דף נוסחאות במכניקה סטטיסטית

1 צבר מיקרו־קאנוני

- **אנטרופיה של מערכת**

$$S(E) = k_B \ln \Gamma(E) \approx k_B \ln \Sigma(E),$$

כאשר $\Gamma(E)$ הוא מספר המצבים באנרגיה E ו־$\Sigma(E)$ באנרגיה נמוכה מ־E. ניתן לקשר בין שני הפונקציות הללו כך,

$$\omega(E) \equiv \frac{d\Sigma(E)}{dE} \qquad \Gamma(E) = \omega(E)\Delta,$$

כאשר Δהוא פרמטר שמגדיר שכבת אנרגיה קטנה.

- עבור **גז אידאלי** של Nחלקיקים עם מסה m בנפח Vמספר המצבים ניתן לחישוב כ־

$$\Sigma(E,V,N) = \frac{1}{N!h^N} \int\limits_{H(\mathbf{q},\mathbf{p})\leq E} d^{3N}p d^{3N}q$$

- מהחישוב נקבל את **האנטרופיה של גז אידאלי:**

$$S(E,V,N) = Nk_B \ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi mE}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2}Nk_B$$

- **הנגזרות של האנטרופיה**

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

- מהנגזרות ניתן להגדיר את **השדות השונים במערכת (טמפ', לחץ ופוט' כימי):**

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} \qquad \frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} \qquad \frac{\mu}{T} = -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,V}$$

2 צבר קאנוני

- **פונקציות החלוקה הקאנונית:**

$$Z(\beta) = \sum_C e^{-\beta E(C)}$$

כאשר $\beta = 1/k_BT$ והסכום הוא על כל המצבים של המערכת. ההסתברות לכל מצב היא

$$P(C) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E(C)}$$

- **אנרגיה חופשית:**

$$F(\beta) = -k_BT \ln Z(\beta)$$

- **אנרגיה ממוצעת** בטמפרטורה נתונה:

$$\bar{E}(\beta) = \sum_C E(C) \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E(C)} = -\frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial \beta}$$

- **פונקצית החלוקה הקאנונית של גז אידאלי:**

$$F(T,V,N) = NV\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3/2} = NV\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} = \frac{NV}{\lambda_T^3}.$$

כאשר $\lambda_T \equiv \sqrt{h^2/2\pi m k_B T}$ נקרא אורך הגל התרמי.

- **הנגזרות של האנרגיה החופשית**

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN$$

- מהנגזרות ניתן להגדיר את **השדות השונים במערכת (טמפ', לחץ ופוט' כימי)**:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} \qquad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} \qquad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$$

3 צבר גראנד־קאנוני

- **פונקציות החלוקה הגראנד־קאנונית:**

$$\mathcal{L}(\beta,z) = \sum_C z^{N(C)} e^{-\beta E(C)}$$

כאשר $\beta = 1/k_B T$, zהיא הפוגסיות שמוגדרת מתוך הפוטנציאל הכימי כ-$z = e^{\beta\mu}$. ההסתברות לכל מצב היא

$$P(C) = \frac{1}{\mathcal{L}(\beta,z)} z^{N(C)} e^{-\beta E(C)}$$

- **לחץ בצבר הגרנד־קנוני**

$$PV = k_B T \ln \mathcal{L}(\beta,z)$$

- **מספר חלקיקים ממוצע** בטמפרטורה ופוטנציאל כימי נתונים:

$$\bar{N}(\beta,z) = \sum_C N(C) \frac{1}{\mathcal{L}(\beta,z)} z^{N(C)} e^{-\beta E(C)} = z\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\beta,z)}{\partial z}$$

- **אנרגיה ממוצעת** בטמפרטורה ופוטנציאל כימי נתונים:

$$\bar{E}(\beta,z) = -\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\beta,z)}{\partial \beta} + \mu \bar{N}(\beta,z)$$

4 גזים קוונטים

- פונקצית החלוקה:

$$\text{Fermions}: \qquad \mathcal{Z} = \prod_\epsilon (1 + z e^{-\beta\epsilon})$$

$$\text{Bosons}: \qquad \mathcal{Z} = \prod_\epsilon \frac{1}{1 - z e^{-\beta\epsilon}}$$

- **התפלגות פרמי־דיראק ובוזה איינשטיין** (מספר חלקיקים ברמת אנרגיה בצבר גרנד קנוני):

$$\text{Fermions :} \qquad n(\epsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}+1}$$
$$\text{Bosons :} \qquad n(\epsilon) = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1}$$

- **צפיפות מצבי אנרגיה** (מספר מצבים באנרגיה מסוימת של חלקיק חופשי עם מסה m בקופסא בגודל L^d **ללא ספין**):

$$\text{One dimension: } g(\epsilon) = \frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}$$
$$\text{Two dimensions: } g(\epsilon) = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}$$
$$\text{Three dimensions: } g(\epsilon) = \frac{L^3(2\pi)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\sqrt{\epsilon}$$

- **מספר חלקיקים ממוצע:**

$$\bar{N} = z\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial z} = \int d\epsilon g(\epsilon) n(\epsilon)$$

- **אנרגיה ממוצעת :**

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \frac{\ln z}{\beta}\bar{N} = \int d\epsilon g(\epsilon) n(\epsilon)\epsilon$$

- **מציאת אנרגית פרמי:**

$$N = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon)$$

- **תנאי לעיבוי בוזה איינשטיין :** קיום $T \neq 0$שעבורו מספר החלקיקים כאשר $z=1$ מתכנס

$$\bar{N} = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon)\frac{1}{e^{\beta\epsilon}-1}$$

מעבר לטמפ' זו, אם מספר החלקיקים במערכת יהיה גדול ממספר זה, עודף החלקיקים יתרכז ברמת הייסוד.

5 עזרים מתמטיים

- נפח כדור N־מימדי ברדיוס R:

$$V_N(R) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)}R^N \approx \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!}R^N$$

- קירוב סטירלינג:

$$\ln(N!) \approx N\ln N - N$$

- אינטרגל גאוסיאני:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$$

- סדרה הנדסית

$$\sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n-1} = a_1\frac{1-q^N}{1-q}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{for} \quad q<1$$