מכניקה סטטיסטית - תרגיל 1

תאריך הגשה: 14/04/2015

1 תוחלת ושונות

בתרגיל זה נחשב תוחלת ושונות של התפלגויות שונות.

1. נתונה ההתפלגות: $P(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < 1 \\ \frac{A}{2}, & 1 \leq x < 3 \end{cases}$, כאשר A הוא קבוע.

א. חשבו את הקבוע A באמצעות תנאי הנרמול שמקיימת ההתפלגות.

ב. חשבו את התוחלת ואת השונות של x.

2. נתונה התפלגות בולצמן עבור המשתנה הבדיד n: $P(n) = \begin{cases} \frac{1}{Z(\beta)}e^{-\beta n}, & n = 0,1,2,3... \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

כאשר $\beta > 0$ קבוע, ו-$Z(\beta)$ הוא מקדם נרמול.

א. חשבו את $Z(\beta)$.

ב. חשבו את התוחלת ואת השונות של n. הנחיה: גזרו את $Z(\beta)$ לפי β פעם אחת ובטאו את התוחלת באמצעות הנגזרת. גזרו את $Z(\beta)$ פעם שנייה ובטאו את השונות באמצעות שתי הנגזרות שחישבתם.

$Z(\beta)$ נקראת פונקצית החלוקה. בהמשך הקורס נשתמש בטכניקה זו על מנת לחשב תוחלת ושונות של גדלים שונים כגון אנרגיה ומספר חלקיקים.

2 משפט הגבול המרכזי

בכיתה מצאנו את פונקצית ההתפלגות של מספר החלקיקים בחצי אחד של מיכל המכיל גז אידיאלי. פונקציה זו מופיעה במקרים רבים במערכות סטטיסטיות בהן חלקיקים יכולים להימצא בשני מצבים אפשריים (מבחינת מיקום, אנרגיה או כל פרמטר אחר). כעת נשאל כיצד נראית ההתפלגות של מספר החלקיקים בחמישית מהמיכל. נסמן ב-Q את מספר החלקיקים בחמישית המיכל השמאלית, ב-N את מספר החלקיקים הכולל במיכל וב-$q = \frac{Q}{N}$ את יחס החלקיקים בחמישית השמאלית.

א. חשבו את התוחלת (μ) ואת השונות (σ^2) של חלקיק בודד להיות בחמישית המיכל השמאלית.

ב. השתמשו בתוצאות של סעיף א ובמשפט הגבול המרכזי על מנת לקבל התפלגות מקורבת של q בגבול של מספר חלקיקים N גדול.

3 תרגיל אקסל - קירוב סטירלינג ומשפט הגבול המרכזי

ראיתם שני קירובים התקפים בגבול של N גדול, בו נעבוד רבות בקורס: קירוב סטירלינג ומשפט הגבול המרכזי. בשאלה זו נראה החל מאיזה גודל של N הקירובים נותנים תוצאה קרובה למדויקת.

א. השוו באמצעות תוכנת אקסל בין הערך האמיתי של $N!$ לבין קירוב סטירלינג. ציירו בגרף אחד את הפונקציה $N!$ ואת קירוב סטירלינג של פונקצית העצרת בשני סדרים שונים: $N! \approx \sqrt{2\pi N}(\frac{N}{e})^N$, והקירוב מסדר נמוך יותר בו השתמשנו בכיתה, $N! \approx e^{N\ln N - N}$. הדפיסו את הגרף וצרפו לתרגיל. מומלץ להציג את ציר ה-Y בסקלה לוגריתמית. עבור איזה ערך מינימלי של N הסטיה של כל אחד מהקירובים מהערך האמיתי של $\ln(N!)$ תהיה קטנה מ-5%? (משמע שההפרש בין הקירוב ל-$\ln(N!)$ צריך להיות קטן מ-$0.05\ln(N!)$).

ב. ציירו באקסל את הפונקציה $P(q)$ שקיבלתם בשאלה 2 עבור $N = 15, 25, 60$ כפונקציה של q. על מנת לבחון את ההתכנסות של ההתפלגות לגאוסיאן ציירו כמו כן את $\frac{P_{exact}(q)}{\Delta q}$ עבור $N = 15, 25, 60$, כאשר

$$P_{exact}(q) = \binom{N}{qN}\left(\frac{1}{5}\right)^{qN}\left(\frac{4}{5}\right)^{(1-q)N}$$

היא פונקצית ההתפלגות המדויקת של q, ו-Δq הוא המרווח בין 2 ערכי q עוקבים.

הסיבה לנרמול ב־Δq היא ש־$P_{exact}(q)$ היא פונקצית הסתברות בדידה בעוד ש־$P(q)$ שהתקבלה ממשפט הגבול המרכזי היא פונקצית צפיפות הסתברות רציפה.

ציירו את 6 העקומות באותו הגרף כפונקציה של q. הדפיסו שתי גירסאות שונות של הגרף, אחת בה ציר ה־Y ניתן ביחידות רגילות והשניה בה ציר ה־Y ניתן בסקלה לוגריתמית. צרפו אותן לדף התשובות ונסו להסביר את ההבדלים בין ההתפלגות האמיתית לקירוב.