

מכניקה סטטיסטית - תרגיל 4

תאריך הגשה : 28.5.2015

1 מתיחת פולימר חד מימדי

בשאלה זו נפתור בדרך שונה את בעיית המתיחה של פולימר חד מימדי שפתרנו בתרגול. נתון פולימר חד מימדי בטמפרטורה T המורכב מ- N מונומרים זהים שלכל אחד מהם אורך a . כל מונומר יכול לפנות ימינה או שמאלה בהסתברות שווה ללא תלות במצב המונומרים השכנים (אין עלות אנרגטית לכיפוף הפולימר). נסמן ב- L את המרחק בין שני קצוות הפולימר.

1. עבור L נתון, חשבו את אנטרופיית המערכת $S(L)$.

2. כעת מושכים את קצוות הפולימר בכוח f . כתבו את אנרגיית הפולימר כפונקציה של האורך שלו $E(L)$. השתמשו בביטוי זה ובתוצאת הסעיף הקודם על מנת לכתוב את האנרגיה החופשית של הפולימר $F(L)$. כאשר מסירים את האילוץ של L קבוע, מהו אורך הפולימר L בשינוי משקל?

3. מהו היחס בין מספר המונומרים הפונים ימינה למספר המונומרים הפונים שמאלה? מהו היחס בגבולות של טמפרטורה נמוכה ושל טמפרטורה גבוהה?

2 גז אידיאלי תחת פוטנציאל מדרגה בצבר הגרנד קנוני

בתרגיל האחרון עסקנו בגז אידיאלי שנמצא תחת פוטנציאל מדרגה. ראינו שבעיה זו מתארת מצב שבו שני מיכלים מחוברים ביניהם בצינורית דקה כאשר אחד המיכלים מונח בגובה נמוך יותר. בשאלה זו ננתח מצב זה באמצעות הצבר הגרנד-קנוני. נתייחס לשני מיכלים כך שבכל אחד נמצא גז אידיאלי. לחלקיקים במיכל העליון, שמספרם N_1 , יש בנוסף לאנרגיה הקינטית גם אנרגיה פוטנציאלית אחידה (זהה לכל החלקיקים) בעוד שלחלקיקים במיכל התחתון, שמספרם N_2 , יש אנרגיה קינטית בלבד. נסמן $N = N_1 + N_2$. נפח כל אחד מהמיכלים הוא $\frac{V}{2}$.

1. ראשית נפתור את הבעיה בצבר הקנוני (אך בצורת חישוב שונה מאשר בתרגיל הקודם). חשבו את פונקציית החלוקה הקנונית החד חלקיקית עבור כל אחד מהמיכלים לחוד, ובטאו את פונקציית החלוקה הקנונית של הגז בכל מיכל לחוד בעזרת פונקציית החלוקה החד חלקיקית.

2. חשבו את פונקציית החלוקה הקנונית של הגז כולו (בשני המיכלים יחד). הנחיה: זכרו שפונקציית החלוקה של 2 מערכות בלתי תלויות היא מכפלת פונקציית החלוקה של שתי המערכות, ושימו לב שיש לסכום על כל האופציות לחלוקת החלקיקים בין המיכלים. לחישוב הסכום, השתמשו בנוסחת הבינום של ניוטון. האם פונקציית החלוקה שקיבלתם זהה לתוצאה מהתרגיל הקודם בו חיבתם את פונקציית החלוקה של גז במיכל עם פוטנציאל מדרגה?

3. חשבו את מספר החלקיקים במיכל העליון, N_1 , לפי החישוב הקנוני.

4. כעת ננתח את הבעיה בצבר הגרנד קנוני. נתייחס לגזים במיכל העליון והתחתון כל אחד כגז אידיאלי גרנד קנוני עם מספר חלקיקים משתנה ופוטנציאל כימי μ_1, μ_2 בהתאמה. חשבו את פונקציית החלוקה הגרנד קנונית של הגזים. רמז: השתמשו בפיתוח טיילור של פונקציית האקספוננט.

5. חשבו את מספר החלקיקים הממוצע בכל מיכל ע"י גזירת פונקציית החלוקה,

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial z}$$

6. נרצה שבשווי משקל נוכל לחבר את שני המיכלים ולא יהיה זרם של חלקיקים, ולכן נדרוש $\mu_1 = \mu_2$. השתמשו במשוואה זו ובתוצאה של סעיף 5 כדי למצוא את מספר החלקיקים במיכל העליון. האם קיבלתם תוצאה זהה לסעיף 3?

7. בנוסף: חשבו את $\frac{\sigma_{N_1}}{N_1}$ כאשר $\sigma_{N_1} = \sqrt{\text{Var}(N_1)}$ היא סטיית התקן של N_1 .