

# מכניקה סטטיסטית - תרגיל 3

תאריך הגשה : 14.5.2015

## 1 גז אידאלי תחת פוטנציאל מדרגה

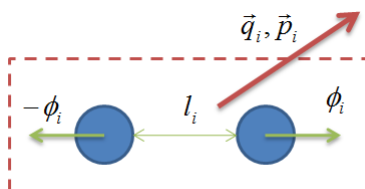
בשיעורים הקודמים עסקנו בבעיה של מספר החלקיקים במחצית מיכל בו נמצא גז אידאלי. ראינו שמאוד לא סביר שמספר זה יסטה באופן משמעותי ממוחצית החלקיקים. כעת נרצה לשלוט במספר החלקיקים הממוצע שבמחצית המיכל ע"י הפעלת פוטנציאל קבוע. נסתכל על גז אידאלי המורכב מ- $N$  חלקיקים בעלי מסה  $m$  ונמצא במיכל מלבני בעל שטח  $A$  וגובה  $L$ . המיכל מצומד לאמבט חום בטמפ'  $T$ . נסמן את התנע של החלקיקים ב- $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$  ואת מיקומם ב- $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N$ . בנוסף לאנרגיה הקינטית, על כל חלקיק פועל פוטנציאל:

$$V(\vec{q}_i) = \begin{cases} \epsilon & 0 \leq z_i \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < z_i \leq L \end{cases}$$

1. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת.
2. חשבו את פונקציית החלוקה של הגז ואת האנרגיה החופשית שלו.
3. חשבו את האנרגיה הפנימית,  $E$ , של הגז.
4. חשבו את מספר החלקיקים הממוצע בחלקו התחתון של המיכל,  $\langle N_d \rangle$ , ע"י גזירת האנרגיה החופשית לפי  $\epsilon$ . כיצד ניתן להסיק את התשובה לסעיף זה מהתשובה של סעיף 3? בנוסח: הוכיחו את הקשר  $\langle N_d \rangle = \frac{\partial F}{\partial \epsilon}$ .
5. הפוטנציאל שהגדרנו יכול לתאר מצב בו המערכת שלנו מתארת שני מיכלים המחוברים ביניהם בצינור דק (מספר החלקיקים בצינור עצמו זניח), כאשר החצי התחתון מונח בגובה נמוך יותר. מה צריך להיות הפרש הגבהים בין שני המיכלים כדי ש- $\langle N_d \rangle = 0.6N$  (המיכלים נמצאים בטמפ' של  $T = 300K$  והגז בהם מורכב ממולקולות חמצן,  $O_2$ )? האם הפרש הגבהים שנדרש ב- $T = 100K$  גדול או קטן יותר?

## 2 גז מולקולרי

בשאלה הקודמת התייחסנו למולקולות האוויר כחלקיקים של גז אידאלי. במציאות רוב מולקולות האוויר מורכבות משני אטומים ולכן בעלות דרגות חופש פנימיות. על מנת להבין את ההשפעה של דרגות החופש הפנימיות על התנהגות הגז נחשוב על גז המורכב מאוסילטורים הרמוניים חד מימדיים (קפיצים). נניח כי הגז מורכב מ- $N$  מולקולות בעלות מסה  $2m$  ונמצא במיכל בעל נפח  $V$  המצומד לאמבט חום בטמפ'  $T$ . נסמן את התנע של המולקולות ב- $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$  ואת מיקומן ב- $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N$ . כל חלקיק מורכב משני אטומים בעלי מסה  $m$  הנמצאים במרחק  $l_i$  ובעלי תנע  $\pm \phi_i$  (ראה שרטוט). נסמן את 'קבוע הקפיץ' של כל מולקולה כזאת ב- $k$ , כך שהאנרגיה הפוטנציאלית של כל מולקולה היא  $\frac{1}{2}kl_i^2$ .



1. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת.
2. חשבו את פונקציית החלוקה של הגז ואת האנרגיה החופשית של הגז. רישמו את האנרגיה החופשית כך שתהיה מורכבת משני איברים שאחד מהם זהה לזה של גז אידאלי. מה מתאר האיבר השני?
3. חשבו את האנרגיה הפנימית,  $E$ , של הגז. האם התוצאה תואמת את חוק החלוקה השווה?
4. חשבו את הלחץ של הגז  $P = -\frac{\partial F}{\partial V}$  ורשמו את משוואת המצב של הגז. האם היא שונה מזו של גז אידאלי?
5. אנו יודעים שהמרחק הממוצע בין אטומי החמצן הוא בערך  $\langle l_i \rangle = 0.36nm = 3.6 \cdot 10^{-10}m$ . חשבו מהו קבוע הקפיץ המתאים למולקולת חמצן לפי מודל פשטני זה ע"י חישוב ערך התצפית של המרחק  $\langle l_i \rangle$ . הניחו  $T = 300K$ .