

מכניקה סטטיסטית - תרגיל 2

תאריך הגשה : 2.5.2013

1 תערובת גזים אידאליים

בתרגיל זה אנו נחשב את האנטרופיה ומשוואות המצב של גז אידאלי המורכב משני סוגי חלקיקים בעלי מסות שונות. הגז מכיל $N = N_1 + N_2$ חלקיקים, מהם N_1 בעלי מסה m_1 ו- N_2 בעלי מסה m_2 . הגז נמצא במיכל בנפח V . נסמן ב- q_1, \dots, q_{3N_1} את המיקומים של החלקיקים מהסוג הראשון וב- p_1, \dots, p_{3N_1} את התנעים המתאימים. באותו אופן נסמן ב- Q_1, \dots, Q_{3N_2} את המיקומים של החלקיקים מהסוג השני וב- P_1, \dots, P_{3N_2} את התנעים המתאימים.

1. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת.

2. נגדיר משתנים חדשים עבור החלקיקים מהסוג השני, $\bar{P}_i = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} P_i$. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת באמצעות המשתנים p_i, \bar{P}_i .

3. חשבו בעזרת ההמילטוניאן בסעיף 2 את מספר המצבים עם אנרגיה קטנה מ- E בעזרת

$$\Sigma(E) = \frac{1}{h^{3N_1+3N_2} N_1! N_2!} \int_{H < E} d^3N_1 q d^3N_2 Q d^3N_1 p d^3N_2 P$$

לשם כך עליכם לעבור לאינטרגציה במשתנים \bar{P}_i בהם האינטרגל ניתן לחישוב ע"י הנוסחה של נפח היפר-כדור. שימו לב שהחלפת המשתנים באנטרגל צריכה להעשות ע"י הכפלה ביעקוביאן. לדוגמה אינטרגל המוגדר כ- $\int dx f(x)$ ונרצה לחשבו בקואורדינטות $y = ax$. תחילה עלינו לחשב $dy = a dx$ ואז לרשום

$$\int dx f(x) = \int \frac{dy}{a} f\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a} \int dy f\left(\frac{y}{a}\right)$$

4. חשבו את האנטרופיה של המערכת, $S(E, V, N_1, N_2)$.

5. השתמשו בזהויות התרמודינמיות, $\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E, N_1, N_2}$ ו- $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V, N_1, N_2}$, על מנת לקבל את משוואת המצב של המערכת.

2 תכונות פונקצית האנטרופיה

פונקצית האנטרופיה נותנת לנו מידע רב על המערכת. הצורה שלה תלויה בתכונות המערכת והפרמטרים המקרוסקופיים שעמם בחרנו לתאר את המערכת. בכל מקרה פונקצית האנטרופיה תקיים מספר תכונות בסיסיות :

- האנטרופיה היא פונקציה אדיטיבית, ולכן גם אקסטנסיבית, $S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(E, V, N)$.
- האנטרופיה גזירה בכל מרחב הפרמטרים.
- האנטרופיה היא פונקציה עולה של האנרגיה.
- האנטרופיה מתאפסת עבור המצב בו $\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V, N} = 0$ (מצב בו הטמפרטורה היא 0).

מצאו מתוך 10 הפונקציות ברשימה את ה-5 שמתאימות לשמש כפונקצית אנטרופיה. ע עבור פונקציה מתאימה רשמו את כל התכונות שהיא מקיימת. עבור פונקציה שאיננה מתאימה רשמו לפחות סיבה אחת מדוע לא. כמה הבהרות לפני : R, v_0, θ הם פרמטרים חיוביים עם יחידות של $\frac{E}{T}, V, T$ בהתאמה (R הוא קבוע הגזים, $R = k_B N_A$ עבור $N_A \simeq 6 \cdot 10^{23}$). הסימון של שורש או חזקה שברית מתייחס רק לשורש החיובי של הביטוי.

$$S = \left(\frac{R^2}{v_0 \theta}\right)^{1/3} [NVE]^{1/3} \quad (\text{א})$$

$$S = \left(\frac{R}{\theta^2}\right)^{1/3} \left[\frac{NE}{V}\right]^{2/3} \quad (\text{ב})$$

$$S = \left(\frac{R}{\theta}\right)^{1/2} \left[NE + \frac{R\theta V^2}{v_0^2}\right]^{1/2} \quad (\text{ג})$$

$$S = \left(\frac{R^2 \theta}{v_0^3} \right) \frac{V^3}{NE} \quad (\mathfrak{r})$$

$$S = \left(\frac{R^3}{v_0 \theta^2} \right)^{1/5} [N^2 V E^2]^{1/5} \quad (\mathfrak{s})$$

$$S = NR \ln \left(\frac{EV}{N^2 R \theta v_0} \right) \quad (\mathfrak{t})$$

$$S = \left(\frac{R}{\theta} \right)^{1/2} [NE]^{1/2} \exp \left(-\frac{V^2}{2N^2 v_0^2} \right) \quad (\mathfrak{u})$$

$$S = \left(\frac{R}{\theta} \right)^{1/2} [NE]^{1/2} \exp \left(-\frac{EV}{NR \theta v_0} \right) \quad (\mathfrak{v})$$

$$E = \left(\frac{v_0 \theta}{R} \right) \frac{S^2}{V} \exp \left(\frac{S}{NR} \right) \quad (\mathfrak{w})$$

$$E = \left(\frac{R \theta}{v_0} \right) NV \left(1 + \frac{S}{NR} \right) \exp(-S/NR) \quad (\mathfrak{x})$$