מכניקה סטטיסטית - תרגיל 6

תאריך הגשה : 9.7.2015

1 חלקיקים עם סטטיסטיקת ביניים

בשאלה זו נדון בחלקיקים היפותטיים עם סטטיסטיקת ביניים, בין פרמיונים לבוזונים. מטרת השאלה היא לחזור על הפיתוח של התפלגויות בוזה־איינשטיין ופרמי־דירק על מנת להבין פיתוח זה טוב יותר.

נניח שקיימים חלקיקים עם התכונה הבאה: כל מצב קוונטים יכול להיות מאוכלס לכל היותר על ידי ℓ חלקיקים (כזכור, עבור בוזונים $\ell = \infty$, בעוד שעבור פרמיונים $\ell = 1$).

1. עקבו אחרי הפיתוח מן הכיתה של התפלגויות בוזה־איינשטיין ופרמי־דירק, וחשבו בדרך דומה את האכלוס הממוצע $n(\varepsilon)$ של רמת אנרגיה ε בצבר הגרנד קנוני. היעזרו בנוסחה לסכום של סדרה הנדסית: $\sum_{k=0}^{\ell} x^k = \frac{1-x^{\ell+1}}{1-x}$. ודאו כי עבור $\ell = 1$ ו-$\ell = \infty$ מתקבלות התוצאות הרצויות.

2. שרטטו באופן סכמטי את $n(\varepsilon)$ בטמפ' $T = 0$, והסבירו בקצרה את התוצאה. חשבו את אנרגיית פרמי עבור גז אידיאלי של N חלקיקים לא יחסותיים (עם יחס דיספרסיה $\epsilon = \frac{|p|^2}{2m}$) מסוג זה, הנמצא בתיבה בנפח V (בשלושה מימדים). כיצד משתנה אנרגיית פרמי כאשר ℓ גדל?

2 פרמיונים עם אנרגיה קינטית לא ריבועית

בכיתה דנתם בגז פרמיונים אידאלי עם אנרגיה קינטית ריבועית בתנע: $\varepsilon(\vec{p}) = \frac{|p|^2}{2m}$. עתה נחקור גז פרמיונים שבו האנרגיה הקינטית איננה ריבוע התנע. מטרת השאלה היא לחזור על המתכון לפתרון בעיות בפיסיקה סטטיסטית קוונטית, ולתרגל כיצד מחשבים את צפיפות המצבים.

נתון גז אידאלי של פרמיונים שחופשיים לנוע בתיבה בנפח $V = L^3$. האנרגיה הקינטית של כל חלקיק ניתנת על ידי $\varepsilon(\vec{p}) = c|p|^\alpha$, כאשר c ו־α הם קבועים. ההמילטוניאן של המערכת הוא אם כן $\mathcal{H} = \sum_i c|p_i|^\alpha$. דוגמאות לגז כזה: בכיתה פתרנו גז לא יחסותי עם $\alpha = 2$ ו־$c = \frac{1}{2m}$, דוגמא אחרת היא גז אולטרה יחסותי, שמהירות החלקיקים בו קרובה למהירות האור. במקרה זה $\alpha = 1$ ו־c היא מהירות האור. אנו נפתור עבור α ו־c כלליים.

1. נדון תחילה בבעיה הקוונטית של חלקיק בודד. הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע הקוונטי $\vec{p} \equiv -i\hbar\vec{\nabla}$ הן כידוע $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$. הראו שאלו גם הפונקציות העצמיות של ההמילטוניאן של חלקיק בודד במקרה שלנו, ומצאו את ערכי האנרגיה המתאימים. הניחו לצורך פשטות תנאי שפה מחזוריים עבור פונקציית הגל (כלומר, $\psi(0,y,z) = \psi(L,y,z)$ וכנ"ל בכיוון y ו-z).

2. חשבו את צפיפות המצבים $g(\varepsilon)$ וכתבו את הביטוי האינטגרלי עבור מספר החלקיקים N, האנרגיה הפנימית E, והלחץ P כפונקציה של הנפח, הפוטנציאל הכימי והטמפרטורה. אין צורך לחשב את האינטגרלים.

3. בעזרת אינטגרציה בחלקים, הראו שמתקיים הקשר $E = \gamma PV$ כאשר γ הוא קבוע שתלוי רק ב-α, ומצאו את γ.

4. בטמפרטורה אפס ניתן להעריך את האינטגרלים שקיבלתם בסעיף ב' אנליטית. עבור $T = 0$ מצאו את מספר החלקיקים $N(\mu, V)$ וממנו חשבו את אנרגיית פרמי $\varepsilon_F(N,V)$. חשבו גם את האנרגיה הפנימית והלחץ בטמפרטורה אפס כפונקציה של ε_F.

3 גז בוזונים: הגבול הקלאסי

1. מצאו את התיקון הקוונטי למשוואת המצב הקלאסית הקושרת את הלחץ והטמפרטורה של גז אידיאלי של N בוזונים בעלי מסה $m \neq 0$ בתיבה בנפח V ובטמפ' T. חשבו את הביטוי עד סדר **ראשון** ב-$n\lambda_T^3$, כאשר $n = N/V$ היא צפיפות החלקיקים. במילים אחרות, הראו ש-

$$PV = Nk_BT\Big[1 + a_1 n\lambda_T^3 + O\big((n\lambda_T^3)^2\big)\Big]$$

וחשבו את המקדם a_1. האם הלחץ של גז בוזונים שאיננו מנוון (כלומר, כאשר $n\lambda_T^3 \ll 1$) גדול או קטן מזה של גז קלאסי באותה טמפ' וצפיפות? השוו עם משוואת המצב של גז פרמיונים לא מנוון והסבירו באופן איכותי את ההבדל בין שתי התוצאות.

2. מצאו את התיקון הקוונטי למשוואת המצב הקלאסית עבור האנרגיה של הגז. חשבו את הביטוי עד סדר **ראשון** ב-$n\lambda_T^3$. במילים אחרות, הראו ש-

$$E = \frac{3}{2}Nk_BT\Big[1 + b_1 n\lambda_T^3 + O\big((n\lambda_T^3)^2\big)\Big]$$

וחשבו את המקדם b_1. חשבו גם את קיבול החום עד סדר ראשון. האם קיבול החום גדול או קטן מזה של גז קלאסי?