая вихревая линия создана в вязкой жидкости. Ее поле скорости в цилиндрических координатах имеет следующий вид: $v_r = v_z = 0$, $v_\theta = \Gamma/2\pi r$, где Γ — некая константа. Найти завихренность $\omega(r, t)$ как функцию координат и времени и зависимость от времени полной завихренности $\int \omega(r)r dr$.
- 1.10 Чтобы лучше представить себе, каково плыть в меду, рассмотрите так называемого пловца Перселла, изображенного на рисунке 1.21. Пловец может независимо менять углы между центральным и крайними отрезками, тем самым меняя форму. Рассмотрите для простоты случай малого угла θ . Числа нумеруют последовательные формы. В положении 5 пловец вернулся в ту же форму, что была в положении 1, но при этом сдвинулся. В каком направлении? Каким образом осуществился выбор направления движения? Как смещение зависит от θ ?

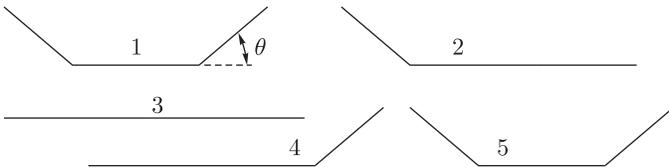


Рис. 1.21. Последовательные формы пловца.

- 1.11 Выполняя штрафной удар, футболисты высокого уровня используют силу Магнуса, чтобы послать мяч вокруг стенки защитников. Пренебрегая вертикальным движением, оцените горизонтальное смещение мяча, посланного со скоростью $v_0 = 30$ м/с и частотой вращения $\Omega = 10$ оборотов в секунду в сторону ворот с расстояния $L = 30$ метров.



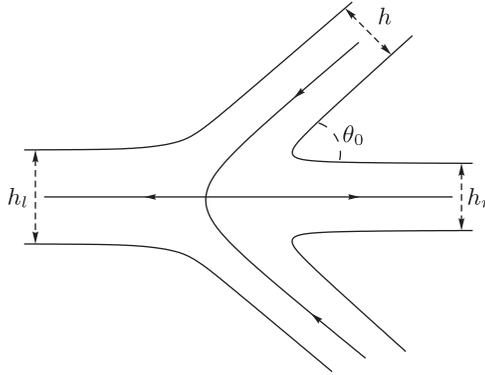
Рис. 1.22. Слева: обратите внимание, что парус удерживается против ветра, который, таким образом, дует девушке в спину. Справа: схемы расположения парусной доски и паруса по отношению к ветру. Копирайт фотографии: Paul Torp, www.dreamstime.com.

Согласно правилам ФИФА, радиус мяча — $R = 11$ см, а вес — $m = 450$ г. Плотность воздуха — $\rho = 10^{-3}$ г см $^{-3}$.

- 1.12 Как и полет в воздухе, движение в воде также использует подъемную (т. е. перпендикулярную движению) силу, действующую на парус и киль. То, что ветер всегда обеспечивает силу, перпендикулярную парусу, позволяет даже двигаться против ветра. Однако для того, чтобы стартовать и достичь максимальной скорости, наиболее оптимальным является ориентация килля перпендикулярно ветру, а паруса — под углом примерно в 45 градусов, как показано на рисунке 1.21. Объясните почему. Нарисуйте силы, действующие на парусную доску. Происходит ли движение в точности вдоль направления килля? Можно ли двигаться быстрее ветра?
- 1.13 Рассмотрите круглую каплю воды, падающую в воздухе.
- 1) Найдите, с какой скоростью падает в воздухе капля радиусом 0.01 мм. Плотности и вязкости воздуха и воды соответственно $\rho_a = 1.2 \cdot 10^{-3}$ г см $^{-3}$, $\rho_w = 1$ г см $^{-3}$ и $\eta_a = 1.8 \cdot 10^{-4}$ г с $^{-1}$ см $^{-1}$, $\eta_w = 0.01$ г с $^{-1}$ см $^{-1}$.
 - 2) Опишите закон движения изначально малой капли, падающей в насыщенном облаке и поглощающей весь пар на своем пути, так что скорость роста объема капли пропорциональна ее скорости и сечению.

Рассмотрите квазистационарное приближение, когда ускорение капли много меньше ускорения свободного падения g .

- 1.14 Рассмотрите плоские свободные струи в идеальной жидкости в геометрии, изображенной на рисунке. Найдите, как ширины разлетающихся струй зависят от угла $2\theta_0$ между налетающими струями.



- 1.15 Может ли вязкость остановить вращение?
- 1.16 Рассмотрите сферически симметричное течение с радиальной скоростью $v_r \propto r^{1-d}$, где d есть размерность пространства. Найдите завихренность, вязкий тензор напряжений и вязкую силу. Является ли такое течение диссипативным? Нужен ли градиент давления для поддержания такого течения?
- 1.17 Рассмотрим стационарное течение газа сквозь длинную трубу под действием градиента давления. Стенки трубы шероховатые, так что молекулы, отражаются от стенок изотропно, забывая налетающую скорость. Как зависит расход массы газа через сечение трубы от концентрации газа при постоянной температуре и постоянном градиенте давления? Подсказка: рассмотрите пределы низкой/высокой концентрации, когда радиус трубы соответственно много меньше/больше, чем длина свободного пробега для столкновений между молекулами.
- 1.18 Подземный заряд взрывается на глубине h , сильно превышающей исходный размер r_0 . Большинство типов почвы состоит из плотно упакованных твердых зерен кварца, слабо сцепленных между собой. Давление взрыва достаточно велико, чтобы разорвать тангенциальных напряжения между зернами и заставить землю течь. Пренебрегая тангенциальными напряжениями, доминируемое давлением течение мож-

но полагать идеальным и потенциальным. С другой стороны, давление недостаточно велико, чтобы деформировать зерна, так что течение можно полагать несжимаемым. Такое рассмотрение обычно применимо для давлений от десятков до тысяч атмосфер (1 атмосфера = 10^5 Н м⁻²). Область течения ограничена поверхностью, где скорость становится равной некоторой критической скорости c . Найдите радиус кратера, если энергия переданная течению E , а плотность почвы ρ .

ГЛАВА 2

Нестационарные течения

Удается удерживать стационарными только достаточно медленные течения, скорость которых много меньше скорости звука, а число Рейнольдса меньше единицы. При нарушении первого условия возбуждаются звук и ударные волны, а при нарушении второго условия течение теряет устойчивость и возникает турбулентность. Оба круга явлений описаны в этой главе.

Формальной причиной неустойчивости является нелинейность уравнений гидродинамики. Для несжимаемой жидкости единственным источником нелинейности является инерция. Мы увидим, как возмущение стационарного течения может нарастать из-за инерции, приводя к неустойчивости. Для больших значений числа Рейнольдса развитие неустойчивостей приводит к сильно флуктуирующему турбулентному течению.

Сжимаемость ведет к другому типу нестационарных явлений — волнам плотности, называемым звуком. Когда возмущение плотности мало, возмущение скорости много меньше скорости звука и волны могут рассматриваться в рамках линейной акустики. Мы начнем с линейного рассмотрения и опишем явления, возникающие из-за конечности скорости звука. Затем мы рассмотрим нелинейные акустические явления: ударные волны и акустическую турбулентность.

2.1. Неустойчивости

При больших Re большинство стационарных решений уравнения Навье–Стокса неустойчивы, что приводит к нестационарному течению, называемому турбулентностью.

2.1.1. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца

Простейшее течение однородно во всем пространстве. Следующее за ним по простоте — течение идеальной жидкости, однородное в полу-

пространстве и параллельные границе. Физически оно соответствует относительному скольжению двух слоев жидкости и есть грубое приближение к описанию границ следа и сдвиговых течений. Математически тангенциальный разрыв скорости есть формальное стационарное решение уравнения Эйлера. Это простое стационарное решение неустойчиво по отношению к простейшей неустойчивости, описанной Гельмгольцом (1868) и Кельвином (1871). Динамику этой неустойчивости нетрудно понять, глядя на рисунок 2.1, где «+» и «-» означают соответственно рост или убывание скорости и давления, вызванные модуляцией поверхности. У части границы, сдвинувшейся в сторону неподвижной области, скорость ниже и давление выше, чем у части, сдвинувшейся в сторону течения. Такое распределение давления еще более увеличивает модуляцию поверхности.

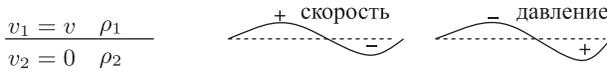


Рис. 2.1. Тангенциальный разрыв скорости (слева) и физика неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (справа).

Возмущения \mathbf{v}' и p' удовлетворяют системе уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = -\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Действие оператора дивергенции на второе уравнение дает $\Delta p' = 0$. Это означает, что нормальные моды имеют следующий вид

$$p'_1 = \exp[i(kx - \Omega t) - kz], \\ v'_{1z} = -ikp'_1/\rho_1(kv - \Omega).$$

Действительно, решения уравнения Лапласа, периодические в одном направлении, должны быть экспоненциальными в другом направлении.

Чтобы связать значения сверху (с индексом 1) со значениями внизу (с индексом 2), введем локальное отклонение поверхности $\zeta(x, t)$, производная по времени которого является z -компонентой скорости:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v'_z, \quad (2.1)$$

так что $v'_z = i\zeta(kv - \Omega)$ и $p'_1 = -\zeta\rho_1(kv - \Omega)^2/k$. С другой стороны, подобным же образом выразим $p'_2 = \zeta\rho_2\Omega^2/k$. Давление должно быть непре-

рывным на границе:

$$\rho_1(kv - \Omega)^2 = -\rho_2\Omega^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega = kv \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (2.2)$$

Положительный инкремент неустойчивости $\text{Im}\Omega$ означает экспоненциальный рост возмущений, т. е. неустойчивость.¹ Самая большая скорость роста соответствует самому большому возможному волновому числу. В реальности переходный слой, где скорость возрастает от нуля до v , имеет некую конечную толщину δ , так что наш подход справедлив для $k\delta \ll 1$.



Рис. 2.2. Цепочка вихрей неустойчива относительно смещений, показанных прямыми стрелками.

Дополнительный подход к пониманию физики неустойчивости Кельвина–Гельмгольца представляет рассмотрение завихренности. В невозмущенном течении завихренность $\partial v_x / \partial z$ сконцентрирована в переходном слое, который вследствие этого называется вихревым слоем (или вихревой поверхностью, если $\delta \rightarrow 0$). Удобно рассмотреть дискретную версию вихревого слоя как цепочку вихрей, изображенную на рисунке 2.2. Такая бесконечная цепочка является стационарной, поскольку симметрия обеспечивает сокращение скоростей, наведенных в центре данного вихря всеми остальными вихрями. Небольшие смещения, показанные прямыми стрелками на рисунке 2.2 нарушат симметрию и приведут к неустойчивости цепочки и распаду ее на пары вихрей, кружащихся вокруг друг друга. Это круговое движение должно приводить к тому, что изначально синусоидальное возмущение вырастет и закрутится в спираль на нелинейной стадии эволюции, как показано на рисунке 2.3, полученном экспериментально. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца часто наблюдается в атмосфере в виде волнистых облаков, как показано на рисунке 2.4; подобные же волны наблюдаются на песчаных дюнах. Эта же неустойчивость, видимо, отчасти отвечает за атмосферную турбулентность, не связанную с конвекцией в облаках (clear air turbulence). Многочисленные проявления этой неустойчивости известны в астрофизике, от границы между солнечным ветром и земной атмосферой до границ галактических струй.

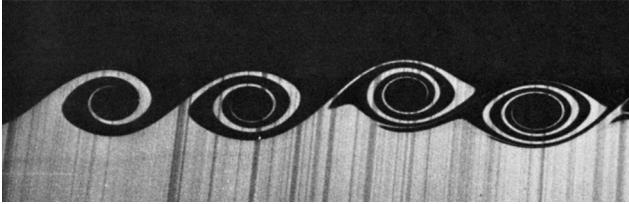


Рис. 2.3. Спиральные вихри, возникшие при развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Фотография из [27].

Вихревая картина неустойчивости Кельвина–Гельмгольца подсказывает, что сдвиговое течение, зависящее от одной поперечной координаты типа $v_x(z)$, может быть неустойчивым, только если завихренность имеет максимум. Такой максимум завихренности является точкой перегиба скорости, поскольку $d\omega/dx = d^2v_x/dz^2$. Это объясняет, почему течения без точки перегиба устойчивы относительно малых возмущений (Рэлей, 1880) — примеры таких течений представляют плоские линейные профили, течения в трубах или каналах и другие.² В частности, вихревой слой можно рассматривать локально как линейный профиль для мелкомасштабных возмущений с $k\delta \gg 1$, откуда следует, что такие возмущения не могут расти. Следовательно, максимальный инкремент неустойчивости $\text{Im}\Omega$ должен иметь место для $k\delta \simeq 1$, т. е. быстрее всего нарастают возмущения с длиной волны порядка толщины слоя.

Наше рассмотрение неустойчивости Кельвина–Гельмгольца не учитывало вязкости, что требует высокого числа Рейнольдса: $\text{Re} = v\delta/\nu \gg 1$. В противоположном пределе сильной вязкости профиль скорости не является стационарным, а эволюционирует согласно уравнению $\partial v_x(z, t)/\partial t = \nu \partial^2 v_x(z, t)/\partial z^2$, которое описывает рост толщины по закону $\delta \propto \sqrt{\nu t}$. Такой диффузный вихревой слой устойчив, поскольку вязкость гасит все возмущения. Отсюда следует существование порогового числа Рейнольдса, выше которого неустойчивость возможна. Мы сейчас рассмотрим этот порог с общей энергетической точки зрения.

2.1.2. Энергетическая оценка порога устойчивости

Баланс энергии между невозмущенным течением $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ и наложенным на него возмущением $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ помогает понять роль вязкости в установлении порога неустойчивости. Рассмотрим течение $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$, являющееся стаци-



Рис. 2.4. Нижнее облако демонстрирует закручивающиеся волны, возникшие при развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Фотография Brooks Martner.

онарным решением уравнения Навье–Стокса $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 / \rho + \nu \Delta \mathbf{v}_0$. Возмущенное течение $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = \\ = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Умножив скалярно (2.3) на \mathbf{v}_1 и используя несжимаемость, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^2}{\partial t} = -v_{1i} v_{1k} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{v_1^2}{2} (v_{0k} + v_{1k}) + p_1 v_{1k} - \frac{v_{1i} \partial v_{1i}}{\text{Re} \partial x_k} \right]. \end{aligned}$$

Последний член исчезает при интегрировании по объему:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \frac{v_1^2}{2} d\mathbf{r} = T - \frac{D}{\text{Re}}, \quad (2.4) \\ T = - \int v_{1i} v_{1k} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} d\mathbf{r}, \\ D = \int \left(\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right)^2 d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Слагаемое T обусловлено инерционными силами, а D — вязким трением. Видно, что для устойчивости (т. е. для убывания энергии возмущения) вязкость должна победить инерцию (Рейнольдс, 1894):

$$\text{Re} < \text{Re}_E = \min_{v_1} \frac{D}{T}. \quad (2.5)$$

Минимум здесь берется по всем возможным возмущениям течения. Поскольку как T , так и D квадратичны по скорости возмущения, их отношение не зависит от величины, а только от ориентации и пространственной зависимости $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$. Для ненулевого производства энергии T необходимо $\partial v_0 / \partial r \neq 0$ (однородное течение, очевидно, устойчиво) и вдобавок скорость возмущения должна быть ориентирована так, чтобы иметь как компоненту v_{1i} вдоль основного течения, так и компоненту v_{1k} вдоль градиента основного течения. Произведение $v_{1i}v_{1k}$ — это поток компоненты импульса, параллельной течению, в направлении градиента. Для положительного T этот поток должен быть отрицателен, то есть противоположен градиенту, тогда возмущение уменьшает градиент и отнимает энергию у течения. Положительное T получается, например, если скорость возмущения ориентирована относительно градиента основного течения, как показано на рисунке 2.5. Условие устойчивости $\text{Re} < \text{Re}_E$ является достаточным, но не необходимым. Течение всегда устойчиво при $\text{Re} < \text{Re}_E$; в противном случае, даже если найдется возмущение, нарушающее (2.5), для развития неустойчивости необходимо вдобавок, чтобы возмущение эволюционировало, не нарушая условия $T > D$. В результате критические числа Рейнольдса обычно несколько выше, чем предсказываемые энергетическим критерием.

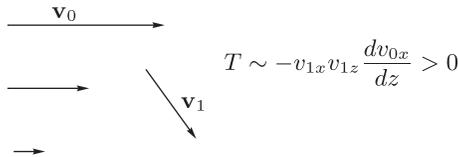


Рис. 2.5. Ориентация скорости возмущения \mathbf{v}_1 относительно градиента основного течения \mathbf{v}_0 , которая обеспечивает поток энергии от основного течения к возмущению.

2.1.3. Закон Ландау

Безразмерный параметр типа числа Рейнольдса, изменение которого вызывает качественные изменения в поведении, называется контрольным

параметром. Когда контрольный параметр превышает критическое значение, система испытывает неустойчивость и переходит в новое состояние. В общем случае можно предсказать свойства нового состояния, только если оно не сильно отличается от старого. Это может иметь место, когда значение контрольного параметра близко к критическому. Рассмотрим случай, когда $\text{Re} > \text{Re}_{\text{cr}}$, но $\text{Re} - \text{Re}_{\text{cr}} \ll \text{Re}_{\text{cr}}$. Непосредственно за порогом неустойчивости обычно имеется только одна неустойчивая мода. Линеаризуем уравнение (2.3) по отношению к возмущению $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$, т.е. опустим слагаемое $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1$. Получившееся линейное дифференциальное уравнение с независимыми от времени коэффициентами должно иметь решение вида $\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) \exp(\gamma_1 t - i\omega_1 t)$, описывающее неустойчивую моду. Экспоненциальный рост должен в конце концов ограничиться слагаемым нелинейным по \mathbf{v}_1 . Решение уравнения с малой нелинейностью можно искать в виде $\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{r})A(t)$. Уравнение на амплитуду $A(t)$ в общем случае должно иметь вид $d|A|^2/dt = 2\gamma_1|A|^2 +$ члены третьего порядка $+\dots$. Члены четвертого порядка получаются при дальнейшем раскладывании $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ и учете $\mathbf{v}_2 \propto \mathbf{v}_1^2$ в уравнении на \mathbf{v}_1 . Инкремент неустойчивости обращается в ноль при $\text{Re} = \text{Re}_{\text{cr}}$ и обычно $\gamma_1 \propto \text{Re} - \text{Re}_{\text{cr}}$, тогда как частота обычно конечна при $\text{Re} \rightarrow \text{Re}_{\text{cr}}$. Это позволяет усреднить амплитудное уравнение по временам, большим $2\pi/\omega_1$, но меньшим $1/\gamma_1$. С одной стороны, усреднение по многим периодам приводит к тому, что из членов третьего и четвертого порядков только $|A|^4$ дает ненулевой вклад:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4. \quad (2.6)$$

С другой стороны, поскольку время усреднения много меньше времени изменения модуля, можно опустить знак усреднения в левой части (2.6) и решить его как обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$|A|^{-2} = \alpha/2\gamma_1 + \text{const} \cdot \exp(-2\gamma_1 t) \rightarrow \alpha/2\gamma_1.$$

Установившееся значение меняется с контрольным параметром в соответствии с так называемым законом Ландау:

$$|A|_{\text{max}}^2 = \frac{2\gamma}{\alpha} \propto \text{Re} - \text{Re}_{\text{cr}}.$$

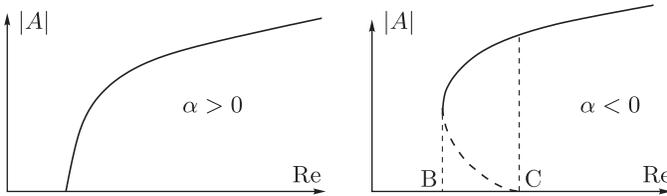
Если $\alpha < 0$, тогда нужно учесть в (2.6) дополнительный член $-\beta|A|^6$, чтобы стабилизировать неустойчивость:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4 - \beta|A|^6. \quad (2.7)$$

Установившееся значение теперь

$$|A|_{\max}^2 = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2\gamma_1}{\beta}}.$$

Устойчивость по отношению к изменению $|A|^2$ в рамках (2.7) определяется фактором $2\gamma_1 - 2\alpha|A|_{\max}^2 - 3\beta|A|_{\max}^4$. Между В и С стационарное течение метастабильно. Течение с параметрами, соответствующими пунктирной кривой, неустойчиво.



Это описание основано на предположении, что при $Re - Re_{cr} \ll Re_{cr}$ единственно важной зависимостью является $\gamma_1(Re)$ в точности так же, как и в теории Ландау фазовых переходов, которая также изучает потерю устойчивости. Амплитуда A , отличная от нуля по одну сторону от перехода, является аналогом параметра порядка. Случаи положительного и отрицательного α соответствуют фазовым переходам второго и первого рода.

2.2. Турбулентность

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса после порога первой неустойчивости в конце концов новое периодическое течение, в свою очередь, оказывается неустойчивым по отношению к другому типу возмущений, как правило меньшего масштаба и большей частоты. Каждая новая неустойчивость означает появление новой степени свободы, характеризующейся амплитудой и фазой нового периодического движения. Амплитуды определяются числом Рейнольдса, а вот фазы — обычно неконтролируемыми начальными возмущениями. При очень большом Re последовательность неустойчивостей приводит к *турбулентности* как к суперпозиции движений разных масштабов (рис. 2.6). Получившееся течение нерегулярно как в пространстве, так и во времени, так что мы должны описывать его статистически.



Рис. 2.6. Неустойчивости трех почти идентичных конвективных струй приводят к трем совершенно различным картинам течения. Обратите внимание также на возникновение течений все меньших масштабов по мере развития неустойчивостей. Фотография: Vbotond, www.dreamstime.com.

2.2.1. Переход к турбулентности

Течения, испытавшие несколько неустойчивостей, могут быть эффективно описаны конечным числом степеней свободы, соответствующим комплексным амплитудам возбужденных мод $A_i(t)$.

Динамика конечномерной диссипативной системы асимптотически по времени выходит на предельный режим, называемые аттрактором или притягивающим многообразием в пространстве переменных $A_i(t)$. Простейшие аттракторы — это неподвижная точка (стационарное состояние), замкнутый цикл (периодическое движение), тор (двоякопериодическое движение) и т.д. Оказывается, движение в фазовом пространстве трех и более взаимодействующих степеней свободы может иметь значительно более сложные аттракторы. Существуют так называемые странные или хаотические аттракторы, которые состоят из седловых траекторий. У траекторий вблизи седловой точки есть устойчивые направления, по которым система приближается к аттрактору, и неустойчивые направления внутри аттрактора. Поскольку все траектории неустойчивы на аттракторе, любые изначально близкие траектории в пространстве $A_i(t)$ разбегаются экспоненциально по времени со средней скоростью, называемой ляпуновской экспонентой. Чтобы уяснить, почему течения общего положения приводят к среднему разбеганию, заметим, что в окрестности седловой точки больше векторов испытывают растяжение, чем сжатие (задача 2.1). Разбегание траекторий

означает непредсказуемость поведения, так что временная динамика таких течений становится хаотической уже при умеренных Re , когда число степеней свободы невелико. Течения жидкости, соответствующие стохастическому аттрактору, регулярны в пространстве, но меняются во времени непредсказуемым образом, такое поведение называется динамическим хаосом.³ Ляпуновскую экспоненту для земной атмосферы можно оценить, разделив типичную скорость ветра 20 м/с на размер планеты 10 000 км. Величина, обратная ляпуновской экспоненте, дает оценку времени, на которое возможны предсказания погоды: $10^7 \text{ м}/(20 \text{ м/с}) = 5 \cdot 10^5 \text{ с}$, т. е. примерно неделю.

Есть, однако, целые классы ламинарных течений, устойчивых относительно бесконечно малых возмущений при очень большом Re (например, сдвиговые течения без точки перегиба) или при всех Re (например, течение в трубе кругового сечения). Линейная устойчивость означает наличие конечной области притяжения ламинарной неподвижной точки в фазовом пространстве. Область хоть и остается конечной, но уменьшается с ростом Re , так что малые, но конечные флуктуации способны возбудить турбулентность, которая может оказаться самоподдерживающейся. Переход к турбулентности носит вероятностный характер в таких системах: при любом конечном Re имеется конечная вероятность возвращения в ламинарное состояние. Например, в достаточно длинной трубе встречаются как турбулентные, так и ламинарные участки течения. Причина в том, что для любого достаточно большого возмущения ламинарного течения имеется конечная вероятность как затухнуть, так и расширяться, породив новые возмущения. С увеличением Re первая вероятность убывает, а вторая растет; можно определить критическое число Рейнольдса как такое, когда эти вероятности равны.⁴ С ростом числа Рейнольдса распространение возмущений заполняет пространство турбулентностью.

Таким образом, в линейно устойчивых системах переход к турбулентности происходит в пространстве за счет уменьшения доли ламинарного течения. Наоборот, линейно неустойчивые ламинарные течения не могут существовать выше порога неустойчивости; в таких системах турбулентность возникает за счет усложнения поведения течения во времени за счет стохастических аттракторов, как описано выше.

2.2.2. Каскад

Течение при очень больших Re является турбулентным, т. е. случайным как в пространстве, так и во времени. Описание таких течений должно



Рис. 2.7. Каскад. Фотография: Lee 2010, www.dreamstime.com.

быть статистическим, т. е. направленным на предсказание средних величин. Несмотря на пять столетий усилий (начиная с Леонардо да Винчи), полное описание статистики турбулентных течений отсутствует, но некоторые существенные элементы установлены. Мы еще не знаем какие свойства турбулентности являются универсальными и не зависят от того по какому пути мы двигались к $Re \rightarrow \infty$, в частности, стартовали ли мы с линейно неустойчивого ламинарного течения и прошли через динамический хаос или с линейно устойчивого течения, которое пришлось разрушать конечными возмущениями. Имеется, однако, универсальный энергетический аспект турбулентности, который проясняет картина каскада (рис. 2.7), описанная в этом параграфе. Эта картина представляет собой феноменологию, полезную как с фундаментальной точки зрения для понимания систем с большим числом степеней свободы, отклоненных от термодинамического равновесия, так и с практической стороны для объяснения эмпирического факта

конечной силы сопротивления в невязком пределе. Конечность коэффициента сопротивления $C(\text{Re}) = F/\rho u^2 L^2 \rightarrow \text{const}$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$ (см. рис. 1.18) означает, что темп диссипации кинетической энергии на единицу массы $\epsilon = F u/\rho L^3 = C u^3/2L$ остается конечным при $\nu \rightarrow 0$. Драматичность этого факта лучше всего осознать, представив не бесконечный след за обтекаемым телом, а течение в ограниченном объеме, скажем производимое вентилятором, постоянно включенным в комнате. Как детальные экспериментальные измерения, так и повседневный опыт учат нас, что после включения вентилятора энергия воздушных потоков быстро стабилизируется, что означает, что вязкая диссипация энергии уравнивает работу вентилятора. Если темп вкачиваемой вентилятором энергии не зависит от вязкости и остается конечным при $\nu \rightarrow 0$, то конечным остается и темп диссипации $\epsilon = \nu \int \omega^2 dV/V$, явно пропорциональный вязкости. Куда девается вся эта энергия? Разумеется, переходит в тепловую энергию молекул. Как же это темп этого перехода остается конечным при стремлении к нулю тепловой скорости молекул или длины свободного пробега, произведение которых есть кинематическая вязкость? Ответ и дает идея каскада.

Исторически понимание турбулентности как каскада началось с эмпирического закона, установленного Ричардсоном в 1926 году путем наблюдения за семенами и шариками, пускаемыми по ветру: среднеквадратичное расстояние между двумя частицами в турбулентном потоке возрастает быстрее, чем по закону диффузии, а именно $\langle R^2(t) \rangle \propto t^3$. Здесь среднее берется по разным парам частиц. Множитель, который может связать $\langle R^2(t) \rangle$ и t^3 , должен иметь размерность $\text{см}^2 \text{с}^{-3}$, как раз такую, как у темпа диссипации ϵ : $\langle R^2(t) \rangle \simeq \epsilon t^3$. Закон Ричардсона можно *интерпретировать* как возрастание характерной разности скоростей $\delta v(R)$ с расстоянием R . Это можно связать с наличием в турбулентном потоке вихрей разных размеров. Разность скоростей на данном расстоянии обусловлена вихрями сравнимых и меньших размеров, так как большие вихри дают примерно одинаковый вклад в каждой из двух точек. При возрастании расстояния, все большие вихри дают вклад в разность скоростей, что ускоряет разбегание по сравнению с обычной диффузией, где скорость не зависит от расстояния. Закон Ричардсона указывает, как относительная скорость возрастает с расстоянием: $R(t) \simeq \epsilon^{1/2} t^{3/2}$ является решением уравнения $dR/dt \simeq (\epsilon R)^{1/3}$; поскольку $dR/dt = \delta v(R)$, то

$$\delta v(R) \simeq (\epsilon R)^{1/3} \Rightarrow \frac{(\delta v)^3}{R} \simeq \epsilon. \quad (2.8)$$

Это последнее соотношение и подсказывает идею каскада энергии по масштабам от внешнего размера L такого, что $\delta v(L) \simeq u$ до вязкого масштаба l , определенного согласно $l\delta v(l) \simeq \nu$. Вязкий масштаб превышает молекулярную длину свободного пробега при условии $\delta v(L) \ll c$. Поток энергии через данный масштаб R можно оценить, разделив энергию $(\delta v)^2$ на время $R/\delta v$. Для так называемого инерционного интервала масштабов $L \gg R \gg l$ эффективно не действуют ни внешние силы, ни вязкое трение, так что можно ожидать, что поток энергии $\epsilon(R) = \langle \delta v^3(R) \rangle / R$ является независимым от R , как и получается из (2.8). Когда $\nu \rightarrow 0$, вязкий масштаб l уменьшается и каскад становится длиннее, но величина потока (равная темпу диссипации) остается неизменной. Иными словами, конечность ϵ в пределе исчезающей вязкости может быть проинтерпретирована как локальность передачи энергии в R -пространстве (или, что то же самое, в пространстве Фурье волновых чисел k). Образно можно сказать, что турбулентность работает как труба в k -пространстве, поток через любое сечение которой не зависит от длины трубы, если она достаточно длинная (число Рейнольдса достаточно велико).⁵

Проиллюстрируем каскадную картину оценкой. Для ветра со скоростью $v \simeq 10$ м/с на высоте $L \simeq 150$ м, имеем $\text{Re} \simeq 10^8$; оценивая вязкий масштаб из $l\delta v(l) \simeq \nu$, получим $l = L \text{Re}^{-3/4} \simeq 0.15$ мм. Турбулентность даже не сильного ветра содержит вихри размерами от сотен метров до доли миллиметра.

Картина турбулентности как каскада выглядит как остроумная феноменология. Можно ли придать этой теории солидность, выведя из уравнений движения какую-нибудь соответствующую формулу? Именно это сделал Колмогоров в 1941 году, получив точную формулу для потока энергии по масштабам. Для этого следует вывести уравнение на корреляционную функцию скоростей в разных точках для идеализированного случая турбулентности однородной и изотропной в пространстве. Рассмотрим турбулентность в отсутствие внешних сил, т. е. затухающую со временем. Нас интересует корреляционная функция компонент разности скоростей между точками 1 и 2:

$$\langle (v_{1i} - v_{2i})(v_{1k} - v_{2k}) \rangle = \frac{2\langle v^2 \rangle}{3} \delta_{ik} - 2\langle v_{2i}v_{1k} \rangle.$$

Найдем ее производную по времени. Производная по времени от кинетической энергии есть минус темп диссипации: $\epsilon = -d\langle v^2 \rangle / 2dt$. Чтобы получить производную по времени от двухточечной корреляционной функции

скоростей, возьмем уравнение Навье–Стокса в точке \mathbf{r}_1 , умножим его на скорость \mathbf{v}_2 в другой точке \mathbf{r}_2 и усредним по промежутку времени, большему, чем $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$, и меньшему, чем L/u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{1i} v_{2k} \rangle &= -\frac{\partial}{\partial x_{1l}} \langle v_{1l} v_{1i} v_{2k} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_{2l}} \langle v_{1i} v_{2k} v_{2l} \rangle - \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{1i}} \langle p_1 v_{2k} \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \langle p_2 v_{1i} \rangle + \nu (\Delta_1 + \Delta_2) \langle v_{1i} v_{2k} \rangle. \end{aligned}$$

Предполагается эргодичность, т. е. что средние по времени эквивалентны пространственным средним. Статистическая изотропия предполагает, что вектор $\langle p_1 \mathbf{v}_2 \rangle$ может быть направлен только по направлению вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$; единственный такой бездивергентный вектор имеет вид \mathbf{r}/r^3 , что не удовлетворяет условию конечности при $r = 0$, так что $\langle p_1 \mathbf{v}_2 \rangle = 0$. В силу трансляционной инвариантности все двухточечные корреляционные функции зависят только от $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v_{1i} v_{2k} \rangle = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\langle v_{1l} v_{1i} v_{2k} \rangle + \langle v_{2i} v_{1k} v_{1l} \rangle \right) + 2\nu \Delta \langle v_{1i} v_{2k} \rangle. \quad (2.9)$$

Здесь мы использовали $\langle v_{1i} v_{2k} v_{2l} \rangle = -\langle v_{2i} v_{1k} v_{1l} \rangle$, поскольку при $1 \leftrightarrow 2$ как \mathbf{r} , так и тензор третьего ранга меняют знак (тензор обращается в нуль при $1 \rightarrow 2$). Непосредственное, хоть и длинное вычисление⁶ позволяет переписать (2.9) для моментов продольной разности скоростей, называемых структурными функциями,

$$S_n(r, t) = \langle [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)]^n / r^n \rangle.$$

Это дает соотношение Кармана–Ховарда:

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{1}{3r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 S_3 \right) - \frac{4\epsilon}{3} + \frac{2\nu}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial S_2}{\partial r} \right). \quad (2.10)$$

Среднее S_2 меняется только вместе с крупномасштабным течением, так что

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} \simeq \frac{S_2 u}{L} \ll \frac{S_3}{r}$$

при $r \ll L$. С другой стороны, мы рассматриваем $r \gg l$, или, более формально, полагаем r конечным и переходим к пределу $\nu \rightarrow 0$, так что последний член исчезает. Теперь мы *предположим*, что ϵ имеет конечный предел

при $\nu \rightarrow 0$ и получим

$$S_3(r) = -4\epsilon r/5. \quad (2.11)$$

Это замечательное соотношение показывает необратимость статистики турбулентности, поскольку S_3 не меняет знака при обращении $t \rightarrow -t$, что соответствует $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$. Если нам будут крутить кино турбулентности наоборот, мы сможем заметить, что что-то не так! Напомним, что статистика флуктуаций в состоянии термодинамического равновесия, наоборот, является обратимой вследствие принципа детального баланса: вероятность любого процесса и его обращения во времени одинаковы. Это связано с тем, что термостат обеспечивает как генерацию флуктуаций, так и их затухание, которые сбалансированы на каждом масштабе и частоте, согласно флуктуационно-диссипативной теореме. Наоборот, турбулентный каскад возникает, когда масштабы накачки и затухания сильно различаются, так что число Рейнольдса есть мера неравновесности.

Независимость (2.11) от (исчезающей) вязкости является первым в физике примером того, что называется «аномалией» на современном теоретико-полевым языке: эффект нарушения симметрии не обращается в ноль вместе с фактором, нарушающим симметрию. В данном случае эффект нарушения обратимости времени не обращается в ноль при $\nu \rightarrow 0$.

Аналитическая теория турбулентности, которая могла бы дать другие структурные функции, отсутствует. Колмогоров и Обухов (в 1941 году) *предположили*, что величина ϵ полностью определяет статистику скоростей в инерционном интервале, тогда из соображений размерности немедленно следует $S_n \simeq (\epsilon r)^{n/3}$. Экспериментальные измерения дают степенные законы $S_n(r) \propto r^{\zeta_n}$, но с показателями степени ζ_n , отклоняющимися от $n/3$ при $n \neq 3$. Моменты разности скоростей можно получить из функции распределения вероятности $\mathcal{P}(u, r)$ измерить $\delta v = u$ на расстоянии r : $S_n(r) = \int u^n \mathcal{P}(u, r) du$. Отклонения ζ_n от $n/3$ означают, что $\mathcal{P}(\delta v, r)$ не является автомодельной (масштабно-инвариантной), т. е. не может быть представлена как $(\delta v)^{-1}$, умноженная на безразмерную функцию всего одной переменной $\delta v/(\epsilon r)^{1/3}$. Очевидно, турбулентность не исчерпывается картиной каскада, и знания ϵ недостаточно, чтобы предсказать всю статистику скорости. Не удается пока связать нарушение масштабной инвариантности трехмерной несжимаемой турбулентности с какими-нибудь простыми структурами течения, но это удается сделать для более простого случая одномерной акустической турбулентности, описываемой уравнением Бюргерса в параграфе 2.3.4. Мы также научились связывать нарушение масштабной инвариантности со статистическими законами сохранения движения частиц, качественно для поля скорости и количественно для пассивных полей, переносимых случайными течениями. Например, для двух частиц жидкости

с координатами $\mathbf{R}_1(t)$, $\mathbf{R}_2(t)$ и скоростями $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$ величина $\langle |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^{-\zeta_2} \rangle$ не меняется при $t \rightarrow \infty$.⁷ Обе симметрии, одна — нарушенная накачкой (масштабная инвариантность), другая — нарушенная трением (обратимость), не восстанавливаются даже в пределах $r/L \rightarrow 0$ и $l/r \rightarrow 0$.

Трудности построения теории турбулентности можно оценить, переписав ее через интеграл по траекториям как квантовую теорию поля. Рассмотрим уравнение Навье–Стокса под действием внешней случайной силы \mathbf{f} , имеющей гауссову функцию распределения $P(\mathbf{f})$ с нулевым средним и вторым моментом $\langle f_i(0, 0) f_j(\mathbf{r}, t) \rangle = D_{ij}(\mathbf{r}, t)$. В этом случае вероятность любого течения $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ дается Фейнмановским интегралом по траекториям, т. е. по полям скорости, удовлетворяющим уравнению Навье–Стокса с разными реализациями внешней силы:

$$\begin{aligned} & \int D\mathbf{v} D\mathbf{f} \delta(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla P / \rho - \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{f}) P(\mathbf{f}) = \\ & = \int D\mathbf{v} D\mathbf{p} \exp[-D_{ij} p_i p_j + v p_i (\partial_t v_i + v_k \nabla_k v_i + \nabla_i P / \rho - \nu \Delta v_i)]. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Здесь мы представили дельта-функцию как интеграл по вспомогательному полю \mathbf{p} и явно проинтегрировали по гауссовской статистике силы. В результате турбулентность оказалась эквивалентна теории двух взаимодействующих полей (\mathbf{v} и \mathbf{p}), а предел большого Re оказался пределом сильной связи (для несжимаемого течения давление не является независимым, а восстанавливается из $\text{div}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \Delta P$). Материальная производная $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ аналогична ковариантной производной в калибровочной теории, а скорость системы отсчета задает калибровку.

2.2.3. Турбулентные течения

Перейдем теперь от идеализированной однородной изотропной турбулентности к реальным турбулентным течениям, которые по необходимости анизотропны и неоднородны. Вооруженные новым знанием о турбулентности как многомасштабном течении, вернемся к рассмотрению потоков по наклонной плоскости (река) и позади обтекаемого тела (след).

1. Река. Как мы выяснили, турбулентность приводит к тому, что сила сопротивления при больших Re намного больше, чем вязкое трение при ламинарном течении. Это позволяет понять, почему поведение реальных рек так непохоже на ламинарное решение, описанное в параграфе 1.4.3. Обозначим среднюю скорость течения U . При малых Re сила тяжести на единицу массы $g\alpha$ уравнивается вязким трением $\nu U/h^2$, что эквивалентно тому, что вкладываемая мощность $g\alpha U$ равна темпу вязкой диссипации $\nu U^2/h^2$. При больших Re темп диссипации может быть оценен как

поток энергии U^3/h , так что $U^3/h \simeq g\alpha U$ эквивалентно тому, что сила сопротивления U^2/h уравновешивает $g\alpha$, что дает

$$U \simeq \sqrt{\alpha gh}. \quad (2.13)$$

Действительно, если вязкость не входит в задачу, то (2.13) — это единственная комбинация с размерностью скорости, которую можно построить из h и эффективной силы тяжести αg . Для медленных равнинных рек с углом наклона $\alpha \simeq 10^{-4}$ и глубиной $h \simeq 10$ м новая оценка (2.13) дает вполне реалистичский ответ $U \simeq 10$ см/с. Другой способ описать силу сопротивления — сказать, что молекулярная вязкость ν заменяется турбулентной вязкостью $\nu_T \simeq Uh \simeq \nu Re$ и эффективная сила трения задается обычной формулой $\nu U/h^2$ с заменой $\nu \rightarrow \nu_T$. Наглядно: можно представить макроскопические турбулентные вихри, переносящие импульс между слоями жидкости куда более эффективно, чем микроскопическое молекулярное движение.

Так же можно оценить скорость течения в трубе под действием градиента давления, заменив в (2.13) αg на $\nabla P/\rho$ и понимая под h радиус трубы. Возникает соблазн заключить, что безразмерный коэффициент сопротивления трубы, определенный как $\nabla P h/\rho U^2$ или $\alpha gh/U^2$, убывает с Re как $1/Re$ при малых Re и выходит на постоянное значение при больших Re , в точности как коэффициент сопротивления тела потоку, показанный на рисунке 1.18. Этот соблазн можно преодолеть, немного подумав и осознав дефект рассуждений, приведших к (2.13): ни среднее течение ни турбулентность не могут полагаться однородными, а должны меняться вдоль поперечной координаты z , чтобы обеспечить перенос импульса (постоянно добавляемого силой тяжести или градиентом давления) ко дну реки или к стенкам трубы, где этот импульс и должен поглощаться. Запишем закон сохранения импульса, не предполагая течение параллельным: обозначим x -компоненту скорости $U(z) + u(z, y, z, t)$, а z -компоненту $v(x, y, z, t)$, где u, v очевидно соответствуют турбулентным флуктуациям. Уравнение непрерывности для x -компоненты среднего импульса утверждает, что дивергенция потока импульса τ равна силе:

$$\frac{d}{dz} \left(\nu \frac{dU}{dz} + \langle uv \rangle \right) \equiv \frac{d\tau(z)}{dz} = -\alpha g. \quad (2.14)$$

Проинтегрировав, получим $\tau(z) = \tau(0) - \alpha g z$. Поток равен нулю на поверхности реки и в центре трубы, что дает $\tau(0) = \alpha gh$. Присмотримся

теперь к узкому пограничному слою $z \ll h$, где можно полагать, что поток импульса независим от z и равен $\tau(0) \equiv v_*^2$. В этом слое средняя скорость может зависеть от z, ν, v_* , но не от далекого h . Из трех переменных с двумя размерностями можно составить один безразмерный параметр zv_*/ν — это локальное число Рейнольдса с масштабом, заданным расстоянием до твердой границы (где поглощается импульс). Возле самой границы поток переносится вязкостью: $\nu dU/dz \approx \alpha gh$ и $U(z) \approx \alpha ghz/\nu$. Граница этого вязкого пограничного подслоя там, где локальное число Рейнольдса становится порядка единицы: $U(l)l = \nu \Rightarrow l = \nu/v_*$. При $z \gg l$ можно ожидать, что поток импульса переносится турбулентностью и равен $\langle uv \rangle$. Несмотря на многолетние усилия, мы до сих пор не имеем последовательной теории неоднородной турбулентности, которая дала бы нам связь корреляционной функции $\langle uv \rangle$ с профилем среднего течения $U(z)$. Приходится обращаться к правдоподобным рассуждениям: поскольку в однородном течении нет поперечного потока импульса, то средний поток должен быть связан с пространственной неоднородностью среднего течения. Естественно предположить, что при $l \ll z \ll h$ пространственные производные средней скорости полностью определяются средним потоком v_*^2 и координатой z . Единственная комбинация для производной порядка n — это $d^n U/dz^n \simeq v_*/z^n$, что дает логарифмический профиль скорости для турбулентного пограничного слоя (Карман, 1930; Прандтль, 1932)⁸:

$$U(z) \simeq v_* \log(z/l) = \sqrt{\alpha gh} \log[z(\alpha gh)^{1/2}/\nu]. \quad (2.15)$$

Мы здесь использовали l в аргументе логарифма, поскольку при $z \simeq l$ должно быть $U(l) \simeq v_*$. Чуть более формально можно изложить предположения, ведущие к логарифмическому закону (2.15), используя так называемую гипотезу перекрытия. Для этого рассмотрим все течение, которое зависит от четырех величин $z, v_* h, \nu$, имеющих две размерности (метр и секунду), так что в задаче два безразмерных параметра $\xi = z/h$ и $\text{Re} = v_* h/\nu$. Безразмерная величина $U(z)/v_*$ должна быть функцией ξ и Re . Возле стенки зависимость от h должна пропасть: $U(z)/v_* \rightarrow f(\xi \text{Re})$. Возле центра трубы или поверхности реки естественно ожидать, что закон изменения скорости не зависит от вязкости: $U(h) - U(z) = v_* f_1(\xi)$. Обозначим $U(h)/v_* = f_2(\text{Re})$. Гипотеза перекрытия состоит в предположении, что две асимптотические области перекрываются в некоем интервале z , где можно положить $f(\xi \text{Re}) = f_2(\text{Re}) - f_1(\xi)$, что означает, что все функции должны быть логарифмическими.⁹ Логарифмический профиль скорости менее

выпуклый, чем ламинарный параболический профиль, что естественно, поскольку турбулентность лучше перемешивает импульс.

Предположив, что производные скорости в турбулентном пограничном слое не зависят от вязкости, мы получили, что сама скорость как раз зависит: формула (2.15) подправляет (2.13) логарифмическим множителем, содержащим ν . Эта зависимость медленная и во многих случаях практически несущественная. Однако тот факт, что зависимость от вязкости проявляется везде, в том числе вдали от вязкого слоя, концептуально весьма радикален. Во-первых, это означает эффективное проскальзывание на твердой границе: когда вязкость стремится к нулю, ширина l вязкого пограничного слоя сжимается до нуля, но скорость на его границе остается конечной, $U(l) \simeq v_*$. Во-вторых, при любом конечном z , скорость $U(z)$ обращается в бесконечность при $\nu \rightarrow 0$, так что коэффициент сопротивления стремится к нулю как $\log^{-2}(hv_*/\nu) = \log^{-2} Re$. И это все потому, что мы полагали границу плоской и гладкой, что качественно отличается от случая обтекания тела, где искривленная поверхность обеспечивала отрыв пограничного слоя и образования следа, дающего конечный коэффициент сопротивления в невязком пределе. Отсюда разумно предположить, что если логарифмическое убывание коэффициента сопротивления с числом Рейнольдса имеет место, оно прекращается, когда l становится сравнимым с размером r неоднородностей границы (которые опять спасают нас, хоть и иначе, чем в § 1.4.4). Когда $\nu < rv_*$, невозможно полагать течение параллельным границе, поскольку неоднородности высовываются из вязкого слоя, создают свои собственные следы с конечным сопротивлением, так что $U(r) \simeq v_*$, и коэффициент сопротивления выходит на конечное значение $\log^{-2}(h/r)$, что подтверждается экспериментом.

Обратите внимание на аналогию между теорией пограничного слоя Кармана–Прандтля и теорией турбулентности Колмогорова–Обухова.¹⁰ В первом случае утверждается, что существует область, далекая как от стенки, так и от центра, где поток импульса полностью задает как средний профиль, так и статистику течения. Во втором случае похожая картина каскада разворачивается в пространстве масштабов или Фурье-пространстве: существует инерционный интервал масштабов, в котором исчезают зависимости от накачки и затухания и поток энергии полностью задает статистику. Мы теперь знаем, что теория Колмогорова–Обухова правильно описывает только третий момент статистики скорости (который и есть поток энергии), а статистика других моментов зависит от поведения накачки на больших масштабах. Модификация или развитие теории Кармана–Прандтля — более

сложная задача. Эксперименты подтверждают логарифмический профиль средней скорости, но показывают, что статистика флуктуаций зависит от h даже при $z \ll h$.

2. След. Опишем теперь полную структуру следа за телом при $Re = uL/\nu \gg 1$. При большом Re теорема Кельвина выполняется снаружи от пограничного слоя — завихренность сохраняется вдоль линий тока, которые, таким образом, разделяются на вихревые и безвихревые. След — это ограниченная, хорошо определенная вихревая область, которая существует, потому что линии тока не покидают ее. Ничто не мешает, однако, линиям тока с нулевой завихренностью входить в вихревую область, что приводит к расширению следа по мере удаления от тела. Скорость меньше в следе, чем снаружи, что ведет к неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца и волнообразной форме границ следа. Это, в свою очередь, приводит к квазипериодическому изменению поля скорости в непосредственной окрестности следа. Однако только крупномасштабные гармоники турбулентности можно наблюдать снаружи. Действительно, течение потенциально снаружи и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\phi = 0$, так что любое периодическое решение вдоль следа убывает при удалении от него экспоненциально, причем тем быстрее, чем меньше длина волны. Следовательно, вся мелко-масштабная турбулентность и вся диссипация сосредоточены внутри турбулентного следа. Помимо пространственных модуляций, граница турбулентного следа также флуктуирует в пространстве.¹¹ На рисунке 2.8 след затемнен и линии тока показаны пунктиром со стрелками; фотография реального следа на рисунке 1.16 в предыдущей главе.

Найдем среднее по времени положение границы следа $Y(x)$. Средний угол между линиями тока и осью x можно оценить как $v(x)/u$, где $v(x)$ — среднеквадратичная турбулентная скорость, которую можно найти из условия, что поток импульса через сечения следа не зависит от x , поскольку равен силе сопротивления $F \simeq \rho uvY^2$, как в (1.61). Вследствие этого

$$\frac{dY}{dx} = \frac{v(x)}{u} \simeq \frac{F}{\rho u^2 Y^2},$$

так что

$$Y(x) \simeq \left(\frac{Fx}{\rho u^2} \right)^{1/3}, \quad v(x) \simeq \left(\frac{Fu}{\rho x^2} \right)^{1/3}.$$

Подставим $F \simeq \rho u^2 L^2$ и получим

$$Y(x) \simeq L^{2/3} x^{1/3}, \quad v(x) \simeq u(L/x)^{2/3}.$$

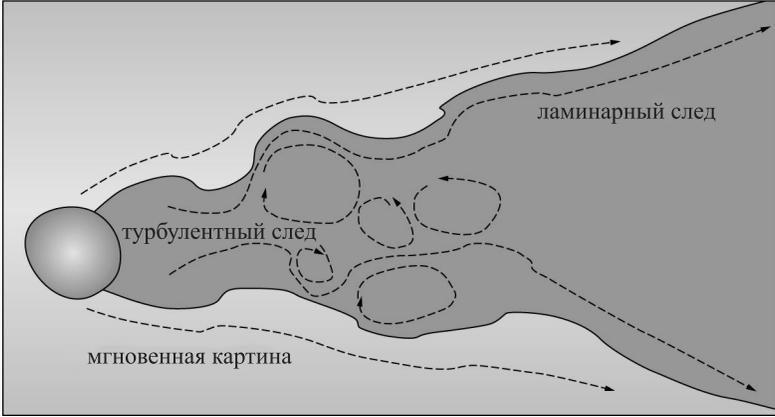


Рис. 2.8. Схематическое изображение следа позади обтекаемого тела.

Заметим, что Y не зависит от u для турбулентного следа. Текущее число Рейнольдса $\text{Re}(x) = v(x)Y(x)/\nu \simeq (L/x)^{1/3}uL/\nu = (L/x)^{1/3} \text{Re}$ убывает с x , так что турбулентный след перейдет в ламинарный при $x > L \text{Re}^3 = L(uL/\nu)^3$ — место перехода зависит от u .

Внутри ламинарного следа мы можем предположить $v \ll u$ и пренебречь $\rho^{-1}\partial p/\partial x \simeq v^2/x$ в стационарном уравнении Навье–Стокса, принимая вид (параболического) уравнения диффузии, в котором x играет роль времени:

$$u \frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_x. \quad (2.16)$$

При $x \gg \nu/u$ решение принимает универсальную форму:

$$v_x(x, y, z) = -\frac{F_x}{4\pi\eta x} \exp \left[-\frac{u(z^2 + y^2)}{4\nu x} \right],$$

где мы использовали (1.61) при выводе коэффициента. В этот момент внимательный читатель должен спросить, почему мы учли вязкость в (2.16), но не в тензоре напряжений (1.59). Ответ заключается в том, что $\sigma_{xx} \propto \partial v_x/\partial x \propto 1/x^2$ быстро убывает с расстоянием, а $\int dy \sigma_{yx} = \int dy \partial v_x/\partial y$ тождественно равен нулю.

Как видим, ширина ламинарного следа растет как $Y \simeq \sqrt{\nu x/u}$, т. е. след имеет параболическую форму. Число Рейнольдса в нем убывает как

$v_x Y / \nu \propto x^{-1/2}$. Напомним, что в стоковом течении $v \propto 1/r$ только при $r < \nu/u$, тогда как в следе $v_x \propto 1/x$ до бесконечности. Сравнивая ламинарную и турбулентную оценки, видим, что при $x \ll L \text{Re}^3$ турбулентная ширина больше: $Y \simeq L^{2/3} x^{1/3} \gg (\nu x / u)^{1/2}$. С другой стороны, в турбулентном следе ширина растёт, а возмущение скорости убывает с расстоянием медленнее, чем в ламинарном следе (рис. 2.9).

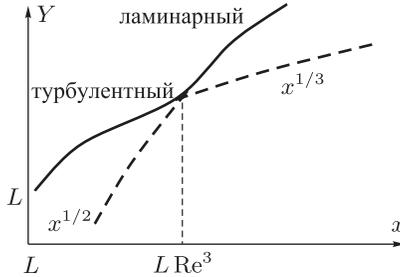


Рис. 2.9. Ширина следа Y как функция расстояния от тела x .

Нетрудно обобщить оценки следа для произвольной размерности пространства d , когда $F \simeq \rho v Y^{d-1}$, так что $v \propto Y^{1-d}$ и $\text{Re} \propto v Y \propto Y^{2-d}$. В двумерном случае убывание скорости в следе не приводит к уменьшению числа Рейнольдса. Для тел протяженных поперек течения, как длинные крылья, след можно полагать приблизительно двумерным и число Рейнольдса постоянным до расстояний порядка размаха крыла.

2.2.4. Перемешивание

Коэффициент диффузии газов в газах порядка $\kappa \simeq 10^{-1} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, а жидкостей в жидкостях и того меньше: $\kappa \simeq 10^{-5} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, так что много часов потребует диффузия запаха от чашки кофе до нашего носа и молока внутри чашки. За распространение и перемешивание практически всегда отвечают течения. Обозначим θ плотность перемешиваемого вещества. Она удовлетворяет уравнению непрерывности, которое для несжимаемых течений обращается в уравнение переноса-диффузии:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{J} = -\text{div} (\mathbf{v}\theta - \kappa \nabla \theta) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta + \text{div } \kappa \nabla \theta. \quad (2.17)$$

Вклад переноса $\mathbf{v}\theta$ в поток \mathbf{J} может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от точки пространства и момента времени.

Покажем, что несжимаемые течения могут только увеличить *средний интегральный* поток. Рассмотрим две поверхности, где поддерживаются два разных значения θ_1, θ_2 и где нормальная скорость обращается в ноль (Зельдович, 1937). Полагая, что весь поток J , производится одной поверхностью и поглощается другой, умножим (2.17) на θ и проинтегрируем по всему пространству снаружи от поверхностей:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\theta^2}{2} \partial V = J(\theta_1 - \theta_2) - \int \kappa |\nabla \theta|^2 \partial V. \quad (2.18)$$

Вклад скорости обратился в ноль благодаря тождеству $\theta(\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta^2/2 = \operatorname{div}(\mathbf{v}\theta^2/2)$, что соответствует тому, что несжимаемая скорость только переносит с места на место, не меняя полного количества. Рассмотрим теперь стационарное состояние или усредним по времени, чтобы обратить в ноль член с производной по времени. Получаем, что поток пропорционален диссипации при заданных θ_1, θ_2 :

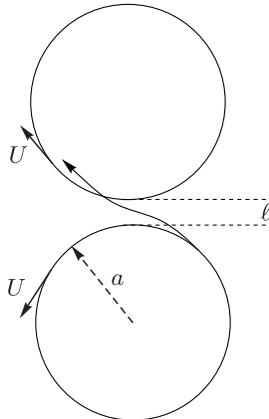
$$J(\theta_1 - \theta_2) = \int \kappa |\nabla \theta|^2 \partial V. \quad (2.19)$$

Минимум этого интеграла по отношению к вариациям θ , исчезающим на границе, дается решением уравнения $\operatorname{div} \kappa \nabla \theta = 0$, что соответствует стационарному или усредненному по времени решению уравнения (2.17) с нулевой скоростью. Наличие ненулевой скорости в общем случае усиливает поток.¹²

Простейший (и жизненно важный) пример усиления диффузии за счет ее взаимодействия с течением представляет расплывание капли лекарства в крови при внутривенной инъекции. Рассмотрим ламинарный поток в узкой прямой трубе и будем интересоваться временами, превышающими время диффузии поперек трубы a^2/κ , где a это радиус. Даже на этих временах разные скорости течения на разных расстояниях от стенки будут создавать неоднородность концентрации θ *поперек* трубы, что приведет к усилению диффузии *вдоль* трубы. Эффективный коэффициент продольной диффузии можно оценить как разность скоростей U между центром и стенкой, умноженную на характерный продольный размер области неоднородности. По мере того как θ распространяется вдоль трубы, молекулярная диффузия делает ее однородной всюду, за исключением двух участков на концах. Неоднородности не успевают выравняться на участках, возникших за время, не превышающее a^2/κ . Размер этих областей неоднородности может быть оценен как Ua^2/κ . Умножая эту длину на скорость U , получим

добавку к коэффициенту продольной диффузии порядка $U^2 a^2 / \kappa$ (Тэйлор, 1953). Эта оценка подтверждается прямым выводом эффективного уравнения продольной диффузии из уравнения (2.17), как описано в задаче 2.3. Безразмерный параметр $Pe = Ua/\kappa$ называется числом Пекле, он равен отношению времен молекулярной диффузии и переноса. Эффективный коэффициент диффузии $\kappa + kU^2 a^2 / \kappa$ как функция κ имеет минимум. Безразмерный параметр k зависит от геометрии течения, для трубы кругового сечения $k = 1/192$. Теперь можно оценить, что для вены радиуса $a = 0.2$ см при скорости $U = 0.5$ см/с и $\kappa \simeq 10^{-5}$ см²/с, мы получим $Pe = Ua/\kappa = 10^4$, то есть распространение чего бы то ни было в нашей крови происходит за счет дисперсии Тэйлора. Эффективный коэффициент диффузии $U^2 a^2 / 192\kappa = \kappa Pe^2 / 192 \simeq 10$ см²/с означает, что за одну секунду капля сдвигается на 0.25 с и расплывается примерно на 3 см.

Другой пример усиления перемешивания при больших Pe предоставляет диффузия сквозь стационарные вихри, например, конвективные ячейки, которые мы также будем характеризовать их скоростью U и размером a . Чтобы попасть в вихрь или выйти из него, надо продиффундировать сквозь сепаратрису. Толщину ℓ слоя, сквозь который надо просочиться, можно оценить, потребовав, чтобы время диффузии ℓ^2 / κ было порядка времени оборота a/U , что дает $\ell \simeq (\kappa a / U)^{1/2}$. Поскольку только частицы из этого слоя способны перебраться в соседнюю ячейку и поучаствовать в перемешивании, ℓ играет роль характерной длины свободного пробега, так что эффективный (перенормированный) коэффициент диффузии оценивается как $U\ell \simeq \sqrt{\kappa U a} = \kappa Pe^{1/2}$.



Рассмотрим теперь турбулентное поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, флуктуирующее в пространстве и во времени. Как далеко пятно θ может отклониться от среднего течения за время t ? Координата центра пятна удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{v}[\mathbf{q}(t), t], \quad (2.20)$$

решение которого есть интеграл Лагранжевой скорости $\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}[\mathbf{q}(t), t]$ по времени: $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \int_0^t \mathbf{V}(t') dt'$. Если время корреляции τ_c скорости $V(t)$ является конечным, то при $t \gg \tau_c$ смещение может рассматриваться как сумма независимых случайных чисел. В этом пределе среднеквадратичное отклонение растет по диффузионному закону $\langle q_i(t)q_j(t) \rangle = 2D_{ij}t$, где так называемый турбулентный коэффициент диффузии имеет следующий вид:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \langle V_i(0)V_j(s) + V_j(0)V_i(s) \rangle ds.$$

Помимо случайных блужданий, пятно будет также расплываться. Скорость расплывания зависит от того, как быстро расходятся изначально близкие частицы жидкости, что определяется зависимостью их относительной скорости δv от расстояния между ними $\mathbf{R} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$. Будем различать течения двух качественно разных классов: пространственно гладкие течения, в которых $\delta v(R) \propto R$, и негладкие течения с $\delta v(R) \propto R^{1-\alpha}$ и $0 < \alpha < 1$. Как мы узнали в § 2.2.2, турбулентные течения при достаточно больших Re и в инерционном интервале масштабов имеют $\delta v(R) \propto R^{1/3}$, т.е. являются пространственно негладкими. С другой стороны, течения являются пространственно гладкими при умеренных Re , а также на масштабах меньших вязкой длины l (вязкий интервал). На вязком масштабе имеем $\delta v(l)l \simeq \nu$, так что число Пекле есть ν/κ . Это отношение называется числом Шмидта или числом Прандтля, когда θ это температура. Хотя процессы диффузии импульса и примесей имеют общую причину в молекулярном движении, отношение вязкости к коэффициенту диффузии меняется в широких пределах в зависимости от типа среды и примеси (см. также задачу 2.2). Число Шмидта ν/κ может быть очень велико для вязких жидкостей, а также для диффузии коллоидов и аэрозолей: коэффициент диффузии микронных капелек сметаны в молоке и частичек дыма в воздухе на 6-7 порядков меньше вязкостей соответствующих сред. В этих случаях любое перемешивание и распространение происходит за счет течений.

Для гладких течений разница скоростей близких частиц может быть заменена линейной функцией расстояния между ними, т.е. полностью оха-

рактирована тензором первых производных скорости $\nabla_i v_k$, как в § 1.2.2 и задаче 2.1. В областях течения, где доминирует антисимметричная часть тензора (завихренность), элементы жидкости вращаются при движении. В областях, где преобладает симметричная часть, элементы подвергаются деформации — сжатию и растяжению. Достаточно случайная длинная последовательность вращений, сжатий и растяжений превратит любую исходно круглую каплю θ в растянутый эллипсоид. Причина в том, что рано или поздно произойдет растяжение. Чтобы обратить его, надо встретить сжатие, направление которого внутри узкого угла вокруг длинной оси эллипсоида. Больше шансов встретить деформацию снаружи этого угла, что в среднем будет еще больше увеличивать эксцентриситет, что, в свою очередь, увеличит вероятность растяжения. Это приведет к расхождению изначально близких частиц жидкости и перемешиванию. Капнув чернил в воду и осторожно помешав, можно наблюдать растяжение капли и перемешивание.

Эволюция вектора, соединяющего две движущиеся частицы, задается линейным оператором: $\mathbf{R}(t) = W\mathbf{R}(0)$. Положительно определенная симметричная матрица $t^{-1} \ln W^T W$ при $t \rightarrow \infty$ перестает зависеть от времени: собственные вектора стремятся к d постоянным ортонормальным векторам \mathbf{f}_i , а собственные значения $\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln |W\mathbf{f}_i|$ не зависят от начального положения, если течение эргодично (Оселедец, 1968). Это значит, что эллипсоид будет экспоненциально по времени сжиматься вдоль коротких осей и растягиваться вдоль длинных, пока разность скоростей можно полагать линейно зависящей от расстояния. Средние скорости сжатия и растяжения λ_i называются Ляпуновскими экспонентами (Ляпунов, 1892). В несжимаемом течении $\sum_i \lambda_i = 0$, так что в случае общего положения существует по крайней мере одна положительная экспонента, что обеспечивает экспоненциальное растяжение.

Сжимающиеся оси эллипсоида в конце концов стабилизируются, поскольку молекулярная диффузия остановит сжатие. При этом длинные оси продолжают растягиваться, так что объем эллипсоида будет экспоненциально расти, а значение θ в нем экспоненциально убывать со временем. И для произвольного крупномасштабного начального распределения θ отклонение от средней концентрации убывает экспоненциально в пространственно гладком течении. Темп убывания определяется темпом сжатия поля θ градиентом скорости, что создает резкие градиенты θ , которые сглаживаются молекулярной диффузией. Несмотря на то, что в конечном счете именно диффузия отвечает за убывание неоднородностей θ , темп убывания обычно порядка характерного градиента скорости и независим от κ при $Pe \gg 1$ (еще один пример диссипативной аномалии).

Напомним, что завихренность и магнитное поле удовлетворяют тому же уравнению (1.20), что и вектор, соединяющий две движущиеся частицы, так что они также могут подвергаться экспоненциальному растяжению; в частности, таков механизм магнитогидродинамического динамо в ядре Земли и в межзвездном газе.

На масштабах больше l , в инерционном интервале турбулентного каскада, разность скоростей (2.8) ведет себя как $\delta v(r) \propto r^{1/3}$ и частицы разбегаются по закону Ричардсона $R(t) \propto t^{3/2}$, как мы узнали в § 2.2.2. Это быстрее и диффузии ($R \propto t^{1/2}$) и баллистики ($R \propto t$). Объем любого пятна также растет, так что среднеквадратичная неоднородность убывает по степенному закону: $\langle(\theta - \langle\theta\rangle)^2\rangle \propto t^{-3d/2}$, где d — размерность пространства.

Заметим, что разность скоростей (2.8) предполагается возрастающей с расстоянием медленнее, чем линейно, т. е. поле скорости в турбулентности не удовлетворяет в среднем условию Липшица (см. раздел 1.1), так что траектории частиц в турбулентности не определены однозначно в пределе нулевой вязкости.¹³

Рассмотрим теперь две частицы жидкости, относительная скорость которых имеет отрицательную проекцию на линию, соединяющую их. Такие частицы будут сближаться. Решив формально уравнение $\partial R/\partial t = -CR^{1/3}$, получим $R^{2/3}(t) = R^{2/3}(0) - 3Ct/2$, что предполагает, что траектории могут пересечься за конечное время. Означает ли это, что из гладкого несжимаемого начального течения с большим Re турбулентности и негладкого поля скорости возникнут за конечное время? Пора получать премию тысячелетия? Пока нет. Дело в том, что в такой сжимающейся конфигурации течения, локальное число Рейнольдса $R\delta v(R)/\nu \propto R^{4/3}$ убывает с расстоянием и со временем, так что вязкость остановит процесс на масштабе l , там же, где останавливается каскад. Попробуем иначе: закон Ричардсона и (2.8) относятся к неким средним характеристикам турбулентного течения. Может быть, сингулярности возникают за конечное время в редких флуктуациях, которые не дают вклад в каскад энергии? Вообразима ли такая локальная конфигурация течения, что сжимает энергию внутри области размера $\ell(t)$, сохраняя большим локальное число Рейнольдса $v\ell/\nu$? Требуя постоянство энергии (а не потока, как в законе Ричардсона), получим $v^2\ell^d = E = \text{const}$. Это дает $v = E^{1/2}\ell^{-d/2}$, так что $\partial\ell/\partial t = -v$ приводит к другому закону уменьшения масштаба: $\ell^{1+d/2}(t) = \ell^{1+d/2}(0) - (1 + d/2)E^{1/2}t$. Проверим, не остановит ли вязкость такое сжатие: $Re(t) = v(t)\ell(t)/\nu \propto \ell^{1-d/2}$. Случай $d = 2$ является маргинальным; известно, что наличие дополнительных законов сохранения предотвращает возникновение особенности за конечное время в этом случае. При $d = 3$ число Рейнольдса растет при таком сжатии, так что вязкость не способна остановить этот процесс (конечно, если он вообще возможен). Иными словами, сохранение энергии не запрещает возникновение особенности за конечное время в трех и более измерениях, но до сих пор никому не удалось найти такое течение или доказать его невозможность.

Несжимаемые течения обычно перемешивают, а вот сжимаемые течения могут и разделять. Иными словами, неоднородности θ обычно уменьшаются в первом случае, но могут возрастать во втором. Динамика сжимаемых течений рассматривается в следующем разделе, здесь же мы сделаем несколько замечаний о кинематике и особенностях переноса в таких течениях. Уравнение непрерывности в лагранжевой форме (в системе отсчета жидкости) имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \ln [\theta(t)/\theta(0)] = \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{v} [\mathbf{q}(t'), t'] dt' = C(t). \quad (2.21)$$

Сохранение полного объема означает, что коэффициент сжатия, усредненный по всему течению, равен нулю: $\langle C \rangle = 0$. Но среднее от отношения самих плотностей, вообще говоря, больше единицы вследствие *выпуклости* экспоненциальной функции: $\langle [\theta(t)/\theta(0)] \rangle = \langle e^C \rangle \geq 1$. Причина в том, что части течения с положительным $C(t)$ дают больший вклад в плотность, чем части с отрицательным $C(t)$. Более того, $\langle [\theta(t)/\theta(0)] \rangle$, растет со временем во флуктуирующем течении общего положения. Действительно, если лагранжева величина $\operatorname{div} \mathbf{v} [\mathbf{q}(t), t]$ является случайной с нулевым средним и конечным временем корреляции, то интеграл от нее (логарифм плотности) на больших временах есть опять же сумма независимых случайных чисел и должен иметь Гауссову статистику с нулевым средним и средним квадратом, линейно растущим со временем. Это означает, что флуктуации плотности растут и распределение становится все более неоднородным: все большая часть пространства становится пустой, а все большая часть θ собирается в малые плотные области.¹⁴

Интересный и практически важный пример сжимаемого течения представляет облако частиц в потоке, например, капли дождя в облаке или топлива в карбюраторе. Когда таких капель много, можно рассматривать набор их скоростей как непрерывное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и трактовать (1.55) как уравнение в частных производных, связывающее это поле с полем скорости несущего их воздуха $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{\tau}.$$

Даже когда течение воздуха несжимаемо и $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, получаем в силу инерции частиц ненулевое $\sigma(t) = \operatorname{div} \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\tau} = -\nabla_i v_k \nabla_k v_i = -\frac{1}{4} [(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)^2 - (\nabla_i v_k - \nabla_k v_i)^2] = \omega^2 - S^2.$$

Положительность σ в эллиптических областях, где доминирует завихренность, означает, что тяжелые капли выбрасываются из вихрей как из центрифуги. Концентрируются капли в гиперболических областях, где доминирует тензор деформации. Создание сильно неоднородных распределений инерционных частиц в потоках играет роль во многих явлениях, от формирования планет до инициации дождей.

Наше рассмотрение, начиная с формулы (2.20), предполагало случайность лагранжевых величин, что может иметь место не только для течений случайных во времени. Имеются целые классы стационарных или регулярных во времени течений с геометрией достаточно сложной, чтобы обеспечить так называемый лагранжев хаос. Действительно, система d нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений $d\mathbf{q}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{q})$ для функций $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ общего положения имеет сложный фазовый портрет со стохастическими аттракторами, как упоминалось в § 2.2.1.

Два главных урока этого раздела: 1) как статистика возникает из динамики благодаря экспоненциальному росту возмущений во времени и экспоненциальному разбеганию траекторий в пространстве, 2) как эффекты нарушенной симметрии могут оставаться конечными, когда нарушающий симметрию фактор стремится к нулю.

2.3. Акустика

Другой круг нестационарных явлений связан с конечностью скорости звука c . Мы рассмотрим сначала возмущения со скоростями v много меньше c и опишем линейную акустику (в первом порядке по v/c). Затем мы учтем малую нелинейность и трение и получим уравнение Бюргерса. В конце этой главы мы рассмотрим явления, возникающие, когда v превышает c .

2.3.1. Звук

Малые возмущения плотности распространяются как звуковые волны, которые в идеальной жидкости описываются уравнениями непрерывности и Эйлера, линеаризованными относительно возмущений $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (2.22)$$

Для замыкания системы следует связать вариации плотности и давления, т. е. задать уравнение состояния. Производная давления по плотности име-

ет размерность квадрата скорости, поэтому мы обозначим ее c^2 , так что $p' = c^2 \rho'$. Как мы заметили в параграфе 1.2.4, малые колебания потенциальны, что позволяет ввести $\mathbf{v} = \nabla \phi$ и получить из (2.22)

$$\phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0. \quad (2.23)$$

Как видно, c действительно является скоростью звука. Осталось установить, какую производную $\partial p / \partial \rho$ использовать, изотермическую или адиабатическую. Эти производные различаются весьма значительно, например, для газа изотермическая производная дает $c^2 = P / \rho$, тогда как закон адиабаты $P \propto \rho^\gamma$ дает:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (2.24)$$

Адиабатическое уравнение состояния следует использовать, когда можно пренебречь теплообменом между теплыми областями сжатия и холодными областями расширения. Для этого необходимо, чтобы теплопроводность (которую можно оценить как произведение тепловой скорости на длину свободного пробега) была меньше, чем произведение скорости звука на длину волны. Поскольку скорость звука порядка тепловой скорости, получается требование, чтобы длина волны была много больше длины свободного пробега, что всегда выполняется. Таким образом, звук всегда следует рассматривать адиабатически. Ньютон уже знал, что $c^2 = \partial p / \partial \rho$. Экспериментальные данные Бойля показывали $p \propto \rho$ (т. е. были изотермическими), что давало для воздуха значение $c^2 = p / \rho \simeq 290$ м/с, заметно отличающееся от измеренного 340 м/с при 20 °С. Только через сто лет Лаплас получил правильное (адиабатическое) значение, используя $\gamma = 7/5$.

Давление, плотность и все компоненты скорости удовлетворяют *волновому уравнению* (2.23). Частным решением этого уравнения является монохроматическая плоская волна $\phi(\mathbf{r}, t) = \cos(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$. Соотношение между частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} называется законом дисперсии, который линеен для акустических волн: $\omega = ck$. Общее решение волнового уравнения имеет особенно простой вид в одномерном случае:

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (2.25)$$

где f_1, f_2 задаются двумя начальными условиями, например $\phi(x, 0)$ и $\phi_t(x, 0)$. Заметьте, что только $v_x = \partial \phi / \partial x$ отлична от нуля, так что

звуковые волны в жидкостях и газах являются продольными. Любое локализованное одномерное возмущение (плотности, давления или скорости вдоль x) распадается на два одномерных волновых пакета, движущихся в противоположных направлениях без изменения формы. В каждом из волновых пакетов $\partial/\partial t = \pm c\partial/\partial x$, так что второе уравнение (2.22) дает $v = p'/\rho c = c\rho'/\rho$. Амплитуда волны мала, когда $\rho' \ll \rho$, что требует $v \ll c$. Амплитуду быстрых осцилляций давления в звуковой волне можно оценить как $p' \simeq \rho v c$, что намного превышает амплитуду медленной вариации, которую можно оценить из теоремы Бернулли как $\rho v^2/2$.

Для сферически симметричного случая в d измерениях уравнение

$$\phi_{tt} = \frac{c^2}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (2.26)$$

принимает вид $h_{tt} = c^2 \partial^2 h / \partial r^2$ после подстановки $\phi = h/r^a$ только для $d = 1, a = 0$ и $d = 3, a = 1$. Вследствие этого удастся сразу же написать общее решение уравнения (2.26) также и в трехмерном случае:

$$\phi(r, t) = r^{-1} [f_1(r - ct) + f_2(r + ct)]. \quad (2.27)$$

Рассмотрение двумерного (цилиндрического) случая приведено в задаче 2.9.

Чтобы получить пространственную плотность энергии звука E_w , разложим $\rho E + \rho v^2/2$ до членов второго порядка по возмущениям. Постоянный член $\rho_0 E_0$ не имеет отношения к волне. Также следует опустить член первого порядка $\rho' \partial(\rho E) / \partial \rho = w_0 \rho'$, который просто связан с перераспределением массы и исчезает после интегрирования по объему. Остаются квадратичные члены

$$E_w = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2(\rho E)}{\partial \rho^2} = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0}.$$

Плотность потока энергии с той же точностью есть

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} (w + v^2/2) \approx \rho \mathbf{v} w = w' \rho_0 \mathbf{v} + w_0 \rho' \mathbf{v}.$$

Опять мы опустим $w_0 \rho' \mathbf{v}$, соответствующий $w_0 \rho'$ в энергии и исчезающий после интегрирования по объему. Изменение энтальпии есть $w' = p'(\partial w / \partial p)_s = p'/\rho \approx p'/\rho_0$, и мы получаем

$$\mathbf{q} = p' \mathbf{v}.$$

Энергия и ее поток связаны соотношением $\partial E_w / \partial t + \operatorname{div} p' \mathbf{v} = 0$. В плоской волне $E_w = \rho_0 v^2$ и $q = c E_w$. Плотность потока энергии также называют интенсивностью звука. Чтобы лучше слышать журчание далекого ручья и меньше пугаться рычания близкого медведя, наше ухо усиливает тихие и подавляет громкие звуки. Для этого оно воспринимает громкость как логарифм интенсивности при данной частоте. Поэтому интенсивность звука традиционно измеряется не в ваттах на квадратный метр, а в единицах логарифма интенсивности, называемых децибелами¹⁵:

$$q(\text{dB}) = 120 + 10 \log_{10} q \text{ (W/m}^2\text{)}.$$

Плотность импульса есть

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{v} + \mathbf{q}/c^2.$$

Акустическое возмущение в конечном объеме, не ограниченном стенками, имеет ненулевой импульс¹⁶

$$\int \mathbf{j} dV = \rho_0 \int \nabla \phi dV + \int \mathbf{q} dV/c^2 = \int \mathbf{q} dV/c^2. \quad (2.28)$$

Прокомментируем кратко часто встречаемое недоразумение, связанное с импульсом фона в твердом теле. Для правильного понимания следует различать эйлеровы и лагранжевы координаты. Фонон определяется как синусоидальное возмущение смещений атомов. Монохроматическая волна в этих (лагранжевых) координатах имеет нулевой импульс.¹⁷ В отличие от этого, наши уравнения (2.23), (2.26) и решения (2.25), (2.27) записаны в эйлеровых координатах. Покажем, что возмущение, синусоидальное в эйлеровых координатах, имеет ненулевой импульс во втором порядке по амплитуде волны (где эйлеровы и лагранжевы координаты различаются). Для этого рассмотрим эйлерово поле скорости как монохроматическую волну с данными частотой и волновым вектором: $v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. Лагранжева координата частицы жидкости $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t). \quad (2.29)$$

Это нелинейное уравнение, которое можно решить итерациями $X(t) = X_0 + X_1(t) + X_2(t) + \dots$, предполагая $v \ll \omega/k$. Мы увидим в параграфе 3.1.4, что ω/k — это фазовая скорость волны. Когда она много больше

скорости жидкости, смещение частицы жидкости за период много меньше длины волны. Итеративное решение дает осцилляции в первом порядке и средний дрейф во втором:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \frac{u}{\omega} \cos(kX_0 - \omega t), \\ X_2(t) &= \frac{ku^2 t}{2\omega} + \frac{ku^2}{2\omega^2} \sin 2(kX_0 - \omega t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Видим, что в первом порядке по амплитуде волны возмущение распространяется, а во втором сама жидкость течет со скоростью $ku^2/2\omega = u^2/2c$ в направлении распространения волны. Причина в том, что частицы жидкости движутся вместе с волной чуть дольше, чем против нее.

Заметим, что в одномерном случае ненулевой импульс вовсе не означает среднего переноса жидкости. Частицы жидкости обмениваются импульсом, который поэтому может передаваться без переноса массы. Например, можно сгенерировать волновой пакет, подвигав туда-сюда поршень в трубе, что не произведет никакого среднего течения. В этом случае каждая частица жидкости осциллирует в волне, а затем возвращается в исходное положение после прохождения пакета. Следовательно, среднее по времени от потока массы равно нулю в каждой точке: $\overline{\rho v} = \rho_0 \bar{v} + \overline{\rho' v} = 0$. Это требует среднего противотока $\bar{v} = -\overline{\rho' v} / \rho_0 = -\overline{v^2} / c = -u^2 / 2c$, в точности компенсирующего лагранжев дрейф (2.30), полученный в отсутствие средней эйлеровой скорости. Отсюда извлекаем урок: лагранжев дрейф есть квадратичная величина и должен определяться с использованием эйлеровой скорости, включающей также и квадратичные члены. Хотя усредненный по времени импульс $\overline{\rho v}$ равен нулю в каждой точке, усредненный по пространству импульс (2.28) не равен нулю ни в какой момент времени.

2.3.2. Волна Римана

Как мы только что показали, инфинитезимальное одномерное акустическое возмущение распадается на две простые волны, которые затем распространяются, не меняя формы. Покажем теперь, что такие чисто адиабатические волны постоянной формы невозможны при конечной амплитуде (парадокс Эрншоу). В системе отсчета, движущейся со скоростью c , мы бы имели стационарное течение, для которого уравнение непрерывности $\rho v = \text{const} = C$ и Эйлера $v dv = -dp/\rho$ дают $dp/d\rho = (C/\rho)^2$ и $p = p_0 - C^2/\rho$, что противоречит второму закону термодинамики (такой газ

имел бы отрицательное давление при достаточно большом импульсе C или достаточно малой плотности). Отсюда следует, что простая плоская волна должна меняться под действием малой нелинейности.

Рассмотрим одномерное адиабатическое течение газа с уравнением состояния $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$. Будем искать решение уравнения непрерывности и Эйлера в виде *простой волны*, т. е. такой, что любые две из величин v, p, ρ можно выразить через одну оставшуюся. Это обобщение на нелинейный случай того, что мы сделали для линейной волны, но, конечно, решение должно получиться нестационарным, как следует из парадокса Эрншоу. Пусть скорость v будет независимой переменной, а давление и плотность функциями $p(v)$ и $\rho(v)$. Уравнения Эйлера и непрерывности примут вид:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}c^2(v)\frac{d\rho}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{d\rho}{dv}\frac{dv}{dt} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Здесь $c^2(v) \equiv dp/d\rho$. Исключив $d\rho/dv$, получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \pm c(v)\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.31)$$

Два знака соответствуют двум направлениям распространения. В линейном приближении мы имели $u_t + cu_x = 0$, где $c = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$. Теперь мы получаем

$$\begin{aligned} c(v) &= \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0 + \delta p}{\rho_0 + \delta \rho}} = \\ &= c \left(1 + \frac{\delta p}{2p_0} - \frac{\delta \rho}{2\rho_0} \right) = c + v \frac{\gamma - 1}{2}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

поскольку $\delta\rho/\rho_0 = v/c$. Локальная скорость звука растет с амплитудой, поскольку $\gamma > 1$, т. е. положительный эффект возрастания давления перевешивает отрицательный эффект увеличения плотности.

Взяв знак плюс в (2.31), получим уравнение для простой волны, распространяющейся вправо:¹⁸

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)v\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2.33)$$

Перенормировка инерционного члена в сжимаемой среде произошла за счет изменения локального давления и плотности (соответственно, $\gamma/2$

и $-1/2$). Это уравнение описывает простой факт увеличения скорости распространения с увеличением амплитуды возмущения как за счет более высокой скорости, так и за счет более высокого градиента давления. (Скотт Рассел заметил в 1885 году, что звук пушечного залпа распространяется быстрее, чем команда «пли!») Поскольку разные точки профиля волны движутся с разной скоростью, форма профиля изменяется. В частности, более быстрые частицы должны догонять более медленные. Действительно, для начального профиля скорости $v(x, 0) = f(x)$ решение уравнения (2.33) дается неявной формулой

$$v(x, t) = f \left[x - \left(c + v \frac{\gamma + 1}{2} \right) t \right], \quad (2.34)$$

которая может быть полезной для некоторых специальных f , но не очень удобна в общем случае. Чтобы выписать решение в явном виде, следует ввести характеристики — линии в $x-t$ -плоскости, которые соответствуют постоянной v , как показано на рисунке 2.10:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v = c + v \frac{\gamma + 1}{2} \Rightarrow x = x_0 + ct + \frac{\gamma + 1}{2} v(x_0) t, \quad (2.35)$$

где $x_0 = f^{-1}(v)$. Решение (2.35) называется волной Римана или простой волной.

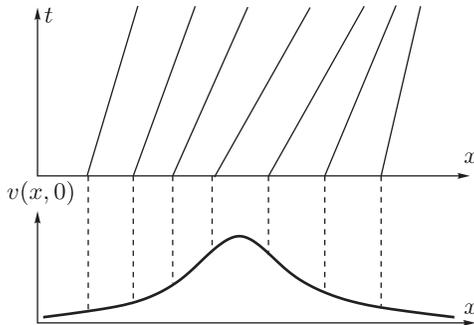


Рис. 2.10. Характеристики (вверху) и начальное распределение скорости (внизу).

В переменных $\xi = x - ct$ и $u = v(\gamma + 1)/2$ уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{du}{dt} = 0,$$

описывающий просто-напросто свободно (по инерции) летящие частицы, каждая со своей неизменной скоростью. Действительно, характеристики — это прямые линии с наклонами, задаваемыми начальным распределением $v(x, 0)$.

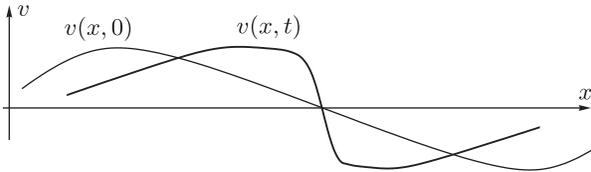


Рис. 2.11. Эволюция профиля скорости при опрокидывании волны.

Видно, что части профиля скорости с положительной $\partial v(x, 0)/\partial x$ становятся более пологими, тогда как убывающий склон с отрицательной $\partial v(x, 0)/\partial x$ становится все круче (рис. 2.11). Характеристики $x(x_0, t)$ пересекаются в $x-t$ -плоскости, когда $(\partial x/\partial x_0)_t$ обращается в ноль:

$$1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{dv}{dx_0} t = 0.$$

Первыми пересекутся характеристики, соответствующие максимально отрицательной производной $dv/dx_0 = f'(x_0)$, что означает $f''(x_0) = 0$. При пересечении характеристик два различных значения скорости существуют в одной точке, что соответствует разрыву поля скорости и образованию ударной волны. Подчеркнем, что при образовании ударной волны пересекаются характеристики, двигавшиеся со скоростями $c + u(x_0)$, а не траектории частиц жидкости, двигающиеся со скоростями $v(x, t)$.

Сделаем замечание общего характера о качественной разнице свойств решений гиперболического уравнения $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ и эллиптических уравнений, например уравнения Лапласа. Как упоминалось в § 1.3.1, решения эллиптических уравнений и их производные регулярны всюду внутри области существования. Напротив, решения гиперболических уравнений распространяются вдоль характеристик, которые могут пересекаться (когда c зависит от u или x, t), что ведет к появлению особенностей решений.

2.3.3. Уравнение Бюргера

Как мы только что установили, в идеальной жидкости нелинейные эффекты приводят к зависимости скорости распространения от амплитуды,

что ведет к пересечению характеристик и опрокидыванию волны: любое акустическое возмущение конечной амплитуды за конечное время создает сингулярность, ударную волну. При образовании разрыва необходим учет пространственных производных, более высоких, чем первые производные, что фигурируют в уравнениях идеальной жидкости. В этом параграфе мы учтем вторую производную, описывающую вязкое трение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \quad (2.36)$$

Это уравнение Бюргерса — первый в этой книге представитель маленького, но знаменитого семейства универсальных нелинейных уравнений. В следующей главе мы познакомимся с двумя другими, не менее знаменитыми представителями этого семейства — нелинейным уравнением Шрёдингера и уравнением Кортевега-де-Вриза (которое соответствует учету третьей производной для акустических возмущений). Заметим, что ν в уравнении Бюргерса есть половина кинематической вязкости. Действительно, из линейризованных уравнений Навье–Стокса и непрерывности нетрудно получить для частоты звука: $\omega = \sqrt{c^2 k^2 - \nu k^3 c} \approx ck - \nu k^2/2$.

Уравнение Бюргерса является минимальной моделью механики сплошной среды: одно скалярное поле $u(x, t)$, эволюционирующее в одном пространственном измерении под действием инерции и трения. Это уравнение и его многомерный аналог описывают целые классы различных систем с инерционной нелинейностью гидродинамического типа $(u\nabla)u$ и вязким трением. Для потенциального случая $u = \nabla\phi$ уравнение принимает вид $\phi_t = -(\nabla\phi)^2/2 + \nu\Delta\phi$, который применяется как для одного, так и для двух пространственных измерений и описывает, в частности, рост поверхностей под действием однородного осаждения и диффузии.¹⁹ Скорость роста уровня поверхности $\phi(r)$ пропорциональна потоку на единицу площади, что обратно пропорционально площади $[1 + (\nabla\phi)^2]^{-1/2} \approx 1 - (\nabla\phi)^2/2$, как показано на рисунке 2.12.

Уравнение Бюргерса может быть преобразовано в линейное уравнение подстановкой Хопфа $u = -2\nu\varphi_\xi/\varphi$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi}}{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi} = \varphi C'(t).$$

После замены $\varphi \rightarrow \varphi \exp C$ (не меняющей u) получим линейное уравнение диффузии:

$$\varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi} = 0.$$

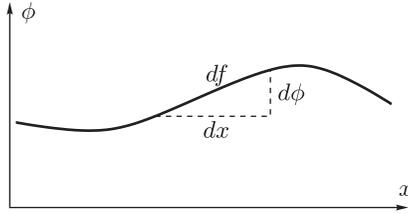


Рис. 2.12. Если ось x направлена вдоль локального градиента поверхности, то элемент площади в этом месте задается формулой $df = \sqrt{(dx)^2 + (d\phi)^2} = dx\sqrt{1 + (\nabla\phi)^2}$.

Задача с начальными условиями имеет простое решение:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi', 0) \exp\left[-\frac{(\xi - \xi')^2}{4\pi\nu t}\right] d\xi' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\xi - \xi')^2}{4\pi\nu t} - \frac{1}{2\nu} \int_0^{\xi'} u(\xi'', 0) d\xi''\right] d\xi'. \end{aligned} \quad (2.37)$$

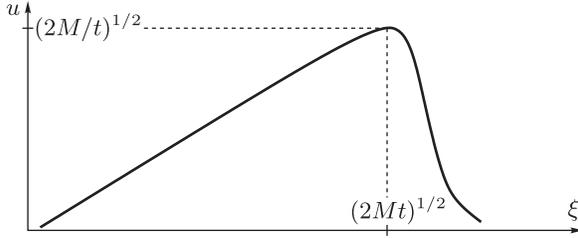
Как любая система с вязкостью, уравнение Бюргерса диссипирует энергию, но сохраняет импульс $M = \int u(x) dx$.²⁰ Если импульс конечен, то любое возмущение приобретает со временем универсальную форму, зависящую только от M и не зависящую от $u(\xi, 0)$. В пределе $t \rightarrow \infty$ уравнение (2.37) дает $\varphi(\xi, t) \rightarrow \pi^{-1/2} F[\xi(4\nu t)^{-1/2}]$, где

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\eta^2 - \frac{1}{2\nu} \int_0^{(y-\eta)\sqrt{4\nu t}} u(\eta', 0) d\eta'\right] d\eta \approx \\ &\approx e^{-M/4\nu} \int_{-\infty}^y e^{-\eta^2} d\eta + e^{M/4\nu} \int_y^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Решения с положительным и отрицательным M переводятся друг в друга преобразованиями $u \rightarrow -u$ и $\xi \rightarrow -\xi$.

Обратите внимание, что M/ν — это число Рейнольдса и что оно не меняется при расплывании возмущения. Это следствие сохранения импульса в одномерном течении. При свободном вязком затухании d -мерного течения диффузия импульса приводит к росту масштаба по закону $R(t) \propto t^{1/2}$. Сохранение полного импульса приводит к тому, что скорость затухает как

$R^{-d} \propto t^{-d/2}$, так что число Рейнольдса меняется как $t^{(1-d)/2}$. Сравните это с тем, что в следе позади обтекаемого тела число Рейнольдса не меняется при $d = 2$, см. § 2.2.3. Другой пример для сравнения — струя в жидкости (§ 1.5.2), где постоянство потока импульса $\int u^2 \partial f \simeq u^2 R^{d-1}$ означает, что число Рейнольдса uR/ν не меняется вдоль струи при $d = 3$.

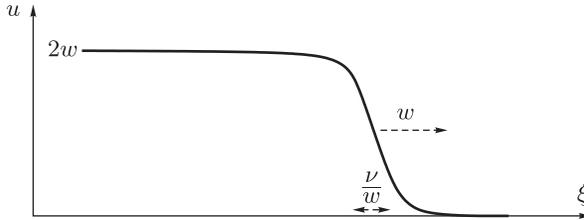


При $M/\nu \gg 1$ локализованное решение принимает особенно простую форму треугольника (а периодическая волна — форму пилы). Действительно, в интервале $0 < y < M/2\nu$ (т. е. при $0 < \xi < \sqrt{2Mt}$) первый член в (2.38) пренебрежимо мал и $F \sim \exp(-y^2)$, так что $u(\xi, t) = \xi/t$. Как при $\xi < 0$, так и при $\xi > \sqrt{2Mt}$ имеем $F \sim \text{const} + \exp(-y^2)$, так что u экспоненциально мала как спереди, так и сзади.

Существует стационарное решение и с бесконечным полным импульсом — это ударная волна. Будем искать решение в виде волны, перемещающейся без изменения формы: $u(\xi - wt)$. В этом случае уравнение Бюргера редуцируется до обыкновенного дифференциального уравнения, которое сразу можно проинтегрировать раз, что дает $-uw + u^2/2 = \nu u_\xi$, если предположить $u \rightarrow 0$ по крайней мере на одной из бесконечностей. Проинтегрировав еще раз, получим

$$u(\xi, t) = \frac{2w}{1 + C \exp[w(\xi - wt)/\nu]}. \quad (2.39)$$

Это решение называется ударной волной, поскольку оно описывает резкое изменение скорости в пространстве: ширина фронта ν/w мала при малой вязкости. Фронт распространяется со скоростью, равной полусумме скоростей по обе стороны — это нетрудно понять, представив фронт как место, где быстрая частица достигает медленную, после чего они слипаются и дальше двигаются вместе с суммарным импульсом. Форма ударной волны стационарна, поскольку нелинейность уравновешена вязкостью.



Уравнение Бюргерса галилеевски инвариантно: если $u(\xi, t)$ является решением, то же справедливо для $u(\xi - wt) + w$ с произвольной константой w . В частности, можно преобразовать (2.39) в стоящую ударную волну $u(\xi, t) = w \tanh(w\xi/2\nu)$.

2.3.4. Акустическая турбулентность

Ударная волна (2.39) диссипирует энергию с темпом $\nu \int u_x^2 dx$, независимым от вязкости, см. (2.40). Таким образом, образование ударных волн представляет механизм ненулевой диссипации энергии в пределе нулевой вязкости для сжимаемых течений (для несжимаемых течений эту роль играет турбулентный каскад). Решение (2.39) показывает механизм этой диссипативной аномалии: производная скорости стремится к бесконечности, когда вязкость стремится к нулю. В невязком пределе ударная волна является разрывом скорости.

Обсудим кратко акустическую турбулентность, производимую крупномасштабным источником звука. Например, представим динамик, возбуждающий на входе длинной трубы акустические шумы с характерными частотами Ω , много меньшими cw/ν , так что число Рейнольдса велико. При распространении по трубе такая турбулентность превращается в набор ударных волн, расстояния между которыми случайны, но в среднем порядка $L \simeq c/\Omega$, что намного превышает ширину фронта ν/w , играющую роль вязкого масштаба. Для каждой ударной волны (2.39)

$$S_3(x) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} [u(x+x') - u(x')]^3 dx' \approx -8w^3 x/L,$$

$$\epsilon = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \nu u_x^2 dx \approx 2w^3/3L, \quad (2.40)$$

что дает

$$S_3 = -12\epsilon x. \quad (2.41)$$

Эта формула — прямой аналог (2.11). Как и в параграфе 2.2.2, было бы неправильным предположить $S_n \simeq (\epsilon x)^{n/3}$, поскольку ударные волны дают куда больший вклад при $n > 1$: $S_n \simeq w^n x/L$, где x/L есть вероятность встретить ударную волну в интервале x .

Вообще говоря, $S_n(x) \sim C_n |x|^n + C'_n |x|$, где первый вклад дается гладкими участками профиля скорости u (правый x -интервал на рис. 2.13), а второй вклад дается $O(x)$ вероятностью встретить ударную волну в интервале x .

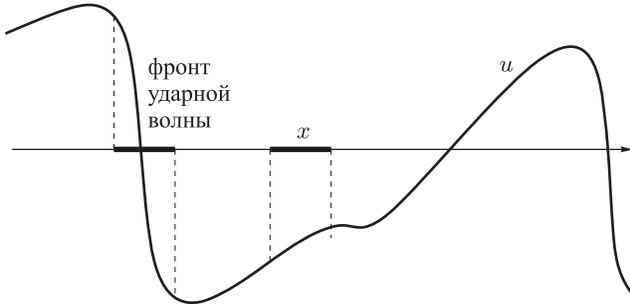


Рис. 2.13. Типичный профиль турбулентной скорости в модели Бюргерса.

Показатели степени $\xi_n = d \ln S_n / d \ln x$ ведут себя следующим образом: $\xi_n = n$ для $0 \leq n \leq 1$ и $\xi_n = 1$ для $n > 1$. Так же, как и в несжимаемой (вихревой) турбулентности, описанной в параграфе 2.2.2, это означает, что функция плотности вероятности $P(\delta u, x)$ не является масштабно инвариантной в инерционном интервале масштабов, т. е. не существует такого a , чтобы функция от $\delta u/x^a$ не зависела от масштаба x . Простая бимодальная природа турбулентности в модели Бюргерса (гладкие профили скорости, перемежаемые ударными волнами) означает, что плотность вероятности определяется двумя (неуниверсальными) функциями, каждая из которых зависит от одного аргумента: $P(\delta u, x) = \delta u^{-1} f_1(\delta u/x) + x f_2(\delta u/u_{\text{rms}})$. Нарушенная масштабная инвариантность означает, что низкие моменты убывают быстрее высоких с уменьшением масштаба. Смысл этого в том, что относительный уровень флуктуаций возрастает с увеличением разрешающей способности: чем меньше масштаб, тем более вероятны большие флуктуации. Ситуация, в которой скейлинговые индексы ξ_n не лежат на прямой, называется аномальным скейлингом, поскольку и в этом случае имеется нарушение симметрии (масштабной инвариантности), не исчезающее при стремлении к нулю отношения масштаба измерения к масштабу накачки, которая, собственно, и нарушает симметрию.

Более формальный и альтернативный (2.40) подход к рассмотрению турбулентности в модели Бюргерса заключается в получении уравнений на структурные

функции аналогично (2.10):

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{\partial S_3}{3\partial x} - 4\epsilon + \nu \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2}. \quad (2.42)$$

Здесь $\epsilon = \nu \langle u_x^2 \rangle$. Уравнение (2.42) описывает как затухание турбулентности в отсутствие внешних сил (в этом случае ϵ убывает со временем), так и случай постоянно действующей накачки, поддерживающей турбулентность, стационарную на масштабах меньше масштаба накачки. В первом случае $\partial S_2 / \partial t \simeq S_2 u / L \ll \epsilon \simeq u^3 / L$, где L есть характерное расстояние между фронтами. Во втором случае $\partial S_2 / \partial t = 0$. В обоих случаях $S_3 = -12\epsilon x + 3\nu \partial S_2 / \partial x$. Рассмотрим теперь предел $\nu \rightarrow 0$ при фиксированном x (и t для затухающей турбулентности). Диссипация на фронте ударной волны обеспечивает конечность ϵ в пределе $\nu \rightarrow 0$, что дает (2.41). Как и для несжимаемой турбулентности, постоянство потока фиксирует третий момент $S_3(x)$, который, таким образом, полностью определяется ϵ и является универсальным, не завися ни от начальных условий для затухающей турбулентности, ни от статистики накачки в стационарном случае. Высшие моменты можно связать с соответствующими интегралами движения $E_n = \int u^{2n} dx / 2$, которые все формально сохраняются в невязком случае. Реально же ударные волны обеспечивают конечный темп диссипации ϵ_n для любого E_n в пределе $\nu \rightarrow 0$, так что для любого целого n можно выразить $S_{2n+1} \propto \epsilon_n x$ (см. задачу 2.5). Это означает, что полная статистика разности скоростей в инерционном интервале зависит от бесконечного числа параметров, определяемых накачкой: потоков всех динамических интегралов движения.

Для несжимаемой турбулентности, описанной в параграфе 2.2.2, до сих пор нет ни понимания структур, ни классификации законов сохранения, ответственных за аномальный скейлинг.

2.3.5. Число Маха

Сжимаемость приводит к конечной скорости распространения возмущений. Здесь мы рассмотрим движение жидкости или тела в ней со скоростями, превышающими скорость звука. Распространение возмущений в более чем одном измерении является весьма своеобразным для сверхзвуковых скоростей. Действительно, рассмотрим среду, движущуюся однородно со скоростью \mathbf{v} . Если создать малое возмущение в точке O , оно будет распространяться относительно среды со скоростью c . В неподвижной же системе отсчета все возможные скорости распространения даются формулой $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ для всех возможных направлений единичного вектора \mathbf{n} . Это означает, что в дозвуковом течении ($v < c$) возмущение распространяется во всех направлениях вокруг источника и в конце концов проходит через все точки среды.

Это видно из рисунка 2.14, где левый круг содержит точку O . В сверхзвуковом же случае векторы $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ все лежат внутри конуса с углом раствора 2α , где $\alpha = \arcsin c/v$ называется углом Маха. Снаружи от конуса Маха, показанного пунктиром на рисунке 2.14, среда остается невозмущенной. Безразмерное отношение $v/c = \mathcal{M}$ называется числом Маха, которое является контрольным параметром, как и число Рейнольдса; течения подобны для одинаковых Re и \mathcal{M} .

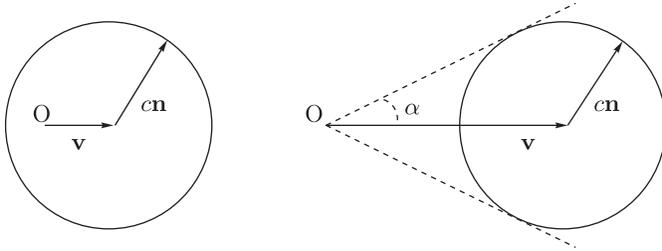


Рис. 2.14. Распространение возмущения из точки O в среде, движущейся с дозвуковой (слева) и сверхзвуковой (справа) скоростями v . Никакое возмущение не может выйти за пределы конуса Маха, обозначенного пунктиром.

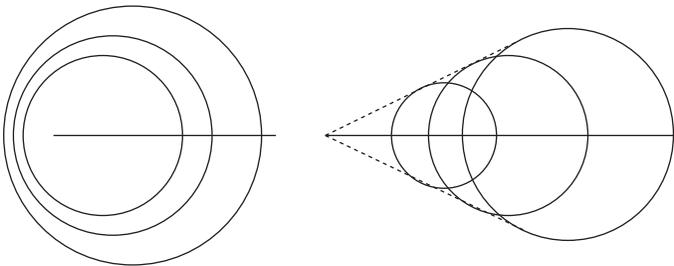


Рис. 2.15. Круги изображают поверхности постоянной фазы акустического возмущения, распространяющегося в среде, движущейся вправо с дозвуковой (слева) и сверхзвуковой (справа) скоростями. Альтернативно эта же картинка изображает звук, возбуждаемый источником, движущимся влево.

Если возбуждать звук в движущейся среде (скажем, периодическими пульсациями), тогда круги на рисунке 2.15 соответствуют линиям постоянной фазы. Как видно, длина волны (расстояние между этими линиями) меньше слева от источника. Для случая движущейся среды это значит, что

длина волны короче с наветренной стороны. Для случая движущегося источника это значит, что длина волны короче перед источником и длиннее позади него. Однако частоты звуков, слышимых наблюдателем, различаются в этих двух случаях.

- (i) Если излучатель и приемник в покое, а движется среда, то излучаемые и принимаемые частоты одинаковы; длина же волны с наветренной стороны меньше в параметр $1 - v/c$ потому, что звук сносится ветром, так что его скорость распространения $c - v$.
- (ii) Когда источник движется, а приемник и среда неподвижны, то скорость распространения — c , так что меньшая длина волны соответствует принимаемой частоте, увеличенной в $1/(1 - v/c)$ раз. Изменение частоты вследствие относительного движения источника и приемника называется эффектом Доплера.

Этот эффект используется, в частности, для измерения скорости жидкости путем рассеяния звука или света на частицах, переносимых течением.²¹ Этот же эффект позволяет ловить водителей, превышающих скорость: неподвижный доплеровский радар излучает волну частоты ω_0 в направлении отражателя (нашей машины), приближающейся со скоростью v . В системе отсчета машины волна падает и отражается с частотой $\omega_0(1 + v/c)$; а вот неподвижный приемник принимает от движущегося источника волну с частотой, умноженной на дополнительный множитель $1/(1 - v/c)$, так что принимаемая частота есть $\omega_0(c+v)/(c-v)$. Это нетрудно понять, вообразив источник излучающий максимумы волны каждую секунду, так что расстояние между ними c . Они приходят на отражатель каждые $c/(c + v)$ секунды, за это время отражатель успевает сдвинуться, так что каждый следующий отражается ближе к источнику и расстояние между максимумами (длина волны) после отражения есть $c(c - v)/(c + v)$. Импульсы возвращаются к источнику со скоростью c каждые $(c - v)/(c + v)$ секунды.

Опишем теперь зависимость частоты от направления распространения. Рассмотрим случай среды, движущейся относительно приемника, который регистрирует частоту, отличающуюся от частоты ck в среде, где монохроматическая волна задается формулой $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - ckt)$. Координаты в движущейся и неподвижной системе связаны простым соотношением $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, так что волна в неподвижной системе задается формулой $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)$. Это значит, что принимаемая в неподвижной системе частота есть

$$\omega_k = ck + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (2.43)$$

Сдвиг частоты $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ называется доплеровским. Когда звук распространяется против ветра, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) < 0$, неподвижный приемник с наветренной стороны регистрирует более низкий тон, чем с подветренной. Иначе говоря, с наветренной стороны период волны больше, потому что требуется больше времени, чтобы сносимая ветром волна данной длины прошла приемник.

Рассмотрим теперь излучатель, который осциллирует с частотой ω_0 и движется со скоростью \mathbf{u} . Частота волны в неподвижной среде $\omega = ck$ зависит от направления распространения. Чтобы выразить ω через ω_0 и угол, перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с источником, где $\omega_k = \omega_0$, а среда движется со скоростью $-\mathbf{u}$, так что (2.43) дает

$$\omega_0 = ck - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = \omega[1 - (u/c) \cos \theta], \quad (2.44)$$

где θ — угол между \mathbf{u} и \mathbf{k} .

Взглянем на (2.43) при $v > c$. Частота звука в покоящейся системе отсчета обращается в ноль на конусе Маха. Действительно, условие $\omega_k = 0$ определяет в \mathbf{k} -пространстве коническую поверхность $ck = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ или в любой плоскости сечения соотношение между компонентами волнового вектора: $v^2 k_x^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2)$. Фронты распространения возмущений в плоскости x, y определяются условием постоянства фазы $k_x dx + k_y dy = 0$, так что $dy/dx = -k_x/k_y = \pm c/\sqrt{v^2 - c^2}$, что как раз и соответствует пунктирным прямым на рисунке 2.15 с углом Маха $\alpha = \arcsin(c/v) = \arctan(c/\sqrt{v^2 - c^2})$. Таким образом, возмущение стационарно на конусе Маха, внутри которого распространяются звуковые волны, а снаружи — невозмущенная среда. Этот конус представляет пример каустики, определяемой как граница между областями без волн с одной стороны и с двумя группами волн с другой стороны. Заметьте, что в любой точке внутри конуса пересекаются две круговых поверхности постоянной фазы. Мы дадим общее описание каустик в § 3.1.4.

Рассмотрим теперь обтекание тела сжимаемым газом. Для узкого тела типа крыла искажение течения телом можно полагать малым, как в параграфе 1.5.4, единственное отличие в том, что теперь надо еще учесть возмущение плотности: $u + \mathbf{v}$, $P_0 + P'$, $\rho_0 + \rho'$. Для малых возмущений $P' = c^2 \rho'$. Линеаризация стационарных уравнений непрерывности и Эйлера дает²²

$$\rho_0 u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla P' = -c^2 \nabla \rho', \quad u \frac{\partial \rho'}{\partial x} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.45)$$

Взяв ротор уравнения Эйлера, получим $\partial \omega / \partial x = 0$, т. е. независимость завихренности от x . Поскольку завихренность отсутствует в набегающем

потоке вдали от тела, она равна нулю всюду (в используемом здесь линейном приближении).²³ Таким образом, мы имеем дело с потенциальным течением $\mathbf{v} = \nabla\phi$, которое удовлетворяет следующему уравнению:

$$(1 - \mathcal{M}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.46)$$

Как видим, число Маха $\mathcal{M} = u/c$ определяет, является ли уравнение эллиптическим или гиперболическим. При $\mathcal{M} < 1$ уравнение эллиптическое и линии тока всюду гладкие. При $\mathcal{M} > 1$ уравнение гиперболическое и линии тока имеют особенности. Каждая линия имеет две точки перелома на плоскостях Маха, отходящих от передней и задней кромки крыла; линии искривляются между плоскостями и остаются прямыми снаружи, см. рисунок 2.16.

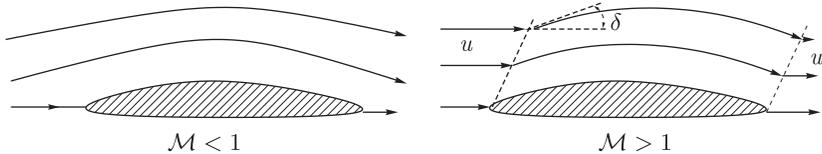


Рис. 2.16. Дозвуковое (слева) и сверхзвуковое (справа) обтекание узкого крыла.

В эллиптическом случае замена переменных $x \rightarrow x(1 - \mathcal{M}^2)^{-1/2}$ превращает (2.46) в уравнение Лапласа $\text{div } \mathbf{v} = \Delta\phi = 0$, которое описывало несжимаемый случай. Попросту говоря, при дозвуковых скоростях сжимаемость газа имеет тот же эффект, что и удлинение обтекаемого тела. Поскольку подъемная сила пропорциональна циркуляции скорости, т. е. ширине крыла, мы заключаем, что сжимаемость увеличивает подъемную силу в $(1 - \mathcal{M}^2)^{-1/2}$ раз.

В гиперболическом случае решение имеет вид

$$\phi = F(x - By), \quad B = (\mathcal{M}^2 - 1)^{1/2}.$$

На границе крыла, форма которой задается функцией $y = f(x)$, условие $v_y = \partial\phi/\partial y = uf'(x)$ дает $F = -Uf/B$. Это означает, что в линейном приближении линии тока точно следуют форме крыла и становятся прямыми, пройдя заднюю поверхность Маха. Как видим, скорость и плотность испытывают скачок, пропорциональный $f'(0)$, при прохождении через поверхности Маха. Это значит, что эти поверхности (как плоскости, так и конусы, описанные выше) являются фронтами ударных волн.

Свойства течения по разные стороны фронта связаны законами сохранения массы, энергии и импульса (Рэнкин, 1870; Гюгонио, 1885): если w — компонента скорости газа, нормальная фронту, то потоки ρw , $\rho w(W + w^2/2) = \rho w[\gamma P/(\gamma - 1)\rho + w^2/2]$ и $P + \rho w^2$ должны быть одинаковыми по обе стороны. Получившиеся три соотношения позволяют выразить, например, давление, скорость и плотность позади фронта через их значения перед фронтом (задача 2.3). В частности, для хорошо обтекаемого узкого тела, отклоняющего линии тока на малый угол $\delta = f'(0)$ после прохождения фронта, получим следующее возрастание давления за счет уменьшения скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P} &\propto \frac{u^2 - (u + v_x)^2 - v_y^2}{c^2} = M^2 \left[1 - \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^2 - \delta^2 \right] \approx \\ &\approx \frac{2\delta M^2}{\sqrt{M^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Наличие скачка давления на фронте приводит к дополнительному вкладу в силу сопротивления, которая должна испытывать скачок, когда M проходит через единицу. Механизм дополнительного сопротивления — это диссипация на ударных фронтах и излучение акустической энергии в пространстве между фронтами. Сингулярности подъемной силы и силы сопротивления при $M \rightarrow 1$ называют звуковым барьером. Как видно, наше предположение о малости возмущения перестает работать при $M \rightarrow 1$. Для сравнения напомним, что вклад следа в силу сопротивления пропорционален ρu^2 , тогда как вклад ударной волны пропорционален $P M^2 / \sqrt{M^2 - 1} \simeq \rho u^2 / \sqrt{M^2 - 1}$.

Как видим, в линейном приближении стационарное возмущение течения между плоскостями Маха не убывает с расстоянием от крыла. Учет нелинейности приведет к естественному заключению, что величина скачка убывает с увеличением расстояния от тела. Мы обнаружили в параграфе 2.3.2, что скорость распространения зависит от амплитуды, и это же должно быть справедливо для угла α . Это значит, что поверхности Маха или фронты являются плоскими только там, где амплитуда мала, т. е. обычно вдали от тела. Слабые ударные волны описываются уравнением (2.38), где координата ξ перпендикулярна поверхности фронта. Вообще же, уравнение Бюргерса применимо к описанию поверхности Маха лишь при M —

$-1 \ll 1$. Действительно, согласно (2.38) и (2.39), ширина фронта есть

$$\frac{\nu}{u - c} = \frac{\nu}{c(\mathcal{M} - 1)} \simeq \frac{l_m v_T}{c(\mathcal{M} - 1)},$$

что превышает молекулярную длину свободного пробега l_m только при $\mathcal{M} - 1 \ll 1$, поскольку тепловая скорость молекул v_T порядка скорости звука в газе c (см. также параграф 1.4.4). Оставаясь последовательно в рамках описания сплошной среды, следует рассматривать фронты сильных ударных волн как разрывы, т. е. имеющие нулевую ширину.

Задачи

- 2.1 (i) Двумерное несжимаемое течение вокруг седловой точки соответствует чистой деформации без вращения: $v_x = \lambda x$, $v_y = -\lambda y$. Координаты $x(t)$, $y(t)$ любой частицы жидкости удовлетворяют уравнениям $\dot{x} = v_x(x)$ и $\dot{y} = v_y(y)$. Изменение длины вектора $\mathbf{r} = (x, y)$ зависит от начальной ориентации и времени. Найдите, какая доля векторов увеличит свою длину за время T .
- (ii) Рассмотрим двумерное стационарное несжимаемое течение с постоянными в пространстве завихренностью ω и компонентами тензора деформации λ : $v_x = \lambda x + \omega y/2$, $v_y = -\lambda y - \omega x/2$. Опишите, как меняется закон движения частицы $x(t)$, $y(t)$ при изменении отношения λ/ω .
- 2.2 Рассмотрим слой жидкости или газа между двумя параллельными горизонтальными плоскостями на расстоянии h , между которыми поддерживается разность температур Θ . Даны кинематическая вязкость ν , температуропроводность χ (обе измеряемые в $\text{см}^2 \text{с}^{-1}$) и коэффициент теплового расширения $\beta = -\partial \ln \rho / \partial T$ такой, что вызванное разностью температур относительное изменение плотности $\beta\Theta$ намного превышает значение gh/c^2 , вызванное разностью гидростатических давлений, где c — это скорость звука. Найдите параметры, контролирующие возникновение конвективной неустойчивости (носящей имя Рэлея–Бернара).
- 2.3 Дисперсия Тэйлора в узкой длинной трубе. Получите ламинарный профиль скорости $v(r)$, переносящий средний поток \bar{v} сквозь трубу кругового сечения радиуса a . Подставьте этот профиль в уравнение переноса-диффузии (2.17) и выведите уравнение на усредненную по

сечению концентрацию $\bar{\theta}(x, t) = \int \theta(x, \mathbf{r}, t) dx / \pi a^2$, рассматривая времена превышающие a^2/κ , где κ коэффициент молекулярной диффузии. Найдите эффективный коэффициент диффузии вдоль трубы.

- 2.4 Рассмотрим ударную волну со скоростью w_1 , перпендикулярную к фронту в политропном газе с энтальпией

$$W = c_p T = PV \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{P}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1},$$

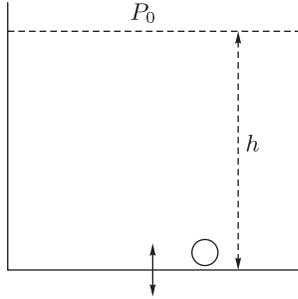
где $\gamma = c_p/c_v$. Запишите соотношения Рэнкина–Гюгонно для этого случая. Выразите отношение плотностей ρ_2/ρ_1 через отношение давлений P_2/P_1 , индексы 1 и 2 обозначают значения соответственно до и после фронта. Выразите также P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 и $M_2 = w_2/c_2$ через число Маха перед фронтом $M_1 = w_1/c_1$. Рассмотрите пределы сильных и слабых разрывов.

- 2.5 Для турбулентности в модели Бюргерса выразите структурную функцию пятого порядка S_5 через темп диссипации $\epsilon_4 = 6\nu[\langle u^2 u_x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \langle u_x^2 \rangle]$.

- 2.6 В газе плотности ρ взвешена маленькая сферическая капля плотности $\rho_0 \gg \rho$ в поле скорости стоячей звуковой волны $v = a \sin(\omega t)$. Рассмотрите случай, когда капля испаряется так, что ее объем $V(t)$ убывает пропорционально относительной скорости: $V^{-1} dV/dt = -\alpha|v - u|$. Найдите как скорость капли u меняется со временем, если сначала капля находилась в покое.

- 2.7 Рассказывают, что создатели первых ракет столкнулись со странными неполадками в работе датчика уровня топлива. Датчиком служил небольшой поплавок (наполненный воздухом резиновый шарик), позиция которого должна была показывать уровень жидкого топлива на восходящей фазе траектории ракеты. Однако во время разогрева двигателя перед стартом пузырек неожиданно тонул, опускаясь на дно, сигнализируя нулевой уровень топлива и отключая двигатель. Каким образом производимые двигателем вибрации обращают направления эффективной силы тяжести для шарика?

Рассмотрите пузырек газа в сосуде, наполненном до глубины h жидкостью плотности ρ . Сосуд вибрирует вертикально по закону $x(t) = (Ag/\omega^2) \sin(\omega t)$, где g — обычное ускорение свободного падения. Определите пороговую амплитуду колебаний A , необходимую, чтобы удерживать пузырек у дна. Давление на свободной поверхности — P_0 .



- 2.8 Вы, наверное, замечали, что интенсивность быстро падает с расстоянием, когда звук распространяется против ветра. Объясните, почему так трудно слышать кричащих против ветра.
- 2.9 Опишите аксиально симметричное распространение звука. Подсказка: используйте (2.27).
- 2.10 Соотношение (2.44) $\omega_0 = \omega[1 - (u/c) \cos \theta]$ показывает, что излучаемая частота ω_0 противоположна по знаку принимаемой частоте ω , когда источник и приемник сближаются со сверхзвуковой скоростью, т. е. $u \cos \theta > c$. Что это означает физически для принимаемого и излучаемого сигналов?
- 2.11 Рассмотрите стационарное течение сжимаемого газа в отсутствие каких-либо сил, действующих в объеме. Увеличивается или уменьшается поток ρv вдоль линии тока при увеличении скорости v ? Подсказка: выразите изменение давления как $dp = c^2 d\rho$.
- 2.12 Рассмотрите модель звездного ветра как сферически-симметричное стационарное радиальное истечение идеального газа в гравитационном поле звезды массы M . Может ли скорость такого течения неостановимо расти с расстоянием? Предположите для простоты температуру газа постоянной (что может быть обеспечено высокой теплопроводностью за счет излучения).

ГЛАВА 3

Диспергирующие волны

В этой главе мы рассмотрим физические системы, в которых могут распространяться волны малой амплитуды со скоростью, зависящей от длины волны. Распространение таких волн радикально отличается от поведения звуковых волн (или света в вакууме), которые все распространяются с одной скоростью, так что, например, одномерное малое возмущение распространяется, не меняя формы. Когда же разные фурье-гармоники бегут с разными скоростями, форма возмущения меняется при распространении. В частности, локализованное возмущение расплывается. Дисперсия скоростей волн по длинам приводит к дисперсии пакета в пространстве, поэтому такие волны называются диспергирующими. Поскольку волны разных длин бегут с разными скоростями, они со временем разбегаются и оказываются в разных местах. В результате в каждом данном месте наблюдается синусоидальное возмущение независимо от свойств далекого источника. Такую картину нам всем доводилось наблюдать на поверхности воды. То, что мы часто наблюдаем периодические волны на поверхности воды и редко слышим чистую ноту, очевидно, связано с наличием дисперсии скорости волн в первом случае и отсутствием во втором. Поверхностные волны являются главным предметом рассмотрения в этой главе, однако подходы и результаты применимы в равной мере к многочисленным диспергирующим волнам, распространяющимся внутри жидкостей, плазмы и твердых тел. Дисперсия обычно является результатом анизотропии или неоднородности среды. Мы постараемся сохранить общность подхода также при переходе к рассмотрению нелинейных диспергирующих волн. Для этого мы будем полагать слабыми как нелинейность, вследствие малости амплитуд, так и дисперсию, что возможно в двух отдельных случаях: 1) когда закон дисперсии близок к акустическому; 2) когда волны возбуждаются в узком спектральном интервале. Эти два случая описываются соответственно уравнениями Кортевега-де-Вриза и нелинейного уравнения Шрёдингера, которые столь же универсальны для диспергирующих волн, как уравнение Бюргерса для

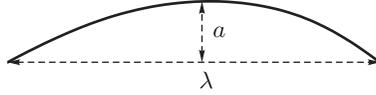
недиспергирующих. В частности, результаты этой главы будут применимы к нелинейной оптике и квантовой физике не менее, чем к гидродинамике.

3.1. Линейные волны

Для существования волн необходимы или сжимаемость, или неоднородность среды. В этом параграфе мы рассмотрим несжимаемую жидкость с предельной неоднородностью — открытой поверхностью. Мы опишем волны на поверхности жидкости как пример диспергирующих волн, учтем силу тяжести и поверхностное натяжение как возвращающие силы, а также затухание волн из-за вязкого трения. Затем мы введем общие понятия фазовой и групповой скоростей, которые, вообще говоря, различны для диспергирующих волн, и обсудим физические явления, возникающие из-за этой разности.

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Следовательно, любые линейные волны могут быть полностью охарактеризованы так называемым дисперсионным соотношением между частотой волны ω и длиной волны λ . Как подобает физикам или инженерам, прежде чем приступить к формальным выкладкам, попробуем оценить $\omega(\lambda)$ с точностью до числового коэффициента. Простейшие оценки обычно получаются из соображений размерности. Если сила тяжести является доминирующей возвращающей силой, то единственное соотношение между ω , λ , g — это $\omega^2 \simeq g\lambda^{-1}$. Если же сила поверхностного натяжения доминирует, то, помимо коэффициента поверхностного натяжения α (с размерностью сила/длина = грамм/с²), должна также входить плотность жидкости ρ , характеризующая инерцию. В этом случае имеется четыре величины, ω , λ , α , ρ , и три размерности *грамм*, *сантиметр* и *секунда*, так что, согласно π -теореме из параграфа 1.4.4, выражение для частоты (с точностью до безразмерного параметра) опять же единственно: $\omega^2 \simeq \alpha\lambda^{-3}\rho^{-1}$.

А вот если силы тяжести и поверхностного натяжения сравнимы, то наличие пяти параметров и трех размерностей не позволяет определить дисперсионное соотношение. Надо подняться на следующий (все еще элементарный) уровень и воспользоваться вторым законом Ньютона (сила равна массе на ускорение) или эквивалентной ему вириальной теореме, которая утверждает, что для малых колебаний средние по периоду значения кинетической и потенциальной энергий равны.



Рассмотрим вертикальные колебания жидкости с амплитудой a и частотой ω . Скорость жидкости можно оценить как ωa , а ускорение — как $\omega^2 a$. Когда глубина жидкости намного больше длины волны, можно полагать, что слой глубины λ вовлечен в движение. Второй закон Ньютона для единичной площади поверхности тогда требует, чтобы произведение массы $\rho\lambda$ и ускорения $\omega^2 a$ равнялось весу $\rho a g$:

$$\rho\omega^2 a\lambda \simeq \rho a g \Rightarrow \omega^2 \simeq g\lambda^{-1}. \quad (3.1)$$

Такой же результат получается из вириальной теоремы для единицы площади: кинетическая энергия есть произведение массы $\rho\lambda$ и квадрата скорости $\omega^2 a^2$, а потенциальная энергия есть вес поднятой жидкости $\rho a g$, умноженный на высоту подъема a .

Искривленная поверхность обладает дополнительной потенциальной энергией, поверхностная плотность которой равна произведению коэффициента поверхностного натяжения α и кривизны поверхности $(a/\lambda)^2$. Поскольку потенциальные энергии складываются, получаем дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости:

$$\omega^2 \simeq g\lambda^{-1} + \alpha\lambda^{-3}\rho^{-1}. \quad (3.2)$$

Если глубина h много меньше, чем длина волны λ , жидкость в основном движется горизонтально, поскольку вертикальная скорость ωa меньше горизонтальной за счет геометрического фактора h/λ . В этом случае масса, которая движется, есть ρh . Кинетическая энергия $\rho\omega^2 a^2 \lambda^2 h^{-1}$ есть масса на квадрат горизонтальной скорости, а потенциальная энергия та же, что и на глубокой воде. Вириальная теорема дает следующую оценку для дисперсионного соотношения волн на мелкой воде:

$$\omega^2 \simeq gh\lambda^{-2} + \alpha h\lambda^{-4}\rho^{-1}. \quad (3.3)$$

3.1.1. Поверхностные гравитационные волны

Приступим теперь к формальному описанию движения жидкости в поверхностной волне. Как было замечено в параграфе 1.2.4, колебания малой амплитуды потенциальны. Потенциал скорости в несжимаемой жидкости

удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\phi = 0$, а давление задается формулой Бернулли

$$p = -\rho(\partial\phi/\partial t + gz + v^2/2) \approx -\rho(\partial\phi/\partial t + gz),$$

где мы пренебрегли квадратичными членами из-за малости амплитуды. Как и при рассмотрении неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в параграфе 2.1, мы обозначим отклонение поверхности от горизонтали $\zeta(x, t)$. Атмосферное давление на поверхности можно включить в потенциал $\phi \rightarrow \phi + p_0 t/\rho$, не меняя поля скорости. В результате получим уравнения движения поверхности:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad g\zeta + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad g\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.4)$$

Первое уравнение — это линеаризованное кинематическое граничное условие (2.1), обеспечивающее равенство скорости изменения высоты поверхности вертикальной компоненте скорости жидкости на поверхности. Второе уравнение — это линеаризованное динамическое граничное условие, требующее постоянства давления вдоль границы; его также можно получить, выразив горизонтальное ускорение через силу тяжести, действующую на наклонную поверхность: $dv_x/dt = -g\partial\zeta/\partial x$. Чтобы решить (3.4) вместе с $\Delta\phi = 0$, нужно еще поставить граничные условия на дне: $\partial\phi/\partial z = 0$ при $z = -h$. Решения уравнения Лапласа, периодические в одном направлении, должны быть экспоненциальными в другом направлении:

$$\phi(x, z, t) = a \cos(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)], \quad (3.5)$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh. \quad (3.6)$$

Дифференцируя потенциал по времени и координатам, получим

$$\zeta = -a(\omega/g) \sin(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)], \quad (3.7)$$

$$v_x = -ak \sin(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)], \quad (3.8)$$

$$v_z = ak \cos(kx - \omega t) \sinh[k(z + h)]. \quad (3.9)$$

Заметим, что в линейном приближении $v_x = gk\zeta/\omega$, т. е. жидкость двигается вперед на горбах и назад во впадинах, как известно каждому пловцу. Условие слабой нелинейности $\partial v/\partial t \gg v\partial v/\partial x$ требует $\omega \gg ak^2 = kv$, что эквивалентно $g \gg kv^2$.

Траектории частиц жидкости можно получить, интегрируя уравнение $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ в предположении малых колебаний вблизи $\mathbf{r}_0 = (x_0, z_0)$, как при

решении (2.29). Смещение частиц жидкости за период, оцениваемое как скорость ka на время $2\pi/\omega$, предполагается много меньше длины волны $2\pi/k$. В первом порядке по малому параметру ak^2/ω получаем

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{ak}{\omega} \cos(kx_0 - \omega t) \cosh[k(z_0 + h)], \\ z &= z_0 - \frac{ak}{\omega} \sin(kx_0 - \omega t) \sinh[k(z_0 + h)]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Траектории — это эллипсы:

$$\left(\frac{x - x_0}{\cosh[k(z_0 + h)]} \right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\sinh[k(z_0 + h)]} \right)^2 = \left(\frac{ak}{\omega} \right)^2.$$

При удалении от поверхности вглубь амплитуда колебаний уменьшается, вдобавок эллипсы сплюсываются при приближении ко дну.

Можно различить два предела по отношению глубины жидкости к длине волны. На мелкой воде ($kh \ll 1$) колебания жидкости почти одномерны: $v_z/v_x \propto kh$, а дисперсионное соотношение звуковое: $\omega = \sqrt{gh} k$ (эта формула — все, что нужно, чтобы решить задачу 3.1).

Для волны на глубокой воде ($kh \gg 1$) частота $\omega = \sqrt{gk}$ похожа на частоту $\sqrt{g/L}$ для маятника с длиной подвески L . Действительно, стоячая поверхностная волна является, в сущности, жидким маятником, что хорошо видно из верхнего рисунка 3.1. Для бегущей волны получаем

$$\zeta = -\frac{u}{\omega} \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad (3.11)$$

$$v_x = -u \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad (3.12)$$

$$v_z = u \cos(kx - \omega t) e^{kz}. \quad (3.13)$$

Частицы жидкости движутся по окружностям, радиусы которых экспоненциально убывают с глубиной с показателем экспоненты, равным горизонтальному волновому числу. Это опять-таки свойство решений уравнения Лапласа, упоминавшееся в параграфе 2.2.3: если решение осциллирует в одном направлении, оно убывает экспоненциально в поперечном направлении. Это подтверждает наше предположение, что поверхностная волна на глубокой воде вовлекает в движение слой жидкости, сравнимый с длиной волны, что хорошо знакомо ныряльщикам.

Во втором порядке бегущая волна имеет ненулевой импульс и сопровождается средним дрейфом, называемый стоковым. Причина этого в том, что потенциал скорости должен быть периодическим по x для глубокой

воды, поскольку другое возможное решение уравнения Лапласа $xf(z)$ исключается требованием $df(z)/dz \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Отсутствие линейного члена в потенциале означает невозможность скорости независимой от x и противотока, компенсирующего дрейф, в отличие от случая звука, обсуждавшегося в конце § 2.3.1. Следовательно, распространение потенциальных гравитационных волн на глубокой воде всегда сопровождается течением вблизи поверхности.¹ Поскольку полный импульс в любой горизонтальной плоскости равен нулю для периодического потенциала, вклад в среднее течение дает только возмущение поверхности: ненулевой импульс возникает во втором порядке как произведение v, ζ возмущений первого порядка. Умножая (3.11) на (3.12) и усредняя по периоду, получим средний импульс на единице площади: $\rho \langle \zeta v_x \rangle = \rho u^2 / 2\omega$. В точности как в (2.30), можно найти дрейфовую скорость:

$$\langle v_x \rangle = -ku \langle (x - x_0) \cos(kx - \omega t) + (z - z_0) \sin(kx - \omega t) \rangle = \frac{ku^2}{\omega}. \quad (3.14)$$

Из общего выражения (1.42) для смещения можно также получить дрейфовую скорость как среднее по периоду от $k|\nabla\phi|^2/\omega = kv^2/\omega$. Для волн малой амплитуды скорость постоянна на круговой орбите частицы, так что мы воспроизводим (3.14). В глубоком бассейне конечной длины поверхностный дрейф должен компенсироваться противотоком у дна, как можно заметить на нижнем рисунке 3.1. Если же глубина небольшая, то течения у поверхности и дна разделить невозможно, так что распространение волны на мелкой воде может и не сопровождаться переносом массы, в точности как для звука.

3.1.2. Вязкое затухание

Как только мы вспомним о вязкости, сразу увидим, что наше решение (3.5) не удовлетворяет граничным условиям. На свободной поверхности не удовлетворяется условие

$$\sigma_{ij}n_j = \sigma'_{ij}n_j - pn_i = 0$$

(см. параграф 1.4.3), поскольку отличны от нуля как касательный тензор напряжений $\sigma_{xz} = -2\eta\phi_{xz}$, так и осциллирующая часть нормального тензора $\sigma'_{zz} = -2\eta\phi_{zz}$. Заметим также, что (3.12) дает ненулевую v_x на дне. Чтобы удовлетворить граничным условиям, истинное вязкое решение не может быть чисто потенциальным и должно содержать завихренность. Тем не менее, когда вязкость мала, завихренность отлична от нуля только в узких

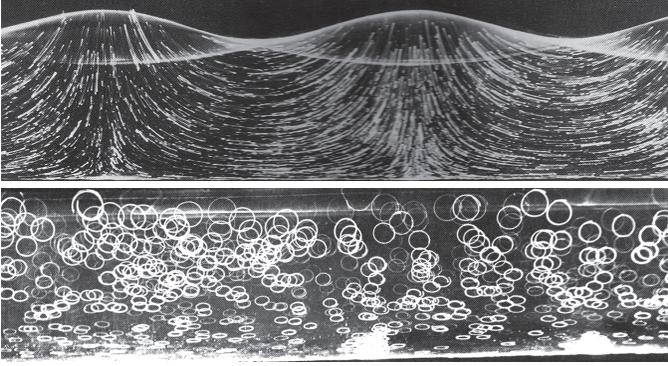


Рис. 3.1. Белые частицы, взвешенные в воде, фотографировались в течение одного периода. Верхняя фотография показывает стоячую волну; в этом случае траектории частиц являются также линиями тока. Нижняя фотография показывает волну, распространяющуюся вправо; обратите внимание на то, что некоторые петли разомкнуты из-за Стоксова дрейфа у поверхности и компенсирующего противотока у дна. В обоих случаях амплитуда волны 4%, а глубина 22% длины волны. Воспроизводится из A. Walleit and F. Ruellan, *La Houille Blanche*, **5**, 483–489 (1950).

пограничных слоях у дна и поверхности. Стандартное вычисление² темпа вязкого затухания сводится к вычислению вязкого тензора напряжений на решении (3.5) и подстановке его в (1.48):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV = -2\eta \int \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} \right)^2 dV = \\ &= -2\eta \int (\phi_{zz}^2 + \phi_{xx}^2 + 2\phi_{xz}^2) dV = -8\eta \int \phi_{xz}^2 dV. \end{aligned}$$

Это означает пренебрежение узкими пограничными слоями у поверхности и дна (где движение является слабым вследствие $kh \gg 1$). Предполагая затухание на периоде малым (что требует $\nu k^2 \ll \omega$ и эквивалентно малости ширины пограничного слоя $\sqrt{\nu/\omega}$ в сравнении с длиной волны), мы рассмотрим усредненную по периоду энергию, равную удвоенной кинетической энергии вследствие вириальной теоремы:

$$\bar{E} = \int_0^{2\pi/\omega} E dt \omega / 2\pi = \rho \int \overline{v^2} dV = 2\rho k^2 \int \overline{\phi^2} dV.$$

Потерю энергии за период можно выразить через среднюю энергию:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{dE}{dt} dt \omega/2\pi = -8\eta k^4 \int \bar{\phi}^2 dV = -4\nu k^2 \bar{E}. \quad (3.15)$$

Самое время остановиться и задуматься. Вот, что кажется странным в этом незамысловатом вычислении: наше решение (3.5) удовлетворяет не только уравнению Эйлера, но и уравнению Навье–Стокса, поскольку вязкий член тождественно равен нулю для потенциального течения: $\Delta \mathbf{v} = 0$. Откуда тогда могут взяться ненулевые потери? А вот откуда: тензор вязких напряжений σ'_{ik} вовсе не ноль, нулю равна только его дивергенция, дающая вязкую силу $\rho \nu \Delta \mathbf{v} = \partial \sigma'_{ik} / \partial x_k$. Иными словами, на всякий элемент жидкости с разных сторон действуют вязкие силы, результирующая которых равна нулю и не дает вклад в ускорение. Эти силы однако деформируют жидкость, что приводит к диссипации, темп которой есть $\sigma'_{ik} \partial v_i / \partial x_k$. Действительно, мы показали в (1.47), что вязкий вклад в скорость изменения энергии состоит из двух членов: $v_i \partial \sigma'_{ik} / \partial x_k = \partial [v_i \sigma'_{ik}] / \partial x_k - \sigma'_{ik} \partial v_i / \partial x_k$. Первый из них есть дивергенция потока энергии и описывает перенос с места на место. Второй же член описывает диссипацию и имеет ненулевое среднее. Таким образом, вязкое трение приводит к затуханию волн, как и ожидалось. Другая странность в (3.15) связана с тем, что мы использовали решение (3.5), которое хоть и удовлетворяет уравнению, но не удовлетворяет вязким граничным условиям. Как же это нам удалось описать результат искажения течения в пограничном слое с помощью интегрирования по объему неискаженного решения? Дело в том, что $\sigma'_{ik} \partial v_i / \partial x_k$ распределено по объему жидкости, а вовсе не сконцентрировано в вязком пограничном слое, в отличие от $v_i \partial \sigma'_{ik} / \partial x_k = \mathbf{v} \Delta \mathbf{v}$, а интегралы по всему объему от этих двух величин одинаковы. Это можно наглядно проиллюстрировать на простом примере функции $U(x)$, заданной на отрезке $x \in [0, 1]$, которая почти всюду близка к линейной, но закругляется в узкой окрестности возле $x = 1$, чтобы обеспечить $U'(1) = 0$, как показано на рисунке 3.2. Заметим, что $\int_0^1 U U'' dx = - \int_0^1 (U')^2 dx$ не равен нулю и набирается на всем отрезке.

Однако пограничные слои вообще не фигурируют в самом первом (и до сих пор самом элегантном) вычислении темпа вязкого затухания (3.15), которое было проделано Стоксом. Поскольку потенциальное решение удовлетворяет уравнению Навье–Стокса, он предложил *вообразить*, как можно удовлетворить также и граничным условиям, чтобы не возникло пограничных слоев. Во-первых, нужно растяжимое дно, точки которого движутся со скоростями, распределенными по закону $v_x(-h) =$

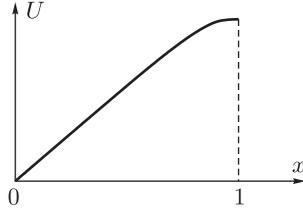


Рис. 3.2. Функция, у которой вторая производная U'' мала всюду, кроме малой окрестности точки $x = 1$, однако $\int_0^1 U U'' dx = -\int_0^1 (U')^2 dx$ набирается на всей длине отрезка.

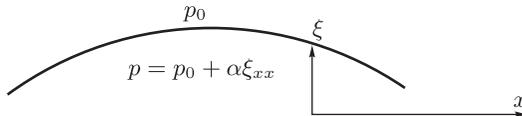
$= -k \sin(kx - \omega t)$. Поскольку $\sigma'_{xz}(-h) = 0$, такое движение дна не будет совершать работы. Вдобавок к поверхности жидкости следует приложить дополнительные силы, компенсирующие $\sigma_{zz}(0)$ и $\sigma_{xz}(0)$. Вот эти-то силы и будут совершать работу $v_x \sigma_{xz} + v_z \sigma_{zz} = 2\eta(\phi_x \phi_{xz} + \phi_z \phi_{zz})$ на единицу площади в единицу времени. После усреднения по периоду монохроматической волны средняя мощность получается $4\eta k^2 \overline{\phi \phi_z}$, что есть $8\nu k^2$, умноженное на среднюю кинетическую энергию на единицу площади $\rho \overline{\phi \phi_z} / 2$; чтобы в этом убедиться, запишем

$$\rho \int (\nabla \phi)^2 dV = \rho \int \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV = \int \phi \phi_z dS.$$

После введения дополнительных сил на поверхности наше решение удовлетворяет и уравнению и граничным условиям, а стало быть, является стационарным. Следовательно, работа этих сил в точности компенсирует темп вязких потерь, который и есть произведение $4\nu k^2$ на среднюю энергию.³

3.1.3. Капиллярные волны

Поверхностное натяжение создает дополнительный перепад давления, пропорциональный кривизне поверхности:



Это изменит второе уравнение (3.4),

$$g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

и добавит энергию поверхностного натяжения к дисперсионному соотношению:

$$\omega^2 = (gk + \alpha k^3 / \rho) \tanh kh. \quad (3.17)$$

Восстанавливающие форму поверхности факторы (сила тяжести и поверхностное натяжение) входят в ω^2 аддитивно через вклады в потенциальную энергию вследствие вириальной теоремы, как объяснено в начале раздела 3.1.

Как видно, существует волновое число $k_* = \sqrt{g\rho/\alpha}$, отделяющее длинные гравитационные волны от коротких капиллярных. Для воды $\alpha \simeq 70$ эрг см⁻² и $\lambda_* = 2\pi/k_* \simeq 1.6$ см. Капиллярные волны — это обычно мелкая рябь на воде. Теперь мы можем ответить на вопрос о том, почему вода выливается из перевернутого стакана. Вопрос кажется дурацким только необразованному человеку. Образованные люди знают, что атмосферное давление при нормальных условиях порядка $P_0 \simeq 10^5$ ньютон на квадратный метр, что достаточно, чтобы удержать до $P_0/\rho g \simeq 10$ метров столба воды.⁴ Так что если бы поверхность жидкости оставалась плоской, то атмосферное давление легко удержало бы воду в стакане. Однако формула (3.17) показывает, что при отрицательной силе тяжести плоская поверхность неустойчива:

$$k < k_* \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \propto -gk + \alpha k^3 < 0.$$

Если же у нас вместо стакана узкий капилляр с диаметром меньше λ_* , то неустойчивая мода не поместится и вода не вытечет (в задаче 3.10 рассмотрен более общий случай).

3.1.4. Фазовая и групповая скорости волны

Обсудим общие свойства одномерного распространения линейных диспергирующих волн. Для этого удобно использовать представление Фурье, поскольку каждая гармоника $\exp(ikx - i\omega_k t)$ распространяется с постоянной скоростью ω_k/k , полностью определяемой зависимостью частоты от волнового числа ω_k . Простейшим является рассмотрение возмущения гауссовой формы

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0 \exp(ik_0 x - x^2/l^2),$$

фурье-образ которого в k -пространстве также гауссов:

$$\zeta(k, 0) = \int dx \zeta_0 \exp \left[i(k_0 - k)x - \frac{x^2}{l^2} \right] = \zeta_0 l \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{l^2}{4} (k_0 - k)^2 \right].$$

Ширина этого распределения $1/l$. Рассмотрим сначала предел узкого пакета, т. е. квазимонохроматической волны с $k_0 l \gg 1$, для которой можно разложить

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0)\omega' + (k - k_0)^2\omega''/2 \quad (3.18)$$

и подставить в

$$\zeta(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \zeta(k, 0) \exp[ikx - i\omega_k t] \approx \quad (3.19)$$

$$\approx \frac{\zeta_0 l}{2} e^{ik_0 x - i\omega_0 t} [t^2/4 + it\omega''/2]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x - \omega' t)^2}{(l^2 + 2it\omega'')} \right]. \quad (3.20)$$

Как видим, возмущение $\zeta(x, t) = \exp(i k_0 x - i \omega_0 t) \Psi(x, t)$ есть монохроматическая волна с комплексной огибающей, модуль которой

$$|\Psi(x, t)| \approx \zeta_0 \frac{l}{L(t)} \exp\left[-(x - \omega' t)^2 / L^2(t)\right], \quad (3.21)$$

$$L(t) = [l^4 + (t\omega''/2)^2]^{1/4}.$$

Фаза волны распространяется с *фазовой скоростью* ω_0/k_0 , тогда как огибающая (и энергия, задаваемая $|\Psi|^2$) распространяются с *групповой скоростью* ω' . Максимум пакета находится в точке $x = \omega' t$, потому что здесь интерференция волн с близкими частотами конструктивна, а вдали от этой точки волны гасят друг друга. Для звуковых волн $\omega_k = ck$, так что групповая и фазовая скорости совпадают и одинаковы для всех гармоник; волновой пакет не расплывается в пространстве, поскольку $\omega'' = 0$. Напротив, если $\omega'' \neq 0$, волны называются диспергирующими, поскольку разные гармоники двигаются с разными скоростями, что приводит к разбеганию (дисперсии) в пространстве: пакет расплывается и амплитуда уменьшается вследствие роста $L(t)$. Для $\omega_k \propto k^\alpha$ имеем $\omega' = \alpha\omega_k/k$. В частности, групповая скорость гравитационных волн на поверхности глубокой воды вдвое меньше фазовой скорости, что можно наблюдать, следя за волновыми гребнями, возникающими нигде в хвосте пакета и исчезающими на фронте. Для капиллярных волн на глубокой воде групповая скорость в 1.5 больше, так что горбы возникают на фронте и исчезают сзади.

Рассмотрим теперь начальное возмущение, локализованное в пространстве. Ему соответствует широкое распределение в k -пространстве, так что фазы многих гармоник скоррелированы для создания конструктивной интерференции внутри узкой области и взаимного погашения снаружи. Для диспергирующих волн ($\omega'' \neq 0$) с течением времени гармоники разбегаются и через некоторое время в разных местах будут наблюдаться периодические волны с разными длинами. Действительно, для данного x, t главный

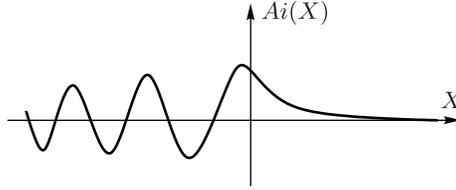
вклад в интеграл (3.19) дается экстремумом экспоненты, т. е. условием стационарной фазы $\omega'(k) = x/t$: гармоники с такими волновыми векторами имеют близкие фазы и складываются, а вклады остальных гармоник взаимно погашаются. Иными словами, волна с волновым числом k наблюдается в месте, движущемся с групповой скоростью $\omega'(k)$. Спектральная форма возмущения несущественна в этом пределе и может быть заменена константой. Подставляя $\zeta(k, 0) = 1$ (или беря предел $l \rightarrow 0$, $\zeta_0 l \sqrt{\pi} = 1$), получим из (3.19):

$$\zeta(x, t) \approx \frac{1}{2} e^{ik_c x - i\omega(k_c)t} [it\omega''(k_c)/2]^{-1/2}. \quad (3.22)$$

Зависимость огибающей от x, t определяется множителем $[t\omega''(k_c)]^{-1/2}$. Поверхностные волны имеют немонотонную зависимость групповой скорости от волнового числа, так что уравнение $\omega'(k_c) = x/t$ имеет два решения (или ни одного). Меньшее волновое число соответствует гравитационной волне, а большее — капиллярной, поэтому эти волны могут распространяться вместе, см. задачу 3.3. Для гравитационных волн $\omega'(k_c) = \sqrt{g/4k_c} = x/t$ дает $k_c = gt^2/4x^2$ и огибающую $|\zeta(x, t)| \propto \sqrt{gt^2/x^3}$, которая убывает с расстоянием в каждый момент времени и растет со временем в каждой точке. Для капиллярных волн $\omega'(k_c) = (3/2)\sqrt{\alpha k_c/\rho} = x/t$ дает $k_c = 4\rho x^2/9\alpha t^2$ и $|\zeta(x, t)| \propto x^{1/2}/t$. Несколько неожиданно амплитуда пакета *растет* с расстоянием, вплоть до $x \simeq \sqrt{\alpha/\rho l}$, что следует из условия $k_c l \ll 1$. На больших расстояниях амплитуда должна убывать; в реальности короткие капиллярные волны сильно затухают из-за вязкости.

Приближение, ведущее к (3.22), нарушается при приближении к точке, где $k_c(x, t) = k_*$, так что $\omega''(k_*) = 0$, то есть групповая скорость имеет экстремум. Это точка является каустикой — границей между областями с двумя группами волн и без волн совсем. Экстремум групповой скорости означает, что волны с близкими волновыми векторами бегут вместе на каустике. Описание поведения на больших временах вблизи каустики требует дальнейшего разложения $\omega(k)$ до кубических членов. Предполагая $\omega'(k_*) = x/t$ малым но ненулевым, получим

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &\approx e^{ik_* x - i\omega_* t} \int \frac{dk}{2\pi} \exp[i(k - k_*)(x - v_* t) - i(k - k_*)^3 \omega'''(k_*)t/6] = \\ &= \frac{e^{ik_* x - i\omega_* t}}{2\pi [\omega'''(k_*)t/2]^{1/3}} \int ds e^{isX + is^3/3} = \frac{e^{ik_* x - i\omega_* t}}{[\omega'''(k_*)t/2]^{1/3}} Ai(X). \end{aligned} \quad (3.23)$$



Здесь мы обозначили $\omega(k_*) = \omega_*$, $\omega'(k_*) = v_*$, $X = (v_*t - x)[\omega'''(k_*)t/2]^{-1/3}$ и ввели интеграл Эйри $Ai(X)$, играющий вблизи каустики ту же роль, что гауссов интеграл (3.20) играет в точке общего положения. Интеграл Эйри как функция X показан на рисунке, который также нетрудно понять в терминах приближения стационарной фазы. Далеко позади каустики $X > 1$, интеграл определяется мнимой седловой точкой $s = i\sqrt{X}$ и является малым: $Ai(X) \propto \exp(-2X^{3/2}/3)$. Перед каустикой, там где X отрицателен, имеем две вещественных седловых точки $s = \pm\sqrt{X}$ и получаем $Ai(X) \propto |X|^{-1/4} \cos(2X^{3/2}/3 - \pi/4)$. Амплитуда волны достигает максимума непосредственно перед акустикой. Со временем амплитуда вблизи акустики убывает как $t^{-1/3}$, то есть медленнее, чем $t^{-1/2}$, задаваемое (3.21) для плоской квазимонохроматической волны с волновым вектором общего положения.

В d -мерном случае приближение (3.20), основанное на гауссовом интеграле, вместо (3.22) дает

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}, t) &= e^{i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x} - i\omega(k_c)t} \int \partial k_1 \dots \partial k_d \exp(-itk_i k_j \partial^2 \omega / \partial k_i \partial k_j / 2) \approx \\ &\approx e^{i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x} - i\omega(k_c)t} (\det[it\partial^2 \omega / \partial k_i \partial k_j / 2\pi])^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

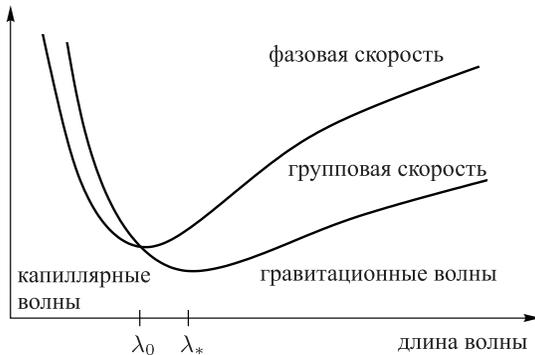
Каустика возникает для таких \mathbf{x}, t , где детерминант матрицы $\partial^2 \omega / \partial k_i \partial k_j$ обращается в ноль при \mathbf{k}_c , заданном уравнением $\partial \omega(k_c) / \partial \mathbf{k} = \mathbf{x}/t$. Достаточным условием этого является обращение в ноль одного из собственных значений матрицы. Соответствующий этому значению собственный вектор задает нормаль к каустике, каковая является $(d-1)$ -мерной поверхностью в \mathbf{x} -пространстве. В результате имеем интеграл Эйри вдоль этого направления и обычный интеграл Гаусса вдоль остальных $d-1$ направлений, так что амплитуда на каустике убывает как $t^{-1/3-(d-1)/2}$.

3.1.5. Возбуждение волн

Препятствие, возмущающее поток, или источник волн, движущийся относительно жидкости, могут возбуждать стационарную волну, если про-

екция относительной скорости источника V на направление распространения волны равна фазовой скорости $c(k) = \omega(k)/k$. Например, если источник создает возвышение поверхности жидкости, то он должен все время совпадать с одним из горбов волны, которые все двигаются с фазовой скоростью. Условие $V \cos \theta = c$, необходимое для генерации стационарной волны, является прямым аналогом критерия Ландау возбуждения возмущений в сверхтекучей жидкости и резонансного условия для генерации излучения Вавилова–Черенкова частицами, движущимися быстрее света в среде. Для гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде условие резонанса Вавилова–Черенкова означает, что скорость источника V должна превышать минимальную фазовую скорость:

$$c(k_0) = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = \left(\frac{4\alpha g}{\rho} \right)^{1/4} \simeq 23 \text{ см/с.} \quad (3.25)$$



Когда фазовая скорость минимальна, она совпадает с групповой скоростью:

$$\frac{\partial}{\partial k} \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} - \frac{\omega}{k} \right) = 0.$$

А вот минимальная групповая скорость v_* меньше чем $c(k_0)$ и соответствует более длинной волне $\lambda_* > \lambda_0$, как показано на рисунке. Минимальная фазовая скорость определяет пороговую скорость для генерации волн. Минимальная групповая скорость определяет скорость каустики.

Рассмотрим сначала источник, протяженный в направлении, перпендикулярном распространению, скажем дерево, упавшее поперек речки. В этом случае две одномерные (плоские) волны будут возбуждаться с волновыми

числами, соответствующими $c(k) = V$. Эти две волны имеют одну и ту же фазовую, но разные групповые скорости. Волны переносят энергию от источника с групповой скоростью. Групповая скорость более длинных (гравитационных) волн ниже, $\omega' < V$, поэтому они будут наблюдаться позади источника (или вниз по течению), тогда как более короткие и быстрые (капиллярные) будут наблюдаться перед источником.⁵ Разумеется, рябь капиллярных волн может возбуждаться только достаточно тонким объектом (меньше λ_*), таким как рыболовная леска или тонкая ветка дерева.

Рассмотрим теперь общий случай среды, в которой волна с волновым числом k имеет частоту ω_k и малый коэффициент затухания γ_k . Пусть источник волн, генерирующий спектр $A(k)$ начал двигаться со скоростью V относительно среды давно и издалека (был в $x \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow -\infty$) и находится в точке $x = 0$ при $t = 0$. В этот момент времени возмущение в каждой точке среды x есть сумма плоских волн порожденных в прошлом:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} A(k) dk \int_{-\infty}^0 dx' \int_{-\infty}^0 dt' \delta(t' - x'/V) e^{ik(x-x') + i\omega_k t' + \gamma_k t'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k) dk \int_{-\infty}^0 dx' e^{ik(x-x') + (i\omega_k + \gamma_k)x'/V} = \int \frac{VA(k)ie^{ikx} dk}{kV - \omega_k + i\gamma_k}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Поскольку $\gamma_k \ll \omega(k)$, главный вклад в интеграл дают k близкие к $k_0 = \omega(k_0)/V$, что соответствует волне, фазовая скорость которой совпадает со скоростью источника. Разложим $\omega_k = \omega(k_0) + \omega'(k_0)\Delta k$ и представим (3.26) следующим образом:

$$VA(k_0)e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ie^{i\Delta kx} d\Delta k}{w\Delta k + i\gamma_0}. \quad (3.27)$$

Здесь $\gamma_0 = \gamma(k_0)$, а $w = V - \omega'(k_0) = \omega(k_0)/k_0 - \omega'(k_0)$ есть разница между фазовой и групповой скоростями. Мы также предположим, что спектральная плотность $A(k)$ мало меняется при изменении k на величины порядка γ/w , что значит, что размер источника меньше w/γ . Удобно вычислить интеграл (3.27) по замкнутому контуру в комплексной плоскости Δk , добавив полукруг бесконечного радиуса, на котором подынтегральное выражение инфинитезимально. Для положительных/отрицательных x такой полукруг

соответственно в верхней/нижней полуплоскости. Подынтегральное выражение имеет полюс в точке $\Delta k = -i\gamma_0/w$. При $w > 0$ полюс в нижней полуплоскости комплексной плоскости Δk , так что интеграл равен нулю при $x > 0$, а для $x < 0$ получаем

$$\frac{2\pi V}{w} \exp(ik_0x + \gamma_0x/w). \quad (3.28)$$

Действительно, если фазовая скорость больше групповой, то возмущение позади источника. Эта же формула (3.28) описывает $w < 0$ и $x > 0$. Коэффициент затухания во времени γ_k определяет также затухание возмущения в пространстве при удалении от источника.

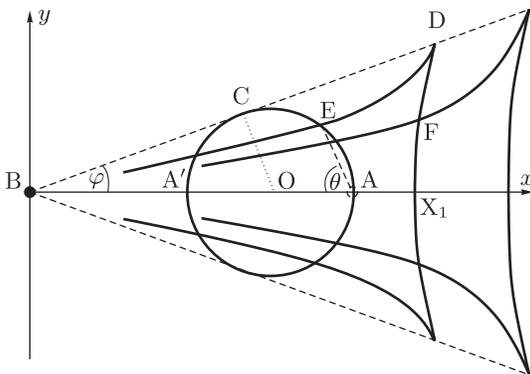


Рис. 3.3. Картина волн, возбуждаемых кораблем, плывущим вдоль оси x влево. Изображенный круг есть геометрическое место точек, которых волны, возбужденные кораблем в A , достигнут в момент времени, когда корабль переместится в B . Пунктирная линия показывает угол Кельвина. Сплошные линии — поверхности постоянной фазы (гребни) волн.

Картина волн, возбуждаемых кораблями, легко узнаваема (рис. 3.4), но требует некоторых усилий для понимания, поскольку является двумерной. Длина волны, уходящей под углом θ к движению корабля, задается условием $V \cos \theta = c(k)$, необходимым, чтобы нос корабля все время оставался на гребне волны. Это условие означает, что волны разных длин распространяются под разными углами в интервале $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Подобно нашему рассмотрению конуса Маха в параграфе 2.3.5, найдем геометрическое место точек, куда придут волны, возбужденные кораблем в точке A



Рис. 3.4. Картина волн от корабля состоит из короткой опрокинувшейся носовой волны отмеченной белыми барашками и длинного внешнего кельвиновского клина. Примерно на половине угла Кельвина видна также линия максимума амплитуды, созданная расходящимися волнами с длиной волны порядка длины корабля.⁶ Фото Алексея Баскакова, www.dreamstime.com.

к тому времени, когда сам корабль сместится в точку В, см. рисунок 3.3. Поскольку это гравитационные поверхностные волны, они распространяются от источника с групповой скоростью $\omega' = c(k)/2 = V \cos \theta/2$. Самая быстрая волна бежит вслед за кораблем ($\theta = 0$) с групповой скоростью, равной половине скорости корабля, и достигает A' такой, что $AA' = AB/2$. Волна, бегущая под углом θ , достигает точки Е такой, что $AE = AA' \cos \theta$, что означает, что угол AEA' прямой. Множество точек Е, соответствующим всем углам $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, составляет круг с диаметром AA' , что и есть геометрическое место точек, достигнутых волнами, излученными из А под разными углами. Поскольку $OC = OA' = OB/3$, все волны, возбужденные до того, как корабль достиг В, находятся внутри *клина Кельвина* с углом $\varphi = \arcsin(1/3) \approx 19.5^\circ$; сравните это с конусом Маха, показанным на рисунке 2.14. Замечательно, что угол Кельвина универсален, т. е. не зависит от скорости корабля.

Опишем теперь форму линий постоянной фазы (гребней и впадин), которые не являются ни прямыми, ни параллельными, поскольку возникают в результате сложения волн, излученных в разные моменты под разными углами. Рассмотрим точку Е, находящуюся на гребне волны, излученной из

точки $X = BA$ и распространяющейся под углом θ . Для разных точек гребня (например, от E к D) разными являются точка излучения X и угол θ , но должна оставаться неизменной фаза, то есть время с момента излучения. Изменение проходимого волной расстояния $d(X \cos \theta)/2 = dX \cos \theta/2 - X \sin \theta d\theta/2$, деленное на фазовую скорость $V \cos \theta$, дает изменение времени прохождения волны, которое должно равняться времени движения корабля dX/V . Получившееся уравнение $dX = -X \operatorname{tg} \theta d\theta$ имеет решение $X = X_1 \cos \theta$, которое связывает координату источника X с углом распространения θ волны, создавшей данный гребень. Разные константы интегрирования X_1 соответствуют разным гребням. Координаты точки E в системе координат с началом в точке B есть

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{2}(2 - \cos^2 \theta) = \frac{X_1}{2} \cos \theta (2 - \cos^2 \theta), \\ y &= \frac{X}{4} \sin 2\theta = \frac{X_1}{4} \cos \theta \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Таким образом, форма линий постоянной фазы задается параметрически. Гребни показаны сплошными линиями на рисунке 3.3, см. также рисунок 3.4. Как и ожидалось, более длинные волны бегут быстрее и распространяются под меньшими углами. Заметим, что для каждой точки x, y внутри угла Кельвина $x/y \geq \sqrt{8}$ можно найти два значения параметра θ , удовлетворяющие уравнению $(2 - \cos^2 \theta)/\sin \theta \cos \theta = x/y$, так что две линии постоянной фазы пересекаются в каждой точке, как, например, в точке F на рисунке. Одно семейство состоит из волн, расходящихся от корабля, другое — из волн, поперечных направлению движения. Поскольку снаружи нет волн, граница кельвиновского клина является каустикой,⁷ где кончаются два гребня, пересекающиеся под острым углом, как в точке D на рисунке 3.3. Точки границы, таким образом, можно определить условием, что как $x(\theta)$, так и $y(\theta)$ имеют максимум. Дифференцируя (3.29) и разрешив $dx/d\theta = dy/d\theta = 0$, получим угол распространения $\cos^2 \theta_0 = 2/3$, который и есть угол САВ, поскольку соответствует волне, достигшей края. Можно также выразить угол СОА как $\pi/2 + \phi$ и $\pi - 2\theta_0$ и связать $\theta_0 = \pi/4 - \phi/2 \approx 35^\circ$.

3.2. Нелинейные волны

Закон распространения линейных волн полностью определяется законом дисперсии ω_k . Неважно, что там осциллирует в волне (скорость или

плотность среды, электромагнитное поле, поверхность жидкости и т. д.), волны с одинаковыми законами дисперсии распространяются одинаково. Можно ли достигнуть такого же уровня универсальности при описании нелинейных волн? Как мы покажем в этом и следующем параграфах, удастся выделить некоторые классы универсального поведения, но уровень универсальности естественно уменьшается при возрастании уровня нелинейности.

3.2.1. Гамильтоновское описание

Что же еще, кроме ω_k , необходимо для описания волн малой, но конечной амплитуды? Поскольку каждая волна описывается двумя переменными, амплитудой и фазой, естественно применить гамильтоновский формализм, в котором переменные тоже встречаются парами (координата-импульс, действие-угол). Гамильтоновский формализм является наиболее общим способом описания систем, удовлетворяющих принципу наименьшего действия. Большинство замкнутых систем таковы. Главное преимущество метода Гамильтона (в сравнении, например, с его частным случаем, методом Лагранжа) — это возможность применять канонические преобразования. Эти преобразования используют как координаты, так и импульсы, и являются более общими, чем координатные преобразования, применяемые в методе Лагранжа, использующем координаты и их производные по времени (не будем путать лагранжев формализм в механике и теории поля и лагранжево описание в механике жидкости). Канонические преобразования и являются тем инструментом, который позволяет свести многообразие разных проблем к нескольким универсальным моделям. Постараемся понять, какова должна быть наиболее общая форма гамильтониана, описывающего слабонелинейную систему волн.

Как мы видели в параграфе 1.3.3, гамильтоново описание непрерывных сред осуществляется в четномерном пространстве координат $q(\mathbf{r}, t)$ и импульсов $\pi(\mathbf{r}, t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi(\mathbf{r}, t)}, \quad \frac{\partial \pi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q(\mathbf{r}, t)}.$$

Гамильтониан $\mathcal{H}\{q(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}, t)\}$ — это функционал (говоря попросту, функция сопоставляет число числу, а функционал сопоставляет число функции; например, определенный интеграл от функции является линейным функционалом). Вариационная производная $\delta/\delta f(r)$ — это обобщение частной про-

изводной $\partial/\partial f(r_n)$ с дискретного на непрерывный набор переменных. Вариационная производная линейного функционала $I\{f\} = \int \phi(r')f(r') dr'$ вычисляется следующим образом:

$$\frac{\delta I}{\delta f(r)} = \int \phi(r') \frac{\delta f(r')}{\delta f(r)} dr' = \int \phi(r') \delta(r - r') dr' = \phi(r).$$

Для этого мысленно замените $\delta/\delta f(r)$ на $\partial/\partial f(r_n)$ и интегрирование на суммирование.

Например, уравнения Эйлера и непрерывности для потенциальных течений (в частности, для акустических волн) могут быть записаны как гамильтоновские уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}, & \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho}, \\ \mathcal{H} &= \int \rho \left[\frac{|\nabla \phi|^2}{2} + E(\rho) \right] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Удобно использовать канонические переменные, еще более симметричные, чем π, q . Эти переменные аналогичны операторам рождения и уничтожения в квантовой теории, хотя в нашем случае это просто числа, а не операторы. Мы всегда можем сделать p и q одинаковой размерности (умножив на постоянный множитель), что позволит ввести

$$a = (q + i\pi)/\sqrt{2}, \quad a^* = (q - i\pi)/\sqrt{2}.$$

Вместо двух вещественных уравнений на p, q получим одно комплексное:

$$i \frac{\partial a(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*(\mathbf{r}, t)}. \quad (3.31)$$

Сопряженное уравнение описывает эволюцию a^* .

В линейном приближении волны с разными волновыми векторами не взаимодействуют, так что в бесконечном пространстве комплексные фурье-амплитуды a_k являются нормальными каноническими переменными, удовлетворяющими уравнению

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\omega_k a_k.$$

Сравнив с (3.31), приходим к заключению, что гамильтониан линейной волновой системы квадратичен по амплитудам:

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k}. \quad (3.32)$$

Это плотность энергии на единицу объема. Члены более высоких порядков должны описывать нелинейное взаимодействие волн. При малой нелинейности начинать надо с учета кубических членов:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = \int & \left[(V_{123} a_1^* a_2 a_3 + \text{с.с.}) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \right. \\ & \left. + (U_{123} a_1^* a_2^* a_3^* + \text{с.с.}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Здесь с.с. означают комплексно сопряженные члены, и мы использовали сокращенные обозначения $a_1 = a(\mathbf{k}_1)$ и т.д. Дельта-функции выражают сохранение импульса и возникают из-за однородности пространства. Действительно, (3.32) и (3.33) являются соответственно фурье-представлениями интегралов типа

$$\int \Omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) a(\mathbf{r}_1) a(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

и

$$\int V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) a(\mathbf{r}_1) a(\mathbf{r}_2) a(\mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3.$$

Вещественность гамильтониана требует симметрии коэффициентов: $U_{123} = U_{132} = U_{213}$ и $V_{123} = V_{132}$. Рассматривая волны малой амплитуды, мы предполагаем, что члены более высокого порядка малы в сравнении с членами более низкого порядка, в частности $\mathcal{H}_2 \gg \mathcal{H}_3$, что требует

$$\omega_k \gg V |a_k| k^d, \quad U |a_k| k^d, \quad (3.34)$$

где d — это размерность пространства.

Извращенный порядок современного обучения, при котором квантовая механика выучивается раньше гидродинамики, позволяет нам использовать аналогию между a, a^* и квантовыми операторами рождения-уничтожения a, a^\dagger , чтобы предположить, что слагаемое с V описывает процесс слияния $2+3 \rightarrow 1$ и обратный процесс распада $1 \rightarrow 2+3$. Аналогично, слагаемое с U должно описывать рождение трех волн из вакуума и обратный процесс аннигиляции (мы будем использовать квантовые аналогии

довольно часто в этой главе, поскольку квантовая физика в значительной мере является волновой физикой). Для того чтобы убедиться в справедливости квантово-механической интерпретации и проявить физический смысл отдельных членов гамильтониана, запишем следующее из него уравнение движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & -3i \int U_{k_{12}} a_1^* a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & - i \int V_{k_{12}} a_1 a_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & - 2i \int V_{1k_2}^* a_1 a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - (\gamma_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

куда мы также включили линейное затухание $\gamma_{\mathbf{k}}$ (что следует делать всегда, когда возможны резонансы). Дельта-функции в интегралах свидетельствуют, что каждое из слагаемых описывает взаимодействие разных триплетов волн. Это можно продемонстрировать явно, рассмотрев частный вид начального условия, в котором присутствуют только две волны соответственно с волновыми векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, частотами ω_1, ω_2 и конечными амплитудами A_1, A_2 . Тогда последний нелинейный член в (3.35) имеет вид $-2ie^{i(\omega_2 - \omega_1)t} V_{1k_2}^* A_1 A_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})$, т. е. действует на волну с $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ периодической силой с частотой $\omega_1 - \omega_2$. Таким же образом можно описать и действие других членов в (3.35). Под действием этих сил вынужденное решение (3.35) имеет вид

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}, t) = & -3ie^{i(\omega_1 + \omega_2)t} \frac{U_{k_{12}} A_1^* A_2^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k})}{\gamma_{\mathbf{k}} + i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_{\mathbf{k}})} - \\ & - ie^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \frac{V_{k_{12}} A_1 A_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\gamma_{\mathbf{k}} + i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{\mathbf{k}})} - \\ & - 2ie^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \frac{V_{1k_2}^* A_1 A_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\gamma_{\mathbf{k}} + i(\omega_2 - \omega_1 - \omega_{\mathbf{k}})}. \end{aligned}$$

Здесь и далее $\omega_{1,2} = \omega(\mathbf{k}_{1,2})$. Вследствие (3.34) амплитуды вторичных волн малы, за исключением случаев резонанса, в которых частота возбуждающей силы совпадает с собственной частотой волны с соответствующим \mathbf{k} . Например, амплитуда $a(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ не мала, если $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = 0$. Такое случается в неравновесных средах, где возможны волны как с положительными, так и с отрицательными частотами (что значит, что

возбуждение неких волн уменьшает энергию среды — например, при наличии течения и волны, движущейся против него). В таких случаях уже \mathcal{H}_2 может не иметь формы (3.32), см. задачу 3.4. Два других резонанса требуют $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)$ — законы дисперсии, допускающие это, называются распадными. Так, степенной закон дисперсии $\omega_k \propto k^\alpha$ является распадным при $\alpha \geq 1$ и нераспадным (не допускающим трехволновых резонансов) при $\alpha < 1$, см. задачу 3.5.

3.2.2. Нормальные формы гамильтонианов

Интуитивно ясно, что нерезонансные члены не важны при малой нелинейности. Поэтому их следует исключить из гамильтониана, используя канонические преобразования. Поскольку эти члены малы, преобразование должно быть близко к идентичному. Рассмотрим некоторое непрерывное распределение a_k . Чтобы избавиться от слагаемого с U в \mathcal{H}_3 , надо сделать такое преобразование:

$$b_k = a_k - 3 \int \frac{U_{k12} a_1^* a_2^*}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_k} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (3.36)$$

Это возможно, если знаменатель нигде не обращается в ноль в области интегрирования, что имеет место, в частности, для всех сред, находившихся в термодинамическом равновесии до возбуждения волн. Гамильтониан $\mathcal{H}\{b, b^*\} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ уже не содержит слагаемого с U . Избавление от V -членов осуществляется похожим преобразованием

$$b_k = a_k + \int \left[\frac{V_{k12} a_1 a_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_k} + \frac{V_{1k2}^* a_1 a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_k} + \frac{V_{2k1}^* a_1^* a_2 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k})}{\omega_2 - \omega_1 - \omega_k} \right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (3.37)$$

которое возможно только для нераспадных законов дисперсии. Прямой проверкой можно убедиться, что оба преобразования (3.36), (3.37) являются каноническими, т. е. $\dot{b}_k = \delta\mathcal{H}\{b, b^*\}/\delta b_k^*$. Описанная здесь процедура была изобретена для исключения нерезонансных членов в уравнениях небесной механики и позднее обобщена на непрерывные системы.⁸

Таким образом, (3.33) следует использовать как гамильтониан взаимодействия только для систем, где все трехволновые процессы являются

резонансными. Если нет волн отрицательной энергии, но закон дисперсии распадный (как для капиллярных волн на глубокой воде), то соответствующий гамильтониан должен содержать только V -член. Когда же закон дисперсии нераспадный (как для гравитационных волн на воде), все кубические члены могут быть устранены, так что гамильтониан взаимодействия должен быть четвертого порядка по амплитудам волн. Вдобавок если закон дисперсии не позволяет $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$, тогда он заведомо не позволяет также $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3)$. Иными словами, если трехволновые распады $1 \rightarrow 2 + 3$ нерезонансны, то таковыми являются и четырехволновые распады $1 \rightarrow 2 + 3 + 4$. Единственное, что остается, — это рассеяние пар $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, для которого всегда можно найти резонансные волны. Рассеяние описывается гамильтонианом:

$$\mathcal{H}_4 = \int T_{1234} a_1 a_2 a_3^* a_4^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4. \quad (3.38)$$

Спрашивается, а почему бы нам попросту не выбросить нерезонансные члены из гамильтониана, не затрудняя себя преобразованиями (3.36, 3.37)? Дело в том, что в новых переменных коэффициенты при остающихся членах приобретают новую форму. Например, T_{1212} приобретает поправки типа $|V_{1+2,12}|^2 / (\omega_{1+2} - \omega_1 - \omega_2)$ после исключения кубических членов. Если в пространстве $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ имеются поверхности, где $\omega_{1+2} - \omega_1 - \omega_2$ мало (то есть кубические процессы почти резонансны, как для гравитационных волн на мелкой воде), эти поправки могут доминировать.

3.2.3. Неустойчивости волн

Волновое движение может быть неустойчивым. Покажем, что монохроматическая волна с распадным законом дисперсии при достаточно большой амплитуде подвержена неустойчивости, называемой (естественно) распадной. Рассмотрим начальное состояние в виде волны конечной амплитуды $A \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)]$ и двух инфинитезимальных возмущений a_1, a_2 в пространственном резонансе $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. Оставим только резонансные члены в (3.35):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + (\gamma_1 + i\omega_1)a_1 + 2iV_{k12}Aa_2^* \exp(-i\omega_k t) &= 0, \\ \dot{a}_2^* + (\gamma_2 - i\omega_2)a_2^* + 2iV_{k12}^*A^*a_1 \exp(i\omega_k t) &= 0. \end{aligned}$$

Решение ищем в виде

$$a_1(t) \propto \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t), \quad a_2^*(t) \propto \exp(\Gamma t + i\Omega_2 t).$$

Условие резонанса трех волн во времени имеет вид $\Omega_1 + \Omega_2 = \omega_k$. Амплитуды волн будут определяться тем, насколько их вынужденные частоты отличаются от их собственных частот, задаваемых дисперсионным соотношением, т. е. разностями $\Omega_1 - \omega_1$ и $\Omega_2 - \omega_2$. Суммарная отстройка двух волн есть $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_k$. Следует выбрать $\Omega_{1,2}$, дающие максимальный Γ . Естественно предположить, что 1 и 2 симметричны, так что $\Omega_1 - \omega_1 = \Omega_2 - \omega_2 = \Delta\omega/2$. В простейшем случае $\gamma_1 = \gamma_2$ получим

$$\Gamma = -\gamma \pm \sqrt{4|V_{k12}A|^2 - (\Delta\omega)^2/4}. \quad (3.39)$$

Если дисперсионное соотношение является нераспадным, то $\Delta\omega \simeq \omega_k \gg \gg |VA|$ и нет никакой неустойчивости. Напротив, для распадного закона дисперсии резонанс возможен, $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_k = 0$, так что инкремент неустойчивости $\Gamma = 2|V_{k12}A| - \gamma$ положителен, если амплитуда выше пороговой, при которой нелинейность сравнивается с диссипацией: $A > \gamma/2|V_{k12}|$. Быстрее всего растут те a_1, a_2 , частоты которых в резонансе $\Delta\omega = 0$, и отношение $(\gamma_1 + \gamma_2)/|V_{k12}|$ минимально. В частном случае $k = 0$, $\omega_0 \neq 0$, распадная неустойчивость называется параметрической, поскольку она соответствует периодическому изменению какого-то глобального свойства (параметра) системы. К примеру, Фарадей обнаружил, что если трясти вертикально сосуд с жидкостью, то в нем возбуждается стоячая поверхностная волна ($k_1 = -k_2$) с частотой, равной половине частоты тряски — в этом случае параметр, изменяемый периодически, — это ускорение силы тяжести g . Для простого случая осциллятора (системы с небольшим числом степеней свободы) это явление называется параметрическим резонансом и знакомо всякому ребенку на качелях, который приседает и распрямляется с частотой в два раза большей, чем частота качаний, — в этом случае параметром является длина маятника L , т. е. расстояние от точки подвеса до центра тяжести. В обоих случаях варьируется частота $\sqrt{g/L}$, являющаяся параметром гамильтониана.

Любая неустойчивость вызывает обычный вопрос о том, что останавливает экспоненциальный рост, и обычный ответ: нелинейность более высоких порядков ответственна за это. Если превышение над порогом невелико, эти нелинейные эффекты можно описать в приближении среднего поля, т. е. как перенормировку линейных параметров ω_k, γ_k и накачки $V_{k12}A$. Перенормировка должна вернуть систему обратно к порогу, т. е. обратить перенормированный Γ в нуль. Нелинейная добавка к частоте $\tilde{\omega}_k = \omega_k + \int T_{kk'kk'}|a_{k'}|^2 dk'$ (см. следующий параграф) обусловлена черырехволновыми процессами и может вывести волны из резонанса в случае дис-

кретного спектра волновых чисел и частот вследствие конечного размера системы. Таков механизм ограничения неустойчивости в конечномерных системах, таких как маятник, частота которого уменьшается с амплитудой. Если же спектр частот волновой системы близок к непрерывному, то для любой нелинейности найдутся волны в резонансе, необходимым для неустойчивости. В этом случае ограничение неустойчивости обеспечивается перенормировкой затухания или накачки. Увеличение декремента затухания γ_k возникает из-за волн третьего поколения, отбирающих энергию у волн a_1, a_2 . Перенормировка накачки возникает из-за четырехволнового взаимодействия, например, (3.38) добавляет к \dot{a}_1 слагаемое $-ia_2^* \int T_{1234} a_3 a_4 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4$.

3.3. Нелинейное уравнение Шрёдингера

В этом параграфе мы рассмотрим эволюцию нелинейного спектрально узкого пакета волн. Описание линейного распространения такого пакета в параграфе 3.1.4 научило нас понятиям фазовой и групповой скорости и кустик. Учет нелинейности потребует освоения столь же фундаментальных понятий боголюбовского спектра возбуждений, модуляционной неустойчивости, солитона, самофокусировки, волнового коллапса и волновой турбулентности.

3.3.1. Вывод уравнения

Рассмотрим квазимонохроматический волновой пакет в изотропной нелинейной среде. Иными словами, предположим, что амплитуды волн в \mathbf{k} -пространстве отличны от нуля в узкой области Δk вокруг некоего \mathbf{k}_0 . В этом случае процессы, меняющие число волн (типа $1 \rightarrow 2 + 3$ и $1 \rightarrow 2 + 3 + 4$), нерезонансны, потому что частоты всех волн близки. Стало быть, из гамильтониана взаимодействия можно исключить все члены третьего и четвертого порядков, за исключением \mathcal{H}_4 , и уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \int T_{k123} a_1^* a_2 a_3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \quad (3.40)$$

Рассмотрим теперь $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}$ с $q \ll k_0$ и разложим, подобно (3.18),

$$\omega(k) = \omega_0 + (\mathbf{q}\mathbf{v}) + \frac{1}{2} q_i q_j \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right)_0,$$

где $\mathbf{v} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ при $k = k_0$. В изотропной среде ω зависит только от модуля k , так что

$$\begin{aligned} q_i q_j \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} &= q_i q_j \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{k_j}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} = q_i q_j \left[\frac{k_i k_j \omega''}{k^2} + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{v}{k} \right] = \\ &= q_{\parallel}^2 \omega'' + \frac{q_{\perp}^2 v}{k}. \end{aligned}$$

Колебание с частотой ω_0 является общим для всех волн в пакете и не представляет для нас интереса, поэтому имеет смысл ввести временную огибающую $a_k(t) = \exp(-i\omega_0 t) \psi(\mathbf{q}, t)$ в (3.40):

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - (\mathbf{q}\mathbf{v}) - \frac{q_{\parallel}^2 \omega''}{2} - \frac{q_{\perp}^2 v}{2k} \right] \psi_{\mathbf{q}} = T \int \psi_1^* \psi_2 \psi_3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3.$$

Мы предположили нелинейный член малым, $T|a_k|^2(\Delta k)^{2d} \ll \omega_k$, и положили в нем $k = k_0$. Если теперь представить результат в r -пространстве для $\psi(\mathbf{r}) = \int \psi_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{q}$, то нелинейный член окажется локальным:

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \psi^*(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_3) \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \times \\ &\quad \times \exp \left[i(\mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1) - i(\mathbf{q}_2 \mathbf{r}_2) - i(\mathbf{q}_3 \mathbf{r}_3) + i(\mathbf{q}\mathbf{r}) \right] = \\ &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \psi^*(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}) = |\psi|^2 \psi, \end{aligned}$$

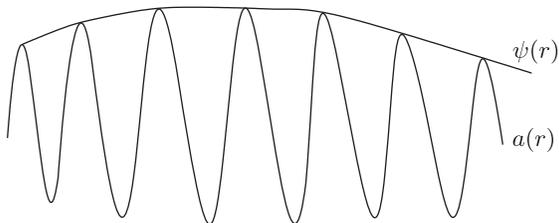
и уравнение примет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{i\omega''}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{v}{2k} \Delta_{\perp} \psi = -iT|\psi|^2 \psi.$$

Здесь слагаемое $v\partial_z$ описывает распространение с групповой скоростью, $\omega''\partial_{zz}$ дисперсию и $(v/k)\Delta_{\perp}$ дифракцию. Уместно сейчас спросить, почему в разложении $\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ мы удержали члены как линейные, так и квадратичные по малому q . Сделано это потому, что линейный член, давший $\partial\psi/\partial z$ в последнем уравнении, может быть исключен переходом в движущуюся систему $z \rightarrow z - vt$. Вдобавок мы еще растянем поперечную координату в $\sqrt{k_0 \omega''/v}$ раз и получим знаменитое нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\omega''}{2} \Delta \psi - T|\psi|^2 \psi = 0. \quad (3.41)$$

Иногда (при $T < 0$ и в приложениях к квантовому конденсату) его называют уравнение Гросса–Питаевского. Это уравнение может быть использовано для разных размерностей пространства. Оно может описывать эволюцию трехмерного пакета как при Бозе–Эйнштейновской конденсации холодных атомов. Когда \mathbf{r} двумерно, рассматривается либо эволюция в двумерной среде (например, пакета поверхностных волн), либо стационарное распространение в трехмерной среде, описываемое уравнением $v\psi_z + (v/2k)\Delta_{\perp}\psi = T|\psi|^2\psi$, которое обращается в (3.41) после переобозначения $z \rightarrow vt$. В стационарном случае следует пренебрегать ψ_{zz} , который много меньше, чем ψ_z . В нестационарном случае это не всегда так, поскольку ∂_t может сократить $v\partial_z$ и придется учитывать член со второй пространственной производной. И чтобы уж закончить с размерностями, упомянем, что одномерное уравнение описывает стационарный двумерный случай или эволюцию в одномерной среде, например света в оптическом волокне, звука в рельсе, импульса в нерве и т. д.



Знаки коэффициентов различны в разных средах. Помимо систем гидродинамического типа, нелинейное уравнение Шрёдингера широко применяется в нелинейной оптике. Действительно, уравнение Максвелла для электромагнитных волн имеет вид $[\omega^2 - (c^2/n)\Delta]E = 0$. Показатель преломления зависит от интенсивности волн: $n = 1 + 2\alpha|E|^2$. Причины этой зависимости (и, соответственно, знак и величина коэффициента α) различны в разных материалах, например электрострикция, нагрев и эффект Керра (ориентация анизотропных молекул в поле волны). Мы рассмотрим волны,двигающиеся в близких направлениях, и перейдем в сопутствующую систему отсчета, движущуюся со скоростью c , заменив $\omega \rightarrow \omega - ck$. Разложив

$$ck/\sqrt{n} \approx ck_z(1 - \alpha|E|^2) + ck_{\perp}^2/2k,$$

подставив это в

$$(\omega - ck - ck/\sqrt{n})(\omega - ck + ck/\sqrt{n})E = 0$$

и удержав первые неисчезающие члены по дифракции и нелинейности, получим нелинейное уравнение Шрёдингера после обратного фурье-преобразования.

3.3.2. Модуляционная неустойчивость

Как уже упоминалось, простейший эффект четырехволнового рассеяния — это нелинейная перенормировка частоты. Действительно, наше уравнение имеет стационарное решение в виде плоской волны конечной амплитуды с перенормированной частотой $\psi_0(t) = A_0 \exp(-iT A_0^2 t)$. В квантовой физике это состояние, когерентное на всем пространстве системы, соответствует простейшей (квазиклассической) модели бозе-эйнштейновского конденсата. Опишем поведение малых возмущений на этом фоне. Запишем возмущенное решение как $\psi = (A_0 + \tilde{A})e^{-iT A_0^2 t + i\varphi}$ и предположим возмущение одномерным (вдоль направления, которое обозначим ξ). Тогда вещественная и мнимая части линеаризованного уравнения примут вид

$$\tilde{A}_t + \frac{\omega''}{2} A_0 \varphi_{\xi\xi} = 0, \quad \varphi_t = -2T A_0 \tilde{A} + \frac{\omega''}{2A_0} \tilde{A} \xi \xi.$$

Ищем решение в виде, где промодулированы как амплитуда, так и фаза:

$$\tilde{A} = \alpha \exp(ik\xi - i\Omega t), \quad \varphi = \alpha \exp(ik\xi - i\Omega t).$$

Закон дисперсии принимает вид

$$\Omega^2 = T\omega'' A_0^2 k^2 + \omega''^2 k^4 / 4. \quad (3.42)$$

При $T\omega'' > 0$ эта (знаменитая) формула называется спектром Боголюбова флуктуаций конденсата. В случае же обратного неравенства $T\omega'' < 0$ (критерий Лайтхилла) имеем неустойчивость, называемую модуляционной. Опишем сначала смысл этого критерия неустойчивости на языке классических волн, а в конце параграфа приведем альтернативное объяснение на языке квантовых квазичастиц. Классически мы определяем частоту как минус производную по времени от фазы: $\varphi_t = -\omega$. Частота нелинейной волны зависит как от волнового числа, так и от амплитуды. Первые производные частоты по амплитуде и волновому числу равны нулю в нуле $k = 0 = A$ для систем, симметричных относительно замены $k \rightarrow -k$ и $A \rightarrow -A$. Параметры T и ω'' являются вторыми производными частоты соответственно по амплитуде и волновому числу. Таким образом, неустойчивость имеет

место, когда поверхность $\omega(k, A)$ имеет седловую точку в нуле, минимум же и максимум устойчивы. На качественном уровне можно объяснить развитие модуляционной неустойчивости двумя способами, спектральным и пространственно-временным. Со спектральной точки зрения, для неустойчивости необходим четырехволновой резонанс между основной частотой и частотами модуляций. Для этого дисперсионные поправки к частотам возмущений (имеющих ненулевой k) должны быть скомпенсированы нелинейным сдвигом частоты. С пространственно-временной точки зрения неустойчивость можно понять, рассмотрев эволюцию локального минимума амплитуды, например, при $\omega'' > 0$ и $T < 0$. Там, где возмущение создает локальный минимум амплитуды, частота максимальна вследствие $T < 0$. Рассмотрим локальное волновое число $K = \varphi_\xi$, чья производная по времени $K_t = \varphi_{\xi t} = -\omega_\xi$ меняет знак, проходя через экстремум частоты. Иными словами, K будет расти справа от максимума ω и убывать слева от него. Поскольку $\omega'' > 0$, то групповая скорость ω' растет с K , т. е. растет справа и убывает слева, что приводит к разбеганию правой и левой части (как показано стрелочками на рис. 3.5) и дальнейшему углублению минимума.

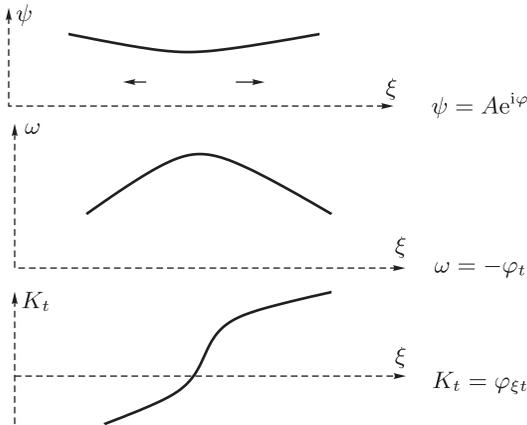


Рис. 3.5. Пространственные зависимости амплитуды, частоты и производной по времени от волнового числа, показывающие механизм модуляционной неустойчивости для $\omega'' > 0$ и $T < 0$.

Одно из проявлений этой неустойчивости нам знакомо: волны, приходящие к берегу, имеют разные амплитуды, иными словами, амплитуда

промодулирована. Проверим критерий Лайтхилла. Для длинных гравитационных волн $\omega_k \propto \sqrt{k}$, так что $\omega'' < 0$. В отличие от маятника и вопреки наивной интуиции частота растет с амплитудой и $T > 0$; это связано с тем, что для волн большей амплитуды профиль все более отличается от синусоидального тем, что гребни делаются острее, достигая резкого угла в 120° для достаточно большой (но конечной) амплитуды. Поскольку $T\omega'' < 0$, длинная гравитационная волна действительно должна быть неустойчива относительно продольных модуляций. Эта неустойчивость, конечно, наблюдалась многими поколениями мореплавателей, но была впервые воспроизведена в контролируемом эксперименте и описана Бенджамином и Фэйром в 1967 году (рис. 3.6), поэтому носит их имя. Инкремент неустойчивости максимален для волнового числа $k = A_0 \sqrt{-2T/\omega''}$, что зависит от амплитуды волны. Согласно морскому фольклору, однако, девятый вал самый страшный. Максимальный инкремент неустойчивости квадратичен по амплитуде волны: $\text{Im}\Omega = TA_0^2$.

Для поперечных возмущений следует заменить ω'' на v/k , величина которого обычно положительна, так что критерий неустойчивости $T < 0$ или $\partial\omega/\partial|a|^2 < 0$. Это, в частности, означает, что для поперечной неустойчивости скорость волны должна убывать с амплитудой. Механизм неустойчивости легко увидеть на рисунке 3.7: для поперечно модулированной волны максимумы амплитуды двигаются медленнее, что приводит к искривлению фронта и фокусировке волны, что еще более увеличивает амплитуду.

Приведем теперь квантовое объяснение модуляционной неустойчивости. Напомним, что уравнение (3.41) является гамильтоновым ($i\psi_t = \delta\mathcal{H}/\delta\psi^*$) с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \left(\omega'' |\nabla\psi|^2 + T|\psi|^4 \right) d\mathbf{r}. \quad (3.43)$$

Критерий Лайтхилла означает, что модуляционная неустойчивость возможна, когда гамильтониан не является знакоопределенным. Сам по себе знак не важен, поскольку гамильтонова динамика обратима и всегда можно заменить $\mathcal{H} \rightarrow -\mathcal{H}$, $t \rightarrow -t$; важно, что гамильтониан положителен для одних классов функций $\psi(\mathbf{r})$ и отрицателен для других, потому что его две части имеют разные знаки. В результате однородное состояние оказывается неустойчивым относительно развала на области, где доминирует одно из слагаемых гамильтониана. Рассмотрим случай $\omega'' > 0$. На квантовом языке первый член гамильтониана можно интерпретировать как кинетическую энергию частиц, а второй — как потенциальную энергию их взаи-

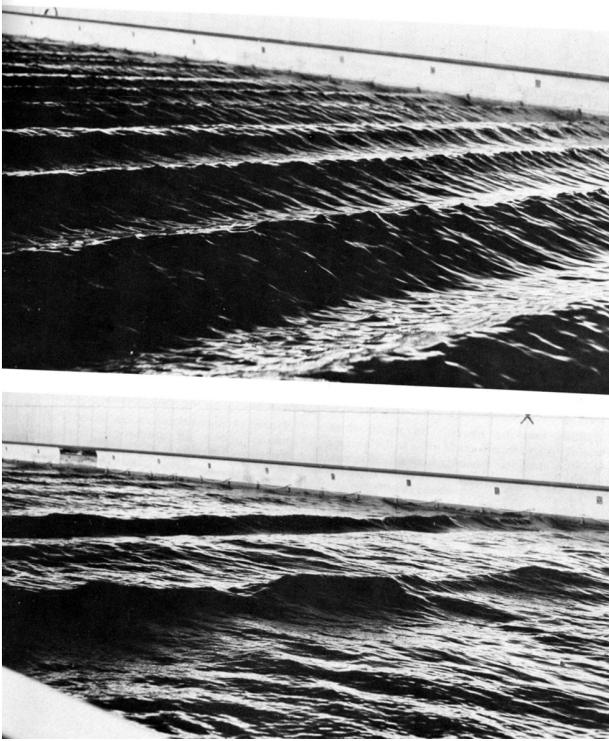


Рис. 3.6. Разрушение периодической волны модуляционной неустойчивостью, продемонстрированное экспериментально Бенджамином и Фэйром. Верхнее фото показывает регулярную периодическую волну вблизи от генератора волн. Нижнее фото сделано на расстоянии примерно 60 метров (28 длин волн), где амплитуда волны сравнима, но от пространственной периодичности мало что осталось. Неустойчивость была индуцирована наложением на периодическое движение генератора небольшой модуляции на частоте максимального инкремента неустойчивости; в натуральных условиях наблюдается такое же разрушение, но на больших расстояниях. Фото J. E. Feir, воспроизведено из *Proc. R. Soc. Lond. A*, **299**, 59 (1967).

модействия. При $T < 0$ взаимодействие является притяжением, что и ведет к неустойчивости. Для конденсата давление вследствие кинетической энергии частиц всюду уравнивает притяжение частиц; если в результате возмущения больше частиц окажется в некой области (больше значе-

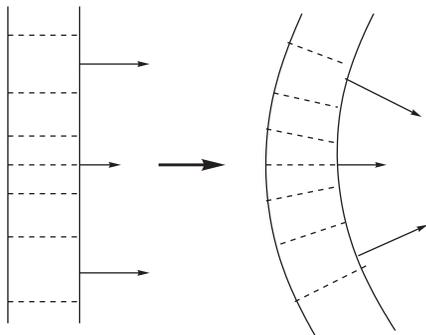


Рис. 3.7. Поперечная неустойчивость волны, скорость которой убывает с амплитудой.

ние $|\psi|^2$), притяжение локально станет выше и притянет дополнительные частицы, что приведет к дальнейшему росту $|\psi|^2$.

Сравним модуляционную неустойчивость из-за четырехволнового взаимодействия с распадной неустойчивостью из-за трехволнового взаимодействия. Первая требует выполнения критерия Лайтхилла, тогда как вторая имеет место для любого коэффициента взаимодействия V_{k12} , не обращающегося в ноль на резонансной поверхности $\omega(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega(k_1) + \omega(k_2)$. Инкремент распадной неустойчивости $V_{k12}A$ линеен по амплитуде волны, тогда как модуляционная неустойчивость возникает в следующем порядке и ее максимальный инкремент неустойчивости TA^2 квадратичен и обычно меньше. Для волн на глубокой воде, распадная неустойчивость имеет место для коротких (капиллярных) волн; распады становятся нерезонансными начиная с некоей длины волны, так что более длинные волны подвержены модуляционной неустойчивости.

3.3.3. Солитон, коллапс и турбулентность

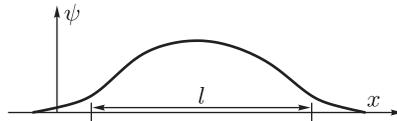
Состояние, возникающее в результате модуляционной неустойчивости, зависит от размерности пространства. Развал однородного состояния может продолжаться неостановимо до мелкомасштабной фрагментации или создания сингулярностей. Альтернатива этому — возникновение устойчивых объектов конечного размера. Как часто бывает в физике, конечное состояние сложного процесса удается понять с помощью анализа законов сохранения.

Поскольку уравнение (3.41) описывает распространение волн и их парное рассеяние друг на друге, то оно сохраняет не только гамильтониан (3.43), но и волновое действие $N = \int |\psi|^2 dr$, которое можно также назвать числом волн. Этот закон сохранения следует из уравнения непрерывности

$$2i\partial_t |\psi|^2 = \omega'' \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \equiv -2 \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (3.44)$$

Отметим для полноты также сохранение импульса или полного тока $\int \mathbf{J} dr$, хотя он и не играет роли в этом параграфе (зато важен для задачи 3.7). За сохранение энергии, импульса и действия отвечают симметрии уравнения (3.41) по отношению к сдвигам соответственно по времени ($t \rightarrow t + \text{const.}$), по пространству ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \text{const.}$) и по фазе ($\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$ — эта симметрия называется калибровочной инвариантостью).

Рассмотрим волновой пакет, имеющий размер l , вообще говоря зависящий от времени, и постоянное значение N .



Амплитуда волнового поля в пакете оценивается как $|\psi|^2 \simeq N/l^d$, что позволяет оценить гамильтониан как $\mathcal{H} \simeq \omega'' N l^{-2} + T N^2 l^{-d}$ — напомним, что второе слагаемое здесь отрицательно. Полная энергия системы, разумеется, сохраняется, однако энергия пакета должна стремиться к минимуму вследствие излучения и ухода энергии на бесконечность. Мы хотим понять направление эволюции, рассматривая ее адиабатически медленной. При этом волновое действие сохраняется, поскольку оно является адиабатическим инвариантом. Это особенно ясно для квантовой системы типа облака холодных атомов, где N есть их число. Соответствует ли минимум энергии $l \rightarrow 0$ (что называется самофокусировкой или волновым коллапсом), определяется балансом между $|\nabla \psi|^2$ и $|\psi|^4$. Гамильтониан \mathcal{H} как функция l в трех разных размерностях показан на рисунке 3.8.

(i) $d = 1$. При малом l кинетическая энергия $\mathcal{H} \simeq \omega'' N l^{-2}$ доминирует и приводит к расплыванию пакета, тогда как притяжение $\mathcal{H} \simeq -T N^2 l^{-1}$ доминирует на больших l . Понятно, что стационарное решение должно существовать для размера $l \sim \omega''/TN$, который минимизирует энергию, обеспечивая баланс между давлением волн и силой притяжения. Такой стационарный нелинейный волновой пакет называется *солитоном*, или уединенной волной (solitary wave). Математически солитон описывается решением

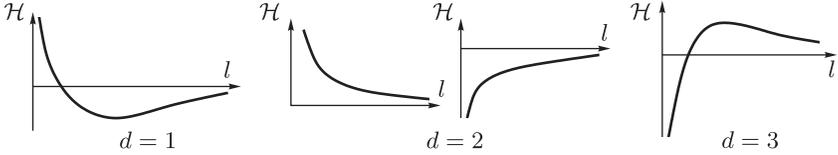


Рис. 3.8. Гамильтониан \mathcal{H} как функция размера пакета l при фиксированном N .

уравнения (3.41) в виде бегущей волны $\psi(x, t) = A(x - ut)e^{i\varphi}$ с фазой, имеющей как однородную нелинейную часть, так и бегущую в пространстве добавку: $\varphi(x, t) = f(x - ut) - TA_0^2 t$. Комплексное A_0 и вещественное u являются параметрами солитона. Подставим бегущую волну в (3.41) и разделим вещественную и мнимую части:

$$A'' = \frac{2T}{\omega''} (A^3 - A_0^2 A) + Af' \left(f' - \frac{2u}{\omega''} \right), \quad \omega'' \left(A' f' + \frac{A f''}{2} \right) = u A'. \quad (3.45)$$

В простейшем случае стоящей волны ($u = 0$) второе уравнение дает $A^2 f' = \text{const}$, что можно положить равным нулю для локализованного решения. В этом случае первое уравнение включает только A и может рассматриваться как второй закон Ньютона $A'' = -dU/dA$ для частицы с координатой A в потенциале $U(A) = -(T/2\omega'')(A^4 - 2A^2 A_0^2)$, так что x играет роль времени. Солитон является сепаратрисой, т. е. решением, требующим бесконечного времени на то, чтобы частица достигла нулевой точки, или в исходных переменных, где $A \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Верхняя часть рисунка 3.9 предполагает $T/\omega'' < 0$, т. е. модуляционную неустойчивость. Отметим вкратце, что сепаратриса существует и для $T/\omega'' > 0$, но в этом случае стационарная бегущая волна является так называемым кинком (похожим на ударную волну), т. е. переходом между двумя различными значениями устойчивого конденсата, как показано в нижней части рисунка 3.9. Кинк является минимумом интенсивности $|\psi|^2$.

Вернувшись к общему случаю бегущего солитона (при $T/\omega'' < 0$), умножим второе уравнение на A и проинтегрируем: $\omega'' A^2 f' = u(A^2 - A_0^2)$, где, выбирая константу интегрирования, мы обозначили A_0 как A в точке, где $f' = 0$. Мы теперь можем подставить f' в первое уравнение и опять получить замкнутое уравнение на A . Солитонное решение имеет вид

$$\psi(x, t) = \sqrt{2} A_0 \cosh^{-1} \left[\left(\frac{-2T}{\omega''} \right)^{1/2} (x - ut) A_0 \right] e^{i(2x - ut)u/2\omega'' - iT A_0^2 t}.$$

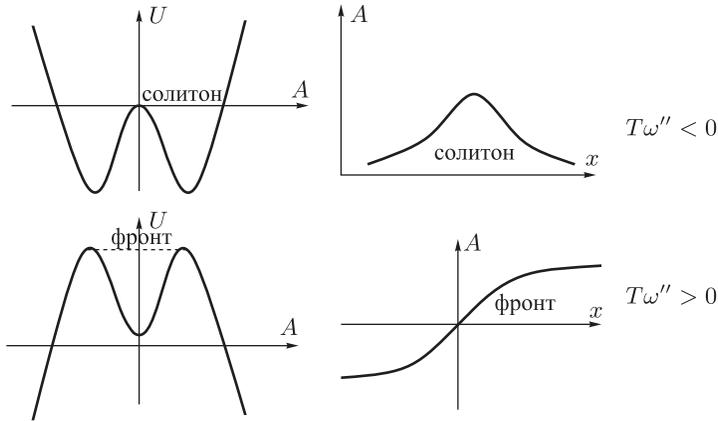


Рис. 3.9. Энергия как функция амплитуды бегущей волны и профиль волны. Верхняя часть соответствует неустойчивому конденсату, где стационарная волна — это солитон. Нижняя часть соответствует устойчивому конденсату, где стационарная волна — это фронт.

В квадратной скобке мы видим групповую скорость u , что в два раза больше, чем фазовая скорость, задаваемая экспонентой, как и должно быть для волн с квадратичной зависимостью частоты от волнового вектора. Заметим, что переход в движущуюся систему отсчета (галилеевское преобразование) для решений нелинейного уравнения Шрёдингера осуществляется следующим образом: $\psi(x, t) \rightarrow \psi(x - ut, t) \exp[iu(2x - ut)/2\omega'']$. Напомним, что ψ описывает солитон для огибающей, в терминах исходной переменной $a(\mathbf{r})$ он выглядит так, как показано на рисунке 3.10.

(ii) $d = 2, 3$. Устойчивые солитоны как минимумы интенсивности устойчивого конденсата (кинки) существуют и в пространствах большей размерности. В оптике они наблюдаются как темные и серые нити в лазерном луче, распространяющемся в нелинейной среде. Амплитуда обращается в ноль внутри темной нити, которая, таким образом, является вихрем, т. е. особенностью фазы волны, см. задачу 3.6.

Когда же конденсат неустойчив, то нет и никаких других устойчивых стационарных решений для $d = 2, 3$. Зависимость $\mathcal{H}(l)$, показанная на рисунке 3.8, подсказывает, что характер эволюции должен определяться знаком гамильтониана для $d = 2$: волновые пакеты с положительным гамильтонианом расплываются, потому что дисперсия волны (на другом языке

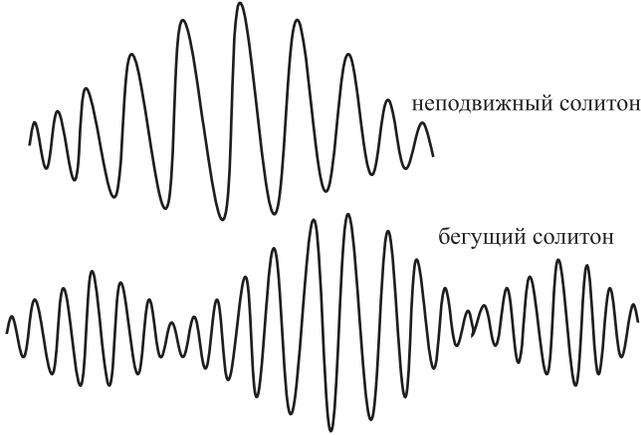


Рис. 3.10. Стоящий и бегущий солитоны огибающих почти монохроматической волны.

«кинетическая энергия» или «давление») доминирует, тогда как волновые пакеты с отрицательным гамильтонианом сжимаются и коллапсируют. Важно понимать, что аргументация, основанная на зависимости $\mathcal{H}(l)$, не является строгой. Строгое доказательство того, что знак гамильтониана определяет расплывается или коллапсирует пакет в двумерной среде, называется теоремой Таланова, которая есть аналитическая формула для второй производной по времени от квадрата размера пакета $l^2(t) = \int |\psi|^2 r^2 dr$. Чтобы вывести эту формулу, продифференцируем по времени, используя (3.44), потом проинтегрируем по частям и продифференцируем по времени еще раз:

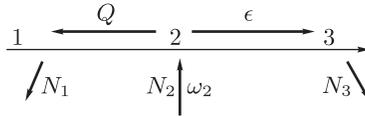
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 l^2}{\omega'' \partial t^2} &= \frac{i \partial_t}{2} \int r^2 \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \partial \mathbf{r} = i \partial_t \int r_\alpha (\psi \nabla_\alpha \psi^* - \psi^* \nabla_\alpha \psi) \partial \mathbf{r} = \\
 &= - \int \left[\frac{\omega''}{2} (\psi \nabla_\alpha \Delta \psi^* + \psi^* \nabla_\alpha \Delta \psi - \nabla_\beta (\nabla_\beta \psi \nabla_\alpha \psi^* + \nabla_\beta \psi^* \nabla_\alpha \psi)) - \right. \\
 &\quad \left. - T \nabla_\alpha |\psi|^4 \right] r_\alpha \partial \mathbf{r} = \partial T \int |\psi|^4 \partial \mathbf{r} + 2\omega'' \int |\nabla \psi|^2 \partial \mathbf{r} = \\
 &= 4\mathcal{H} + 2(d-2)T \int |\psi|^4 \partial \mathbf{r}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим неустойчивый случай $T\omega'' < 0$. Действительно, для $d \geq 2$ получаем неравенство $\partial_{tt}l^2 \leq 4\omega''\mathcal{H}$, так что

$$l^2(t) \leq 2\omega''\mathcal{H}t^2 + C_1t + C_2$$

и для $\omega''\mathcal{H} < 0$ пакет сжимается в сингулярность за конечное время. Это описывает, в частности, самофокусировку света в нелинейных средах. Разумеется, сингулярность получена в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера, которое само справедливо только на масштабах, много больших длины несущей волны $2\pi/k_0$). Для $d = 2$ и $\omega''\mathcal{H} > 0$, напротив, получаем распыление пакета.

1. Двухкаскадная турбулентность. Как уже упоминалось, любое уравнение (3.40), описывающее только четырехволновые рассеяния, обязательно сохраняет два интеграла движения, энергию \mathcal{H} и число волн (волновое действие) N . Волновое действие $N = \int |a_k|^2 dk$ квадратично по амплитудам волн; энергия также приближенно квадратична при малых амплитудах: $\mathcal{H} \approx \int \omega_k |a_k|^2 dk$. Существование двух квадратичных положительных интегралов движения в замкнутой системе означает, что при добавлении накачки и затухания может возникнуть два турбулентных каскада.



Действительно, представим себе внешний источник, возбуждающий N_2 волн в единицу времени на частоте ω_2 . Понятно, что для существования стационарного состояния необходимо иметь по крайней мере две области диссипации в ω -пространстве (при неких ω_1 и ω_3), чтобы диссипировать вкачиваемые N и E . Законы сохранения позволяют определить числа волн N_1 и N_3 , поглощаемые в единицу времени в соответствующих областях. Схематично, решив два линейных уравнения $N_1 + N_3 = N_2$ и $\omega_1 N_1 + \omega_3 N_3 = \omega_2 N_2$, получим

$$N_1 = N_2 \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1}, \quad N_3 = N_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}. \quad (3.46)$$

Эти просто полученные формулы весьма поучительны. Видим, что при достаточно длинном левом интервале (когда $\omega_1 \ll \omega_2 < \omega_3$) бóльшая часть

энергии поглощается в правой области диссипации: $\omega_2 N_2 \approx \omega_3 N_3$. Подобным же образом при $\omega_1 < \omega_2 \ll \omega_3$ бóльшая часть волнового действия поглощается при малых ω : $N_2 \approx N_1$. Когда $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \omega_3$, имеем два отдельных каскада турбулентности в каждом из интервалов между накачкой и соответствующей областью диссипации. Каскад в направлении больших частот переносит поток энергии ϵ . Каскад волнового действия Q в направлении малых частот и соответственно больших масштабов называется обратным каскадом (Крайчнан, 1967; Захаров, 1967); он соответствует некоему процессу самоорганизации, т. е. возникновению более медленных движений большого масштаба из мелкомасштабных быстрых флуктуаций, что не вполне сочетается с наивной картиной турбулентности как процесса постоянного дробления и разрушения.⁹ Предел $\omega_1 \rightarrow 0$ интересен и хорошо определен; в этом случае роль левого стока играет конденсат, поглощающий обратный каскад. Отметим вкратце, что наличие двух интегралов движения имеет интересные последствия также и в случае термодинамического равновесия, означая возможность отрицательных температур в конечных системах.¹⁰

Гидродинамической системой с двумя квадратичными интегралами движения является двумерная идеальная несжимаемая жидкость. Скорость плоского течения \mathbf{u} перпендикулярна завихренности $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, которая сохраняется для любой частицы жидкости вследствие теоремы Кельвина. Это значит, что сохраняется также пространственный интеграл от любой функции завихренности, включая величину $\int \omega^2 dr$, называемую энстрофией. Можно записать пространственные плотности двух квадратичных интегралов движения, энергии и энстрофии, через спектральное разложение скорости: $E = \int |\mathbf{v}_\mathbf{k}|^2 dk$ и $\Omega = \int |\mathbf{k} \times \mathbf{v}_\mathbf{k}|^2 dk$. Если мы возбуждаем турбулентность пространственно-периодической силой с характерным волновым числом k_2 , а две области диссипации находятся в k_1, k_3 , то подобно (3.46) получим

$$E_1 = E_2 \frac{k_3^2 - k_2^2}{k_3^2 - k_1^2}, \quad E_3 = E_2 \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2}. \quad (3.47)$$

Опять же при $k_1 \ll k_2 \ll k_3$ бóльшая часть энергии поглощается левым стоком, $E_1 \approx E_2$, а бóльшая часть энстрофии — правым, $\Omega_2 = k_2^2 E_2 \approx \Omega_3 = k_3^2 E_3$. Таким образом, сохранение энергии и квадрата завихренности в двумерных течениях несжимаемой идеальной жидкости приводит к необходимости двух турбулентных каскадов: энстрофии — в малые масштабы и энергии — в бóльшие масштабы (в направлении, противоположном каскаду энергии в трех измерениях). Крупномасштабные течения в оке-

ане и атмосфере могут рассматриваться как приблизительно двумерные; возникновение и поддержание долгоживущих больших вихрей и струй, возможно, имеет отношение к обратным турбулентным каскадам.¹¹

3.4. Уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ)

Здесь мы рассмотрим другой универсальный предел: слабонелинейные длинные волны. В длинноволновом пределе можно разложить частоту по степеням малого волнового вектора. Обратимость гамильтоновой системы во времени и изотропия в пространстве означает разложение ω^2 по степеням k^2 . Если создание однородного возмущения ($k = 0$) не требует затраты энергии, то это разложение начинается с линейного члена $\omega^2 \propto k^2$, то есть закон дисперсии длинных волн в таких средах близок к акустическому. Мы выведем соответствующее нелинейное уравнение КдВ для длинных волн на мелкой воде. Мы затем рассмотрим некоторые замечательные свойства этого уравнения и волн, им описываемых.

3.4.1. Волны на мелкой воде

Закон дисперсии линейных гравитационно-капиллярных волн имеет вид $\omega_k^2 = (gk + \alpha k^3/\rho) \tanh kh$, см. (3.17). Когда длина волны превышает как h , так и $\sqrt{\alpha/\rho g}$, закон дисперсии близок к линейному:

$$\omega_k = \sqrt{gh} k - \beta k^3, \quad \beta = \frac{\sqrt{gh}}{2} \left(\frac{h^2}{3} - \frac{\alpha}{\rho g} \right). \quad (3.48)$$

Это значит, что волны на мелкой воде подобны звуку со скоростью $c = \sqrt{gh}$. В 19 веке Скотт Рассел использовал эту формулу, чтобы оценить высоту атмосферы по скорости распространения изменений погоды, т.е. волн атмосферного давления. Взяв $h \simeq 10$ км, получим $c \simeq 320$ м/с, что того же порядка, что и скорость звука в воздухе у поверхности $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$, поскольку $P \simeq \rho gh$.

Когда разные гармоники бегут с близкими скоростями, естественно ожидать, что и на мелкой воде возможны простые волны, распространяющиеся в одном направлении, как описано в параграфах 2.3.2, 2.3.3. Главным эффектом будет распространение со скоростью \sqrt{gh} без изменения формы, а малые эффекты нелинейности и дисперсии приведут к медленным изменениям. Выведем уравнение, описывающее такую волну малой, но конечной амплитуды. Линейная часть этого уравнения сразу следует из закона

дисперсии: $u_t + \sqrt{gh}u_x = -\beta u_{xxx}$, или в системе отсчета, движущейся со скоростью \sqrt{gh} , получим $u_t = -\beta u_{xxx}$. Чтобы вывести нелинейную часть уравнения в длинноволновом пределе, достаточно учесть первую исчезающую пространственную производную (которой оказывается уже первая). Движение почти одномерно, так что $u = v_x \gg v_y$. Компонента z уравнения Эйлера дает $\partial p / \partial z = -\rho g$ и $p = p_0 + \rho g(\zeta - z)$, что мы подставим в x -компоненту:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Величина $h + \zeta$ теперь играет роль плотности в уравнении непрерывности:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h + \zeta)u = 0.$$

Продифференцируем по времени, подставим сюда уравнение Эйлера и пренебрежем кубическим членом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \partial_x(h + \zeta)(uu_x + g\zeta_x) + \partial_x u \partial_x(h + \zeta)u \approx \\ &\approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(gh\zeta + \frac{g}{2}\zeta^2 + hu^2 \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Очевидно, в правой части имеются члены разных порядков. Первый член описывает линейное распространение со скоростью \sqrt{gh} , а остальные члены — малые нелинейные эффекты. К подобным уравнениям применим метод многомасштабных разложений (который мы уже применяли при выводе нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения Бюргерса). Мы предположим, что u и ζ зависят от двух аргументов, а именно $u(x - \sqrt{gh}t, t)$, $\zeta(x - \sqrt{gh}t, t)$, причем зависимость от второго аргумента является медленной. Выведем уравнение на u . В главном порядке $\partial_t u = -\sqrt{gh}u_x = -g\zeta_x$, так что $\zeta = u\sqrt{h/g}$, что является прямым аналогом уравнения $\delta\rho/\rho = u/c$ в линейной акустике. С этого момента u_t будет обозначать производную относительно медленного времени (или, попросту говоря, в системе отсчета, движущейся со скоростью \sqrt{gh}). Получим из (3.49)

$$(\partial_t - \sqrt{gh}\partial_x)(\partial_t + \sqrt{gh}\partial_x)u \approx -2\sqrt{gh}u_{xt} = (3/2)\sqrt{gh}(u^2)_{xx},$$

так что нелинейный вклад в u_t — это $-3uu_x/2$. Сравнив это с общим акустическим выражением (2.33), что есть $-(\gamma + 1)uu_x/2$, видим, что волнам

на мелкой воде соответствует $\gamma = 2$. Это также согласуется с тем, что локальная «скорость звука» есть $\sqrt{g(h + \zeta)} \approx \sqrt{gh} + u/2 = c + (\gamma - 1)u/2$, см. (2.32).

Аналогия между волнами на мелкой воде и звуком означает также, что на воде могут существовать ударные волны, называемые гидравлическими скачками.¹² Число Фруда u^2/gh играет в этом случае роль (квадрата) числа Маха.

Гидравлический скачок можно наблюдать в любой кухонной раковине, когда струя воды из крана растекается во все стороны по дну со скоростью, превышающей линейную «скорость звука» \sqrt{gh} : толщина слоя жидкости на некотором радиусе увеличивается скачком, что соответствует ударной волне, см. рисунок 3.11 и задачу 3.8. Эта ударная волна послана назад стенками раковины, которые останавливают течение; скачок возникает в том месте, где скорость ударной волны равна скорости течения.¹³ Скорость слабого скачка примерно равна «скорости звука», так что течение сверхзвуковое внутри и дозвуковое снаружи. Длинные поверхностные волны не могут проникнуть во внутреннюю область, которая, таким образом, может быть названа белой дырой (в противоположность черной дыре, откуда нельзя вырваться), а скачок играет роль горизонта. На рисунке 3.11 видны круги капиллярной ряби внутри; форма самого скачка не является круговой.



Рис. 3.11. Гидравлический скачок в кухонной раковине. Фото: Joe Gough, www.dreamstime.com.

3.4.2. Уравнение КдВ и солитон

Теперь мы готовы собрать вместе линейный член из закона дисперсии и нелинейный член, который мы только что вывели. Замена $u \rightarrow 2u/3$ обратит в единицу коэффициент при нелинейном члене. Уравнение

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (3.50)$$

было выведено Кортевегом и де Вризом в 1895 году и носит имя КдВ. Вместе с уравнением Бюргерса и нелинейным уравнением Шрёдингера КдВ входит в эксклюзивную группу универсальных нелинейных моделей. Уравнение КдВ одномерно, как Бюргерс, и имеет ту же степень универсальности. Именно, системы, в которых спонтанно нарушена какая-либо непрерывная симметрия (например, трансляционная инвариантность) допускают тип возмущений, называемый голдстоуновской модой, для которой $\omega \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$. Когда длина волны такой моды больше всех остальных масштабов в консервативной изотропной среде, функция $\omega^2(k^2)$ должна быть аналитической (наоборот, предел бесконечной глубины является сингулярным для поверхностных волн, так что функция $\omega^2(k^2)$ не аналитична в нуле ни для гравитационных, ни для капиллярных волн на глубокой воде). Аналитическая функция раскладывается по целым степеням: $\omega_k^2 = c^2 k^2 [1 + C(kl_0)^2]$. Для длинных волн, движущихся в одном направлении, получаем $\omega_k = ck[1 + C(kl_0)^2]$, где C – безразмерный коэффициент порядка единицы, а l_0 – некий внутренний масштаб в системе. Для гравитационных волн l_0 это глубина жидкости, а для капиллярных это $\sqrt{\alpha/\rho g}$. Соотношение между этими масштабами определяет знак β в (3.48), что, в свою очередь, определяет, бегут ли волны с конечными k быстрее или медленнее «скорости звука» \sqrt{gh} . Добавка поверхностного натяжения к возвращающей силе увеличивает частоту. С другой стороны, конечность отношения глубины к длине волны означает, что частицы жидкости двигаются по эллиптическим траекториям, а не по прямым, что уменьшает частоту. Квадратичная нелинейность $\partial_x u^2$, общая для КдВ и Бюргерса, есть просто перенормировка скорости звука и является также случаем общего положения; она содержит производную, поскольку однородная скорость не должна иметь никакого эффекта. Неполный список возмущений, одномерное распространение которых описывается уравнением КдВ, включает звук в плазме (где l – это либо дебаевский радиус экранирования зарядов или ларморовский радиус циклотронного вращения в магнитном поле), фононы в твердых телах (где l – размер кристаллической ячейки) и фононы в гелии (где знак β зависит от давления).

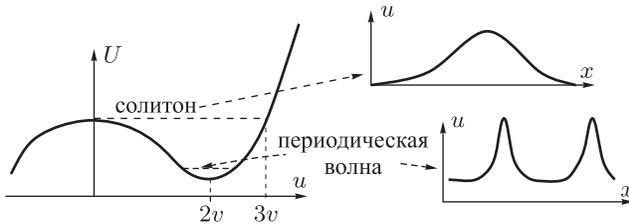
Уравнение КдВ симметрично относительно одновременной замены $\beta \rightarrow -\beta$, $u \rightarrow -u$ и $x \rightarrow -x$, так что достаточно рассмотреть только положительные β . Опишем сначала распространяющиеся волны неизменной формы, подставив $u(x - vt)$ в (3.50):

$$\beta u_{xxx} = vu_x - uu_x.$$

Это уравнение симметрично относительно галилеевской замены $u \rightarrow u + w$, $v \rightarrow v + w$, так что при первом интегрировании мы можем положить константу интегрирования нулем, перейдя в систему отсчета, движущуюся с нужной скоростью (это тривиальная перенормировка скорости звука в однородно движущейся среде). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\beta u_{xx} = -\frac{\partial U}{\partial u}, \quad U(u) = \frac{u^3}{6} - \frac{vu^2}{2},$$

общее решение которого может быть записано в эллиптических функциях. Мы, однако, обойдемся без этого. Чтобы понять общие свойства решения и выбрать специальное решение в виде солитона, мы поступим так же, как и в параграфе 3.3.3, рассматривая это уравнение как уравнение Ньютона, описывающее ускорение частицы в потенциале. Скорость v можно полагать положительной без ограничения общности. Мы должны ограничиться решениями с конечным $|u(x)|$, поскольку неограниченный рост нарушил бы предположения о слабой нелинейности. Конечные решения ограничивают u в интервале $(0, 3v)$.



Как видно из рисунка, линейные периодические волны существуют вблизи дна потенциала при $u \approx 2v$. Их амплитуда мала в системе отсчета, движущейся со скоростью $-2v$, — в этой системе отсчета их скорость отрицательна, как и должно быть для положительного β . Действительно, знак β противоположен знаку дисперсионной поправки $-3\beta k^2$ к групповой скорости $d\omega_k/dk$. Наоборот, солитон движется с положительной скоростью в системе отсчета, где нет возмущения на бесконечности — как раз эта система использована на рисунке. Важно, что скорости периодической волны

и солитона лежат по разные стороны от скорости звука: солитоны сверхзвуковые, когда периодические волны дозвуковые, и наоборот. Это обеспечивает невозможность резонансного излучения линейных волн солитоном и устойчивость последнего относительно одномерных возмущений.

Как обычно, солитонное решение является сепаратрисой:

$$u(x, t) = 3v \cosh^{-2} \left[\sqrt{\frac{v}{4\beta}} (x - vt) \right]. \quad (3.51)$$

Чем выше амплитуда, тем быстрее (при $\beta > 0$) и тем уже солитон. Подобно рассмотрению в конце параграфа 3.3.2, нетрудно понять, что одномерный солитон неустойчив относительно поперечных возмущений, если его скорость уменьшается с амплитудой, что имеет место при $\beta < 0$, когда периодические волны сверхзвуковые, а солитоны дозвуковые.

В отсутствие диссипации или дисперсии нелинейность приводит к опрокидыванию акустических возмущений. Дисперсия и диссипация стабилизируют волну, но формы стационарных волн, разумеется, различны. Отношение нелинейности к дисперсии $\sigma = uu_x/\beta u_{xxx} \sim ul^2/\beta$ является внутренним управляющим параметром уравнения КдВ (вдобавок к исходному «внешнему» числу Маха u/c , который также является параметром нелинейности и предполагается малым). Для солитона $\sigma \simeq 1$, что означает, что эффекты нелинейности и дисперсии сбалансированы, как и для солитона нелинейного уравнения Шрёдингера, описанного в параграфе 3.3.3. Это также означает, что солитон является непертурбативным объектом, который нельзя получить, стартуя с линейной волны и учитывая нелинейность по теории возмущений. В этом отличие от уравнения Бюргерса, где как решения с конечным M , так и стационарные ударные волны зависят гладко от соответствующего внутреннего параметра Re и существуют при любом его значении. Введение параметра σ порождает естественные вопросы. Всегда ли возмущения с $\sigma \ll 1$ соответствуют линейным волнам? Как эволюционирует возмущение с $\sigma \gg 1$ в рамках уравнения КдВ? Для ответа на подобные вопросы был разработан красивый метод, описанный в следующем параграфе.

3.4.3. Метод обратной задачи рассеяния

Замечательно, что эволюция произвольного начального возмущения может быть описана аналитически в рамках КдВ. Довольно неожиданно

это достигается путем рассмотрения функции $-u(x, t)/6\beta$ как потенциала в линейном уравнении Шрёдингера:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{u(x, t)}{6\beta} \right] \Psi = E\Psi. \quad (3.52)$$

Положительная $u(x)$ позволяет связанные состояния, т.е. дискретный спектр. Время входит в качестве внешнего параметра. Как было замечено (Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой в 1967 г.), спектр E не зависит от времени, если $u(x, t)$ эволюционирует согласно уравнению КдВ. Чтобы убедиться в этом, выразим u через Ψ :

$$u = -6\beta \left(E + \frac{\Psi_{xx}}{\Psi} \right). \quad (3.53)$$

Заметьте похожесть на подстановку Хопфа, использованную для линеаризации уравнения Бюргерса $v = -2\nu\phi_\xi/\phi$. В (3.53) на одну производную больше, так и в уравнении КдВ на одну производную больше, чем в уравнении Бюргерса — несмотря на некоторую наивность и эвристичность такого подхода, именно он помог Миуре предложить (3.53). Подставим (3.53) в уравнении КдВ и получим

$$\Psi^2 \frac{dE}{dt} = 6\beta \partial_x [(\Psi \partial_x - \Psi_x)(\Psi_t + \Psi_{xxx} - \Psi_x(u + E)/2)]. \quad (3.54)$$

Проинтегрировав по x , получим $dE/dt = 0$, поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2 dx$ конечен для любого связанного состояния. Собственные функции эволюционируют согласно уравнению, которое получается двукратным интегрированием (3.54) и выбором нулевой константы интегрирования вследствие нормализации:

$$\Psi_t + \Psi_{xxx} - \Psi_x \frac{u + E}{2} = 0. \quad (3.55)$$

С точки зрения (3.52) солитон — это потенциальная яма в точности с одним уровнем $E = v/8\beta$, что можно проверить прямым вычислением. Для далеко раздвинутых солитонов уровни энергии определяются независимо. Если солитоны различны, они движутся с разными скоростями, что приводит к столкновениям. Поскольку спектр сохраняется, после всех столкновений мы будем иметь те же солитоны. Пропорциональность скорости и амплитуды означает, что конечное состояние возмущения с $\sigma > 1$

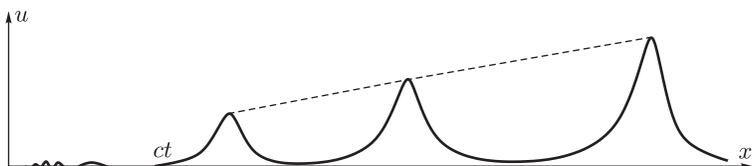


Рис. 3.12. Асимптотическая форма локализованного возмущения.

(с несколькими уровнями) должно выглядеть как линейно упорядоченная цепочка солитонов, квазилинейные волны, соответствующие непрерывному спектру, остаются позади и расплываются из-за дисперсии. Это можно установить, а также проанализировать эволюцию произвольного начального возмущения, используя метод обратной задачи рассеяния — восстановление потенциала $u(x)$ по функции $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) \rightarrow \Psi(x, 0) &= \sum a_n \Psi_n(x, 0) + \int a_k \Psi_k(x, 0) dk \rightarrow \\
 \rightarrow \Psi(x, t) &= \sum a_n \Psi_n(x, t) + \int a_k \Psi_k(x, 0) e^{-i\omega_k t} dk \rightarrow \quad (3.56) \\
 \rightarrow u(x, t). &
 \end{aligned}$$

На первом шаге мы находим собственные значения и функции по начальному потенциалу $u(x, 0)$. Второй (тривиальный) шаг заключается в вычислении эволюции функций дискретного спектра согласно (3.55) и непрерывного спектра просто согласно частоте. Третий шаг нетривиален — решение обратной задачи рассеяния, т. е. восстановление потенциала $u(x, t)$ по набору новых собственных функций.¹⁴

При рассмотрении слабонелинейного начального состояния ($\sigma \ll 1$) можно рассматривать потенциал как малое возмущение (3.52) и использовать квантово-механическое описание мелкой ямы. Напомним, что связанное состояние в одномерной мелкой яме существует только для отрицательного потенциала, что в нашем случае означает положительность полного импульса, $\int u(x) dx > 0$, иными словами — сверхзвуковое возмущение. Соответственно, любое малое дозвуковое возмущение (с отрицательным импульсом) не может породить солитонов, а только квазилинейные волны. С другой стороны, как бы ни мал был параметр нелинейности σ сверхзвукового возмущения, оно неизбежно породит солитон, объект с $\sigma \sim 1$.

Амплитуда солитона пропорциональна энергии связанного состояния, которая, в свою очередь, пропорциональна $(\int u dx)^2$ для мелкой ямы.

В обратном предельном случае интересно обсудить как малая дисперсии останавливает опрокидывание и регулирует ударную волну. Широкое начальное возмущение скорости с $\sigma \gg 1$ сначала будет эволюционировать, как описано в § 2.3.2, создавая сужающийся фронт отрицательного градиента скорости. При ширине фронта порядка $\sqrt{\beta/v}$ опрокидывание остановится и сформируется первый солитон, затем укрупнение фронта продолжится вплоть до образования второго солитона и так далее, пока возмущение не распадется на все солитоны, соответствующие уровням в потенциале $u(x, 0)/6\beta$ (см. также задачу 3.9).

Метод обратной задачи рассеяния был затем применен к одномерному нелинейному уравнению Шрёдингера (Захаровым и Шабатом в 1971 г.). В этом случае оказалось, что сохраняются собственные значения E для системы

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi_1 + \psi\psi_2 &= E\psi_1, \\ -i\partial_t\psi_2 - \psi^*\psi_1 &= E\psi_2, \end{aligned}$$

если ψ эволюционирует согласно нелинейному уравнению Шрёдингера. Также и в этом случае произвольное локализованное возмущение превращается в набор солитонов и расплывающийся квазилинейный волновой пакет.

Интегрируемость динамических уравнений в одномерном пространстве может быть в прямой связи с их универсальностью. Действительно, при малой нелинейности длинноволновые возмущения описываются уравнениями Бюргерса или КдВ, а квазимонохроматические — нелинейным уравнением Шрёдингера для огромного множества очень разных систем. Среди этих систем должны встречаться вырожденные интегрируемые случаи, эта интегрируемость, вообще говоря, должна сохраняться и для предельных случаев (длинноволнового и квазимонохроматического). Пространство-время этих систем двумерно, так что их интегрируемость может быть связана с бесконечномерностью конформной группы в двух измерениях. От потенциальных течений, описанных в параграфе 1.2.4 до нелинейных волновых моделей комплексный анализ и идея аналитичности лежат в основе большинства решаемых случаев в гидродинамике, как и в других областях физики.

Задачи

- 3.1 Почему волны накатываются на берег параллельно ему, даже если ветер дует наискосок?
- 3.2 Квазимонохроматический пакет поверхностных волн содержит N горбов. Сколько раз подпрыгнет поплавоч при прохождении пакета? Рассмотрите два случая: (i) гравитационные волны на глубокой воде, (ii) капиллярные волны на глубокой воде.
- 3.3 Бросая в воду камешки и глядя на круги, ими образуемые, видим, что волны наблюдаются только вне круга, расширяющегося со временем. Нарисуйте примерную картину волновых горбов. С какой скоростью растет радиус круга спокойной воды?
- 3.4 Устойчивые волны малой амплитуды, описываемые (3.32), существуют далеко не всегда. Рассмотрите общую форму квадратичного гамильтониана

$$\mathcal{H}_2 = \int \left[A(k) |b_k|^2 + B(k) (b_k b_{-k} + b_k^* b_{-k}^*) \right] d\mathbf{k}. \quad (3.57)$$

- (i) Найдите линейное преобразование (носящее имя Боголюбова) $b_k = u_k a_k + v_k a_{-k}^*$, которое обращает (3.57) в (3.32).
- (ii) Рассмотрите случай, когда четная часть $A(k) + A(-k)$ меняет знак на некой поверхности или линии в k -пространстве, причем $B(k) \neq 0$ там. Какой физике это соответствует? В какую простейшую форму \mathcal{H}_2 можно преобразовать гамильтониан в этом случае?
- 3.5 Покажите, что степенной закон дисперсии $\omega_k \propto k^\alpha$ с $\alpha \geq 1$ принадлежит к распадному типу, т. е. можно найти такие $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, что $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega_1 + \omega_2$. Рассмотрите двумерный случай $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$. Подсказка: ω_k описывает вогнутую поверхность, а условия резонанса означают пересечение двух поверхностей.
- 3.6 Рассмотрите устойчивый конденсат в 3D и найдите решение уравнения (3.41), имеющее вид

$$\psi = A e^{-iTA^2 t + i\varphi} f(r/r_0),$$

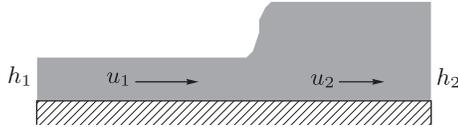
где r — расстояние от оси и φ — полярный угол. Являются ли параметры A и r_0 независимыми? Опишите асимптотики f на малых и больших расстояниях. Почему такая конфигурация называется вихрем?

3.7 Рассмотрим дискретное спектральное представление гамильтониана одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера в конечной среде:

$$\mathcal{H} = \sum_m \beta m^2 |a_m|^2 + (T/2) \sum_{ikm} a_i a_k a_{i+k-m}^* a_m^*.$$

Ограничимся тремя модами: $m = 0, 1, -1$. Опишите динамику такой системы трех мод.

3.8 Определите темп диссипации энергии на единицу длины гидравлического скачка. Рассмотрите случай, когда жидкость течет со скоростью u_1 в слое толщины h_1 , так что число Фруда немного больше единицы: $u_1^2/gh_1 = 1 + \epsilon$, $\epsilon \ll 1$.



3.9 Если учитывать одновременно и диссипацию, и дисперсию звуковой волны, возникает так называемое уравнение КдВ – Бюргерса:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} - \mu u_{xx} = 0. \quad (3.58)$$

Это уравнение позволяет, в частности, описать влияние дисперсии на структуру слабой ударной волны. Рассмотрите бегущее решение $u_0(x - vt)$ этого уравнения, предполагая нулевое граничное условие на $+\infty$: $u_0 = u_{0x} = u_{0xx} = 0$. Нарисуйте примерную форму $u_0(x)$ для $\mu \ll \sqrt{\beta v}$ и для $\mu \gg \sqrt{\beta v}$.

3.10 Найдите закон дисперсии волн на границе между двумя жидкостями, из которых верхняя течет, а нижняя покоится, в присутствии силы тяжести g и поверхностного натяжения α . Опишите возможные неустойчивости. Рассмотрите, в частности, два случая: $\rho_1 > \rho_2$, $v = 0$ (тяжелая над легкой) и $\rho_1 \ll \rho_2$ (ветер над водой).

$$\begin{array}{ccc} \frac{v_1=v}{v_2=0} & \frac{\rho_1}{\rho_2} & \alpha \\ \hline & & \downarrow g \end{array}$$

3.11 В параграфах 2.3.1, 3.1.1 описан стоковский дрейф частиц жидкости, порождаемый бегущими волнами. Очевидно, стоячая волна не порождает дрейфа. А что если поле скорости является линейной суперпозицией δv_{yx} стоячих волн: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sin(\omega t)\mathbf{V}(\mathbf{r}) + \sin(\omega t + \varphi)\mathbf{U}(\mathbf{r})$?

Средняя по времени скорость в каждой точке пространства равна нулю. А равна ли нулю средняя по времени скорость частицы жидкости? Предполагая, что градиенты скорости много меньше ω , проинтегрируйте по времени уравнение движения частицы и найдите среднюю по периоду скорость.

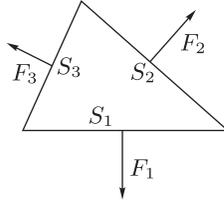
ГЛАВА 4

Решения задач

Для удачной догадки недостаточно просто удачи.
Джейн Остин

4.1. Глава 1

1.1 Рассмотрим призму в жидкости.



В неподвижной жидкости силы должны сложиться в ноль, что значит, что после поворота на $\pi/2$ векторы сил должны образовать замкнутый треугольник, подобный основанию призмы. Поскольку силы оказываются пропорциональны площадям граней, давления одинаковы. Заметьте, что мы не предполагали жидкость изотропной.

В движущейся жидкости, вообще говоря, ускорения не зануляются и силы анизотропны. И тем не менее, закон Паскаля остается справедливым и следует, как заметил Стокс, из требования конечности ускорений (совершенно так же, как симметрия тензора вязких напряжений следовала из конечности угловых ускорений в § 1.4.2). Масса внутри призмы пропорциональна площади, т. е. квадрату размера. Если бы силы на единицу площади разных граней были разными в пределе исчезающего размера, то результирующая сила была бы пропорциональна размеру и отношение силы к массе стремилось бы к бесконечности. Отсюда

закключаем, что давление в точке не зависит от направления. Результирующая сила, действующая на призму, пропорциональна разности сил на разные грани, что есть градиент давления на квадрат размера. Таким образом, конечное ускорение жидкости оказывается пропорционально градиенту давления.

То, что жидкость передает давление одинаково во всех направлениях используется во многих гидравлических устройствах, включая тормозные системы большинства автомобилей. Гидравлика также позволяет усиливать передаваемые силы (я еще успел много лет назад поводить автомобили без гидравлического привода руля и хорошо помню, как было трудно крутить баранку). Работает гидроусилитель так: прикладывается сила F_1 к поршню закрывающему колено трубы меньшей площади S_1 . В жидкости создается давление F_1/S_1 , которое передается поршню большей площади S_2 , действуя на него большей силой $F_2 = F_1 S_2/S_1$.

- 1.2 Сила гравитации должна уравниваться градиентом давления: $-\rho \nabla \phi = \nabla p$. Разделив на плотность ρ , подействовав оператором div и используя $\Delta \phi = 4\pi G \rho$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \partial p}{\rho \partial r} \right) = -4\pi G r^2 \rho. \quad (4.1)$$

Для несжимаемой жидкости давление

$$p = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 (R^2 - r^2)$$

обращается в ноль на границе, так что такое небесное тело может существовать в вакууме.

Для идеального газа при постоянной температуре, используя $\rho = p/c^2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \partial p}{p \partial r} \right) = -4\pi G c^{-4} r^2 p. \quad (4.2)$$

Поскольку это нелинейное уравнение масштабно инвариантно ($r \rightarrow r/a$, $p \rightarrow p a^2$), у него существует степенное решение:

$$p(r) = \rho(r) c^2 = c^4 / 2\pi G r^2. \quad (4.3)$$

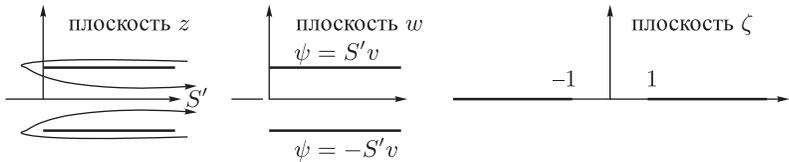
Это решение не содержит никакой константы интегрирования и расходится как в нуле (бесконечное давление), так и на бесконечности (бесконечная полная масса). Конечное давление p_0 в центре задает внутренний радиус $r_0 = c^2/(Gp_0)^{1/2}$, такой что $p(r) \approx p_0(1 - 2Gp_0r^2/3c^4)$ при $r \ll r_0$. При $r \gg r_0$, физическое решение приближается к степенному (4.3) и продолжается до конечного внешнего радиуса, задаваемого конечностью полной массы. При любом конечном радиусе внутреннее давление конечно и требует внешнего давления (очевидно, меньше p_0), чтобы уравновесить, так что в вакууме такое облако газа существовать не может. Значения давления в центре и на границе — два параметра, задающие решение этого дифференциального уравнения второго порядка.

Заметим, что для адиабатического режима с $p \propto \rho^\gamma$, степенная асимптотика $\rho \propto r^{2/(\gamma-2)}$ интегрируема на бесконечности только при $\gamma > 4/3$. Для $1 < \gamma < 4/3$, интегрируемая асимптотика есть $\rho \propto r^{1/(1-\gamma)}$; в частности, при $\gamma = 6/5$ имеется замечательно простое решение $p \propto \rho^{6/5} \propto (a^2 + r^2)^{-3}$, всюду регулярное и имеющее конечную массу.

Нетрудно также установить, что если температура убывает на больших расстояниях по степенному закону $T \propto r^{-a}$, то уравнение (4.1) дает $\rho \propto pr^a \propto r^{-a-2}$, так что при $a > 1$ существует стационарное равновесие с конечной полной массой.

- 1.3 Расход жидкости — $S' \sqrt{2gh}$. Закон сохранения дает $v = \sqrt{gh}$ в точке прекращения сжатия струи (*vena contracta*). Квадрат этой скорости, умноженный на площадь S' и плотность, дает горизонтальный поток импульса, который, в свою очередь, определяется силой, приложенной стенками к жидкости. Давление, приложенное к жидкости элементом стенки, противоположным отверстию, оказывается несбалансированным и обеспечивает горизонтальный поток импульса. Для вставленной трубки (в отличие от отверстия, сделанного прямо в стенке, как на рис. 1.3) можно пренебречь движением жидкости у стенок, так что разница сил есть давление $p = \rho gh$, умноженное на площадь отверстия S . Получаем $\rho v^2 S' = \rho gh S$ и $S' = S/2$. Пристеночное движение уменьшает давление у выхода и увеличивает разницу сил и поток импульса; поскольку струя выходит с той же скоростью, она должна иметь большее сечение, так что $S'/S \geq 1/2$. Для круглого отверстия в тонкой стенке эксперимент дает $S'/S \simeq 0.62$. Вставленная трубка называется насадкой Борда, который предложил вставить внутри трубку

с сечением, в два раза большим выходного (и с длиной, превышающей диаметр), чтобы увеличить расход при заданном выходном сечении. Общее рассуждение, основанное на законах сохранения энергии и импульса, справедливо для любой размерности. Для плоской (двумерной) насадки Борда удастся вдобавок аналитически описать течение, пренебрегая силой тяжести и полагая насадку длинной — оба предположения справедливы для течения недалеко от угла. В отличие от симметричного обтекания, изображенного на рисунке 1.8 при $n = 1/2$ и имеющего бесконечную скорость при повороте на краю, жидкость течет вдоль плоской границы насадки снаружи и отрывается от нее внутри. Такое течение с отрывом также может быть описано с помощью конформных преобразований, но только с особенностями, как показано на рисунке.



Стенки насадки совпадают с линиями тока. Отрыв приводит к скачку потенциала на стенке, что требует разрезов в плоскости ζ . Это соответствует потенциалу $w \propto \ln \zeta$, для которого скорость всюду конечна; подробности можно найти в [13, § 11.51]. Для плоского разреза в тонкой стене двумерное решение приведено в [13, § 11.53], или [10, § 10], что дает коэффициент истечения $\pi/(\pi + 2) \approx 0.61$.

- 1.4 Говоря попросту, завихренность есть циркуляция скорости (= поток завихренности), деленная на площадь. А угловая скорость Ω есть циркуляция скорости (вокруг частицы), деленная на радиус a и длину окружности $2\pi a$:

$$\Omega = \int u \, dl / 2\pi a^2 = \int \omega \, df / 2\pi a^2 = \omega / 2.$$

Этот же результат можно получить несколько более формально, поместив начало координат внутри частицы и рассмотрев скорость в точке, задаваемой радиус-вектором \mathbf{r} . Поскольку частица мала, воспользуемся разложением в ряд Тэйлора $v_i(\mathbf{r}) = S_{ij}r_j + A_{ij}r_j$, где $S_{ij} = (\partial_i r_j + \partial_j r_i)/2$ и $A_{ij} = (\partial_i r_j - \partial_j r_i)/2$. Поскольку твердое тело недеформируемо, то $S_{ij} = 0$. При заданном положении центра единственное движение, не деформирующее тело, — это вращение. Угловая

скорость Ω дает $A_{ik}r_k = \epsilon_{ijk}\Omega_j r_k$. С другой стороны, компонента завихренности есть

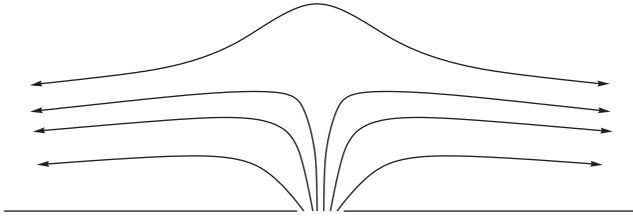
$$\omega_i \equiv [\nabla \times \mathbf{v}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_j v_k - \partial_k v_j).$$

Используя тождество $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{mk}$ и

$$\epsilon_{imn}\omega_i = \frac{1}{2}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{mk})(\partial_j v_k - \partial_k v_j) = \partial_m v_n - \partial_n v_m,$$

получим $A_{ik}r_k = \epsilon_{ijk}\omega_j r_k/2$ и $\Omega = \omega/2$.

- 1.5 Используем уравнение Бернулли для линии тока, соединяющей точку максимального подъема (где $v = 0$ и высота H) и точку на бесконечности: $2gH = 2gh + v_\infty^2$.



- (i) В плоском случае скорость течения вдали от щели горизонтальна и не зависит от высоты вследствие потенциальности. Сохранение массы требует $v_\infty = q/2\rho g$, что дает высоту подъема $H - h = q^2/8g\rho^2 h^2$.
(ii) В этом случае скорость убывает обратно пропорционально радиусу и стремится к нулю на бесконечности, что означает отсутствие возвышения поверхности над источником для потенциального течения, так что фонтан от подводного источника может возникнуть только за счет непотенциальности течения.

- 1.6 По определению, на линиях тока имеем

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{f} = (v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times (dr \hat{\mathbf{r}} + d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = rv_r d\theta - v_\theta dr = 0.$$

В системе отсчета, где жидкость неподвижна на бесконечности, скорость невязкого потенциального течения есть

$$v_r = -u \cos \theta (R/r)^3, \quad v_\theta = -(1/2)u \sin \theta (R/r)^3. \quad (4.4)$$

Интегрируя

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{\operatorname{tg} \theta}{2r},$$

получим $r \propto \sin^2 \theta$. Каждая такая линия стартует с $r = 0, \theta = 0$, достигает максимального радиуса при $\theta = \pi/2$ и возвращается к $r \rightarrow 0$ под углом $\theta \rightarrow \pi$; разумеется, только части при $r > R$ описывают линии тока, показанные в левой части рисунка 4.1.

Вследствие аксиальной симметрии обтекания сферы, каждая линия тока не выходит из плоскости, проходящей через ось симметрии. Для такого набора плоских течений можно ввести функцию тока, аналогичную двумерному случаю. В каждой плоскости, проходящей через ось симметрии, разность значений функции тока в любых двух точках есть поток через поверхность, порождаемую вращением вокруг оси любой линии между этими двумя точками. Для инфинитезимального вектора $d\mathbf{l}$ в такой плоскости поток есть $2\pi r d\psi = 2\pi r \sin \theta \mathbf{v} \times d\mathbf{l}$, так что $v_\theta = -(r \sin \theta)^{-1} \partial \psi / \partial r$ и $v_r = (r^2 \sin \theta)^{-1} \partial \psi / \partial \theta$. Для (4.4) мы получим функцию тока $\psi = -uR^3 \sin^2 \theta / 2r$, линии уровня которой и есть линии тока, полученные выше. Можно также определить векторное поле, единственная θ -компонента которого перпендикулярна плоскостям и равна ψ , тогда скорость (v_θ, v_r) есть ротор этого поля.

В системе отсчета сферы, скорость невязкого потенциального течения есть

$$\begin{aligned} v_r &= u \cos \theta \left(1 - (R/r)^3\right), \\ v_\theta &= -u \sin \theta \left(1 + (R^3/2r^3)\right). \end{aligned}$$

Линии тока задаются уравнением

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{2r^3 + R^3}{2r(r^3 - R^3)} \operatorname{tg} \theta,$$

интегрирование которого дает:

$$\begin{aligned} -\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{2}{\operatorname{tg} \theta} &= \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{2r^3 + R^3}{r(r^3 - R^3)}, \\ \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}\right)^2 &= \frac{r_2(r_1 - R)(r_1^2 + r_1 R + R^2)}{r_1(r_2 - R)(r_2^2 + r_2 R + R^2)}. \end{aligned}$$

Функция тока в системе отсчета сферы есть $\psi = -ur^2 \sin^2 \theta (1/2 - R^3/r^3)$. Соответствующие линии тока изображены в правой части

рисунка 4.1. Решение для двумерного случая можно найти в параграфах 9.20-22 книги [13].

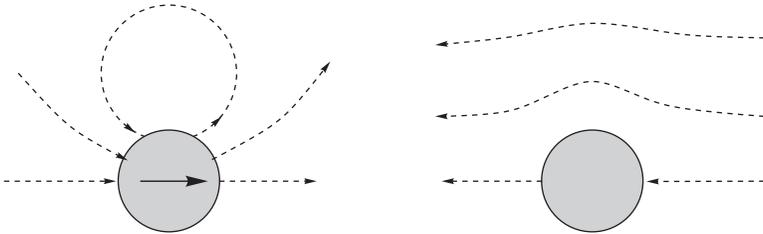
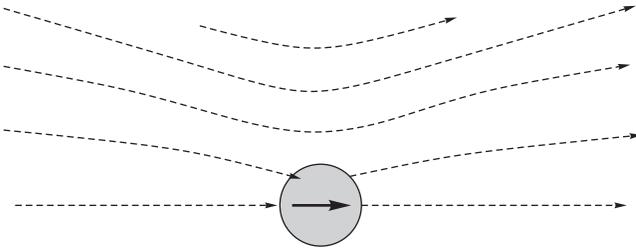


Рис. 4.1. Линии тока потенциального обтекания сферы в системе отсчета, где жидкость неподвижна на бесконечности (слева), и в системе отсчета, движущейся вместе со сферой (справа).

Поле скорости вязкого течения Стокса, задаваемого (1.53), также определяет функцию тока. В системе отсчета, где жидкость неподвижна на бесконечности, $\psi = urR \sin^2 \theta (3/4 - R^3/3r^3)$, что соответствует линиям тока, изображенным на рисунке.



Очевидно, главное различие в том, что линии тока невязкого течения — замкнутые петли (сравните с петлей траектории, изображенной на рис. 1.9), тогда как вязкое течение невозвратно.

В системе отсчета сферы функция тока течения Стокса есть $\psi = -ur^2 \sin^2 \theta (1/2 - 3R/4r + R^3/4r^3)$ и линии тока качественно подобны изображенным в правой части рисунка 4.1.

1.7 Уравнение движения шарика на пружинке имеет вид $m\ddot{x} = -kx$, так что соответствующая частота есть $\omega_a = \sqrt{k/m}$. В жидкости

$$m\ddot{x} = -kx - \tilde{m}\dot{x}, \quad (4.5)$$

где $\tilde{m} = \rho V/2$ есть присоединенная масса сферы. Частота колебаний в идеальной жидкости есть

$$\omega_{a,\text{fluid}} = \omega_a \sqrt{\frac{2\rho_0}{2\rho_0 + \rho}}; \quad (4.6)$$

здесь ρ — плотность жидкости, а ρ_0 — плотность материала шарика. Уравнение движения маятника: $ml\ddot{\theta} = -mg\theta$. В жидкости оно принимает вид:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta + \rho Vg\theta - \tilde{m}l\ddot{\theta}, \quad (4.7)$$

где $\rho Vg\theta$ — это архимедова сила, а $-\tilde{m}l\ddot{\theta}$ — сила инерции. Из $ml\ddot{\theta} = -mg\theta$ получаем $\omega_b = \sqrt{g/l}$, а в жидкости частота колебаний равна

$$\omega_{b,\text{fluid}} = \omega_b \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho)}{2\rho_0 + \rho}}. \quad (4.8)$$

Вязкость жидкости приведет к затуханию колебаний. Когда вязкость мала, $\nu \ll \omega_{a,b}a^2$, толщина пограничного слоя много меньше размера тела: $\nu/\omega_{a,b}a \ll a$. Это позволяет рассматривать пограничный слой локально плоским. Направим ось x вдоль поверхности, а ось y — поперек:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$v_x(y, t) = u \exp\{-(1+i)y/\delta + i\omega t\}, \quad \delta = \sqrt{2\nu/\rho_0\omega}. \quad (4.9)$$

Такое течение создает вязкое напряжение на поверхности тела,

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{\partial v_x(0, t)}{\partial y} = (i-1)v_x(0, t) \sqrt{\omega\eta\rho/2},$$

результатом которого является следующий темп диссипации энергии на единицу площади:

$$-\sigma_{yx}v_y = u^2 \sqrt{\omega\eta\rho/8}.$$

Для оценки полного темпа диссипации энергии следует умножить это на площадь поверхности. Точный ответ можно получить, найдя распределение скорости вокруг осциллирующей сферы, см. например, параграф 24 в [10].

1.8 **Анализ размерности и простые оценки.** В выражении $T \propto E^\alpha p^\beta \rho^\gamma$ три неизвестных α, β, γ могут быть найдены из подсчета степеней трех размерностей (граммов, метров и секунд), что дает

$$T \propto E^{1/3} p^{-5/6} \rho^{1/2}.$$

Аналогично $T \propto ap^{-1/2} \rho^{1/2}$. Заметим, что $c \propto \sqrt{p/\rho}$ — это скорость звука, так что период есть просто a/c . Энергия — это произведение давления на объем: $E = 4\pi a^3 p/3$. Этот метод действительно используется для измерения энергии подводных взрывов: подождать, пока сформируется пузырь, затем, наблюдая осцилляции, определить радиус и связать его с энергией взрыва.

Набросок теории. Радиус пузыря меняется по закону: $r_0 = a + b \exp(-\omega t)$, где a — это начальный радиус и $b \ll a$ — малая амплитуда колебаний с периодом $T = 2\pi/\omega$. Пренебрегая силой тяжести, можно считать индуцированное движение жидкости радиальным: $v = v_r(r, t)$. Несжимаемость требует $v(r, t) = A \exp(-\omega t)/r^2$ на поверхности пузыря $dr_0/dt = v(r, t)$, что дает $A = -iba^2\omega$ и скорость

$$v(r, t) = -ib(a/r)^2 \omega \exp(-\omega t). \quad (4.10)$$

Заметим, что $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \simeq b^2 \omega^2 / a \ll \partial_t \mathbf{v} \simeq b \omega^2$ вследствие предположения $b \ll a$. Теперь мы используем линеаризованные уравнения Навье–Стокса и сферическую симметрию и получим

$$p_{\text{water}} = p_{\text{static}} - \rho \omega^2 b \left(\frac{a^2}{r} \right) e^{-i\omega t}, \quad (4.11)$$

где p_{static} — это статическое давление в жидкости без осцилляций. Период колебаний мы оценили как радиус пузыря, деленный на скорость звука в воде, что будет подтверждено ниже формулой 4.15. Скорость же звука внутри пузыря намного больше, чем в воде, поскольку давление то же, а плотность намного меньше. Так что давление внутри уравновешивается быстро и может считаться однородным. С другой стороны, мы полагаем период колебаний малым по сравнению со временем теплообмена, что есть квадрат радиуса, деленный на коэффициент диффузии тепла. В отличие от передачи импульса (см. § 1.4.3), диффузия тепла в жидкости требует перемещения молекул, так что коэффициент диффузии может быть оценен как скорость звука, умноженная на длину свободного пробега. Следовательно, передача тепла несущественна, когда радиус много больше длины свободного пробега. Это

позволяет использование адиабатическое соотношение $p_{\text{bubble}} r_0^{3\gamma} = p_{\text{static}} a^{3\gamma}$, что дает

$$p_{\text{bubble}} = p_{\text{static}} (1 - 3\gamma(b/a)e^{-\omega t}). \quad (4.12)$$

Теперь используем граничное условие на границе между воздухом и водой при $r = a$, пренебрегая поверхностным натяжением:

$$-p_{\text{bubble}}\delta_{ik} = -p_{\text{water}}\delta_{ik} + \eta(\partial_k v_i + \partial_i v_k), \quad (4.13)$$

где η динамическая вязкость воды. Компонента σ_{rr} дает $\rho(a\omega)^2 + 4\eta - 3\gamma p = 0$, и решение имеет вид

$$\omega = \left(-\frac{2\eta}{a^2\rho} \pm \sqrt{\frac{3\gamma p}{\rho a^2} - \frac{4\eta^2}{a^4\rho^2}} \right). \quad (4.14)$$

Оно описывает аperiодическое затухание для большой вязкости; а для $\eta^2 < 3\gamma p \rho a^2 / 4$ частота колебаний

$$\omega = 2\pi/T(a, p, \rho) = \sqrt{\frac{3\gamma p}{\rho a^2} - \frac{4\eta^2}{a^4\rho^2}}. \quad (4.15)$$

Вязкость замедляет колебания, т. е. увеличивает период, что может быть существенно для маленьких пузырьков, см. более детальное рассмотрение в [21].

1.9 Уравнение Навье–Стокса для завихренности в несжимаемой жидкости,

$$\partial_t \omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \omega,$$

в цилиндрически симметричном случае сводится к уравнению диффузии,

$$\partial_t \omega = \nu \Delta \omega,$$

поскольку $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Уравнение диффузии в цилиндрических координатах имеет вид

$$\partial_t \omega = \nu r^{-1} \partial_r r \partial_r \omega.$$

Для начального условия в виде дельта-функции на оси уравнение имеет простое решение

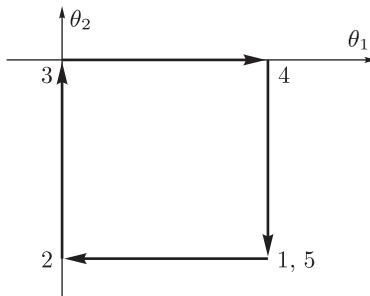
$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right),$$

сохраняющее полную завихренность:

$$\Omega(t) = 2\pi \int_0^\infty \omega(r, t) r dr = \frac{\Gamma}{2\nu t} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) r dr = \Gamma.$$

Вообще, для любого двумерного несжимаемого течения уравнение Навье–Стокса имеет вид $\partial_t \omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega$, сохраняющий интеграл завихренности, который также является потоком завихренности, если он конечен.

- 1.10 Форма пловца полностью определяется углами между центральным отрезком (телом) и двумя крайними отрезками (руками), так что пространство конфигураций двумерно. В нашем случае пловец описывает петлю в пространстве конфигураций, при этом его смещение в обычном пространстве должно быть пропорционально площади петли, т. е. θ^2 . Преобразование $y \rightarrow -y$, $\theta_1 \rightarrow -\theta_1$, $\theta_2 \rightarrow -\theta_2$ не меняет контура, так что смещение вдоль y отсутствует. Альтернативное доказательство того, что смещение направлено вдоль x , следует из того, что эта последовательность конфигураций инвариантна относительно преобразования $t \rightarrow -t$, $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow y$. Очевидно, движения рук не коммутируют. Поскольку легче двигаться, когда неподвижная рука не отклонена от тела (т. е. или θ_1 , или θ_2 равен нулю), следовательно, в течение $1 \rightarrow 2$ и $4 \rightarrow 5$ пловец сдвигается влево меньше, чем он сдвигается вправо в течение $2 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 4$, по крайней мере когда $\theta \ll 1$. Следовательно, результирующее смещение должно быть вправо или в общем случае в направлении руки, что двигалась первой. Дополнительное чтение: [1, § 7.5], [23, 24].



Поставив пловца на якорь, получим помпу. Геометрическая природа плавания и перекачки жидкости микроорганизмами является предме-

том неабелевой теории поля, связанной аналогиями с многими физическими явлениями, см. [25].

- 1.11 **Простая оценка.** Сила Магнуса может быть оценена как $\rho v_0 \Omega R R^2 \simeq \simeq 3 \text{ Н}$. Для грубой оценки смещения пренебрежем торможением мяча и оценим время полета как $T \simeq L/v_0 \simeq 1 \text{ с}$. Пренебрегая также сопротивлением движению поперек, оценим, что ускорение $\rho v_0 \Omega R^3/m \simeq 6.7 \text{ м с}^{-2}$ приведет к отклонению

$$y(T) = \frac{\rho v_0 \Omega R^3 T^2}{2m} \simeq \frac{\rho \Omega R^3 L^2}{2m v_0} = L \frac{\Omega R}{v_0} \frac{\rho R^2 L}{2m}. \quad (4.16)$$

Подставляя числа, получаем $y(T) \simeq 3.35 \text{ м}$.

Набросок теории. Несложно учесть силу сопротивления $C \rho v^2 \pi R^2/2$, что приведет к логарифмическому закону смещения:

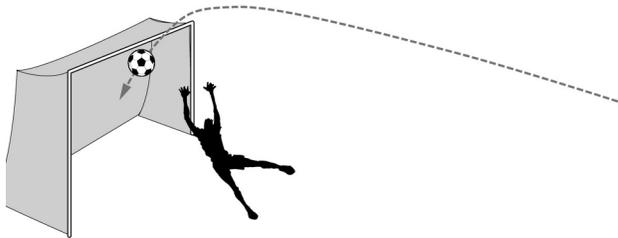
$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{v^2}{L_0}, & v(t) &= \frac{v_0}{1 + v_0 t/L_0}, \\ x(t) &= L_0 \ln(1 + v_0 t/L_0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь $L_0 = 2m/C\rho\pi R^2 \simeq 100 \text{ м}$ при $C \simeq 0.25$ для $\text{Re} = v_0 R/\nu \simeq \simeq 2 \cdot 10^5$. Смысл параметра L_0 в том, что это расстояние, на котором сопротивление существенно меняет скорость; вполне естественно это соответствует массе сдвинутого воздуха $\rho\pi R^2 L$ порядка массы мяча. Получим время движения T из (4.17): $v_0 T/L_0 = \exp(L/L_0) - 1 > L/L_0$. Теперь можно учесть зависимость скорости смещения $v(t)$ от времени. Полагая смещение в направлении y малым по сравнению с расстоянием, пролетаемым вдоль x , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \frac{\rho \Omega R^3 v(t)}{m} = \frac{\rho \Omega R^3 v_0}{m(1 + v_0 t/L_0)}, \\ y(0) = \dot{y}(0) &= 0, \\ y(t) &= L_0 \frac{\Omega R}{v_0} \frac{2}{\pi C} [(1 + v_0 t/L_0) \ln(1 + v_0 t/L_0) - v_0 t/L_0]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

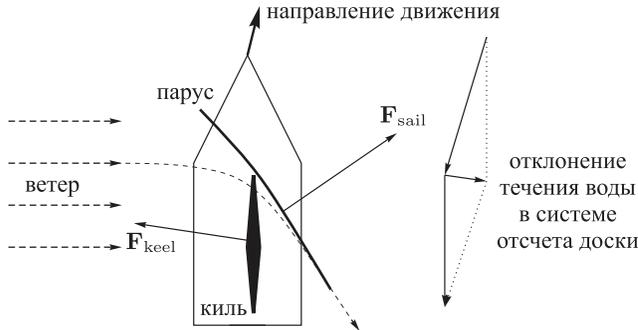
Эта формула переходит в (4.16) в пределе $L \ll L_0$, что неплохо выполняется для пенальти. Для больших L надо также учесть силу сопротивления в направлении y , что приведет к насыщению \dot{y} на значении $\sim \sqrt{\Omega R v}$. Впрочем, столь детальное рассмотрение не очень осмысленно, поскольку мы используем очень грубую оценку силы Магнуса

и пренебрегаем вертикальным смещением $gT^2/2$, которое сравнимо с отклонением.



Замечание. Выдающиеся футболисты умеют также использовать кризис сопротивления, т. е. резкое увеличение коэффициента сопротивления C от 0.15 до 0.5 при уменьшении Re от $2.5 \cdot 10^5$ до $1.5 \cdot 10^5$ (когда скорость мяча падает от 37.5 м/с до 22.5 м/с). В результате мяч довольно резко тормозит в некоей точке траектории и сила Магнуса оказывает еще больший эффект. Кризис сопротивления используется также для посылания длинного мяча через голову вратаря, вышедшего слишком далеко из ворот; в этом случае мяч плавно поднимается вверх и затем резко ныряет вниз, как показано на рисунке. Если еще закрутить мяч вокруг горизонтальной оси, то сила Магнуса усилит эффект.

- 1.12 Для того чтобы на киль действовала сила, необходимо двигаться не точно вперед, а немного вбок, под некоторым углом. Нетрудно понять направление силы, действующей на киль, рассматривая отклонение воды от прямолинейного движения в системе отсчета доски — вода натекает против направления движения, а утекает вдоль киля. Соответственно, направление силы действующей на киль, противоположно направлению отклонения воды. Эта сила \mathbf{F}_{keel} направлена почти строго вбок (влево на рисунке) и должна уравниваться силой ветра, действующей на парус. Ветер также уходит назад вдоль паруса, и его отклонение определяет \mathbf{F}_{sail} . При движении с постоянной скоростью вектор $\mathbf{F}_{\text{keel}} + \mathbf{F}_{\text{sail}}$ направлен по направлению движения и уравновешен силой сопротивления. Если сила сопротивления достаточно мала, можно двигаться и быстрее ветра, поскольку \mathbf{F}_{sail} не зависит от скорости доски при условии, что ветер остается перпендикулярным доске в ее системе отсчета. Наоборот, при движении по ветру невозможно превысить скорость ветра.



Смотри также [26].

- 1.13 1) **Простой ответ.** Стационарную скорость падения твердого шарика легко получить, приравняв силу тяжести силе Стокса:

$$6\pi R\eta_\alpha u = mg, \quad u = \frac{2\rho_w g R^2}{9\eta_\alpha}. \quad (4.19)$$

Поставляя числа, получим $u \simeq 1.21$ см/с. Стокс сам использовал (4.19), заметив, что облака парят в небе, потому что вес капли убывает с размером быстрее силы сопротивления, так что маленькие капельки падают очень медленно.

Пределы применимости и поправки. Число Рейнольдса $Re \simeq 0.008$, что оправдывает использование формулы Стокса и позволяет пренебречь поправками конечного Re . Заметим, однако, что $Re \propto \nu R \propto R^3$, так что $Re \simeq 1$ уже для $R = 0.05$ мм. Сферичность поддерживается поверхностным натяжением, соответствующий параметр — это отношение силы вязкого трения $\eta_w u/R$ к силе поверхностного натяжения α/R ; это отношение равно $\eta_w u/\alpha \simeq 0.00017$ для $\alpha = 70$ г с^{-2} . Другое неучтенное явление — внутренняя циркуляция в жидкой капле. Тензор вязких напряжений должен быть непрерывен при переходе из воздуха в жидкость на границе капли. Следовательно, скорость внутри можно оценить как скорость снаружи, умноженную на малый параметр $\eta_\alpha/\eta_w \simeq 0.018 \ll 1$, что должно дать примерно 2% поправку к силе и скорости падения. Приведем соответствующий расчет. Уравнение движения внутри такое же, как снаружи. Решение, регулярное на бесконечности, — это (1.52), т. е.

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{r} + b \frac{3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{u})}{r^3},$$

тогда как решение, регулярное в нуле, имеет вид $f = Ar^2/4 + Br^4/8$, что дает

$$\mathbf{v}_w = -A\mathbf{u} + Br^2(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})) - 2\mathbf{u}.$$

Четыре граничных условия на поверхности (нулевые нормальные скорости и непрерывные тангенциальные скорости и силы) фиксируют четыре константы A, B, a, b и дают силу сопротивления

$$F = 8\pi a\eta u = 2\pi u\eta_a R \frac{2\eta_a + 3\eta_w}{\eta_a + \eta_w}, \quad (4.20)$$

что дает

$$u = \frac{2\rho R^2 g}{3\eta_a} \left(\frac{3\eta_a + 3\eta_w}{2\eta_a + 3\eta_w} \right) \simeq \frac{2\rho R^2 g}{9\eta_a} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\eta_a}{\eta_w} \right).$$

Получаем примерно $u \simeq 1.22$ см/с. Внутренняя циркуляция действует как смазка, уменьшая сопротивление и увеличивая скорость падения. Однако в реальности капли зачастую падают как твердые из-за плотной оболочки частиц пыли, скопившихся на поверхности.

2) Упрощенное решение. Обозначим радиус капли r , а ее скорость v . Запишем сохранение массы $\dot{r} = Av$ и уравнение движения $dr^3v/dt = gr^3 - Bvr$, предполагая число Рейнольдса малым и используя формулу Стокса для силы сопротивления. A, B — некие постоянные. Можно исключить v , но получившееся уравнение второго порядка не такое простое. Для упрощения предположим квазистационарность, полагая, что силы тяжести и сопротивления почти уравниваются друг друга, так что $\dot{v} \ll g$ и $v \approx gr^2/B$. Подставляя эту скорость в закон сохранения массы, получим $dr/dt = Agr^2/B$. Решение этого уравнения описывает взрывной рост радиуса и скорости капли: $r(t) = r_0/(1 - r_0Agt/B)$ и $v = v_0/(1 - r_0Agt/B)^2$. Это решение справедливо, пока $\dot{v} \ll g$ и $\text{Re} = vr/\nu \ll 1$.

Детальное решение. Обозначим через ρ_w, ρ, ρ_v соответственно плотности жидкости, воздуха и пара. Полагаем $\rho_w \gg \rho \gg \rho_v$. Сохранение массы, $dm = \rho_v \pi r^2 v dt = \rho_w 4\pi r^2 dr$, дает $dr/dt = v\rho_v/4\rho_w$. Изначально можно полагать, что течение соответствует малому Re , что дает следующее уравнение движения: $dr^3v/dt = gr^3 - 9\nu\rho v r/2\rho_0$. Квазистатическое приближение, согласно (4.19), дает $v \approx 2gr^2\rho_w/9\nu\rho$, что приводит к уравнению $dr/dt = gr^2\rho_v/18\nu\rho$, независимому от ρ_w . Ре-

шение этого уравнения описывает количественно закон взрывного роста радиуса и скорости капли:

$$r(t) = r_0 \left(1 - \frac{\rho_v r_0 g t}{\rho 18\nu} \right)^{-1}, \quad v(t) = \frac{\rho_w 2gr_0^2}{\rho 9\nu} \left(1 - \frac{\rho_v r_0 g t}{\rho 18\nu} \right)^{-2}.$$

Это решение справедливо, пока $\dot{v} = 4gr\dot{r}\rho_0/9\nu\rho = 2g^2r^3\rho_v\rho_0/81\nu^2\rho^2 \ll g$. Вдобавок, при $r(t)v(t) \simeq \nu$ происходит смена режима: $mg = = C\rho\pi r^2 v^2$, $v \propto \sqrt{r}$ и $r \propto t^2$, $v \propto t$.

- 1.14 Поскольку давление постоянно вдоль границ свободной струи, то постоянна и скорость. Отсюда следует, что асимптотические скорости разлетающихся струй те же самые, что и налетающих. Сохранение массы, энергии и горизонтальной компоненты импульса дают для левых и правых струй соответственно

$$h_l = h(1 + \cos \theta_0), \quad h_r = h(1 - \cos \theta_0),$$

где h — это ширина налетающей струи. Таким образом, доля $(1 - \cos \theta_0)/2$ металлического конуса инжектируется в улетающую струю. Детонация взрывчатки реально определяет скорость сжатия, т. е. скорость U , нормальную к конусу в его системе отсчета. На поверхности всех струй скорость равна V . В системе отсчета, движущейся со скоростью $V \cos \theta$, конус сжимается (движется перпендикулярно своей поверхности) со скоростью $V \operatorname{tg} \theta = U$. В этой системе отсчета кумулятивная струя движется со скоростью $v = V(1 + 1/\cos \theta) = U(1 + \cos \theta)/\sin \theta$. Очевидно, чем меньше угол, тем больше скорость. Однако импульс струи пропорционален $vh_r = hU \sin \theta$ и возрастает с углом. Для большинства зарядов $U \simeq 2$ км/с, тогда как скорость струи доходит до десятков километров в секунду. Это создает такое высокое давление, что инерция доминирует над упругостью и течение можно полагать несжимаемым (пока материал не испарится).

Можно описать все поле скоростей в терминах комплексной скорости \mathbf{v} , меняющейся внутри круга, радиус которого равен скорости на бесконечности u (см., например, главу XI в [13]). На окружности функция тока является кусочно постоянной со скачками, равными потокам в струях:

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \quad \text{для } 0 \leq \theta \leq \theta_0, & \psi &= -hu \quad \text{для } \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \\ \psi &= (h_l - h)u \quad \text{для } \pi \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0, & & \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Можно выразить комплексный потенциал всюду в круге через граничные значения, используя формулу Шварца:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{v}) &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \frac{u \exp(i\theta) + \mathbf{v}}{u \exp(i\theta) - \mathbf{v}} d\theta = \\ &= \frac{u}{\pi} \left\{ h_r \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} \right) + h_l \ln \left(1 + \frac{\mathbf{v}}{u} \right) - \right. \\ &\quad \left. - h \ln \left[\left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} e^{i\theta_0} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} e^{-i\theta_0} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы выразить скорость \mathbf{v} как функцию пространственной координаты z , используем $\mathbf{v} = -dw/dz$, для чего продифференцируем $w(\mathbf{v})$, а затем проинтегрируем раз соотношение $dz/d\mathbf{v} = -\mathbf{v}^{-1}dw/d\mathbf{v}$, полагая $z = 0$ при $\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi z}{h} &= (1 - \cos \theta_0) \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} \right) - (1 + \cos \theta_0) \ln \left(1 + \frac{\mathbf{v}}{u} \right) + \\ &\quad + e^{i\theta_0} \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} e^{i\theta_0} \right) + e^{-i\theta_0} \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} e^{-i\theta_0} \right). \end{aligned}$$

- 1.15 Вязкое трение между слоями приводит к обмену импульсом, сохраняя полный импульс. При вращении отлична от нуля только аксиальная скорость v_θ . Аксиальная компонента уравнения Навье–Стокса в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right) = \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial v_\theta}{\partial r}. \quad (4.21)$$

Мы встречали ротор этого уравнения для $\omega = r^{-1} \partial_r r v_\theta$ в задаче 1.9. Уравнение (4.21) сохраняет угловой момент $\int_0^\infty v_\theta r^2 dr$. Оно имеет два стационарных решения: 1) $v_\theta \propto 1/r$ сингулярно в нуле и соответствует завихренности в виде дельта-функции; 2) $v_\theta \propto r$ сингулярно на бесконечности и соответствует постоянной завихренности и твердотельному вращению. Если начальное распределение скорости жидкости таково, что угловой момент сосредоточен в некоем интервале r , вязкость приведет к расплыванию. Наличие стенки приведет к поглощению углового момента.

Перераспределение импульса за счет вязкого трения приводит к любопытным явлениям. Например, если проткнуть маленькую дырочку

в дне вращающегося сосуда, то он начнет вращаться быстрее. Действительно, когда идеальная жидкость движется к дырке, то ускоряет свое вращение вследствие сохранения углового момента (что мы можем наблюдать, опорожня ванну). Вязкое же трение выравнивает распределение углового момента вдоль радиуса, замедля внутренние слои и ускоряя внешние и весь сосуд. Хотите верьте, хотите нет, но полный угловой момент на единицу массы возрастает со временем, поскольку уходящая жидкость имеет меньшую плотность момента импульса, чем остающаяся.

- 1.16 Течение потенциально, $v_i \propto x_i r^{-d} \propto \partial_i r^{2-d}$, так что завихренность ноль. Компоненты вязкого тензора напряжений пропорциональны скорости и отличны от нуля: $\sigma_{ik} = \eta [\partial_k v_i + \partial_i v_k \propto (\delta_{ik} - dx_i x_k / r^2) r^{-d}]$. В частности, для $d = 3$ имеем $\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr} / 2 \propto r^{-3}$. Результирующая вязкая сила, действующая на любой элемент жидкости, равна дивергенции тензора напряжений, то есть пропорциональна Лапласиану скорости, который равен нулю для любого потенциального несжимаемого течения:

$$\Delta v_i = \sum_k \partial_k^2 v_i \propto [d(d+2) - d^2] x_i x_l x_m \delta_{lk} \delta_{mk} r^{-d-4} - 2 dx_j \delta_{ik} \delta_{jk} r^{-d-2} = 0.$$

Полезное проделать это вычисление также и в сферических координатах, помня, что дифференцируя вектор в криволинейных координатах, следует также дифференцировать единичный вектор базиса:

$$(\Delta \mathbf{v})_r = \Delta v_r - (d-1)v_r/r^2 = r^{1-d} \partial_r r^{d-1} \partial_r v_r - (d-1)v_r/r^2 = 0.$$

Поскольку вязкая сила равна нулю, всякий элемент движется без ускорения, но деформируется действующими на него напряжениями — сжимается вдоль радиуса и растягивается поперек. Эта деформация сопровождается диссипацией энергии, интеграл которой определяется размером источника r_0 :

$$\eta \int (\partial_k v_i + \partial_i v_k)^2 d^d r \propto \eta r_0^{-d}.$$

Чтобы компенсировать потери энергии, какая-то сила должна совершать работу. Однако же при малых Re давление постоянно внутри вязкого потенциального течения: $\nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} = 0$. Это значит, что градиент давления, совершающий работу, находится внутри источника или

на его поверхности (внутри кинетического слоя порядка длины свободного пробега). Давление на скорость должно давать темп диссипации, что определяет давление $p_0 \propto \eta r_0^{-d}$. В пределе точечного источника $\nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} \propto \nabla \delta(\mathbf{r})$.

Обсудим кратко условия применимости приближения малых Re и роль инерции. Формальная оценка $\text{Re}(r) = vr/\nu \propto r^{2-d}$ предполагает, что приближение малого Re либо справедливо равномерно по пространству (при $d = 2$), либо улучшается при удалении от источника (при $d > 2$). Однако, поскольку вязкая сила зануляется всюду, то инерционный член полностью определяет давление в объеме: $p(r) - p(\infty) = -v^2/2 \propto r^{2-2d}$. Оно увеличивается при приближении к источнику, но остается малым по сравнению с p_0 , если $\text{Re}(r_0)$ мал.

Еще более простой пример свободного течения, поддерживаемого работой, совершаемой на границах, представляет сдвиговое течение с линейным профилем скорости. Вязкая сила и градиент давления тождественно равны нулю, а напряжение нет. Каждый элемент жидкости деформируется при движении, как описано в § 1.2.2. Такое течение предполагает наличие движущейся плоской границы, которая и совершает работу. Другой пример — потенциальное течение, создаваемое в жидкости волной, распространяющейся по ее поверхности, как описано в § 3.1.2.

- 1.17 В стационарном течении градиент давления равен потоку импульса на поглощающие его стенки. Поток может быть оценен как характерный импульс деленный на характерное время передачи импульса от центра трубы до стенки. Следовательно, импульс и расход жидкости пропорциональны времени передачи при заданном градиенте давления. В разреженном газе, где длина свободного пробега превышает радиус трубы, это время есть радиус w деленный на тепловую скорость молекул v_T , т.е. не зависит от концентрации (за исключением вырожденного случая идеально прямой трубы, см. замечание ниже). В плотном газе, где длина свободного пробега l_m много меньше w , импульс должен диффундировать до стенки путем многократных столкновений, так что характерное время передачи является вязким: $w^2/\nu \simeq w^2/v_T l_m$. Вязкое время в параметр w/l_m больше баллистического времени w/v_T , так что расход жидкости больше для вязкого течения Пуазейля, чем для Кнудсеновского течения разреженного газа. Длина свободного пробега обратно пропорциональна концентрации, так что вязкое время и расход газа линейно растут с концентрацией. Всякое явление в гидро-

динамике можно объяснить как с точки зрения времени, так и точки зрения пространства. Вдобавок ко временному объяснению, дадим теперь пространственное. Профиль Кнудсеновского течения однороден по сечению трубы, а профиль течения Пуазейля имеет максимум в центре и нулевую скорость на стенке. Это значит, что столкновения вынуждают молекулы течь вдали от стен, где происходит потеря импульса, тем самым уменьшая сопротивление. Такой же эффект наблюдается для электронов, взаимодействие которых помогает им огибать препятствия и избегать границ, повышая проводимость выше баллистического значения.

Повышая концентрацию газа, мы уменьшаем кинематическую вязкость и в конце концов дойдем до больших чисел Рейнольдса. Переход к турбулентности увеличивает сопротивление трубы и уменьшает расход (газа, не денег).

Замечание. Сопротивление идеально прямой трубы разреженному газу при $l \gg w$ слабо (логарифмически) зависит от длины свободного пробега благодаря молекулам, летящим под малыми углами θ к стене. Время полета для данного угла $\theta > w/l_m$ есть $w/v_T\theta$. Усредненное по углам время полета растет логарифмически с l_m :

$$\frac{w}{v_T} \int_{w/l_m}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} \approx \frac{w}{v_T} \ln \frac{l_m}{w}.$$

В результате сопротивление максимально и расход минимален при $l_m \simeq w$ (парадокс Кнудсена).

- 1.18 **Размерности и пределы.** При наличии трех независимых размерностей (граммов, метров и секунд) из пяти параметров E , ρ , c , h , r_0 можно скомбинировать два независимых безразмерных параметра, согласно π -теореме из § 1.4.4. Это значит, что в общем случае нет надежды на простой ответ. Поскольку мы интересуемся пределом $r_0/h \rightarrow 0$, рассмотрим сначала простейший случай взрыва в бесконечной среде ($h \rightarrow \infty$), чтобы установить как размерные величины E , ρ , c , r_0 собираются в безразмерный контрольный параметр. Такой взрыв порождает сферическое течение, описанное в задаче 1.16: $v = Ar^{-2}$. Сосчитав энергию этого течения, $E = \rho \int v^2 d^3r/2 = A^2 2\pi\rho/r_0$, найдем

$$A = \sqrt{Er_0/2\pi\rho}. \quad (4.22)$$

Уже отсюда следует полезное наблюдение, что течения одинаковы для одинаковых значений Er_0 , так что можно использовать меньше взрывчатки, если сделать исходную полость больше. Возвращаясь к нашей задаче в пределе точечного заряда, $r_0/h \rightarrow 0$, мы имеем три размерных величины (Er_0/ρ , c , h) и две независимых размерности (метры и секунды). Теперь у нас только один безразмерный контрольный параметр: $\xi = Er_0/2\pi\rho h^4 c^2$. Величину $Er_0/2\pi\rho h^4 \equiv u^2$ можно интерпретировать как характерный квадрат скорости течения, порожденного взрывом на расстоянии h , при этом $\xi = (u/c)^2$. Радиус кратера по размерности может быть представлен как $R = hf(\xi)$. Естественно ожидать, что кратер не возникает при $\xi \ll 1$, когда взрыв настолько слабый или глубокий, что критическая скорость не достигается на поверхности. В обратном пределе сильного или мелкого взрыва мы ожидаем, что вертикальная скорость убывает с расстоянием R вдоль поверхности как h/R^3 — действительно, полная скорость несжимаемого течения убывает как R^{-2} , а для вертикальной скорости при $R \gg h$ имеется еще малый геометрический фактор h/R . Отношение скоростей на поверхности в центре и на краю кратера есть $u/c \propto R^3/h^3$, так что $R/h \propto \xi^{1/6}$.

Набросок теории. Потенциал скорости точечного взрыва такой же, как электрический потенциал точечного заряда. Напомним, что после короткого импульса давления, потенциал равен $-\int dt p/\rho$, см. параграф 1.3.3. Давление не меняется вдоль поверхности земли, также и потенциал. Это означает, что горизонтальная скорость равна нулю на поверхности — глядя фильмы про войну, заметьте, как подводные или подземные взрывы выбрасывают вертикальную колонну. В электростатике, эквипотенциальная поверхность соответствует металлу. Потенциал в пространстве в этом случае есть потенциал точечного источника (заряда) плюс его зеркальное отображение в виде точечного стока. В цилиндрических координатах такой потенциал имеет вид:

$$\phi(r, z) = A [r^2 + (z - h)^2]^{-1/2} - A [r^2 + (z + h)^2]^{-1/2}. \quad (4.23)$$

Константа находится из вычисления энергии и должна оказаться той же самой (4.22), что и для бесконечной среды. Действительно, граница не поглощает энергии, а только перенаправляет ее; другой способ доказательства в том, что ответ должен быть независим от h (и совпадать с пределом $h \rightarrow \infty$), поскольку нет другого параметра длины. Для тех,

кто все же предпочитает прямое вычисление, вот оно:

$$E = \frac{\rho}{2} \int v^2 d^3r = \frac{\rho}{2} \int \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) d^3r = \frac{\rho}{2} \oint \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{f}.$$

Последний интеграл вычисляется по границе, которая состоит из двух частей: плоскость $z = 0$, где $\phi = 0$, и сфера радиуса r_0 с центром в $(0, 0, -h)$. Только первый член в (4.23) дает вклад в интеграл по этой сфере.

Вертикальная скорость в при $z = 0$ есть $v(r, 0) = 2Ah/(r^2 + h^2)^{3/2}$. Условие $v(R, 0) = c$ дает радиус кратера

$$R^2/h^2 = (4\xi)^{1/3} - 1 = \left(\frac{2Er_0}{\pi\rho c^2 h^4} \right)^{1/3} - 1. \quad (4.24)$$

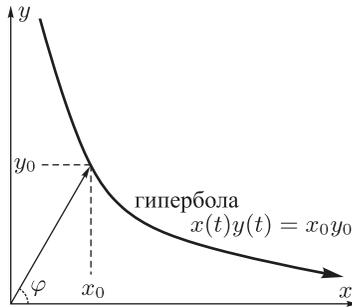
Действительно, имеется порог, причем минимальная энергия для создания кратера растет как четвертая степень глубины взрыва h . Глубину кратера d можно определить из условия $v(0, d) = c$, что дает $d = 2^{1/3}R$ для мелких взрывов. Насколько хорошо формула (4.24) описывает кратеры от ядерных взрывов на полигоне Невады можно увидеть в статье M. Feit et al., 2001, SPIE **4347**, 316. Наше описание также применимо к повреждению оптических материалов мощным лазерным излучением — наибольший ущерб приносят близкие к поверхности микро-взрывы из-за локального поглощения излучения маленькими дефектами материала.

Замечание. Другое замечательное приложение теории несжимаемых потенциальных течений — это проектирование направленных взрывов для перемещения больших количеств материала. Вопрос: как распределить взрывчатку по заданной выпуклой поверхности $z = S(x, y)$, чтобы заставить весь материал внутри этой поверхности одним куском полететь с заданной скоростью $\mathbf{U} = (U, V, W)$ в заданном направлении? Плотность взрывчатки на поверхности $\rho(x, y, S(x, y))$ пропорциональна создаваемому давлению, которое в свою очередь пропорционально потенциалу скорости. Для придания скорости однородной в пространстве, потенциал должен быть линейной функцией координат, так что $\rho(x, y, S(x, y)) \propto Ux + Vy + WS(x, y) + \text{const}$. Таким образом Лаврентьев переместил двумя взрывами порядка 2.5 миллионов кубометров грунта и создал в урочище Медео противоселевую плотину для защиты города Алма-Ата, см. Barenblatt, G. I. 2014. *Flow, Deformation and Fracture* (Cambridge University Press).

4.2. Глава 2

2.1 Как мы видели в параграфе 1.2.2, элементы жидкости экспоненциально растягиваются и сжимаются при доминировании деформации или вращаются при доминировании завихренности. Это справедливо для любых локально гладких течений, в том числе потоков в фазовом пространстве, обсуждавшихся в начале раздела 2.2.

(i) Поскольку $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ и $y(t) = y_0 \exp(-\lambda t) = x_0 y_0 / x(t)$, то все линии тока и траектории являются гиперболами. Отрезок, изначально находившийся под углом φ с осью x , через время T окажется растянутым, если $\cos \varphi \geq [1 + \exp(2\lambda T)]^{-1/2}$. Как видно, доля растягиваемых направлений больше половины. В частности, это означает, что результатом многих случайных изменений взаимной ориентации осей течения и отрезка будет его растяжение.



(ii) Собственные векторы эволюционируют согласно $\exp(\pm i\Omega t)$, где

$$\Omega^2 = 4\omega^2 - \lambda^2. \quad (4.25)$$

Действительно, жидкость вращается внутри областей с преобладанием завихренности (называемых эллиптическими) и монотонно деформируется в гиперболических областях, где доминирует тензор деформации. Маргинальным является случай сдвигового течения, изображенный на рисунке 1.6, где $\lambda = 2\omega$ и расстояния растут линейно со временем.

Если течение (жидкости в пространстве или фазового потока) является случайным, то каждый элемент встретит по дороге как эллиптические, так и гиперболические области. После долгой случайной последовательности вращений и деформаций всякий элемент с подавляющей вероятностью превратится в тонкую полосу. Иными словами,

вероятность шару превратиться в растягивающийся эллипсоид со временем стремится к единице. Причина этого в том, что рано или поздно возникнет существенная деформация. Чтобы ее обратить, необходимо встретить специальную ориентацию направлений растяжения и сжатия в узких углах, задаваемых эксцентриситетом эллипсоида. Такая ориентация маловероятна. Более того, случайно ориентированные деформации в среднем будут продолжать увеличивать эксцентриситет. После того как длина дорастет до масштаба, на котором существенно меняется скорость (так что ее уже нельзя будет аппроксимировать линейным профилем), начнут появляться складки, при этом всякий малый элемент такой «змеи» продолжает экспоненциально сжиматься вдоль узких направлений и растягиваться вдоль длинных. В конечном счете можно будет найти точки исходного шара повсюду, что означает перемешивание.

2.2 Соображения размерности. Имея три независимых размерности, см, с и градус, из шести параметров $g, \beta, \Theta, h, \nu, \chi$, можно составить три независимых безразмерных параметра, согласно π -теореме из параграфа 1.4.4. Это слишком много для осмысленного анализа.

Физический здравый смысл подсказывает, что первые три параметра могут встретиться только как произведение $g\beta\Theta$, что есть архимедова сила на единицу массы (плотность не может играть роль, поскольку нет другого параметра с размерностью массы). Теперь мы имеем четыре параметра, $\beta g\Theta, h, \nu, \chi$, и две независимых размерности, см, с, так что можно составить два безразмерных параметра. Один из них можно выбрать как характеризующий только свойства среды, это число Прандтля:

$$Pr = \nu/\chi. \quad (4.26)$$

Как диффузия импульса за счет вязкости, так и диффузия тепла за счет теплопроводности обусловлены движением молекул. Тем не менее число Прандтля различается весьма существенно для разных материалов. Для газов χ оценивается как произведение тепловой скорости на длину свободного пробега, так же как и вязкость в параграфе 1.4.3, так что число Прандтля порядка единицы. А вот для жидкостей Pr меняется от 0.044 для ртути и 6.75 для воды до 7250 для глицерина. Второй параметр можно скомбинировать многими способами, в частности используя произвольные функции от первого параметра. Можно

удовлетвориться любым выбором, который будет контрольным параметром для данной среды (для фиксированного Pr). А можно ли найти контрольный параметр, одинаковый для всех сред (для всех Pr)? Чтобы это сделать, надо понять, соревнование каких базисных физических механизмов определяет явление. Понятно, что для возникновения переноса сила Архимеда $\beta g \Theta$ должна превзойти силу трения $\nu v/h^2$. Может показаться, что этому требованию можно удовлетворить всегда, взяв скорость v достаточно малой. Однако не следует забывать, что всплывающая горячая жидкость теряет тепло из-за теплопроводности и становится плотнее. Наша оценка силы Архимеда справедлива лишь до тех пор, пока время всплытия h/v меньше времени теплопроводности h^2/χ , что дает минимальную скорость $v \simeq \chi/h$. Подставляя эту скорость в силу трения, получим искомый безразмерный параметр как отношение сил:

$$Ra = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu\chi}. \quad (4.27)$$

Этот параметр называется числом Рэлея.

Набросок теории. Температура T удовлетворяет линейному уравнению конвекции-диффузии:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T = \chi \Delta T. \quad (4.28)$$

Для возмущений $\tau = (T - T_0)/T_0$ среднего профиля $T_0(z) = -\Theta z/h$ получим

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - v_z \Theta/h = \chi \Delta \tau. \quad (4.29)$$

Скорость полагаем несжимаемой: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Поскольку течение само по себе возмущение, то скорость удовлетворяет линеаризованному уравнению Навье–Стокса с добавлением архимедовой силы:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla W + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \tau \mathbf{g}, \quad (4.30)$$

где W — возмущение энтальпии. Конечно, свойства конвекции за порогом зависят от обоих параметров Ra и Pr , так что ни один из них невозможно исключить из системы уравнений. Однако если рассматривать только порог возникновения, когда $\partial \mathbf{v} / \partial t = \partial \tau / \partial t = 0$, то можно

выбрать безразмерные переменные $\mathbf{u} = \mathbf{v}h/\chi$ и $w = Wh^2/\nu\chi$, такие, что получившаяся система содержит только Ra :

$$-u_z = \Delta\tau, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta u_z + \tau Ra, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \Delta u_x. \quad (4.31)$$

Решив эту систему с соответствующими граничными условиями для собственных функций, построенных из $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ и $\sinh(qz)$, $\cosh(qz)$ (описывающих прямоугольные конвективные ячейки), можно получить Ra_{cr} как минимальное собственное значение, см., например, [10, § 57]. Вблизи Ra_{cr} неустойчивые моды соответствуют $k \simeq q \simeq 1/h$.

Отметим различие между достаточным условием для возникновения конвекции $Ra > Ra_{cr}$, сформулированным в терминах контрольного параметра Ra , являющегося глобальным (характеризующим систему в целом), и локальным необходимым условием (1.9), найденным в параграфе 1.1.3.

- 2.3 Скорость должна удовлетворять уравнению Навье–Стокса с постоянным градиентом давления:

$$\Delta_r v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dv}{dr} = \text{const.}$$

Решение, обращающееся в ноль при $r = a$ есть

$$v(r) = 2\bar{v} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \bar{v} = \frac{2\pi}{\pi a^2} \int_0^a v(r) r dr. \quad (4.32)$$

Уравнение переноса-диффузии принимает форму:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial x} = \kappa \Delta \theta. \quad (4.33)$$

Проинтегрировав его по сечению, получим

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v\theta'}}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2}. \quad (4.34)$$

Мы предположили, что на границе $r = a$ поток θ обращается в ноль, что требует $\partial\theta/\partial r = 0$. Вычитая (4.33) из (4.34), получим уравнение на $\theta' \equiv \theta - \bar{\theta}$:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial(v\theta' - \bar{v}\theta')}{\partial x} + (v - \bar{v}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \kappa \Delta \theta'. \quad (4.35)$$

Пока все было точно, теперь начнутся приближения и пренебрежения. На временах, сильно превышающих a^2/κ , диффузия поперек трубы приводит к тому, что $\theta' \ll \bar{\theta}$, так что в (4.35) можно пренебречь всеми членами с θ' за исключением $\kappa\Delta_r\theta'$, поскольку неоднородность течения создает поперечную неоднородность концентрации. Чтобы убедиться в этом, сначала получим решение получившегося таким образом приближенного уравнения

$$(v - \bar{v}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \kappa \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\theta'}{dr}. \quad (4.36)$$

Решение с нулевым средним и нулевыми производными на границах имеет вид

$$\theta'(x, r, t) = [6r^2 - 2 - 3(r/a)^4] \frac{\bar{v}}{24\kappa} \frac{\partial \bar{\theta}(x, t)}{\partial x}, \quad (4.37)$$

Используя это решение и следующую из него оценку $\theta' \simeq \bar{v}a^2\bar{\theta}_x/\kappa$, можно убедиться в относительной малости всех членов, которыми мы пренебрегли при переходе от (4.35) к (4.36). Первый член может быть оценен как $\theta'/t \simeq \bar{v}a^2\bar{\theta}_x/\kappa t$, что много меньше $\bar{v}\bar{\theta}_x$ при $t \gg a^2/\kappa$. Второй член может быть оценен как $\bar{v}\theta'_x \simeq (\bar{v}a)^2\bar{\theta}_{xx}/\kappa$, чье отношение к $\bar{v}\bar{\theta}_x$ есть $(\bar{\theta}_{xx}/\bar{\theta}_x)(\bar{v}a^2/\kappa) \ll 1$. Это отношение мало, поскольку на больших временах характерный продольный размер $L \equiv \bar{\theta}_x/\bar{\theta}_{xx}$ области, заполненной θ , много больше размера областей неоднородности на его концах: $L \simeq \bar{v}t \gg \bar{v}a^2/\kappa$.

Теперь подставим (4.37) в (4.34) и получим

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \left(\kappa + \frac{\bar{v}^2 a^2}{48\kappa} \right) \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2}. \quad (4.38)$$

Это дает эффективный коэффициент диффузии $\kappa(1 + Pe^2/192)$, где $Pe = 2\bar{v}a/\kappa$, как определено в § 2.2.4.

2.4 Потребуем непрерывности потоков массы, нормальной компоненты импульса и энергии:

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2, \quad P_1 + \rho_1 w_1^2 = P_2 + \rho_2 w_2^2, \quad (4.39)$$

$$W_1 + w_1^2/2 = \frac{\rho_2 w_2}{\rho_1 w_1} (W_2 + w_2^2/2) = W_2 + w_2^2/2. \quad (4.40)$$

Исключив w_1, w_2 из (4.39),

$$w_1^2 = \frac{\rho_2 P_2 - P_1}{\rho_1 \rho_2 - \rho_1}, \quad w_2^2 = \frac{\rho_1 P_2 - P_1}{\rho_2 \rho_2 - \rho_1}, \quad (4.41)$$

и подставив в уравнение Бернулли (4.40), получим соотношение, называемое ударной адиабатой:

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)(V_1 + V_2). \quad (4.42)$$

Для данных значений P_1, V_1 перед фронтом адиабата определяет соотношение между P_2 и V_2 . Ударная адиабата определяется двумя параметрами P_1, V_1 в отличие от обычной адиабаты Пуассона $PV^\gamma = \text{const}$, задаваемой одним параметром — значением энтропии. Разумеется, задание всех трех параметров P_1, V_1, w_1 перед фронтом полностью определяет значения за фронтом.

Подставляя $W = \gamma P/\rho(\gamma - 1)$ в (4.42), получим ударную адиабату для политропного газа в двух эквивалентных формах:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\beta P_1 + P_2}{P_1 + \beta P_2}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_1 - \beta \rho_2}{\rho_2 - \beta \rho_1}, \quad \beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (4.43)$$

Поскольку давления положительны, отношение плотностей ρ_2/ρ_1 не должно превышать $1/\beta$ (4 и 6 для монокатомного и двухатомного газов соответственно). Если задана скорость w_1 перед фронтом, то безразмерные отношения $\rho_2/\rho_1, P_2/P_1$ и $M_2 = w_2/c_2 = w_2\sqrt{\rho_2/\gamma P_2}$ могут быть выражены через безразмерное число Маха $M_1 = w_1/c_1 = w_1\sqrt{\rho_1/\gamma P_1}$ путем комбинирования (4.41) и (4.43):

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \beta + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} - \beta, \quad M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}. \quad (4.44)$$

Чтобы течение стало дозвуковым после фронта, $M_2 < 1$, оно должно быть сверхзвуковым до: $M_1 > 1$.

Термодинамическое неравенство $\gamma > 1$ обеспечивает регулярность всех вышеприведенных соотношений. Энтропия определяется отношением P/ρ^γ ; конкретно: она пропорциональна $\log(P/\rho^\gamma)$. Используя (4.44), можно показать, что $s_2 - s_1 \propto \ln(P_2\rho_1^\gamma/P_1\rho_2^\gamma) > 0$, что соответствует необратимому превращению механической энергии течения в тепло.

Более подробное изложение можно найти в главах 85 и 89 книги [10].

2.5 Простая оценка. Используем для оценки одну ударную волну, поле скорости которой описывается формулой $u = -v \tanh(vx/2\nu)$ в системе отсчета, где фронт неподвижен. Простое вычисление дает $\langle u^2 u_x^2 \rangle = 2v^5/15L$, так что

$$\epsilon_4 = 6\nu[\langle u^2 u_x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \langle u_x^2 \rangle] = 24v^5/5L.$$

Подставляя $v^5/L = 5\epsilon_4/24$ в $S_5 = -32v^5x/L$, получим

$$S_5 = -20\epsilon_4 x/3 = -40\nu x[\langle u^2 u_x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \langle u_x^2 \rangle]. \quad (4.45)$$

Набросок теории. Можно также вывести уравнение эволюции для структурной функции, аналогичное (2.10) и (2.42). Рассмотрим

$$\partial_t S_4 = -(3/5)\partial_x S_5 - 24\nu[\langle u^2 u_x^2 \rangle + \langle u_1^2 u_{2x}^2 \rangle] + 48\nu\langle u_1 u_2 u_{1x}^2 \rangle + 8\nu\langle u_1^3 u_{2xx} \rangle.$$

Полагая расстояние x_{12} в инерционном интервале, можно пренебречь $\langle u_1^3 u_{2xx} \rangle$ и $\langle u_1 u_2 u_{1x}^2 \rangle$ и положить $\langle u_1^2 u_{2x}^2 \rangle \approx \langle u^2 \rangle \langle u_x^2 \rangle$. Полагая

$$\partial_t S_4 \simeq S_4 u/L \ll \epsilon_4 \simeq u^5/L,$$

пренебрежем левой частью уравнения и получим (4.45). В общем случае можно получить

$$S_{2n+1} = -4\epsilon_n x \frac{2n+1}{2n-1}.$$

2.6 Уравнения движения различны для случаев тел с массой, убывающей при испарении или растущей при конденсации. Испаряющийся материал покидает тело, имея ту же скорость u , так что испарение само по себе не меняет скорости тела $u(t)$. В этом случае изменение скорости происходит благодаря внешней силе, так что производная скорости есть сила, деленная на массу. Наоборот, сила инерции (1.32) есть производная квазиимпульса, так что уравнение движение следует из (1.34):

$$\rho_0 V(t) \dot{u} = \rho V(t) \dot{v} + \frac{d}{dt} \rho V(t) \frac{v-u}{2}. \quad (4.46)$$

Поскольку $\rho_0 \gg \rho$ можно пренебречь скоростью тела u по сравнению с v , но, разумеется, нельзя пренебречь ускорением тела \dot{u} :

$$2\rho_0 \dot{u} = 3\rho \dot{v} - \rho \alpha v |v|.$$

В течение полупериода, когда $v = a \sin \omega t > 0$, скорость есть

$$u(t) = \frac{3a\rho}{2\rho_0} \sin \omega t - \frac{a^2 \alpha \rho}{8\omega} (2\omega t - \cos 2\omega t).$$

Видим, что уменьшение объема вызывает отрицательный дрейф.

2.7 **Грубая оценка** может быть получена даже в отсутствие понимания природы явления. Поскольку эффект независим от фазы осцилляций, т. е. от знака A , то безразмерный параметр A^2 должен выражаться через безразмерный параметр $P_0/\rho gh$. Когда отношение $P_0/\rho gh$ мало, оно не может влиять на порог, который в этом случае должен быть порядка единицы. Когда $P_0/\rho gh \gg 1$, порог также должен быть велик, поскольку большое давление P_0 уменьшает любой эффект осцилляций пузырька, так что можно ожидать порог при $A^2 \simeq P_0/\rho gh$. Простая интерполяция служит оценкой:

$$A^2 \simeq 1 + \frac{P_0}{\rho gh}. \quad (4.47)$$

Качественное объяснение эффекта основано на сжимаемости пузырька (Bleich, 1956). Вертикальные колебания вызывают периодические изменения силы тяжести. Когда ускорение сосуда направлено вверх, дополнительная сила тяжести действует вниз, что обеспечивает дополнительную архимедову силу, действующую вверх, и наоборот в течение следующей половины периода. Важно, что изменения архимедовой силы не усредняются в ноль. Причина этого — колебания объема пузырька вследствие колебаний давления столба жидкости над ним. Объем пузырька меньше, когда сосуд ускоряется вверх, поскольку как эффективная сила тяжести, так и давление больше в этом случае; в результате архимедова сила меньше. Таким образом, добавка к силе вверх в течение половины периода меньше, чем добавка к силе вниз в течение следующей половины периода. Когда эта результирующая сила, действующая вниз, превысит архимедову силу за счет статической g , пузырек будет тонуть, а не всплывать.

Теория. Рассмотрим сначала идеальную жидкость, в которой движение пузырька не встречает сопротивления. Уравнение движения в системе отсчета сосуда получаются из (1.33), (1.34) путем добавления архимедовой силы и пренебрежения массой воздуха в пузырьке:

$$\frac{d}{2dt} V(t)u = V(t)G(t), \quad G(t) = g + \ddot{x}. \quad (4.48)$$

Здесь $V(t)$ — зависящий от времени объем пузырька. Обозначим через z вертикальное смещение по отношению к сосуду, так что $u = \dot{z}$ положительна вверх. Полагаем сжатия и расширения пузырька адиабатическими, для чего частота колебаний должна превышать теплопроводность κ , деленную на размер a . Если вдобавок частота много меньше собственной частоты колебаний (4.15) (скорость звука, деленная на радиус), то объем $V(t)$ можно выразить через давление и координату в тот же момент времени:

$$PV^\gamma(t) = [P_0 + \rho G(h - z)]V^\gamma = (P_0 + \rho gh)V_0^\gamma.$$

Полагая малыми изменения z и $V = V_0 + \delta V \sin(\omega t)$, получим

$$\delta V = V_0 \frac{A \rho g h}{\gamma(P_0 + \rho gh)}. \quad (4.49)$$

Полное изменение импульса пузырька за период получается интегрированием (4.48):

$$\int_0^{2\pi/\omega} V(t')G(t') dt' = \frac{2\pi V_0 g}{\omega} (1 - \delta V A / 2V_0) + o(A^2). \quad (4.50)$$

Порог соответствует нулевому изменению импульса, что требует $\delta V = 2V_0/A$. В соответствии с (4.49) это дает следующий ответ:

$$A^2 = 2\gamma \left(1 + \frac{P_0}{\rho gh} \right). \quad (4.51)$$

При таком значении A уравнение (4.48) имеет осциллирующее решение $z(t) \approx -(2Ag/\omega^2) \sin(\omega t)$, справедливое при $Ag/\omega^2 \ll h$. Другой способ интерпретировать формулу (4.51) — сказать, что она дает глубину h , где малые осцилляции возможны для данной амплитуды вибраций A . Нетрудно сообразить, что эти осцилляции неустойчивы, поскольку пузырек, сдвинувшийся вниз от h , получит импульс, направленный вниз, и утонет, а пузырек, сдвинувшийся вверх, наоборот, всплывет.

Заметим, что порог не зависит ни от частоты вибраций, ни от радиуса пузырька (при неявно сделанном предположении $a \ll h$). Однако для

очень маленьких пузырьков и больших частот становится несправедливым пренебрежение вязкостью, возможное лишь при большом числе Рейнольдса для обтекания пузырька: $a\dot{z}/\nu \simeq aAg/\omega\nu \gg 1$, где ν — кинематическая вязкость жидкости. В обратном пределе можно пренебречь инерцией по сравнению с вязким трением, заменив (4.48) на

$$4\pi\nu a(t)\dot{z} = V(t)G(t) = 4\pi a^3(t)G/3. \quad (4.52)$$

Здесь мы использовали (4.20) для вязкого трения при обтекании сферы с заменой «вода \leftrightarrow воздух». Разделив на $a(t)$ и проинтегрировав по периоду, получим изменение скорости $1 - \delta a A/a = 1 - \delta V A/3V_0$. Другая особенность малых пузырьков в том, что $a^2 \ll \kappa/\omega$, так что теплообмен является быстрым и следует использовать изотермическое уравнение состояния вместо адиабатического, т. е. положить $\gamma = 1$ в (4.49). В результате получается другое выражение для порога, но опять независимое от размера:

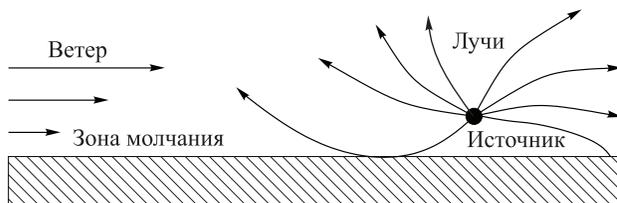
$$A^2 = 3 \left(1 + \frac{P_0}{\rho gh} \right). \quad (4.53)$$

Как видим, грубая оценка (4.47) годится для всех случаев.

- 2.8 Первое, что обычно приходит в голову, — ветер сносит звуки, так что против ветра звуку приходится преодолевать расстояние, большее в фактор $1 + v/c$, где v — скорость ветра. Вязкая диссипация приводит к уменьшению интенсивности q с расстоянием r по экспоненциальному закону $q \propto \exp(-\nu\omega^2 r/c^3)$. Вдобавок акустическая энергия распределяется по полусфере большего радиуса: $q \propto r^{-2}$. Заметим, однако, что вблизи поверхности (где и звучат все наши крики) скорость ветра обычно существенно меньше, чем 30 м/с, так что $v/c < 0.1$ и может рассматриваться как малый параметр. Это значит, что обусловленная этим фактором разница между интенсивностями по ветру и против него будет порядка v/c , т. е. мала. Такого же порядка малости v/c также и доплеровский сдвиг частоты — ветер не может превратить тенор в бас.

Настоящая причина быстрого убывания интенсивности при распространении против ветра — это неоднородность профиля скорости ветра вблизи поверхности. Это искривляет волновые лучи, которые испытывают более сильный ветер дальше от поверхности. Как показано на рисунке, рефракция приводит к тому, что лучи у поверхности расходятся намного быстрее при распространении против ветра, чем по

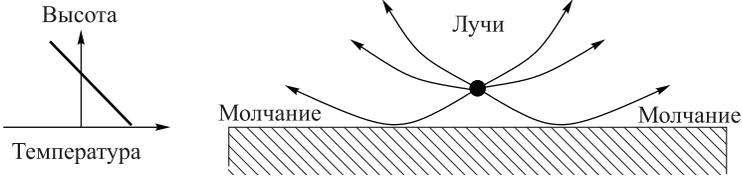
ветру. При распространении против ветра более высокая часть поверхности постоянной фазы движется медленнее, так что вся поверхность и перпендикулярные ей лучи разворачиваются вверх (подобные явления наблюдаются также в оптике, где лучи загибаются в сторону более оптически плотной среды). Такая рефракция создает с наветренной стороны так называемую зону молчания. Заметьте качественную разницу между лучами направленными против и по ветру: в конце концов первые все уходят вверх, а вторые все утыкаются в землю.



Чтобы оценить расстояние до зоны молчания, рассмотрим лучи, распространяющиеся почти горизонтально, т. е. перпендикулярно градиенту скорости. Волновые фронты поворачиваются и лучи искривляются с угловой скоростью $\omega = dv/dz \approx v/h$, где h это высота. Радиус кривизны лучей есть $R = c/\omega = hc/v$. Зона молчания начинается там, где лучи касаются земли, как показано на рисунке. Расстояние до этой точки есть $\ell = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} \approx \sqrt{2Rh} = h\sqrt{2c/v}$. Так что если кто-то думал, что лучше присесть ниже, где ветер послабее, то нет. Наоборот, кто выше, того и слышно дальше. Для $h = 1.5$ м и $v/c = 0.05$, человек того же роста перестанет слышать уже на расстоянии $2\ell \approx 19$ м с наветренной стороны. Граница зоны молчания — это каустика. См. также § 4.3 из [14].

Подобным же образом направления распространения звуковых волн искривляются из-за падения температуры с высотой в атмосфере (изотропного в горизонтальной плоскости). Скорость звука пропорциональна квадратному корню из температуры в градусах Кельвина: $c(z) = c\sqrt{1 - \alpha z/T}$. В этом случае лучи поворачиваются с угловой частотой $\omega = dc/dz = c\alpha/2T$, так что их радиус кривизны $R = 2T/\alpha$, а радиус зоны молчания $\ell = 2\sqrt{Th/\alpha}$. Как упоминалось в § 1.1.3, $\alpha = 6.5$ градусов на километр. Приняв на поверхности $T = 300$ и $c = 340$ м/с, получим для $h = 10$ м радиус зоны молчания $\ell \approx 1300$ м — настолько надо удалиться, чтобы настала тишина. По правде говоря,

какой-то шум проникает и в зону молчания из-за дифракции, рассеяния на границе и турбулентности ветра.



Наоборот, когда ночью почва охлаждается и возникает локальная инверсия вертикального градиента температуры, волновые лучи загибаются вниз и за счет множественных отражений от земли могут распространяться довольно далеко.

2.9 Обозначим ось симметрии z , а расстояние от нее R , так что расстояние от начала координат $-r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Можно рассматривать общее сферическое решение (2.27) как зависящее от R, z и получить решение, зависящее только от R , интегрируя по z от 0 до ∞ :

$$\begin{aligned} \phi(R, t) &= \int_0^{\infty} dz r^{-1} [f_1(ct - r) + f_2(ct + r)] = \\ &= \int_R^{\infty} \frac{f_1(ct - r) + f_2(ct + r)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr = \\ &= \int_0^{\infty} [f_1(ct - R \cosh u) + f_2(ct + R \cosh u)] du. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Здесь мы использовали $dz = r dr / \sqrt{r^2 - R^2}$ и $r = R \cosh u$. Мы видели в параграфе 2.3.1, что плоская звуковая волна в идеальной жидкости не меняет при распространении ни амплитуды, ни формы, у сферической волны форма сохраняется, а амплитуда убывает как обратный радиус. Из (4.54) видно, что цилиндрическая волна не сохраняет ни амплитуды, ни формы. Другое важное отличие заключается в том, что цилиндрическая волна может иметь передний фронт, но не задний: если функции f_1, f_2 локализованы, то на больших временах имеем медленное убывание $\phi \propto 1/ct$ в любой точке, до которой дошла волна. Это

общее различие в распространении звука в пространствах нечетной и четной размерности можно пояснить следующим образом. Перейдем в d -мерном случае заменой $t = ix_{d+1}/c$ от волнового уравнения к уравнению Лапласа. Решение соответствующего уравнения Пуассона (с источником) есть интеграл $\int \dots d^{d+1}x' |x - x'|^{1-d}$. Асимптотика этого решения на больших временах определяется сингулярностями подынтегрального выражения: полюса дают экспоненциальное убывание, а точки ветвления — степенное убывание по времени. Как видно, для четного d особенности — это точки ветвления, а для нечетного — полюса. Живя в четномерном пространстве, мы слышали бы совсем другую музыку, особенно ударные. Взяв $f_1(x) = \delta(x)$ и $f_2 = 0$, получим из (4.54) двумерный «бум!»: $\phi(R, t) = (c^2t^2 - R^2)^{-1/2}$ для $R < ct$ и $\phi(R, t) \equiv 0$ для $R > ct$. Более подробное изложение двумерного случая можно найти в параграфах 70–72 в [10] и параграфе 302 в [27].

- 2.10 Противоположные знаки излучаемой и получаемой частот означают, что время течет в противоположных направлениях для излучателя и приемника: звук, излученный позже, придет раньше. Так можно слушать музыку наоборот (ретроградно).
- 2.11 В стационарном течении идеальной жидкости энтропия не меняется вдоль линий тока, что позволяет связать законы изменения давления и плотности: $dp = c^2 d\rho$, где $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$. Стационарное уравнение Эйлера $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p = -c^2 \nabla \rho$ на линии тока принимает форму $\rho v dv = -c^2 d\rho$. Плотность и скорость меняются противоположным образом, поскольку положительный/отрицательный градиент плотности создает градиент давления того же знака, который соответственно замедляет/ускоряет течение. Соотношение $d\rho/dv = -\rho v/c^2$ можно также получить из (2.31). Для потока ρv вдоль линии тока получаем:

$$\frac{d\rho v}{dv} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (4.55)$$

Следовательно, поток растет со скоростью в дозвуковом режиме и уменьшается в сверхзвуковом. С другой стороны, (4.55) описывает, что происходит со скоростью и плотностью, когда поток вдоль линии тока увеличивается (например, когда линии тока сближаются). Обозначая $\mathcal{M} = v/c$, перепишем (4.55) как

$$d \ln v = (1 - \mathcal{M}^2)^{-1} d \ln \rho v, \quad d \ln \rho = -\mathcal{M}^2 (1 - \mathcal{M}^2)^{-1} d \ln \rho v. \quad (4.56)$$

При $M < 1$ относительное изменение плотности в M^2 раз меньше, чем скорости, так что поток увеличивается за счет скорости, а плотность уменьшается. Наоборот, в сверхзвуковом режиме доминируют изменения плотности, которая растет с потоком, тогда как скорость падает. Оба режима соединяются остроумным образом в сопле Лавала (1888), которое широко применяется от паровых турбин до ракетных двигателей. Идея разгона до сверхзвуковых скоростей проста — создать узкое горло. Сначала дозвуковое течение ускоряется в сужающейся части, где возрастание потока вдоль каждой линии тока приводит к увеличению скорости. Если бы течение не достигло скорости звука в месте наиболее узкого сечения, оно бы начало замедляться в расширяющейся части сопла. Однако, если удастся достичь $M = 1$, то это может случиться только в минимуме сечения, где $d \ln \rho v = 0$, так что правая часть (4.56) остается конечной, а решение гладким. Пройдя узкое горло, течение становится сверхзвуковым и будет далее ускоряться за счет увеличения сечения и уменьшения потока. При этом кинетическая энергия увеличивается за счет уменьшения тепловой энергии расширяющегося газа. Конечно, невозможно превысить предельную скорость истечения в вакуум $c\sqrt{2/(\gamma - 1)}$, полученную в § 1.1.4.

- 2.12 Как мы видели в задаче 1.2, гравитация не может удержать в вакууме конечную массу газа при постоянной температуре. Чтобы описать радиальное течение такого газа, выразим давление через плотность $p = \rho RT$ и подставим уравнение неразрывности $\rho v \propto r^{-2}$ в стационарное уравнение Эйлера $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -RT\nabla\rho - GM\rho/r^2$:

$$\left(v - \frac{RT}{v}\right) \frac{dv}{dr} = \frac{2RT}{r} - \frac{GM}{r^2}. \quad (4.57)$$

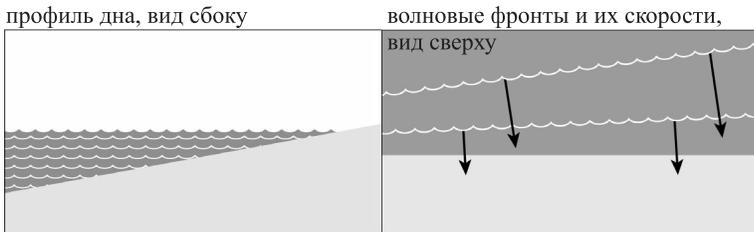
Как видно, RT играет роль квадрата изотермической скорости звука. Без гравитации правая часть положительна, и течение ведет себя согласно правилу, описанному в задаче 2.11: поскольку поток ρv уменьшается вдоль любой линии тока, то дозвуковое течение замедляется, а сверхзвуковое ускоряется с расстоянием. Гравитация позволяет непрерывно ускоряющееся трансзвуковое течение, подобное течению в сопле из задачи 2.11. Для этого необходимо, чтобы радиус звезды был меньше $r_* = GM/2RT$. В этом случае существует гладкое решение уравнения (4.57), которое является дозвуковым при $r < r_*$, ускоряется до $v(r_*) = \sqrt{RT}$, и продолжает ускоряться в сверхзвуковом режиме при $r > r_*$, асимптотически как $v(r) = 2\sqrt{RT \log(r/r_*)}$ (Parker,

1958). Условие $v(r_*) = \sqrt{RT}$ задает постоянную интегрирования для уравнения (4.57), что означает, что для каждого значения стартового радиуса (меньшего r_*) существует определенная дозвуковая скорость истечения, позволяющая ускорение до сверхзвуковых скоростей. Если радиус звезды много меньше r_* , то стартовая скорость должна быть много меньше скорости звука.

Ускорение в дозвуковом режиме происходит за счет уменьшения гравитационной энергии. Ускорение же сверхзвукового течения на больших расстояниях происходит за счет градиента давления, порожденного убыванием плотности. Поскольку $\gamma = 1$ для изотермического течения, нет формального ограничения скорости истечения в вакуум, но в реальности, конечно, на достаточно больших расстояниях теплопроводность уже не сможет удерживать температуру постоянной. Нетрудно обобщить наше рассмотрение на степенное убывание температуры $T \propto r^{-a}$ при условии $a < 1$, очевидном из правой части (4.57). Наоборот, при $a > 1$, т. е. когда температура убывает с расстоянием достаточно быстро, существует статическое равновесие с конечной массой, как было отмечено в задаче 1.2.

4.3. Глава 3

- 3.1 Скорость волны $v_g = \sqrt{gh}$ возрастает с глубиной. Глубина же обычно уменьшается при приближении к берегу. Если волна приходит под углом, то части волновых фронтов на более глубоких местах движутся быстрее, так что фронты разворачиваются к берегу (похоже на рефракцию, описанную в задаче 2.8).



- 3.2 Длина волнового пакета равна $L = N\lambda = 2\pi N/k$. Пакет распространяется со скоростью $v_{\text{групп}}$. Поплавок будет качаться в течение вре-

мени, равного $\tau = L/v_{\text{group}} = 2\pi N/kv_{\text{group}}$. Для квазимонохроматического пакета с $T = 2\pi/\omega(k)$ количество качаний «вверх-вниз» есть $n = \tau/T = Nv_{\text{phase}}/v_{\text{group}}$. Для гравитационных волн на глубокой воде $\omega = \sqrt{gk}$ и $n = 2N$. Для гравитационно-капиллярных волн $\omega = \sqrt{(gk + \sigma k^3/\rho)}$ и

$$n = 2N \frac{(gk + \sigma k^3/\rho)}{k(gk + 3\sigma k^2/\rho)},$$

а для чисто капиллярных волн $\omega = \sqrt{\sigma k^3/\rho}$ и $n = 2N/3$.

Замечание. Это чисто линейное рассмотрение (взятое из [21]). Нелинейный стоков дрейф заставит поплавок двигаться вместе с волной, так что относительная скорость будет меньше: $v_{\text{group}} \rightarrow v_{\text{group}}[1 - (ak)^2]$.

3.3 Качественный анализ и простая оценка. Групповая скорость поверхностных волн зависит немонотонно от длины волны, как показано на рисунке.



Камень эффективно возбуждает волны с длинами не меньше его размера. Действительно, горб ширины l имеет образ Фурье, отличный от нуля для волновых чисел, не больших $1/l$. Следовательно, картина волн зависит от соотношения между размером начального возмущения и λ_* . Большие камни (размеры которых намного превышают λ_*) возбуждают гравитационные волны, которые тем быстрее, чем длиннее. В результате длина волны возрастает с удалением от источника, так что последовательные круги все дальше друг от друга. Маленькие же камешки и капли дождя возбуждают также капиллярные волны, которые чем короче, тем быстрее, так что расстояние между кругами убывает с ростом расстояния.



Нет волн, бегущих медленнее, чем $v_* \simeq (g\alpha/\rho)^{1/4} \simeq 17$ см/с, поэтому их нет внутри круга радиуса v_*t ; этот круг является каустикой. Согласно § 3.1.4, амплитуда возмущения на каустике убывает как $t^{-5/6}$ в двух измерениях. Напомним, что для волн на воде минимальная групповая скорость v_* меньше минимальной фазовой скорости, в частности, $v_* < \omega_*/k_*$, так что гребни волн возникают ниоткуда на каустике и убегают от нее вперед. Более детальное описание каустик и волн на воде можно найти в параграфе 4.11 книги [11].

Как гравитационные, так и капиллярные волны видны на рисунке 4.2. Для любой скорости, превышающей v_* , имеются волны двух разных длин, распространяющиеся вместе.



Рис. 4.2. Длинные гравитационные и короткие капиллярные волны, распространяющиеся вместе. Фото: Cammeraydave, www.dreamstime.com.

Набросок теории для гравитационных волн использует параграф 3.1.4 и материал параграфа 3.1.1. Возмущение может рассматриваться как сила, локализованная как в пространстве, так и во времени. Для опи-

сания времен, превышающих время погружения камня, и длин волн, превышающих его размер, можно моделировать эту силу произведением дельта-функций $\delta(t)\delta(\mathbf{r})$. Добавив такую силу к уравнению движения (3.4), получим

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \delta(t)\delta(\mathbf{r}),$$

что дает $\zeta_k = \iota \exp(-\iota\sqrt{gk}t)/\sqrt{gk}$ и

$$\zeta(r, t) = \frac{\iota}{8\pi^2\sqrt{g}} \int \sqrt{k} dk d\theta \exp(ikr \cos \theta - \iota\sqrt{gk}t) = \quad (4.58)$$

$$= \frac{\iota}{4\pi^2\sqrt{g}} \int_0^\infty dk \sqrt{k} J_0(kr) \exp(-\iota\sqrt{gk}t) \equiv \frac{\iota}{2\pi g^2 t^3} \Phi\left(\frac{r}{gt^2}\right),$$

$$\Phi(y) = \int_0^\infty dz z^2 J_0(yz^2) \exp(-\iota z). \quad (4.59)$$

Здесь J_0 — это функция Бесселя. Видно, что горбы разгоняются с ускорением свободного падения g . Перед ведущим горбом при $r \gg gt^2$ возмущение поверхности стационарно:

$$\zeta(r) \propto g^2 t^{-3} (gt^2/r)^{3/2} \propto g^{-1/2} r^{-3/2}.$$

Позади ведущего горба при $r \ll gt^2$ главный вклад в (4.58) дает $\theta = 0$, $r = \omega'(k)t = t\sqrt{g/k}/2$, т. е. $k = gt^2/4r^2$, так что

$$\zeta(r, t) \propto \sin(gt^2/4r).$$

Радиусы горбов задаются формулой

$$r_n = \frac{gt^2}{2\pi(4n+1)}.$$

Максимальная скорость гравитационных волн определяется глубиной жидкости h , так что волн нет снаружи круга радиуса $t(gh)^{1/2}$, что также является каустикой. Общее рассмотрение с учетом капиллярных волн и конечного размера источника в параграфе 17.09 книги [28].

3.4 Поскольку гамильтониан является вещественным, такова и $A(k)$; обозначим A_1, A_2 соответственно симметричную и антисимметричную

части. Вдобавок $B(k) = B(-k)$, так что можно полагать и $B(k)$ вещественной, поглотив ее фазу в $b(k)$. То же справедливо и для коэффициентов преобразования u, v , которые также можно выбрать вещественными (см. ниже). Каноничность $u-v$ преобразования требует

$$u^2(k) - v^2(k) = 1, \quad u(k)v(-k) = u(-k)v(k)$$

и подсказывает подстановку

$$u(k) = \cosh[\zeta(k)], \quad v(k) = \sinh[\zeta(k)].$$

В этих терминах преобразования принимают вид

$$\omega_k = A_2 + A_1/\cosh(2\zeta), \quad A_1 \sinh(2\zeta) = B[\cosh^2(\zeta) + \sinh^2(\zeta)].$$

Это дает

$$\omega_k = A_2(k) + \text{sign } A_1(k) \sqrt{A_1^2(k) - B^2(k)}.$$

Если $A_1(k)$ обращается в ноль там, где $B(k) \neq 0$, то частота является комплексной, что описывает экспоненциальный рост амплитуд волн, т. е. неустойчивость. Квадратичный гамильтониан может быть редуцирован до формы

$$\mathcal{H}_2 = \int C(k)[a(k)a(-k) + a^*(k)a^*(-k)] dk,$$

описывающей возникновение пары волн из вакуума и обратный процесс их аннигиляции, см. [22, § 1.1].

- 3.5 Для двумерных волновых векторов $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ функция $\omega(\mathbf{k})$ определяет поверхность в трехмерном пространстве ω, k_x, k_y . В изотропном случае $\omega(k)$ определяет поверхность вращения. Рассмотрим две такие поверхности S и S_1 , задаваемые соответственно $\omega(k)$ и $\omega(k_1)$. Возможность найти такие \mathbf{k}_1, \mathbf{k} , что $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) = \omega(k_1) + \omega(k)$, означает, что вторая поверхность должна быть сдвинута вверх на $\omega(k)$ и вправо на \mathbf{k} и что две поверхности должны пересечься.

Все три точки с координатами $\{\omega, k\}$, $\{\omega_1, k_1\}$ и $\{\omega(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1), \mathbf{k} + \mathbf{k}_1\}$ должны лежать на линии пересечения O_1A . Например, $OD = k$, $OB = \omega$, $BC = \omega_1$. Пересечение возможно, только если $\omega(k)$ задает выпуклую поверхность. Для степенного закона, $\omega(k) \propto k^\alpha$, это требует $\alpha > 1$. Для пограничного случая $\alpha = 1$ только волны с коллинеарными волновыми векторами взаимодействуют резонансным образом.

$$J_\phi \propto i \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{r \partial \phi} - \psi^* \frac{\partial \psi}{r \partial \phi} \right) = \frac{A^2}{r},$$

так что циркуляция независима от расстояния до оси вихря. Кинетическая энергия уединенного вихря растет логарифмически с размером системы или с расстоянием до другого параллельного вихря с противоположной циркуляцией: $\int v^2 r dr \propto \int dr/r$. Этот факт имеет много последствий в разных областях физики, особенно в двух измерениях (например, фазовый переход Березинского–Костерлица–Таулеса, отвечающий спариванию вихрей).

3.7 Качественный ответ. Вообще говоря, чтобы проинтегрировать систему $2n$ уравнений первого порядка, необходимо знание $2n$ интегралов движения. Однако для гамильтоновой системы теорема Лиувилля гарантирует, что достаточно n независимых интегралов движения, чтобы система была интегрируема, т.е. эквивалентна n осцилляторам. Для трех мод число степеней свободы в точности равно числу независимых интегралов движения: гамильтониан \mathcal{H} , волновое действие (полное число волн) $P = \sum |a_m|^2$ и импульс $M = \sum m |a_m|^2$. Это значит, что система уравнений движения является интегрируемой: в шестимерном пространстве a_0, a_1, a_{-1} все траектории лежат на трехмерных торах. Иными словами, для начальных условий общего положения движение является троякопериодическим.

Количественное решение. Используя интегралы движения, можно свести полную систему,

$$i \frac{da_0}{dt} = T(|a_0|^2 + 2|a_1|^2 + 2|a_{-1}|^2)a_0 + 2T a_1 a_{-1} a_0^*, \quad (4.62)$$

$$i \frac{da_1}{dt} = \beta a_1 + T(|a_1|^2 + 2|a_0|^2 + 2|a_{-1}|^2)a_1 + T a_{-1}^* a_0^2, \quad (4.63)$$

$$i \frac{da_{-1}}{dt} = \beta a_{-1} + T(|a_{-1}|^2 + 2|a_0|^2 + 2|a_1|^2)a_0 + T a_1^* a_0^2, \quad (4.64)$$

к рассмотрению одной степени свободы. Рассмотрим для простоты $M = 0$ и положим $a_0 = A_0 \exp(i\theta_0)$, $a_1 = A_1 \exp(i\theta_1)$ и $a_{-1} = A_{-1} \exp(i\theta_{-1})$, где $A_0, \theta_0, A_1, \theta_1, \theta_{-1}$ вещественны. Введя $\theta = 2\theta_0 - \theta_1 - \theta_{-1}$, запишем систему в следующем виде:

$$\frac{dA_0}{dt} = -2 \frac{dA_1}{dt} = -2T A_0 A_1^2 \sin \theta, \quad (4.65)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\beta + 2T(A_0^2 - A_1^2) + 2T(A_0^2 - 2A_1^2) \cos \theta. \quad (4.66)$$

Эта система сохраняет гамильтониан $\mathcal{H} = 2\beta A_1^2 + TA_0^4/2 + 3TA_1^4 + 4TA_0^2A_1^2 + 2TA_1^2A_0^2 \cos \theta$ и $P = A_0^2 + 2A_1^2$. Обозначив $B = A_1^2$, можно записать $\mathcal{H} = (2\beta + TP/2)B + TB(P - 2B)(2 \cos \theta + 3/2)$ и

$$\frac{dB}{dt} = 2TB(P - 2B) \sin \theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}, \quad (4.67)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\beta + 2T(P - 3B) + 2T(P - 4B) \cos \theta = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B}. \quad (4.68)$$

Выразив θ через \mathcal{H} , B и подставив в (4.67), можно выразить решение через эллиптический интеграл. Качественную природу эволюции можно понять, изобразив изолинии постоянного \mathcal{H} в координатах $B, \cos \theta$. Движение происходит вдоль этих линий. Фазовое пространство ограничено двумя прямыми линиями: $B = 0$ (соответствующей $\mathcal{H} = 0$) и $B = P/2$ (соответствующей $A_0 = 0$ и $\mathcal{H} = \beta P + TP^2/4$).

Поучительно, в частности, сравнить фазовые портреты при наличии и отсутствии модуляционной неустойчивости. Так же, как и в параграфе 3.3.2, можно рассмотреть $|a_0| \gg |a_1|, |a_{-1}|$ и $|a_0|^2 \approx P$, линеаризовать (4.63), (4.64) и для $a_1, a_{-1} \propto \exp(i\Omega t - iTPt)$ получить $\Omega^2 = \beta(\beta + 2TP)$ в согласии с (3.42). Случай $\Omega^2 = \beta(\beta + 2TP) < 0$ соответствует неустойчивости; при этом в фазовом портрете (4.67), (4.68) существуют две стационарные точки $B = 0, \cos \theta_0 = -1 - \beta/TP$, являющиеся седлами, соединенными сепаратрисами. Даже если траектория стартует сколь угодно близко к $B = 0$, сепаратриса заставляет ее отклониться до конечных B , как видно из правой части рисунка 4.3.

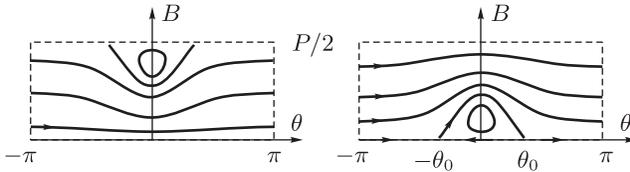
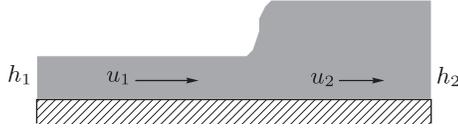


Рис. 4.3. Схема траекторий в фазовом пространстве для больших положительных β (слева, устойчивый случай) и $-2TP < \beta < 0$ (справа, неустойчивый случай).

Для гамильтоновых интегрируемых систем сепаратриса ведет из одной стационарной точки в другую; иными словами, сепаратриса является неустойчивым многообразием для одной точки равновесия и устойчи-

вым для другой. Если система подвергается малому возмущению (например, накачке и затуханию), нарушающему гамильтоновость и интегрируемость, устойчивое многообразие одной точки, вообще говоря, перестает совпадать с неустойчивым многообразием другой точки. Взамен эти два многообразия пересекаются бесконечное количество раз — это расщепление сепаратрисы отвечает за возникновение стохастического (странного) аттрактора.

- 3.8 Как и в любой ударной волне, масса и импульс сохраняются, а механическая энергия — нет.



Постоянство потока массы дает $u_1 h_1 = u_2 h_2$. Поток импульса (1.14) включает давление, которое следует проинтегрировать по вертикальной координате. Для однородного течения переменная часть давления является гидростатической, $P(z) = \rho g(h - z)$, а поток импульса равен

$$\int_0^h [p(z) + \rho u^2] dz = \rho g h^2 / 2 + \rho h u^2.$$

Постоянство потока импульса дает $g h_1^2 + 2 h_1 u_1^2 = g h_2^2 + 2 h_2 u_2^2$. Подставив сюда $u_2 = u_1 h_1 / h_2$, найдем $g h_1^2 - g h_2^2 = g(h_1 - h_2)(h_1 + h_2) = 2 u_1^2 h_1^2 / h_2 - 2 h_1 u_1^2 = 2 u_1^2 h_1 (h_1 - h_2) / h_2$. Это дает высоту после скачка:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{u_1^2}{g h_1}} \approx 1 + \frac{2\epsilon}{3}.$$

Это, в сущности, первое из соотношений ударной адиабаты (4.44), взятое при $\gamma = 2$, $\mathcal{M}_1^2 = 1 + \epsilon$.

Поток механической энергии равен

$$\int_0^h [p(z) + \rho u^2 / 2 + \rho g z] u dz = \rho g u h^2 + \rho h u^3 / 2.$$

Здесь первое слагаемое есть работа давления, второе есть поток кинетической энергии, а третье — поток потенциальной энергии. Разница в потоках энергии до и после скачка есть темп диссипации энергии:

$$\begin{aligned}
& \rho g u_1 h_1^2 + \rho h_1 u_1^3 / 2 - \rho g u_2 h_2^2 - \rho h_2 u_2^3 / 2 = \\
& = \rho g u_1 h_1 (h_1 - h_2) + \\
& \quad + \frac{\rho u_1}{4} [2h_2 u_2^2 + g(h_2^2 - h_1^2)] - \frac{\rho u_2}{4} [2h_1 u_1^2 + g(h_1^2 - h_2^2)] = \\
& = \rho g u_1 h_1 (h_1 - h_2) + \frac{\rho(u_1 + u_2)}{4} g(h_2^2 - h_1^2) = \\
& = \rho g u_1 (h_2 - h_1)^3 / 4h_2 \approx 2\epsilon^3 \rho u_1^5 / 27g. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Сравнивая (4.69) с непрерывностью потока энергии (4.40) в газодинамической ударной волне из задачи 2.3, отметим, что для газа мы рассматривали полную энергию, которая, разумеется, сохраняется. Другое отличие в том, что для мелкой воды давление определяется только высотой (аналог плотности), так что два закона сохранения (массы и импульса) достаточны в этом случае для определения скорости и высоты после скачка. Вследствие этого темп диссипации полностью определяется ламинарным течением перед фронтом. Чтобы оценить этот замечательный результат, стоит понаблюдать в кухонной раковине, насколько сложным и турбулентным является гидродинамический скачок. В частности, он диссипирует энергию, оставляя позади более медленные диспергирующие волны с длиной волны сравнимой с глубиной (дополнительные детали можно найти в [11], § 2.12).

3.9 Для бегущей волны вида $u(x - vt)$ уравнение

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} - \mu u_{xx} = 0$$

принимает форму

$$-vu + u^2/2 + \beta u_{xx} - \mu u_x = \text{const.}$$

Проинтегрируем его, используя граничные условия, и введем $\tau = x\sqrt{v/\beta}$ и $q(\tau) = u/v$:

$$\ddot{q} = -2\lambda\dot{q} + q - q^2/2, \quad 2\lambda \equiv \mu/\sqrt{\beta v}. \tag{4.70}$$

Это уравнение Ньютона для частицы в потенциале $U = q^3/6 - q^2/2$ под действием силы трения (полагаем $\beta > 0$). Начальное условие в далеком прошлом есть $q(-\infty) = \dot{q}(-\infty) = \ddot{q}(-\infty) = 0$, так что частица имеет нулевую энергию $E = \dot{q}^2/2 + q^3/6 - q^2/2$. Полагаем $q \geq 0$, поскольку отрицательное q уходит на минус бесконечность, $q(\infty) = -\infty$, что дает нефизическое u . Трение в конце концов приведет частицу

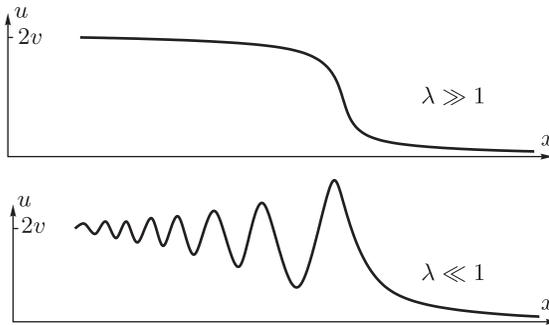
в минимум потенциала: $q \rightarrow 2$ при $\tau \rightarrow \infty$. Вблизи минимума можно использовать гармоническое приближение,

$$\ddot{q} \simeq -2\lambda\dot{q} - (q - 2), \quad (4.71)$$

которое дает закон затухания: $q - 2 \propto \exp(rt)$ с $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Как видно, при $\lambda \geq 1$ затухание монотонно, тогда как при $\lambda < 1$ сопровождается осцилляциями. Для $\lambda \ll 1$ начальная эволюция описывается солитонным решением без трения,

$$q = \frac{3}{ch^2[(t - t_0)/2]},$$

которое поднимает частицу почти до $q \approx 3$, после чего она возвращается почти к $q \approx 0$ и затем приближается к минимуму, осциллируя. Напротив, для сильного трения, $\lambda \ll 1$, частица движется к минимуму монотонно и решение близко к ударной волне Бюргерса. Ясно, что существует интервал значений $\lambda > 1$, для которого решение (называемое бесстолкновительной ударной волной) имеет конечное число осцилляций. Интересно также, начиная с какого λ осцилляции отсутствуют. Заметим, что добавление малой дисперсии не приводит к существенному изменению формы ударной волны, тогда как даже малая диссипация превращает набор солитонов в бесстолкновительную ударную волну, т. е. полностью меняет всю асимптотику при $x \rightarrow -\infty$; причина в том, что сколь угодно малое трение нарушает симметрию обращения времени.



3.10 Простая оценка. Воспользуемся сначала вириальной теоремой, чтобы оценить дисперсионное соотношение при $v = 0$, следуя (3.1), (3.2).

Обе жидкости вовлечены в движение, так что кинетическая энергия на единицу площади может быть оценена как $(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 a^2 \lambda$, где a есть возвышение поверхности. При возвышении гравитационная потенциальная энергия возрастает для нижней жидкости и уменьшается для верхней, так что результирующее изменение на единицу площади есть $(\rho_2 - \rho_1)ga^2$. Потенциальная энергия поверхностного натяжения та же самая: $\alpha(a/\lambda)^2$. В результате вириальная теорема обобщает (3.2) до

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 \simeq (\rho_2 - \rho_1)g\lambda^{-1} + \alpha\lambda^{-3}. \quad (4.72)$$

Полное решение. Нужно объединить подходы разделов 2.1 и 3.1. Введем потенциалы скоростей ϕ_1 и ϕ_2 по обе стороны поверхности. Соответствующие значения давлений найдем в линейном приближении по потенциалам ϕ_1, ϕ_2 и возвышению ζ :

$$P_1 = \rho_1 \left(g\zeta + \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + v \frac{\partial\phi_1}{\partial x} \right), \quad P_2 = \rho_2 \left(g\zeta + \frac{\partial\phi_2}{\partial t} \right). \quad (4.73)$$

Разность давлений уравнивается поверхностным натяжением, как в (3.16):

$$\rho_2 \left(g\zeta + \frac{\partial\phi_2}{\partial t} \right) - \rho_1 \left(g\zeta + \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + v \frac{\partial\phi_1}{\partial x} \right) = \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (4.74)$$

Выразим потенциалы ϕ_1, ϕ_2 через возвышение ζ , используя кинематические граничные условия:

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + v \frac{\partial\zeta}{\partial x}. \quad (4.75)$$

Для $\zeta(x, t) \propto \exp(ikx - i\Omega t)$ получим из (4.74) и (4.75) дисперсионное соотношение

$$\Omega^2 - 2 \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} vk\Omega + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} v^2 k^2 - c_0^2 k^2 = 0, \quad (4.76)$$

$$c_0^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} + \frac{\alpha k}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (4.77)$$

Здесь $k > 0$, а c_0 есть фазовая скорость гравитационно-капиллярных волн при $v = 0$. В этом случае при $\rho_1 > \rho_2$ фазовая скорость и частота являются чисто мнимыми для достаточно длинных волн

с $k^2 < (\rho_1 - \rho_2)g/\alpha$. Это соответствует так называемой неустойчивости Рэлея–Тэйлора, которая отвечает, в частности, за выливание воды из перевернутого стакана. Обратная сила тяжести вызывает неустойчивость, а поверхностное натяжение стабилизирует ее.

Рассмотрим теперь легкую жидкость над тяжелой, $\rho_1 < \rho_2$, что есть устойчивая конфигурация при $v = 0$, поскольку $c_0^2 > 0$. Для достаточно большой v имеем неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, когда можно найти такой k , что детерминант квадратного уравнения (4.76) отрицателен:

$$v^2 > \frac{(\rho_1 + \rho_2)^2}{\rho_1 \rho_2} \min_k c_0^2(k) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{4(\rho_2 - \rho_1)g\alpha}. \quad (4.78)$$

Так же как и в критерии Ландау генерации возмущений в сверхтекучей жидкости, поверхностные волны возбуждаются, если скорость течения превышает минимальную фазовую скорость волн. В этом случае как сила тяжести, так и сила поверхностного натяжения необходимы для обеспечения ненулевой минимальной скорости; иными словами, их взаимодействие обеспечивает устойчивость течения при малых скоростях. Применение (4.78) к ветру над водой, где $\rho_1/\rho_2 \simeq 10^{-3}$, дает порог $v_{\text{th}} \approx 30(4g\alpha/\rho_2)^{1/4} \approx 7$ м/с. Это нереалистично высокое значение. Подув на чашку чая, легко заметить, что волны возбуждаются при много меньших скоростях воздуха. Реалистическая теория генерации волн ветром не только требует учета вязкости, но также того обстоятельства, что ветер практически всегда турбулентный; учет взаимодействия волн на воде с вихрями в воздухе — нетривиальная задача.

3.11 Как и в параграфах 2.3.1, 3.1.1, мы рассмотрим лагранжево уравнение для координаты частицы жидкости,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{R}) \sin(\omega t) + \mathbf{U}(\mathbf{R}) \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.79)$$

и решим его пертурбативно, то есть найдем его решение в виде ряда по обратным степеням ω . Полагая без ограничения общности $\mathbf{R}(0) = 0$, получим в первом порядке

$$\mathbf{R}_1(t) = -\omega^{-1}[\mathbf{V}(0) \cos(\omega t) + \mathbf{U}(0) \cos(\omega t + \varphi)]. \quad (4.80)$$

Теперь подставим это в уравнение для смещения во втором порядке:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial t} = (\mathbf{R}_1 \cdot \nabla)[\mathbf{V} \sin(\omega t) + \mathbf{U} \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (4.81)$$

Интегрирование по периоду дает среднюю скорость дрейфа частицы:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \frac{dt}{2\pi} = \frac{\sin \varphi}{2\omega} [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V}]. \quad (4.82)$$

Как видим, циклическое движение в пространстве эйлеровых течений приводит к лагранжевому дрейфу при наличии двух условий: фазовый сдвиг по времени и непараллельность векторов скоростей в пространстве. Фаза представлена в (4.82) множителем $\sin \varphi$, а непараллельность — квадратной скобкой, содержащей то, что можно назвать коммутатором двух векторных полей. Из нитей, составляющих узор этой книги, сразу несколько сплетаются в этой простой формуле. Во-первых, она напоминает нам о нелинейной связи лагранжевых и эйлеровых координат, что есть проявление инерции. Во-вторых, дрейф есть проявление необратимости, мера которой есть площадь цикла в фазовом пространстве, как для плавления в вязкой среде, описанного в параграфе 1.5.1 и задаче 1.10. Действительно, если смещения по x и y соответственно $\sin(\omega t)$ и $\sin(\omega t + \varphi)$, то площадь траектории в плоскости x, y равна $\sin \varphi$, так что φ иногда называют геометрической фазой. Заметим, что даже если поля $\mathbf{V}(\mathbf{R})$, $\mathbf{U}(\mathbf{R})$ являются потенциальными, среднее течение (4.82), вообще говоря, имеет ненулевую завихренность. В частном случае несжимаемых двумерных течений, когда $\mathbf{V} = z \times \nabla \psi_1$ и $\mathbf{U} = z \times \nabla \psi_2$, функция тока среднего течения ψ пропорциональна векторному произведению двух скоростей (опять же, площади, на этот раз треугольника), что есть скобка Пуассона исходных функций тока: $\psi = [\mathbf{V} \times \mathbf{U}] \sin \varphi / 2\omega = (\psi_{1x} \psi_{2y} - \psi_{1y} \psi_{2x}) \sin \varphi / 2\omega$.

Эпилог

Самое время перечитать пролог и убедиться, что читатель освоил основы гидродинамики и механизмы взаимодействия нелинейности, диссипации и дисперсии. Куда двигаться дальше? В этой книге описано только несколько главных типов течения. За рамками остались целые классы физических явлений. Гидродинамику невозможно втиснуть в одну историю с несколькими легко запоминающимися героями. Приведем здесь краткий путеводитель по дальнейшему чтению, другие ссылки — в примечаниях.

Сравнимый элементарный учебник (только в два раза толще) — книга Ачесона [1]; в ней можно найти альтернативные объяснения и дополнительный материал к главам 1 и 2. Дальнейшее чтение после главы 3 — неустаревающая книга Лайтхилла [11]. Для глубокого и всестороннего изучения гидродинамики как области теоретической физики трудно найти что-либо лучше, чем другая неувядаемая классика — шестой том курса Ландау и Лифшица [10]. Помимо более детального рассмотрения обсуждавшихся здесь явлений, там можно найти описание различных классов течений, обсуждение теорий пограничного слоя, диффузии и теплопроводности, релятивистскую и сверхтекучую гидродинамику и многое другое. Как физику и инженеру, так и математику недостаточно только читать, следует пользоваться всяким случаем, чтобы наблюдать течения — они столь же прекрасны, сколь и поучительны для выработки интуиции. Как картинки, так и видео можно найти в [9, 20] и <http://www.efluids.com/>. И последнее по порядку, но не по важности: внутренняя красота мира течений открывается также путем созерцания окружающего мира и постановки простых экспериментов в кухонной раковине, ванне, бассейне. Механика жидкости и газа предоставляет естествоиспытателю, возможно, последний шанс совершать фундаментальные открытия без использования сложных и дорогих аппаратов.

Узнав, что гидродинамика может сделать для вас, некоторые могут пожелать узнать, что вы можете сделать для гидродинамики. Упомянем кратко несколько направлений развития этой области науки и техники. Значительные усилия посвящаются аналитическому и численному изучению

фундаментальных свойств базисных уравнений, в частности существованию и единственности решений. Например, до сих пор не разрешен вопрос о возможности превращения за конечное время гладкого несжимаемого течения в сингулярное. Подобные вопросы не являются схоластическими или чисто математическими, ответы на них определяют важные физические свойства, например вероятности сильных флуктуаций в турбулентных течениях. С одной стороны, турбулентность представляет собой парадигму для изучения состояний, предельно далеких от теплового равновесия, где мы надеемся открыть общие законы поведения неравновесных систем (другой парадигмой являются живые существа). С другой стороны, турбулентность встречается так часто и играет такую важную роль в природе и индустрии, что требуется детальное знание многих весьма специфических ее свойств. Вследствие этого экспериментальное и теоретическое изучение турбулентности направлено как в сторону более глубокого понимания, так и в сторону расширения области приложений в астрофизике, геофизике, медицине, технике см., например, [4, 8, 22]. В другом пределе очень вязкие течения бывают, как мы видели, весьма нетривиальными; нужды биологии, медицины и техники привели к взрывному развитию микрогидродинамики, открытию новых фундаментальных явлений и созданию уникальных устройств. Несмотря на естественное тяготение теоретиков к предельным случаям (больших и малых Re , Fr , \mathcal{M}), экспериментаторы, наблюдатели и инженеры продолжают открывать замечательные явления во всех интервалах контрольных параметров.

Область квантовых жидкостей продолжает расширяться, включая сверхтекучие жидкости, ультра холодные газы, сверхпроводники и другие системы. Квантование завихренности плюс фактор беспорядка добавляются к взаимодействию нелинейности, диссипации и дисперсии. Многие явления в физике плазмы также относятся к гидродинамике. Квантовые системы и плазма часто могут быть описаны в терминах двухжидкостной гидродинамики (нормальная и сверхтекучая, электронная и ионная компоненты), что приводит к большому разнообразию явлений.

Другая бурно развивающаяся область — изучение течения жидкостей сложной структуры. Важный пример — жидкость, содержащая длинные полимерные молекулы, которые способны поддерживать упругие напряжения, обладающие конечным временем релаксации, т. е. памятью. Эта упругая память обеспечивает свою собственную инерцию (и нелинейность), задаваемую новым безразмерным контрольным параметром — числом Вайсенберга, которое есть произведение градиента скорости на время релаксации по-

лимера. При увеличении этого параметра, асимметрия набегающей и уходящей частей потока может возникнуть из-за того, что молекулы полимера остаются растянутыми еще некоторое время после того как покинут область сильных деформаций вблизи тела (сравните с § 1.5.3). При достаточно большом числе Вейсенберга течения с изгибом линий тока теряют устойчивость при сколь угодно низких числах Рейнольдса. Неустойчивость возникает, когда возмущение течения меняет упругие напряжения так, что они усиливают возмущение. Развитие таких неустойчивостей приводит к так называемой эластической турбулентности [18]. Другой пример — двухфазные течения, встречающиеся повсюду, от облаков до двигателей внутреннего сгорания. Для них интересные явления обусловлены относительной инерцией двух фаз и результирующим крайне неоднородным распределением капель, частиц или пузырьков в течении.

Возвращаясь к основам, отметим, что мы до сих пор толком не понимаем, как плавают рыбы и микроорганизмы и как летают птицы и насекомые, так что исследования в этой области непременно приведут к новым фундаментальным открытиям и инженерным идеям.

Примечания

Глава 1

- 1 Все реальные тела, полагаемые обычно твердыми, содержат дислокации и, следовательно, текут под воздействием сколь угодно малой деформации. Будет ли течь идеальный кристалл под действием инфинитезимальной деформации – вопрос деликатный, который является предметом продолжающихся исследований.
- 2 Конвекция воздуха, возбуждаемая человеческим телом при комнатной температуре, всегда турбулентна, см. видео в [9, гл. 605].
- 3 Подробнее устойчивость вращающихся жидкостей обсуждается в [1, гл. 9.4], и [5, гл. 66].
- 4 Уравнения гидродинамики могут быть обобщены для искривленного пространства (например, двумерные течения на сфере как модели океанов и атмосфер планет), но галилеевская инвариантность имеется только в плоском пространстве.
- 5 Плыть по течению интереснее, чем стоять на берегу. Гидродинамика относится к занятиям (как спорт и др.), которым лучше предаваться самому (лагранжевым способом), чем смотреть, как это делают другие (эйлеровым), согласно Ж.-Ф. Пинтону.
- 6 Уравнение Лапласа было впервые выведено Эйлером как раз для потенциала скорости.
- 7 Детальное обсуждение минимумов и максимумов потенциальных течений можно найти в [3, с. 385].
- 8 Рассмотрение в [10, § 11] не вполне удовлетворительно тем, что не отличает импульс от квазиимпульса.
- 9 То, что можно пользоваться сохранением импульса внутри вытянутого цилиндра вокруг тела, следует из рассмотрения потока импульса через поверхность. Вклад давления $\pi \int_0^{\mathcal{R}} [p(L, r) - p(-L, r)] dr^2 = \pi \rho \int_0^{\mathcal{R}} [\dot{\phi}(-L, r) - \dot{\phi}(L, r)] dr^2 = \pi \rho \dot{u} [1 - (1 - \mathcal{R}/L)^{-1/2}]$ исчезает в пределе $L/\mathcal{R} \rightarrow \infty$. Вклад давления, вообще говоря, не исчезает для поверхностей другой формы; см. главу 7.1 в книге [16].
- 10 Для потенциального течения теорема Бернулли (1.13) является уравнением Гамильтона–Якоби с потенциалом ϕ в качестве действия.
- 11 Обсуждение присоединенной массы и квазиимпульса можно найти в [12] и главах 2.4–2.6 в [16].

- 12 Очень занятым могу утешить тем, что время, нужное для сжигания калорий, обратно пропорционально мощности, которая есть сила на скорость и, стало быть, пропорциональна кубу скорости — просто удвоив скорость вашего велосипеда, вы сократите время тренировки в 8 раз.
- 13 Иногда и общее утверждение об отсутствии сопротивления при стационарном движении называется парадоксом Даламбера, хотя им это было установлено только для тел с симметрией между передней и задней частями по отношению к направлению движения.
- 14 Тензор η_{ijkl} очевидно симметричен относительно $i \leftrightarrow j$ and $k \leftrightarrow l$. Инвариантность относительно $\{ij\} \leftrightarrow \{kl\}$ является частным случаем соотношений Онзагера для кинетических коэффициентов. Если нарушена обратимость во времени, то допустима также нечетная (анти-симметричная) часть тензора вязкости, но только в двумерной изотропной среде. В этом случае дополнительные компоненты тензора напряжений имеют вид: $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \eta^a (\partial v_x / \partial y - \partial v_y / \partial x)$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \eta^a (\partial v_x / \partial x - \partial v_y / \partial y)$. Сдвиговое течение $\partial v_x / \partial y$ изменяет давление, а тангенциальные силы возникают при сжатии или растяжении.
- 15 Уравнение Навье–Стокса было получено Навье в 1822, Коши в 1823 г., Пуассоном в 1829 г., Сент-Венаном в 1837 г. и наконец Стоксом в 1845 г. Любопытно, что оно названо именами первого и последнего.
- 16 Как определить условия применимости гидродинамического приближения в системах с несколькими типами столкновений и соответствующих длин свободного пробега? Например, электроны в проводниках обмениваются импульсом между собой, а также передают импульс кристаллической решетке, рассеиваясь на примесях и фононах. Если потери в решетку доминируют, то имеется обычный Омический режим. Если же длина свободного пробега электрон-электронного рассеяния меньше, чем для рассеяния на фононах и примесях, то электроны текут как вязкая жидкость.
- 17 Это прилипание можно видеть на видео в [9, п. 605]. Условие прилипания является полезной идеализацией во многих, но не всех случаях. В зависимости от формы поверхности и от структуры жидкости и твердого тела может иметь место проскальзывание, меняющее картину течения и уменьшающее сопротивление. Возникающие при этом явления, а также экспериментальные и численные методы их изучения описаны в главе 19 книги [19].
- 18 Валдайская возвышенность порядка 300 метров, а длина Волги порядка 3000 километров, что дает оценку снизу для среднего угла наклона как 10^{-4} .
- 19 Изображения струйных течений при разных числах Рейнольдса можно найти в главе 199 в [9].
- 20 Видео движения при малых Re можно найти в главе 237 в [9], см. также [23].
- 21 Фотографии отрыва пограничного слоя можно найти в [20], а видео — в [9, части 638–675].
- 22 Другой пример вторичного течения, возникающего из-за несогласования дав-

- ления и скорости основного течения, представляет поток, собирающий чаинки в центре стакана при помешивании чая; см., например, главу 7.13 в [6].
- 23 Более детальное описание струй можно найти в главах 11, 12, 21 книги D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics* (Oxford Science Publications, 1988).
 - 24 Генерацию вихрей и ее эффекты можно увидеть на видео, приведенных в главах 210, 216, 722, 725 в [9].
 - 25 Элементарное описание и простую аналитическую модель вихревой дорожки Кармана можно найти в параграфе 5.7 книги [1], включая забавную историю, рассказанную фон Карманом об аспиранте Прандтля, который тщетно полировал обтекаемый цилиндр, чтобы прекратить осцилляции течения. Вихревая дорожка Кармана также отвечает за многие акустические явления, такие как рев пропеллера или шум ветра в ветвях деревьев.
 - 26 Ни слова, ни рисунки 1.15, 1.16 не передают всю полноту и сложность перестройки потока с ростом числа Рейнольдса; более полный набор фотографий можно найти в [20] и видео в [9, гл. 196, 216, 659]; см. также <http://www.efluids.com/>.
 - 27 Можно проверить, что при $Re < 10^5$ палка, опущенная в текущую воду, испытывает меньшую силу, чем при движении сквозь неподвижную жидкость. Причина этого в том, что текущая вода обычно турбулентна еще до встречи с объектом, так что погранслоем также турбулентный. Поколения ученых, начиная с Леонардо да Винчи, верили, что сила должна быть одинаковой вследствие галилеевской инвариантности, не позволяя реальности нарушить чистоту рассуждения. Разумеется, галилеевская инвариантность применима к бесконечным однородным течениям, а не к реальным потокам.
 - 28 Детальное, но все же компактное изложение можно найти в § 6.5 книги [3].
 - 29 Ньютон полагал, что траектория вращающегося шара искривляется, потому что сторона, движущаяся быстрее, испытывает большее сопротивление. Поскольку он полагал силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости, т. е. давлению, это дает ту же оценку (1.64) для силы Магнуса.
 - 30 Дополнительный материал об обтекании тел и силах можно найти в параграфе 6.4 книги [3] и параграфе 38 книги [10].

Глава 2

- 1 Описание различных неустойчивостей можно найти в [5] и в главах 8 в [6, 17].
- 2 Анализ устойчивости плоских сдвиговых течений и течений в трубах можно найти в [10, § 28] и в [1, § 9].
- 3 Краткое введение в теорию динамического хаоса можно найти в [10, §§ 30–32], подробное изложение в E. Ott, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge Univ. Press, 1992). См. также задачу 3.7.
- 4 Экспериментальные данные по затуханию и росту возмущений течения в трубе можно найти, например, в [5].

- 5 Краткое изложение феноменологии турбулентности можно найти в главе 7 книги [17]. Детальное обсуждение каскада и ссылки для дальнейшего изучения см. в [4, 8].
- 6 Детальный вывод соотношения Кармана–Ховарда и колмогоровского закона $4/5$ можно найти в [10, § 34] или в [8, § 6.2].
- 7 О статистических интегралах движения частиц жидкости можно прочитать в обзоре [7].
- 8 Обычно логарифмический профиль получают, постулируя выражение турбулентного потока импульса через градиент средней скорости [10, § 42]. Не очевидно, что градиент есть достаточная характеристика неоднородности, поскольку случай линейного профиля скорости является вырожденным (например, с точки зрения устойчивости), так что выпуклость профиля d^2U/dz^2 должна играть роль. Как мы видели в § 2.2.3, достаточно предположить независимость от вязкости любой из производных.
- 9 Логарифмический профиль может быть связан с гипотезой перекрытия и в других случаях. Например, цилиндр радиуса R , движущийся со скоростью u , порождает ламинарное течение $v(r, R, \nu, u) = uf(\xi, Re)$, зависящее от двух безразмерных параметров $\xi = r/R$ и $Re = uR/\nu \ll 1$. При $r \ll \nu/u$ имеем $v(r) = uf(\xi)$, а при $r \gg R$ зависимость от R должна выпадать из закона изменения: $v(\infty) - v(r) = uf_1(\xi Re)$, причем $v(\infty) = uf_2(Re)$. В области перекрытия получим $f(\xi) = f_2(Re) - f_1(\xi Re)$, что означает, что все функции логарифмические, сравни с (1.58).
- 10 Теория пограничного слоя Кармана–Прандтля и теория турбулентности Колмогорова–Обухова возникли, судя по всему, независимо. В основе обеих лежит идея промежуточного интервала (расстояний в первом случае и масштабов во втором), в котором исчезают зависимости от начала и конца. Мы еще далеки от полного понимания где и почему эта идея перестает работать.
- 11 Статистика флуктуаций границы турбулентного следа недостаточно исследована, см. А. Монин и А. Яглом, Статистическая гидромеханика, т. 1. § 5.8.
- 12 Вариационный принцип для уравнения диффузии совпадает с формулировкой Кирхгофа закона Ома, если θ есть электрический потенциал, а κ проводимость.
- 13 Хотя динамическое лагранжево описание индивидуальных траекторий неприемлемо к турбулентности при $Re \rightarrow \infty$, статистическое описание возможно и может быть найдено в [4, 7].
- 14 Части пространства, куда случайные сжимаемые течения собирают всю массу, являются фрактальными множествами, сглаженными молекулярной диффузией. Важная область приложений таких распределений — неравновесная статистическая физика. Дело в том, что гамильтонова динамика соответствует несжимаемому течению в фазовом пространстве и в общем случае ведет к перемешиванию и установлению равновесной плотности вероятности (усреднение по малым областям играет роль диффузии). Выводя систему из равновесия путем

- добавления накачки и затухания, мы создаем в фазовом пространстве сжимаемое течение, которое производит фрактальные распределения, носящие имя Синая-Рюэля-Боуэна, см, например, § ША4 в [7]. Неравновесность таких распределений означает ненулевую скорость производства энтропии (определенной как средний логарифм плотности вероятности), равную со знаком минус сумме ляпуновских экспонент, которая следовательно неположительна — нулевая для несжимаемых и отрицательна для сжимаемых течений [4, 7].
- 15 Спокойный разговор в большинстве стран соответствует 50–60 dB, концерт рок-музыки — порядка 100 dB.
 - 16 Заметим, что (65.8) в [10] есть полный импульс жидкости, тогда как (3.54) в [6] есть только импульс волны.
 - 17 Импульс и квазиимпульс фонана обсуждаются § 4.2 книги [15]. Распространение поверхностных волн в жидкостях всегда сопровождается стоковым дрейфом вещества, квадратичным по амплитуде волны.
 - 18 Более детальный вывод скорости волны Римана можно найти в [10, § 101].
 - 19 Уравнение Бюргера также описывает отклонения от прямой полимеров и других линейных эластичных объектов, при этом t является координатой вдоль полимера.
 - 20 Несмотря на то что уравнение Бюргера сводится к линейному, т. е. интегрируемо, оно не имеет других интегралов движения, кроме импульса. Два других рассматриваемых здесь одномерных интегрируемых уравнения, Кортевега-де-Вриза и нелинейное уравнение Шрёдингера, имеют бесконечное количество интегралов движения.
 - 21 Об использовании эффекта Доплера можно прочесть в [19].
 - 22 Наше изложение обтекания тела сжимаемым газом следует параграфу 3.7 книги [1], более подробное изложение сверхзвуковой аэродинамики можно найти в главе 6 книги [17].
 - 23 Проходя через фронт ударной волны, потенциальное течение приобретает завихренность, поскольку для разных линий тока скачки скорости, вообще говоря, разные. Исключением является случай, когда плоский фронт с однородным скачком пересекается всеми линиями тока под одним и тем же углом, что имеет место в линейном приближении, см. [10, §§ 112–114].

Глава 3

- 1 Хотя волны в океане и распространяются на большие расстояния, стоков дрейф в них не производит крупномасштабных океанских течений. Причина во вращении Земли, приводящему к кориолисовой силе, которая поворачивает скорость, приводя к круговому горизонтальному движению.
- 2 Вычисление малого темпа вязкого затухания гравитационных волн через тензор

- вязких напряжений, вычисленный на невязком решении, можно найти в [10, § 25].
- 3 Детали проделанного Стоксом вычисления темпа вязкого затухания гравитационных волн на поверхности жидкости можно найти в § 3.5 книги [11].
 - 4 Плотность воздуха была впервые измерена Галилеем. Это позволило ему связать с атмосферным давлением известный с античности факт практической невозможности поднять воду поршнем более чем на 10 метров. Его ученики Торричелли и Вивiani проверили эту идею с более тяжелой ртутью, создав первый барометр (в 1643 г.).
 - 5 Для лучшего понимания стоячей волны в потоке и вообще стоит прочитать главу 3.9 книги [11], которая также содержит стихотворение Роберта Фроста с редким сочетанием правильной физики и содержательной метафизики.
 - 6 Движущееся тело наиболее эффективно возбуждает волны с длиной порядка своего размера L . Эти волны бегут со скоростью $U(L) \simeq \sqrt{Lg}$ и создают максимум, видный на рисунке 3.4 как внутренний клин, аналогичный конусу Маха с углом $\varphi = \arcsin(U/V)$, уменьшающимся с V . В этом случае U играет роль скорости звука, а число Фруда $Fr = U/V$ — роль числа Маха. В старых руководствах скорость \sqrt{Lg} указывалась как предельная, поскольку при приближении к ней сильно возрастает волновое сопротивление (подобно звуковому барьеру) из-за конструктивной интерференции волн от носа и кормы, так что парусные гоночные яхты старались делать подлиннее. Двигатели позволяют скоростным катерам превзойти эту скорость, что сопровождается сменой режима на так называемое планирование (судно так сильно толкает воду вниз, что подъемная сила реакции задирает нос).
 - 7 Подробнее о кельвиновской картине волн можно прочитать в § 3.10, а о каустиках в § 4.11 книги [11].
 - 8 Процедура исключения нерезонансных членов является частью теории Пуанкаре, описывающей нормальные формы гамильтонианов вблизи стационарных точек и замкнутых траекторий, см. [2, 22].
 - 9 Более подробное описание обратного каскада можно найти в [4, 22].
 - 10 Отрицательную температуру можно увидеть уже в простейшем случае двух мод: для фиксированных $E = \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2$ и $N = N_1 + N_2$ энтропия $S = \ln N_1 + \ln N_2 \propto \ln(E - \omega_1 N) + \ln(\omega_2 N - E)$ дает температуру $T^{-1} = \partial S / \partial E \propto (\omega_1 + \omega_2)N - 2E$, которая отрицательна при достаточно большом E . Для конденсата $\omega_1 = 0$, так что $T < 0$, когда $2E = 2\omega_2 N_2 > \omega_2 N$, т. е. меньше, чем половина, частиц принадлежат конденсату. Эти идеи восходят к Онсагеру, рассматривавшему двумерные несжимаемые течения в конечных областях, где состояния с отрицательной температурой соответствуют собиранию маленьких вихрей в большие.
 - 11 Обратные каскады и долгоживущие крупномасштабные течения существуют также во вращающихся жидкостях и замагниченной плазме.

-
- 12 Фото гидравлического скачка, вызванного приливом, можно найти в [20].
 - 13 Простое обсуждение гидравлического скачка можно найти в книгах [1, § 3.9], [11, § 2.12] и [6, § 2.16].
 - 14 Детали можно найти в книге Ablowitz, M. and Segur, H. *Solitons and the inverse scattering transform*.

Литература

- [1] Acheson D. J. 1990. *Elementary fluid Dynamics* (Clarendon Press, Oxford).
- [2] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики* (Наука, 1974).
- [3] Бэтчелор Д. *Введение в динамику жидкости* (Регулярная и хаотическая динамика, 2004).
- [4] Cardy J., Falkovich G. and Gawędzki K. 2008. *Non-equilibrium Statistical Mechanics and Turbulence* (Cambridge Univ. Press).
- [5] Chandrasekhar S. 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* (Dover, NY).
- [6] Faber T. E. 1995. *Fluid Dynamics for Physicists* (Cambridge Univ. Press).
- [7] Falkovich G., Gawędzki K. and Vergassola M. 2001. Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 913–975.
- [8] Фриш У. *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова* (Фазис, 1998).
- [9] Homsy G. M. et al. 2007. *Multimedia Fluid Mechanics* (Cambridge Univ. Press).
- [10] Ландау Л. и Лифшиц Е. *Гидродинамика*. (Наука, 1986).
- [11] Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях* (Мир, 1981).
- [12] Lighthill J. 1986. *Informal Introduction to Fluid Mechanics* (Cambridge Univ. Press).
- [13] Милн-Томсон Л. *Теоретическая гидродинамика* (Мир, 1964).
- [14] Nazarenko, S. 2015. *Fluid Dynamics via Examples and Solutions* (Boca Raton: CRC Press)
- [15] Пайерлс Р. *Сюрпризы в теоретической физике* (Наука, 1988).
- [16] Peierls R. 1987 *More surprises in theoretical physics* (Princeton Univ. Press).
- [17] Эртель Г. *Путеводитель Прандтля по гидродинамике* (Регулярная и хаотическая динамика, 2007).
- [18] Steinberg V. 2008. *Turbulence: Elastic*, Scholarpedia 3(8), 5476, http://www.scholarpedia.org/article/Turbulence:_elastic.

- [19] Tropea C., Yarin A. and Foss J. eds. 2007. *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics* (Springer, Berlin).
- [20] Ван-Дайк М. *Альбом течений жидкости и газа*. (Мир, 1986).
- [21] Векштейн Г.Е. *Физика сплошных сред в задачах* (Институт компьютерных исследований, 2002).
- [22] Zakharov V., Lvov V. and Falkovich G. 1992. *Kolmogorov spectra of turbulence* (Springer, Berlin).
- [23] Childress S. 1981. *Mechanics of Swimming and Flying* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [24] Purcell E. M. 1977. Life at low Reynolds number, *Am. J. Phys.*, **45**, 3–11.
- [25] Wilczek F. and Shapere A. 1989. Geometry of self-propulsion at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **198**, 557–585.
- [26] Anderson B. D. 2008. The physics of sailing, *Physics Today*, February, 38–43.
- [27] Лэмб Г. *Гидродинамика* (ГИТТЛ, 1947).
- [28] Джеффрис Г. и Свирлс Б. *Методы математической физики* (Мир, 1969).

Фотографии

Figure 1.14. Копирайт: Sdtr, Rmarmion | Dreamstime.com.

Figure 1.15. Фото С. Танеда, воспроизводится из *J. Phys. Soc. of Japan* **20**, 1714 (1965).

Figure 1.16. Фото Т. Корка и Х. Наджиба, воспроизводится из [20].

Figure 1.22. Копирайт: Paul Topp | Dreamstime.com.

Figure 2.3. Фото Ф. Робертса, П. Димотакиса и А. Рошко, воспроизводится из [20].

Figure 2.4. Фото — авторство и копияйт: Brooks Martner.

Figure 2.6. Копирайт: Vbotond | Dreamstime.com.

Figure 2.7. Копирайт: Lee2010 | Dreamstime.com.

Figure 3.1. Из Wallet, A. and Ruellan, F. (1950), *La Houille Blanche*, 5:483–489.

Figure 3.4. Копирайт: Alexey Baskakov | Dreamstime.com.

Figure 3.6. Фото Дж. Фейра, воспроизводится из *Proc. R. Soc. Lond. A* **299**, 59 (1967).

Figure 3.11. Копирайт: Joe Gough | Dreamstime.com.

Figure 4.2. Копирайт: Cammeraydave | Dreamstime.com.

Предметный указатель

- Аномалия, 87
Аномальный скейлинг, 113
- Безвихревое течение, 19, 21
- Вириальная теорема, 124, 132
Вихревой слой, 75
Вихрь, 215
— рециркуляции, 59
Волновое
— действие, 156
— уравнение, 102
Время Стокса, 56
Вязкий тензор напряжений, 52
Вязкое затухание, 128
- Галилеевская инвариантность, 14, 112
Галилеевское преобразование, 158
Гамильтониан, 36
Гидравлический скачок, 164
Гидростатика, 7
Граничные условия, 6
Групповая скорость, 133, 211
- Децибел, 104
Дисперсионное соотношение, 125
Дисперсия
— Тэйлора, 96, 120
— волн, 123, 133, 158
Длина свободного пробега, 46
Дозвуковое течение, 114
Доплеровский сдвиг, 117
Дорожка вихрей, Кармана, 60
- Завихренность, 18
Закон
— Ландау, 78
— Ричардсона, 84, 99
— дисперсии, 102, 140, 151
Затухающая турбулентность, 114
Звук, 23
Зона молчания, 206
- Идеальная жидкость, 6
Инерционный интервал, 85
Инерция, 5, 28, 50
Интеграл по траекториям, 88
Интенсивность звука, 104
- Каскад энергии, 85
Каустика, 134, 206
Кинематическая вязкость, 47
Кинематическое граничное условие, 126
Клин Кельвина, 139
Комплексный потенциал, 26
Конвекция, 8
Конденсат, 151
Конус Маха, 115
Конформное преобразование, 27
Корреляционная функция, 85
Коэффициент сопротивления, 64, 89
Кризис сопротивления, 61, 186
Критерий
— Лайтхилла, 151
— Рэлея, 76
Крыло, 65, 117
Кумулятивная струя, 59

- Лагранжевы координаты, 14, 37, 104
Линии тока, 10, 23
Липшица условие, 3, 99
Логарифмический профиль, 90
- Масштабная инвариантность, 87, 113
Модуляционная неустойчивость, 151, 155
- Нарушенная симметрия, 60, 88, 113
Невязкий предел, 84
Необратимость статистики, 87
Непрерывное течение, 2
Несжимаемая жидкость, 7, 22, 25, 124
Несжимаемость, 23
Неустойчивость, 74, 120, 146, 151
– Кельвина–Гельмгольца, 74, 222
– Рэлея–Бернара, 120
– Рэлея–Тэйлора, 222
- Обратимость времени, 87
Обратный каскад, 161
Огибающая волна, 134
Опрокидывание волны, 109
Отрыв пограничного слоя, 58
- Парадокс
– Даламбера, 43
– Кнудсена, 193
– Стокса, 56
– Эрншоу, 105
– обратимости, 43
Параметрическая неустойчивость, 147
Параметрический резонанс, 147
Плавание, 53
Пловец Перселла, 69
Поверхностное натяжение, 124, 131
Пограничный слой, 56
Подстановка Хопфа, 109
Подъемная сила, 64, 118
Потенциал скорости, 21, 125
Потенциальное течение, 23, 25
- Поток
– завихренности, 19
– импульса, 47, 62
– энергии, 85
Предел нулевой вязкости, 112
Простая волна, 106
- Распадная неустойчивость, 147
Рефракция, 206
- Сверхзвуковое течение, 209
Сепаратриса, 157
Сжимаемость, 118
Сила
– Магнуса, 66, 69, 186
– сопротивления, 41, 42, 52, 89, 92
Сингулярное возмущение, 67
След, 57, 92
Солитон, 156
Соотношение Кармана–Ховарда, 86
Сопло Лавалья, 209
Стационарная фаза, 134
Стационарное
– обтекание, 49
Стохастический аттрактор, 218
Структурные функции, 86, 114
Струя, 59, 71
- Темп диссипации энергии, 84, 112
Тензор напряжений, 43, 93, 128
Теорема
– Кельвина, 18
– Таланова, 159
Теория пограничного слоя, 91
Течение Стокса, 54, 180
Точка остановки, 26, 58
Траектории, 10, 126
Трансзвуковое течение, 209
Трение, 43, 50
Трубка Пито, 13
Турбулентная вязкость, 89
Турбулентность, 61, 80, 114

-
- Турбулентный коэффициент диффузии, 97
- Турбулентный пограничный слой, 90
- Ударная волна, 109, 111
- Уравнение
- Эйлера, 3
 - непрерывности, 5
- Фазовая скорость, 133
- Формула Стокса, 55
- Фронт ударной волны, 114
- Функция тока, 23, 25, 68, 179
- Хаотический аттрактор, 81
- Характеристики, 107
- Циркуляция скорости, 18, 65, 118, 177
- Число
- Вайсенберга, 225
 - Деборы, 2
 - Маха, 115
 - Пекле, 96
 - Прандтля, 97, 197
 - Рейнольдса, 50, 110
 - Фруда, 51, 164
 - Шмидта, 97
- Эйлеровы координаты, 14
- Эластическая турбулентность, 226
- Эффект Доплера, 116

Научное издание

Григорий Фалькович

СОВРЕМЕННАЯ ГИДРОДИНАМИКА
КРАТКИЙ КУРС

Издание второе, исправленное и дополненное

Дизайнер А. А. Гурьянова
Технический редактор А. В. Бакиев
Корректор Е. В. Огородникова

Подписано в печать 18.03.2019. Формат 60 × 84¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,65. Уч. изд. л. 15,07.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная № 1. Заказ № 19-26.
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426057, г. Ижевск, ул. К. Маркса, д. 250, кв. 55
<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95



Полный ассортимент литературы издательств
«Институт компьютерных исследований»
и «Регулярная и хаотическая динамика»
по самым доступным ценам представлен:

R&C
Dynamics

Прямое представительство

Россия, Ижевск
Удмуртский государственный университет
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, оф. 201а/207
Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95
E-mail: subscribe@rcd.ru, rhd-m@mail.ru

Интернет-магазин

MAHES
<http://shop.rcd.ru>

- Отправка заказов осуществляется почтой РФ из г. Ижевска
- Цены на сайте указаны без учета стоимости доставки

Книжные магазины и киоски



Московский дом книги

Москва, ул. Новый Арбат, д. 8 (м. «Арбатская»)
Тел.: +7 (495) 789-35-91



Дом технической книги

Москва, Ленинский проспект, д. 40 (м. «Ленинский проспект»)
Тел.: +7 (499) 137-60-19



Магазин научной книги URSS

Москва, Нахимовский проспект, д. 56 (м. «Профсоюзная»)
Тел.: +7 (499) 724-25-45

БУКВОЕД

Книжная сеть «Буквоед»

Санкт-Петербург, ул. Минеральная, д. 13
Тел.: +7 (812) 601-0-601

На просторах Интернета

ozon.ru
<http://www.ozon.ru>

EAGE Геомодель
<http://www.eage.ru>

ЦентрИнтНефтеГаз
<http://centrlit.ru>



НИЦ «ИНФРА-М»
<http://www.infra-m.ru>


Московский дом книги
<http://www.mdk-arbat.ru>

 Инфра-Инженерия
<http://www.infra-e.ru>

Каталог изданий для предприятий
нефтегазового комплекса
<http://www.yagello.ru>



Книжное поисковое агентство
ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КНИГА
<http://chebakov.com>

LOGOBOOK.RU
<http://rus.logobook.ru>

Библион
<http://www.biblion.ru>

БУКВОЕД
<http://www.bookvoed.ru>

 **бибком**
центральный
коллектор
библиотек
<http://www.ckbib.ru>

Электронно-библиотечные системы



Университетская
библиотека
ONLINE
<http://bibliodub.ru>



IPRbooks
электронно-библиотечная система
<http://www.iprbookshop.ru>



РУКОНТ
национальный цифровой ресурс
<http://rucont.ru>