# מכניקה סטטיסטית - תרגיל 1

**תאריך הגשה : 11.4.2013**

## 1 תוחלת ושונות

בתרגיל זה נתאמן בחישוב תוחלת ושונות של התפלגויות שונות.

1. חשבו את השונות והתוחלת של התפלגות אחידה עבור משתנה רציף :

$$P(x) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 \le x \le \Delta \\ 0 & else \end{cases}$$

2. חשבו את השונות והתוחלת של התפלגות בולצמן עבור משתנה בדיד:

$$P(n) = \begin{cases} \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta n} & n \ge 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

כאשר $Z(\beta)$ הוא מקדם נרמול ו-$\beta > 0$. לשם כך חשבו תחילה את מקדם הנרמול $Z(\beta)$, ולאחר מכן חשבו את התוחלת והשונות על ידי כך שתבטאו אותן כפונקציה של $Z(\beta)$ ונגזרותיה.
**רמז:** רישמו ביטוי ה-$Z(\beta)$ מתוך תנאי הנורמליזציה של $P(n)$. גיזרו פעם אחת לפי $\beta$ונסו להבין כיצד להשתמש בביטוי שקיבלתם לחישוב התוחלת. ביטוי שימושי נוסף יתקבל לאחר גזירה נוספת לפי $\beta$. צורת חישוב זו תהיה שימושית מאוד בהמשך הקורס כאשר נרצה לחשוב מתוך $Z$, שנקראת לרוב פונקצית החלוקה, את התוחלת והסטיות של משתנים שונים כמו אנרגיה ומספר חלקיקים.

## 2 משפט הגבול המרכזי

בכיתה מצאנו את פונקצית ההתפלגות של מספר החלקיקים בחציו אחד של מיכל המכיל גז אידאלי. פונקצית זו מופיעה במקרים רבים במערכות סטטיסטיות בהם מספר חלקיקים יכולים להימצא בשני מצבים אפשריים (מבחינת מיקום, אנרגיה או כל פרמטר אחר).
כעת נשאל כיצד נראית ההתפלגות של מספר החלקיקים ברבע השמאלי של המיכל. נסמן ב-$Q$ את מספר החלקיקים ברבע השמאלי, ב-$N$ את מספר החלקיקים הכולל וב-$q = Q/N$ את חלקם של החלקיקים ברבע השמאלי. חשבו את התוחלת ($\mu$) והשונות ($\sigma^2$) של חלקיק בודד להיות ברבע השמאלי של המיכל והשתמשו במשפט הגבול המרכזי כדי קבל התפלגות מקורבת של $q$. זכרו שהתפלגות נורמלית ניתן מהצורה

$$P(q) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q-\mu)}{2\sigma^2}}$$

ושימו לב לתלות של $\sigma$ ב-$N$.

## 3 תרגיל אקסל - קירוב סטירלינג והתכנסות להתפלגות גאוסיאנית

1. השוו באמצעות תוכנת אקסל בין הערך האמיתי של עצרת לבין קירוב סטירלינג. ציירו בגרף אחד את הפונקציות $N!$ ואת קירוב סטירלינג של פונקצית העצרת בשני סדרים שונים (לדוגמא סדר הקירוב אותו בחרנו להשתמש בכיתה וקירוב מסדר גבוה יותר). הדפיסו את הגרף וצרפו לתרגיל. מומלץ להציג ציר ה-Y בגרף בסקלה לוגריתמית. עבור איזה ערך מינימלי של $N$ הסטיה של כל אחד מהקירובים מהערך האמיתי של $\ln(N!)$ תהיה קטנה מ- $5\%$? (משמע שההפרש בין הקירוב ל-$\ln(N!)$ צריך להיות קטן מ-$0.05\ln(N!)$).

2. ציירו באקסל את הפונקציה $P(q)$ שקיבלתם בתרגיל הקודם עבור $N = 15, 25, 60$ כפונקציה של $q$. על מנת לבחון את ההתכנסות של ההתפלגות לגאוסיאן ציירו כמו כן את הפונקציה ההתפלגות המלאה,

$$,P(q) = \begin{pmatrix} N \\ qN \end{pmatrix} (\frac{1}{4})^{qN} (\frac{3}{4})^{(1-q)N}$$

עבור $N = 15, 25, 60$. ציירו את 6 העקומות באותו הגרף כפונקציה של $q$ . הדפיסו שתי גרסאות שונות של הגרף, אחת בה ציר ה-Y ניתן ביחידות רגילות והשניה בה ציר ה-Y ניתן בסקלה לוגריתמית. צרפו אותן לדף התשובות ונסו להסביר את ההבדלים בין ההתפלגות האמיתית לקירוב.