מכניקה סטטיסטית - תרגיל 6

תאריך הגשה 18/07/2013

1 חלקיקים עם סטטיסטיקת ביניים

בשאלה זו נדון בחלקיקים היפותטיים עם סטטיסטיקת ביניים, בין פרמיונים לבוזונים. מטרת השאלה היא לחזור על הפיתוח של התפלגויות בוזה־איינשטיין ופרמי־דירק על מנת להבין פיתוח זה טוב יותר.

נניח שקיימים חלקיקים עם התכונה הבאה: כל מצב קוונטים יכול להיות מאוכלס לכל היותר על ידי ℓ חלקיקים (כזכור, עבור בוזונים $\ell = \infty$, בעוד שעבור פרמיונים $\ell = 1$).

1. עקבו אחרי הפיתוח מן הכיתה של התפלגויות בוזה־איינשטיין ופרמי־דירק, וחשבו בדרך דומה את האכלוס הממוצע $n(\varepsilon)$ של רמת אנרגיה ε בצבר הגרנד קנוני. היעזרו בנוסחה לסכום של טור הנדסי: $\sum_{k=0}^{\ell} x^k = \frac{1-x^{\ell+1}}{1-x}$. ודאו כי עבור $\ell = 1$ ו-$\ell = \infty$ מתקבלות התוצאות הרצויות.
2. שרטטו באופן סכמטי את $n(\varepsilon)$ בטמפ' $T = 0$, והסבירו בקצרה את התוצאה. חשבו את אנרגיית פרמי עבור גז אידאלי של N חלקיקים מסוג זה הנמצא בתיבה בנפח V. כיצד משתנה אנרגיית פרמי כאשר ℓ גדל?

2 גז בוזונים חד־מימדי ודו־מימדי

1. נתון גז של N בוזונים בעלי מסה m, שנמצאים ב"תיבה" חד־מימדית באורך L ובטמפ' T. כתבו את הביטוי האינטגרלי המקשר בין מספר החלקיקים ל-z (הפוגסיות). הראו שאין התעבות בוז־איינשטיין בגז זה.
2. חזרו על סעיף א' עבור בוזונים שנמצאים ב"תיבה" דו־מימדית בעלת שטח $A = L^2$.

הערה: אם יש צורך ניתן להשתמש בוולפראם אלפא (http://www.wolframalpha.com/) כדי למצוא את הערך של פונקציית גאמה (למשל כדי למצוא את $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, פשוט רישמו $Gamma[3/2]$ בקופסה).

3 פרמיונים עם אנרגיה קינטית לא ריבועית

בכיתה דנתם בגז פרמיונים אידאלי עם אנרגיה קינטית ריבועית בתנע: $\varepsilon(\vec{p}) = |p|^2/2m$. עתה נחקור גז פרמיונים שבו האנרגיה הקינטית איננה ריבוע התנע. מטרת השאלה היא לחזור על המתכון לפתרון בעיות בפיסיקה סטטיסטית קוונטית, ולתרגל כיצד מחשבים את צפיפות המצבים.

נתון גז אידאלי של פרמיונים שחופשיים לנוע בתיבה בנפח $V = L^3$. האנרגיה הקינטית של כל חלקיק ניתנת על ידי $\varepsilon(\vec{p}) = c|p|^\alpha$, כאשר c ו־α הם קבועים. ההמילטוניאן של המערכת הוא אם כן $\mathcal{H} = \sum_i c|p_i|^\alpha$. דוגמה פיסיקלית לגז כזה הוא גז מאוד יחסותי, שמהירות החלקיקים בו קרובה למהירות האור. במקרה זה $\alpha = 1$ ו-c היא מהירות האור. אנו נפתור עבור α כללי.

1. נדון תחילה (לפי המתכון) בבעיה הקוונטית של חלקיק בודד. הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע הקוונטי $\vec{p} \equiv -i\hbar\vec{\nabla}$ הן כידוע $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$. הראו שאלו גם הפונקציות העצמיות של ההמילטוניאן של חלקיק בודד במקרה שלנו, ומצאו את ערכי האנרגיה המתאימים. הניחו לצורך פשטות תנאי שפה מחזוריים עבור פונקציית הגל (כלומר, $\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z)$ וכנ"ל בכיוון y ו-z).
2. חשבו את צפיפות המצבים $g(\varepsilon)$ וכתבו את הביטוי האינטגרלי עבור מספר החלקיקים N, האנרגיה הפנימית E, והלחץ P כפונקציה של הנפח, הפוטנציאל הכימי והטמפרטורה. אין צורך לחשב את האינטגרלים.
3. בעזרת אינטגרציה בחלקים, הראו שמתקיים הקשר $E = \gamma PV$ כאשר γ הוא קבוע שתלוי רק ב-α, ומצאו את γ.
4. בטמפרטורה אפס ניתן להעריך את האינטגרלים שקיבלתם בסעיף ב' אנליטית. עבור $T = 0$ מצאו את מספר החלקיקים $N(\mu, V)$ וממנו חשבו את אנרגיית פרמי $\varepsilon_F(N, V)$. חשבו גם את האנרגיה הפנימית והלחץ בטמפרטורה אפס כפונקציה של ε_F.