מכניקה סטטיסטית - תרגיל 4

תאריך הגשה 11/06/2013

1 גז אידאלי תחת פוטנציאל מדרגה בצבר הגרנד קנוני

בתרגיל האחרון עסקנו בגז אידאלי שנמצא תחת פוטנציאל מדרגה. ראינו שבעיה זאת מתארת מצב שבו שני מיכלים מחוברים בינהם בצינורית דקה כאשר אחד המיכלים מונח בגובה נמוך יותר. בשאלה זו ננתח מצב זה באמצעות הצבר הגרנד־קנוני. נתייחס לשני מיכלים כך שבכל אחד נמצא גז אידאלי. לחלקיקים במיכל העליון, שמספרם N_1, יש בנוסף לאנרגיה הקינטית גם אנרגיה פוטנציאלית אחידה (זהה לכל החלקיקים) mgh, בעוד שלחלקיקים במיכל התחתון, שמספרם N_2, יש אנרגיה קינטית בלבד. נסמן $N = N_1 + N_2$

1. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת.
2. חשבו את פונקצית החלוקה הקנונית של הגז כולו (בשני המיכלים יחד) הגז ואת האנרגיה החופשית שלו. רמז : השתמשו בפונקצית הבינום של ניוטון.
3. חשבו את מספר החלקיקים במיכל העליון , N_1, לפי החישוב הקנוני.
4. כעת ננתח את הבעיה בצבר הגרנד קנוני. נתייחס לגזים במיכל העליון והתחתון כל אחד כגז אידאלי גרנד קנוני עם מספר חלקיקים משתנה ופוטנציאל כימי μ_1, μ_2 בהתאמה. חשבו את פונקצית החלוקה הגרנד קנונית של הגזים. רמז : השתמשו בפיתוח טיילור של פונקצית האקספוננט.
5. חשבו את מספר החלקיקים הממוצע בכל מיכל ע"י גזירת פונקצית החלוקה,

$$. \langle N \rangle = z \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial z}$$

6. נרצה שבשווי משקל נוכל לחבר את שני המיכלים ולא יהיה זרם של חלקיקים, ולכן נדרוש $\mu_1 = \mu_2$. השתמשו במשוואה זו בתוצאה של סעיף 5 כדי למצוא את מספר החלקיקים במיכל העליון. האם קיבלתם תוצאה זהה לסעיף 3 ?

2 מעבר פאזה בגז ואן דר ואלס

בתרגיל זה נחשב את נקודת מעבר הפאזה בגז ואן דר ואלס ונראה כיצד הקשר בין נפח ולחץ מתנהגים סביב המעבר. כזכור, משוואת המצב של גז ואן דר ואלס היא

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T \tag{1}$$

כאשר $v = \frac{V}{N}$ הוא הנפח לחלקיק. נרצה למצוא את טמפרטורת המעבר T_c, המוגדרת כטמפרטורה שמעליה ($T > T_c$) הפונקציה $P(v)$ היא מונוטונית ומתחתיה ($T < T_c$) לפונקציה מקסימום ומינימום. בטמפרטורה הקריטית T_c ל$P(v)$ יש נקודת פיתול עבור הנפח v_c וערכה בהתאמה הוא $P_c = P(v_c)$.

בכדי למצוא את נקודת הפיתול אפשר פשוט לדרוש שעבור $T = T_c$ ו $v = v_c$ שתי הנגזרות הראשונות של הפונקצייה $P(v)$ יתאפסו. במקרה של גז ואן דר ואלס המשוואות המתאימות הן ממעלה 3 ו4, ולכן קשות לפתרון (למרות שבשימוש בטריק מסויים אפשר לפתור אותן בקלות). לכן במקום זאת אנו מציעים דרך חלופית שקולה - וכללית יותר - לפתרון:

1. ראשית, כהכנה, כיתבו את פיתוח טיילור של הפונקציה $\frac{1}{(1+x)^2}$ עד לסדר שני (x^2). ניתן להשתמש בכך ש

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O\left(x^3\right)$$

(סכום של סדרה הנדסית). שימו לב שאתם מתחשבים בשתי התרומות לאיבר מסדר שני.

2. בהנתן $T = T_c$ משוואה (1) מגדירה קשר בין P ל v. כדי לפתח את הקשר סביב נקודת הפיתול נגדיר $v = v_c + \delta v$ ו $P = P_c + \delta p$, ונצפה ש $\delta p = O\left(\delta v^3\right)$ (בגלל שזו נקודת פיתול, ולכן האיבר הלינארי והריבועי מתאפסים). הציבו את v ו P הנ"ל במשוואת המצב (1) ופתחו אותה לסדר שני ב δv (ולכן δp לא יופיע). התוצאה אמורה להראות כך

$$A + B\delta v + C\delta v^2 + O\left(\delta v^3\right) = k_B T_c \qquad (2)$$

(עליכם למצוא את A, B ו C)

3. מכיוון ש δv הוא כללי, כל סדר בפיתוח מגדיר משוואה סגורה. למשל, בצד ימין של המשוואה לא מופיע איבר הכופל את δv ואילו בצד שמאל המקדם הוא B, ולכן המשוואה הנובעת מסדר זה היא $B = 0$. כיתבו את שלוש המשוואות הנובעות מפיתוח (2)

4. פתרו את שלוש המשוואות ומצאו את T_c, P_c ו v_c כפונקצייה של a ו b.

5. כתבו במפורש את הפונקצייה $P(v)$. בעזרת אקסל או תוכנה אחרת, יצרו גרפים של P כפונקציה של v עבור הפרמטרים $a = b = 1$ בתחום $v \in [2, 6]$ עבור 2 ערכי טמפרטורה מעל המעבר $(T > T_c)$, 2 ערכי טמפרטורה מתחת למעבר $(T < T_c)$ ועבור נקודת המעבר. כדאי לעבוד עם טמפרטורות החורגות בלא יותר מ10% מT_c (סעיף זה מהווה גם בדיקה מצויינת לתשובה של הסעיף הקודם).