

מכניקה סטטיסטית - תרגיל 2

תאריך הגשה: 30/04/2015

1 תערובת גזים אידאליים

בתרגיל זה אנו נחשב את האנטרופיה ומשוואות המצב של גז אידאלי המורכב משני סוגי חלקיקים בעלי מסות שונות. הגז מכיל $N = N_1 + N_2$ חלקיקים, מהם N_1 בעלי מסה m_1 ו- N_2 בעלי מסה m_2 . הגז נמצא במיכל בנפח V . נסמן ב- q_1, \dots, q_{3N_1} את המיקומים של החלקיקים מהסוג הראשון וב- p_1, \dots, p_{3N_1} את התנעים המתאימים. באותו אופן נסמן ב- Q_1, \dots, Q_{3N_2} את המיקומים של החלקיקים מהסוג השני וב- P_1, \dots, P_{3N_2} את התנעים המתאימים.

1. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת.

2. נגדיר משתנים חדשים עבור החלקיקים מהסוג השני, $\bar{P}_i = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} P_i$. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת באמצעות המשתנים p_i, \bar{P}_i .

3. חשבו בעזרת ההמילטוניאן בסעיף 2 את מספר המצבים עם אנרגיה קטנה מ- E בעזרת

$$\Sigma(E) = \frac{1}{h^{3N_1+3N_2} N_1! N_2!} \int_{H < E} \prod_{i=1}^{3N_1} dq_i dp_i \prod_{j=1}^{3N_2} dQ_j dP_j$$

לשם כך עליכם לעבור לאינטגרציה במשתנים \bar{P}_i , בהם האינטגרל ניתן לחישוב ע"י הנוסחה של נפח היפר-כדור. שימו לב שהחלפת המשתנים באינטגרל צריכה להעשות ע"י הכפלה ביעקוביאן. לדוגמה: כאשר רוצים לחשב את האינטגרל $\int dx f(x)$ על ידי החלפת משתנה ל- $y = ax$, יש להשתמש בכך ש- $dx = \frac{1}{a} dy$ ולכן: $\int dx f(x) = \int \frac{dy}{a} f\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a} \int dy f\left(\frac{y}{a}\right)$.

4. חשבו את האנטרופיה של המערכת, $S(E, V, N_1, N_2)$.

5. השתמשו בזהויות התרמודינמיות $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V, N_1, N_2}$ ו- $\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E, N_1, N_2}$ על מנת לקבל את משוואות המצב של המערכת. האם עקרון החלוקה השווה מתקיים?

2 תכונות פונקצית האנטרופיה

מפונקצית האנטרופיה ניתן לחשב את התכונות התרמודינמיות של המערכת. צורתה תלויה בתכונות המערכת ובפרמטרים המאקרוסקופיים שעמם בחרנו לתאר את המערכת. על פונקצית האנטרופיה לקיים מספר תכונות בסיסיות:

• האנטרופיה היא פונקציה אדיטיבית, ולכן גם אקסטנסיבית: $S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(E, V, N)$.

• האנטרופיה גזירה בכל מרחב הפרמטרים.

• האנטרופיה היא פונקציה עולה של האנרגיה: $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V, N} > 0$.

• האנטרופיה מתאפסת עבור המצב בו $T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V, N} = 0$.

מצאו מתוך 10 הפונקציות ברשימה את ה-5 שמתאימות לשמש כפונקצית אנטרופיה. עבור פונקציה מתאימה, הראו שהיא מקיימת את התכונות הנדרשות. עבור פונקציה שאיננה מתאימה, רשמו לפחות סיבה אחת מדוע לא. v_0, θ הם פרמטרים חיוביים עם יחידות של T, V ו- $\frac{E}{T}$ בהתאמה. הסימון של שורש או חזקה שברית מתייחס רק לשורש החיובי של הביטוי.

$$S = \left(\frac{R^2}{v_0 \theta}\right)^{1/3} [NVE]^{1/3} \quad (\alpha)$$

$$S = \left(\frac{R}{\theta^2}\right)^{1/3} \left[\frac{NE}{V}\right]^{2/3} \quad (\text{ב})$$

$$S = \left(\frac{R}{\theta}\right)^{1/2} \left[NE + \frac{R\theta V^2}{v_0^2}\right]^{1/2} \quad (\text{ג})$$

$$S = \left(\frac{R^2\theta}{v_0^3}\right) \frac{V^3}{NE} \quad (\text{ד})$$

$$S = \left(\frac{R^3}{v_0\theta^2}\right)^{1/5} [N^2VE^2]^{1/5} \quad (\text{ה})$$

$$S = NR \ln \left(\frac{EV}{N^2R\theta v_0}\right) \quad (\text{ו})$$

$$S = \left(\frac{R}{\theta}\right)^{1/2} [NE]^{1/2} \exp\left(-\frac{V^2}{2N^2v_0^2}\right) \quad (\text{ז})$$

$$S = \left(\frac{R}{\theta}\right)^{1/2} [NE]^{1/2} \exp\left(-\frac{EV}{NR\theta v_0}\right) \quad (\text{ח})$$

$$E = \left(\frac{v_0\theta}{R}\right) \frac{S^2}{V} \exp\left(\frac{S}{NR}\right) \quad (\text{ט})$$

$$E = \left(\frac{R\theta}{v_0}\right) NV \left(1 + \frac{S}{NR}\right) \exp\left(-\frac{S}{NR}\right) \quad (\text{י})$$

3 תרמודינמיקה של מערכת עם אנטרופיה ידועה

נתונה מערכת המורכבת משתי תת-מערכות, A ו-B, שכל אחת מהן מתוארת ע"י פונקציית האנטרופיה: $S = \left(\frac{R^2}{v_0\theta}\right)^{1/3} [NVE]^{1/3}$. שתי המערכות מופרדות ע"י מחיצה שאינה זזה (לא מעבירה נפח) ואינה מעבירה אנרגיה וחלקיקים. נפח המערכת A הוא $V_A = 9 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, ומספר החלקיקים בה הוא $N_A = 3 \text{ mol}$ (מול היא יחידה למדידת כמות חלקיקים. מול חלקיקים הוא מספר אבוגדרו של חלקיקים). נפח המערכת B הוא $V_B = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, ומספר החלקיקים בה הוא $N_B = 2 \text{ mol}$. האנרגיה הכוללת של המערכת היא 80 J . כמו בשאלה הקודמת, θ , v_0 ו-R הם קבועים חיוביים.

- ציירו את האנטרופיה הכוללת של המערכת כפונקציה של $\frac{E_A}{E}$ (אנרגיית המערכת A חלקי האנרגיה הכוללת).
- אם נאפשר למחיצה להעביר אנרגיה, מה יהיו האנרגיות E_A ו- E_B של תת המערכות?